Funktionen

Eine Funktion f ist eine eindeutige Zuordnung zwischen zwei Werten. Für jeden zulässigen Eingabewert x legt sie eindeutig einen Funktionswert y fest.

Unabhängige Variable: x

Abhängige Variable (hängt von x ab): y

Definitionsmenge D_f : Menge aller zulässigen Eingabewerte x für eine Funktion f .

Wertemenge W_f : Menge aller auftretenden y Werte einer Funktion f .

Funktionen können als Funktionsterm (Funktionsgleichung), als Wertetabelle oder als Funktionsgraph dargestellt werden.

Funktionsgleichung:

$y=f(x)$ (y ist gleich f von x).

oder

$f: x \rightarrow y$ (f bildet Werte aus der Menge aller x auf die Menge aller y ab).

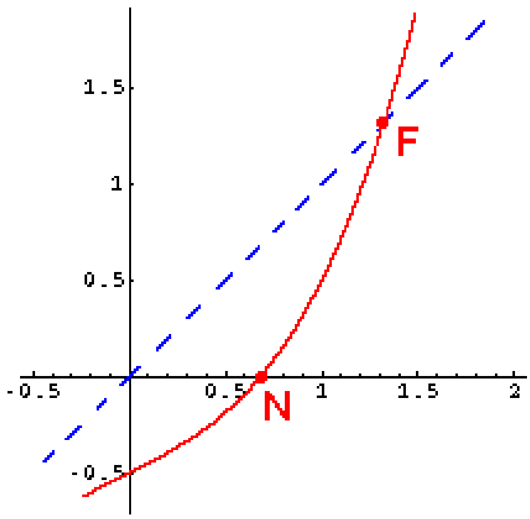
Wertetabelle: Gegenüberstellung aller x mit allen y Werte in einer Tabelle.

Funktionsgraph: graphische Darstellung der Funktion in einem Koordinatensystem.

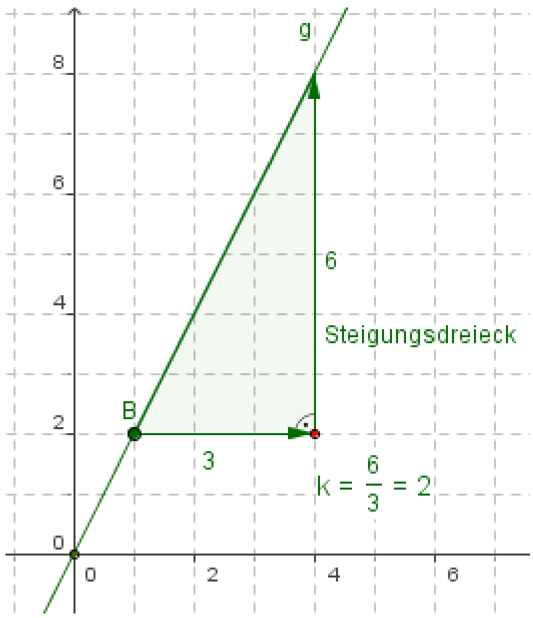
Nullstelle: eine Stelle einer Funktion, an welcher $f(x)=0$ (die Funktion schneidet die x-Achse)

Spurpunkt: jene Stellen einer Funktion, an welcher die Funktion eine der beiden Achsen schneidet (x-Achse oder y-Achse).

Fixpunkt: eine Stelle einer Funktion, an welcher $f(x)=x$. In diesem Punkt (z.B. (0 | 0), (3 | 3)) schneidet die Funktion die 1. Mediane (y = x).

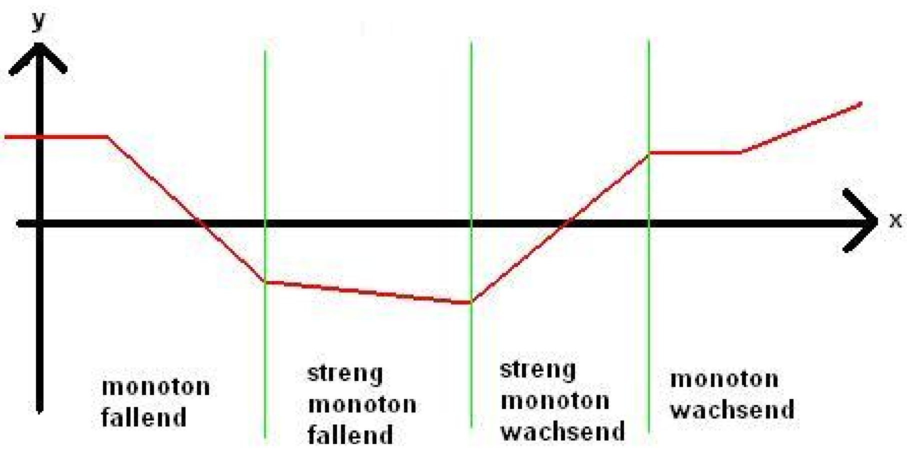


Steigung: jener Wert, um welcher sich y für jeden Anstieg in x erhöht. Veränderung der y-Werte relativ zu einander. Berechenbar als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Differenzenquotient).

