Differentialrechnung

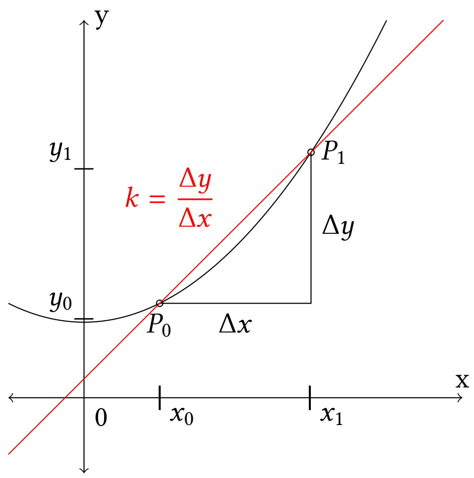
Die Differentialrechnung beschäftigt sich mit der Veränderung von unabhängigen und abhängigen Variablen einer Funktion in Abhängigkeit von einander. Wichtige Termini sind hierbei der Differenzenquotient, der die mittlere Änderungsrate bzw. durchschnittliche Steigung einer Funktion ausdrückt; der Differentialquotient, der die momentane Änderungsrate bzw. momentane Steigung beschreibt; sowie die Kurvendiskussion, bei welcher sich mit Hilfe von Differenzen- und Differentialquotient die Eigenschaften einer Funktion beschreiben lassen.

Differenzenquotient

Der Differenzenquotient $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ einer Funktion $f(x)$ ist ein **relatives Änderungsmaß**, welches für zwei beliebiege unabhängige Variablen x_0 und x_1 aus der Definitionsmenge D_f und den beiden entsprechenden abhängigen Variablen $f(x_0)$ bzw. y_0 und $f(x_1)$ bzw. y_1 aus der Wertemenge W_f, die Änderung dieser beiden Variablen in Relation zu einander beschreibt. Der daraus resultierende Wert k drückt aus, um wieviele Einheiten sich $f(x)$ im Intervall $[x_0; x_1]$ durchschnittlich verändert, wenn x um eine Einheit wächst oder fällt. Der Differenzenquotient ist somit die **mittlere Änderungsrate** bzw. die **durschnittliche Steigung** in diesem Intervall. Für den Differenzenquotient einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[x_0; x_1]$ gilt somit:

$$k = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Geometrisch gesehen lässt sich der Differenzenquotient durch die **Sekantensteigung** modellieren. Die Sekantensteigung einer Funktion $f(x)$ ist die Hypotenuse des Steigungsdreiecks zwischen den Punkten $P_0(x_0|y_0)$ und $P_1(x_1|y_1)$.

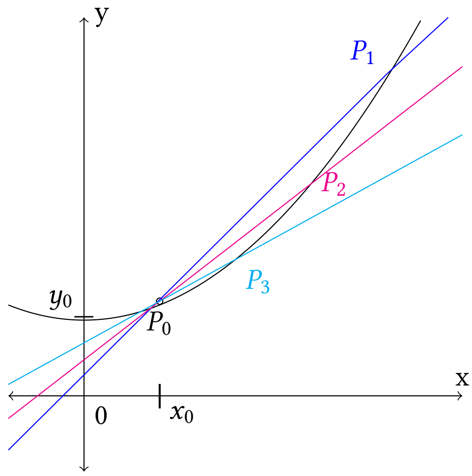


Differentialquotient

Während der Differenzenquotient die durschnittliche Steigung in einem bestimmten Intervall $[x_0; x_1]$ beschreibt, drückt der Differentialquotient die **momentane Steigung** bzw. die **momentane Änderungsrate** einer Funktion an einer bestimmten Stelle x aus. Der Differentialquotient an einer Stelle x_0 ist theoretisch gesehen ein Differenzenquotient in einem Intervall $[x_0; x_1]$, in dem x_1 gegen x_0 und somit Δx gegen 0 strebt:

