Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)

Inhalt

Teil-1-Übungsaufgaben

Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik* (WS) 283

Teil-2-Übungsaufgaben

Übungsaufgaben zu Teil 1

1. Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie (AG)*

AG 1.1	Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können
AG 1.2	Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit
AG 2.1	Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können
AG 2.2	Lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können
AG 2.3	Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können
AG 2.4	Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können
AG 2.5	Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können
AG 3.1	Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
AG 3.2	Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
AG 3.3	Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalar-multiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
AG 3.4	Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können
AG 3.5	Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können
AG 4.1	Definitionen von *Sinus, Cosinus* und *Tangens* im rechtwinkeligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke einsetzen können
AG 4.2	Definitionen von *Sinus* und *Cosinus* für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können

Ganze Zahlen

Aufgabennummer: 1_052	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind fünf Zahlen.

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie diejenige(n) Zahl(en) an, die aus der Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ ist/sind!

$\frac{25}{5}$	☐
$-\sqrt[3]{8}$	☐
$0,\overline{4}$	☐
$1,4 \cdot 10^{-3}$	☐
$-1,4 \cdot 10^{3}$	☐

Lösungsweg

$\frac{25}{5}$	☒
$-\sqrt[3]{8}$	☒
$-1{,}4 \cdot 10^3$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Rationale Zahlen

Aufgabennummer: 1_069	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind fünf Zahlen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenigen beiden Zahlen an, die aus der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ sind!

0,4	☐
$\sqrt{-8}$	☐
$\frac{\pi}{5}$	☐
0	☐
e^2	☐

Lösungsweg

0,4	☒
0	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Rationale Zahlen*

Aufgabennummer: 1_129	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind folgende Zahlen: $-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{5}$; $3{,}\dot{5}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{16}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Zahl(en) an, die rational ist/sind!

$-\frac{1}{2}$	☐
$\frac{\pi}{5}$	☐
$3{,}\dot{5}$	☐
$\sqrt{3}$	☐
$-\sqrt{16}$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$-\frac{1}{2}$	☒
$3,\dot{5}$	☒
$-\sqrt{16}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Zahlen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Algebraische Begriffe

Aufgabennummer: 1_001	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für die Oberfläche O eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h gilt $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen sind im Zusammenhang mit der gegebenen Formel zutreffend? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$O > 2r^2\pi + r\pi h$ ist eine Formel.	☐
$2r^2\pi + 2r\pi h$ ist ein Term.	☐
Jede Variable ist ein Term.	☐
$O = 2r\pi \cdot (r + h)$ entsteht durch Umformung aus $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$.	☐
π ist eine Variable.	☐

Lösungsweg

$O > 2r^2\pi + r\pi h$ ist eine Formel.	
$2r^2\pi + 2r\pi h$ ist ein Term.	☒
Jede Variable ist ein Term.	☒
$O = 2r\pi \cdot (r + h)$ entsteht durch Umformung aus $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$.	☒
π ist eine Variable.	

Lösungsschlüssel

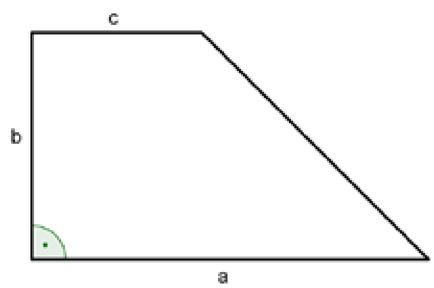
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Äquivalenz von Formeln

Aufgabennummer: 1_070	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Trapez.



Aufgabenstellung:

Mit welchen der nachstehenden Formeln kann man die Fläche dieses Trapezes berechnen?

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Formel(n) an!

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot b$	☐
$A_2 = b \cdot c + \frac{(a - c) \cdot b}{2}$	☐
$A_3 = a \cdot b - 0{,}5 \cdot (a - c) \cdot b$	☐
$A_4 = 0{,}5 \cdot a \cdot b - (a + c) \cdot b$	☐
$A_5 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + b \cdot c$	☐

Lösungsweg

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot b$	☒
$A_2 = b \cdot c + \frac{(a - c) \cdot b}{2}$	☒
$A_3 = a \cdot b - 0{,}5 \cdot (a - c) \cdot b$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Verkaufspreis

Aufgabennummer: 1_071	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für einen Laufmeter Stoff betragen die Selbstkosten S (in €), der Verkaufspreis ohne Mehrwertsteuer beträgt N (in €).

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel für den Verkaufspreis P (in €) inklusive 20 % Mehrwertsteuer an!

Möglicher Lösungsweg

$P = 1{,}2 \cdot N$

Lösungsschlüssel

Alle dazu äquivalenten Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Bundesinstitut bifie

Eintrittspreis*

Aufgabennummer: 1_114	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Eintrittspreis für ein Schwimmbad beträgt für Erwachsene p Euro. Kinder zahlen nur den halben Preis. Wenn man nach 15 Uhr das Schwimmbad besucht, gibt es auf den jeweils zu zahlenden Eintritt 60 % Ermäßigung.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel für die Gesamteinnahmen E aus dem Eintrittskartenverkauf eines Tages an, wenn e_1 Erwachsene und k_1 Kinder bereits vor 15 Uhr den Tageseintritt bezahlt haben und e_2 Erwachsene und k_2 Kinder nach 15 Uhr den ermäßigten Tageseintritt bezahlt haben!

E = ____

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$E = e_1 \cdot p + k_1 \cdot \frac{p}{2} + (e_2 \cdot p + k_2 \cdot \frac{p}{2}) \cdot 0{,}4$ und alle dazu äquivalenten Ausdrücke

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt dann als richtig, wenn eine Formel wie oben oder ein dazu äquivalenter Ausdruck angegeben ist.

Potenzen*

Aufgabennummer: 1_121	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Term $(a^4 \cdot b^{-5} \cdot c)^{-3}$.

Aufgabenstellung:

Welche(r) der folgenden Terme ist/sind zum gegebenen Term äquivalent?
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Antwort(en) an!

$a \cdot b^{-8} \cdot c^{-2}$	☐
$\frac{b^{15}}{a^{12} \cdot c^3}$	☐
$\left(\frac{b^8 \cdot c^2}{a}\right)^{-1}$	☐
$\left(\frac{a^4 \cdot c}{b^5}\right)^{-3}$	☐
$a^{-12} \cdot b^{15} \cdot c^{-3}$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Lösungsweg

$\frac{b^{15}}{a^{12} \cdot c^3}$	☒
$\left(\frac{a^4 \cdot c}{b^5}\right)^{-3}$	☒
$a^{-12} \cdot b^{15} \cdot c^{-3}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Antworten angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Angestellte Frauen und Männer*

Aufgabennummer: 1_157	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für die Anzahl x der in einem Betrieb angestellten Frauen und die Anzahl y der im selben Betrieb angestellten Männer kann man folgende Aussagen machen:

– Die Anzahl der in diesem Betrieb angestellten Männer ist um 94 größer als jene der Frauen.
– Es sind dreimal so viele Männer wie Frauen im Betrieb angestellt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenigen beiden Gleichungen an, die die oben angeführten Aussagen über die Anzahl der Angestellten mathematisch korrekt wiedergeben!

$x - y = 94$	☐
$3x = 94$	☐
$3x = y$	☐
$3y = x$	☐
$y - x = 94$	☐

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

$3x = y$	☒
$y - x = 94$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Gleichungen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Fahrenheit

Aufgabennummer: 1_053	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In einigen Ländern wird die Temperatur in °F (Grad Fahrenheit) und nicht wie bei uns in °C (Grad Celsius) angegeben.

Die Umrechnung von x °C in y °F erfolgt durch die Gleichung $y = 1{,}8x + 32$. Dabei gilt:

$$0\ °\text{C} \mathrel{\widehat{=}} 32\ °\text{F}$$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe die Temperatur von °F in °C umgerechnet werden kann!

Möglicher Lösungsweg

$x = (y - 32) : 1{,}8$

Lösungsschlüssel

Alle zu der in der Lösungserwartung angegebenen Gleichung äquivalenten Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Sport

Aufgabennummer: 1_072	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Von den 958 Schülerinnen und Schülern einer Schule betreiben viele regelmäßig Sport.
319 Schüler/innen spielen regelmäßig Tennis, 810 gehen regelmäßig schwimmen.
Nur 98 Schüler/innen geben an, weder Tennis zu spielen noch schwimmen zu gehen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie viele Schüler/innen beide Sportarten regelmäßig betreiben!

Möglicher Lösungsweg

$958 - 98 = 810 + 319 - x$

$x = 269 \rightarrow$ 269 Schüler/innen betreiben beide Sportarten regelmäßig.

Lösungsschlüssel

Für die Vergabe des Punktes zählt die Angabe des richtigen Ergebnisses.

Gleichung 3. Grades

Aufgabennummer: 1_002	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Gleichung $4x \cdot (x^2 - 2x - 15) = 0$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Lösungen dieser Gleichung an!

