

Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik

Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013)

Projektteam: V. Aue, M. Frebort, M. Hohenwarter, M. Liebscher, E. Sattlberger, I. Schirmer, H.-S. Siller (Leitung), G. Vormayr, M. Weiß, E. Willau

Inhaltliche Grundlagen

Einleitung

Das für das Unterrichtsfach Mathematik entwickelte Reifeprüfungskonzept orientiert sich an bildungstheoretisch begründeten, im Lehrplan enthaltenen grundlegenden mathematischen Kompetenzen, die für alle österreichischen AHS-Absolventinnen und -Absolventen gelten und von diesen in hohem Maß erreicht werden sollen. Auf diesem Weg wird es möglich, im Rahmen der Abschlussprüfung einen spezifischen, als wesentlich erachteten Bereich mathematischer Kompetenzen abzubilden, der fester Bestandteil jedes Mathematikunterrichts sein muss und der insbesondere als echte Teilmenge der Schulmathematik identifizierbar ist. Alle anderen (im Lehrplan angeführten) mathematischen Kompetenzen dürfen im Unterricht keinesfalls eingeschränkt werden oder fehlen, sondern sollen im gleichen Ausmaß wie bisher thematisiert werden, um den besonderen Stellenwert dieses Faches im Kanon der allgemeinbildenden Unterrichtsfächer zu verdeutlichen.

Lehrerinnen und Lehrern, Schülerinnen und Schülern sowie Eltern und anderen Verantwortungsträgern soll bewusst werden, dass im Rahmen einer Prüfung mathematische Grundbildung und mathematisches Grundwissen überprüft werden, sodass mathematische Grundbildung im Sinne der OECD abgebildet wird als „die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht“¹.

Um diese Fähigkeiten zu erlangen, bedarf es eines fachdidaktisch an modernen Ideen orientierten, fachlich hochwertigen und pädagogisch gut strukturierten Mathematikunterrichts, sodass das breite Spektrum an (mathematischen) Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern ausgebildet wird. Im Unterricht müssen sowohl grundlegende mathematische Fähigkeiten bzw. Fertigkeiten („Grundkompetenzen“), die allen Schülerinnen und Schülern längerfristig verfügbar sein sollen, erarbeitet werden, als auch weitere – speziellere – mathematische

¹ OECD/PISA (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD. S. 24.

Kompetenzen, welche nicht bzw. nur schwer im Rahmen einer Klausur überprüft werden (können)². Damit sind insbesondere jene mathematisch-kreativen Fähigkeiten bzw. Fertigkeiten gemeint, die weniger durch einen bestimmten Zustand beschrieben werden können, sondern sich vielmehr anhand entsprechender Verhaltensweisen und Entwicklungen im Verlauf eines Prozesses zeigen, deren verständige Beherrschung und Umsetzung aber ein fundiertes mathematisches Grund- und Reflexionswissen voraussetzt.

Damit können allgemeingebildete – also im obigen Sinne konstruktive, engagierte und reflektierende – Bürger/innen Mathematik als ein sinnvolles und brauchbares Instrument ihrer unmittelbaren Lebenswelt erkennen bzw. einsetzen.

² vgl. Dangl, M., Fischer, R., Heugl, H. et al. (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen*. Version 9/09. Klagenfurt: AECC.
Verfügbar unter http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf [30.09.2011].

Konzeption

Das hier vorliegende überarbeitete Konzept (inklusive des Katalogs von Grundkompetenzen) basiert auf jenem der Projektgruppe *Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen*, der folgende Personen angehörten: M. Dangl, R. Fischer, H. Heugl, B. Kröpfl, M. Lieb-scher, W. Peschek, H.-S. Siller³. Diese Gruppe wurde vom BIFIE Wien beauftragt, ein Konzept für eine Neuge-staltung der Reifeprüfung in Mathematik zu erstellen, welches die im Sommer 2009 vom österreichischen Par-lament beschlossenen Änderungen hinsichtlich der schriftlichen Reifeprüfung beinhaltet.

Dieses Konzept der Reifeprüfung in Mathematik an AHS entspricht also dem gesetzlichen Auftrag, eine zentrale kompetenzorientierte Abschlussprüfung zu gestalten, in der Schüler/innen am Ende ihrer Schulzeit den Kompe-tenzerwerb im Unterrichtsfach Mathematik unter Beweis stellen. Dabei wird nicht auf das Einüben und Trainieren hochspezialisierten Fakten- und Methodenwissens Wert gelegt, sondern im Fokus der Prüfungsaufgaben stehen Wissen und Können sowie Fähigkeiten, die

- für das Fach grundlegend,
- längerfristig verfügbar und
- gesellschaftlich relevant

sind.

Basis und Argumentationsgrundlage für die gewählten Inhalte ist die bildungstheoretische Grundlage des Kon-zepts. Dort steht (zunächst) nicht die (objektive Seite der) Mathematik im Fokus, als Ausgangspunkt wird viel-mehr das Individuum und dessen Rolle in unserer hochdifferenzierten, arbeitsteilig organisierten, demokrati-schen Gesellschaft gewählt. Es kann dadurch transparent dargestellt werden, wie viel und welche Mathematik AHS-Absolventinnen und -Absolventen zu ihrem eigenen Nutzen und zum Nutzen unserer Gesellschaft benöti-gen (sollen).

Somit wird für Lehrer/innen und Schüler/innen, aber auch für Erziehungsberechtigte und tertiäre (Bil-dungs-)Institutionen und andere Abnehmer in der Wirtschaft offensichtlich, warum welche mathematischen In-halte von den Schülerinnen und Schülern zu ihrem Nutzen als mündige Bürger/innen und – zur gleichen Zeit – zum Nutzen der Gesellschaft erlernt werden und langfristig verfügbar sein müssen. So können allgemeingebilde-te – also (wie zuvor angeführt) konstruktive, engagierte und reflektierte – Bürger/innen Mathematik als ein sinn-volles und brauchbares Instrument ihrer unmittelbaren Lebenswelt erkennen bzw. einsetzen. Gleichzeitig wird damit eine Ausgangsbasis für die Abnehmer, wie Universitäten und Wirtschaft, geschaffen, auf welcher fundiert und verlässlich – im Sinne einer Anschlussfähigkeit, Hochschulreife bzw. Studierfähigkeit – aufgebaut werden kann.

Ziele und Inhalte, auf die in der Prüfungssituation fokussiert werden soll, sind für das Fach somit derart grundle-gend, dass (Wissens-)Defizite in diesen Bereichen einen verständigen Umgang mit den geforderten mathemati-schen Inhalten behindern würden. Durch diesen Zugang wird es notwendig, sich ein reflektiertes Basiswissen anzueignen, sodass während der Prüfung mit Inhalten und Methoden des Unterrichtsfaches Mathematik ver-ständig gearbeitet wird.

Vor diesem Hintergrund wurde daher ein auf traditionell-pragmatischen (lehrplankonformen), fachlichen, bil-dungstheoretischen und sozialen Aspekten basierender Katalog an Grundkompetenzen entwickelt, der über die Website des BIFIE (<https://www.bifie.at/node/80>) verfügbar ist. Thematisch ist dieser Katalog nach den vier Themenbereichen *Algebra und Geometrie*, *Funktionale Abhängigkeiten*, *Analysis* sowie *Wahrscheinlichkeit und*

³ vgl. Dangl, M., Fischer, R., Heugl, H. et al. (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen*. Version 9/09. Klagenfurt: AECC.
Verfügbar unter http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf [30.09.2011].

Statistik strukturiert. Sämtlichen Themenbereichen werden dementsprechend bildungstheoretische Begründungen vorangestellt; die Inhaltsbereiche selbst gliedern sich in thematische Abschnitte, aus denen die Grundkompetenzen ersichtlich sind.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass der Fokus der neuen Reifeprüfung auf reflektiertem Grundwissen und dessen flexibler Nutzung in Kommunikationssituationen liegt. Dabei werden (ergänzend zum gültigen Lehrplan) jene grundlegenden Kompetenzen sichtbar gemacht, die Schülerinnen und Schülern im Unterrichtsgegenstand Mathematik jedenfalls vermittelt werden müssen.

Bildungstheoretische Grundlage des Konzepts

Der Bildungsauftrag an allgemeinbildenden höheren Schulen, nämlich Heranwachsende mit dem für das Leben in der Gesellschaft notwendigen Wissen und den entsprechenden Fertigkeiten auszustatten, findet in der breiten Öffentlichkeit fast ungeteilte Zustimmung. Dieser (scheinbare) Konsens zerbricht jedoch sehr schnell, wenn konkretere Überlegungen für einzelne Unterrichtsfächer angestellt werden.

