Integral

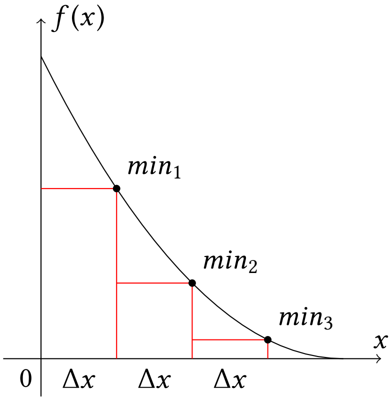
Die Integralrechnung beschäftigt sich mit der Berechnung von Flächeninhalten unter Kurven. Diese können entweder als Summe von Rechtecksflächen angenähert oder mittels dem Integrationsverfahren genau bestimmt werden. Im Bereich der Analysis ist das Integrieren einer Funktion die inverse Operation zum Differenzieren.

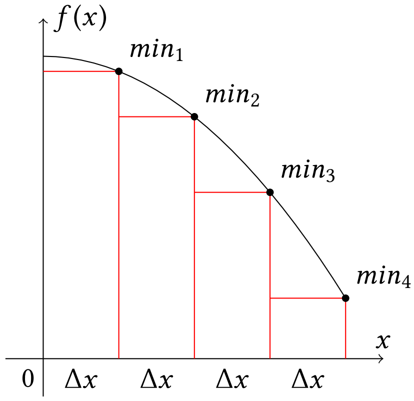
Produktsummen

Das Integral einer Kurve kann in einem Annäherungsverfahren durch Summen von Flächeninhalten einfacher Figuren wie Rechtecken, Dreiecken oder Trapezen approximiert werden, da die Berechnung ihrer Flächen vergleichsweise einfach ist. Verwendet man Rechtecke für die Approximierung, so ist das Integral eine Summe vieler kleiner Rechtecke. Die Breite Δx dieser Rechtecke ist hierbei ein festgelegter, konstanter Abstand auf der x-Achse, welcher die Funktion in die Intervalle $[0; \Delta x], [\Delta x; 2 \cdot \Delta x], [2 \cdot \Delta x; 3 \cdot \Delta x], \ldots$ teilt. Für ein beliebiges Intervall $[a; b]$ einer Funktion, das in N Teilintervalle geteilt werden soll, wird Δx mittels der Formel $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ berechnet. Die Länge jeden Rechtecks ist der jeweilige Funktionswert $f(x)$ an den einzelnen Intervallsgrenzen. Das Integral ist somit eine Summe vieler Produkte: eine *Produktsumme*.

Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten, Rechtecke unter einer Kurve aufzuspannen und so eine Produktsumme zu bilden: als Untersumme, Obersumme, Linkssumme oder Rechtssumme.

Untersumme





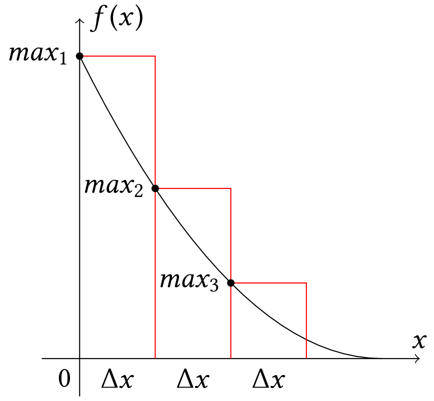
Für die Untersumme A_U wird der kleinste Funktionswert min_i jedes Intervalls als Länge genommen:

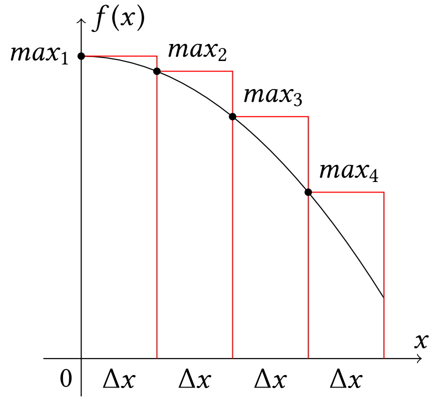
$$A_U = \sum_{i=1}^{N} f(min_i) \cdot \Delta x$$