Möglicher Lösungsweg

$x_1 = 0$
$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 15}$; $x_2 = -3$; $x_3 = 5$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn alle drei Lösungen der Gleichung angegeben sind.

Benzinverbrauch

Aufgabennummer: 1_016	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Zusammenhang zwischen dem Benzinverbrauch y (in l/100 km) und der Geschwindigkeit x (in km/h) kann für einen bestimmten Autotyp durch die Funktionsgleichung $y = 0{,}0005x^2 - 0{,}09x + 10$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Geschwindigkeit der Verbrauch 6 l/100 km beträgt!

Möglicher Lösungsweg

$6 = 0{,}0005x^2 - 0{,}09x + 10$
$0 = x^2 - 180x + 8\,000$

$x_{1,2} = 90 \pm \sqrt{8\,100 - 8\,000} = 90 \pm 10$
$x_1 = 80,\ x_2 = 100$

Bei 80 km/h und bei 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 6 l/100 km.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn beide Geschwindigkeitswerte korrekt angegeben wurden.

Quadratische Gleichung

Aufgabennummer: 1_054	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die quadratische Gleichung hat jedenfalls für x ___①___ in $\mathbb{R}$, wenn ___②___ gilt.

①	
keine Lösung	☐
genau eine Lösung	☐
zwei Lösungen	☐

②	
$p \neq 0$ und $q < 0$	☐
$p = q$	☐
$p < 0$ und $q > 0$	☐

Lösungsweg

①	
zwei Lösungen	☒

②	
$p \neq 0$ und $q < 0$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn für beide Lücken jeweils die zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Lösung einer quadratischen Gleichung

Aufgabennummer: 1_055	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Gleichung $(x - 3)^2 = a$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie jene Werte $a \in \mathbb{R}$, für die die gegebene Gleichung keine reelle Lösung hat!

Möglicher Lösungsweg

Für alle $a < 0$ gibt es keine Lösung.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn alle Werte von a angegeben wurden. Die Angabe, dass a der Zahlenmenge $\mathbb{R}^-$ angehören muss, ist ebenfalls korrekt.

Graphische Lösung einer quadratischen Gleichung

Aufgabennummer: 1_087	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Graph der Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + px + q$ berührt die x-Achse.
Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen den Parametern p und q?

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Es gibt in diesem Fall ___①___ mit der x-Achse, deshalb gilt ___②___.

①	
keinen Schnittpunkt	☐
einen Schnittpunkt	☐
zwei Schnittpunkte	☐

②	
$\frac{p^2}{4} = q$	☐
$\frac{p^2}{4} < q$	☐
$\frac{p^2}{4} > q$	☐

Lösungsweg

①	
einen Schnittpunkt	☒

②	
$\frac{p^2}{4} = q$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn für beide Lücken jeweils die zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Quadratische Gleichungen*

Aufgabennummer: 1_161	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jeder Lösungsmenge L die entsprechende quadratische Gleichung in der Menge der reellen Zahlen zu!

$L = \{\ \}$	
$L = \{-4; 4\}$	
$L = \{0; 4\}$	
$L = \{4\}$	

A	$(x + 4)^2 = 0$
B	$(x - 4)^2 = 25$
C	$x(x - 4) = 0$
D	$-x^2 = 16$
E	$x^2 - 16 = 0$
F	$x^2 - 8x + 16 = 0$

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

$L = \{\ \}$	D
$L = \{-4; 4\}$	E
$L = \{0; 4\}$	C
$L = \{4\}$	F

A	$(x + 4)^2 = 0$
B	$(x - 4)^2 = 25$
C	$x(x - 4) = 0$
D	$-x^2 = 16$
E	$x^2 - 16 = 0$
F	$x^2 - 8x + 16 = 0$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Lineare Ungleichung

Aufgabennummer: 1_088	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die lineare Ungleichung $y < 3x - 4$.

Aufgabenstellung:

Welche der angegebenen Zahlenpaare sind Lösung der vorgegebenen Ungleichung?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Zahlenpaare an!

(2|–1)	☐
(2|2)	☐
(2|5)	☐
(0|4)	☐
(0|–5)	☐

Lösungsweg

(2|–1)	☒
(0|–5)	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Kräfte

Aufgabennummer: 1_056	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.2

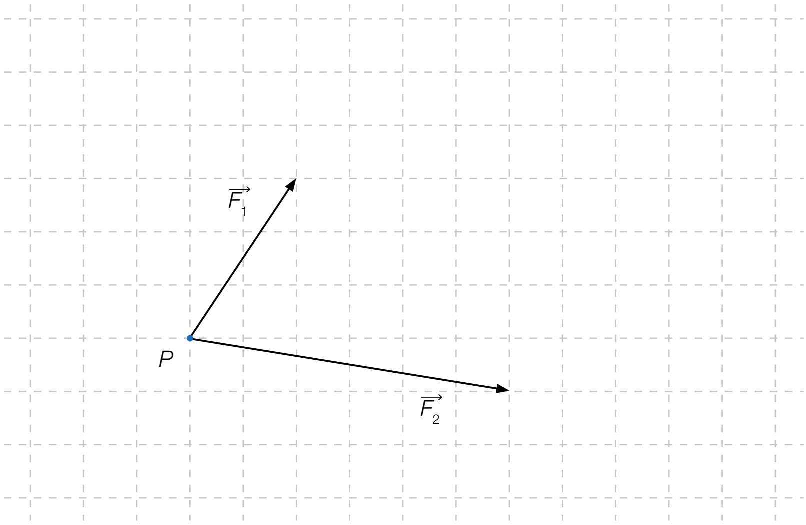
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Zwei an einem Punkt P eines Körpers angreifende Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ lassen sich durch eine einzige am selben Punkt angreifende resultierende Kraft $\vec{F}$ ersetzen, die allein dieselbe Wirkung ausübt wie $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ zusammen.

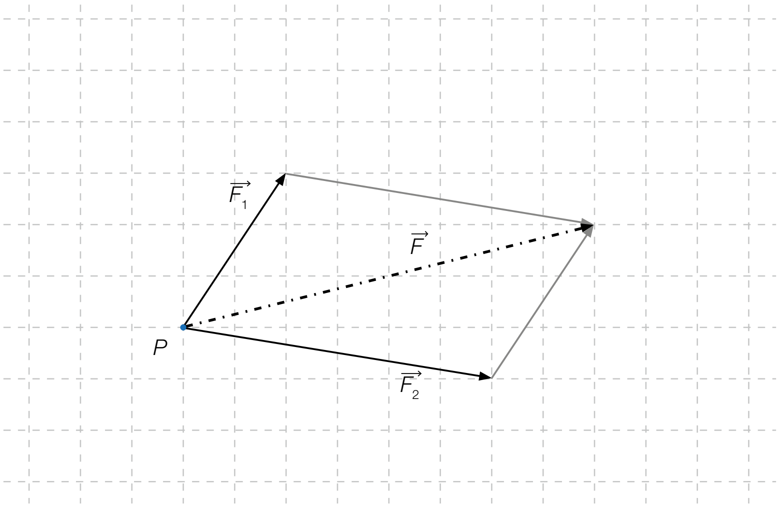
Aufgabenstellung:

Gegeben sind zwei an einem Punkt P angreifende Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$.

Ermitteln Sie grafisch die resultierende Kraft $\vec{F}$ als Summe der Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Der Vektor $\vec{F}$ muss korrekt eingetragen sein. Ungenauigkeiten bis zu 1 mm sind zu tolerieren.

Vektoren im Dreieck

Aufgabennummer: 1_057	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Ein Dreieck *ABC* ist rechtwinklig mit der Hypotenuse *AB*.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen sind jedenfalls richtig?
Kreuzen Sie die beiden entsprechenden Aussagen an!

$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$	☐
$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2$	☑
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$	☐
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$	☐
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$	☑

Lösungsweg

$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2$	☒
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$	☒

Lösungsschlüssel

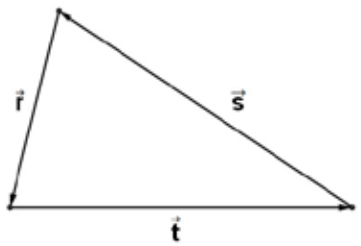
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Rechnen mit Vektoren

Aufgabennummer: 1_073	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Vektoren $\vec{r}$, $\vec{s}$ und $\vec{t}$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für diese Vektoren zutreffenden Aussagen an!

