

# Funktionen

## Definition

Eine Funktion  $f$  ist eine eindeutige Zuordnung zwischen einer unabhängigen **Definitionsmenge**  $D$  und einer von dieser abhängigen **Wertemenge**  $W$ . Für jeden zulässigen, unabhängigen Eingabewert  $x$  legt eine Funktion  $f(x)$  eindeutig einen von  $x$  abhängigen Funktions- bzw. Ausgabewert  $y$  fest.

Für eine Funktion  $f(x)$  gilt somit:

**Unabhängige Variable** ...  $x$

**Abhängige Variable** ...  $y$  bzw.  $f(x)$

**Definitionsmenge**  $D_f$  ... Menge aller zulässigen, unabhängigen Eingabewerte  $x$

**Wertemenge**  $W_f$  ... Menge aller auftretenden, von  $x$  bzw.  $D_f$  abhängigen Funktionswerte  $y$

**Funktionsgleichung** ...

$$y = f(x)$$

oder

$f : x \rightarrow y$  ( $f$  bildet Werte der Menge der  $x$  auf die Menge der  $y$  ab).

## Darstellungsweisen

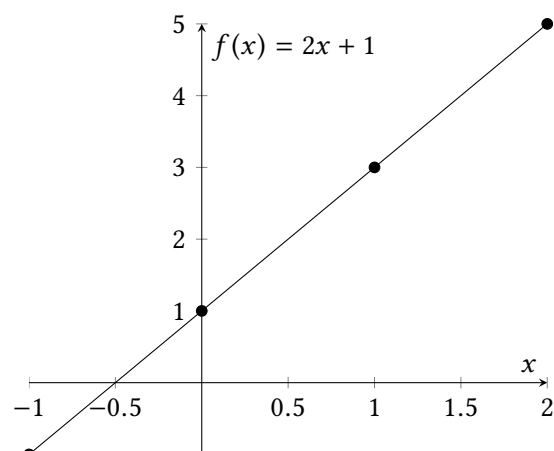
Eine Funktion  $f(x)$  kann als Funktionsterm bzw. -gleichung, als Wertetabelle oder als Funktionsgraph dargestellt werden. Beispiel:

**Funktionsterm** ...  $2x + 1$

**Funktionsgleichung** ...  $f(x) = 2x + 1$

**Wertetabelle** ...

$x$	$y$
-1	-1
0	1
1	3
2	5



**Funktionsgraph**

## Wichtige Begriffe

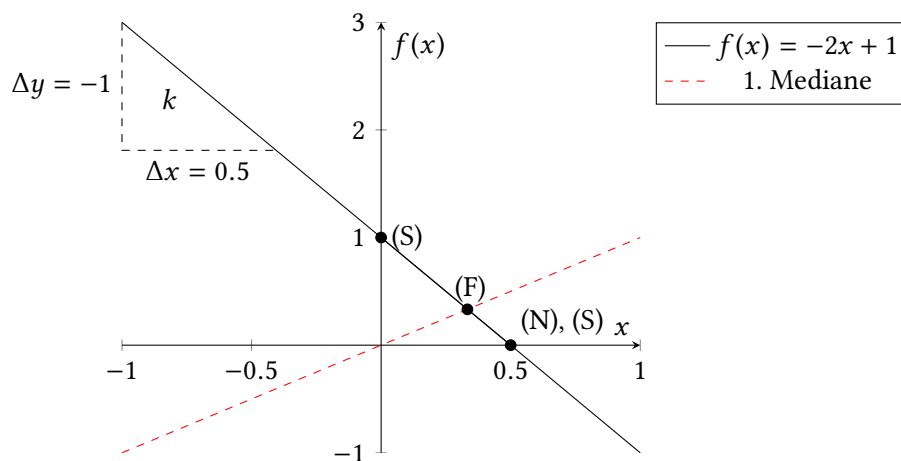
Vor der Beschreibung bzw. Diskussion wichtiger Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen sollte angemerkt werden, worin der Unterschied zwischen einer **Stelle** und einem **Punkt** einer Funktion liegt. Mit einer *Stelle* ist immer nur der Wert der Definitionsmenge bzw. die unabhängige Variable – also  $x$  – gemeint. Ein *Punkt* bezeichnet dagegen ein Koordinatentupel bestehend aus der unabhängigen und abhängigen Variable – also  $(x, y)$ .