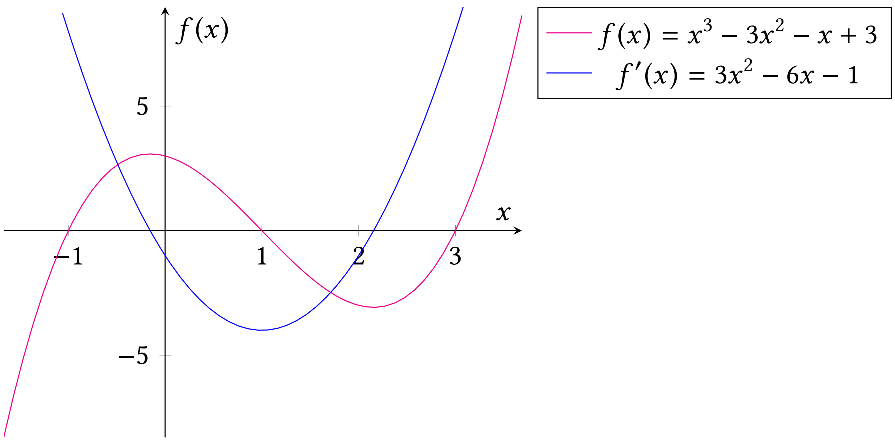
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$$

Geometrisch gesehen ist ein Differentialquotient einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 die Steigung der Tangente an den Punkt $P(x_0|f(x_0)$. Diese Tangente entsteht durch eine Folge von Annäherungen von Sekanten in einem immer kleiner werdenenden Intervall $[x_0, x_1]$. Somit kann der Differentialquotient bzw. die Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen gesehen werden.



Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ ordnet jedem unabhängigen x-Wert auf der Abszisse bzw. aus der Definitionsmenge D_f den Differentialquotienten an dieser Stelle als neuen Funktionswert der Ableitungsfunktion $f'(x)$ zu.



Um eine Funktion abzuleiten, gibt es mehrere Verfahren bzw. Regeln: die Potenzregel, die Kettenregel, die Quotientenregel sowie die Reziprokregel. Ebenso gibt es bestimmte Eigenheiten einiger Funktionstypen im Bezug auf ihre Ableitungen, welche genannt werden sollten.

Potenzregel

Die Potenzregel ist für Terme der Form $ax^b \mid b \in \mathbb{Z}$ geeignet. Alle anderen Ableitungsregeln lassen sich auf die Potenzregel zurückführen:

$$[ax^b]' = b \cdot ax^{b-1}$$

Beispiel: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 13x - 21$

I. Anwendung der Potenzregel beim ersten Term:	$[3x^4]' = 4 \cdot 3x^{4-1} 12x^3$
II. Anwendung der Potenzregel beim zweiten Term:	$[-8x^3]' = 4 \cdot (-8x^{3-1}) = 24x^2$
III. Anwendung der Potenzregel beim dritten Term	$[5x^2]' = 2 \cdot 5x^{2-1} = 10x$
IV. Anwendung der Potenzregel beim vierten Term:	$[13x]' = [13x^1]' = 1 \cdot 13x^{1-1} = 13$
V. Konstanter Term fällt weg:	$[21]' = [21x^0]' = 0 \cdot 21x^{0-1} = 0$

Ergebnis: $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 10x + 13$

Produktregel

Die Produktregel wird zur Ableitung eines Produktes zweiter Funktion bzw. Funktionsgliedern $u(x)$ und $v(x)$ angewendet, in welchen beide Male die unabhänigige Variable x enthalten ist. Die Produktregel ist eine effiziente Methode die Ausmultiplikation der Funktionen zu vermeiden (wodurch die Ableitungsfunktion jedoch auch berechnet werden könnte):

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Beispiel: $f(x) = (x^2 - 5) \cdot (x^3 + 4x + 12)$

