Trigonometrie

Definition

Die Trigonometrie behandelt die Dreiecksvermessung von rechtwinkeligen sowie anderen Dreiecken im Einheitskreis sowie allgemein. Wichtige Funktionen sind hierbei Sinus, Cosinus sowie Tangens, mit welchen man den Sinus- und Cosinussatz bilden kann. Ebenso spielt der Satz des Pythagoras eine bedeutende Rolle.

Schreibweisen

Allgemein ist für die Trigonometrie wichtig, dass man Punkte in einem Koordinatensystem als kartesische Koordinaten oder als Polarkoordinaten anschreiben kann.

Ein kartesisches Koordinatentupel $P(x|y)$ besteht aus einer Variable x, welche einen Abstand auf der Abszisse (x-Achse) beschreibt, sowie einer Variable y, welche die Position des Punktes auf der Ordinate (y-Achse) angibt. Ein Beispiel wäre der Punkt $P(3|4)$.

In Polarschreibweise wird ein Punkt $P[r;\varphi]$ durch einen Winkel φ, der eine Richtung zwischen 0 und 360 Grad angibt, sowie einen Abstand vom Ursprung r (Radius) in die Richtung des Winkels beschrieben. Der vorherige Punkt P wäre als Polarkoordinatentupel so angegeben: $P[5; 53.13°]$

Sinus und Cosinus im Einheitskreis

Sowohl die Sinusfunktion $sin(x)$ als auch die Cosinusfunktion $cos(x)$ beschreiben Seitenverhältnisse zwischen den Seiten a, b, c eines rechtwinkeligen Dreiecks. Besonders im Einheitskreis sind diese Verhältnisse von Interesse. Ein Einheitskreis k ist jener Kreis, dessen Mittelpunkt $M(0|0)$ im Ursprung liegt und dessen Radius r eine Länge von 1 besitzt. Geometrisch wird ein Einheitskreis durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschrieben.

Am Einheitskreis kann jeder Punkt P in Polarform mit $P[1;\varphi]$ und in Kartesischer Form mit $P[\cos\varphi; \sin\varphi]$ angegeben werden. Die Steigung k der Hypothenuse jenes rechtwinkligen Dreiecks, welches zwischen der An- und Gegenkathete des Punktes aufgespannt wird und im Falle des Einheitskreises stets eine Länge von $r = 1$ hat, wird durch die Tangensfunktion $\tan\varphi$ beschrieben. Daraus folgt:

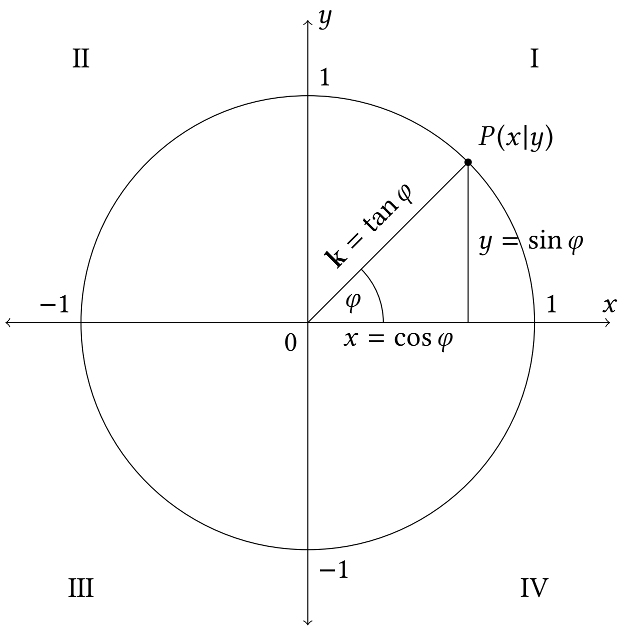
$\sin\varphi$ ... y-Koordinate des Punktes P

$\cos\varphi$ ... x-Koordinate des Punktes P

$\tan\varphi$ ... Steigung k der Hypotenuse im Punkt $P \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$

In dem zwischen $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ aufgespannten rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse $r = 1$, kann man die Seitenverhältnisse auch durch den Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ beschreiben:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$



Ein Einheitskreis mit Mittelpunkt $M(0|0)$ und $r = 1$, in welchem zwischen $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\varphi = 45°$ aufgespannt ist.