Für das Unterrichtsfach Mathematik wurde in der Konzeptionsarbeit auf die bildungstheoretischen Überlegungen und Ausführungen von Fischer⁴ zurückgegriffen. Mit Hilfe des Konzepts der „*Höheren Allgemeinbildung*“ kann die persönliche Verwertbarkeit dessen, was in der Schule gelernt wird, aus Sicht der Lernenden legitimiert bzw. aus gesellschaftlicher Sicht argumentiert werden.

Für Maturantinnen und Maturanten wird aus diesem Grund die Befähigung zur Kommunikation mit Expertinnen und Experten und der Allgemeinheit als das zentrale „Problem“ identifiziert, mit dem mündige Bürger/innen in unserer arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft immer wieder konfrontiert werden: So werden in vielen Situationen des öffentlichen, beruflichen und privaten Lebens Meinungen (von Expertinnen und Experten) eingeholt oder man wird selbst mit Meinungen von Expertinnen und Experten konfrontiert, die verstanden, bewertet und zur eigenen Erfahrungswelt in Beziehung gesetzt werden müssen, um letztlich Entscheidungen treffen zu können. Die Maturantinnen und Maturanten können hier eine wichtige Vermittlerrolle erhalten, da sie in der Lage sein sollten, Meinungen einzuholen, diese zu verstehen, Expertisen verständlich zu erklären und Vorschläge für die Bewertung und Integration solcher Meinungen zu entwickeln, sodass sie als „*höher gebildete Laien*“⁵ fungieren können. Um diese Fähigkeit zur Kommunikation, welche man als das bildungstheoretische Orientierungsprinzip bezeichnen könnte, in mathematischen Inhalten gewinnbringend einzusetzen, ist sowohl Grund- als auch Reflexionswissen bzw. -vermögen in und mit Mathematik notwendig. Als Grundwissen werden dabei fundierte Kenntnisse hinsichtlich grundlegender (mathematischer) Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Anwendungsgebiete verstanden.

Der verständige Umgang mit solchem Grundwissen, insbesondere die Beurteilung von Expertisen und deren Integration in den jeweiligen (mathematischen) Kontext, erfordert Reflexion(swissen bzw. -vermögen), sodass die Wirkungsweise von Begriffen und Verfahren, ihre Leistung im jeweiligen Kontext oder ihre Grenzen hinterfragt werden können.

In diesem Zusammenhang spielt auch der Technologieeinsatz eine zentrale Rolle, da insbesondere in der Mathematik die Entwicklung(en) stark von aktuellen Werkzeugen beeinflusst wurde(n). Die verfügbaren elektronischen Werkzeuge eröffnen eine neue Dimension der Schulmathematik, sodass eine Verschiebung von der Ausführung zur Planung von Problemlösungen stattfindet. Damit wird eine Schwerpunktverlagerung vom Operieren zum Nutzen von Grundwissen und zum Reflektieren möglich. Technologie zwingt also zur Reflexion über die „verwendete Mathematik“, weil über Ergebnisse reflektiert wird, die man nicht selbst produziert hat, und unterstützt so kontextbezogene Reflexion.

⁴ Fischer, R. (o. J.). *Höhere Allgemeinbildung*. Typoskript. Universität Klagenfurt.

⁵ vgl. ebd.

Diese Überlegungen zeigen, dass aus bildungstheoretischer Sicht im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II nun neuen Inhalten (welche die Kommunikation mit Expertinnen und Experten erleichtern) und einem verstärkten Einsatz von Technologie größere Bedeutung zukommen muss und vor allem höhere Ansprüche hinsichtlich Reflexion und Kommunikation (mit und über Mathematik) zu setzen sind, um zur kommunikativen Vermittlung zwischen Fachleuten und der Allgemeinheit zu befähigen.

Die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung kann und soll auf das beschriebene (reflektierte) Grundwissen und dessen flexible Nutzung (vor allem in Kommunikationssituationen) fokussieren.

Die zentrale Herausforderung bei der Einführung der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik auf Basis von Grundkompetenzen, die dieser bildungstheoretischen Orientierung genügen, liegt in der Auffindung, Verbalisierung und Operationalisierung solcher Kompetenzen, die in den mathematischen Inhaltsbereichen der Sekundarstufe II – *Algebra und Geometrie, Funktionale Abhängigkeiten, Analysis* sowie *Wahrscheinlichkeit und Statistik* – enthalten sind. Dies bedeutet, dass solche Grundkompetenzen aufgrund ihrer fachlichen und gesellschaftlichen Relevanz grundlegend und unverzichtbar sind, zugleich in einer schriftlichen Überprüfung zugänglich gemacht und auf Basis des AHS-Lehrplans argumentiert werden können sowie der bildungstheoretischen Orientierung (nach Fischer) zugänglich sind.

In den Grundkompetenzen müssen vielfältige Aspekte auffindbar sein, wie beispielsweise jene der Generalisierung und operativen Beweglichkeit, der verständige Umgang mit grundlegenden Begriffen und Konzepten sowie deren geometrische Veranschaulichung, die Verwendung von Funktionen als (mathematisches) Werkzeug sowie die Bereitstellung von Konzepten zur formalen und operativen Beschreibung diskreter und stetiger Änderungsverhalten oder die Verwendung von Darstellungsformen und (grundlegenden) Verfahren der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Diese Überlegungen zeigen, dass der Mathematikunterricht der Sekundarstufe II bildungstheoretisch mit entsprechenden Inhalten begründet werden kann. Neben solchen, die die Kommunikation mit Expertinnen und Experten erleichtern, sind vor allem ein höherer Anspruch hinsichtlich Reflexion und Kommunikation in und über Mathematik sowie der verstärkte Einsatz von Technologie entscheidend. In den nachfolgenden Kapiteln zu den vier wesentlichen Inhaltsbereichen der AHS-(Schul-)Mathematik ist die Konkretisierung und Operationalisierung der angesprochenen Grundkompetenzen auf Basis der hier erläuterten bildungstheoretischen Orientierung ausgeführt.

Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie (AG)*

Bildungstheoretische Orientierung

Die Algebra ist *die* Sprache der Mathematik, in der zugleich auch zwei zentrale Ideen der Mathematik besonders deutlich sichtbar werden: Generalisierung und operative Beweglichkeit. Variable lenken die Aufmerksamkeit von speziellen Zahlen hin zu einer definierten Menge von Zahlen (oder anderen mathematischen Objekten), definierte Operationen ermöglichen es, Variable miteinander zu verknüpfen und so Beziehungen zwischen ihnen darzustellen, und schließlich stellt die Algebra ein System von Regeln zur formal-operativen Umformung derartiger Beziehungen zur Verfügung, wodurch weitere Beziehungen sichtbar werden.

Für das Betreiben von Mathematik ebenso wie für die Kommunikation und Reflexion mit und über Mathematik ist ein verständiger Umgang mit grundlegenden Begriffen und Konzepten der Algebra unerlässlich. Dies betrifft insbesondere verschiedene Zahlenbereiche, Variable, Terme, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen sowie Gleichungssysteme. Ein verständiger Umgang umfasst eine angemessene Interpretation dieser Begriffe und Konzepte im jeweiligen Kontext ebenso wie eine zweckmäßige Verwendung dieser Begriffe und Konzepte zur Darstellung abstrakter Sachverhalte und deren regelhafte Umformung. Aber auch Reflexionen über Lösungsmöglichkeiten bzw. -fälle sowie die (Grenzen und das Ausloten der) Anwendbarkeit der jeweiligen Konzepte sind in entsprechenden Kommunikationssituationen von Bedeutung.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Zahlentupel (Vektoren) und die Festlegung von zweckmäßigen Regeln zur operativen Verknüpfung dieser neuen mathematischen Objekte führt zu einer wichtigen Verallgemeinerung des Zahl- bzw. Variablenbegriffs und zur mehrdimensionalen Algebra.

Durch die Einführung von Koordinaten ist es möglich, Punkte in der Ebene oder im Raum so zu verorten, dass geometrische Objekte algebraisch durch Vektoren beschrieben werden können, und sich so von rein geometrisch-anschaulichen Betrachtungsweisen (mit Winkel, Länge oder Volumen) zu lösen und geometrische Probleme mit Hilfe der Algebra zu behandeln.

Dieser Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie ermöglicht es aber nicht nur, geometrische Sachverhalte mit algebraischen Mitteln darzustellen (z. B. Vektoren als algebraische Darstellung von Pfeilen oder Punkten) und zu bearbeiten, sondern auch umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu deuten (z. B. Zahlentripel als Punkte oder Pfeile im Raum) und daraus neue Einsichten zu gewinnen. Solche Deutungen algebraischer Objekte in der Geometrie wie auch Darstellungen geometrischer Objekte in der Algebra und ein flexibler Wechsel zwischen diesen Darstellungen bzw. Deutungen sind in verschiedensten Kommunikationssituationen – und somit bildungstheoretisch – von großer Bedeutung.