$\vec{t} + \vec{s} + \vec{r} = \vec{0}$	☑
$\vec{t} + \vec{s} = -\vec{r}$	☑
$\vec{t} - \vec{s} = \vec{r}$	☐
$\vec{t} - \vec{r} = \vec{s}$	☐
$\vec{t} = \vec{s} + \vec{r}$	☐

Lösungsweg

$\vec{t} + \vec{s} + \vec{r} = \vec{0}$	☒
$\vec{t} + \vec{s} = -\vec{r}$	☒

Lösungsschlüssel

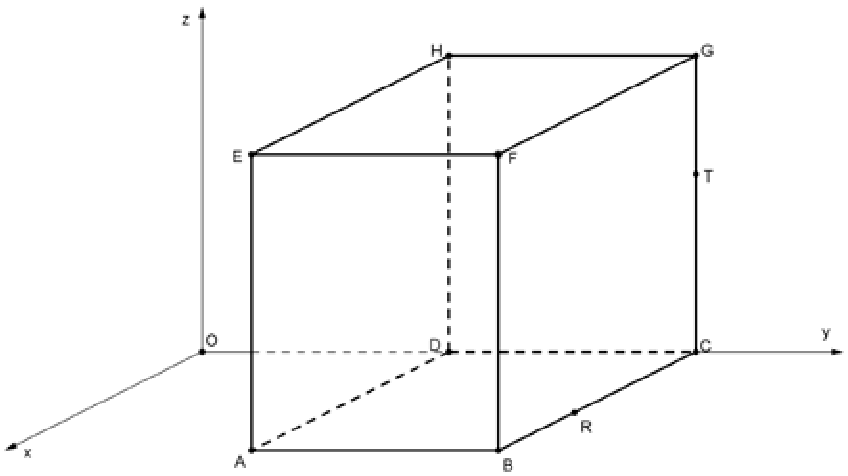
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Vektoren in einem Quader

Aufgabennummer: 1_074	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Grundfläche *ABCD* des dargestellten Quaders liegt in der *xy*-Ebene.
Festgelegt werden die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Darstellungen ist/sind möglich, wenn $s, t \in \mathbb{R}$ gilt?

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$\overrightarrow{TC} = t \cdot \vec{c}$	☑
$\overrightarrow{AR} = t \cdot \vec{a}$	☐
$\overrightarrow{EG} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$	☑
$\overrightarrow{BT} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$	☐
$\overrightarrow{TR} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$	☑

Lösungsweg

$\overrightarrow{TC} = t \cdot \vec{c}$	☒
$\overrightarrow{EG} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$	☒
$\overrightarrow{TR} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$	☒

Lösungsschlüssel

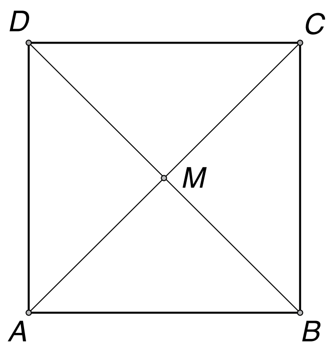
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Quadrat*

Aufgabennummer: 1_115	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

A, *B*, *C* und *D* sind Eckpunkte des unten abgebildeten Quadrates, *M* ist der Schnittpunkt der Diagonalen.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$	☑
$B = C + \overrightarrow{AD}$	☐
$M = D - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$	☐
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	☑
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Lösungsweg

$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$	☒
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	☒

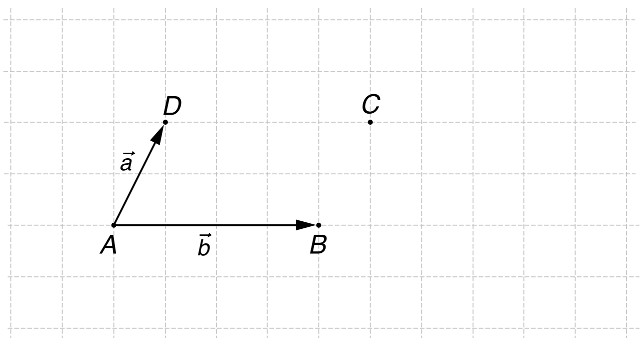
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Vektoren*

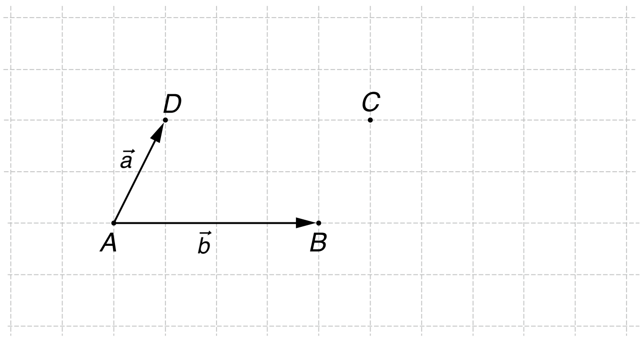
Aufgabennummer: 1_118	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.3	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die in der untenstehenden Abbildung als Pfeile dargestellt sind.



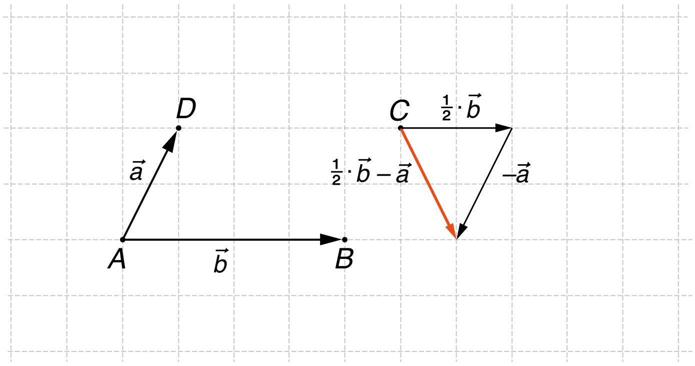
Aufgabenstellung:

Stellen Sie $\frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \vec{a}$ ausgehend vom *Punkt C* durch einen Pfeil dar!



* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt dann als richtig, wenn der Ergebnispfeil richtig eingezeichnet ist.

Rechenoperationen bei Vektoren*

Aufgabennummer: 1_130	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie ein Skalar $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Rechenoperationen liefert/liefern als Ergebnis wieder einen Vektor? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Antwort(en) an!

$\vec{a} + r \cdot \vec{b}$	☑
$\vec{a} + r$	☐
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	☐
$r \cdot \vec{b}$	☑
$\vec{b} - \vec{a}$	☑

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$\vec{a} + r \cdot \vec{b}$	☒
$r \cdot \vec{b}$	☒
$\vec{b} - \vec{a}$	☒

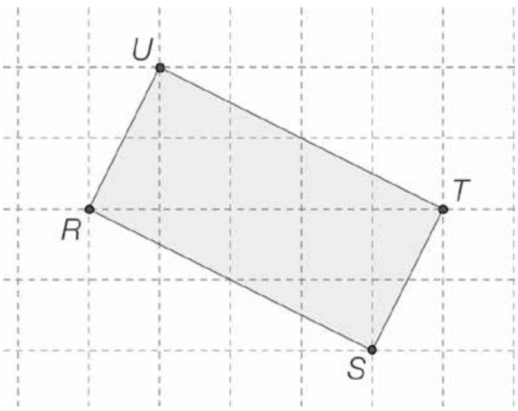
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Antworten angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Rechteck*

Aufgabennummer: 1_133	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Abgebildet ist das Rechteck *RSTU*.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$\overrightarrow{ST} = -\overrightarrow{RU}$	☐
$\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{UT}$	☑
$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TR}$	☐
$U = T + \overrightarrow{SR}$	☑
$\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{SU} = 0$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{UT}$	☒
$U = T + \overrightarrow{SR}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Streckenmittelpunkt

Aufgabennummer: 1_058	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Man kann mithilfe der Geradengleichung $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$ den Mittelpunkt M der Strecke AB bestimmen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welchen Wert der Parameter t bei dieser Rechnung annehmen muss!

t = ________________

Möglicher Lösungsweg

$t = 0{,}5$ bzw. $t = \frac{1}{2}$

Lösungsschlüssel

Der Wert für *t* muss korrekt angegeben sein.

Idente Geraden

Aufgabennummer: 1_089	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: X = P + t \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

und

$$h: X = Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

mit $t, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche Schritte notwendig sind, um die Identität der Geraden nachzuweisen!

Möglicher Lösungsweg

Wenn der Richtungsvektor der Geraden g ein Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden h ist (bzw. umgekehrt h ein Vielfaches von g ist), so sind die beiden Geraden parallel oder ident.

Liegt außerdem noch der Punkt P auf der Geraden h (seine Koordinaten müssen die Gleichung

$$P = Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

erfüllen) bzw. liegt der Punkt Q auf der Geraden g (seine Koordinaten müssen die Gleichung

$$Q = P + t \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

erfüllen), so sind die Geraden ident.

Lösungsschlüssel

Antworten, die sinngemäß der Lösungserwartung entsprechen, sind als richtig zu werten.

Lagebeziehung von Geraden

Aufgabennummer: 1_090	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die beiden Geraden

$g: X = P + t \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$ und $h: X = Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ mit $t, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Wenn ___①___ gilt, kann man daraus eindeutig schließen,
dass die beiden Geraden ___②___ sind.

