Trigonometrie

Definition

Die Trigonometrie behandelt die Dreiecksvermessung, von rechtenwinkeligen sowie anderen Dreiecken im Einheitskreis sowie allgmein. Wichtige Funktionen sind hierbei sin, cos sowie tan, mit welchen man den Sinus- und Cosinussatz bilden kann. Ebenso spielt der Satz des Pythagoras eine bedeutende Rolle.

Schreibweisen

Allgemein ist für die Trigonometrie wichtig, dass man Punkte in einem Koordinatensystem als Kartesische Koordinaten oder als Polarkoordinaten anschreiben kann.

Ein kartesisches Koordinatentupel $P(x|y)$ besteht aus einer Variable x, welche einen Abstand auf der Abszisse beschreibt, sowie einer Variable y, welche die Position des Punktes auf der Ordinate angibt. Ein Beispiel wäre der Punkt $P(3|4)$.

In Polarschreibweise wird ein Punkt $P[r, \phi]$ durch einen Winkel ϕ, der eine Richtung zwischen 0 und 360 Grad angibt, sowie einen Abstand vom Ursprung r (Radius) in die Richtung des Winkels beschrieben. Der Punkt P wäre als Polarkoordinatentupel so angegeben: $P[5; 53.13°]$

Sinus und Cosinus im Einheitskreis

Sowohl die Sinusfunktion $sin(x)$ als auch die Cosinusfunktion $cos(x)$ beschreiben Seitenverhältnisse zwischen den Seiten a, b, c eines rechtwinkeligen Dreiecks. Besonders im Einheitskreis sind diese Verhältnisse von Interesse. Ein Einheitskreis k ist jener Kreis, dessen Mittelpunkt $M(0|0)$ im Ursprung liegt und dessen Radius r eine Länge von 1 besitzt. Geometrisch wird ein Einheitskreis durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschrieben.

Am Einheitskreis kann jeder Punkt P in Polarform mit $P[1; \phi]$ und in Kartesischer Form mit $P[\cos\phi; \sin\phi]$ angegeben werden. Die Steigung k der Hypothenuse jenes rechtwinkligen Dreiecks, welches zwischen der x- und y-Koordinate des Punktes aufgespannt wird und im Falle des Einheitskreises stets eine Länge von $r = 1$ hat, wird durch die Tangensfunktion $\tan\phi$ beschrieben. Daraus folgt:

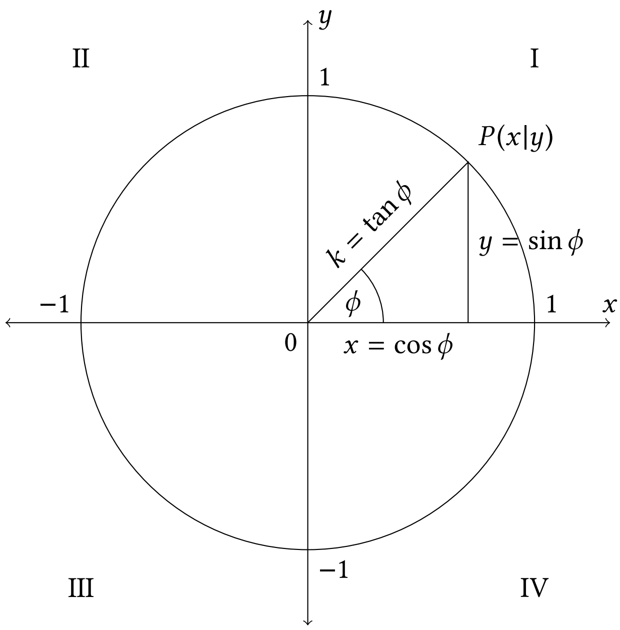
$\sin\phi$ … y-Koordinate des Punktes P

$\cos\phi$ … x-Koordinate des Punktes P

$\tan\phi$ … Steigung k der Hypotenuse im Punkt $P \Rightarrow \tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$

In dem zwischen $x = \cos\phi$ und $y = \sin\phi$ aufgespannten rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse $r = 1$, kann man die Seitenverhältnisse auch durch den Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ beschreiben:

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$



Ein Einheitskreis mit Mittelpunkt $M(0|0)$ und $r = 1$, in welchem zwischen $x = \cos\phi$ und $y = \sin\phi$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\phi = 45°$ aufgespannt ist.

Die Länge der y-Kathete dieses rechtwinkligen Dreiecks ist in der oberen Hälte des Einheitskreises, also Quadranten I und II, stets positiv und in der unteren Hälfte, also Quadranten III und IV, negativ. Man überlege sich dazu den Verlauf der Sinusfunktion $\sin(x)$. Sie beginnt mit $x = y = 0$, findet nach $x = \frac{\pi}{2}$ ihr Maximum, wo $y = 1$, fällt dann bis zu $(x = \pi | y = 0)$ und wechselt dann ihr Vorzeichen. Gegensätzlich dazu wechselt das Vorzeichen der x-Kathete nach Quadranten I und III, was auch mit dem Verlauf der Cosinusfunktion $\cos(x)$ übereinstimmt. Aus diesen Beobachtungen folgt:

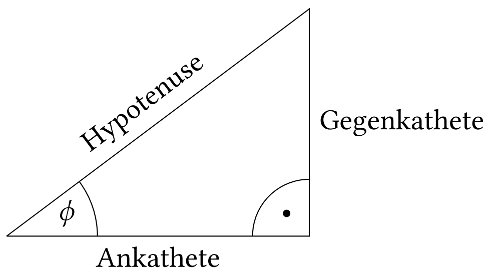
Quadrant	Winkel	$\sin\phi$	$\cos\phi$
I	$0 < 90$	+	+
II	$90 < 180$	+	-
III	$180 < 270$	-	-
IV	$270 < 360$	-	+

Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck

Wie vorhin angemerkt, beschreiben Sinus und Cosinus Verhältnisse zwischen den Seiten a, b und c in einem rechtwinkligen Dreieck. In diesem bezeichnet man die dem Winkel ϕ gegenüberliegende Seite als *Gegenkathete*, die anliegende als *Ankathete* und die längste Seite als *Hypotenuse*. Gegen- und Ankathete fallen unter den Sammelbegriff *Kathete*. Für einen Winkel $0 < \phi \leq 90$ gilt in einem rechtwinkligen Dreieck somit:

$$\sin\phi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\phi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\phi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Nimmt man die Tatsache unter Betracht, dass im Einheitskreis die Hypotenuse r stets die Länge 1 besitzt, wird klar, das $\sin\phi$ gleich der y-Koordinate bzw. der Länge der Gegenkathete des Steigungsdreiekcs ist, da dann gilt $\sin\phi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{1} = y$. Selbes gilt für x und $\cos\phi$.



Ein rechtwinkliges Dreieck mit Gegen- und Ankathete sowie Hypotenuse und Winkel ϕ