In der Trigonometrie interessieren vor allem Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck, allenfalls Erweiterungen auf allgemeine Dreiecke. Elementare Beziehungen dieser Art sollten gekannt, komplexere geometrische Zusammenhänge auf diese elementaren Beziehungen zurückgeführt werden können.

Grundkompetenzen

Grundbegriffe der Algebra

AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} verständig einsetzen können

AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

Anmerkung: Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über \mathbb{R} hinausgehen.

Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/erklären und verständig verwenden können.

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

AG 2.1 Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können

AG 2.2 Lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können

AG 2.3 Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

AG 2.4 Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können

AG 2.5 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

Anmerkung: Einfache Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten. Umformungen von Termen, Formeln oder Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen beschränken sich auf Fälle geringer Komplexität.

Vektoren

AG 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können

AG 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können

AG 3.3 Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können

AG 3.4 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können

AG 3.5 Normalvektoren in \mathbb{R}^2 aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Anmerkung: Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.

Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$. Geraden sollen in Parameterform, in \mathbb{R}^2 auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.

Trigonometrie

AG 4.1 Definitionen von *Sinus*, *Cosinus* und *Tangens* im rechtwinkligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke einsetzen können

AG 4.2 Definitionen von *Sinus* und *Cosinus* für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können

Anmerkung: Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.

Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten (FA)*

Bildungstheoretische Orientierung

Wenn Expertinnen und Experten Mathematik verwenden, bedienen sie sich oftmals des Werkzeugs der Funktionen. Für eine verständige *Kommunikation* ist es daher notwendig, mit der spezifischen funktionalen Sichtweise verständig und kompetent umzugehen. Das meint, die Aufmerksamkeit auf die Beziehung zwischen zwei (oder mehreren) Größen in unterschiedlichen Kontexten fokussieren zu können sowie die gängigen Darstellungsformen zu kennen und mit ihnen flexibel umgehen zu können.

Im Zentrum des mathematischen *Grundwissens* steht dann das Kennen der für die Anwendungen wichtigsten Funktionstypen: Namen und Gleichungen kennen, typische Verläufe von Graphen (er)kennen, zwischen den Darstellungsformen wechseln, charakteristische Eigenschaften wissen und im Kontext deuten (können).

Insgesamt sind eher kommunikative Handlungen (Darstellen, Interpretieren, Begründen) bedeutsam, manchmal können auch konstruktive Handlungen (Modellbildung) hilfreich sein; mathematisch-operative Handlungen hingegen sind in Kommunikationssituationen von eher geringer Bedeutung.

Darüber hinaus ist (*Reflexions-*)Wissen um Vor- und Nachteile der funktionalen Betrachtung sehr wichtig. Hilfreich ist in diesem Zusammenhang das Wissen über unterschiedliche Typen von Modellen (konstruktive, erklärende, beschreibende) sowie deren Bedeutung und Verwendung.

Wenn die wichtigsten Funktionstypen überblickt werden und wichtige Eigenschaften für das Beschreiben von Funktionen bekannt sind (Monotonie, Monotoniewechsel, Wendepunkte, Periodizität, Nullstellen, Polstellen), ist die Kommunikation auch auf zunächst unbekannte Funktionen bzw. Kompositionen von Funktionen erweiterbar.

Grundkompetenzen

Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

- | | |
|--------|--|
| FA 1.1 | Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann |
| FA 1.2 | Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können |
| FA 1.3 | Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können |
| FA 1.4 | Aus Tabellen, Graphen ⁶ und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können |
| FA 1.5 | Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen |
| FA 1.6 | Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können |
| FA 1.7 | Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können |
| FA 1.8 | Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können |

⁶ Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreiteten Sprechweise folgend nennen wir die grafische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph“.

FA 1.9 Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

Anmerkung: Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund steht die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$).

Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.

Das rechnerische Ermitteln von Schnittpunkten von Funktionen beschränkt sich auf jene Fälle, die durch die im Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie* angeführten Grundkompetenzen abgedeckt sind (lineare, quadratische Gleichungen).

Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

FA 2.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA 2.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können

FA 2.3 Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

FA 2.4 Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:

$$f(x + 1) = f(x) + k ; \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$$

FA 2.5 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können

FA 2.6 Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

Anmerkung: Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$, oder mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$

- FA 3.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- FA 3.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 3.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- FA 3.4 Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

Anmerkung: Wurzelfunktionen bleiben auf den quadratischen Fall $a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ beschränkt.

Polynomfunktion [$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$]

- FA 4.1 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen
- FA 4.2 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können
- FA 4.3 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können
- FA 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$.

Argumentwerte sollen aus Tabellen und Graphen, für Polynomfunktionen bis $n = 2$ und solchen, die sich durch einfaches Herausheben oder einfache Substitution auf quadratische Funktionen zurückführen lassen, auch aus der jeweiligen Funktionsgleichung ermittelt werden können.

Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$]

- FA 5.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- FA 5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 5.3 Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^λ) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
- FA 5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können
- FA 5.5 Die Begriffe *Halbwertszeit* und *Verdoppelungszeit* kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können
- FA 5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

Anmerkung: Die Parameter a und b (bzw. e^x) sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

Sinusfunktion, Cosinusfunktion

- FA 6.1 Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- FA 6.2 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 6.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können
- FA 6.5 Wissen, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- FA 6.6 Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Anmerkung: Während zur Auflösung von rechtwinkligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

Inhaltsbereich *Analysis* (AN)

Bildungstheoretische Orientierung

Die Analysis stellt Konzepte zur formalen, kalkulatorischen Beschreibung von diskretem und stetigem Änderungsverhalten bereit, die nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen Anwendungsbereichen von grundlegender Bedeutung sind. Die Begriffe *Differenzenquotient* bzw. *Differentialquotient* sind allgemeine mathematische Mittel, dieses Änderungsverhalten von Größen in unterschiedlichen Kontexten quantitativ zu beschreiben, was in vielen Sachbereichen auch zur Bildung neuer Begriffe genutzt wird.

Im Sinne der Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten wird es daher wichtig sein, diese mathematischen Begriffe in diversen Anwendungsfällen deuten zu können, darüber hinaus aber auch allfällige Zusammenhänge von Fachbegriffen auf der Basis der hier genannten mathematischen Konzepte zu erkennen (z. B. den Zusammenhang *Ladung* – *Stromstärke* in der Physik oder allgemein den Zusammenhang von Bestands- und Flussgrößen), zu definieren oder zu benennen. Im Rahmen von höherer Allgemeinbildung sollte die Analysis somit einen wesentlichen Beitrag zu einem verständigen Umgang mit den entsprechenden Fachbegriffen leisten, der sich nicht nur auf die Kommunikation mit Expertinnen und Experten beschränkt. Manche der hier angesprochenen Begriffe werden auch umgangssprachlich gebraucht (z. B. *Momentangeschwindigkeit*, *Beschleunigung*, *Zerfallsgeschwindigkeit*, *progressives Wachstum*). Im Sinne einer Kommunikation mit der Allgemeinheit ist es für einen allgemeingebildeten Menschen daher auch wichtig, bei einer allfälligen Explikation der Fachbegriffe auf deren mathematischen Kern zurückgreifen zu können. (Was bedeutet eine „momentane“ Änderung einer bestimmten Größe?)

Der hinsichtlich der Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten zentrale Begriff der Integralrechnung ist das bestimmte Integral. Es ist wichtig zu wissen, was das dahinterstehende Konzept allgemein in der Mathematik und konkret in diversen Anwendungssituationen leistet. Daraus ergibt sich einerseits, dass man das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten in verschiedenen Kontexten deuten kann, andererseits aber auch, dass man die typischen Anwendungsfälle des bestimmten Integrals allgemein beschreiben und den Begriff selbst in verschiedenen Kontexten zur Darstellung entsprechender Zusammenhänge verwenden kann (z. B. die physikalische Arbeit als Wegintegral der Kraft).

Die mathematische Darstellung der einzelnen Begriffe ist im Allgemeinen eine symbolische, wobei die Zeichen auch eine bestimmte Bedeutung innerhalb des Kalküls haben. Für die Zugänglichkeit elementarer Fachliteratur ist ein verständiger Umgang mit diesem Formalismus notwendig, d. h. die zum Teil unterschiedlichen symbolischen Darstellungen des Differentialquotienten, der Ableitungsfunktion sowie des bestimmten Integrals sollten als solche erkannt, im jeweiligen Kontext gedeutet und auch eigenständig als Darstellungsmittel eingesetzt werden können. Es ist wichtig zu wissen, dass mit Zeichen auch gerechnet wird und was im konkreten Fall damit berechnet wird; die Durchführung der Rechnung selbst kann aber weitgehend unterbleiben. Es genügt, sich auf die einfachsten Regeln des Differenzierens zu beschränken, zumal neben der symbolischen Darstellung der Begriffe auch die grafische Darstellung der entsprechenden Funktionen zur Verfügung steht, an der die relevanten Eigenschaften und Zusammenhänge erkannt und auch quantitativ abgeschätzt werden können.

