Kegelschnitte

Kegelschnitte sind geometrische Figuren, die entstehen, wenn man Kegel mit Ebenen auf verschiedene Weisen schneidet. Bei der Diskussion von Kegelschnitten sind vor allem die Konstruktion der Figuren sowie das Schneiden mit Geraden oder anderen Kegelschnitten interessant.

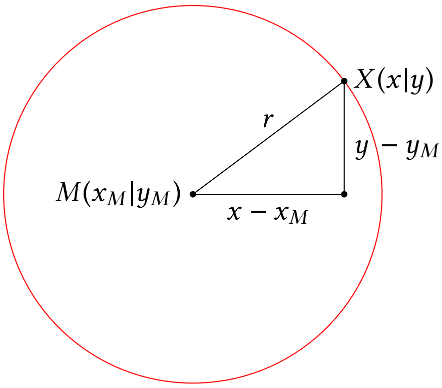
Kreis

Im Koordinatensystem ist ein Kreis durch einen Mittelpunkt M und einen Radius r exakt definiert:

$$k: \ [\, M(x_M | y_M),\, r\,]$$

Jeder Punkt X auf dem Kreis k hat vom Mittelpunkt M den Abstand r, sodass gilt: $\overline{MX} = r$

Man kann mittels dem Satz des Pythagoras jeden Punkt X auf dem Kreis k berechnen, da die x- und y-Koordinaten des Punktes X als Katheten, zusammen mit dem Radius r als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck im Kreis bilden:



Durch Entnahme der korrekten Variablen aus der Grafik und Einsetzen in den Pythagoräischen Lehrsatz erhält man so die **Kreisgleichung in Koordinatenform**:

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 = c^2 \\ \Downarrow \\ k: \ (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \end{gathered}$$

Liegt der Mittelpunkt eines Kreises mit Radius $r = 1$ im Koordinatenursprung $(0, 0)$, erhält man die sehr kompakte und einprägsame Kreisgleichung des *Einheitskreises*:

$$k_E: \ x^2 + y^2 = 1$$

Multipliziert man die Kreisgleichung aus, erhält man die **allgemeine Kreisgleichung**:

$$\begin{gathered} k: \ (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \\ \Downarrow \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{gathered}$$

Um von der ausmultiplizierten, allgemeinen Kreisgleichung auf die Kreisgleichung in Koordinatenform zurückzukommen, muss man die allgmeine Kreisgleichung auf ein volles Quadrat ergänzen. Beispiel:

Die Gleichung $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ beschreibt einen Kreis. Ermittle den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises.

I. Allgemeine Kreisgleichung:	$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
II. Umformung um die Ergänzung zu erleichtern:	$(x^2 + 4x + a^2) + (y^2 - 2y + b^2) = 20$
III. Finden der passenden Variablen:	$a = 2, b = -1$
IV. Addition der Quadrate auf beiden Seiten der Gleichung:	$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 20 + 4 + 1$
V. Zu binomischen Formeln umformen:	$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
VI. Vergleich mit der Kreisgleichung:	$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$
VII. Entnahme des Mittelpunktes:	$M(-2\|1)$
VIII. Entnahme des Radius:	$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

Schnitt Kreis - Gerade

Um eine Gerade g mit einem Kreis k zu schneiden drückt man eine Variable (x oder y) aus der Geradengleichung aus und setzt sie in die Kreisgleichung von k ein. Dabei erhält man eine quadratische Gleichung nach der nicht ausgedrückten Variable, welche einem entweder zwei (A), einen (B) oder keinen (C) gemeinsame(n) Punkt(e) liefert. Hierbei muss man beachten, dass es drei mögliche Lagebeziehungen zwischen der Gerade und dem Kreis geben kann. Die Gerade kann nämlich sein:

A. **Sekante**

   Die Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten und bildet so zwei Schnittpunkte.

B. **Tangente**

   Die Gerade berührt den Kreis in einem Punkt — dem *Berührpunkt*.

C. **Passante**

   Der Kreis wird von der Gerade weder geschnitten noch berührt.