Die y-Koordinate des Punktes ist in der oberen Hälte des Einheitskreises, also Quadranten I und II, stets positiv und in der unteren Hälfte, also Quadranten III und IV, negativ. Man überlege sich dazu den Verlauf der Sinusfunktion $\sin(x)$. Sie beginnt mit $x = y = 0$, findet nach $x = 90°$ ihr Maximum, wo $y = 1$, fällt dann bis zu $(x = 180°|y = 0)$ und wechselt dann ihr Vorzeichen. Gegensätzlich dazu wechselt das Vorzeichen der x-Kathete nach Quadranten I und III, was auch mit dem Verlauf der Cosinusfunktion $\cos(x)$ übereinstimmt. Aus diesen Beobachtungen folgt:

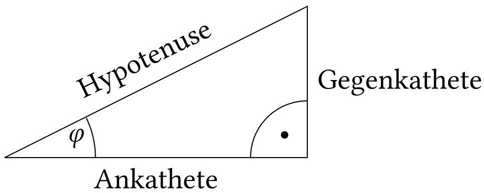
Quadrant	Winkel	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$
I	$0 < \varphi < 90$	+	+
II	$90 < \varphi < 180$	+	-
III	$180 < \varphi < 270$	-	-
IV	$270 < \varphi < 360$	-	+

Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck

Wie vorhin angemerkt beschreiben Sinus und Cosinus Verhältnisse zwischen den Seiten a, b und c in einem rechtwinkligen Dreieck. In diesem bezeichnet man die dem Winkel φ gegenüberliegende Seite als *Gegenkathete*, die anliegende als *Ankathete* und die längste Seite als *Hypotenuse*. Gegen- und Ankathete fallen unter den Sammelbegriff *Kathete*. Für einen Winkel $0 < \varphi < 90$ gilt in einem rechtwinkligen Dreieck somit:

$$\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Nimmt man die Tatsache in Betracht, dass im Einheitskreis die Hypotenuse r stets die Länge 1 besitzt, wird klar, das $\sin\varphi$ gleich der y-Koordinate ist, da dann gilt $\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{1} = y$. Selbes gilt für x und $\cos\varphi$.



Ein rechtwinkliges Dreieck mit Gegen- und Ankathete sowie Hypotenuse und Winkel φ

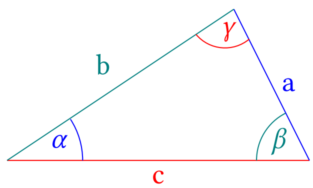
Sinussatz

Der Sinussatz ist eine Reihe von Verhältnissen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks, welche einem helfen können, ein allgemeines Dreieck aufzulösen:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

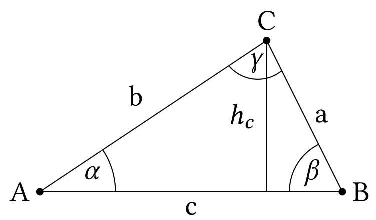
Man bemerke, dass die Proportionalität zwischen Winkelspanne und Länge der gegenüberliegenden Seite daher folgt, dass die Länge jeder Seite im Winkelbogen aufgespannt werden muss. Ein größerer Winkel bedeutet ein breiterer Winkelbogen, in welchem die Seite aufgespannt wird. Dieses Verhältnis besteht zwischen jedem Winkel und seiner gegenüberliegenden Seite. Er wird am besten dann angewendet, wenn man von einem allgemeinen Dreieck kennt:

- eine Seite und zwei Winkel
- zwei Seiten und einen Winkel, welcher von den Seiten nicht eingeschlossen wird



Herleitung des Sinussatzes

Die Herleitung des Sinussatzes ist vergleichsweise einfach. Man nehme ein allgemeines Dreieick und teile es durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke:



Nun lassen sich folgende Verhältnisse zwischen den Seiten a und b, den Winkeln α und β sowie der Höhe h_c finden:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \qquad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

Aus diesen lässt sich folglich die Höhe h_c aus einer der beiden Gleichungen ausdrücken um somit h_c durch den entstehenden Ausdruck in der zweiten Gleichung zu substitutieren:

$$\sin\alpha \cdot b = h_c \qquad \Rightarrow \qquad \sin\beta = \frac{\sin\alpha \cdot b}{a}$$

Diese Gleichung kann nun weiter umgeformt werden indem man beide Seiten durch die Seite b teilt, sodass letztlich gilt:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

Für den Winkel γ und die Seite b müsste man das Dreieick durch eine andere Höhe teilen und das selbe Verfahren anwenden.