Grundkompetenzen

Änderungsmaße

- AN 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

Anmerkung: Die Berechnung einfacher Differenzenquotienten ist/wird damit auch umsetzbar/möglich.

- AN 1.2 Den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate)* – *Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

- AN 1.3 Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können

- AN 1.4 Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

Anmerkung: Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzenquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{kx}]' = k \cdot e^{kx}$.

Regeln für das Differenzieren

- AN 2.1 Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)

Anmerkung: Im Teil *Vernetzung von Grundkompetenzen* können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Differentiationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.

Ableitungsfunktion/Stammfunktion

- AN 3.1 Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können

- AN 3.2 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können

- AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Anmerkung: Der Begriff der *Ableitung(sfunktion)* soll verständlich und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

Summation und Integral

AN 4.1 Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

AN 4.2 Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)dx$, $\int f(k \cdot x)dx$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können

Anmerkung: Im Teil *Vernetzung von Grundkompetenzen* können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Integrationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.

AN 4.3 Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Anmerkung: Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Die Berechnung bestimmter Integrale soll sich auf Polynomfunktionen beschränken.

Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)*

Bildungstheoretische Orientierung

Mathematiker/innen wie auch Anwender/innen bedienen sich häufig der Begriffe, der Darstellungsformen und der (grundlegenden) Verfahren der Beschreibenden Statistik, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Schließenden Statistik. Für allgemeingebildete Laien wird es im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit vor allem darauf ankommen, die stochastischen Begriffe und Darstellungen im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren und deren Aussagekraft bzw. Angemessenheit einschätzen und bewerten zu können.

Die eigenständige Erstellung von statistischen Tabellen und Grafiken wird sich auf Situationen geringer Komplexität und auf einfache Grafiken beschränken (z. B. bei der Kommunikation mit der Allgemeinheit), für die Ermittlung statistischer Kennzahlen (Zentral- und Streuungsmaße) gilt Ähnliches.

Auch bei der Wahrscheinlichkeit kann man sich auf grundlegende Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, auf grundlegende Begriffe (Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Dichte- und Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz/Standardabweichung) und Konzepte (Binomialverteilung, Normalverteilung) sowie einfachste Wahrscheinlichkeitsberechnungen beschränken; wichtig hingegen erscheint es, Wahrscheinlichkeit als eine (vom jeweiligen Informationsstand) abhängige Modellierung und Quantifizierung des Zufalls sowie als unverzichtbares Bindeglied zwischen den beiden Statistiken zu verstehen.

Der Begriff der (Zufalls-)Stichprobe ist bereits bei der Wahrscheinlichkeit, aber natürlich auch in der Schließenden Statistik grundlegend und zentral.

Von den zwei grundlegenden Konzepten der Schließenden Statistik, dem Testen von Hypothesen und der Hochrechnung (Konfidenzintervall), ist die Hochrechnung von besonderer Bedeutung. Im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit wird es auch hier weniger darum gehen, Konfidenzintervalle zu ermitteln, sondern vorrangig darum, Ergebnisse dieses Verfahrens im jeweiligen Kontext angemessen zu deuten und zu bewerten. Dabei spielen Begriffe wie Sicherheit/Irrtumswahrscheinlichkeit und deren Zusammenhang mit der Intervallbreite („Genauigkeit“) und dem Stichprobenumfang eine zentrale Rolle, sodass entsprechende Kompetenzen unverzichtbar sind.

Grundkompetenzen

Beschreibende Statistik

WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

Anmerkung: (un-)geordnete Liste, Strichliste, Piktogramm, Säulen-, Balken-, Linien-, Stängel-Blatt-, Punktwolkendiagramm, Histogramm (als Spezialfall eines Säulendiagramms), Prozentstreifen, Kastenschaubild

WS 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können

WS 1.3 Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können

WS 1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können

Anmerkung: Wenn auch statistische Kennzahlen (für einfache Datensätze) ermittelt und elementare statistische Grafiken erstellt werden sollen, liegt das Hauptaugenmerk auf verständigen Interpretationen von Grafiken (unter Beachtung von Manipulationen) und Kennzahlen. Speziell für das arithmetische Mittel und den Median (auch als Quartilen) müssen die wichtigsten Eigenschaften (definitorische Eigenschaften, Datentyp-Verträglichkeit, Ausreißerempfindlichkeit) gekannt und verständlich eingesetzt bzw. berücksichtigt werden. Beim arithmetischen Mittel sind allenfalls erforderliche Gewichtungen zu beachten („gewogenes arithmetisches Mittel“) und zu nutzen (Bildung des arithmetischen Mittels aus arithmetischen Mitteln von Teilmengen).

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Grundbegriffe

- WS 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können
- WS 2.2 Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können
- WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können

Anmerkung: Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.

- WS 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können

Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)

- WS 3.1 Die Begriffe *Zufallsvariable*, *(Wahrscheinlichkeits-)Verteilung*, *Erwartungswert* und *Standardabweichung* verständlich deuten und einsetzen können
- WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
- WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann
- WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können

Anmerkung: Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung $np(1-p) \geq 9$ erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar. Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ . Arbeiten mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.

Schließende/Beurteilende Statistik

- WS 4.1 Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können

Kontexte

Zentrale Aufgabe der Schule ist die Vermittlung fundierten Wissens, insbesondere sollen die Schüler/innen zur selbstständigen und aktiven Aneignung von Wissen befähigt und angehalten werden. Zudem sollen sie im Laufe der Schulzeit immer wieder zur kritisch prüfenden Auseinandersetzung mit dem verfügbaren Wissen ermutigt werden.

Die Schüler/innen erlernen auf diese Weise, ihrem Alter entsprechend Problemstellungen zu definieren, zu bearbeiten und ihren Erfolg zu kontrollieren. Die in unterschiedlichen Bildungsbereichen entwickelten „überfachlichen“ Kompetenzen können bzw. sollen Eingang in die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik finden⁷. Dabei ist besonders darauf hinzuweisen, dass den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit gegeben werden muss, an Vorerfahrungen und Vorkenntnisse zu entsprechenden Kontexten anzuknüpfen.

Die angegebene Aufzählung von Kontexten und deren Konkretisierung stellt eine absolute Minimalvariante vorhandener Einsatzgebiete von Mathematik dar. Diese Konkretisierung ist als Hilfestellung zur Vorbereitung auf die schriftliche Reifeprüfung gedacht. Die nachfolgend angeführten Kontexte können jedenfalls ohne detaillierte Erklärung bei der standardisierten Reifeprüfung vorkommen. Bei allen anderen Kontexten werden in der jeweiligen Aufgabenstellung im einleitenden Text notwendige und hinreichend genaue Erklärungen gegeben.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass ein Ausbau der zentral vorgegebenen Kontexte erfolgen wird. Dabei werden die mathematischen Aspekte bzw. jene mathematisch-orientierten Ansätze aus den Lehrplänen der AHS-Oberstufenfächer aufgegriffen und hinsichtlich ihrer Eignung als prüfungsrelevante Kontexte geprüft. Die Einarbeitung in das Konzept wird dahingehend erfolgen, dass bis zum Schuljahr 2017/18 ein erweiterter Katalog vorliegen wird.

Einheiten und Größen

Bei der Anwendung von Mathematik in alltäglichen Situationen kommt man nicht umhin, sich auch mit Größenverhältnissen, (physikalischen) Größen im Allgemeinen und Einheiten im Speziellen auseinanderzusetzen. Der korrekte Umgang mit Größen(-verhältnissen) und Einheiten ist jedenfalls in Kommunikationssituationen unumgänglich und zeugt von einem tiefergehenden Verständnis für Zusammenhänge.

$$1 \text{ Prozent} = 10^{-2} = 10 \text{ 000 ppm} = \text{Teile pro Hundert} = 1 \%$$

$$1 \text{ Promille} = 10^{-3} = 1 \text{ 000 ppm} = \text{Teile pro Tausend} = 0,1 \% = 1 \text{ ‰}$$

$$1 \text{ ppm (parts per million)} = 10^{-6} = \text{Teile pro Million} = 0,0001 \%$$

(Physikalische) Größen und ihre Einheiten treten in praktisch allen technisch-naturwissenschaftlichen Kontexten auf. Die grundlegende Kenntnis der Größen, Einheiten und Symbole des SI-Einheitensystems bzw. im SI-System zulässiger Einheiten ist daher unumgänglich.