Schnitt Kreis - Kreis

Zwei Kreise k_1 und k_2 schneidet man nach üblicher Methode in einem Gleichungssystem. Hierbei gibt es auch wieder verschiedene Lagebeziehung zwischen den beiden Kreisen:

A. **Ident**

   k_1 und k_2 sind gleich, berühren einander also in unendlich vielen Punkten: $k_1 = k_2$. Diese Lagebeziehung gilt, wenn sowohl Mittelpunkt als auch Radius der beiden Kreise gleich sind.

B. **Zwei Schnittpunkte**

   k_1 und k_2 überlappen so, dass sie zwei Schnittpunkte haben.

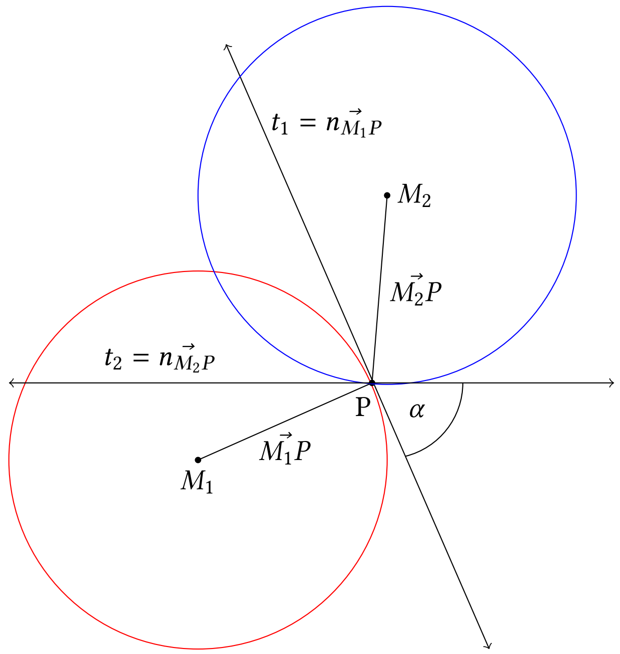
C. **Ein Berührpunkt**

   k_1 und k_2 berühren einander in genau einem einzigen Punkt.

D. **Keine gemeinsamen Punkte**

   k_1 und k_2 liegen entweder nebeneinander oder ineinander, schneiden oder berühren sich jedoch nicht.

Haben zwei Kreise einen Berühr- oder Schnittpunkt, kann man auch die Winkel zwischen den Tangenten der beiden Kreise in diesem Punkt berechnen. Die Richtungsvektoren $\vec{t_1}$ und $\vec{t_2}$ der Tangentengleichungen berechnet man als Normalvektoren der Vektoren von jeweils einem Mittelpunkt (M_1 , M_2) zu dem Berühr- oder Schnittpunkt P, also:



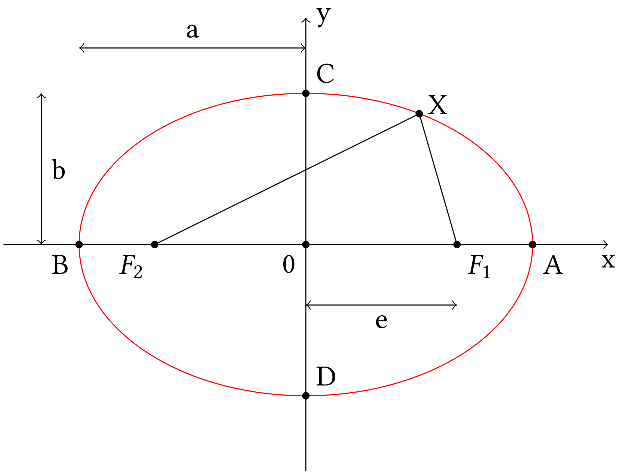
$$\begin{array}{cc} \vec{M_1P} & \vec{M_2P} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \vec{t_1} = n_{\vec{M_1P}} & \vec{t_2} = n_{\vec{M_2P}} \end{array}$$