**Nullstelle** (N) ... jene Stelle einer Funktion, an welcher gilt  $f(x) = 0 \rightarrow$  die Funktion schneidet die  $x$ -Achse

**Spurpunkt** (S) ... jener Punkt einer Funktion, an welcher sie eine der beiden Achsen schneidet ( $x$ - oder  $y$ -Achse)

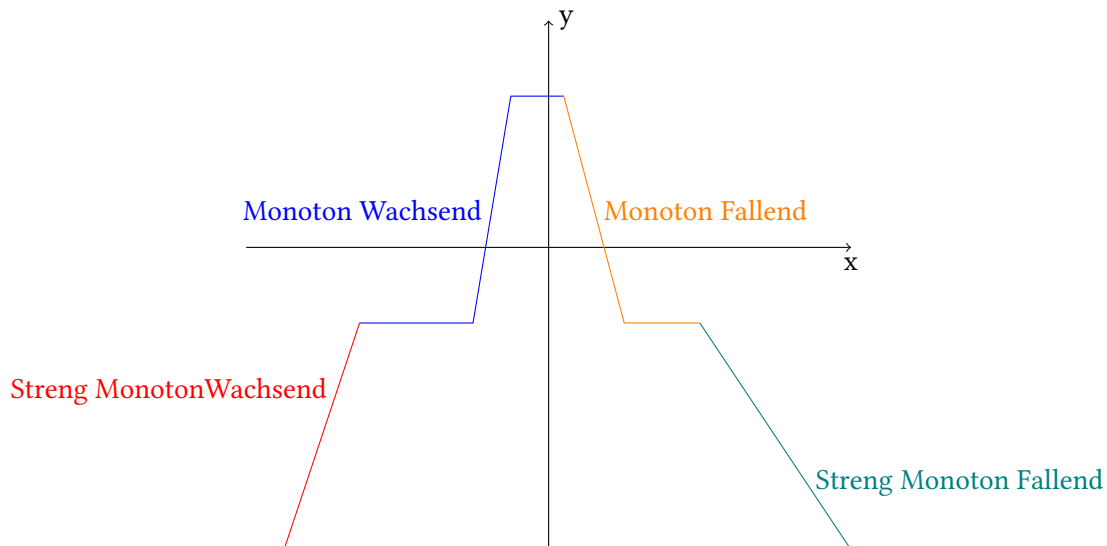
**Fixpunkt** (F) ... jener Punkt einer Funktion, an welcher gilt  $f(x) = x \rightarrow$  die Funktion schneidet die 1. *Mediane*

**Steigung** ... jener Wert  $k$ , um welchen sich eine Funktion pro  $x$ -Wert auf der  $y$ -Achse verändert. Berechenbar als  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  für jedes beliebige Intervall.  $k$  ist somit der *Differenzenquotient*  $\rightarrow$  die durchschnittliche Veränderung der Funktion pro  $x$ -Wert in diesem Intervall.



**Monotonie** ... Beschreibung des Steigungsverhalten einer Funktion. Eine Funktion  $f(x)$  ist in einem beliebigen Intervall  $[x_1; x_2]$

- **monoton wachsend**, wenn der Funktionswert jedes  $x$ -Wertes in diesem Intervall *nicht kleiner* ist als jener des vorhergehenden  $x$ -Wertes:  $f(x) \geq f(x - 1)$  für  $x \in [x_1; x_2]$
- **monoton fallend**, wenn der Funktionswert jedes  $x$ -Wertes in diesem Intervall *nicht größer* ist als jener des vorhergehenden  $x$ -Wertes:  $f(x) \leq f(x - 1)$  für  $x \in [x_1; x_2]$
- **streng monoton wachsend**, wenn der Funktionswert jedes  $x$ -Wertes in diesem Intervall *stets größer* ist als jener des vorhergehenden  $x$ -Wertes:  $f(x) > f(x - 1)$  für  $x \in [x_1; x_2]$
- **streng monoton fallend**, wenn der Funktionswert jedes  $x$ -Wertes in diesem Intervall *stets kleiner* ist als jener des vorhergehenden  $x$ -Wertes:  $f(x) < f(x - 1)$  für  $x \in [x_1; x_2]$

