

Funktionen

Definition

Eine Funktion f ist eine eindeutige Zuordnung zwischen einer unabhängigen **Definitionsmenge** \mathbb{D} und einer von dieser abhängigen **Wertemenge** \mathbb{W} . Für jeden zulässigen, unabhängigen Eingabewert x legt eine Funktion $f(x)$ eindeutig einen von x abhängigen Funktions- bzw. Ausgabewert y fest.

Für eine Funktion $f(x)$ gilt somit:

Unabhängige Variable ... x

Abhängige Variable ... y bzw. $f(x)$

Definitionsmenge \mathbb{D}_f ... Menge aller zulässigen, unabhängigen Eingabewerte x

Wertemenge \mathbb{W}_f ... Menge aller auftretenden, von x bzw. \mathbb{D}_f abhängigen Funktionswerte y

Funktionsgleichung ...

$$y = f(x)$$

oder

$f : x \rightarrow y$ (f bildet Werte der Menge der x auf die Menge der y ab).

Darstellungsweisen

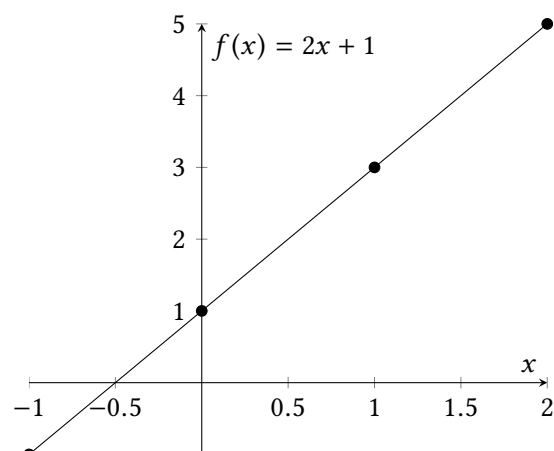
Eine Funktion $f(x)$ kann als Funktionsterm bzw. -gleichung, als Wertetabelle oder als Funktionsgraph dargestellt werden. Beispiel:

Funktionsterm ... $2x + 1$

Funktionsgleichung ... $f(x) = 2x + 1$

Wertetabelle ...

x	y
-1	-1
0	1
1	3
2	5



Funktionsgraph

Wichtige Begriffe

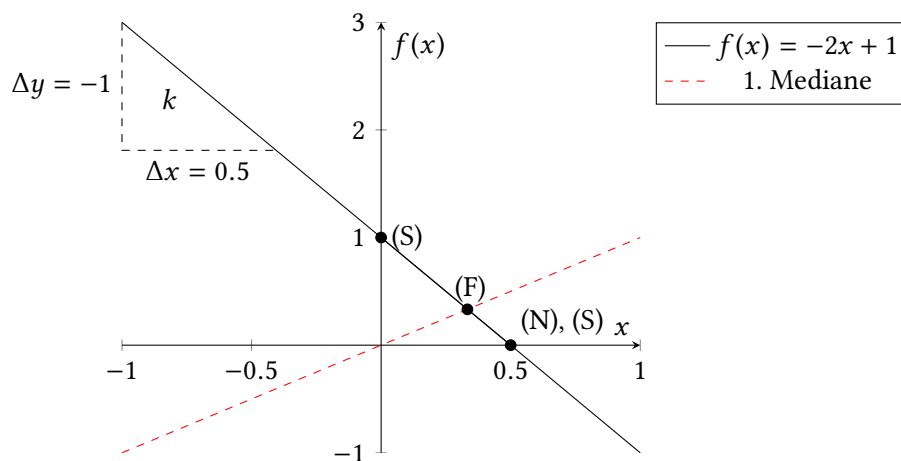
Vor der Beschreibung bzw. Diskussion wichtiger Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen sollte angemerkt werden, worin der Unterschied zwischen einer **Stelle** und einem **Punkt** einer Funktion liegt. Mit einer *Stelle* ist immer nur der Wert der Definitionsmenge bzw. die unabhängige Variable – also x – gemeint. Ein *Punkt* bezeichnet dagegen ein Koordinatentupel bestehend aus der unabhängigen *und* abhängigen Variable – also $(x|y)$.