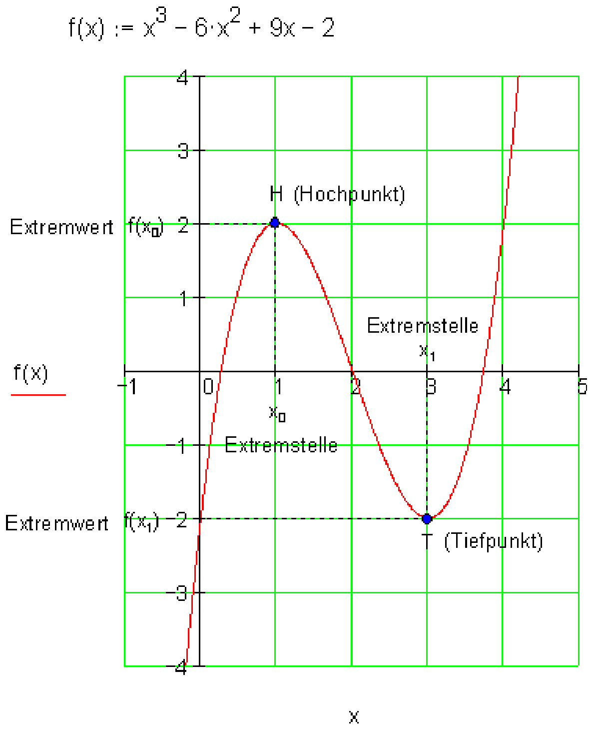


Monotonie: das Steigungsverhalten einer Funktion.

1. **Monoton wachsend/steigend:** wenn $x_1 < x_2$ und gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$
2. **Streng monoton wachsend/steigend**: wenn $x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$
3. **Monoton fallend:** wenn $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$
4. **Streng monoton fallend**: wenn $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$



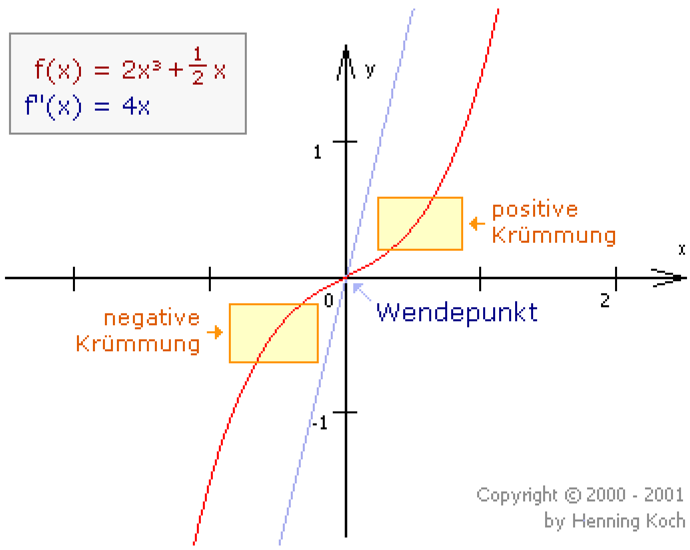
Extrempunkt: eine Stelle einer Funktion, an welcher sich das Monotonieverhalten verändert. Es gibt Hochpunkte (Maxima) und Tiefpunkte (Minima). An einem Extrempunkt ist die Steigung k gleich 0 und daher erhält man in diesem Punkt eine waagrechte Tangente.



Krümmung: Veränderung der Steigung, wobei die Funktion sein kann:

1. **Positiv bzw. linksgekrümmt**
2. **Negativ bzw. rechtsgekrümmt**

Wendepunkt: eine Stelle einer Funktion, an welcher sich die Krümmung ändert. In genau diesem Punkt ist die Krümmung gleich 0.

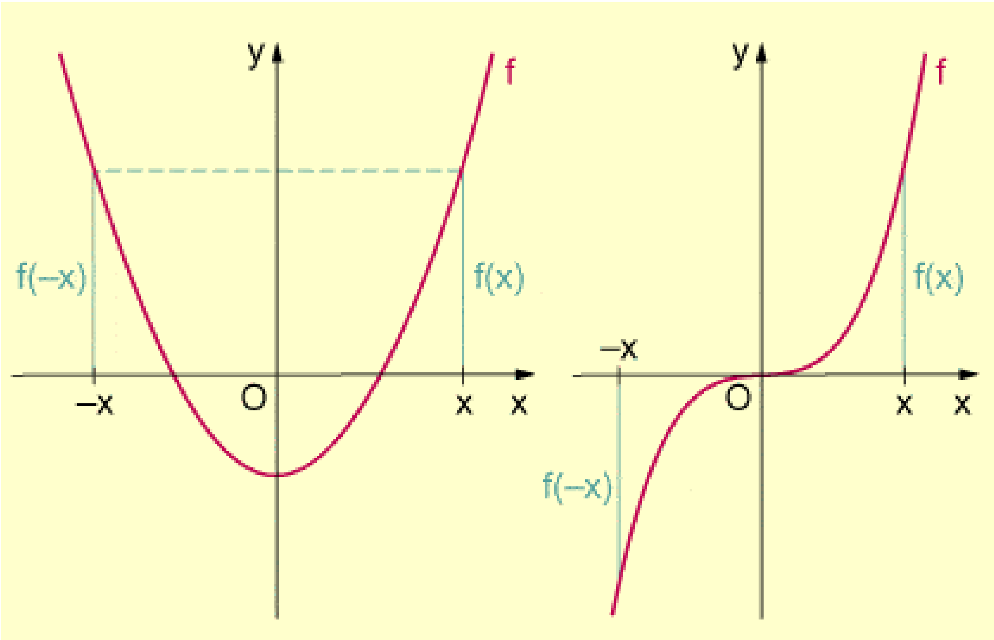


Sattel- bzw. Terassenpunkt: eine Stelle einer Funktion, die sowohl Extrempunkt als auch Wendepunkt ist.