①	
$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ und $P = Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$	☑
$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$ und $P \neq Q$	☐
$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$ und $P \neq Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$	☐

②	
schneidend	☐
zueinander parallel	☐
ident	☑

Lösungsweg

①		②	
$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ und $P = Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$	☒		
		ident	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn für beide Lücken jeweils die zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Gerade in Parameterform*

Aufgabennummer: 1_132	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $3x - 4y = 12$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung von g in Parameterform an!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$g: X = \binom{4}{0} + t \cdot \binom{4}{3}$

Lösungsschlüssel

Jede andere Gleichung für *g* (anderer Punkt, der auf *g* liegt, Vielfaches des Richtungsvektors) ist ebenfalls als richtig zu werten.

Geraden im $\mathbb{R}^{3}$*

Aufgabennummer: 1_137	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Zwei der folgenden Gleichungen sind ebenfalls Parameterdarstellungen der Geraden g.
Kreuzen Sie diese beiden Gleichungen an!

$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☑
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☒
$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Gleichungen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Bundesinstitut bifie

Lagebeziehung zweier Geraden*

Aufgabennummer: 1_156	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Geraden $g: X = \binom{1}{1} + s \cdot \binom{-1}{2}$ und $h: x - 2 \cdot y = -1$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die Geraden *g* und *h* ___①___, weil ___②___.

①	
sind parallel	☐
sind ident	☐
stehen normal aufeinander	☑

②	
der Richtungsvektor von *g* zum Normalvektor von *h* parallel ist	☑
die Richtungsvektoren der beiden Geraden *g* und *h* parallel sind	☐
der Punkt $P = (1\|1)$ auf beiden Geraden *g* und *h* liegt	☐

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

①	
stehen normal aufeinander	☒

②	
der Richtungsvektor von *g* zum Normalvektor von *h* parallel ist	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken jeweils der richtige Satzteil angekreuzt ist.

Normale Vektoren

Aufgabennummer: 1_091	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \binom{1}{-4}$.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehend angegebenen Vektoren sind zu $\vec{a}$ normal?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Vektoren an!

$\binom{-1}{-4}$	☐
$\binom{2}{-8}$	☐
$\binom{4}{-1}$	☐
$\binom{-4}{-1}$	☑
$\binom{8}{2}$	☑

Lösungsweg

$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$	☒
$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$	☒

Lösungsschlüssel

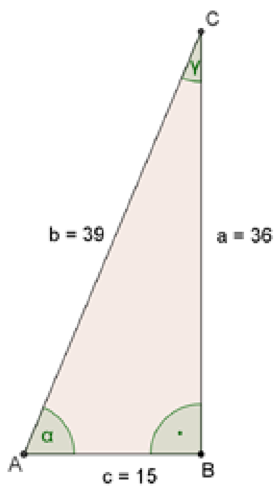
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Rechtwinkeliges Dreieck

Aufgabennummer: 1_059	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich | ☒ gewohnte Hilfsmittel möglich | ☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck wie in nebenstehender Skizze.



Aufgabenstellung:

Welche der nachfolgenden Aussagen sind für das abgebildete Dreieck zutreffend?

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$\tan(\alpha) = \frac{5}{13}$	☐
$\cos(\alpha) = \frac{13}{12}$	☐
$\sin(\gamma) = \frac{5}{13}$	☐
$\cos(\gamma) = \frac{12}{13}$	☐
$\tan(\gamma) = \frac{12}{5}$	☐

Lösungsweg

$\sin(\gamma) = \frac{5}{13}$	☒
$\cos(\gamma) = \frac{12}{13}$	☒

Lösungsschlüssel

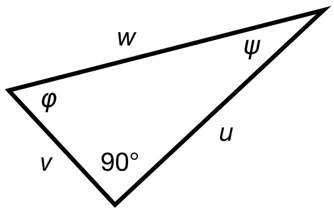
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Winkelfunktion

Aufgabennummer: 1_092	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck:



Aufgabenstellung:

Geben Sie tan ψ in Abhängigkeit von den Seitenlängen u, v und w an!

tan ψ = ____________________

Möglicher Lösungsweg

$\tan \psi = \frac{v}{u}$

Lösungsschlüssel

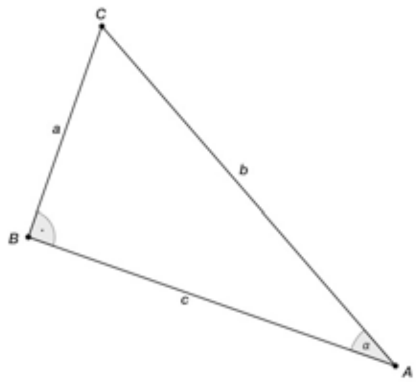
Alle Ausdrücke, die zu dem in der Lösungserwartung angegebenen Ausdruck äquivalent sind, sind als richtig zu werten.

Rechtwinkeliges Dreieck*

Aufgabennummer: 1_134	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Von einem rechtwinkeligen Dreieck *ABC* sind die Längen der Seiten *a* und *c* gegeben.



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel für die Berechnung des Winkels α an!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$ oder $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{c}\right)$ oder $\tan\alpha = \frac{a}{c}$

Lösungsschlüssel

Als nicht richtig zu werten sind Umformungsketten, die die Gleichheit verletzen, wie z. B.:
$\alpha = \tan\alpha = \frac{a}{c} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$.

Formeln, bei denen *b* durch *a* und *c* ausgedrückt wird, sind ebenso als richtig zu werten, wie z. B.: $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

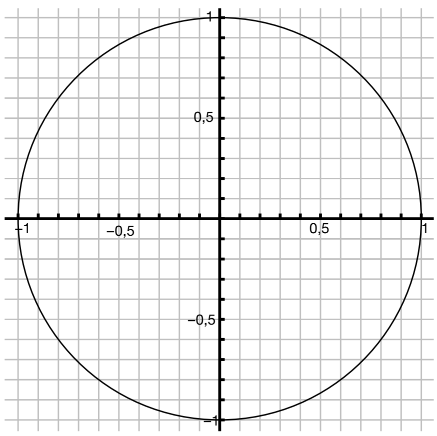
Cosinus im Einheitskreis

Aufgabennummer: 1_075		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Konstruktionsformat		Grundkompetenz: AG 4.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich	

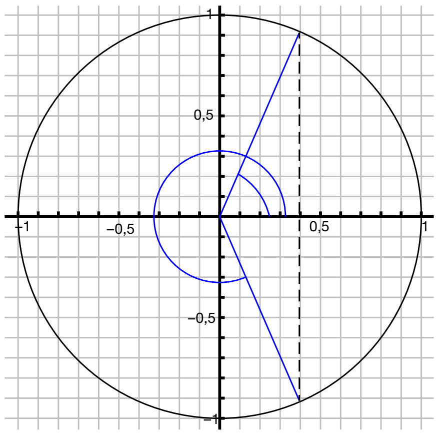
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im Einheitskreis alle Winkel aus [0°; 360°] ein, für die $\cos \beta = 0{,}4$ gilt!

Achten Sie auf die Kennzeichnung der Winkel durch Winkelbögen.



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Winkel müssen durch Winkelbögen eindeutig gekennzeichnet sein.

Sinus im Einheitskreis

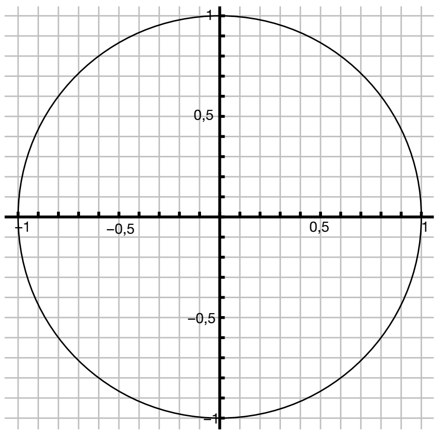
Aufgabennummer: 1_076	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

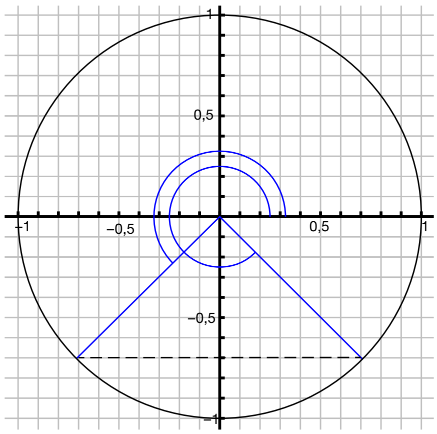
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im Einheitskreis alle Winkel aus [0°; 360°] ein, für die sin $\alpha = -0{,}7$ gilt!

Achten Sie auf die Kennzeichnung der Winkel durch Winkelbögen.



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Winkel müssen durch Winkelbögen eindeutig gekennzeichnet sein.

Winkelfunktionen*

Aufgabennummer: 1_116	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist das Intervall [0°; 360°].

Aufgabenstellung:

Nennen Sie alle Winkel α im gegebenen Intervall, für die gilt: $\sin \alpha = \cos \alpha$.