I. Bestimmung der ersten Termgruppe:	$u(x) = x^2 - 5$
II. Bestimmung der zweiten Termgruppe:	$v(x) = x^3 + 4x + 12$
III. Ableiten von $u(x)$:	$u'(x) = 2x$
IV. Ableiten von $v(x)$:	$v'(x) = 3x^2 + 4$
V. Anwendung der Produktregel:	$u' \cdot v + v' \cdot u = 2x \cdot (x^3 + 4x + 1) + (3x^2 + 4) \cdot (x^2 - 5)$
VI. Ausmultiplizieren:	$(2x^4 + 8x^2 + 2x) + (3x^4 - 15x^2 + 4x^2 - 20)$

Ergebnis: $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 20$

Quotientenregel

Die Quotientenregel wird dann verwendet, wenn die Funktion Brüche enthält, in welchen die unabängige Variable x sowohl im Nenner $v(x)$ als auch im Zähler $u(x)$ vorkommt:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x - 7}{4 - x^2}$

I. Bestimmung der ersten Termgruppe: $u(x) = 5x^3 + 9x - 7$

II. Bestimmung der zweiten Termgruppe: $v(x) = 4 - x^2$

III. Ableiten von $u(x)$: $u'(x) = 15x^2 + 9$

IV. Ableiten von $v(x)$: $v'(x) = 2x$

V. Anwendung der Quotientenregel: $\dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} = \dfrac{(15x^2 + 9) \cdot (4 - x^2) - (-2x) \cdot (5x^3 + 9x - 7)}{(4 - x^2)^2}$

VI. Ausmultiplizieren: $\dfrac{(60x^2 - 15x^4 + 36 - 9x^2) - (10x^4 + 18x^2 - 14x)}{x^4 - 8x^2 + 16}$

Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{-5x^4 + 69x^2 + -14x + 36}{x^4 - 8x^2 + 16}$:

Rückführung auf Potenzregel bzw. Produktregel: $\dfrac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot [v(x)]^{-1}$

Reziprokregel

Die Reziprokregel ist eine spezielle Form der Quotientenregel, die nur zutrifft, wenn der Zähler $u(x)$ gleich 1 ist, sodass für die Funktion $f(x)$ gilt, dass sie eine *Reziprokfunktion* der Form $\dfrac{1}{v(x)}$ ist:

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{-v}{v^2}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

I. Ermittlung der Termgruppe: $v(x) = 1 - x^2$

II. Ableiten von $v(x)$: $v'(x) = -2x$

III. Anwendung der Reziprokregel: $\dfrac{-v'}{v^2} = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1}$

Rückführung auf die Quotientenregel: $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \left[\dfrac{1}{v(x)}\right]' = \dfrac{[1]' \cdot v - v' \cdot 1}{v^2} = \dfrac{0 \cdot v - v'}{v^2} = \dfrac{-v'}{v^2}$

Kettenregel

Die Kettenregel sollte dann angewendet werden, wenn eine Funktion $u(x)$ eine weitere Funktion $v(x)$ enthält, wobei beide Funktionen Terme mit der unabhängigen Variable x besitzen. Hierbei muss man die äußere Ableitung $[u(v)]'$ mit der inneren v' multiplizieren:

$$[u(v(x))]' = v' \cdot [u(v)]'$$

Beispiel: $f(x) = (3x-4)^2$

I. Bestimmung des inneren Gliedes:	$v(x) = 3x - 4$
II. Bestimmung des äußeren Gliedes:	$u(v(x)) = [v(x)]^2$
III. Ableiten des inneren Gliedes:	$v'(x) = 3$
IV. Ableiten des äußeren Gliedes:	$[u(v(x))]' = 2 * (3x - 4) = 6x - 8$
V. Anwendung der Kettenregel:	$v' \cdot [u(v)]' = 3 \cdot (6x - 8)$