Symmetrie:

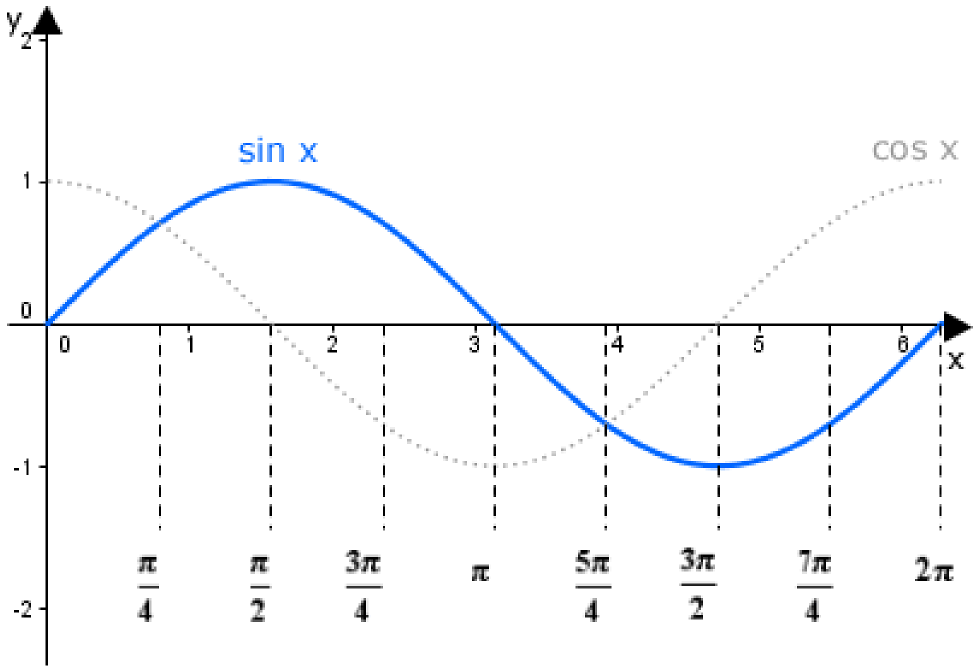
1. **Gerade bzw. Achsensymmetrisch:** wenn gilt $f(-x)=f(x)$, die Funktion ist also an der y-Achse gespiegelt.

2. **Ungerade bzw. Punktsymmetrisch:** wenn gilt $f(-x)=-f(x)$



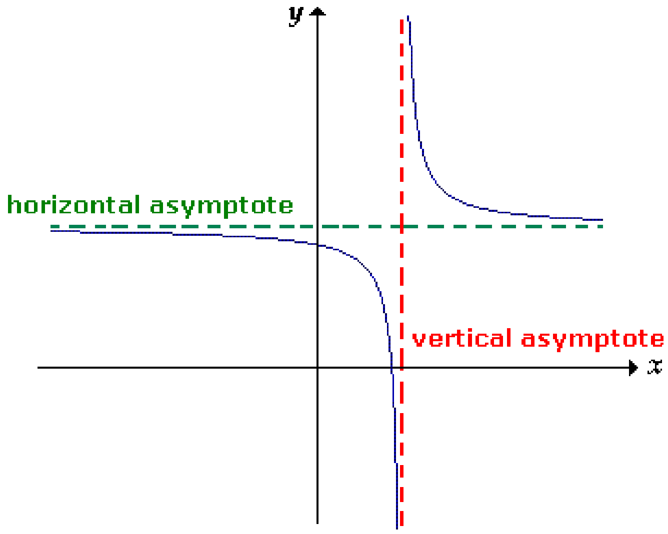
Links: Achsensymmetrisch. Rechts: Punktsymetrisch.

Periodizität: Eine Funktion heißt periodisch mit Periode p, wenn sich ihre Werte in einem Abstand p wiederholen, sodass gilt: $f(x)=f(x+p)$



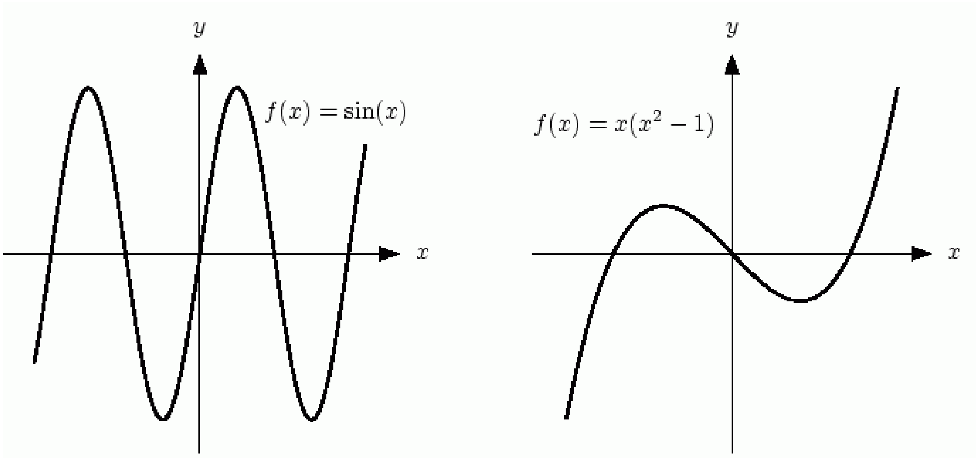
Sinus- und Cosinusfunktion, jeweils mit Periode p = 2π

Asymptote: jene Gerade, der der Funktionsgraph beliebig nahe kommt, ohne sie jemals zu berühren.

