Integral

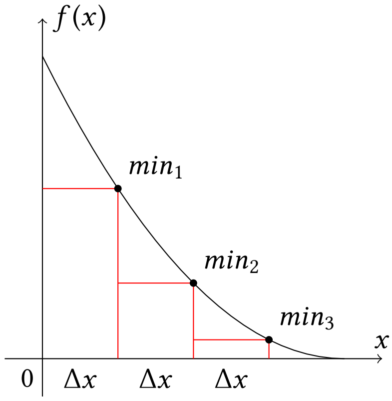
Die Integralrechnung beschäftigt sich mit der Berechnung von Flächeninhalten unter Kurven. Diese können entweder als Summe von Rechtecksflächen angenähert oder mittels dem Integrationsverfahren genau bestimmt werden. Im Bereich der Analysis ist das Integrieren einer Funktion die inverse Operation zum Differenzieren.

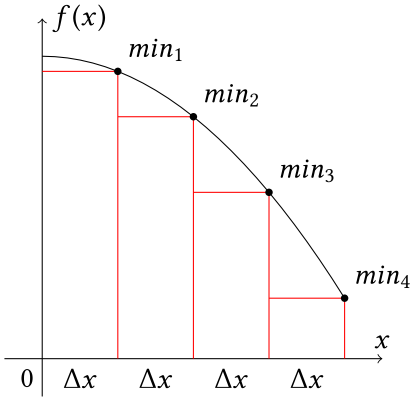
Produktsummen

Das Integral einer Kurve kann in einem Annäherungsverfahren durch Summen von Flächeninhalten einfacher Figuren wie Rechtecken, Dreiecken oder Trapezen approximiert werden, da die Berechnung ihrer Flächen vergleichsweise einfach ist. Verwendet man Rechtecke für die Approximierung, so ist das Integral eine Summe vieler kleiner Rechtecke. Die Breite Δx dieser Rechtecke ist hierbei ein festgelegter, konstanter Abstand auf der x-Achse, welcher die Funktion in die Intervalle $[0; \Delta x], [\Delta x; 2 \cdot \Delta x], [2 \cdot \Delta x; 3 \cdot \Delta x], \ldots$ teilt. Für ein beliebiges Intervall $[a; b]$ einer Funktion, das in N Teilintervalle geteilt werden soll, wird Δx mittels der Formel $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ berechnet. Die Länge jeden Rechtecks ist der jeweilige Funktionswert $f(x)$ an den einzelnen Intervallsgrenzen. Das Integral ist somit eine Summe vieler Produkte: eine *Produktsumme*.

Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten, Rechtecke unter einer Kurve aufzuspannen und so eine Produktsumme zu bilden: als Untersumme, Obersumme, Linkssumme oder Rechtssumme.

Untersumme





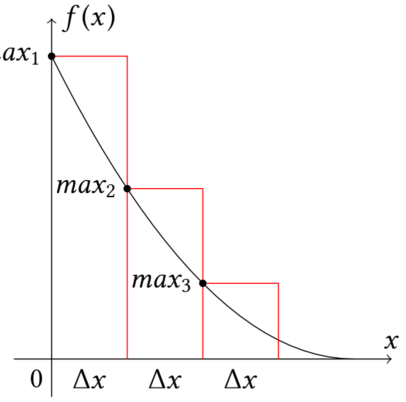
Für die Untersumme A_U wird der kleinste Funktionswert min_i jedes Intervalls als Länge genommen:

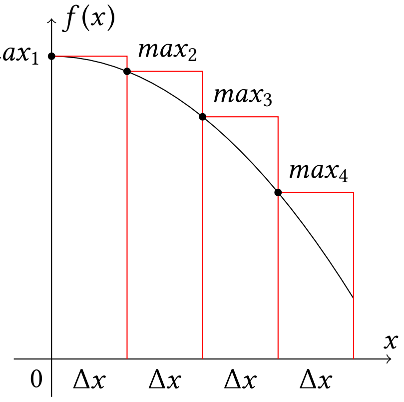
$$A_U = \sum_{i=1}^{N} f(min_i) \cdot \Delta x$$