Ergebnis: $f'(x) = 18x - 24x$

Kurvendiskussion

Die Kurvendisskussion beschäftigt sich mit der Analyse der Null-, Extrem- sowie Wendepunkte, dem Verlauf, der Monotonie, der Steigung sowie der Krümmung einer Funktion. Ebenso ist oft nach der Tangente an den Wendepunkt, der sogenannten *Wendetangente*, gefragt. Bezüglich der Analyse der Nullstellen einer Funktion ist anzumerken, dass die *Vielfachheit* der Nullstelle eine Rolle spielt. Eine *n-fache Nullstelle* ist eine Stelle, welche sowohl in der Funktion $f(x)$ als auch in $n-1$ weiteren Ableitungen dieser Funktion gleich null ist.

Beispiel:

Gib für die Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ die Wende- und Extrempunkte sowie die Nullstellen, samt Vielfachheit, an. Beschreibe ebenso die Monotonie der Funktion. Fertige eine Skizze an.

Schritt I: Ableitungen der Funktion $f(x)$ anschreiben

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 6$

Schritt II: Nullstellen finden

Da es sich bei $f(x)$ um eine Polynomfunktion 4. Grades handelt, kann man sie nicht direkt in eine der beiden Lösungsformeln einsetzen, welche nur für Polynomfunktionen 2. Grades anwendbar sind. Daher muss man zuerst zwei Nullstellen durch Probieren sowie Abspalten finden.

Man sieht bei $f(x)$, dass der konstante Term nicht vorhanden bzw. gleich 0 ist, was bedeutet, dass die Funktion bei $x = 0$ keinen Abstand vom Ursprung hat. Somit erfährt man schon, dass die erste Nullstelle N_1 im Ursprung liegt: $N_1 = 0$

Danach führt man eine Polynomdivision von $f(x)$ durch $x - N_1$. Da N_1 gleich 0 ist, ist die Polynomdivision auf eine Division durch x reduziert:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x} = x^3 - 3x + 2$$

Die nächste Nullstelle findet man auf die selbe Weise durch Abspalten von $x^3 - 3x + 2 = 0$. Diesmal ist der konstante Term k gleich 2. Die neue Nullstelle ist jener x-Wert, für welchen bei Einsetzen in diese Gleichung gilt $0 = 0$. Diesen x-Wert findet man nur durch Probieren. Mit Sicherheit liegt der Wert zwischen $-k$ und k und ist meistens ein Teiler von k. Daher versucht man in diesem Fall zuerst ± 1 und ± 2 einzusetzen. Man erfährt somit, dass die zweite Nullstelle N_2 bei $x = 1$ liegt. Mit diesem Wert führt man nun wieder eine Polynomdivision durch:

$(x^3 - 3x + 2) \div (x - 2) = x^2 + x - 2$

$\underline{-x^3 + x^2}$

$x^2 - 3x + 2$

$\underline{-x^2 + x}$

$-2x + 2$

$\underline{2x - 2}$

0 Rest

Die neue Funktion lautet somit $x^2 + x - 2$. Da es sich hierbei um eine Funktion zweiten Grades handelt, kann man sie in die Große Lösungsformel einsetzen, welche für Funktionen des Schemas $ax^2 + bx + c$ anwendbar ist:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da der Koeffizient a hierbei gleich 0 ist, könnte man ebenso in die Kleine Lösungsformel für Funktionen des Schemas $x^2 + px + q$ einsetzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

In diesem Fall sind aber alle Koeffizienten, also a bei ax^2 sowie b bei bx gleich null. Daher ist es noch effizienter, einfach einen x-Wert herauszuheben:

$x^2 + x - 2 = 0$

$x(x + 1) = 2$

$x_1 = -2$

$x + 1 = 2 \mid -1$

$x_2 = 1$

Die dritte Nullstelle N_3 liegt somit bei 2 und die vierte Nullstelle N_4 liegt bei 1. Da schon N_2 bei 1 lag, handelt sich bei N_2 bzw. N_4 um eine *zweifache Nulstelle.*