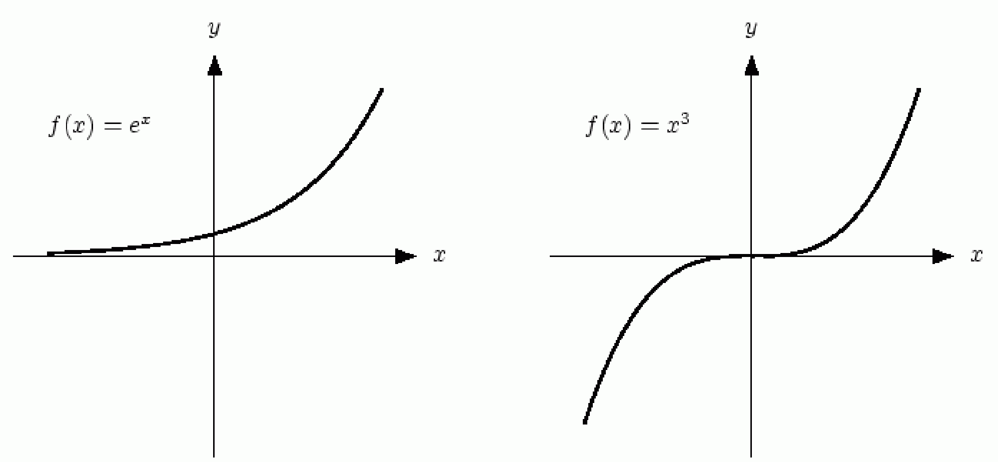


Bijektivität: eine Funktion kann sein:

1. **Injektiv:** jeder y Wert kommt **höchstens** ein Mal vor.
2. **Surjektiv:** jeder y Wert kommt kommt **mindestens** ein Mal vor.
3. **Bijektiv**: jeder y Wert kommt **genau** ein Mal vor.



Links: Gar nichts. Rechts: Surjektiv.



Links: Injektiv. Rechts: Bijektiv.

Lineare Funktionen

Allgemeine Form: $y = kx + d$

Beispiele: $f(x) = 2x + 1$ oder $f(x) = x + 6$

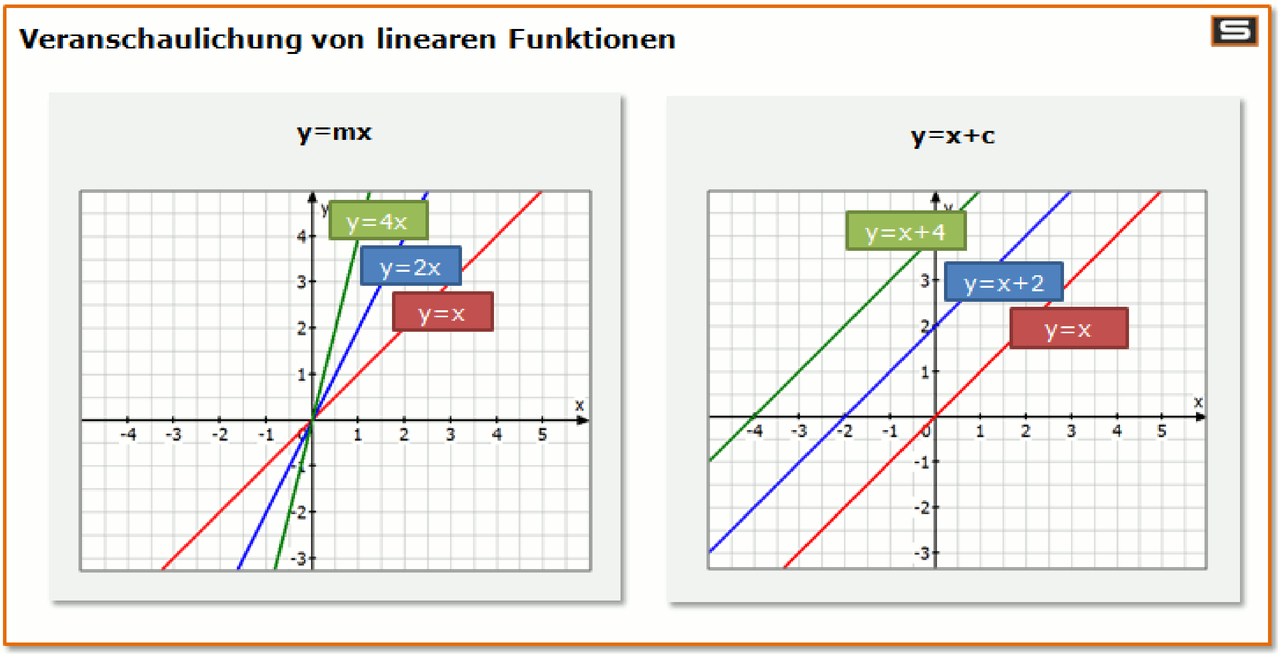
Homogene lineare Funktion (x und y sind **direkt proportional**): $y = kx$

Inhomogene lineare Funktion: $y = kx + d$

Wobei k die Steigung ist und bestimmt wie steil oder flach die Funktion ist und d der Abstand von der x-Achse bzw. der Abstand vom Ursprung ist.