⁷ Hier gilt es anzumerken, dass gerade die Einführung eines zentral vorgegebenen, verbindlich geltenden Kontextkatalogs im Augenblick als zukunftsweisendes Projekt gesehen werden soll. Dazu bedarf es auch der „Mitwirkung“ der anderen im AHS-Kanon vorgesehenen Fächer, was im Augenblick ausschließlich von Mathematiklehrerinnen und -lehrern nicht verlangt werden kann.

Vorsilbe	Bedeutung	Abkürzung	
Tera	Billion	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
Giga	Milliarde	G	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
Mega	Million	M	$10^6 = 1\,000\,000$
Kilo	Tausend	k	$10^3 = 1\,000$
Hekto	Hundert	h	$10^2 = 100$
Deka	Zehn	da	$10^1 = 10$
Dezi	Zehntel	d	$10^{-1} = 0,1$
Zenti	Hundertstel	c	$10^{-2} = 0,01$
Milli	Tausendstel	m	$10^{-3} = 0,001$
Mikro	Millionstel	μ	$10^{-6} = 0,000\,001$
Nano	Milliardstel	n	$10^{-9} = 0,000\,000\,001$
Pico	Billionstel	p	$10^{-12} = 0,000\,000\,000\,001$

Die entsprechenden (physikalischen) Größen und ihre Einheiten werden in der Aufgabenstellung angeführt, deren korrekte weitere Verwendung obliegt jedoch den Schülerinnen und Schülern.

Größe	Einheit	Symbol	Beziehung
Temperatur	Grad Celsius bzw. Kelvin	$^{\circ}\text{C}$, K	$\Delta t = \Delta T$
Frequenz	Hertz	Hz	$1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J	$1\text{ J} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
Kraft	Newton	N	$1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
Drehmoment	Newtonmeter	N·m	$1\text{ N}\cdot\text{m} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	$1\,\Omega = 1\text{ V}\cdot\text{A}^{-1} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{A}^{-2}\cdot\text{s}^{-3}$
Druck	Pascal	Pa	$1\text{ Pa} = 1\text{ N}\cdot\text{m}^{-2} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
elektrische Stromstärke	Ampere	A	$1\text{ A} = 1\text{ C}\cdot\text{s}^{-1}$
elektrische Spannung	Volt	V	$1\text{ V} = 1\text{ J}\cdot\text{C}^{-1} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{s}^{-3}$
Leistung	Watt	W	$1\text{ W} = 1\text{ J}\cdot\text{s}^{-1} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$

Zusammenstellung physikalischer Größen und Definitionen

Dichte	$\rho = \frac{m}{V}$		
Leistung	$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$	$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$	$P = \frac{dW(t)}{dt}$
Kraft	$F = m \cdot a$		
Arbeit	$W = F \cdot s$		
	$W = \int F(s) ds$	$F = \frac{dW}{ds}$	
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$		
potentielle Energie	$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$		
gleichförmige geradlinige Bewegung	$v = \frac{s}{t}$	$v = \frac{ds}{dt}$	$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$
gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung	$v = a \cdot t + v_0$	$a = \frac{dv}{dt}$	$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$

Finanzmathematische Grundlagen

Der Lehrplan in Mathematik nimmt nicht nur Bezug auf naturwissenschaftlich-technische Aspekte, sondern thematisiert auch wirtschaftliche Belange. Daher sind grundlegende Begriffe in diesem Bereich ebenfalls notwendig.

Zinseszinsrechnung

Anfangskapital ... K_0

Endkapital ... K_n

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n \text{ mit } i = \frac{p}{100}$$

Kosten-Preis-Theorie

Erlös(-funktion)/Ertrag(sfunktion)	... in der Form einer linearen Darstellung
Kosten(-funktion)	... in der Form einer proportionalen, degressiven, progressiven, regressiven und fixen Darstellung
Gewinn(-funktion)	... als Erlös – Kosten
Nachfragepreis(-funktion)	... lineare Funktion

und (alle) damit in Verbindung stehenden Begrifflichkeiten: Grenzkosten, Grenzerlös, Grenzgewinn und Break-even-Point

Rahmenbedingungen

Für die Durchführung der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung sind organisatorische Rahmenbedingungen zu schaffen, welche gewährleisten, dass diese Form der Prüfung für alle Schüler/innen an österreichischen AHS zu gleichen Bedingungen durchgeführt werden kann. Daher wird im nachfolgenden Teil auf die Struktur der Klausuren, die Rolle der Psychometrie, den Einsatz von Technologie und andere zu berücksichtigende Rahmenbedingungen und ihren Einfluss auf die Prüfung im Unterrichtsfach Mathematik eingegangen.

Diese Rahmenbedingungen werden laufend ergänzt und aktualisiert, sodass immer ein aktuelles Handbuch für Lehrer/innen, Schüler/innen und Eltern vorhanden sein wird.

Struktur der Klausuren

Um eine valide und reliable Reifeprüfung zu gewährleisten, werden sämtliche Aufgabenstellungen, die als potenzielle Prüfungsaufgaben in Frage kommen, einem standardisierten Verfahren, sogenannten Feldtestungen, unterworfen. Die auf diesem Weg gewonnenen Erkenntnisse fließen laufend in den weiteren Entwicklungsprozess ein.

Die Aufgaben der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung können **zwei unterschiedlichen Typen** zugeordnet werden:

- **Typ-1-Aufgaben** sind Aufgaben, die auf die im Katalog angeführten Grundkompetenzen fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit nachzuweisen.
- **Typ-2-Aufgaben** sind Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen. Dabei handelt es sich um umfangreichere kontextbezogene oder auch innermathematische Aufgabenstellungen, im Rahmen derer unterschiedliche Fragestellungen bearbeitet werden müssen und bei deren Lösung operativen Fertigkeiten gegebenenfalls größere Bedeutung zukommt. Eine selbstständige Anwendung von Wissen und Fertigkeiten ist erforderlich.

Der Umfang an Typ-1-Aufgaben im Rahmen der Klausur wird bei 18 bis 25 Aufgaben liegen, welche in den ersten 120 Minuten bearbeitet werden müssen. Es verbleiben weitere 150 Minuten Prüfungszeit für die Bearbeitung von vier bis sechs Typ-2-Aufgaben, welche jeweils in zwei bis sechs Teilaufgaben unterteilt sein können. Es wird keine Gesamtabgabe der beiden Teile geben, sondern es ist zunächst der Teil mit den Typ-1-Aufgaben zu bearbeiten und abzugeben, erst danach kann der Teil mit den Typ-2-Aufgaben bearbeitet werden.

Die Gesamtbeurteilung der beiden Teile erfolgt gemäß den Bestimmungen der LBVO nach zentral vorgegebenen Korrektur- und Beurteilungsanleitungen (vgl. Kapitel *Beurteilungsschema*, S. 33).

Die Typ-2-Aufgaben sollen die bildungstheoretische Orientierung des Konzepts hervorheben, um die notwendige Positionierung mittels Kritik und Bewertung im mathematischen Grundbildungsspektrum abzubilden. Eine konkretere Beschreibung bzw. Vorstellung der Typ-2-Aufgaben in der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung soll die folgende Charakterisierung vermitteln. Zudem stellt diese eine Orientierung für die Vorbereitung der Schüler/innen dar.

- Die Präsentation der Aufgabe erfolgt durch einen einleitenden Text, der das Thema der Aufgabe darlegt. Der Text hat informativen (erklärenden) Charakter. Er kann auch Informationen und Aussagen enthalten, die für die Lösung der Fragen nicht unmittelbar von Bedeutung sind.
- Die Aufgaben sind umfangreicher und komplexer, d. h. es werden zu einem speziellen „Thema“ verschiedene inhaltlich zusammenhängende Fragen gestellt.

- Die Teilaufgaben einer Aufgabe sind voneinander unabhängig, sodass eine Fehlleistung bei einer Fragestellung die weitere Bearbeitung der Aufgabe nicht unmöglich macht.
- Es kann sich um anwendungsorientierte, kontextorientierte oder innermathematische Problemstellungen handeln.
- Liegen Anwendungsbezüge außerhalb des Kontextkatalogs, werden notwendige Sachzusammenhänge, Begriffe und Größen im Rahmen des einleitenden Textes erläutert.
- Anwendungs- oder Realitätsbezüge werden so gewählt, dass sie zu einer inhaltlich sinnvollen und verständnisorientierten Anwendung der Mathematik im Sinne der bildungstheoretischen Konzeption der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung führen.

Der Einsatz von Technologie im Projekt

Obwohl die gewohnten Hilfsmittel in beiden Teilen erlaubt sein werden, werden die Prüfungsaufgaben im Teil 1 so konstruiert sein, dass sie (weitgehend) technologiefrei lösbar sind.