Nun sind also alle Nullstellen gefunden: $N_1(0|0)$, $N_{2,4}(1|0)$, $N_3(-2|0)$

Schritt III: Extrempunkte finden

Als nächstes gilt es, die Hoch- und Tiefpunkte, also die Extrempunkte, der Funktion zu finden. Zunächst sei wieder angemerkt, dass der Unterschied zwischen einer Stelle und einem Punkt jener ist, dass eine Stelle nur den x-Wert auf der Abszisse nennt, während ein Punkt ein Zahlentupel bestehend aus der Stelle und ihrem Funktionswert ist.

An einer Extremstelle ist die Steigung gleich 0, da sich die Monotonie der Funktion genau im Extrempunkt ändert (die Tangente an einen Extrempunkt ist waagrecht). Daher beschäftigen wir uns mit der ersten Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ und bestimmen die Extrempunkte, in dem wir die Ableitung $f'(x)$ gleich 0 setzen:

$$4x^3 - 6x + 2 = 0$$

Da es sich hierbei wieder um eine Funktion dritten Grades handelt, gilt es eine Extremstelle durch probieren zu finden. Setzt man folglich Teiler des konstanten Terms 2, also ± 1 und ± 2, ein, erhält man die erste Extremstelle E_1 bei $x = 1$. Mit diesem Wert führt man erneut eine Polynomdivision durch:

$(4x^3 - 6x + 2) \div (x - 1) = 4x^2 + 4x - 2$

$\underline{-4x^3 + 4x^2}$

$4x^2 - 6x + 2$

$\underline{-4x^2 + 4x}$

$-2x + 2$

$\underline{2x - 2}$

0 Rest

Die neue Funktion $4x^2 + 4x - 2$ dividiert man zunächst durch 2:

$$\frac{4x^2 + 4x - 2}{2} = 2x^2 + 2x - 1$$

Hierbei liegt wieder eine Funktion 2. Grades vor, welche in eine der beiden Lösungsformeln eingesetzt werden kann. Für die Kleine Lösungsformel müsste der Koeffizient des quadratischen Terms ($2x^2$) gleich 1 sein. Da dies hier nicht der Fall ist und eine weitere Division durch 2 das Problem nicht wirklich vereinfacht, setzt man in die Große Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{4} = -1.37$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{4} = 0.37$$

Die beiden restlichen Extremstellen liegen also bei $x = -1.37$ und $x = 0.37$. Durch Einsetzen der x-Werte der drei Extremstellen in die Funktionsgleichung $f(x)$ erhält man die Funktionswerte dieser Stellen:

$$E_1(1|0),\ E_2(-1.37|-4.85),\ E_3(0.37|0.35)$$

Letztlich kann es noch von Interesse sein, ob es sich bei einem bestimmten Extrempunkt um einen Hoch- oder um einen Tiefpunkt handelt. Dies erfährt man durch die Krümmung der Funktion an der Extremstelle. Ist die Krümmung negativ, liegt ein Hochpunkt vor; ist die Krümmung positiv, handelt es sich um einen Tiefpunkt. Ist die Krümmung jedoch null, liegt an dieser Stelle ebenso eine Wendestelle. Solch ein Punkt, welcher sowohl Extrem- also auch Wendepunkt ist, wird *Sattel-* oder *Terassenpunkt* genannt:

$$E_1(1|0) \quad \rightarrow \quad f''(1) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

$$E_2(-1.37|-4.85) \quad \rightarrow \quad f''(-1.37) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

$$E_3(0.37|0.35) \quad \rightarrow \quad f''(0.37) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

Schritt IV: Wendepunkte finden

An einem Wendepunkt einer beliebigen Funktion ändert sich stets das Krümmungsverhalten, also von positiv zu negativ oder umgekehrt. Daher ist an einem Wendepunkt die Krümmung gleich null. Somit gilt es, jene Stelle zu bestimmen, an welcher die zweite Ableitung $f''(x)$, welche die Krümmung der Funktion $f(x)$ beschreibt, gleich 0 ist: $12x^2 - 6 = 0$

