Vektoren

Ein Vektor ist ein n-Tupel, das eine bestimmte Richtung in der Ebene oder im Raum beschreibt.

Schreibweise

Um für einen in der *Punktschreibweise* angegebenen Punkt $A(x \mid y)$ einen *Ortsvektor* aufzustellen, beschreibt man den Vektor vom Ursprung 0 zu diesem Punkt A als Vektor $0\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Generell beschreibt ein *Richtungsvektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ nur eine Richtung, nämlich um x_a Einheiten auf der x-Achse und y_a Einheiten auf der y-Achse. Im Raum kommt noch eine dritte Koordinate z bzw. hier z_a dazu, der den Einheitenfortschritt auf der z-Achse beschreibt.

Grundrechnungsarten

Vektor und Zahl

Multiplikation und Division von einem Vektor a mit einer **Zahl** n resultieren in einem neuen Vektor und erfolgen mittels Durchführung der Operation für jede Koordinate des Vektors. Addition und Subtraktion eines Vektors mit einer Zahl sind nicht möglich.

Multiplikation von Vektor und Zahl: $\vec{a} * n = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} * n = \begin{pmatrix} x_a * n \\ y_a * n \end{pmatrix}$

Division von Vektor und Zahl: $\vec{A} : n = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} : n = \begin{pmatrix} x_a : n \\ y_a : n \end{pmatrix}$

Vektor und Vektor

Addition und Subtraktion von zwei Vektoren a und b resultieren ebenso in einem neuen Vektor, wobei jede Koordinate des einen Vektors a von der des anderen Vektors b abgezogen bzw. mit diesem addiert wird.

Addition von Vektor und Vektor: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$

Subtraktion von Vektor und Vektor: $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$

Die Multiplikation von zwei Vektoren a und b ergibt keinen neuen Vektor, sondern eine Zahl — ein sogenanntes *Skalares Produkt*. Dabei wird jede Koordinate des einen Vektors mit der des anderen Vektors multipliziert. Das Skalare Produkt ist dann die Summe der einzelnen Koordinateprodukte.

Multiplikation von Vektor und Vektor: $\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = (x_a * x_b) + (y_a * y_b) = n \in \mathbb{R}$

Punkte und Längen

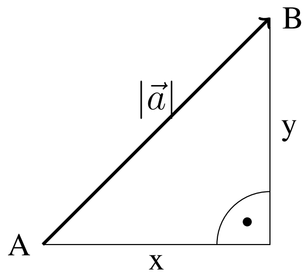
Ortsvektoren

Ein Vektor $\vec{AB}$ zwischen zwei Ortsvektoren A und B wird mittels der *Spitze-minus-Schaft* Regel berechnet:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$$

Betrag

Generell beschreibt ein Vektor $\vec{a}$ nur eine Richtung, um x bzw. y Einheiten auf der jeweiligen Achse. Man kann allerdings auch die Länge dieses Vektors berechnen, indem man den *Betrag* $|\vec{a}|$ des Vektors berechnet. Dieser basiert auf dem Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$, da die Länge nichts anderes als die Hypothenuse c in einem Dreieck ist, in welchem der x-Wert die eine Kathete a und der y-Wert die andere Kathete b ist.



Der Betrag $|\vec{a}|$ des Vektors $\vec{a}$ wird dementsprechend so berechnet: $|\vec{a}| = \sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2}$

Einheitsvektor

Ein Vektor $\vec{a}$ beschreibt eine Richtung über mehrere Einheiten in einem Koordinatesystem. Wenn man nur die Richtung des Vektors will, diesen aber auf eine Einheit normiert, muss man den **Einheitsvektor** $\vec{a_0}$ berechnen. Diesen kann man dann in die Richtung des Vektors über beliebig viele Einheiten abtragen. Der Einheitsvektor wird berechnet, in dem man den Vektor durch seine Länge dividiert:

$$\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Normalvektor

Manchmal ist es wichtig, für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ jenen Vektor $\vec{n_a}$ zu finden, der genau normal zum Vektor $\vec{a}$ steht. $\vec{a}$ und $\vec{n_a}$ schließen somit einen rechten Winkel ($\perp$) ein. In der Ebene berechnet den Normalvektor $\vec{n_a}$ in dem man die Koordinaten des ursprünglichen Vektors $\vec{a}$ vertauscht und ein Vorzeichen ändert:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n_a} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Das Skalare Produkt von zwei Vektoren die normal zu einander stehen **ist immer 0**. Somit ist