Eine lineare Funktion hat ihre **Spurpunkte** bei (0 | d) (y-Achse) und ($-\frac{d}{k}$ | 0) (x-Achse).

Für eine lineare Funktion mit der Steigung k gilt: $f(x+1) = f(x) + k$



Potenzfunktionen

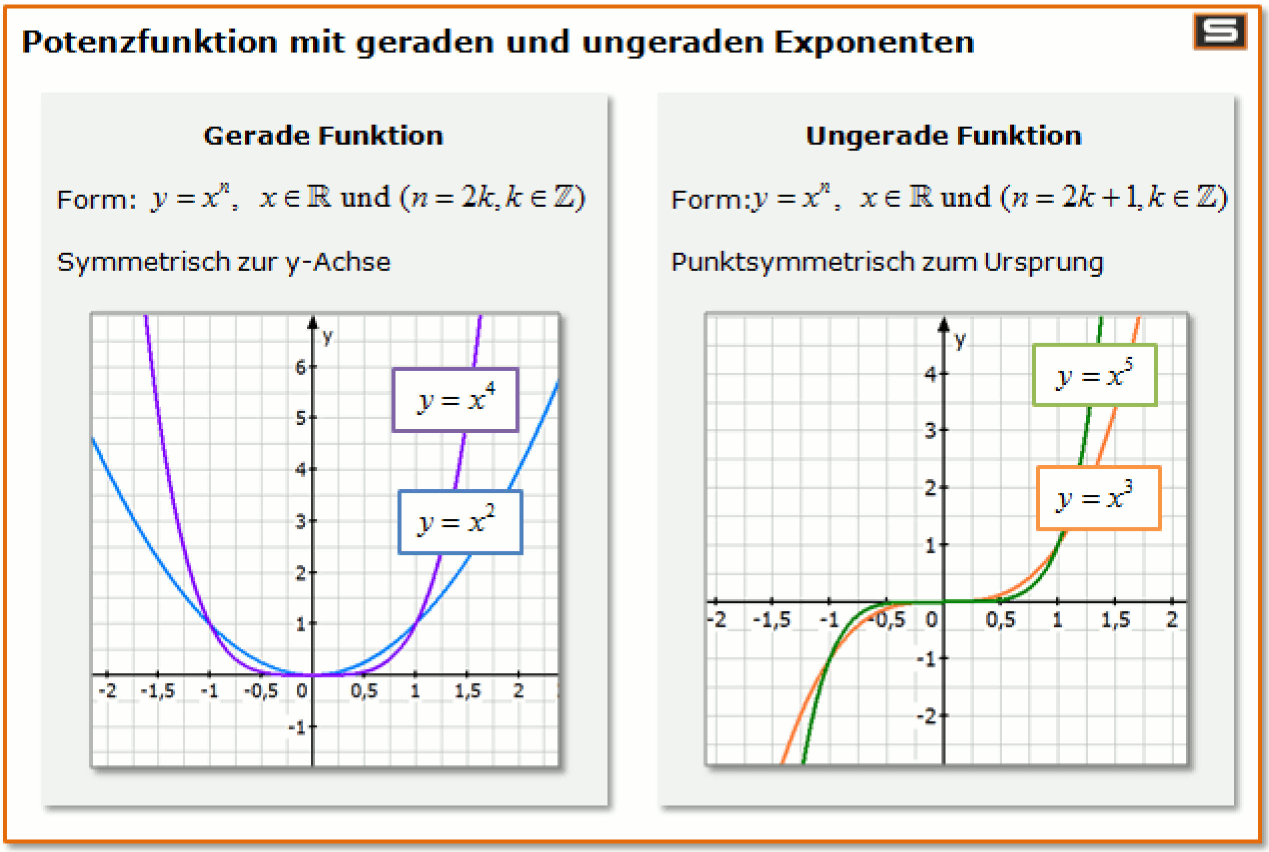
Allgemeine Form: $1 \leq \text{Anzahl der Nullstellen} \leq n$

Wenn gilt: $z \in Z \wedge z > 0$ **:**

Beispiele: $f(x) = 2x^4 + 2$ oder $f(x) = x^3 - 1$

Wobei der Koeffizient a die Breite der Funktion, der Exponent z auch die Breite bzw. anfängliche Abflachung (wenn x < 1) und b den Abstand vom Ursprung bestimmt.

Hierbei gilt dass wenn der Exponent z gerade ist, die Funktion gerade bzw. achsensymmetrisch ist und wenn ungerade die Funktion ungerade bzw. punktsymmetrisch ist.