Den Winkel α berechnet man dann mittels der Vektoriellen Winkelformel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{t_1} \cdot \vec{t_2}}{|\vec{t_1}| \cdot |\vec{t_2}|}$$

Ellipse

Eine Ellipse kann als eine ovale Kurve oder als ein Kreis mit zwei verschiedenen Radii a und b für die x- bzw. y-Achse, anstatt nur einem Radius r, gesehen werden. Sie ist definiert druch zwei Brennpunkte F_1 und F_2 sowie einer Zahl $a > 0$. Eine vollständig beschriftete Ellipse ell mit einem Punkt X sieht so aus:



Hierbei sind:

A, B	...	Schnittpunkte mit der x-Achse $\Rightarrow$ Hauptscheitel
C, D	...	Schnittpunkte mit der y-Achse $\Rightarrow$ Nebenscheitel
a	...	große Halbachse
b	...	kleine Halbachse
F_1, F_2	...	Brennpunkte
e	...	Lineare Exzentrizität

Es gibt folgende Zusammenhänge zwischen diesen Variablen:

1. $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$
2. $a = |0\vec{A}| = |0\vec{B}| \Rightarrow A(a|0), B(-a|0)$
3. $b = |0\vec{C}| = |0\vec{D}| \Rightarrow C(0|b), D(0|-b)$
4. $e = |0\vec{F}_1| = |0\vec{F}_2| \Rightarrow F_1(-e|0)\, F_2(e|0)$
5. $e^2 = a^2 - b^2$

Hat eine Ellipse, wie jene oben, ihre Brennpunkte symmetrisch zum Koordinatenursprung auf der x-Achse ($F_1(-e|0)$, $F_2(e|0)$), sowie die große Halbachse auf der x-Achse liegend ($A(a|0)$, $B(-a|0)$), so spricht man von einer Ellipse in ***1. Hauptlage***. Liegen die Brennpunkte auf der y-Achse, befindet sich die Ellipse in der *2. Hauptlage*.

Eine Ellipse ell in 1. Hauptlage mit den Halbachsen a und b kann geometrisch durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$ell: \; b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\Downarrow$$
$$ell: \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tangenten an eine Ellipse

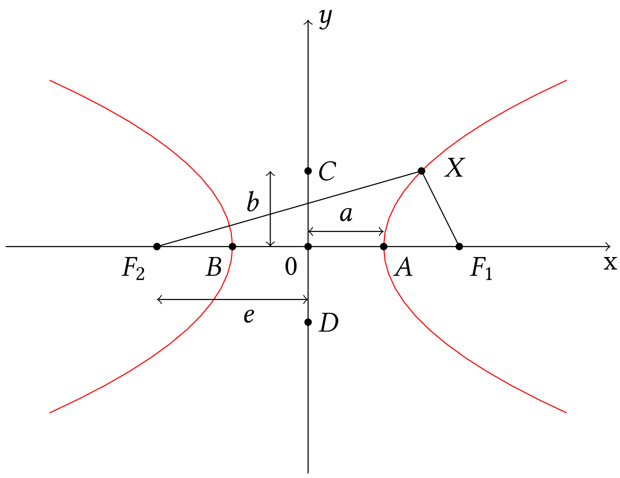
Um eine Tangente t an eine Ellipse ell in einem Punkt P zu legen, muss man die Ellipse implizit differenzieren und in das Resultat dessen den Punkt P einsetzen, um die Steigung k der Ellipse in diesem Punkt zu erhalten. Die x und y Koordinaten des Punktes P sowie die Steigung k der Ellipse in diesem Punkt setzt man dann in die Normalform der linearen Gleichung $y = kx + d$ einsetzen, um somit die volle Gleichung der Geraden bzw. der Tangente t zu bestimmen. Beispiel:

Gegeben sind die Ellipse ell $: x^2 + 3y^2 = 28$ *und der Punkt* $P(4|2)$ *der auf der Ellipse liegt. Bestimmte die Gleichung der Tangente* t *an die Ellipse im Punkt P.*

