Ungleichungen

Ungleichungen geben mit Hilfe der Relationszeichen $<, \leq, \geq$ und $>$ Größverhältnisse zwischen Termen an. Ebenso wie Gleichungen in Gleichungssystemen gelöst werden können, können auch Ungleichungen in Systemen aufgestellt und so zur Lösung und zum Finden der gesuchten Variablen, die das Ungleichungssystem erfüllen, führen.

Relationen

Ungleichungsrelationen können zwischen zwei Termen bestehen, jedoch auch zwischen mehr als zwei, wenn man diese verkettet. Generell gibt es folgende Relationen zwischen zwei Termen a und b:

- $a < b$ ... a ist kleiner als b
- $a \leq b$ ... a ist kleiner oder gleich b
- $a \geq b$ ... a ist größer oder gleich b
- $a > b$ ... a ist größer als b

Schreibweisen

Es gibt verschiedene Weisen, eine Ungleichung anzuschreiben, welche allesamt gültig sind:

Intervallschreibweise

In der Intervallschreibweise werden Grenzen einer Ungleichung durch Schranken angegeben, entweder [bzw.], für inklusive Grenzen ($\leq$ und $\geq$), oder] bzw. [für exklusive Grenzen ($<$ und $>$). Ist ein Term nur auf einer Seite begrenzt, wird die andere Grenze mit plus oder minus ∞ angegeben. Eine unendliche Grenze muss immer exklusiv sein. Beispiele:

$$a < x \leq b \rightarrow x \in \,]a;b]$$

$$a < x < b \rightarrow x \in \,]a;b[$$

$$x < a \rightarrow x \in \,]-\infty;a[$$

$$x \geq b \rightarrow x \in \, [b;\infty[$$

Mengenschreibweise

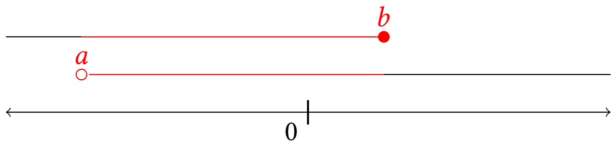
Gibt man eine Ungleichung in der Mengenschreibweise an, muss man die Menge der reellen Zahlen auf eine bestimmte Kondition, die von der Ungleichung abhängt, eingrenzen. Die Menge selbst wird als Lösungsemenge $\mathbb{L}$ bezeichnet. Beispiele:

$$a < x \leq b \rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$$

$$x \geq b \rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq b\}$$

Grafische Darstellung

Ebenso ist es möglich, eine Ungleichung grafisch auf einem Zahlenstrahl darzustellen. Exklusive Schranken werden dabei mit einem Ring, inklusive mit einem Kreis dargestellt. Beispiel:



$$a < x \leq b$$

Ungleichungssysteme

In einem Ungleichungssystem existieren für einen Term mehrere Ungleichungen, welche alle mögliche, gültige Werte für den Term beschreiben. Einzelne Ungleichungen eines Systems werden mit den logischen Operatoren $\land$ („und“) bzw. $\lor$ („oder“) verbunden. Alle Ungleichungen eines Systems müssen erfüllt sein. Beispiele:

$x < a \land x > b \to \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \land x > b\}$

$x \geq a \lor x > b \to x \in [a; \infty[\cup]b; \infty[$

Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen werden bei Ungleichungen prinzipiell gleich wie bei Gleichungen durchgeführt, indem man auf beiden Seiten der (Un-)Gleichung einen Term addiert, subtrahiert, mit ihm multipliziert oder dividiert. Jedoch muss bei einer Ungleichung das Relationszeichen umgekehrt werden, wenn mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird:

$-ax < b \mid \div (-a) \Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

$\dfrac{x}{-a} \geq b \mid \cdot (-a) \Rightarrow x \leq -ab$

Fallunterscheidung bei Quadratischen Ungleichungen

Quadratische Gleichungen bestehen aus zwei Linearfaktoren x_1 und x_2. Je nach Vorzeichen der einzelnen Linearfaktoren verändert sich das Vorzeichen ihres Produktes. Zwei gleiche Vorzeichen, $+ \land +$ oder $- \land -$, ergeben eine positives Produkt; zwei verschiedene Vorzeichen, $- \land +$ oder $+ \land -$, ergeben ein negatives Produkt. Daher muss man bei einer quadratischen Ungleichung zwischen den je zwei Fällen unterscheiden, die zum Vorzeichen führen können welches von der Ungleichung angegeben wird. Ist eine quadratische Gleichung schon in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ angegeben, müssen die beiden Linearfaktoren erst durch Lösen der Gleichung gefunden werden.