Fällt die Funktion, liegt der kleinste Funktionswert jedes Intervalls meist am rechten Ende. Steigt die Funktion, bestimmt bei der Untersumme meist der Funktionswert der linken Intervallsgrenze die Länge des Rechtecks. Die Breite Δx ist bei allen Produktsummen ein konstanter Faktor, mit ihm kann also auch nachträglich multipliziert werden:

$$A_U = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} f(min_i)$$

Obersumme

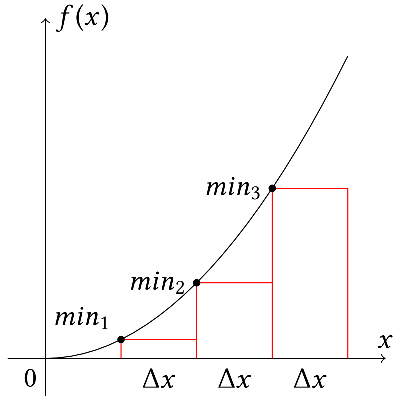




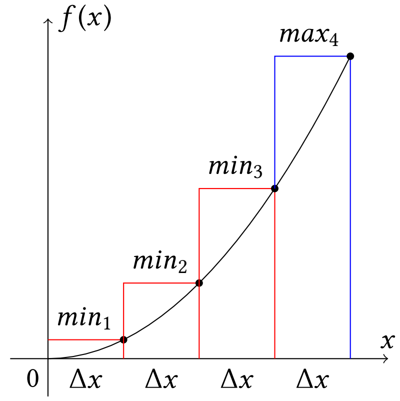
Gegensätzlich zur Untersumme A_U bestimmt bei der Obersumme A_O nicht der kleinste Funktionswert jeden Intervalls die Länge des Rechtecks, sondern der größte Funktionswert:

$$A = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} f(max_i)$$

Man bemerke, dass die Rechtecke der Obersumme jenen der Untersumme stark ähneln. So ergibt es sich, dass die Obersumme berechnet werden kann, indem man die Rechtecke der Untersumme um ein Δx verschiebt, das letzte Untersummenrechteck verwirft und das erste Rechteck mit dem maximalen Intervallswert neu berechnet (min_N ist die Minimalstelle des letzten von N Intervallen):



$\Rightarrow$



$$A_O = A_U - \Delta x \cdot f(min_N) + \Delta x \cdot f(max_1)$$

$$\Downarrow$$

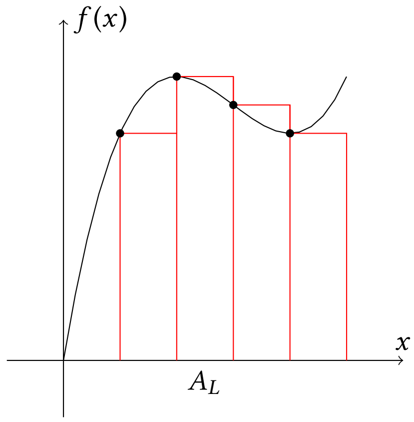
$$A_O = A_U + \Delta x \cdot (f(max_1) - f(min_N))$$

Da die Obersumme höher ist als die wirkliche Fläche unter der Kurve und die Untersumme niedriger, kann der Flächeninhalt der Kurve mit Relationszeichen zwischen Unter- und Obersumme eingeschränkt werden:

$$A_U < A < A_O$$

Linkssumme

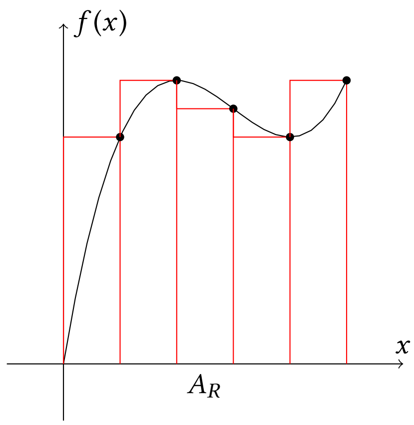
Die Linkssumme unterscheidet nicht zwischen minimalen oder maximalen Funktionswerten, sondern setzt die Länge jeden Rechtecks stets an das linke Ende jeden Intervalls:



$$A_L = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(i \cdot \Delta x)$$

Rechtssumme

Zur Berechnung der Rechtssumme wird die Länge jeden Rechtecks immer am Funktionswert der rechten Intervallsgrenze gemessen:



$$A_R = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} f(i \cdot \Delta x)$$