I. Ellipsengleichung:	$x^2 + 3y^2 = 28$
II Implizites Differenzieren:	$2x + 3 \cdot 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 2x + 6yy' = 0$
III. Umformung nach y':	$y' = \frac{-2x}{6y} = \frac{-x}{3y}$
IV. Einsetzung von P:	$y' = \frac{-4}{3 \cdot 2} = \frac{-2}{3}$
V. y' ist die Steigung k der Tangentengleichung t:	$y = kx + d$
VI. Einsetzung von k $(= y')$ sowie P in t:	$2 = 4 * \frac{-2}{3} + d$
VII. Lösen nach d:	$d = 2 - \frac{-8}{3} = \frac{14}{3}$
VIII. Fertige Tangentengleichung t:	$y = \frac{-2}{3}x + \frac{14}{3}$

Hyperbel

Eine Hyperbel besteht aus zwei Bögen bzw. „Ästen“, deren Form durch zwei Brennpunkte F_1 und F_2 sowie einer Länge a exakt definiert ist. Sind die Brennpunkte symmetrisch zum Koordinatenursprung und liegen auf der x-Achse ($F_1(-e|0)$, $F_2(e|0)$), spricht man von einer Hyperbel in **1. Hauptlage**. Liegen die Brennpunkte auf der y-Achse, liegt die Hyperbel in *2. Hauptlage*. Geometrisch bzw. grafisch sieht eine Hyperbel in 1. Hauptlage so aus:



Hierbei sind:

A, B	...	Schnittpunkte mit der x-Achse $\Rightarrow$ Hauptscheitel
C, D	...	Schnittpunkte mit der y-Achse $\Rightarrow$ Nebenscheitel
a	...	große Halbachse
b	...	kleine Halbachse
F_1, F_2	...	Brennpunkte
e	...	Lineare Exzentrizität

Es gibt folgende Zusammenhänge zwischen diesen Variablen:

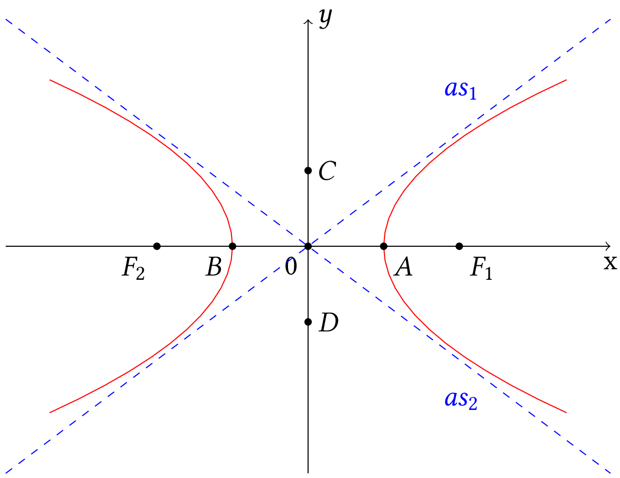
1. $|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a$
2. $a = |\vec{0A}| = |\vec{0B}| \Rightarrow A(a|0),\ B(-a|0)$
3. $b = |\vec{0C}| = |\vec{0D}| \Rightarrow C(0|b),\ D(0|-b)$
4. $e = |\vec{0F_1}| = |\vec{0F_2}| \Rightarrow F_1(-e|0)\ F_2(e|0)$
5. $e^2 = a^2 + b^2$

Eine Hyperbel *hyp* in 1. Hauptlage mit den Halbachsen a und b kann geometrisch durch folgende Gleichung beschrieben werden, welche sich von der Ellipsengleichung nur im Vorzeichen unterscheidet:

$$hyp:\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\Downarrow$$
$$hyp:\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Asymptoten $as_{1,2}$ einer Hyperbel sind jene Geraden, welche den beiden Ästen unendlich nahe kommen ohne sie je wirklich zu berühren. Sie sind definiert als:

$$as_{1,2} : y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$$



Parabel