$$\vec{a} * \vec{n_a} = 0$$

Geraden

Parameterform

Eine Gerade kann durch einen Orts- und Richtungsvektor beschrieben werden, indem man einen Richtungsvektor $\vec{a}$ einem Ortsvektor $\vec{0A}$ aus t mal abträgt. Jeder Punkt auf der Geraden kann somit als der Ortsvektor plus oder minus einem bestimmten t mal den Richtungsvektor berechnet werden. Eine Gerade kann man mit diesen Informationen in der **Parameterform** aufstellen:

$$g : \vec{0X} = \vec{0A} + t * \vec{a}$$

Normalvektorform

Um von der Parameterform zur **Allgmeinen Form** ($ax + by = c$) bzw. zur **Normalform** ($y = kx + d$) zu kommen, muss man die Parameterform zuerst in die **Normalvektorform** umformen. Dazu benötigt man den Normalvektor $\vec{n_a}$ vom Richtungsvektor $\vec{a}$. Diesen setzt man so in die Normalvektorform ein, wo X bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Parameter der Gerade sind (nicht Vektorenkoordinaten):

$$X * \vec{n_a} = \vec{0A} * \vec{n_a}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{n_a} \\ y_{n_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{n_a} \\ y_{n_a} \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen in der Ebene

Zwei Geraden

$$g : X = \vec{0A} + t * \vec{a}$$
$$h : X = \vec{0B} + s * \vec{b}$$

können in der Ebene folgende *Lagebeziehungen* haben:

- **Parallel**
  Wenn zwei Geraden parallel ($\|$) oder ident ($\equiv$) sind, sind ihre Richtungsvektoren Vielfache von einander: $\vec{a} = \vec{b} * n$. Um zu bestimmen ob zwei Geraden parallel sind, muss man auschließen dass sie ident sind.

- **Ident**

  Zwei Geraden sind ident, wenn man den Ortsvektor der einen Geraden (oder irgendeinen anderen Punkt auf dieser Geraden) gleich der anderen Geraden setzen kann, und beim Lösen der Gleichungen aller Koordinaten immer das selbe Ergebnis bekommt:

$$0\vec{A} = 0\vec{B} + s * \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

I: $x_A = x_B + s_1 * x_b \Rightarrow s_1$

II: $y_A = y_B + s_2 * y_b \Rightarrow s_2$

$$s_1 \begin{cases} = s_2 \Rightarrow g \parallel h \\ \neq s_2 \Rightarrow g \equiv h \end{cases}$$

- **Schneidend**

  Sollten zwei Geraden weder parallel noch ident sein, müssen sie einen Schnittpunkt haben. Diesen berechnet man indem man die Parameterformen g und h gleichsetzt und dann für jede Koordinate eine Gleichung aufstellt und das Gleichssystem nach s und t (siehe Parameterformen von g und h) löst:

$$g = h$$

$$0\vec{A} + t * \vec{a} = 0\vec{B} + s * \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

I: $x_A + t * x_a = x_B + s * x_b$

II: $y_A + t * y_a = y_B + s * y_b$

$$\Rightarrow t \Rightarrow s$$

  Den Schnittpunkt erhält man dann, indem man t in die Parameterform von g oder s in die Parameterform von h einsetzt.

Winkel

Um den Winkel zwischen zwei Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu berechnen, verwendet man die **Vektorielle Winkelformel**:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

Man kann auch zuerst bestimmen, ob $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal zu einander stehen ($= 90°$), indem man ihr Skalares Produkt ($\vec{a} * \vec{b}$) berechnet (ist es 0, ist $a \perp b$).

Hierbei ist es wichtig, immer einen **spitzen** Winkel ($\alpha < 90°$) und nie einen **stumpfen** Winkel ($90 \leq \alpha < 180$) anzugeben. Sollte α also stumpf sein, muss man sein spitzes Gegenstück berechnen: $\alpha' = 180 - \alpha$.