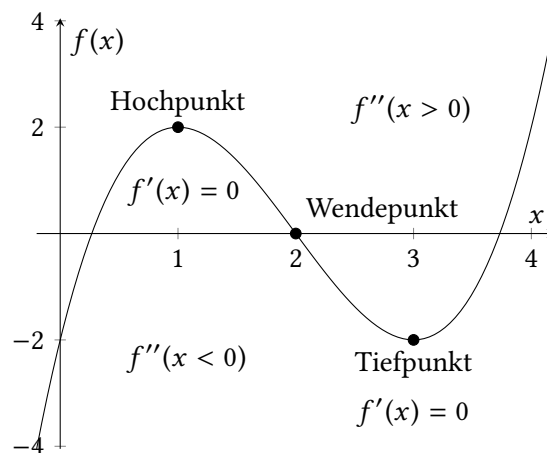


**Extrempunkt** ... jener Punkt einer Funktion, an welchem sich das Monotonieverhalten verändert. Ein Extrempunkt kann entweder ein Hochpunkt (*Maximum*) oder ein Tiefpunkt (*Minimum*) sein. An einer Extremstelle gilt für die Steigung der Funktion  $k = 0$ . Daher ist die *Tangente* an diesen Punkt waagrecht.

**Krümmung** ... die Veränderung der Steigung einer Funktion  $f(x)$  in einem bestimmten Intervall  $[x_1; x_2]$ . Es gibt zwei Möglichkeiten:

- **positiv bzw. linksgekrümmt**, wenn die Steigung der Funktion in dem Intervall  $[x_1; x_2]$  zunehmend ansteigt:  $f'(x) > f'(x - 1)$ , für  $x \in [x_1; x_2]$ , für die zweite Ableitung gilt:  $f''(x) > 0$
- **negativ bzw. rechtsgekrümmt**, wenn die Steigung der Funktion in dem Intervall  $[x_1; x_2]$  zunehmend fällt:  $f'(x) < f'(x - 1)$ , für  $x \in [x_1; x_2]$ , für die zweite Ableitung gilt:  $f''(x) < 0$

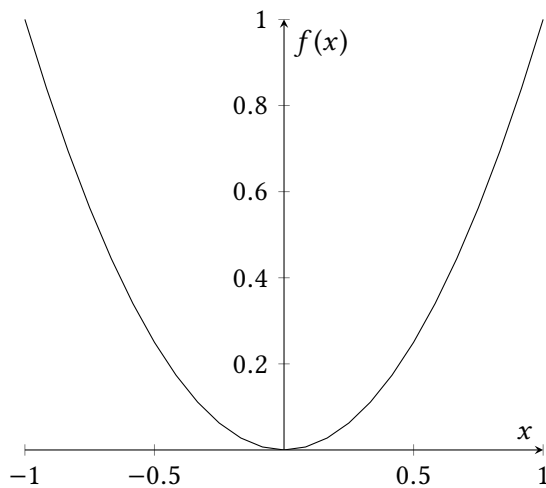
**Wendepunkt** ... jener Punkt einer Funktion, in welchem sich ihre Krümmung verändert. In dem Punkt selbst ist die Krümmung der Funktion gleich null:  $f''(x_W) = 0$



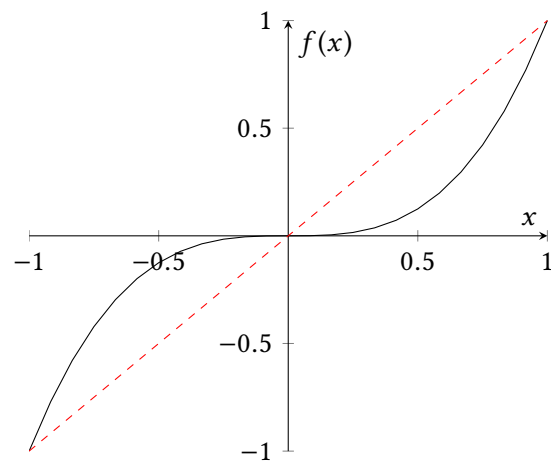
**Sattel- bzw. Terrassenpunkt** ... jener Punkt einer Funktion, welcher sowohl Wende- als auch Extrempunkt ist, sodass gilt  $f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$

**Symmetrie** ... einer Funktion beschreibt ihr Symmetrieverhalten, also ob und wie sich Variablen untereinander austauschen lassen. Eine Funktion  $f(x)$  kann folgendes Symmetrieverhalten aufweisen:

- **gerade bzw. achsensymmetrisch**, wenn die Funktion an der  $y$ -Achse gespiegelt ist sodass gilt  $f(-x) = f(x)$
- **ungerade bzw. punktsymmetrisch**, wenn die Funktion in jedem Punkt gespiegelt ist, sodass gilt  $f(-x) = -f(x)$

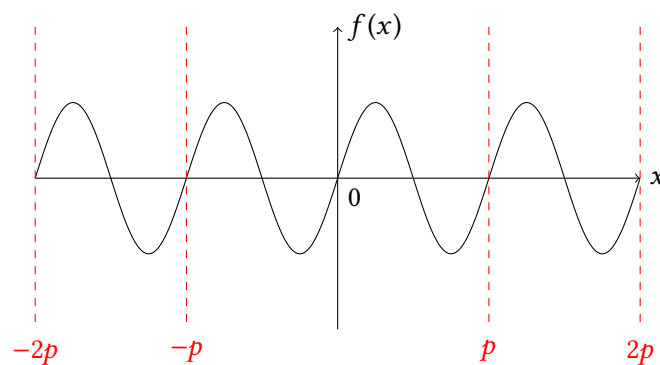


Achsensymmetrisch

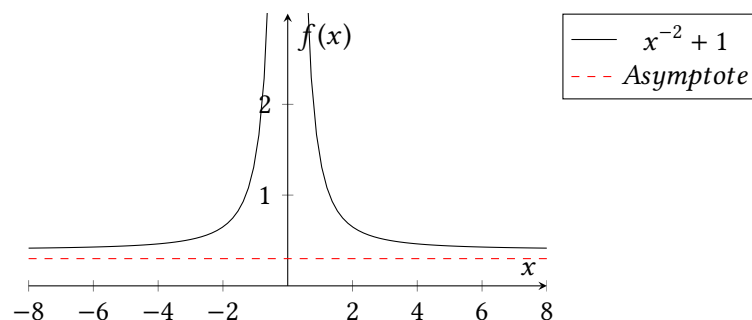


Punktsymmetrisch

**Periodizität** ... eine Funktion  $f(x)$  ist periodisch mit einer Periode  $p$ , wenn sich die Werte der Funktion im Abstand  $p$  stets wiederholen, sodass gilt:  $f(x) = f(x + p)$



**Asymptote** ... jene Gerade  $a$ , die einer Funktion  $f$  beliebig nahe kommt, ohne sie jemals zu berühren.



## Funktionstypen

Generell kann eine Funktion in einer von zwei Formen angeschrieben sein, entweder in der **Normal bzw. Hauptform** oder in der **Allgemeinen Form**. Diese Formen unterscheiden sich je nach Funktionstyp.

**Abszisse** ... horizontale Achse eines Funktionsgraphen ( $x$ -Achse)

**Ordinate** ... vertikale Achse eines Funktionsgraphen ( $y$ -Achse)

## Lineare Funktionen

Eine lineare Funktion  $f(x)$  ist eine linear wachsende oder fallende Funktion, mit einer festgelegten, konstanten Steigung  $k$ , sodass gilt:  $f(x + 1) = f(x) + k$ . Ebenso kann eine lineare Funktion einen Abstand vom Ursprung  $d$  haben, um welchen alle Werte auf der Ordinate verschoben sind.

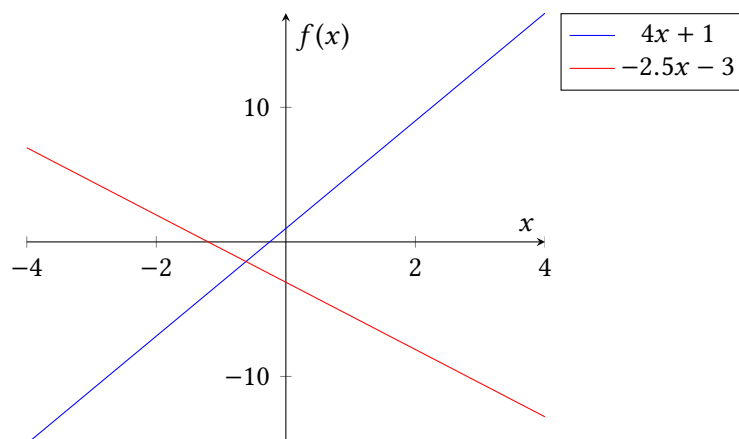
**Hauptform** ...  $y = kx + d$

**Allgemeine Form** ...  $ax + by + c = 0$

**Homogene Lineare Funktion** ... eine Lineare Funktion  $y = kx \mid k \neq 0$  ohne Abstand vom Ursprung  $d$ , wobei zwischen  $y$ - und  $x$ -Werten ein direktes Verhältnis (direkte Proportionalität) besteht, sodass jeder Wert  $f(x)$  den Faktor  $k$  mit dem  $x$ -Wert gemeinsam hat.