Das Bestimmte Integral

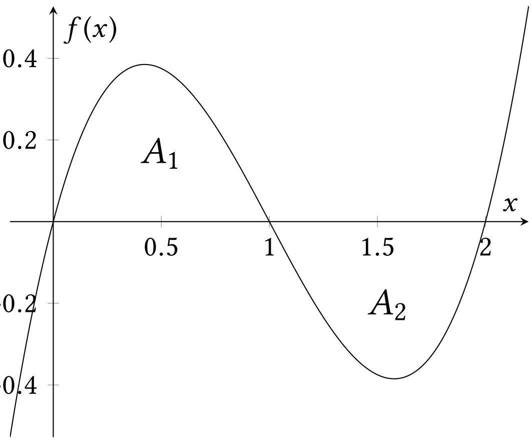
Ebenso wie der Differentialquotient, also die momentane Änderung einer Funktion an einer bestimmten Stelle x, ein Grenzwert von Differenzenquotienten ist, in dem das Intervall $[x\,;x+\Delta x]$ des Differenzenquotienten infinitisemal klein ist und Δx somit gegen null strebt, ist auch ein Integral das Resultat eines Grenzwerts. Wächst nämlich die Anzahl N an Rechtecken, mit denen man die Fläche unter einer Kurve als Produktsumme annähert, wird Δx immer kleiner und diese Annäherung somit immer genauer. Bei einer sehr großen Anzahl an Rechtecken N konvergieren also Minimum und Maximum, Untersumme und Obersumme jeden Intervalls in einem Wert. Das bestimmte Integral, welches die Fläche unter einer Funktion in einem bestimmten Intervall $[a;b]$ exakt berechnet, lässt sich also mit Hilfe eines Limes und den vorhin beschriebenen Produktsummen definieren:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x$$

Bei einem bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ beschreiben a und b somit die untere sowie obere Intervallsgrenze. $f(x)$ ist die im Intervall $[a;b]$ zu integrierende Funktion — der Integrand. Der Ausdruck dx bestimmt die Variable, nach der man integriert — in diesem Fall x. Der Ausdruck dx sollte immer angegeben werden und ist besonders für das Integral multivariabler Funktionen wichtig:

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b (2x^3 - 4z + y) \rightarrow \text{ Integration nach welcher Variable?}$$

Es sei angemerkt, dass Flächenstücke unter der der Abszisse ein negatives Vorzeichen besitzen. Soll also die absolute Fläche, die eine Funktion mit der Absizsse einschließt, berechnet werden, muss der Betrag aller negativen Flächensegmente verwendet werden. Ist jedoch nach dem Wert des bestimmten Integral in diesem Intervall gefragt, nicht nach der Fläche, so müssen alle Vorzeichen — positiv und negativ — beibehalten werden:



Absolute mit der x-Achse eingeschlossene Fläche A der Funktion:

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 f(x)\,dx\right|$$

Bestimmtes Integral: $\int_0^2 f(x)\,dx = A_1 + A_2$

Stammfunktionen

Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit der Integralrechnung ist die sogenannante „Stammfunktion“ einer Funktion, welche eine genau Berechnung des bestimmten Integral ermöglicht. Da die Stammfunktion $F(x)$ das Resultat der Integration — dem Gegenteil der Differenzierung — einer Funktion $f(x)$ ist, ist die erste Ableitung $F'(x)$ der Stammfunktion wiederum die ursprüngliche Funktion $f(x)$. Eine Stammfunktion $F(x)$, welche equivalent zum *unbestimmten* Integral ist, wird als Integral ohne Integrationsgrenzen angeschrieben:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Da Konstanten bei der Differenzierung einer Funktion wegfallen, besitzt jede Funkion $f(x)$ nicht nur eine, sondern unendlich viele Stammfunktionen, welche sich nur durch eine reelle Integrationskonstante C voneinander unterscheiden. Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$, gilt somit:

$$F'(x) = G'(x) = f(x)$$

Eine besondere Eigenschaft von Stammfunktionen ist, dass sie die Berechnung des bestimmten Integrals einer Funktion in einem beliebigen Intervall $[a; b]$ ermöglichen. Der vorhin vorgestellte Grenzwert aus Produktsummen als Definition des Integrals liefert noch keine eindeutige Rechenmethode zur genauen Bestimmung seines Wertes. Kennt man eine Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$, so ist das bestimmte Integral dieser Funktion in einem beliebigen Intervall $[a; b]$ die Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an diesen Stellen. Die Integration einer Funktion in den Grenzen von a nach b wird hierbei durch einen vertikalen Strich angedeutet.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln

Aus der Definition des Integrals, der Stammfunktion sowie dem Verhältnis zwischen Differential- und Integralrechnung lassen sich einige Regeln der Integration festlegen. Allen voran steht die *Potenzregel*, welche die Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ ermöglicht. Möchte man einen Term des Schemas x^n integrieren, bzw. für diesen eine Stammfunktion finden, so erhöht man die Potenz der unabhängigen Variable um 1 und dividiert den Term dadurch:

$$\int (x^n)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Da konstante Werte wie die Zahl 7 oder π Koeffizienten k eines Terms der Form $k \cdot x^0$ sind, fallen sie nicht wie bei der Differenzialrechnung weg, sondern werden Koeffizienten der unabhängigen Variable x:

$$\int 7\,dx = \int (7 \cdot x^0)\,dx = 7 \cdot \frac{x^1}{1} = 7x$$

Beispiel: *Integriere die Funktion* $f(x) = 3x^4 + 6x^2 - 7x + 1$.