Diese Funktion hat nur einen Term, welcher die unabängige Variable x enthält: $12x^2$. Daher ist es sinnlos, diese Funktion in eine der beiden Lösungsformeln einzusetzen. Man formt einfach um:

$$12x^2 - 6 = 0 \mid +6$$
$$12x^2 = 6 \mid \div 12$$
$$x^2 = 0.5 \mid \sqrt{}$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{0.5}$$
$$x_1 = \sqrt{0.5}$$
$$x_2 = -\sqrt{0.5}$$

Durch Einsetzten der gefundenden Wende*stellen* in die ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x)$, erhält man die beiden vollständigen Wende*punkte* der Funktion:

$$x_1 = \sqrt{0.5} \quad \rightarrow \quad f(\sqrt{0.5}) = 0.16 \quad \rightarrow \quad W_1(\sqrt{0.5}|0.16)$$

$$x_1 = -\sqrt{0.5} \quad \rightarrow \quad f(-\sqrt{0.5}) = -2.67 \quad \rightarrow \quad W_1(-\sqrt{0.5}|-2.67)$$

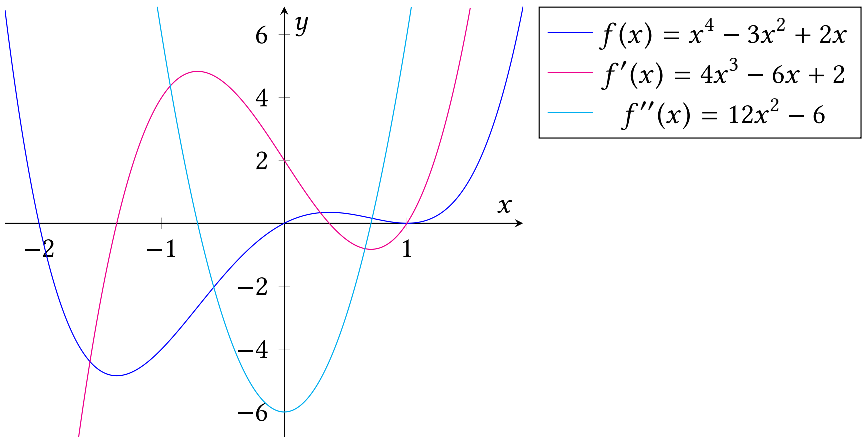
Schritt V: Wendetangenten finden

Die Wendetangenten $t_{W_{1,2}}$ sind jene Geraden, welche die Funktion genau in den Wendepunkten berühren. Man findet sie durch einfaches Einsetzten der Wendekoordinaten in die allgmeine lineare Funktionsgleichung $y = kx + d$. Die Steigung k erhält man durch die erste Ableitung, in welche man die x-Koordinate des Wendepunktes einsetzt. Den Abstand vom Ursprung d errechnet man sich folglich durch Lösen der linearen Funktionsgleichung. Den ersten Wendepunkt $W_1(\sqrt{0.5}|0.16)$ findet man somit durch die folgenden Schritte:

I. Aufstellen der linearen Funktionsgleichung:	$y = kx + d$
II. Berechnung der Steigung an der Wendestelle:	$f'(\sqrt{0.5}) = -0.83$
III. Einsetzen in die Funktionsgleichung:	$0.16 = \sqrt{0.5} \cdot -0.83 + d$
IV. Lösen nach d:	$d = 0.75$
V. Fertige Wendetangente t_{W_1}:	$y = -0.83x + 0.75$

Das selbe Verfahren wendet man auch für den zweiten Wendepunkt W_2 an, um die zweite Wendetangente t_{W_2} zu finden.