Für die Typ-2-Aufgaben hingegen wird der verbindliche Einsatz höherwertiger Technologie (DGS, CAS, Tabellenkalkulation) ab dem Haupttermin im Schuljahr 2017/18 in der RPVO festgelegt. In der Übergangsfrist sind ebenfalls die gewohnten Hilfsmittel für die Typ-2-Aufgaben zugelassen. Die in der RPVO formulierten minimalen Anforderungen an die Technologie werden von allen Systemen erfüllt, welche grundlegende Funktionen einer Dynamische-Geometrie-Software, einer Tabellenkalkulation sowie eines Computeralgebrasystems beherrschen (z. B. Handheld-Rechner, Computer mit entsprechender Software). Für die Dauer der Prüfung ist die Verwendung elektronischer Hilfsmittel zur Kommunikation (z. B. via Internet oder Mobilfunknetzwerken) mit anderen unzulässig.

Die Rolle bzw. Auswirkungen der Psychometrie im Projekt

Hinsichtlich der Testspezifikationen werden unter Berücksichtigung psychometrischer Vorgaben Kriterien festgelegt, die als Best-Practice-Modelle international akzeptiert und anerkannt sind. Darüber hinaus werden sämtliche Aufgaben von Expertinnen und Experten des universitären und pädagogischen Bereichs im Hinblick auf ihre inhaltliche und (fach-)didaktische Eignung begutachtet.

Die eigentliche Aufgabe der Psychometrie im Rahmen der standardisierten Reifeprüfung ist es, den jeweiligen Fachgruppen Kennwerte zur Verfügung zu stellen, welche die Qualität der Aufgaben aus psychometrischer Sicht widerspiegeln. Aufgaben, welche sowohl den fachlichen, fachdidaktischen als auch psychometrischen Qualitätsansprüchen genügen, bieten die Basis für die Zusammenstellung der Prüfungsschäfte für jeden Jahrgang.

Typ-1-Aufgaben fokussieren auf eine Grundkompetenz. Sie werden mit *gelöst* versus *nicht gelöst* verrechnet. Die verschiedenen gebundenen Antwortformate wie Multiple-Choice-Format und Lückentextformat ermöglichen eine exakte Punktevergabe. Zur Vergabe der Punkte bei Aufgaben mit offenem und halboffenem Antwortformat werden Lösungserwartungen bzw. klar formulierte Lösungsschlüssel angegeben.

Die Charakterisierung der Typ-2-Aufgaben stellt große Herausforderungen an die Grundprinzipien der modernen Testtheorie. Auch diese Aufgaben sind in Aufbau und Darstellungsweise sowie hinsichtlich der Punktevergabe einheitlich gestaltet.

Die Aufgaben werden im Rahmen von Feldtestungen vorgegeben. Der Ablauf von Feldtestungen ist weitgehend standardisiert, sodass alle Schüler/innen ihre Leistungen unter denselben Bedingungen erbringen können. Im Fokus steht allerdings nicht die Beurteilung der Schülerleistungen, sondern die Beurteilung der Qualität der Aufgabenstellungen. Wenn nach psychometrischen Analysen Mängel in der Qualität einzelner Aufgaben festgestellt werden (z. B. Benachteiligung bestimmter Gruppen von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben mit einem

besonderen Anwendungsbezug), so erfolgen seitens der Psychometrie Empfehlungen zur Aufgabenüberarbeitung an die Fachgruppe. Aufgabenstellungen, die den fachlichen, fachdidaktischen und psychometrischen Qualitätsanforderungen nicht genügen, werden gegebenenfalls überarbeitet bzw. neu diskutiert.

Den Abschluss dieses Prozesses bildet die Kontrolle der Aufgaben in einem Gremium von Expertinnen und Experten, bei dem noch einmal eine qualitative Bewertung der Aufgaben erfolgt. Erst danach können diese für die schriftliche Reifeprüfung verwendet werden.

Antwortformate

Die Beschreibung der bei der schriftlichen Reifeprüfung vorkommenden Antwortformate soll eine Hilfestellung bei der Vorbereitung auf die standardisierte schriftliche Reifeprüfung darstellen. Zugleich soll verdeutlicht werden, warum manche Maßnahmen sinnvoll sind und andere nicht.

Folgende Vorbereitungsstrategien bieten sich an:

1. Inhaltliche Vorbereitung
2. Schaffung von Vertrautheit mit dem Testablauf
3. Vermittlung von Testbearbeitungsstrategien

Ein *teaching to the test*, also das reine und ausschließliche Üben von aktuellen bzw. freigegebenen Testaufgaben, ist keinesfalls sinnvoll: Bestünde die Möglichkeit, solche Aufgaben vorab zu üben, würden die zurückgemeldeten Ergebnisse keine Auskunft über die tatsächlichen Fähigkeiten geben, sondern eher Aussagen über die Fähigkeit zulassen, wie Schüler/innen durch repetitives Üben profitieren. Aus der bildungstheoretischen Orientierung resultiert die (umfassende) Bedeutung der Grundkompetenzen ebenso wie ihre Verfügbarkeit und die daraus resultierende Flexibilität der Anwendung fachspezifischer Inhalte.

Das bedeutet jedoch nicht, dass die bei der standardisierten Reifeprüfung eingesetzten Aufgabentypen bzw. erfassten Inhalte, welche sich in den Grundkompetenzen wiederfinden, nicht in den Unterricht integriert werden dürfen. Versteht man Unterrichtsentwicklung als einen längerfristig angelegten Prozess, wird es auch sinnvoll sein, die in der Reifeprüfung zu findenden Inhalte bzw. Aufgabentypen neu aufzunehmen, den Kontext oder die Einbettung der Aufgaben zu variieren („intelligentes Üben“) bzw. die Reihenfolge des Lehrstoffs dahingehend zu verändern. Der notwendige Freiraum, den man durch den Lehrplan, die LBVO bzw. die unterrichtlichen Rahmenbedingungen dazu erhält, soll jedenfalls intensiv genutzt werden. Daher ist auch gezielt darauf hinzuweisen, dass die Prüfungssituation keinesfalls mit der Unterrichtssituation ident oder gar vergleichbar ist. Es handelt sich dabei aufgrund der zentralen Vorgabe immer um Kontrapositionen, die einander direkt und indirekt beeinflussen. Jedenfalls sind aufgrund der unterschiedlichen Zielsetzung von Test- und Unterrichtssituation die freigegebenen Aufgaben für die Erarbeitung von Inhalten im Unterricht nur bedingt geeignet. Die Thematisierung solcher Aufgaben im Unterricht ist jedoch erforderlich, um die zu Beginn noch nicht so gängigen Aufgabentypen, Antwortformate und Bearbeitungsstrategien zu vermitteln.

Ablauf der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung

Einige Bereiche sind bei der standardisierten Reifeprüfung anders als es die Schüler/innen bei der Bearbeitung von Aufgaben im Unterricht, z. B. im Rahmen von Schularbeiten, gewohnt sind. Um unnötige Schwierigkeiten zu vermeiden und Belastungen zu reduzieren, sollten die Schüler/innen mit der besonderen Situation, den Antwortformaten, der Zeitbegrenzung und dem Verhalten bei Störungen vertraut gemacht werden.

Das genaue Lesen des Aufgabentextes ist wichtig, denn er enthält nicht nur die sachlichen Informationen, sondern auch die Aufforderung, in welcher Weise die Lösung zu erbringen ist.

Dies soll im Folgenden an den acht verschiedenen Antwortformaten, die sich in der standardisierten Reifeprüfung finden werden, erläutert werden. Dabei ist es nicht die Absicht, prototypische Beispiele zu zeigen, sondern deutlich zu machen, wie die in der Prüfung auftretenden Antwortformate gestaltet sein können.⁸

⁸ Die nachfolgend angeführten Aufgaben könnten auch als Prüfungsaufgaben verwendet werden, da sie auf eine (auf-)gelistete Grundkompetenz fokussieren und den Ansprüchen einer Prüfungsaufgabe entsprechen.

1. Offenes Antwortformat

Die Antwort soll mit eigenen Worten formuliert werden bzw. darf völlig frei erfolgen.

Beispiel:

Gegeben ist die Gleichung einer Geraden g : $3x + 5y = 15$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Steigung der dieser Geraden entsprechenden linearen Funktion!

2. Halboffenes Antwortformat

Die korrekte Antwort oder ein vorgegebenes bzw. passendes mathematisches Objekt soll in eine vorgegebene Formel, Funktion etc. eingesetzt werden.

Beispiel:

Für das arithmetische Mittel einer Datenreihe x_1, x_2, \dots, x_{24} gilt: $\bar{x} = 115$.