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$\alpha_1 = 45°$ oder $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$

$\alpha_2 = 225°$ oder $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$

Lösungsschlüssel

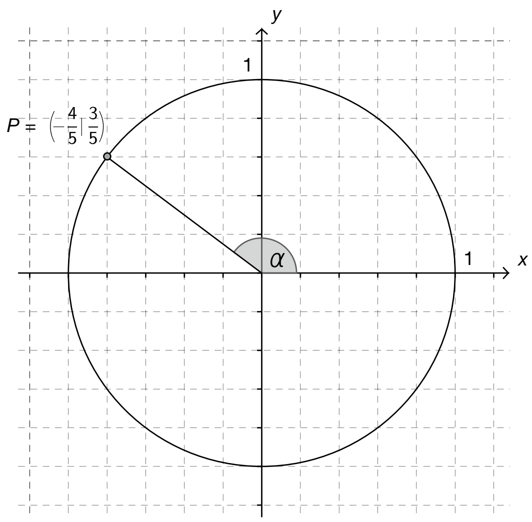
Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide Werte (egal ob im Grad- oder Bogenmaß) richtig angegeben sind.

Einheitskreis*

Aufgabennummer: 1_160	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Punkt $P = \left(-\frac{4}{5} \middle| \frac{3}{5}\right)$ liegt auf dem Einheitskreis.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie für den in der Abbildung markierten Winkel α den Wert von $\sin(\alpha)$!

$\sin(\alpha)$ = ____

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ oder $\sin(\alpha) = 0{,}6$

Lösungsschlüssel

1 Punkt für die richtige Lösung

2. Inhaltsbereich
Funktionale Abhängigkeiten (FA)

FA 1.1	Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann
FA 1.2	Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können
FA 1.3	Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können
FA 1.4	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA 1.5	Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen
FA 1.6	Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können
FA 1.7	Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können
FA 1.8	Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können
FA 1.9	Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können
FA 2.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 2.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können
FA 2.3	Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
FA 2.4	Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können: $f(x+1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$
FA 2.5	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können
FA 2.6	Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können
FA 3.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 3.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können

FA 3.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können

FA 3.4 Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

FA 4.1 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen

FA 4.2 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können

FA 4.3 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können

FA 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

FA 5.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA 5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA 5.3 Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^{λ}) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

FA 5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x + 1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können

FA 5.5 Die Begriffe *Halbwertszeit* und *Verdoppelungszeit* kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können

FA 5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

FA 6.1 Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA 6.2 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA 6.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können

FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können

FA 6.5 Wissen, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

FA 6.6 Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Funktionsgraph – ja oder nein?

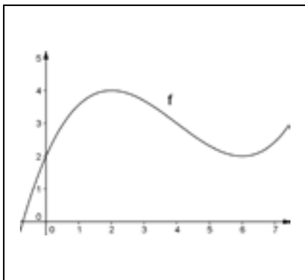
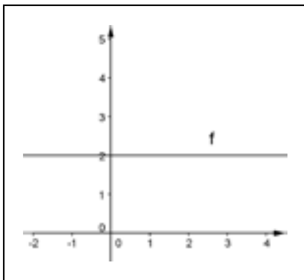
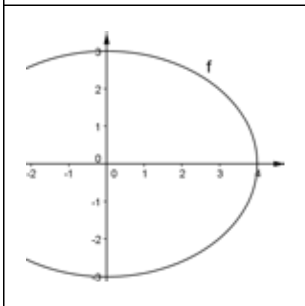
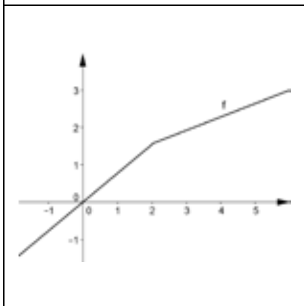
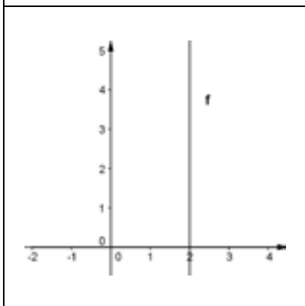
Aufgabennummer: 1_080	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

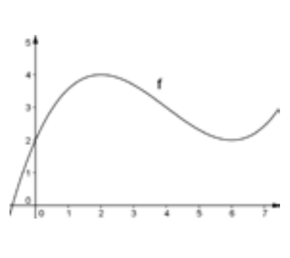
Im Folgenden sind Darstellungen von Kurven und Geraden gegeben.

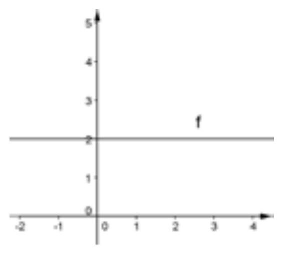
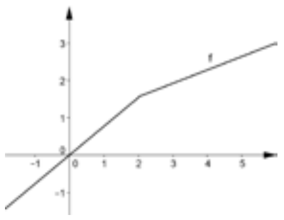
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Abbildung(en) an, die Graph(en) einer reellen Funktion $f: x \to f(x)$ ist/sind!

	☑		☑
	☐		☑
	☐		

Lösungsweg

	☒

	☒
	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

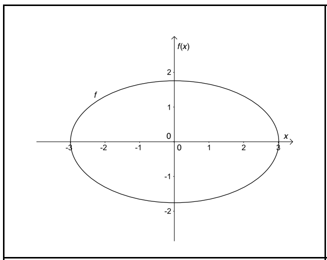
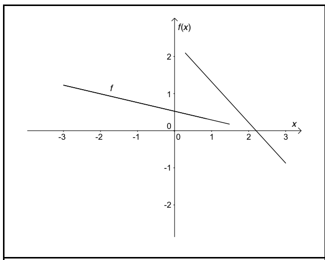
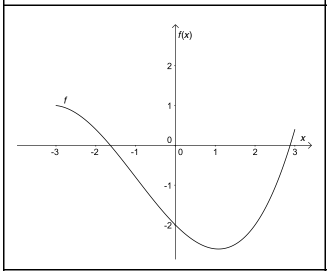
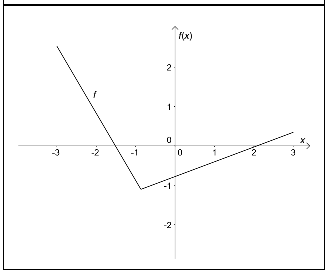
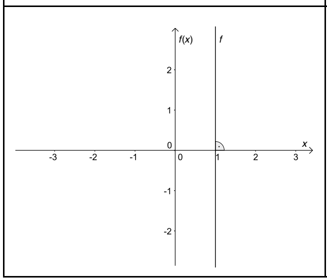
Reelle Funktion*

Aufgabennummer: 1_120	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.1	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine reelle Funktion $f\colon [-3; 3] \to \mathbb{R}$ kann in einem Koordinatensystem als Graph dargestellt werden.

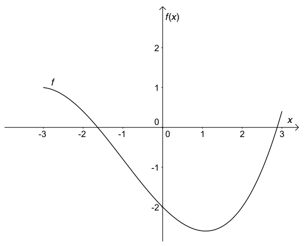
Aufgabenstellung:

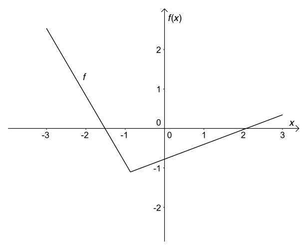
Kreuzen Sie die beiden Diagramme an, die einen möglichen Graphen der Funktion *f* zeigen!

	☐		☐
	☑		☑
	☐		

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Lösungsweg

	☒

	☒

Lösungsschlüssel

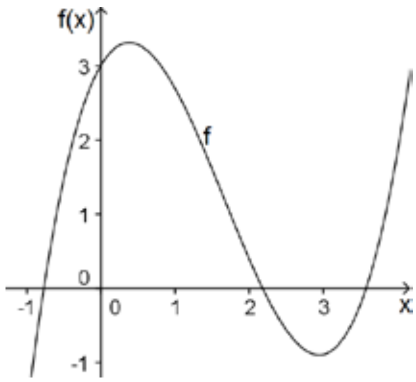
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Diagramme angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Parameter einer Polynomfunktion

Aufgabennummer: 1_011	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Parameters d an!

d = ____

Lösungsweg

$d = 3$

Lösungsschlüssel

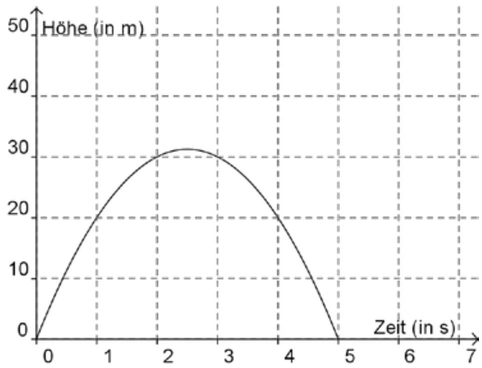
Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Wert des Parameters richtig angegeben ist.

Funktionale Abhängigkeit

Aufgabennummer: 1_022	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich | ☒ gewohnte Hilfsmittel möglich | ☐ besondere Technologie erforderlich

Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte Polynomfunktion 2. Grades beschreibt die Höhe (in m) eines senkrecht nach oben geworfenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit (in s).