Schritt VI. Skizze anfertigen



Schritt VII. Monotonie beschreiben

Die Monotonie einer Funktion bezieht sich auf ihr Steigungsverhalten, welches sich an den Extrempunkten verändert. Ebenso erhält man durch die Krümmung der Funktion in einem bestimmten Intervall Informationen über ihre Monotonie. Ist die Krümmung negativ, wird die Steigung zunehmend negativer. Ist die Krümmung positiv, wird auch die Steigung in diesem Intervall zunehmend positiver. Da die Steigung an einer Extremstelle gleich 0 ist, darf diese Stelle nie zu einem Monotonieintervall dazugezählt werden. Das selbe trifft auch auf plus oder minus unendlich (∞) zu. Somit gilt für die oben skizzierte Funktion $f(x)$:

Streng monoton wachsend in den Intervallen:	$]-1.37\,;0.37\,[\quad \wedge \quad]\,1\,;\infty\,[$
Streng monoton fallend in den Intervallen:	$]-\infty\,;-1.37\,[\quad \wedge \quad]\,0.37\,;1\,[$

Finden von Polynomfunktionen

Mit Hilfe der Differentialrechnung ist es möglich, eine Polynomfunktion beliebigen Grades mit nur wenigen Angaben zu finden. Pro Grad einer Polynomfunktion enthält sie eine weitere Variable, entweder als Koeffizient oder als konstanter Term bzw. Abstand vom Ursprung. Daher benötigt man zum Finden einer Polynomfunktion n-ten Grades mindestens n Angaben zur Funktion oder einer ihrer Ableitungen.

Beispiel:

Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades besitzt den Tiefpunkt $T(3|-2)$ *und den Wendepunkt* $W(2|2)$. *Wie lautet der Funktionsterm?*

Schritt I: Aufstellen von Funktionsgleichung und Ableitungen

Zunächst ist es immer von Vorteil, die allgemeine Funktionsgleichung sowie jene der Ableitungen aufzustellen. Für eine Funktion 3. Grades lauten diese:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Schritt II: Interpretation der Angaben

Die Funktion besitzt „besitzt den Tiefpunkt $T(3|-2)$“. Daraus lässt sich zum Ersten schließen, dass der Funktionswert der Funktion an der Stelle $x = 3$ gleich -2 ist. Dies kann man sofort in die Funktionsgleichung $f(x)$ einsetzen:

$$f(3) = -2$$

$$27a + 9b + 3c + d = -3$$

Zum Zweiten handelt es sich hierbei um einen Extrempunkt. Daher muss die Steigung an der Stelle $x = 3$ gleich 0 sein:

$$f'(3) = 0$$

$$27a + 6b + c = 0$$

Ebenso findet man auf der Funktion „den Wendepunkt $W(2|2)$“. Wieder ergibt sich daraus ein Funktionswert:

$$f(2) = 3$$

$$8a + 4b + 2c + d = 0$$

An einer Wendestelle verändert sich die Krümmung der Funktion, daher ist die zweite Ableitung an dieser Stelle gleich 0:

$$f''(2) = 0$$

$$12a + 2b = 0$$

Somit haben sich für die Funktion 3. Grades nicht nur die benötigten 3, sondern sogar 4 Informationseinheiten finden lassen.

Schritt III: Schneiden der gefundenen Gleichungen

Nun gilt es, die gefundenen Gleichungen zu schneiden und somit alle Variablen der Funktion zu finden.

I. $27a + 9b + 3c + d = -3$

II. $27a + 6b + c = 0$

III. $8a + 4b + 2c + d = 0$

IV. $12a + 2b = 0$

I $\cap$ $-$ II $\rightarrow$ V

V $\cap$ $-$ III $\rightarrow$ VI

VI $\cap$ II $\div -2 \rightarrow$ VII

VII $\rightarrow a = 2$

a in VI $\rightarrow b = -12$

a, b in III $\rightarrow c = 18$

a, b, c in II $\rightarrow d = -2$

Die fertige Funktion lautet demnach: $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$