Die Standardabweichung der Datenreihe ist $s_x = 12$. Die Werte einer 2. Datenreihe y_1, y_2, \dots, y_{24} entstehen, indem man zu den Werten der 1. Datenreihe jeweils 8 addiert, also $y_1 = x_1 + 8, y_2 = x_2 + 8$ usw.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Mittelwert und die Standardabweichung s_y der 2. Datenreihe an!

$\bar{y} =$ _____

$s_y =$ _____

3. Lückentext

Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Aufgaben dieses Formats werden korrekt bearbeitet, indem die Lücken durch Ankreuzen der beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten gefüllt werden.

Beispiel:

Gegeben ist die Zahl $\sqrt{5}$.

Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie den folgenden Satz, sodass er mathematisch korrekt ist!

Die Zahl $\sqrt{5}$ ist eine _____ (1) _____, weil die _____ (2) _____.

(1)	
rationale Zahl	<input type="checkbox"/>
irrationale Zahl	<input type="checkbox"/>
natürliche Zahl	<input type="checkbox"/>

(2)	
Darstellung der Zahl ein Wurzelzeichen hat	<input type="checkbox"/>
Zahl nicht als Bruch dargestellt werden kann	<input type="checkbox"/>
Zahl als periodische Dezimalzahl dargestellt werden kann	<input type="checkbox"/>

4. Multiple-Choice-Aufgabenformat

In der Aufgabenstellung finden sich Aussagen dazu, ob eine oder mehrere Antworten anzukreuzen sind. So gibt es beim Multiple-Choice-Aufgabenformat „1 aus 6“ nur eine „zutreffende Antwort“, während beim Multiple-Choice-Aufgabenformat „x aus 5“ gefordert wird, „alle zutreffenden Antworten“ (mindestens eine zutreffende) zu finden bzw. beim Multiple-Choice-Aufgabenformat „2 aus 5“ genau „zwei zutreffende Antworten“ zu finden sind.

a) 2 aus 5

Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei zwei Antwortmöglichkeiten auszuwählen sind. Aufgaben dieses Formats werden korrekt bearbeitet, indem die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt werden.

Beispiel:

Gegeben ist die Zahl $\sqrt{5}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Zahl $\sqrt{5}$ liegt nicht in \mathbb{R} .	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ liegt in \mathbb{Z} , aber nicht in \mathbb{N} .	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ ist irrational.	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ liegt in \mathbb{Q} und in \mathbb{R} .	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ kann man nicht als periodische Dezimalzahl darstellen.	<input type="checkbox"/>

b) 1 aus 6

Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei eine Antwortmöglichkeit auszuwählen ist. Aufgaben dieses Formats werden korrekt bearbeitet, indem die zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt wird.

Beispiel:

Gegeben ist die Zahl $\sqrt{5}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

Die Zahl $\sqrt{5}$ liegt nicht in \mathbb{R} .	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ liegt in \mathbb{Z} , aber nicht in \mathbb{N} .	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ ist rational.	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ liegt in \mathbb{Q} und in \mathbb{R} .	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ kann man nicht als periodische Dezimalzahl darstellen.	<input type="checkbox"/>
Die Zahl $\sqrt{5}$ kann als Bruch dargestellt werden.	<input type="checkbox"/>

c) x aus 5

Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei eine, zwei, drei, vier oder fünf Antwortmöglichkeiten auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/Gleichung(en) ... an!“ Aufgaben dieses Formats werden korrekt bearbeitet, indem alle zutreffenden Antwortmöglichkeiten (d. h. mindestens eine zutreffende Antwortmöglichkeit) angekreuzt werden.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen $f(x) = 4 - 2x$ und $g(x) = \sqrt{4x}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f(4) = g(2)$	<input type="checkbox"/>
$S = (2 4)$	<input type="checkbox"/>
$f(2) = g(2)$	<input type="checkbox"/>
$S = (1 2)$	<input type="checkbox"/>
$f(4) = g(4)$	<input type="checkbox"/>

5. Zuordnungsformat

Bei diesen Aufgaben sollen Informationen zugeordnet werden (z. B. anhand von Buchstaben, Pfeilen etc.). Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Aufgaben dieses Formats werden korrekt bearbeitet, indem die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der entsprechenden Buchstaben den jeweils zutreffenden Aussagen zugeordnet werden. Die Anzahl der Antwortmöglichkeiten stimmt nicht immer mit der Anzahl der Aussagen überein.

Beispiel:

Mit Exponentialfunktionen können Abnahme- und Zunahmeprozesse beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den angegebenen Funktionsgleichungen die jeweils beschriebenen Vorgänge zu!

Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle verdoppelt sich täglich.		A	$G(t) = 1 \cdot 0,5^t$ (t in Tagen)
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle verringert sich täglich um 15 %.		B	$G(t) = 1 \cdot 1,85^t$ (t in Tagen)
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle nimmt täglich um 85 % zu.		C	$G(t) = 1 \cdot 0,85^t$ (t in Tagen)
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle nimmt täglich um 50 % ab.		D	$G(t) = 1 \cdot 2^t$ (t in Tagen)
		E	$G(t) = 1 \cdot 1,5^t$ (t in Tagen)
		F	$G(t) = 1 \cdot 1,2^t$ (t in Tagen)

6. Konstruktionsformat

Hier sollen in ein vorgegebenes Koordinatensystem (dessen Achsenskalierung nicht standardisiert ist) entsprechende Graphen, Punkte, Vektoren o. Ä. eingetragen werden.

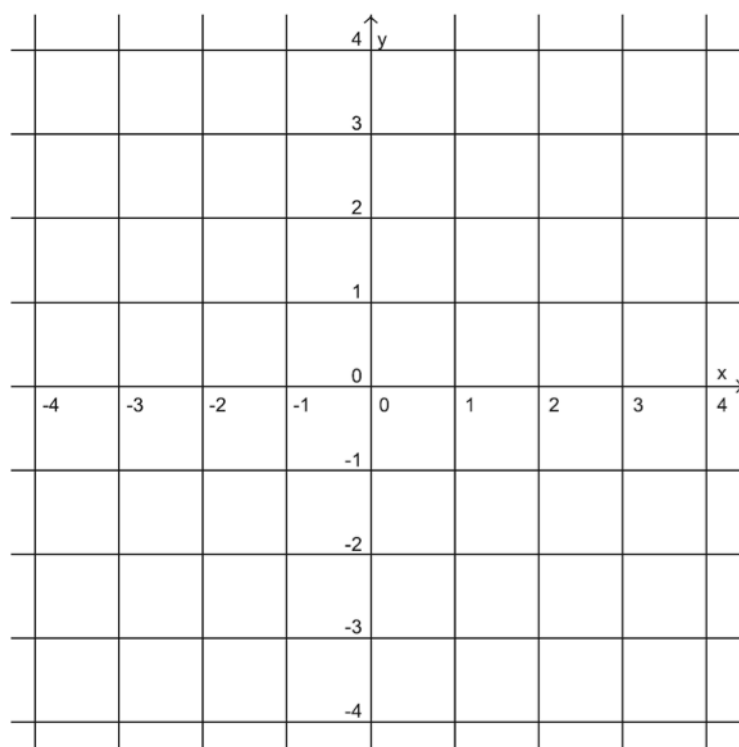
Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Beispiel:

Der Verlauf einer linearen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = k \cdot x + d$ wird durch ihre Parameter k und d mit $k, d \in \mathbb{R}$ bestimmt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie einen möglichen Graphen einer linearen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = k \cdot x + d$ mit den gegebenen Parametern $k = \frac{2}{3}$ und $d < 0$ in das folgende Koordinatensystem ein!



Es kann gerade für die ersten an der standardisierten Reifeprüfung teilnehmenden Jahrgänge von Schülerinnen und Schülern günstig sein, ihnen die verschiedenen Antwortformate zu vermitteln und diese auch bei Schularbeiten einzusetzen. Keinesfalls sollen jedoch Schularbeiten ausschließlich aus solchen Aufgaben bestehen – zumal die Konstruktion echter Prüfungsaufgaben (wie der im Rahmen der standardisierten Reifeprüfung eingesetzten Aufgaben) von einer einzelnen Lehrerin/einem einzelnen Lehrer in der notwendigen Qualität nicht leistbar ist, da der notwendige Qualitätszyklus der Aufgabenentwicklung, welcher für die Klausur notwendig ist, nicht umgesetzt werden kann.