Nullstelle (N) ... jene Stelle x einer Funktion, an welcher gilt $f(x) = 0 \rightarrow$ die Funktion schneidet die x -Achse

Spurpunkt (S) ... jener Punkt einer Funktion, an welcher sie eine der beiden Achsen schneidet (x - oder y -Achse)

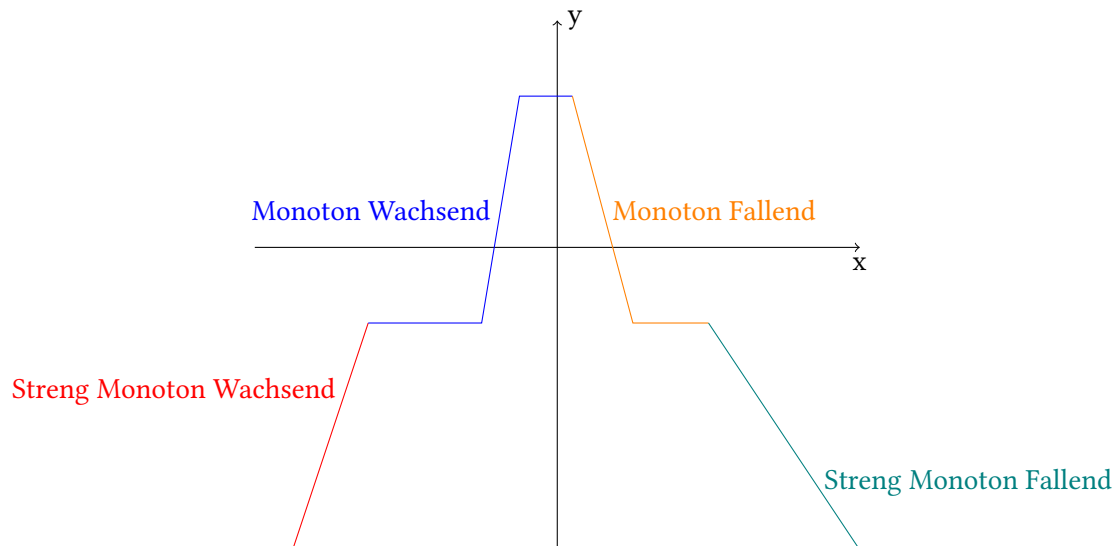
Fixpunkt (F) ... jener Punkt einer Funktion, an welcher gilt $f(x) = x \rightarrow$ die Funktion schneidet die 1. *Mediane*

Steigung ... jener Wert k , um welchen sich eine Funktion pro x -Wert auf der y -Achse verändert. Berechenbar als $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für jedes beliebige Intervall. k ist somit der *Differenzenquotient* \rightarrow die durchschnittliche Veränderung der Funktion pro x -Wert in diesem Intervall.



Monotonie ... Beschreibung des Steigungsverhalten einer Funktion. Eine Funktion $f(x)$ ist in einem beliebigen Intervall $[x_1; x_2]$

- **monoton wachsend**, wenn der Funktionswert jedes x -Wertes in diesem Intervall *nicht kleiner* ist als jener des vorhergehenden x -Wertes: $f(x) \geq f(x - 1)$ für $x \in [x_1; x_2]$
- **monoton fallend**, wenn der Funktionswert jedes x -Wertes in diesem Intervall *nicht größer* ist als jener des vorhergehenden x -Wertes: $f(x) \leq f(x - 1)$ für $x \in [x_1; x_2]$
- **streng monoton wachsend**, wenn der Funktionswert jedes x -Wertes in diesem Intervall *stets größer* ist als jener des vorhergehenden x -Wertes: $f(x) > f(x - 1)$ für $x \in [x_1; x_2]$
- **streng monoton fallend**, wenn der Funktionswert jedes x -Wertes in diesem Intervall *stets kleiner* ist als jener des vorhergehenden x -Wertes: $f(x) < f(x - 1)$ für $x \in [x_1; x_2]$