$$\int 3x^4\,dx = \frac{3}{5}x^5 \qquad \int 6x^2\,dx = \frac{6}{3}x^3 = 2x^3 \qquad \int -7x\,dx = -\frac{7}{2}x^2 \qquad \int 1\,dx = \frac{1}{1}x = x$$

Ergebnis: $\int f(x)\,dx = F(x) = \frac{3}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x$

- **Summenregel**

  Das bestimmte Integral der Summe aus zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in einem beliebigen Intervall $[a; b]$ ist gleich der Summe der einzelnen Integrale:

  $$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

  Auch allgemein gilt dass die Stammfunktion einer Summe aus zwei Funktionen gleich der Summe ihrer Stammfunktionen ist:

  $$\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = F(x) + G(x)$$

- **Faktorregel**

  Konstante Faktoren $k \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f(x)$ bleiben beim Integrieren sowie beim Bilden einer Stammfunktion erhalten:

  $$\int_a^b \left[k \cdot f(x)\right] dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

  $$\int \left[k \cdot f(x)\right] dx = k \cdot F(x)$$

- **Kombinationsregel**

  Die Summe bestimmter Integrale einer Funktion in zwei benachbarten Intervallen $[a; b]$ $[b; c]$ ist gleich dem bestimmten Integral im gesamten Intervall $[a; c]$:

  $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

  Dies kann auch auf beliebig viele benachbarte Intervalle mit den jeweiligen Intervallsgrenzen a_i und b_i des i-ten Intervalls erweitert werden. Sei N die Anzahl der benachbarten Teilintervalle:

  $$\sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_N} f(x)\,dx$$

- **Nullregel**

  Ist die Differenz $b - a$ zwischen den Integrationsgrenzen a und b gleich null, so ist das Integral der Funktion in diesen Grenzen gleich null:

  $$b - a = 0 \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

- **Vertauschungsregel**

  Kehrt man die Integrationsgrenzen a und b eines bestimmten Integrals einer Funktion um, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals in diesen Grenzen:

  $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

  Dies folgt daraus, dass das bestimmte Integral einer Funktion in einem Intervall $[a; b]$ die Differenz zwischen den Funktionswerten der Stammfunktion an den Stellen a und b ist. Kehrt man die Integrationsgrenzen um, werden Minuend und Subtrahend dieser Differenz vertauscht:

  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

  $$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

Integrale elementarer Funktionen

Nicht alle Integrale sind leicht zu bestimmen, vor allem jene elementarer Funktionen wie der Sinus-, Cosinus-, Wurzel-, Logarithmus- oder Euler'schen Funktion. Die Ableitung dieser Funktionen zu finden ist meist leichter.

$f(x)$	$\longleftrightarrow$	$F(x)$
e^x	$\longleftrightarrow$	e^x
x^{-1}	$\longleftrightarrow$	$\ln x$
$\sqrt{x}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$sin(x)$	$\longleftrightarrow$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\longleftrightarrow$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\longleftrightarrow$	$\tan x$
a^x	$\longleftrightarrow$	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^{ax}	$\longleftrightarrow$	$\frac{e^{ax}}{a}$
x^n	$\longleftrightarrow$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Die Integration der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ sollte erläutert werden. Jede Wurzel der Form $\sqrt[m]{x^n}$ kann als Potenz der Form $x^{\frac{n}{m}}$ angeschrieben werden. Daher wäre die Quadratwurzel von x gleich x hoch $\frac{1}{2}$. Wendet man nun die Potenzregel an, erhöht man die Potenz des Terms um 1 und dividiert schließlich dadurch:

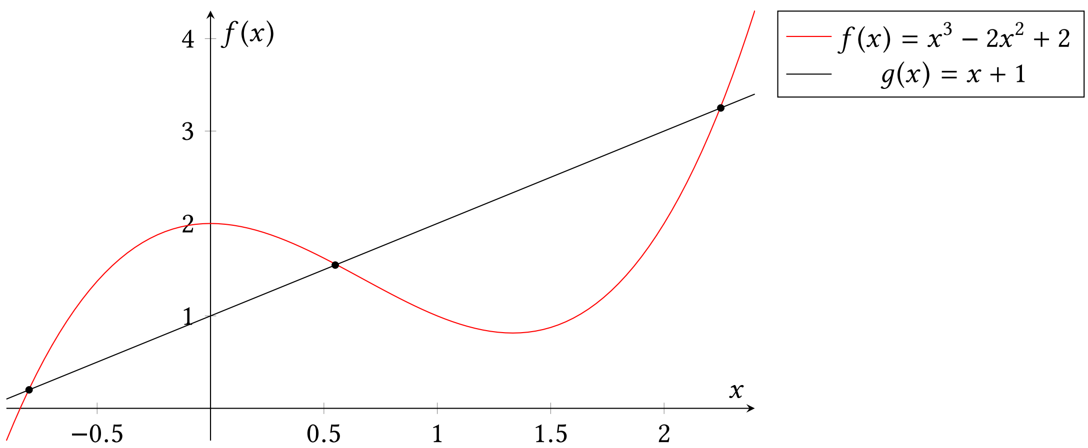
$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

Berechnung von eingeschlossenen Flächen

Gilt es, die Fläche zwischen zwei beliebigen Funktionen berechnen, so muss man die Differenz ihrer Integrale bestimmen. Hierbei sei angemerkt, dass die berechnete, eingeschlossene Fläche dann positiv ist, wenn der kleinere Flächeninhalt (der *unteren* Funktion) vom größeren Flächeninhalt (der *oberen* Funktion) abgezogen wird.Andernfalls muss der Betrag des negativen Flächenstücks verwendet werden — die absolute Fläche bleibt gleich. Ebenso sei angemerkt, dass stets von Schnittpunkt zu Schnittpunkt integriert werden sollte, da sich die Lagebeziehungen der Funktionen verändern können und somit das Vorzeichen der einzelnen Teilintegrale. Für die Berechnung der von zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ umschlossenen Fläche A gilt somit:

$$A = \left| \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \right|$$

Beispiel: *Berechne die Fläche, die von den Funktionen* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ *und* $g(x) = x + 1$ *eingeschlossen wird.*



Der Grafik kann man entnehmen, dass die beiden Funktionen drei Schnittpunkte besitzen und daher zwei Flächenstücke einschließen. Das erste Flächenstück A_1 wird von den Funktionen im Intervall $[-0.8; 0.55]$ umschlossen. Das zweite Flächenstück A_2 liegt im Intervall $[0.55; 2.25]$. Diese Intervallsgrenzen legt man als Integrationsgrenzen fest und berechnet anschließend das bestimmte Integral der Differenz der beiden Funktionen in diesen Grenzen. Addiert man die beiden positiven Teilflächen A_1 und A_2 erhält man die gesamte Fläche A. Im ersten Intervall sollte das Integral von $g(x) - f(x)$ bestimmt werden, um somit eine positive Fläche zu erhalten. Konvers ist es im zweiten Intervall ratsam, $f(x)$ von $g(x)$ zu subtrahieren.

In beiden Fällen kann ebenso der Betrag des Integrals verwendet werden, dann spielen die Anordnung von Minuend und Subtrahent keine Rolle. Ebenso kann man sich durch Verwendung des Betrags Rechenarbeit sparen, da es genügt, eine Stammfunktion $H(x) = f(x) - g(x)$ zu bestimmten, welche dann mittels dem Betrag für beide Teilintegrale gültig ist.

Berechnung der Stammfunktion $H(x)$ von $f(x) - g(x)$:

$$H(x) = \int \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int \left[(x^3 - 2x^2 + 2) - (x + 1) \right] dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$$

Anschließend kann das erste Teilintegral A_1 in den Grenzen $[-0.8; 0.55]$ bestimmt werden:

$$A_1 = \int_{-0.8}^{0.55} \left[f(x) - g(x)\right] dx = H(x) \Big|_{-0.8}^{0.55} = H(0.55) - H(-0.8) \approx -1$$

Sowie das zweite Teilintegral A_2 in den Grenzen $[0.55; 2.25]$:

$$A_2 = \int_{0.55}^{2.25} \left[f(x) - g(x)\right] dx = H(x) \Big|_{0.55}^{2.25} = H(2.25) - H(0.55) \approx 1.8$$