Vermittlung allgemeiner Testbearbeitungsstrategien

Das erworbene grundlegende mathematische Fachwissen ist maßgeblich verantwortlich für das Ergebnis der Reifeprüfung, die als letzte Abschluss- bzw. Berechtigungsprüfung weitreichende Konsequenzen für die Schulabgänger/innen hat – nämlich die formale Berechtigung, eine tertiäre Bildungseinrichtung besuchen zu dürfen. Damit durch unbekannte Antwortformate keine Nachteile für die Schüler/innen entstehen, ist es notwendig, zur Vorbereitung auf die Prüfungssituation auch Bearbeitungsstrategien im Vorfeld zu erläutern. Hinweise auf die Charakteristika der Prüfung bzw. die Aufgabenformate können helfen, die Prüfungssituation besser zu meistern.

Folgende Strategien erscheinen für die Bearbeitung günstig:

1. Schüler/innen müssen sich bei der Bearbeitung nicht an die vorgegebene Reihenfolge der Aufgaben halten.
2. In der vorgegebenen Zeit sollen möglichst viele Aufgaben gelöst werden. Daher sollen Schüler/innen zunächst die Aufgaben lösen, die ihnen leichter fallen bzw. vertrauter erscheinen und sich nicht unnötig lange bei Aufgaben aufhalten, die ihnen schwerfallen.
3. Bei Multiple-Choice-Aufgaben sollen zunächst alle Antwortmöglichkeiten betrachtet werden, bevor die Lösung angekreuzt wird.
4. Es ist gegebenenfalls klüger, bei Multiple-Choice-Aufgaben die vermutlich richtige Lösung zu schätzen, als die Aufgabe unbearbeitet zu lassen.

Beurteilungsschema

Die Beurteilung der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung wird im Rahmen der Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) erfolgen, deren exakter Erfüllung in der Tradition des österreichischen Mathematikunterrichts bislang noch keine allzu hohe Bedeutung zugemessen wurde bzw. wird. Traditionen dürfen zwar keine Rolle bei der Beurteilung spielen, trotzdem können sie in Anbetracht der zur Verfügung stehenden Zeit nicht unberücksichtigt bleiben. Daher ist das nachfolgende Schema auf Basis der Berücksichtigung der Erfüllung der LBVO sowie vorherrschender Traditionen entstanden – also auch unter der entsprechenden Berücksichtigung fachdidaktischer und fachlicher Gegebenheiten. Zu betonen ist, dass mit dem vorliegenden Modell versucht wurde, „Härten“ abzuschwächen bzw. aufzuheben, die die LBVO aufgrund ihrer allgemeinen Gültigkeit beinhaltet. Dieser Anspruch ist ein aus beurteilungstechnischer Sicht sehr hoher, der nur in Verbindung mit der Gestaltung der Prüfungshefte zur schriftlichen Reifeprüfung betrachtet werden kann.

Grundsätzlich ist zu betonen, dass den Typ-1-Aufgaben im Rahmen der schriftlichen Klausur eine wesentliche Rolle zukommt. Die Typ-2-Aufgaben sind für die Vergabe der Noten „Befriedigend“, „Gut“ und „Sehr gut“ relevant. Allerdings enthalten auch Typ-2-Teilaufgaben Komponenten, die für die Beherrschung der Grundkompetenzen relevant sind, also auch für das „Genügend“. Das zugrunde liegende Schema kann wie folgt erläutert werden:

- Die Typ-1-Aufgaben („Grundkompetenzen“) stellen den gemäß LBVO definierten „wesentlichen Bereich“ dar und decken verschränkt Grundkompetenzen ab. Dazu kommen einzelne Komponenten von Typ-2-Aufgaben, die ebenfalls noch für die Überprüfung der Grundkompetenzen herangezogen werden.
- Die Typ-2-Aufgaben („Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen“) stellen die „(weit) über das Wesentliche hinausgehenden Bereiche“ dar und sind auch als Ausgleich für Mängel in der Durchführung von Typ-1-Aufgaben heranzuziehen. Einige dieser Aufgaben enthalten Komponenten, die auch noch den „wesentlichen Bereichen“ zuzuordnen sind.

Um ein „Genügend“ zu erreichen, müssen „die wesentlichen Bereiche überwiegend erfüllt“ sein, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Typ-1-Aufgaben unter Einbeziehung von im Beurteilungsschema ausgewiesenen Grundkompetenzen von Typ-2-Aufgaben in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte richtig gelöst werden.

Für ein „Befriedigend“ müssen, aufbauend auf den Bedingungen des „Genügend“, die „wesentlichen Bereiche zur Gänze“ erfüllt werden (Typ-1-Aufgaben und Komponenten von Typ-2-Teilaufgaben) oder die gänzliche Erfüllung kann durch Anteile von Typ-2-Aufgaben entsprechend dem jeweiligen Punkteschema erreicht werden. Daher ist die Punktezahl des „Genügend“ für die Grundaufgaben zu erfüllen, und zusätzlich sind alle Typ-1-Aufgaben oder ein entsprechender Anteil an Typ-2-Aufgaben richtig zu lösen.

Für die Vergabe der Note „Gut“ muss, aufbauend auf den Anforderungen für das „Befriedigend“, ein höherer Anteil von Typ-1- und Typ-2-Aufgaben gelöst werden.

Für die Vergabe der Note „Sehr gut“ müssen zusätzlich zu den Typ-1-Aufgaben fast alle Typ-2-Aufgaben gelöst sein.

Lehrer/innen erhalten am Tag der Klausur genaue Vorgaben zur Korrektur und Beurteilung. Zum einen werden für jede Aufgabe präzise Lösungserwartungen zur Verfügung gestellt, zum anderen ermöglicht ein Lösungsschlüssel die Einordnung der Schülerleistungen in das vorgegebene Beurteilungsschema. Während die Typ-1-Aufgaben grundsätzlich einer „0“- und „1“-Beurteilung (richtig/falsch) unterworfen sind, können für die im Vergleich dazu „offeneren“ Typ-2-Aufgaben jeweils 0 bis 2 Punkte pro Teilaufgabe vergeben werden.

Für die Beurteilenden steht darüber hinaus ein automatisiertes Berechnungsblatt zur Notenermittlung bereit, das nach fachdidaktischen, fachlichen und rechtlichen Vorgaben entwickelt wurde. Diese Datei in aktueller Letztversion ist von Lehrpersonen für die Korrektur der Arbeiten zu verwenden und wird zu gegebener Zeit von der Website des BIFIE downloadbar sein.

Für individuelle Rückfragen richtet das BIFIE einen mit Fachexpertinnen und -experten besetzten Helpdesk ein, der allen beurteilenden Lehrerinnen und Lehrern nach der Klausur zur Verfügung steht.

		Typ-1-Aufgaben		Typ-2-Aufgaben	
Stufen – verbale Beschreibung		„Schülerinnen und Schüler verfügen über ein mathematisches Grundwissen, welches durch einen Katalog von Grundkompetenzen festgelegt ist, und das sie in einer elementaren, für jeweils eine bestimmte Grundkompetenz (proto-) typischen Anwendungs- bzw. Kommunikationssituation (direkt) einsetzen können. Besondere Eigenständigkeit in der Anwendung, Reflexion und Vernetzung dieses Grundwissens ist dabei nicht erforderlich.“		Einzelne Komponenten aus Typ-2-Aufgaben werden zusätzlich zur Überprüfung der Grundkompetenzen herangezogen.	„Schülerinnen und Schüler können ihr mathematisches Grundwissen in komplexeren und für sie ungewohnten (neuartigen) Anwendungs- und Kommunikationssituationen eigenständig und reflektiert einsetzen, wobei auch die Vernetzung mehrerer Grundkompetenzen oder die Reflexion über (die) Grundkompetenz(en) erforderlich sein kann.“
Graduelle Abstufungen		wesentliche Bereiche		über das Wesentliche	
		„überwiegend erfüllt“	„zur Gänze erfüllt“	„hinausgehend“	„weit hinausgehend“
Genügend*	entw.				
	oder		Defizit ←		
Befriedigend*	entw.				
	oder		Defizit ←		„hinausgehend“
Gut*	entw.				
	oder		Defizit ←		„hinausgehend“
Sehr gut*	entw.			„hinausgehend“	„weit hinausgehend“
	oder		Defizit ←	„hinausgehend“	„weit hinausgehend“

* Es werden die jeweiligen Minimalvarianten dargestellt.

Hinsichtlich der Formulierung ist hervorzuheben, dass eine enge Abstimmung zwischen Vertreterinnen und Vertretern des Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) und des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK) stattgefunden hat. In der vorliegenden Formulierung wurde das zuvor ausgeführte Konzept als Grundlage vollständig berücksichtigt. Anhand der entsprechenden Formulierungen ist deutlich erkennbar, welches mathematische (Grund-)Wissen bzw. welches Vernetzungs- oder Reflexionswissen über mathematisches (Grund-)Wissen bei Schülerinnen und Schülern ausgebildet ist.