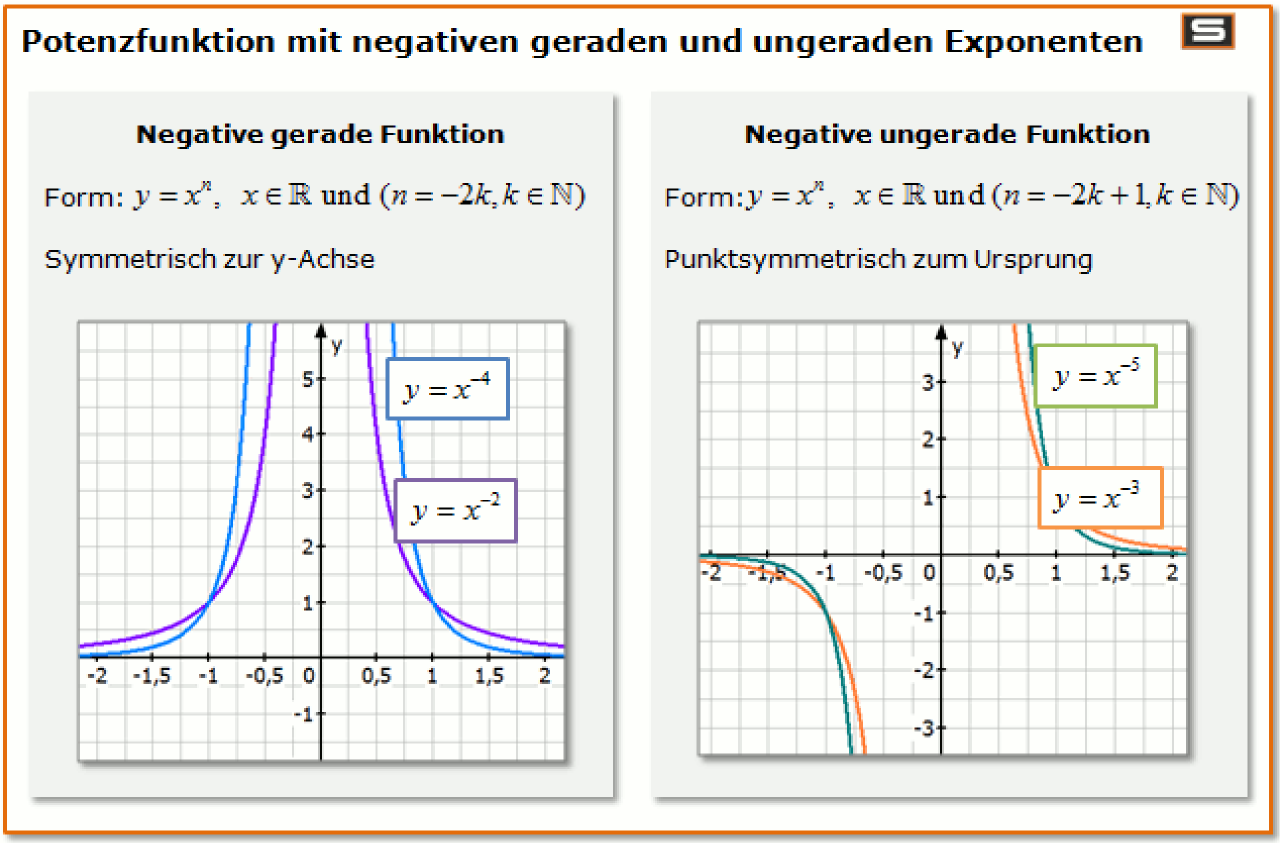
Wenn gilt: $z \in Z \wedge z < 0$ **:**

Allgemein der Form: $f(x) = ax^{-b} + c$ bzw. $f(x) = \frac{a}{x^b} + c$

Beispiele: $f(x) = x^{-2} + 3$ oder $f(x) = 3x^{-1}$

Man spricht von einer **indirekt proportionalen** Funktion.

Alle indirekt proportionalen Potenzfunktionen haben eine Asymtote, da die Funktion für $x = 0$ nicht definiert ist.

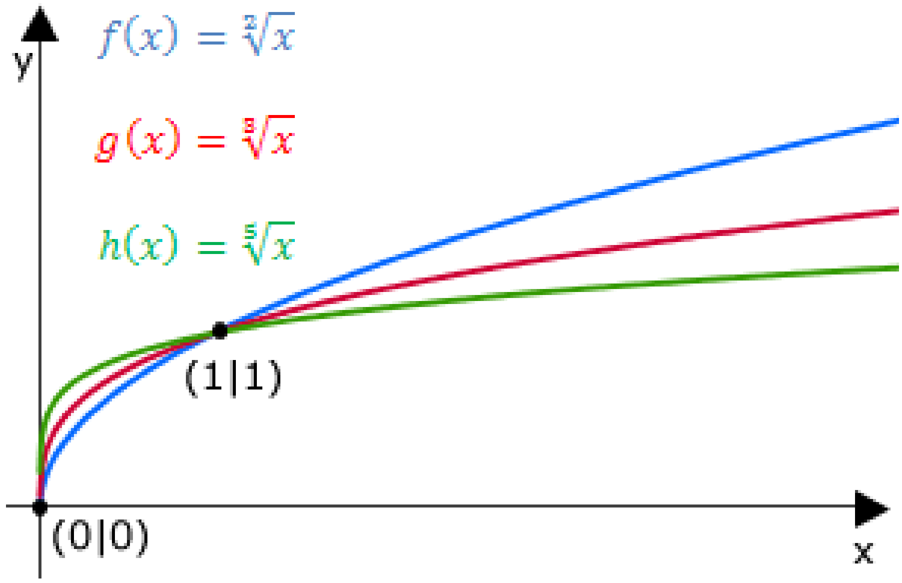


Wenn gilt: $z \in R$

Allgemein der Form: $f(x) = ax^{\frac{b}{c}} + d$ bzw. $a\sqrt[c]{x^b} + d$

Beispiele: $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2$ oder $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$

Hier spricht man von einer Wurzelfunktion.