Die gesamte, von den beiden Funktionen umschlossene Fläche A ist somit die Summe der beiden absoluten Teilflächen:

$$A = |A_1| + |A_2| \approx 2.8$$

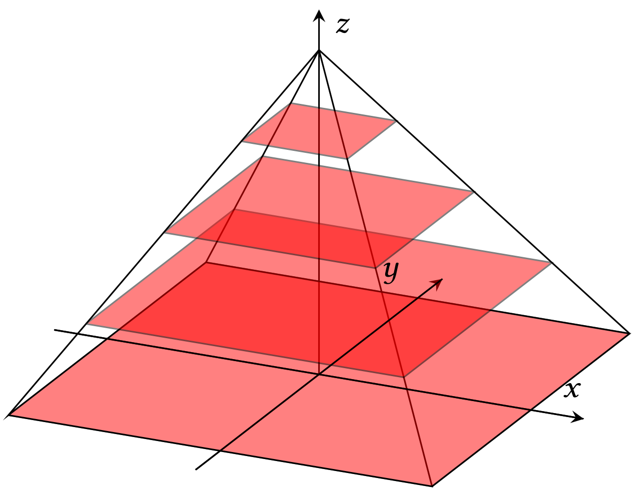
Volumsberechnungen

Ein weiteres Anwendungsgebiet der Integralrechnung ist die Berechenung von Volumen. Ebenso wie das Integral dazu verwendet werden kann, eine Fläche als Summe vieler kleiner Rechtecke zu bilden, kann das Volumen eines Körpers als Summe der Volumina vieler kleiner Quader berechnet werden. Das Volumen eines Prismas oder Zylinders ist allgemein $G \cdot h$, wo G die Grundfläche und h die Höhe des Prismas bzw. des Zylinders ist.

Bei der Flächenberechnung wurde das bestimmte Integral gebildet, indem die Breite der einzelnen Rechtecke der Produktsummen gegen Null strebte. Bei der Volumsberechnung hingegen strebt die Höhe der einzelnen Quader gegen Null. Der andere Faktor dieser Produktsumme, die Querschnittsfläche (bzw. Grundläche jeden Quaders) G, muss als Funktion der z-Koordinate definiert werden. Dies folgt daraus, dass sich die Breite und Länge der Querschnittsfläche vieler Körper (z.B. quadratische Pyramiden) mit der Höhe verändern. Das bestimmte Integral zur Berechnung des Volumens eines Körpers in der Höhe von $z = a$ bis $z = b$ sei somit definiert als:

$$V = \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{i=1}^{N} A(z_i) \cdot \Delta z = \int_a^b A(z)\, dz$$

Die folgende Abbildung zeigt eine quadratische Pyramide. Die Querschnittsfläche $A(z)$, hier in Rot, wird mit ansteigendem z kleiner. Die jeweilige Höhe h jeden Quaders strebt gegen null, ist also infinitisemal klein.



Beispiel: *Berechne das Volumen eines Zirkuszelts, dessen quadratische Querschnittsfläche in der Höhe z eine Seitenlänge nach* $a(z) = 8 \cdot (4 - \sqrt{z})$ *besitzt. Abmessungen in m.*

Zuerst muss eine Funktion $A(z)$ für die Querschnittsfläche A in der Höhe z gefunden werden. Da die Querschnittsfläche quadratisch ist, ist sie das Quadrat ihrer Seitenlänge a. Die Seitenlänge des Zirkuszelts ist in Abhängigkeit der Höhe laut Angabe definiert als $a(z) = 8 \cdot (4 - \sqrt{z})$. Somit gilt für die Querschnittsfläche $A(z)$:

$$A(z) = a(z)^2 = \left[8 \cdot (4 - \sqrt{z})\right]^2 = 64 \cdot (16 - 8\sqrt{z} + z)$$

Diese Querschnittsläche kann nun nach dz integriert werden, um so das Volumen des Zirkuszelts zu bestimmen. Dafür müssen jedoch zuerst die Integrationsgrenzen gefunden werden. Die untere Grenze befindet sich bei $z = 0$, da das Zirkuszelt am Boden liegt. Die obere Grenze kann als $z = 16$ gefunden werden, da $a(16) = 0$. Das bestimmte Integral liefert nun das Volumen V:

$$V = \int_0^{16} A(z)\,dz = \int_0^{16} \left[64 \cdot (16 - 8\sqrt{z} + z)\right]\,dz = 64 \cdot \left(16z - \frac{16}{3}\sqrt{z^3} + \frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_0^{16} \approx 2731$$

Ergebnis: Das Volumen des Zirkuszelts beträgt 2731 m^3.