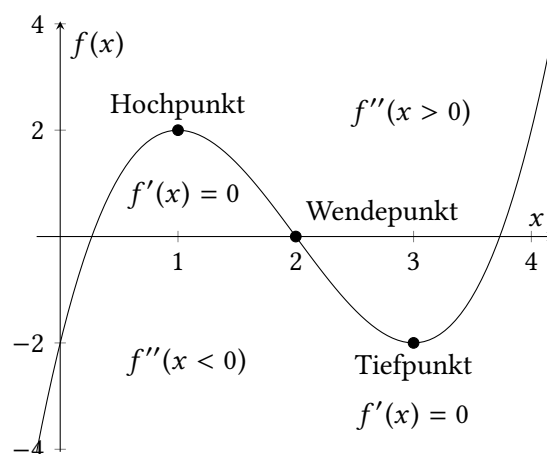


Extrempunkt ... jener Punkt einer Funktion, an welchem sich das Monotonieverhalten verändert. Ein Extrempunkt kann entweder ein Hochpunkt (*Maximum*) oder ein Tiefpunkt (*Minimum*) sein. An einer Extremstelle gilt für die Steigung der Funktion $k = 0$. Daher ist die *Tangente* an diesen Punkt waagrecht.

Krümmung ... die Veränderung der Steigung einer Funktion $f(x)$ in einem bestimmten Intervall $[x_1; x_2]$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- **positiv bzw. linksgekrümmt**, wenn die Steigung der Funktion in dem Intervall $[x_1; x_2]$ zunehmend ansteigt: $f'(x) > f'(x - 1)$, für $x \in [x_1; x_2]$, für die zweite Ableitung gilt: $f''(x) > 0$
- **negativ bzw. rechtsgekrümmt**, wenn die Steigung der Funktion in dem Intervall $[x_1; x_2]$ zunehmend fällt: $f'(x) < f'(x - 1)$, für $x \in [x_1; x_2]$, für die zweite Ableitung gilt: $f''(x) < 0$

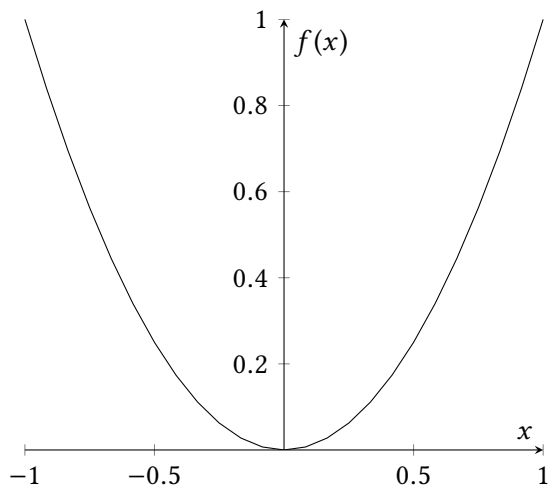
Wendepunkt ... jener Punkt einer Funktion, in welchem sich ihre Krümmung verändert. In dem Punkt selbst ist die Krümmung der Funktion gleich null: $f''(x_W) = 0$



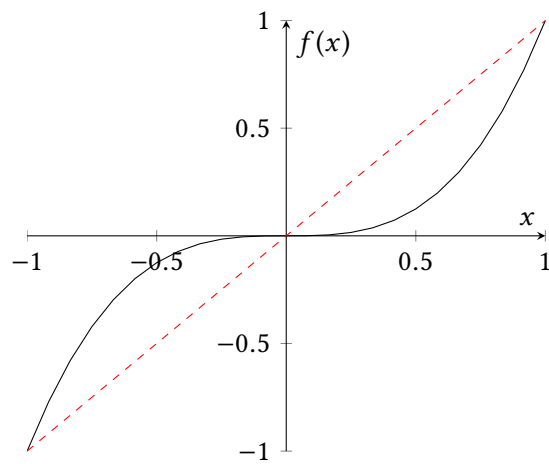
Sattel- bzw. Terrassenpunkt ... jener Punkt einer Funktion, welcher sowohl Wende- als auch Extrempunkt ist, sodass gilt $f'(x) = f''(x) = 0$

Symmetrie ... einer Funktion beschreibt ihr Symmetrieverhalten, also ob und wie sich Variablen untereinander austauschen lassen. Eine Funktion $f(x)$ kann folgendes Symmetrieverhalten aufweisen:

- **gerade bzw. achsensymmetrisch**, wenn die Funktion an der y -Achse gespiegelt ist, sodass gilt $f(-x) = f(x)$
- **ungerade bzw. punktsymmetrisch**, wenn die Funktion in jedem Punkt gespiegelt ist, sodass gilt $f(-x) = -f(x)$