**Inhomogene Lineare Funktion** ... eine Lineare Funktion  $y = kx + d \mid k \neq 0 \wedge d \neq 0$  ohne direktem Verhältnis zwischen  $x$ - und  $y$ -Werten (indirekte Proportionalität).

Eine Lineare Funktion hat ihre Spurpunkte in  $(0|d)$  sowie  $(-\frac{d}{k}|0)$ .

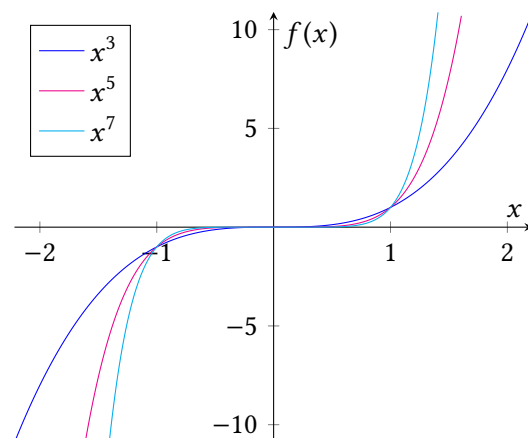
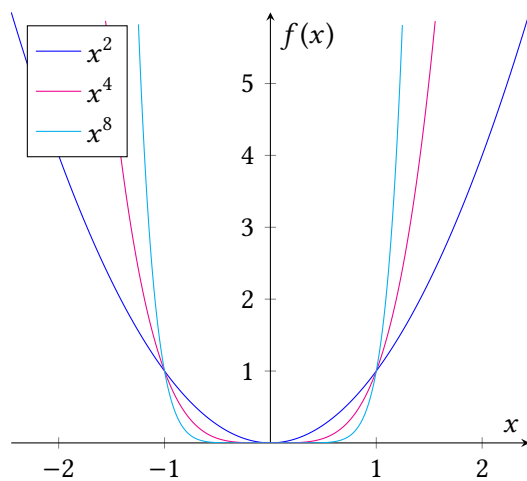


## Potenzfunktionen

Eine Potenzfunktion  $f(x)$  wächst oder fällt nicht-linear. Auch eine Potenzfunktion kann einen Abstand vom Ursprung  $b$  haben, um welchen alle Funktionswerte auf der Ordinate verschoben sind. Je nachdem ob die Potenz  $z$  gerade oder ungerade, positiv oder negativ ist, hat der Graph einer Potenzfunktion verschiedene Formen, welche entweder punkt- oder achsensymmetrisch sind. Der Exponent  $z$  einer Potenzfunktion muss  $\in \mathbb{Z}$  sein. Gilt  $z \in \mathbb{R}$ , handelt es sich um eine *Wurzelfunktion*, da jede rationale Potenz  $z$  einer Zahl  $x$  als Bruch  $x^{\frac{m}{n}}$  und somit als Wurzel  $\sqrt[n]{x^m}$  dargestellt werden kann.

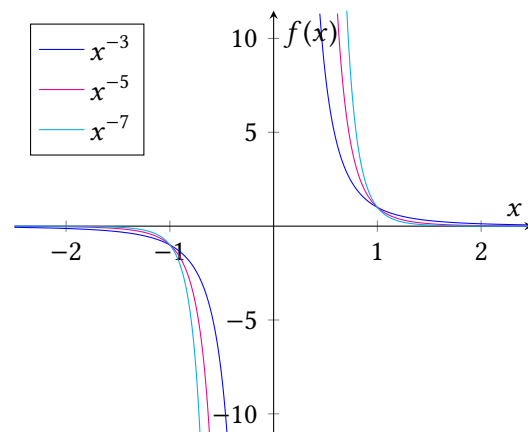
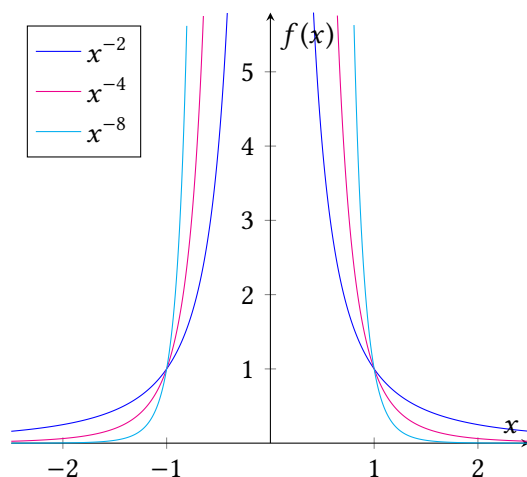
**Hauptform** ...  $x^z + px + q = 0$