Fällt die Funktion, liegt der kleinste Funktionswert jedes Intervalls meist am rechten Ende. Steigt die Funktion, bestimmt bei der Untersumme meist der Funktionswert der linken Intervallsgrenze die Länge des Rechtecks. Die Breite Δx ist bei allen Produktsummen ein konstanter Faktor, mit ihm kann also auch nachträglich multipliziert werden:

$$A_U = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} f(min_i)$$

Obersumme

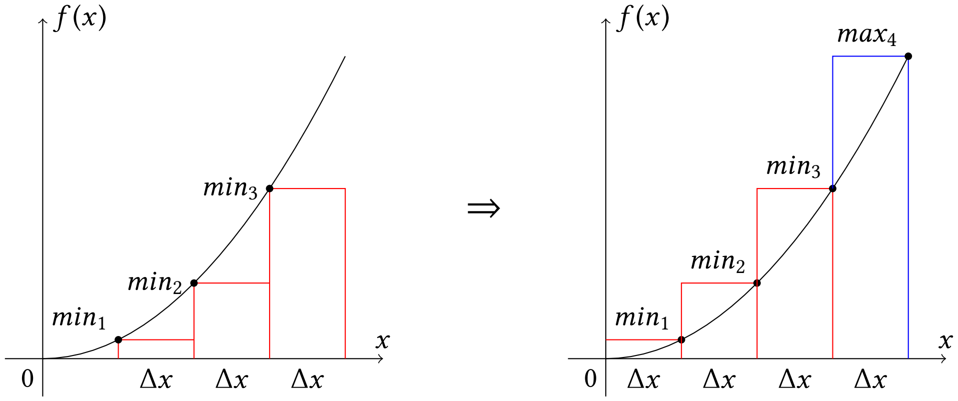




Gegensätzlich zur Untersumme A_U bestimmt bei der Obersumme A_O nicht der kleinste Funktionswert jeden Intervalls die Länge des Rechtecks, sondern der größte Funktionswert:

$$A = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} f(max_i)$$

Man bemerke, dass die Rechtecke der Obersumme jenen der Untersumme stark ähneln. So ergibt es sich, dass die Obersumme berechnet werden kann, indem man die Rechtecke der Untersumme um ein Δx verschiebt, das letzte Untersummenrechteck verwirft und das erste Rechteck mit dem maximalen Intervallswert neu berechnet (min_N ist die Minimalstelle des letzten von N Intervallen):



$$A_O = A_U - \Delta x \cdot f(min_N) + \Delta x \cdot f(max_1)$$

$$\Downarrow$$

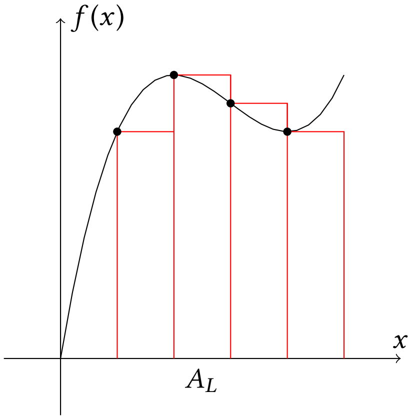
$$A_O = A_U + \Delta x \cdot (f(max_1) - f(min_N))$$

Da die Obersumme höher ist als die wirkliche Fläche unter der Kurve und die Untersumme niedriger, kann der Flächeninhalt der Kurve mit Relationszeichen zwischen Unter- und Obersumme eingeschränkt werden:

$$A_U < A < A_O$$

Linkssumme

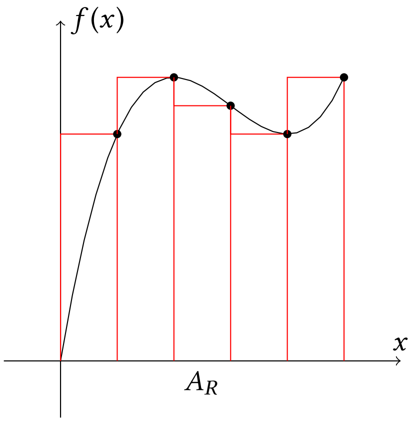
Die Linkssumme unterscheidet nicht zwischen minimalen oder maximalen Funktionswerten, sondern setzt die Länge jeden Rechtecks stets an das linke Ende jeden Intervalls:



$$A_L = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(i \cdot \Delta x)$$

Rechtssumme

Zur Berechnung der Rechtssumme wird die Länge jeden Rechtecks immer am Funktionswert der rechten Intervallsgrenze gemessen:



$$A_R = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} f(i \cdot \Delta x)$$