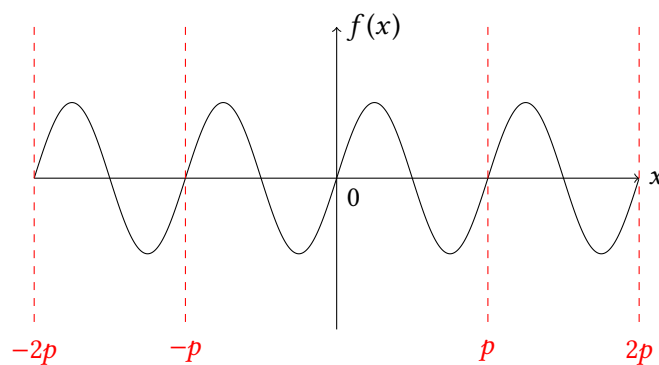


Achsensymmetrisch

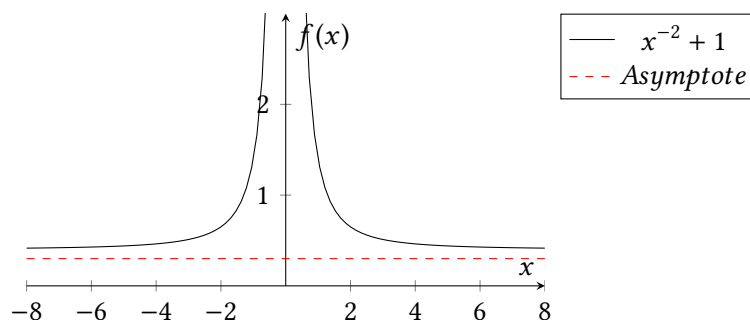


Punktsymmetrisch

Periodizität ... eine Funktion $f(x)$ ist periodisch mit einer Periode p , wenn sich die Werte der Funktion im Abstand p stets wiederholen, sodass gilt: $f(x) = f(x + p)$



Asymptote ... jene Gerade a , die einer Funktion f beliebig nahe kommt, ohne sie jemals zu berühren.



Funktionstypen

Generell kann eine Funktion in einer von zwei Formen angeschrieben sein, entweder in der **Normal- bzw. Hauptform** oder in der **Allgemeinen Form**. In der Allgemeinen Form sind alle Variablen auf einer Seite der Funktionsgleichung. In der Normal- bzw. Hauptform sind abhängige und unabhängige Variablen auf gegenüberliegenden Seiten.

Abszisse ... horizontale Achse eines Funktionsgraphen (x -Achse)

Ordinate ... vertikale Achse eines Funktionsgraphen (y -Achse)

Lineare Funktionen

Eine lineare Funktion $f(x)$ ist eine linear wachsende oder fallende Funktion, mit einer festgelegten, konstanten Steigung k , sodass gilt: $f(x + 1) = f(x) + k$. Ebenso kann eine lineare Funktion einen Abstand vom Ursprung d haben, um welchen alle Werte auf der Ordinate verschoben sind.

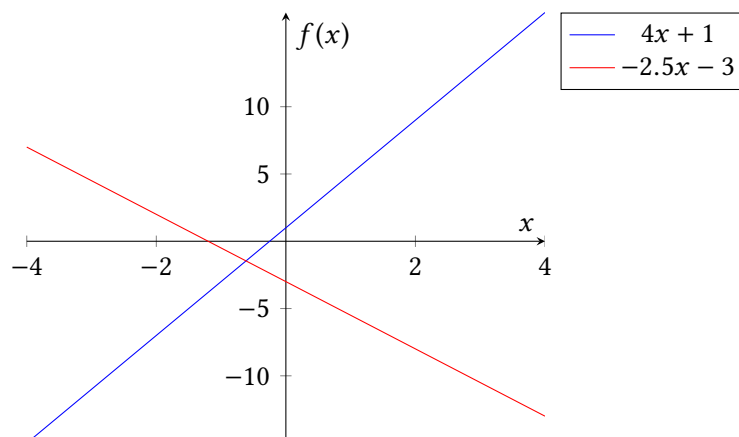
Hauptform ... $y = kx + d$

Allgemeine Form ... $ax + by + c = 0$

Homogene Lineare Funktion ... eine Lineare Funktion $y = kx \mid k \neq 0$ ohne Abstand vom Ursprung d , wobei zwischen y - und x -Werten ein direktes Verhältnis (direkte Proportionalität) besteht, sodass jeder Wert $f(x)$ den Faktor k mit dem x -Wert gemeinsam hat.