**Allgemeine Form** ...  $ax^z + bx + c = 0$



$z$  gerade und positiv  $\Rightarrow f(x)$  achsensymmetrisch und  $> 0$

$z$  ungerade und positiv  $\Rightarrow f(x)$  punktsymmetrisch



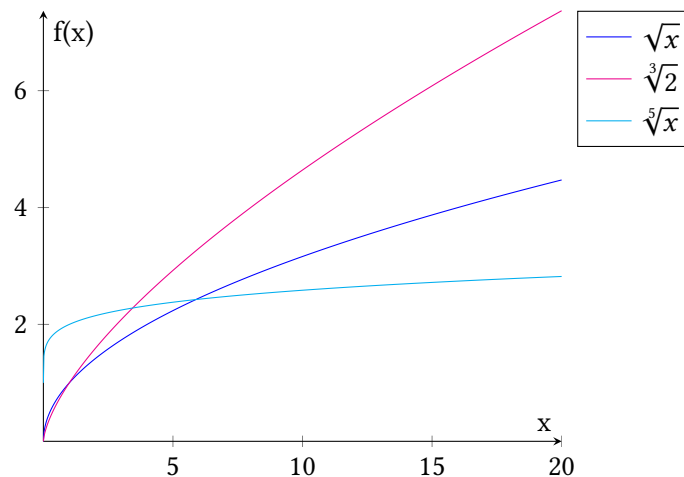
$z$  gerade und negativ  $\Rightarrow f(x)$  achsensymmetrisch und  $> 0$

$z$  ungerade und negativ  $\Rightarrow f(x)$  punktsymmetrisch

## Wurzelfunktion

Eine Wurzelfunktion ist eine besondere Form der Potenzfunktion, da eine rationale Potenz  $z$  einer Zahl  $x$  als Bruch  $x^{\frac{m}{n}}$  und somit als Wurzel  $\sqrt[n]{x^m}$  dargestellt werden kann. Wurzelfunktionen sind daher ebenso nicht-linear wachsend oder fallend. Gilt für die Definitionsmenge  $D_f$  einer Wurzelfunktion  $f(x)$ , dass sie  $\in \mathbb{R}$ , so ist die Wurzelfunktion nur für positive Werte der Definitionsmenge ( $x$ -Werte) definiert, also  $\mathbb{R}^+$ .

**Hauptform** ...  $ax^{\frac{m}{n}} + b = a\sqrt[n]{x^m} + b = 0$



## Polynomfunktion

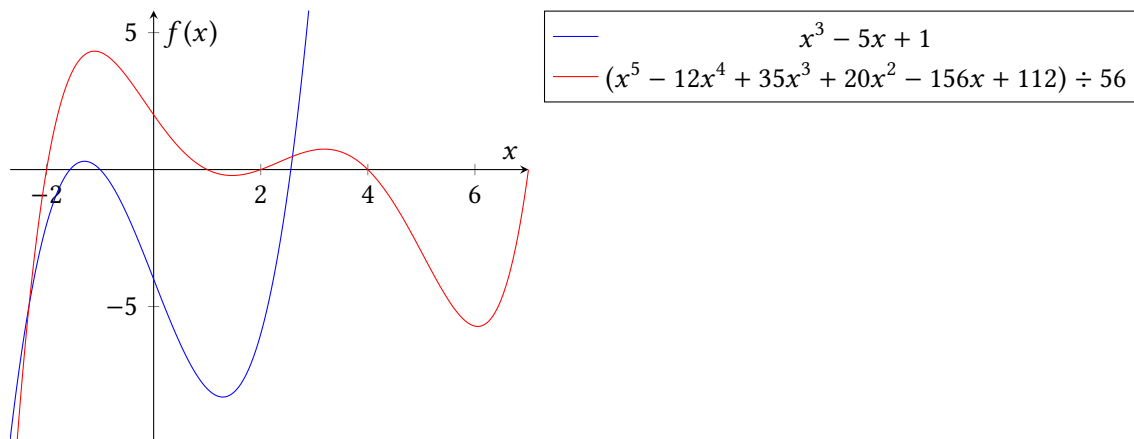
Eine Polynomfunktion ist eine Potenzfunktion bestehend aus mehreren Termen, in denen jeweils die unabhängige Variable  $x$  mit verschiedenen Potenzen vorkommt. Sie kann einen sehr komplexen Verlauf haben und ihre Funktionswerte können durch einen Abstand vom Ursprung auf der Ordinate verschoben werden. Spricht man von einer Polynomfunktion  $n$ -ten Grades, so ist die höchste vorkommende Potenz der Polynome  $n$ .