Beispiel: *Löse die quadratische Ungleichung* $x^2 + 3x - 4 \leq 0$

I.	Gleichung lösen um Linearfaktoren zu finden:	$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$
II.	Linearfaktoren:	$x_1 = 1\,,\, x_2 = -4$
III.	Quadratische Ungleichung mit Linearfaktoren anschreiben:	$(x-1)(x+4) \leq 0$
IV.	Erste Möglichkeit, dass das Produkt kleiner oder gleich 0 ist, ist das der erste Faktor $x-1$ positiv oder null und der zweite $x+4$ negativ oder null ist:	$x - 1 \geq 0 \wedge x + 4 \leq 0$
V.	Lösen des ersten Ungleichungssystems ergibt eine leere Menge:	$\mathbb{L}_I = \{\}$
VI.	Zweiter Fall:	$x - 1 \leq 0$ und $x + 4 \geq 0$
VII.	Lösen des zweiten Ungleichungssystems ergibt:	$\mathbb{L}_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1\}$
VIII.	Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist die Vereinigung von $\mathbb{L}_I$ und $\mathbb{L}_{II}$:	$\mathbb{L} = \mathbb{L}_I \cup \mathbb{L}_{II} = [-4; 1]$

Bruchungleichungen

Auch bei Bruchungleichungen der Form $\frac{a}{x-b} < 0$ ist es erforderlich, verschiedene Fälle zu betrachten, da ein negativer Nenner, bei Multiplikation beider Seiten der Ungleichungen mit diesem, das Relationszeichen umkehren würde. Des Weiteren muss man bei Bruchungleichen zuerst die Defintionsmenge bestimmen, da der Nenner nicht 0 sein darf.

Beispiel: *Löse die Bruchungleichung* $\frac{3x}{5-x} > 4$

I.	Bestimmung der Definitionsmenge:	$5 - x = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{5\}$
II.	Erster Fall, wo $5 - x$ positiv ist:	$5 - x > 0$
III.	Lösen der Ungleichung, wobei > bleibt:	$\frac{3x}{5-x} > 4 \mid \cdot (5-x) \Rightarrow x > \frac{20}{7}$
IV.	Nun haben wir ein erstes Ungleichungssystem:	$5 - x > 0 \wedge x > \frac{20}{7}$
V.	Lösen des Ungleichungssystems ergibt $\mathbb{L}_I$:	$\mathbb{L}_I = \left]\frac{20}{7}; 5\right[$
VI.	Selbes Verfahren für $5-x < 0$, ergibt $\mathbb{L}_{II}$ (leere Menge):	$\mathbb{L}_{II} = \{\}$
VII.	Lösungsmenge $\mathbb{L}$ als Vereinigung von $\mathbb{L}_I$ und $\mathbb{L}_{II}$:	$\mathbb{L} = \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{20}{7} < x < 5\right\}$

Betragsungleichungen

Eine weitere Form von Ungleichungen, bei welcher zwischen zwei Fällen unterschieden werden muss, sind *Betragsungleichungen.* Bei solchen Ungleichungen, beispielsweise $|x + 1| > 4$, gibt es zwei verschiedene mögliche Fälle, da die Betragsstriche ein negatives Vorzeichen aufheben würden. Dies folgt daraus, dass ein Betrag generell nur einen *Abstand* angibt, welcher natürlich absolut ist. Wichtig ist es, im Falle dass der Term zwischen den Betragsstrichen negativ ist, beim Lösen der Ungleichung ein Minus vor den Term zu geben.

Beispiel: *Löse die Betragsungleichung* $2|3x + 5| \geq x + 25$

I.	Erster Fall, wo $3x + 5$ positiv ist:	$3x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$
II.	Der Term bleibt in der Ungleichung damit ohne Minus:	$2(3x + 5) >\geq x + 25$
III.	Aufstellen und Lösen des Ungleichungssystems:	$x > -\frac{5}{3} \wedge x \geq 3$
IV.	Erste Lösungsmenge also:	$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
V.	Zweiter Fall, wo $3x + 5$ negativ ist:	$3x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{3}$
VI.	Der Term erhält nun ein negatives Vorzeichen in der Ungleichung:	$2 \cdot [-(3x + 5)] \geq x + 25$
VII.	Löst man dieses System, erhält man die zweite Lösungsmenge:	$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$
VIII.	Gesamtlösungsmenge als Vereinigung von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$:	$\mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \vee x \leq -5\}$