Inhomogene Lineare Funktion ... eine Lineare Funktion $y = kx + d \mid k \neq 0 \wedge d \neq 0$ ohne direktem Verhältnis zwischen x - und y -Werten.

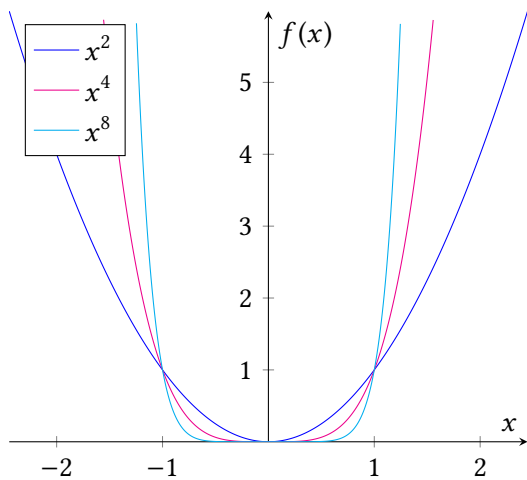
Eine Lineare Funktion hat ihre Spurpunkte in $(0|d)$ sowie $\left(-\frac{d}{k} \mid 0\right)$.



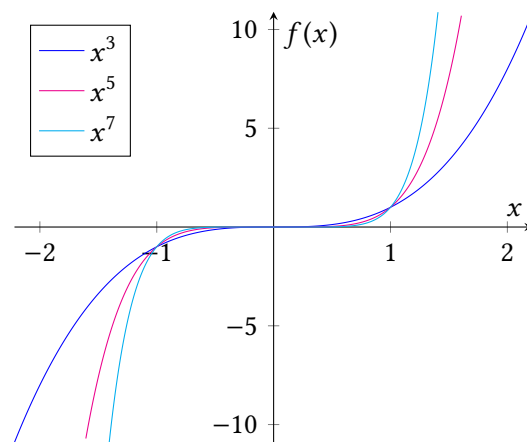
Potenzfunktionen

Eine Potenzfunktion $f(x)$ wächst oder fällt nicht-linear. Auch eine Potenzfunktion kann einen Abstand b vom Ursprung haben, um welchen alle Funktionswerte auf der Ordinate verschoben sind. Je nachdem ob die Potenz z gerade oder ungerade, positiv oder negativ ist, hat der Graph einer Potenzfunktion verschiedene Formen, welche entweder punkt- oder achsensymmetrisch sind. Ist der Exponent z einer Potenzfunktion $\in \mathbb{Z}^+$, liegt eine direkte Proportionalität vor, ist er $\in \mathbb{Z}^-$ sind x und y indirekt proportional. Gilt $z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, handelt es sich um eine *Wurzelfunktion*, da jede rationale Potenz z einer Zahl x als Bruch $x^{\frac{m}{n}}$ und somit als Wurzel $\sqrt[n]{x^m}$ dargestellt werden kann.