**Allgemeine Form** ...  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$

Hierbei ist der erste Term  $a_0 x^0$  der Abstand vom Ursprung, da  $x^0 = 1$  und somit nur  $a_0$  als Koeffizient ohne Variable übrig bleibt.

Für eine Polynomfunktion  $n$ -ten Grades gibt es folgende Zusammenhänge:

- Anzahl der Nullstellen (N) =  $\begin{cases} 0 \leq N \leq n, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 1 \leq N \leq n, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$
- Anzahl der Extremstellen (E) =  $1 \leq E < n$
- Anzahl der Wendepunkte (W) =  $0 \leq W < n - 1$



Polynomfunktionen 3. und 5. Grades

## Exponentialfunktion

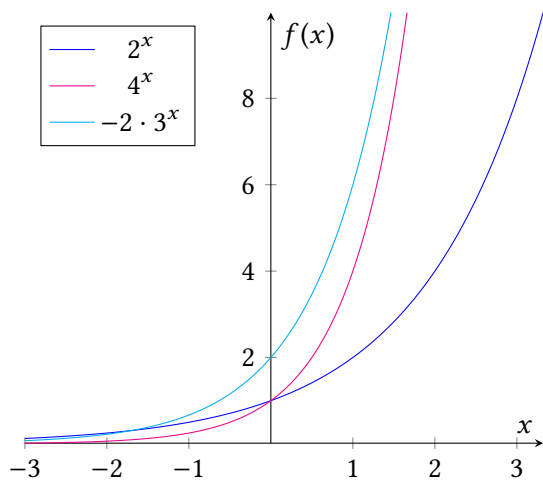
Die Funktionswerte einer Exponentialfunktion wachsen oder fallen exponentiell. Daher gilt für eine Exponentialfunktion  $f(x) = ab^x$ , dass  $f(x+1) = f(x) \cdot b$ . Oftmals ist die Basis  $b$  gleich der Euler'schen Zahl  $e$ , was vor allem bei Wachstums- und Zerfallsmodellen von Bedeutung ist.

### Allgemeine Form ... $ab^x$

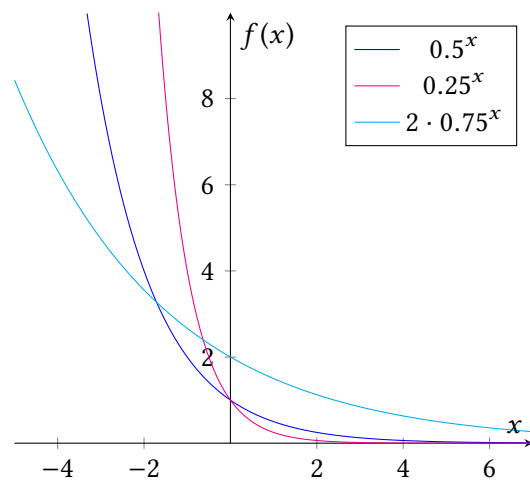
Hierbei ist  $b$  die Steigung der Funktion. Der Koeffizient  $a$  ist der Abstand vom Ursprung, da für  $x = 0$  anfänglich  $b^0 = 1$  gilt, somit ist der Abstand vom Ursprung  $a \cdot 1$ . Gilt für eine Exponentialfunktion  $a = 1$ , so hat sie ihren Abstand vom Ursprung bei  $y = 1$ , da  $1 \cdot b^0 = 1$ .