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Körper befindet sich nach einer Sekunde und nach vier Sekunden in 20 m Höhe.	☑
Nach fünf Sekunden ist der Körper in derselben Höhe wie zu Beginn der Bewegung.	☑
Der Körper erreicht maximal 30 m Höhe.	☐
Der Körper befindet sich nach 4,8 Sekunden in einer Höhe von 10 m.	☐
Der Körper befindet sich nach ca. 2,5 Sekunden in der maximalen Höhe.	☑

Lösungsweg

Der Körper befindet sich nach einer Sekunde und nach vier Sekunden in 20 m Höhe.	☒
Nach fünf Sekunden ist der Körper in derselben Höhe wie zu Beginn der Bewegung.	☒
Der Körper erreicht maximal 30 m Höhe.	
Der Körper befindet sich nach 4,8 Sekunden in einer Höhe von 10 m.	
Der Körper befindet sich nach ca. 2,5 Sekunden in der maximalen Höhe.	☒

Lösungsschlüssel

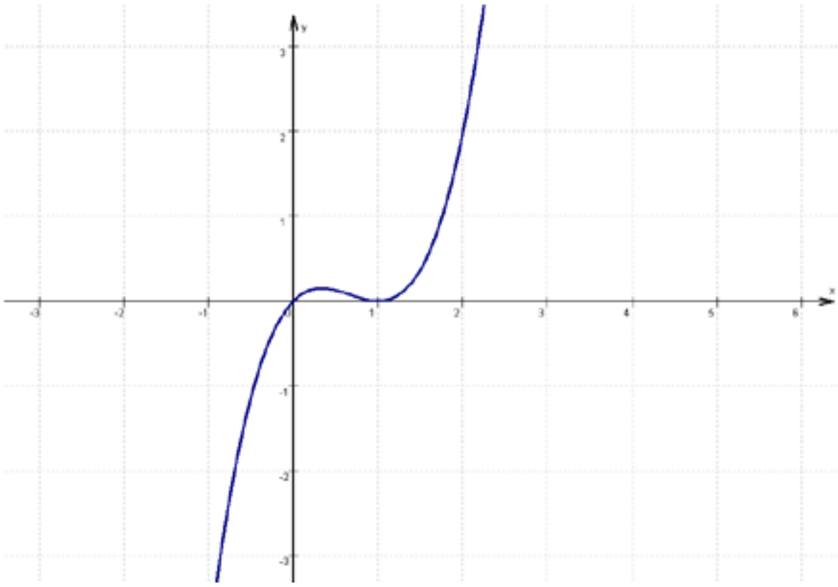
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Argument bestimmen

Aufgabennummer: 1_081	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades durch ihren Funktionsgraphen.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie denjenigen Wert x, für den gilt: $f(x - 3) = 2$!

x = ________________

Möglicher Lösungsweg

Durch Ablesen erhält man $x - 3 = 2$ und daraus folgt: $x = 5$.

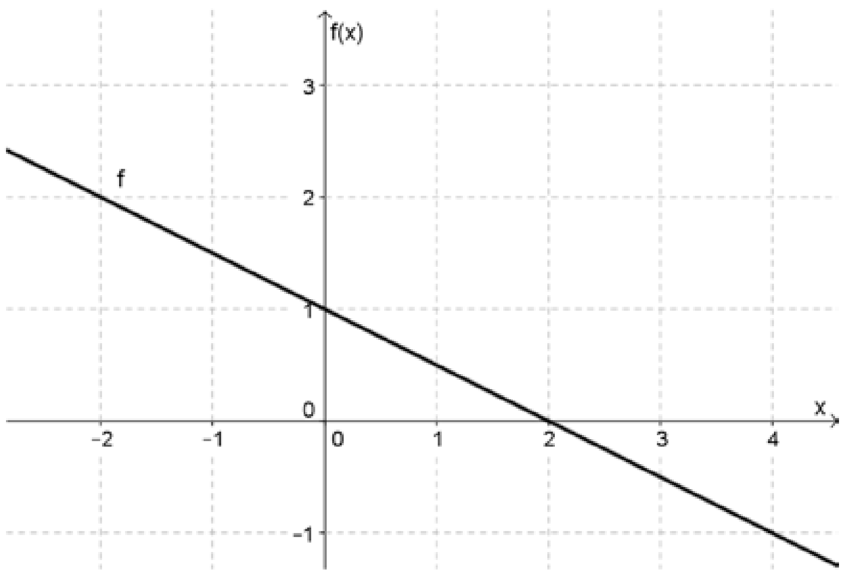
Lösungsschlüssel

Es muss kein Lösungsweg angegeben sein, x muss aus dem Intervall $[4{,}8; 5{,}1]$ sein.

Werte einer linearen Funktion

Aufgabennummer: 1_097	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.4	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Graph einer linearen Funktion f. Die Gerade enthält die Punkte $P = (0|1)$ und $Q = (2|0)$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Menge aller Werte x, für die gilt: $-0{,}5 \leq f(x) < 1{,}5$!

Möglicher Lösungsweg

$-1 < x \leq 3$ oder $(-1; 3]$

Lösungsschlüssel

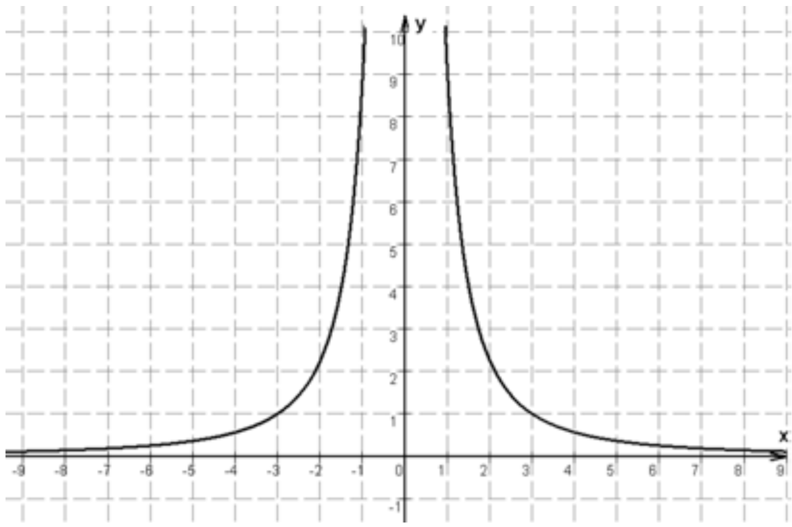
Alle Angaben, die dieses Lösungsintervall korrekt beschreiben (auch verbal), sind als richtig zu werten.

Funktionswerte

Aufgabennummer: 1_098	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{9}{x^2}$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie alle Werte, die x annehmen kann, wenn $f(x)$ das Intervall $[1; 9]$ durchläuft!

Möglicher Lösungsweg

$x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$ bzw. eine dem entsprechende verbale Erklärung

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe ist auch als richtig zu werten, wenn die Intervalle offen angeführt werden.

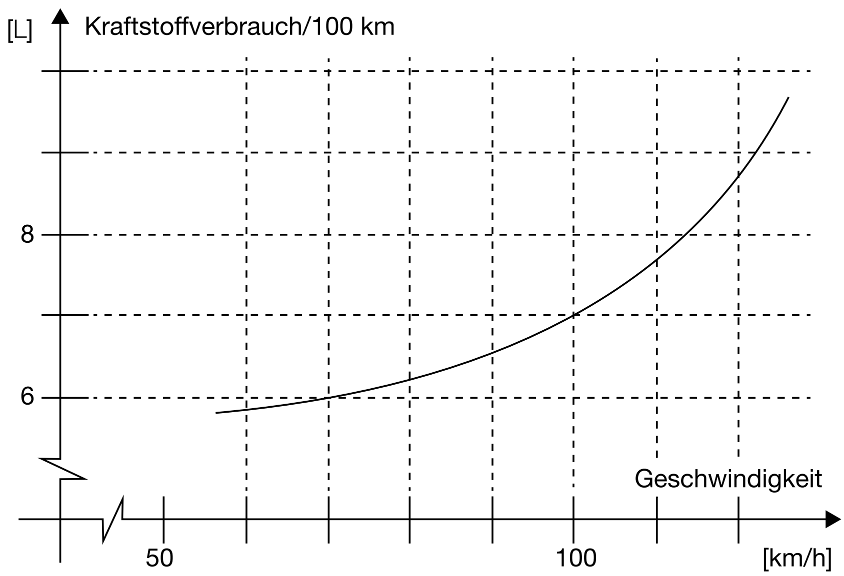
Formulierungen wie „zwischen –3 und –1“ oder „von –3 bis –1“ sind zu akzeptieren. Jedenfalls muss sowohl der negative als auch der positive Bereich angeführt werden.

Kraftstoffverbrauch

Aufgabennummer: 1_099	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und dem Kraftstoffverbrauch pro 100 km für eine bestimmte Automarke.