Rotationskörper

Eine besondere Form der Volumsberechnung beschäftigt sich mit dem Finden von Volumina von Rotationskörpern. Rotationskörper entstehen, indem man eine Funktion, beispielsweise $y = \sqrt{x}$, um eine der beiden Achsen — x oder y — rotieren lässt. Die Rotationsachse wird hierbei die *Erzeugende* des Rotationskörpers genannt. Bei Rotationskörpern liegen den einzelnen Produktsummen keine Quader, sondern Zylinder vor. Das Volumen eines Zylinders ist in Abhängigkeit des Radius definiert als:

$$V(r) = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$$

Die unabhängige Variable der Funktion $V(r)$ ist hierbei der Radius r des Zylinders. Bei Rotationskörpern ist der Radius einzelner Zylinder jedoch selbst ebenso abhängig, da er sich mit steigendem x- bzw. y-Argument — je nach Rotationsachse — verändert. Die Höhe h der Zylinder strebt beim bestimmten Integral wiederum gegen null. Diese Höhe ist bei Rotationskörpern um die x-Achse gleich Δx und bei Rotationskörpern um die y-Achse gleich Δy.

Rotiert die Funktion bzw. der Körper um die x-Achse, wird das Volumen V_x berechnet. Der Radius der einzelnen Zylinder ist hierbei equivalent zum Funktionswert $f(x)$ bzw. y an jeder Stelle x der Funktion. Im Intervall $[x_1; x_2]$ wird das Volumen eines um die x-Achse rotierenden Funktionsgraphen somit durch folgendes bestimmtes Integral berechnet:

$$V_x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} r_i^2\pi \cdot \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} (y^2\pi)\,dx = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$$

Wird um die y-Achse rotiert, muss die Funktion zuerst nach der abhängigen Variable umgeformt werden. Bei der oben angegeben Wurzelfunktion wäre die nach x umgeformte Funktion: $x = y^2$. Das Volumen eines um die y-Achse rotierenden Körpers wird mit V_y angegeben. In den Integrationsgrenzen von y_1 bis y_2 ist das bestimmte Integral eines um die y-Achse rotierenden Funktionsgraphen definiert durch:

$$V_x = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=1}^{N} r_i^2\pi \cdot \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} (x^2\pi)\,dy = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy$$

Beispiel: *Die Kurve $f(x) = \sqrt{x}$ rotiert im Intervall $[0;4]$ um die x-Achse. Berechne das Volumen des daraus entstehenden Rotationskörpers.*

Da der Funktionsgraph um die x-Achse rotieren soll, ist der Radius der einzelnen Zylinder der Produktsumme bzw. des bestimmten Integrals gleich dem Funktionswert $f(x)$ an jeder Stelle $x \in [0;4]$. Daher wird für die Querschnittsflächenformel (= Flächenformel eines Kreises) $A = r^2\pi$ der Radius durch die Funktion $f(x)$ ersetzt, in Abhängigkeit des Fortschritts auf der x-Achse. Das Volumen des Rotationskörpers im Intervall $[0;4]$ ist folglich das bestimmte Integral der Querschnittsfläche in Abhängigkeit von x. Integriert wird nach dx, da die Höhe der einzelnen Zylinder gegen Null strebt. Wird der Ausdruck $f(x)$ letztlich noch als y angeschrieben, lässt sich das Volumen so berechnen:

$$V_x = \pi \cdot \int_0^4 y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 x\,dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = 8\pi$$

Ergebnis: Das Volumen des Rotationskörpers beträgt 8π Volumseinheiten.

Beispiel: *Der Graph der Funktion $f(x) = 4 - 2x$ rotiert im Intervall $[0;4]$ um die y-Achse. Berechne das Volumen des daraus entstehenden Rotationskörpers.*

Hier muss die Funktion $f(x)$ zuerst nach x umgeformt werden, da der Körper um die y-Achse rotiert. Das bedeutet, dass der Radius der Zylinder gleich der x-Variable ist und sich in Abhängigkeit der Höhe bzw. des y-Arguments verändert. Die nach x-umgeformte Funktion lautet:

$$y = 4 - 2x \Rightarrow x = 2 - \frac{y}{2}$$

Anschließend kann auch gleich das Quadrat der Funktion berechnet werden, da dieses bei der Berechnung des Volumens benötigt wird:

$$x^2 = \left(2 - \frac{y}{2}\right)^2 = -\frac{y^2}{4} - 2y + 4$$

Somit kann das Volumen des um die y-Achse rotierenden Körpers berechnet werden:

$$V_y = \pi \cdot \int_0^4 x^2\,dy = \pi \cdot \int_0^4 \left(-\frac{y^2}{4} - 2y + 4\right) dy = \pi \cdot \left(-\frac{y^3}{12} - y^2 + 4y\right)\bigg|_0^4 = \frac{324}{5}\pi$$

Ergebnis: Der Rotationskörper hat ein Volumen von $\frac{324}{5}\pi$ Volumseinheiten.