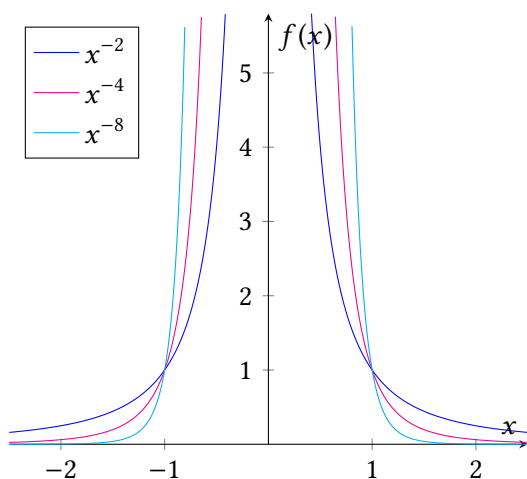
Hauptform ... $y = ax^z + b$



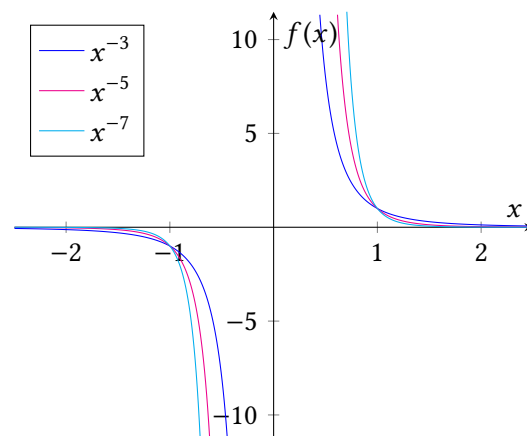
z gerade und positiv $\Rightarrow f(x)$ achsensymmetrisch



z ungerade und positiv $\Rightarrow f(x)$ punktsymmetrisch



z gerade und negativ $\Rightarrow f(x)$ achsensymmetrisch

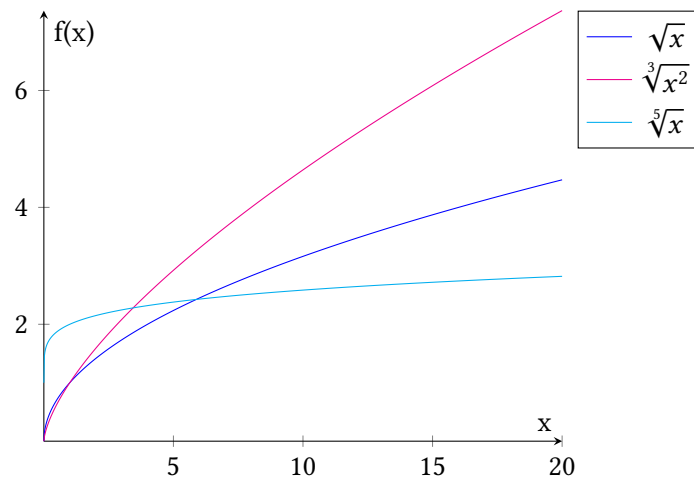


z ungerade und negativ $\Rightarrow f(x)$ punktsymmetrisch

Wurzelfunktion

Eine Wurzelfunktion ist eine besondere Form der Potenzfunktion, da eine rationale Potenz z einer Zahl x als Bruch $x^{\frac{m}{n}}$ und somit als Wurzel $\sqrt[n]{x^m}$ dargestellt werden kann. Wurzelfunktionen sind daher ebenso nicht-linear wachsend oder fallend. Ist die Grundmenge \mathbb{G} die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} , so ist die Wurzelfunktion nur für positive Werte der Definitionsmenge (x -Werte) definiert, also \mathbb{R}^+ .

Hauptform ... $y = ax^{\frac{m}{n}} + b = a\sqrt[n]{x^m} + b$



Polynomfunktion

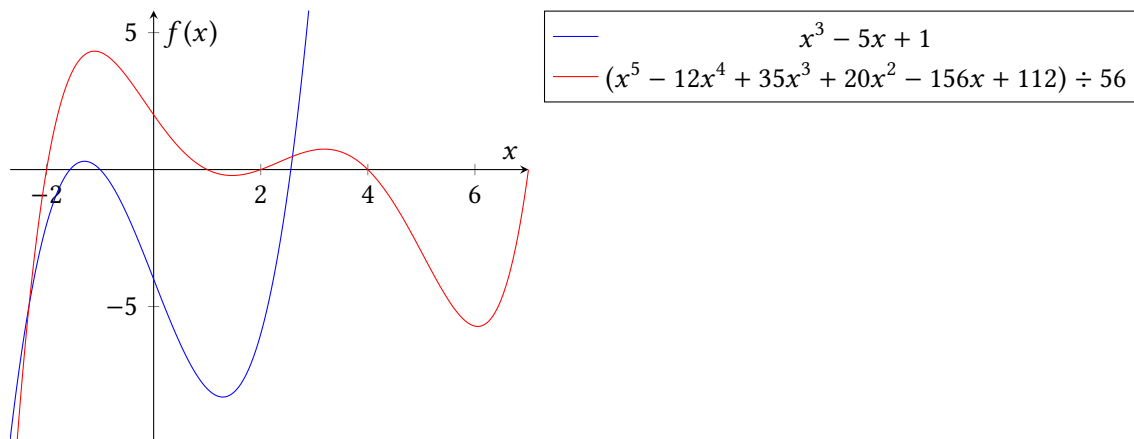
Eine Polynomfunktion ist eine Potenzfunktion bestehend aus mehreren Termen, in denen jeweils die unabhängige Variable x mit verschiedenen Potenzen vorkommt. Sie kann einen sehr komplexen Verlauf haben und ihre Funktionswerte können durch einen Abstand vom Ursprung auf der Ordinate verschoben werden. Spricht man von einer Polynomfunktion n -ten Grades, so ist die höchste vorkommende Potenz der Polynome n .

