Differentialrechnung

Definition

Die Differentialrechnung beschäftigt sich mit der Veränderung von unabhängigen und abhängigen Variablen einer Funktion in Abhängigkeit von einander. Wichtige Termini sind hierbei der Differenzenquotient, der die mittlere Änderungsrate bzw. durchschnittliche Steigung einer Funktion ausdrückt; der Differentialquotient, der die momentane Änderungsrate bzw. momentane Steigung beschreibt; sowie die Kurvendiskussion, bei welcher sich mit Hilfe von Differenzen- und Differentialquotient die Eigenschaften einer Funktion beschreiben lassen.

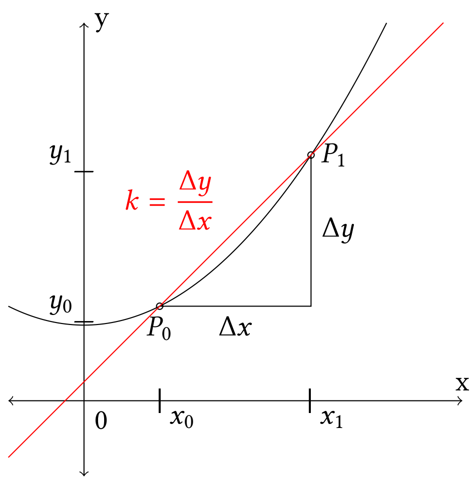
Generell lässt sich sagen, dass sich die Differentialrechnung mit **relativen** Änderungsmaßen beschäftigt (z.B. eine relative Zunahme des Weges um 2 Meter *pro* Sekunde — Variablen in Relation zu einander) und nicht mit **absoluten** Änderungsmaßen (z.B. eine absolute Zunahme des Weges um 5 Meter nach 10 Sekunden — keine Relation zwischen den Variablen).

Differenzenquotient

Der Differenzenquotient $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ einer Funktion $f(x)$ ist ein **relatives Änderungsmaß**, welches für zwei beliebiege unabhängige Variablen x_0 und x_1 aus der Definitionsmenge D_f und den beiden entsprechenden abhängigen Variablen $f(x_0)$ bzw. y_0 und $f(x_1)$ bzw. y_1 aus der Wertemenge W_f, die Änderung dieser beiden Variablen in Relation zu einander beschreibt. Der daraus resultierende Wert k drückt aus, um wieviele Einheiten sich $f(x)$ im Intervall $[x_0; x_1]$ verändert, wenn x um eine Einheit wächst oder fällt. Der Differenzenquotient ist somit die **mittlere Änderungsrate** bzw. die **durschnittliche Steigung** in diesem Intervall. Für den Differenzenquotient einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[x_0; x_1]$ gilt somit:

$$k = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Geometrisch gesehen lässt sich der Differenzenquotient durch die **Sekantensteigung** modellieren. Die Sekantensteigung einer Funktion $f(x)$ ist die Hypotenuse des Steigungsdreiecks zwischen den Punkten $P_0(x_0|y_0)$ und $P_1(x_1|y_1)$.

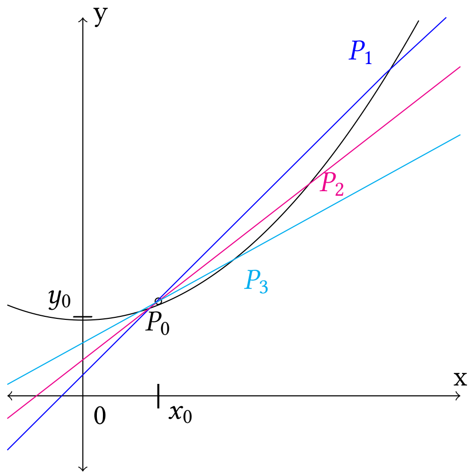


Differentialquotient

Während der Differenzenquotient die durschnittliche Steigung in einem bestimmten Intervall $[x_0; x_1]$ beschreibt, drückt der Differentialquotient die **momentane Steigung** bzw. die **momentane Änderungsrate** einer Funktion an einer bestimmten Stelle x aus. Der Differentialquotient an einer Stelle x_0 ist theoretisch gesehen ein Differenzenquotient in einem Intervall $[x_0; x_1]$, in dem x_1 gegen x_0 und somit Δx gegen 0 strebt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$$

Geometrisch gesehen ist ein Differentialquotient einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 die Steigung der Tangente an den Punkt $P(x_0|f(x_0))$. Diese Tangente entsteht durch eine Folge von Annäherungen von Sekanten in einem immer kleiner werdenenden Intervall $[x_0, x_1]$. Somit kann der Differentialquotient bzw. die Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen gesehen werden.



Ableiten

…