Das Bestimmte Integral

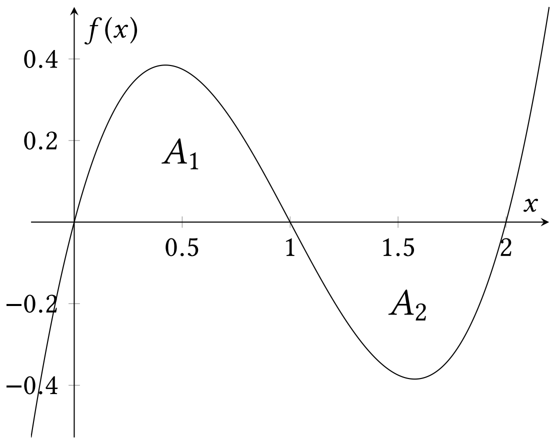
Ebenso wie der Differentialquotient, also die momentane Änderung einer Funktion an einer bestimmten Stelle x, ein Grenzwert von Differenzenquotienten ist, in dem das Intervall $[x\ ;\ x + \Delta x]$ des Differenzenquotienten infinitisemal klein ist und Δx somit gegen null strebt, ist auch ein Integral das Resultat eines Grenzwerts. Wächst nämlich die Anzahl N an Rechtecken, mit denen man die Fläche unter einer Kurve als Produktsumme annähert, wird Δx immer kleiner und diese Annäherung somit immer genauer. Das bestimmte Integral, welches die Fläche unter einer Funktion in einem bestimmten Intervall $[a; b]$ exakt berechnet, lässt sich also mit Hilfe eines Limes und den vorhin beschriebenen Produktsummen definieren:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Bei einem bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ beschreiben a und b somit die untere sowie obere Intervallsgrenze. $f(x)$ ist die im Intervall $[a; b]$ zu integrierende Funktion — der Integrand. Der Ausdruck dx bestimmt die Variable, nach der man integriert — in diesem Fall x. Der Ausdruck dx sollte immer angegeben werden und ist besonders für das Integral multivariabler Funktionen wichtig:

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b (2x^3 - 4z + y) \rightarrow \text{ Integration nach welcher Variable?}$$

Es sei angemerkt, dass Flächenstücke unter der der Abszisse ein negatives Vorzeichen besitzen. Soll also die absolute Fläche, die eine Funktion mit der Absizsse einschließt, berechnet werden, muss der Betrag aller negativen Flächensegmente verwendet werden. Ist jedoch nach dem Wert des bestimmten Integral in diesem Intervall gefragt, nicht nach der Fläche, so müssen alle Vorzeichen — positiv und negativ — beibehalten werden:



Absolute mit der x-Achse eingeschlossene Fläche A der Funktion:

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| + \left| \int_1^2 f(x)\,dx \right|$$

Bestimmtes Integral: $\int_0^2 f(x)\,dx = A_1 + A_2$

Stammfunktionen

Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit der Integralrechnung ist die sogenannte „Stammfunktion“ einer Funktion, welche eine genau Berechnung des bestimmten Integral ermöglicht. Da die Stammfunktion $F(x)$ das Resultat der Integration — dem Gegenteil der Differenzierung — einer Funktion $f(x)$ ist, ist die erste Ableitung $F'(x)$ der Stammfunktion wiederum die ursprüngliche Funktion $f(x)$. Eine Stammfunktion $F(x)$, welche equivalent zum *unbestimmten* Integral ist, wird als Integral ohne Integrationsgrenzen angeschrieben:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Da Konstanten bei der Differenzierung einer Funktion wegfallen, besitzt jede Funkion $f(x)$ nicht nur eine, sondern unendlich viele Stammfunktionen, welche sich nur durch eine reelle Integrationskonstante C voneinander unterscheiden. Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$, gilt somit:

$$F'(x) = G'(x) = f(x)$$

Eine besondere Eigenschaft von Stammfunktionen ist, dass sie die Berechnung des bestimmten Integrals einer Funktion in einem beliebigen Intervall $[a;b]$ ermöglichen. Der vorhin vorgestellte Grenzwert aus Produktsummen als Definition des Integrals liefert noch keine eindeutige Rechenmethode zur genauen Bestimmung seines Wertes. Kennt man eine Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$, so ist das bestimmte Integral dieser Funktion in einem beliebigen Intervall $[a;b]$ die Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an diesen Stellen. Die Integration einer Funktion in den Grenzen von a nach b wird hierbei durch einen vertikalen Strich angedeutet.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln

Aus der Definition des Integrals, der Stammfunktion sowie dem Verhältnis zwischen Differential- und Integralrechnung lassen sich einige Regeln der Integration festlegen. Allen voran steht die *Potenzregel*, welche die Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ ermöglicht. Möchte man einen Term des Schemas x^n integrieren, bzw. für diesen eine Stammfunktion finden, so erhöht man die Potenz der unabhängigen Variable um 1 und dividiert den Term dadurch:

$$\int (x^n)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

- **Summenregel**

  Das bestimmte Integral der Summe aus zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in einem beliebigen Intervall $[a;b]$ ist gleich der Summe der einzelnen Integrale:

  $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

  Auch allgemein gilt dass die Stammfunktion einer Summe aus zwei Funktionen gleich der Summe ihrer Stammfunktionen ist:

  $$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x)$$

- **Faktorregel**

  Konstante Faktoren $k \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f(x)$ bleiben beim Integrieren sowie beim Bilden einer Stammfunktion erhalten:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int [k \cdot f(x)]\, dx = k \cdot F(x)$$

- **Kombinationsregel**

  Die Summe bestimmter Integrale einer Funktion in zwei benachbarten Intervallen $[a; b]$ $[b; c]$ ist gleich dem bestimmten Integral im gesamten Intervall $[a; c]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

  Dies kann auch auf beliebig viele benachbarte Intervalle mit den jeweiligen Intervallsgrenzen a_i und b_i des i-ten Intervalls erweitert werden. Sei N die Anzahl der benachbarten Teilintervalle:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_N} f(x)\, dx$$

- **Nullregel**

  Ist die Differenz $b - a$ zwischen den Integrationsgrenzen a und b gleich null, so ist das Integral der Funktion in diesen Grenzen gleich null:

$$b - a = 0 \rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = 0$$

- **Vertauschungsregel**

  Kehrt man die Integrationsgrenzen a und b eines bestimmten Integrals einer Funktion um, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals in diesen Grenzen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

  Dies folgt daraus, dass das bestimmte Integral einer Funktion in einem Intervall $[a; b]$ die Differenz zwischen den Funktionswerten der Stammfunktion an den Stellen a und b ist. Kehrt man die Integrationsgrenzen um, werden Minuend und Subtrahend dieser Differenz vertauscht:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x)\, dx = F(a) - F(b)$$

Integrale elementarer Funktionen

Nicht alle Integrale sind leicht zu bestimmen, vor allem jene elementarer Funktionen wie der Sinus-, Cosinus-, Wurzel-, Logarithmus- oder Euler'schen Funktion. Die Ableitung dieser Funktionen zu finden ist meist leichter.

$f(x)$	$\longleftrightarrow$	$F(x)$
e^x	$\longleftrightarrow$	e^x
x^{-1}	$\longleftrightarrow$	$\ln x$
$\sqrt{x}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$sin(x)$	$\longleftrightarrow$	$-\cos(x)$
$cos(x)$	$\longleftrightarrow$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\longleftrightarrow$	$\tan x$
a^x	$\longleftrightarrow$	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^{ax}	$\longleftrightarrow$	$\frac{e^{ax}}{a}$
x^n	$\longleftrightarrow$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Die Integration der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ sollte erläutert werden. Jede Wurzel der Form $\sqrt[m]{x^n}$ kann als Potenz der Form $x^{\frac{n}{m}}$ angeschrieben werden. Daher wäre die Quadratwurzel von x gleich x hoch $\frac{1}{2}$. Wendet man nun die Potenzregel an, erhöht man die Potenz des Terms um 1 und dividiert schließlich dadurch:

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

Berechnung von eingeschlossenen Flächen

Volumsberechnungen

Rotationskörper