Analysis

In Verbindung mit der Analysis sei zur Integralrechnung gesagt, dass sie ein Ableitungsverfahren rückgängig macht. Man nehme eine Weg-Zeit Funktion $s(t)$. Diese hat als unabhängige Variable auf der Abszisse die verstrichene Zeit t sowie als abhängige Variable auf der Ordinate den zurückgelegten Weg $s(t)$. Bildet man die erste Ableitung $s'(t)$, so ist dies die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$, welche die Veränderung des Weges relativ zur verstrichenen Zeit bzw. die momentane Änderungsrate der Weg-Zeit Funktion zu jedem Zeitpunkt t beschreibt. Die unabhängige Variable der Funktion $v(t)$ ist immer noch die Zeit t, die abhängige Variable nun jedoch nicht mehr der zurückgelegte Weg s, sondern die Geschwindigkeit s/t. Die zweite Ableitung der Weg-Zeit Funktion nennt sich Beschleunigungsfunktion und wird mit $a(t)$ angegeben. Die Beschleunigungsfunktion beschreibt die Veränderung der Geschwindigkeit relativ zur Zeit, hat als abhängige Variable daher s/t^2. Daher wird klar, dass das Ableiten einer Funktion equivalent zur Division ihrer abhängigen Variable (hier s, s/t, s/t^2) durch ihre unabgängige Variable (hier t) ist:

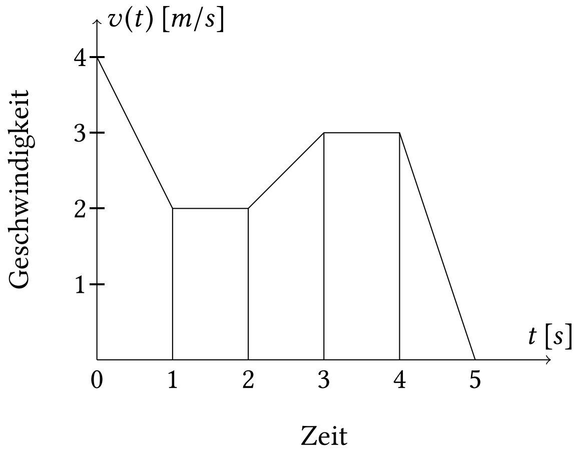
$$s'(t) = v(t) \to s/t$$

Ein Integrationsverfahren ist das genaue Gegenstück zum Ableiten einer Funktion. Integriert man eine Funktion $f(x)$, so kann man dies entweder als das Aufheben der letzten Ableitung oder als das Bilden einer Stammfunktion sehen. Leitet man eine Funktion $s(t)$ ab, wird ihre abhängige durch ihre unabhängige Variable dividiert. Integriert man eine Funktion hingegen, so wird ihre abhängige Variable mit ihrer unabhängigen *multipliziert*:

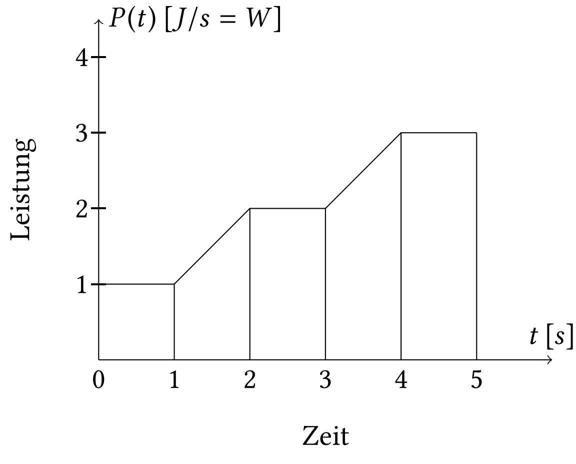
$$\int v(t) = s(t) \to s/t \cdot t = s$$

Einige bekannte und wichtige Zusammenhänge, die sich so modellieren lassen, sind hier aufgelistet:

- Weg $\longleftrightarrow$ Geschwindigkeit $\longleftrightarrow$ Beschleunigung
- Arbeit $\longleftrightarrow$ Leistung
- Ladung $\longleftrightarrow$ Stromstärke
- Wassermenge $\longleftrightarrow$ Flussrate



$\int v(t) \to$ Zurückgelegter Weg in Metern $[m]$



$\int v(t) \to$ Vollbrachte Arbeit in Joule $[J]$