Aufgabenstellung:

Geben Sie diejenige Geschwindigkeit v an, bei der der Kraftstoffverbrauch 7 L pro 100 km beträgt!

v = ___________ km/h

Geben Sie an, wie hoch der Kraftstoffverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h ist!

Kraftstoffverbrauch = ____________ L pro 100 km

Möglicher Lösungsweg

v = 100 km/h

Kraftstoffverbrauch = 6,2 L pro 100 km

Lösungsschlüssel

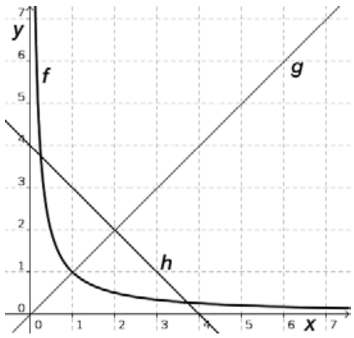
Beide Werte müssen korrekt angegeben sein
(Lösungsintervall für den Kraftstoffverbrauch [6,1; 6,3]).

Funktionsgraphen*

Aufgabennummer: 1_135	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h*.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$g(1) > g(3)$	☐
$h(1) > h(3)$	☑
$f(1) = g(1)$	☑
$h(1) = g(1)$	☐
$f(1) < f(3)$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$h(1) > h(3)$	☒
$f(1) = g(1)$	☒

Lösungsschlüssel

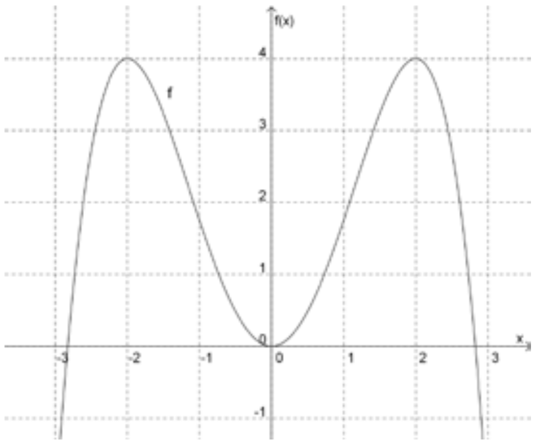
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Polynomfunktion 4. Grades

Aufgabennummer: 1_012	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f*, die vom Grad 4 ist.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die Funktion *f* zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion besitzt drei Wendepunkte.	☐
Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der *y*-Achse.	☑
Die Funktion ist streng monoton steigend für $x \in [0; 4]$.	☐
Die Funktion besitzt einen Wendepunkt, der gleichzeitig auch Tiefpunkt ist.	☐
Die Funktion hat drei Nullstellen.	☑

Lösungsweg

Die Funktion besitzt drei Wendepunkte.	
Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.	☒
Die Funktion ist streng monoton steigend für $x \in [0; 4]$.	
Die Funktion besitzt einen Wendepunkt, der gleichzeitig auch Tiefpunkt ist.	
Die Funktion hat drei Nullstellen.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Funktionseigenschaften erkennen

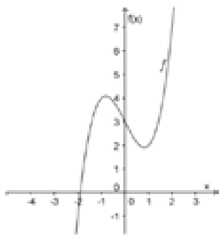
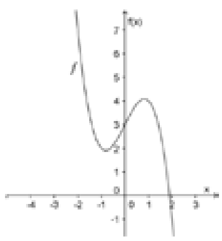
Aufgabennummer: 1_048	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

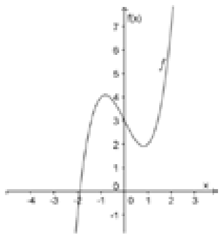
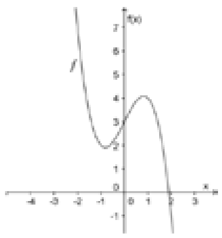
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x + 3$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie in nachstehender Tabelle die beiden für die Funktion f zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f ist an jeder Stelle monoton fallend.	☐
Die Funktion f besitzt kein lokales Maximum.	☐
Der Graph der Funktion f geht durch $P = (0\|3)$.	☑
Eine Skizze des Graphen der Funktion f könnte wie folgt aussehen: 	☑
Eine Skizze des Graphen der Funktion f könnte wie folgt aussehen: 	☐

Lösungsweg

Die Funktion *f* ist an jeder Stelle monoton fallend.	
Die Funktion *f* besitzt kein lokales Maximum.	
Der Graph der Funktion *f* geht durch $P = (0 \mid 3)$.	☒
Eine Skizze des Graphen der Funktion *f* könnte wie folgt aussehen: 	☒
Eine Skizze des Graphen der Funktion *f* könnte wie folgt aussehen: 	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Monotonie einer linearen Funktion

Aufgabennummer: 1_100	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 1.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Gerade mit der Gleichung $y = -2x + 4$. Auf dieser Geraden liegen die Punkte $A = (x_A|y_A)$ und $B = (x_B|y_B)$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Wenn $x_A < x_B$ ist, gilt ___①___, weil die Gerade ___②___ ist.

①	
$y_A < y_B$	☐
$y_A = y_B$	☐
$y_A > y_B$	☑

②	
monoton steigend	☐
monoton fallend	☑
konstant	☐

Lösungsweg

①	
$y_A > y_B$	☒

②	
monoton fallend	☒

Lösungsschlüssel

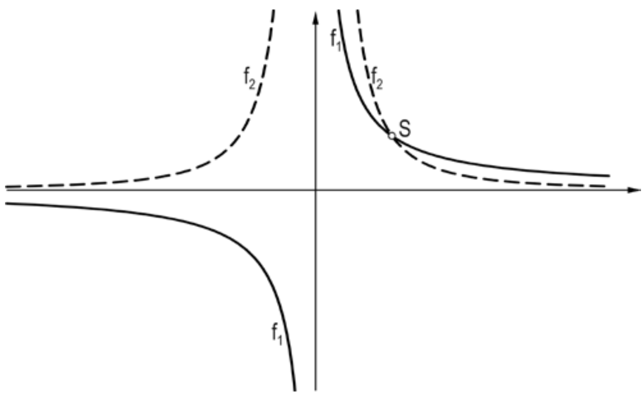
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn für beide Lücken jeweils die zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Schnittpunkte

Aufgabennummer: 1_082	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 1.6

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen zweier Funktionen mit den Gleichungen $f_1(x) = \frac{a}{x}$, $a > 1$ und $f_2(x) = \frac{a}{x^2}$, $a > 1$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Welcher der unten angegebenen Punkte gibt die Koordinaten des Schnittpunktes korrekt an? Kreuzen Sie den zutreffenden Punkt an!

$S = (1\|1)$	☐
$S = (a\|1)$	☐
$S = (1\|a)$	☑
$S = (a\|a)$	☐
$S = (0\|a)$	☐
$S = (1\|\frac{1}{a})$	☐

Lösungsweg

$S = (1 \mid a)$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

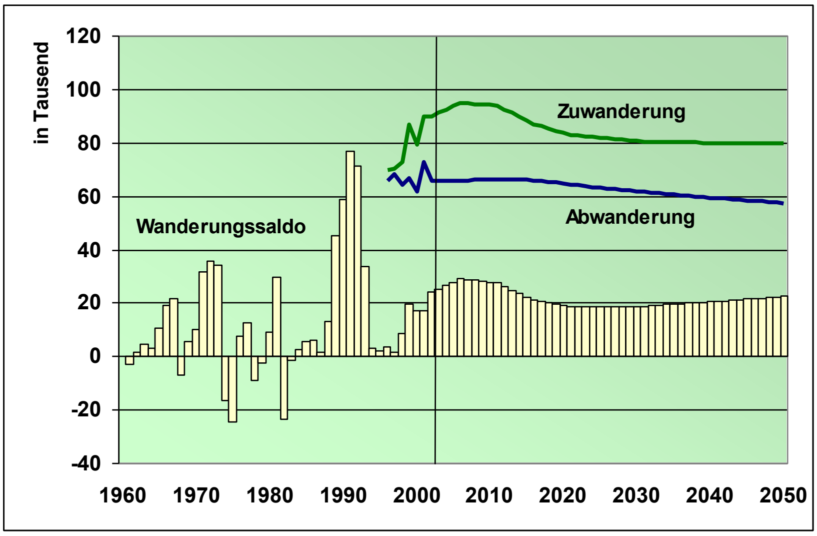
Zu- und Abwanderung

Aufgabennummer: 1_017	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.7

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der untenstehenden Graphik wird das Wanderungssaldo – das entspricht der Differenz von Zuwanderung und Abwanderung – dargestellt. Zusätzlich werden ab dem Jahr 1995 Zu- und Abwanderung durch Graphen von Funktionen dargestellt. Ab dem Jahre 2012 sind die angegebenen Zahlen als prognostische Werte zu interpretieren.

Angegeben wird jeweils die Anzahl derjenigen Personen, die bundesweit nach Österreich zu- bzw. abgewandert sind.