Flächen

Es ist ebenso möglich, die Fläche zwischen zwei Vektoren a und b zu berechnen. Dazu verwendet man die **Vektorielle Flächenformel**:

$$A = \sqrt{|\vec{a}|^2 * |\vec{b}|^2 - (\vec{a} * \vec{b})^2}$$

Lagebeziehungen im Raum

Die Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden

$$g : X = 0\vec{A} + t * \vec{a}$$

$$h : X = 0\vec{B} + s * \vec{b}$$

unterscheiden sich zu jenen in der Ebene nur dadurch, dass sie zusätzlich noch **windschief** sein können. Zwei Geraden im Raum sind windschief, wenn sie weder parallel noch ident sind, und beim Schneiden der beiden Geraden das Gleichungssystem keine wahre Aussage liefert, was bedeutet, dass nur zwei der drei Koordinaten des vermeintlichen Schnittpunkts übereinstimmten. Ein mögliches Lösungsverfahren könnte so aussehen:

$$g = h$$

$$0\vec{A} + t * \vec{a} = 0\vec{B} + s * \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

I: $x_A + t * x_a = x_B + s * x_b$

II: $y_A + t * y_a = y_B + s * y_b$

III: $z_A + t * z_a = z_B + s * z_b$

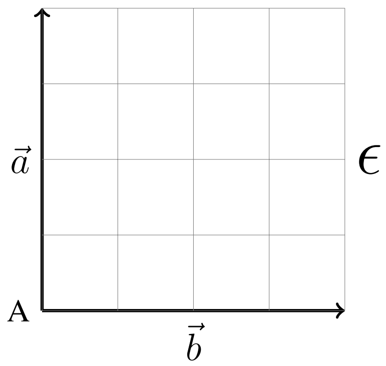
$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow t$

t in I (oder II) $\Rightarrow s$

s und t in III $\begin{cases} w.A. \Rightarrow Schneidend \\ f.A. \Rightarrow Windschief \end{cases}$

Ebenen

Vektoren können auch dazu verwendet werden, Ebenen aufzuspannen. Dazu braucht man lediglich einen Ortsvektor $0\vec{A}$ (2D oder 3D) und zwei Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Die Ebene ϵ wird dann zwischen den beiden Richtungsvektoren „aufgespannt“.



Parameterform

Im Gegensatz zur Parameterform der Gerade kommt bei der Ebene nur noch ein zweiter Richtungsvektor hinzu:

$$\epsilon : X = 0\vec{A} + t * \vec{a} + s * \vec{b}$$

Kreuzprodukt

Weil man für eine Ebene im Raum keinen eindeutigen Normalvektor bilden kann, muss man zwischen zwei Vektoren a und b das Kreuzprodukt bilden. Das Kreuzprodukt liefert einen eindeutigen Normalvektor für eine Ebene im Raum.

$$\epsilon : X = 0\vec{A} + t * \vec{a} + s * \vec{b}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_\epsilon} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a * z_b - z_a * y_b \\ -(x_a * z_b - z_a * x_b) \\ x_a * y_b - y_a * x_b \end{pmatrix}$$

Normalvektorform

Mittels dem durch das Kreuzprodukt gefundenen Normalvektor kann man auch eine Ebene in der Normalvektorform darstellen:

$$\epsilon : X * \vec{n_\epsilon} = \vec{0A} * \vec{n_\epsilon}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{n_\epsilon} \\ y_{n_\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{n_\epsilon} \\ y_{n_\epsilon} \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen

Die Lagebeziehungen von zwei Ebenen im Raum sind gleich wie jene für Geraden in der Ebene (Dimensionunterschied jeweils $= 1$): ident, parallel oder schneidend (kein windschief).

Winkel zwischen Geraden und Ebenen

Möchte man den Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene mittels der Vektoriellen Winkelformel berechnen, muss man auf zwei Dinge achten:

1. Man muss den *Richtungsvektor* der Gerade aber den *Normalvektor* der Ebene nehmen.
2. Setzt man nun den Richtungsvektor der Gerade und den Normalvektor der Ebene in die Vektorielle Winkelformel ein, muss man den *Komplementärwinkel* berechnen. Der aus der Winkelformel resultierende Winkel α muss also von $90°$ subtrahiert werden:

$$\alpha' = 90° - \alpha$$