Hauptform ... $y = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

Hierbei ist der erste Term $a_0 x^0$ der Abstand vom Ursprung, da $x^0 = 1$ und somit nur a_0 als Koeffizient ohne Variable übrig bleibt.

Für eine Polynomfunktion n -ten Grades gibt es folgende Zusammenhänge:

- Anzahl der Nullstellen (N) = $\begin{cases} 0 \leq N \leq n, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 1 \leq N \leq n, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$
- Anzahl der Extremstellen (E) = $\begin{cases} 1 \leq E < n, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0 \leq E < n, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$
- Anzahl der Wendepunkte (W) = $E - 1$



Polynomfunktionen 3. und 5. Grades

Linearfaktoren und der Satz des Vieta

Jede beliebige Polynomfunktion n -ten Grades kann in n Linearfaktoren aufgespalten werden. Linearfaktoren sind jene unabhängigen Variablenwerte, welche man durch Lösen der Funktion erhält. Pro Grad der Funktion gibt es eine Lösung. Hat man n Linearfaktoren x_1, x_2, \dots, x_n einer Polynomfunktion n -ten Grades, erhält man deren Funktionsgleichung auf folgende Weise:

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

Ebenso kann man mittels der beiden Linearfaktoren x_1 und x_2 einer quadratischen Polynomfunktion $f(x) = x^2 + px + q$ die Koeffizienten p und q direkt berechnen. Dazu verwendet man den *Satz des Vieta*:

$$-p = x_1 + x_2$$

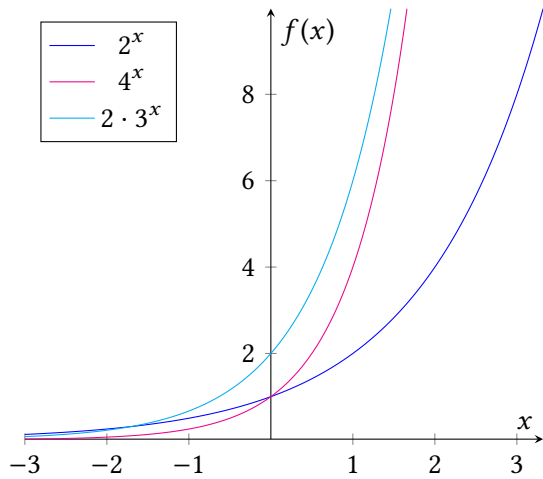
$$q = x_1 \cdot x_2$$

Exponentialfunktion

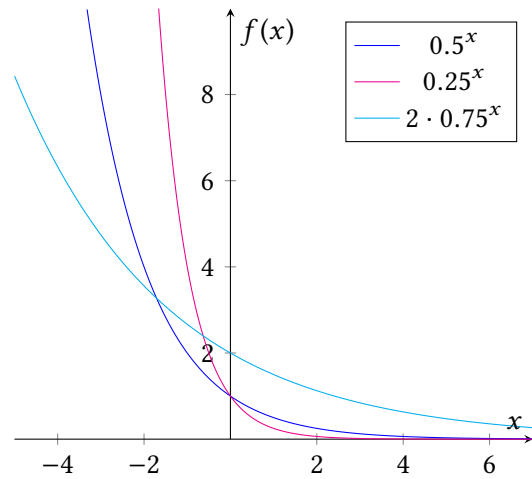
Die Funktionswerte einer Exponentialfunktion wachsen oder fallen exponentiell. Daher gilt für eine Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$, dass $f(x+1) = f(x) \cdot b$. Oftmals ist die Basis b gleich der Euler'schen Zahl e , was vor allem bei Wachstums- und Zerfallsmodellen von Bedeutung ist.