Gilt  $0 \leq b < 1$ , fällt die Funktion, da eine Zahl zwischen 0 und 1 mit sich selbst multipliziert noch kleiner wird. Zwischen  $x = 0$  und  $x = 1$  hat eine solche fallende Exponentialfunktion hohe Funktionswerte, da die rationalen  $x$ -Werte zwischen 0 und 1 als Exponenten gleich einer Wurzel sind. Zieht man aus einem  $b$ , für welches gilt  $0 \leq b < 1$ , eine Wurzel, vergrößert sich der Wert.

Ist  $b > 1$ , ergeben niedrige  $x$ -Werte niedrige Funktionswerte, da die Wurzel gezogen wird.



Exponentialfunktionen mit Basen  $b$  größer 1



Exponentialfunktionen mit Basen  $b$  kleiner 1



Für Modellierungen von Wachstum und Zerfall biologischer oder sonstiger natürlicher Vorgänge wird oft die Euler'sche Zahl  $e$  als Basis verwendet. Die Funktionsgleichung einer Wachstums- oder Zerfallsfunktion beinhaltet neben der unabhängigen Variable  $t$  (= Zeit) noch eine Wachstums- bzw. Zerfallskonstante  $\lambda$  als Exponent der Basis  $e$ . Der Koeffizient  $a$  ist gleich der ursprünglichen Menge des Wachstums- / Zerfallsprozesses und wird  $N_0$  bezeichnet.

**Wachstums- bzw. Zerfallsfunktionsgleichung** ...  $N(t) = N_0 = e^{\lambda \cdot t}$

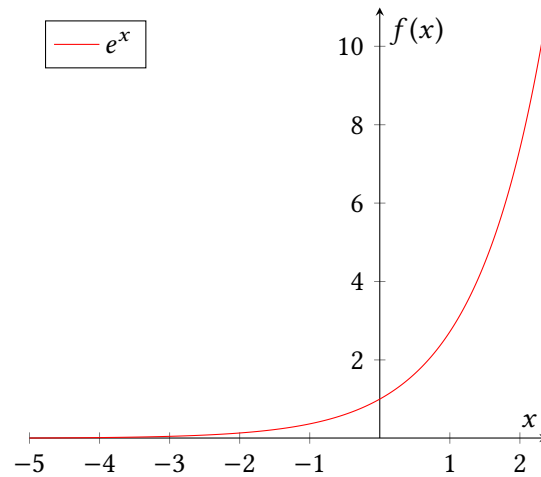


Abbildung 1: Exponentielles Wachstum mit  $e$  als Basis

## Sinus- und Cosinusfunktion

Sinus- und Cosinusfunktionen sind periodisch fallend und wachsende Funktionen, dessen Definitionswerte (oft *Phase* genannt) meist in Grad oder in Radian angegeben wird. Der Phasenunterschied zwischen Cosinus- und Sinusfunktion beträgt  $90^\circ$  bzw.  $\frac{\pi}{2}$  Radian.

**Allgemeine Sinusfunktion** ...  $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$

**Allgemeine Cosinusfunktion** ...  $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$

Aus oben genannter Beschreibung lässt sich schließen:  $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Der Faktor  $a$  bestimmt die maximale Amplitude (= Höhe) der Funktion.  $b$  bestimmt die Periode  $p$ . Da Sinus- und Cosinusfunktionen im Normalfall, also wenn gilt  $b = 1$ , eine Periode von  $2\pi$  haben, gilt allgemein  $p = b \cdot 2\pi$ . Die Konstante  $c$  ist eine beliebige Phasenverschiebung auf der Abszisse.  $d$  ist ein Abstand vom Ursprung auf der Ordinate.

Einige Bemerkungen:

- Nullstellen der Sinusfunktion liegen bei  $c$  sowie  $\frac{p}{2} + c$ , jene der Cosinusfunktion bei  $\frac{p}{4} + c$  sowie  $\frac{3p}{4} + c$
- Extremstellen der Sinusfunktion liegen bei  $\frac{p}{4} + c$  sowie  $\frac{3p}{4} + c$ , jene der Cosinusfunktion bei  $c$  sowie  $\frac{p}{2} + c$
- $[\sin(x)]' = \cos(x)$ ,  $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
- $[\sin(kx)]' = k \cdot \cos(kx)$ ,  $[\cos(kx)]' = k \cdot -\sin(kx)$

