

# Zahlenmengen

## Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ist die exklusivste und fundamentalste Zahlenmenge, welche nur positive, ganze Zahlen beeinschließt.  $\mathbb{N}$  ist bezüglich der **Addition** und **Multiplikation** abgeschlossen, nicht aber bezüglich der Subtraktion und Division.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_\delta = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

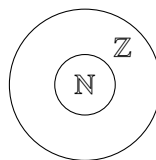
$$\mathbb{N}_\approx = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

Eigenschaften der natürlichen Zahlen:

- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl: 0
- Jede natürliche Zahl  $n$  außer 0 hat einen Vorgänger  $n - 1$
- Jede natürliche Zahl  $n$  hat einen Nachfolger  $n + 1$
- Es gibt keine größte natürliche Zahl
- Zwischen zwei natürlichen Zahlen gibt es keine weitere natürliche Zahl

## Ganze Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  schließt die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ein, erweitert sie aber auf negative ganze Zahlen. Somit ist  $\mathbb{Z}$  bezüglich der **Addition**, **Multiplikation** und nun auch der **Subtraktion**, jedoch noch nicht bezüglich der Division, abgeschlossen.

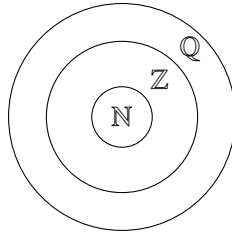


Eigenschaften der ganzen Zahlen:

- Jede ganze Zahl  $z$  hat einen Vorgänger  $z - 1$  und einen Nachfolger  $z + 1$
- Es gibt weder eine größte noch eine kleinste ganze Zahl
- Zwischen zwei ganzen Zahlen gibt es keine weitere ganze Zahl

## Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erweitert die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  auf jene *endlichen* oder *unendlichen, periodischen* Zahlen  $r$ , welche als Bruch  $\frac{z}{n}$  aus zwei ganzen Zahlen  $z$ , dem Zähler, und  $n$ , dem Nenner, darstellbar sind. Daher ist  $\mathbb{Q}$  bezüglich der **Addition, Subtraktion, Multiplikation** und nun auch der **Division** abgeschlossen.



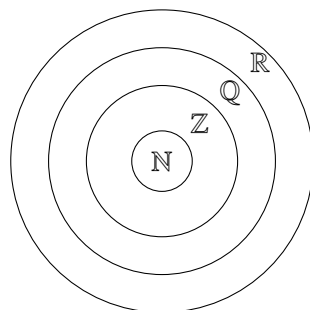
Eigenschaften der rationalen Zahlen:

- Zwischen zwei rationalen Zahlen lässt sich stets eine weitere rationale Zahl einfügen
- Daher hat eine rationale Zahl  $r$  weder einen definitiven Vorgänger noch Nachfolger
- Eine rationale Zahl  $r$  lässt sich als Bruch  $\frac{z}{n}$  darstellen, wo gilt  $z, n \in \mathbb{Z}$
- Auch unendliche Zahlen können rational sein, wenn sie sich als Bruch darstellen lassen:  $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$
- Es gibt keine größte oder kleinste rationale Zahl

## Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  erweitert jene der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  auf unendliche, nicht-periodische Zahlen, welche sich nicht als Bruch darstellen lassen. Beispiele dafür wären  $\pi$ ,  $e$  oder  $\sqrt{2}$ . Formal gesehen vereinigt  $\mathbb{R}$  die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  mit der Menge der *irrationalen* Zahlen  $\mathbb{I}$ .

Erst  $\mathbb{R}$  ist bezüglich dem Wurzelziehen gänzlich abgeschlossen. Wurzelzahlen, welche zu einer rationalen Zahl vereinfacht werden können, beispielsweise  $\sqrt{9} = 3$  oder  $\sqrt{0.25} = 0.5$ , gehören zwar schon zur Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , viele andere Wurzelzahlen wie  $\sqrt{3}$  oder  $\sqrt{5}$  sind jedoch unendlich und ohne Periode, daher irrational bzw. reell.



$$\mathbb{R} = \begin{cases} \text{rationale Zahlen } \mathbb{Q} & \left\{ \begin{array}{l} \text{endliche Dezimalzahlen: } 1.2, \frac{3}{4}, 45, \sqrt{4} \dots \\ \text{unendliche, periodische Dezimalzahlen: } \frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \dots \end{array} \right. \\ \text{irrationale Zahlen } \mathbb{I} \rightarrow \text{unendliche, nicht-periodische Dezimalzahlen } \sqrt{5}, \pi, e, \dots \end{cases}$$