Cosinussatz

Der Cosinussatz beschreibt eine Reihe von Verhältnissen, bei welchen eine Seite bzw. ihr gegenüberliegender Winkel von den beiden anderen Seiten eines allgemeinen Dreiecks abhängen:

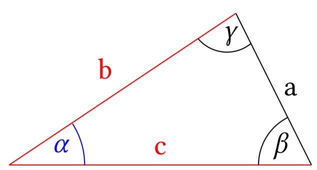
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

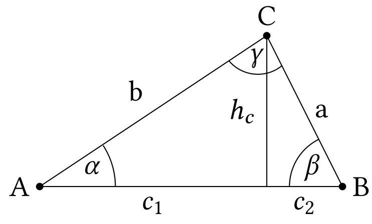
Den Cosinussatz verwendet man am besten dann, wenn man kennt:

- drei Seiten
- zwei Seiten und einen Winkel, der von den Seiten eingeschlossen wird



Herleitung des Cosinussatzes

Die Herleitung des Cosinussatzes ist etwas schwieriger als jene des Sinussatzes. Wieder teilt man ein allgemeines Dreieick durch die Höhe h_c in zwei rechtwinkelige Dreiecke:



Nun bemerke man, dass die Seite b die Hypotenuse des linken rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten c_1 und h_c ist, während die Seite a die Hypotenuse im rechten rechtwinkeligen Dreieck ist, in welchem c_2 und h_c die Katheten darstellen. Daher lässt sich in beiden Dreiecken das Quadrat der Hypotenuse als die Summe der Quadrate der Kathetenlängen beschreiben:

$$b^2 = c_1^2 + h_c^2 \qquad\qquad a^2 = c_2^2 + h_c^2$$

Aus einer dieser beiden Gleichungen lässt sich das Höhenquadrat ausdrücken, welches folglich für h_c^2 in der zweiten Gleichung eingesetzt werden kann:

$$h_c^2 = a^2 - c_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad b^2 = a^2 - c_2^2 + c_1^2$$

Die Summe aus den Teillängen c_1 und c_2 ist natürlich die Länge c. Daher muss c_2 gleich der Differenz aus c und c_1 sein. Somit verschwindet eine Teillänge aus der Gleichung:

$$b^2 = a^2 - (c - c_1)^2 + c_1^2$$

Der Term in der Klammer ist eine binomische Formel, welche aufgelöst werden muss. Hierbei ist es wegen dem vorangestellten Minuszeichen wichtig, den ausgerechneten Term in der Klammer zu lassen:

$$b^2 = a^2 - (c^2 - 2cc_1 + c_1^2) + c_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad b^2 = a^2 - c^2 + 2cc_1 - c_1^2 + c_1^2$$

Die Länge c_1 fällt nun teilweise weg:

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cc_1 - \cancel{c_1^2} + \cancel{c_1^2} \qquad \Rightarrow \qquad b^2 = a^2 - c^2 + 2cc_1$$

Die verbliebene Länge c_1 kann nun durch den Cosinus des Winkels α sowie der Seite b substituiert werden:

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{b} \qquad \Rightarrow \qquad b^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$$

Danach müssen noch a^2 und b^2 getauscht werden, indem man von beiden Seiten der Gleichung a^2 sowie b^2 subtrahiert:

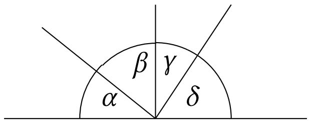
$$-a^2 = -b^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$$

Letztlich wird noch mit -1 multipliziert und der Cosinussatz ist vollständig hergeleitet:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Anmerkungen

Die Summe der Winkel bei einer Gerade ist 180° (Halbkreis):



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$$

Der Höhenwinkel ist jener, den eine Gerade mit der Horizontalen unter sich einschließt (man blickt von unten in die *Höhe*). Der Tiefenwinkel ist gegensätzlich dazu jener Winkel, den die Gerade mit der Horizontalen über sich einschließt (man blickt von oben in die *Tiefe*):