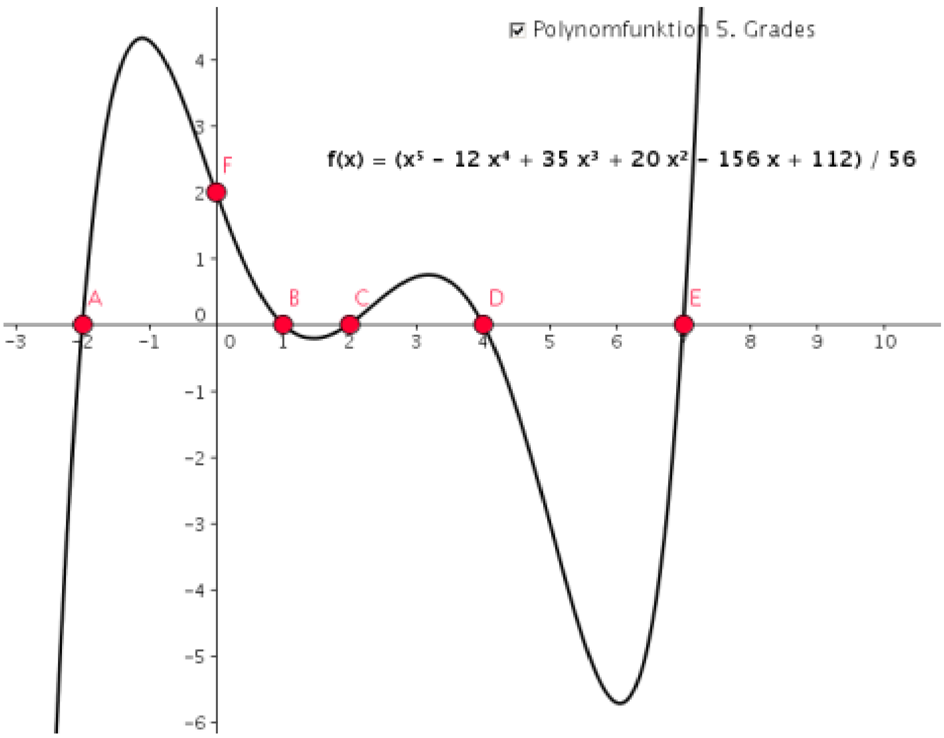


Polynomfunktionen

Allgemeine Form: f(x) = $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)+b$

Beispiele: $f(x)=2x^3+x^2+5x-3$ oder $f(x)=x^3+2x$

Zusammenhänge für eine Polynomfunktion n -ten Grades
$0\leq Anzahl\ der\ Nullstellen\leq n$ Wenn n gerade, sonst $1\leq Anzahl\ der\ Nullstellen\leq n$
$1\leq Anzahl\ der\ Extremstellen\leq n-1$
$0\leq Anzahl\ der\ Wendepunkte\leq n-2$



Man beachte bei obiger Funktion die Zusammehänge. Die Funktion ist 5. Grades und hat 5 Nullstellen, also stimmt $0\leq Anzahl\ der\ Nullstellen\leq n$, hat 4 Extrema, also stimmt $1\leq Anzahl\ der\ Extremstellen\leq n-1$ und hat 3 Wendepunkte, also stimmt . $0\leq Anzahl\ der\ Wendepunkte\leq n-2$.

Exponentialfunktionen

Allgemeine Form: $f(x)=ab^x+c$

Wobei a die Breite der Funktion und den Abstand vom Ursprung, b die Steigung und c auch den Abstand vom Ursprung bestimmt.

Da b die Steigung bestimmt, gilt für Exponentialfunktionen: $f(x+1)=f(x)*b$

Beweis für $f(x)=2^x$ und $x=9$: $2^{10}=2^9*2$

Wenn gilt: $b\in Q\wedge b\geq 1$

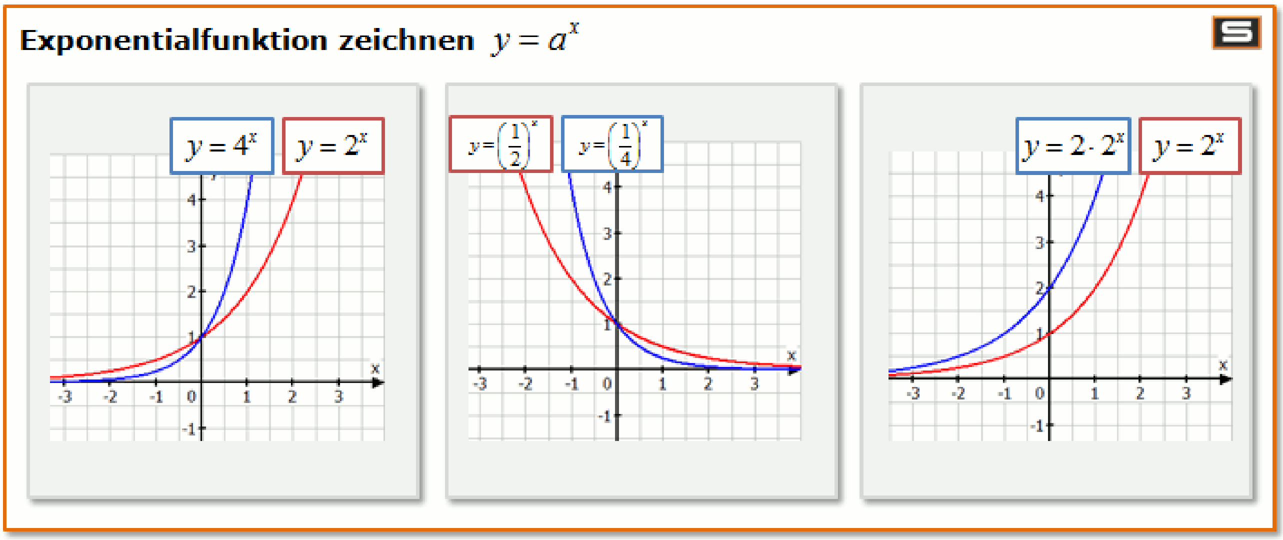
Beispiele: $f(x)=3^x-2$ oder $f(x)=2*4^x+3$

Hierbei wird, der Koeffizient a vernachlässigt, y mit steigendem x größer.