Hauptform ... $y = a \cdot b^x$

Hierbei bestimmt b die Steigung der Funktion. Der Koeffizient a ist der Abstand vom Ursprung, da für $x = 0$ anfänglich $b^0 = 1$ gilt, somit ist der Abstand vom Ursprung $a \cdot 1$. Gilt für eine Exponentialfunktion $a = 1$, so hat sie ihren Abstand vom Ursprung bei $y = 1$, da $1 \cdot b^0 = 1$. Die Funktion fällt, wenn die Basis b zwischen 0 und 1 liegt, da eine Zahl in diesem Intervall, mit sich selbst multipliziert, stets eine kleinere Zahl ist. Ist die Basis größer 1, wächst die Funktion.



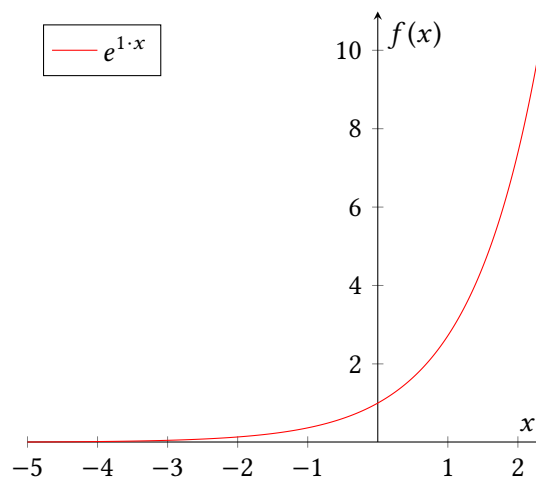
Exponentialfunktionen mit Basen b größer 1



Exponentialfunktionen mit Basen $b \in [0; 1]$

Für Modellierungen von Wachstum und Zerfall biologischer oder sonstiger natürlicher Vorgänge wird oft die Euler'sche Zahl e als Basis verwendet. Die Funktionsgleichung einer Wachstums- oder Zerfallsfunktion beinhaltet neben der unabhängigen Variable t (= Zeit) noch eine Wachstums- bzw. Zerfallskonstante λ als Exponent der Basis e . Der Koeffizient a ist gleich der ursprünglichen Menge des Wachstums- / Zerfallsprozesses und wird N_0 bezeichnet.

Wachstums- bzw. Zerfallsfunktionsgleichung ... $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$



Exponentielles Wachstum mit e als Basis

Sinus- und Cosinusfunktion

Sinus- und Cosinusfunktionen sind periodisch fallend und wachsende Funktionen, dessen Definitionswerte (oft *Phase* genannt) meist in Grad oder in Radian angegeben wird. Der Phasenunterschied zwischen Cosinus- und Sinusfunktion beträgt 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ Radian.

Allgemeine Sinusfunktion ... $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$

Allgemeine Cosinusfunktion ... $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$

Aus oben genannter Beschreibung lässt sich schließen: $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Der Faktor a bestimmt die Amplitude (= Höhe) der Funktion. b bestimmt die Frequenz sowie indirekt die Periode p . Da Sinus- und Cosinusfunktionen im Normalfall, also wenn gilt $b = 1$, eine Periode von 2π haben, gilt allgemein $p = (b \cdot 2\pi)^{-1}$. Die Konstante c ist eine beliebige Phasenverschiebung auf der Abszisse. d ist ein Abstand vom Ursprung auf der Ordinate.

Einige Bemerkungen:

- Nullstellen der Sinusfunktion liegen bei $\frac{p}{2} - c$ sowie $p - c$, jene der Cosinusfunktion bei $\frac{p}{4} - c$ sowie $\frac{3p}{4} - c$. Generell haben sie immer einen Abstand von $\frac{p}{2}$.
- Extremstellen der Sinusfunktion liegen bei $\frac{p}{4} - c$ sowie $\frac{3p}{4} - c$, jene der Cosinusfunktion bei c sowie $\frac{p}{2} - c$
- $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
- $[\sin(kx)]' = k \cdot \cos(kx)$, $[\cos(kx)]' = k \cdot [-\sin(kx)]$