Wenn gilt: $b\in Q\wedge 0\leq b<1$

Beispiele: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ oder $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+5$

Hierbei wird, der Koeffizient a vernachlässigt, y mit steigendem x kleiner, da eine rationale Zahl zwischen 0 und 1, mit sich selbst multipliziert, kleiner wird. $0.5^2=0.5*0.5=0.25$



Wenn gilt: $b=e$ (Euler'sche Zahl, 2.718...)

Allgemein angegeben als: $f(x)=a*e^{\lambda * x}+b$

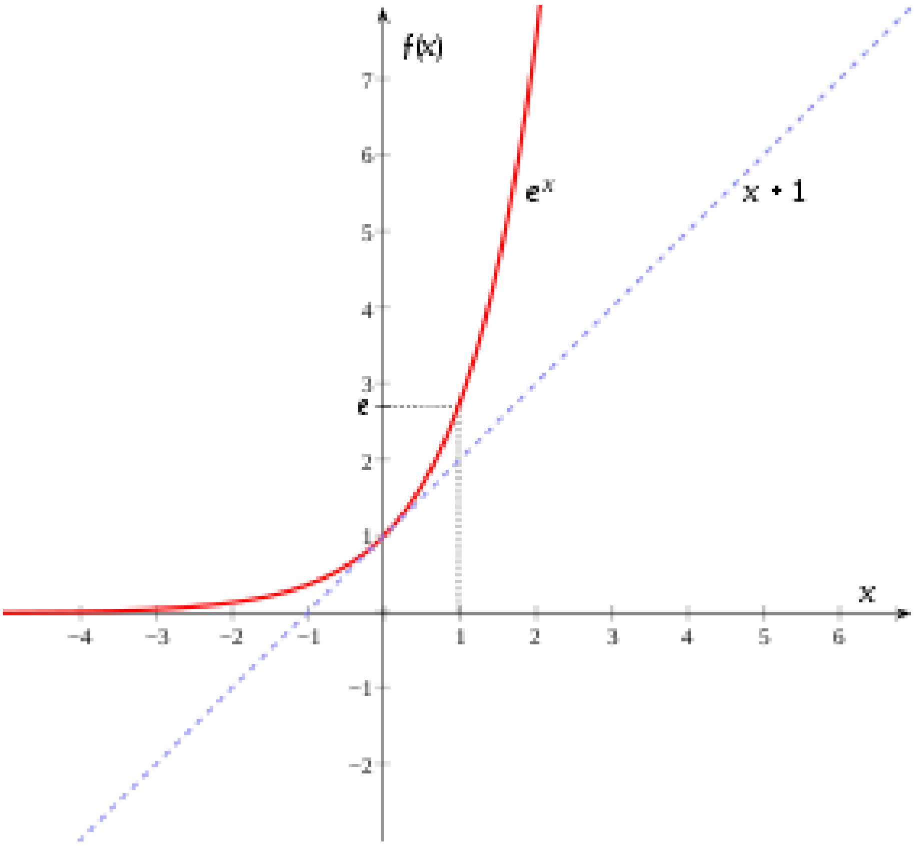
Beispiele: $f(x)=e^{2}+3$ oder $f(x)=5e^{4}-3$

Hierbei ist λ die Wachstums- bzw. Zerfallskonstante.

Eigenschaft: $(e^{x})'=e^{x}$

Halbwertszeit: x-Wert bzw., wenn auf der x-Achse t (Zeit) ist, Zeit nach welcher sich ein ursprünglicher Wert f(x) halbiert hat, sodass $f(Halbwertszeit)=\frac{f(Anfang)}{2}$

Verdoppelungszeit: x-Wert nach dem sich ein ursprünglicher Wert verdoppelt hat.



Sinus- und Cosinusfunktionen

Allgemeine Form: $f(x) = a \sin(bx) + c$ bzw. $f(x) = a \cos(bx) + c$

Hierbei bestimmt a die Amplitude (Maximaler Wert für y) und b die Breite bzw. Frequenz bzw. Periode der Funktion.

Eigenschaft: $\sin(90 + x) = \cos(x)$ bzw. $\cos(90 - x) = \sin(x)$.

Man bemerke: $90° = \frac{\pi}{2} \mathit{Radien}$.

Eigenschaft: Beide Funktionen haben eine Periode p von 2π .

Eigenschaft: $[\sin(x)]' = \cos(x)$ und $[\cos(x)]' = -\sin(x)$.

Eigenschaft (Kettenregel): $[\sin(kx)]' = k \cos(x)$ und $[\cos(kx)]' = -k \sin(x)$.

Extremstellen: Periodisch mit $p = \pi$.

Nullstellen für Sinusfunktion: Periodisch mit $p = k * \pi$.

Nullstellen für Cosinusfunktion: Periodisch mit $p = \frac{\pi}{2} + k * \pi$.