Quelle: Statistik Austria

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Werden die Graphen der Funktionen „Zuwanderung“ und „Abwanderung“ bis 1960 weitergezeichnet, verläuft der Graph der Zuwanderungsfunktion stets oberhalb des Graphen der Abwanderungsfunktion.	☐
Es gibt Jahre, in denen sich die Zuwanderungs- und die Abwanderungszahlen um weniger als 5 000 voneinander unterscheiden.	☑
Wird der Graph der Abwanderungsfunktion bis 1960 gezeichnet, verläuft er genau achtmal unterhalb der Nulltausenderlinie.	☐
Wenn die Graphen der Zuwanderungs- und der Abwanderungsfunktion über einen längeren Zeitraum parallel verlaufen, bleibt der Wanderungssaldo in diesem Zeitraum konstant.	☑
Ab 2020 wird eine lineare Abnahme der Abwanderungszahlen prognostiziert, d. h., die jährliche prozentuelle Abnahme der Abwanderungszahlen wird als konstant angenommen.	☐

Lösungsweg

Werden die Graphen der Funktionen „Zuwanderung“ und „Abwanderung“ bis 1960 weitergezeichnet, verläuft der Graph der Zuwanderungsfunktion stets oberhalb des Graphen der Abwanderungsfunktion.	
Es gibt Jahre, in denen sich die Zuwanderungs- und die Abwanderungszahlen um weniger als 5 000 voneinander unterscheiden.	☒
Wird der Graph der Abwanderungsfunktion bis 1960 gezeichnet, verläuft er genau achtmal unterhalb der Nulltausenderlinie.	
Wenn die Graphen der Zuwanderungs- und der Abwanderungsfunktion über einen längeren Zeitraum parallel verlaufen, bleibt der Wanderungssaldo in diesem Zeitraum konstant.	☒
Ab 2020 wird eine lineare Abnahme der Abwanderungszahlen prognostiziert, d. h., die jährliche prozentuelle Abnahme der Abwanderungszahlen wird als konstant angenommen.	

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Füllkurven

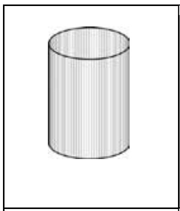
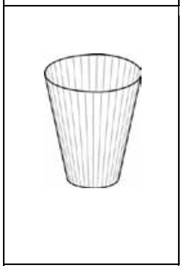
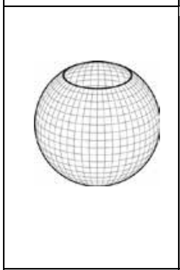
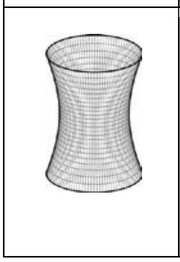
Aufgabennummer: 1_061	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 1.7

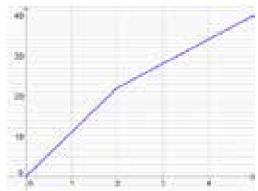
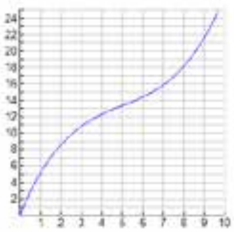
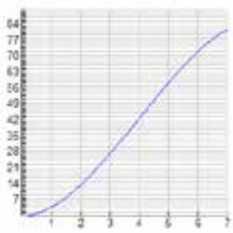
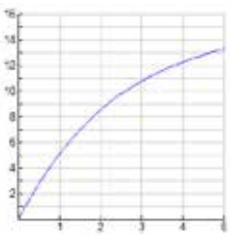
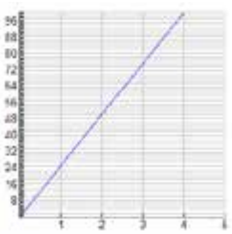
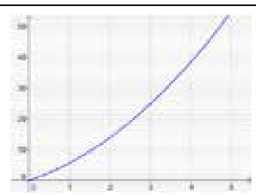
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehend dargestellten Rotationskörper werden über einen Zufluss, der eine konstante Wassermenge pro Zeiteinheit garantiert, gefüllt. Dabei wird die Höhe des Wasserstandes abhängig von der Zeiteinheit gemessen und aufgezeichnet. Der entstehende Graph wird Füllkurve genannt.

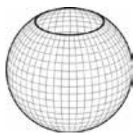
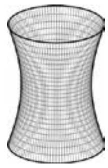
Aufgabenstellung:

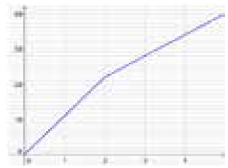
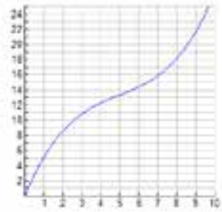
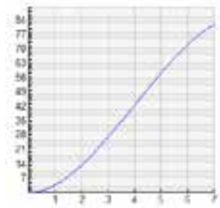
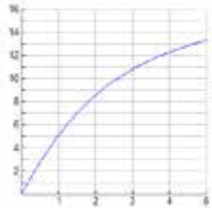
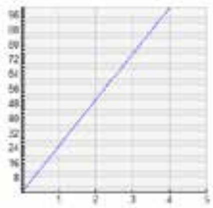
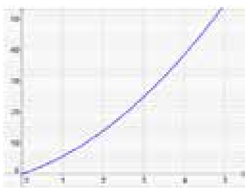
Ordnen Sie den Körpern jeweils die passende Füllkurve zu!

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsweg

	E
	D
	B
	C

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe ist nur dann als richtig zu werten, wenn alle Buchstaben korrekt zugeordnet wurden.

Umrechnungsformel für Fahrenheit

Aufgabennummer: 1_101	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Temperaturen werden bei uns in °C (Celsius) gemessen; in einigen anderen Ländern ist die Messung in °F (Fahrenheit) üblich.

Eine Zunahme um 1 °C bedeutet eine Zunahme um $\frac{9}{5}$ °F.
Eine Temperatur von 50 °C entspricht einer Temperatur von 122 °F.

Die Funktion f soll der Temperatur in °C die Temperatur in °F zuordnen.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den entsprechenden Funktionsterm, wenn x die Temperatur in °C und $f(x)$ die Temperatur in °F sein soll!

$f(x) =$ ____________________

Möglicher Lösungsweg

$f(x) = \frac{9}{5} \cdot x + 32$

Lösungsschlüssel

Alle dazu äquivalenten Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Aussagen über lineare Funktionen

Aufgabennummer: 1_062	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Betrachten Sie die lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen betreffend lineare Funktionen dieser Form an!

Jede lineare Funktion mit $k = 0$ schneidet jede Koordinatenachse mindestens einmal.	☐
Jede lineare Funktion mit $d \neq 0$ hat genau eine Nullstelle.	☐
Jede lineare Funktion mit $d = 0$ und $k \neq 0$ lässt sich als direktes Verhältnis interpretieren.	☑
Der Graph einer linearen Funktion mit $k = 0$ ist stets eine Gerade.	☑
Zu jeder Geraden im Koordinatensystem lässt sich eine lineare Funktion aufstellen.	☐

Lösungsweg

Jede lineare Funktion mit $d = 0$ und $k \neq 0$ lässt sich als direktes Verhältnis interpretieren.	☒
Der Graph einer linearen Funktion mit $k = 0$ ist stets eine Gerade.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Parameter einer linearen Funktion*

Aufgabennummer: 1_119	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 2.3

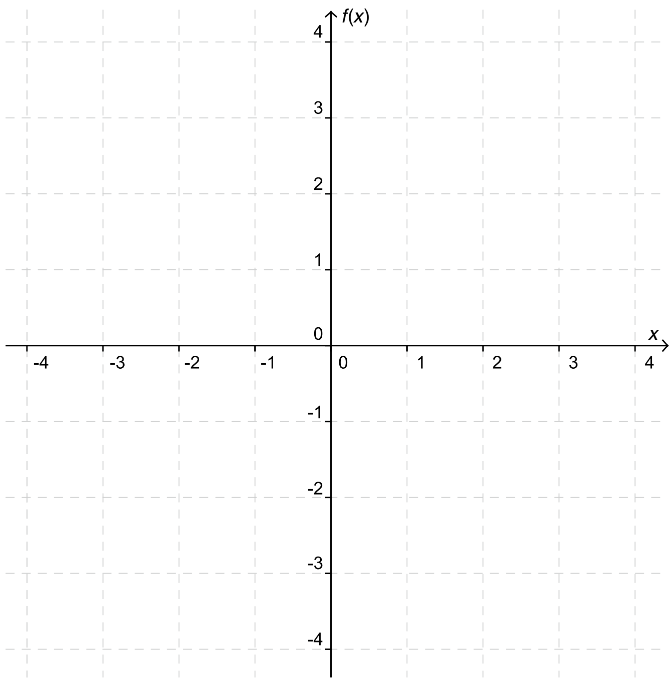
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Verlauf einer linearen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = k \cdot x + d$ wird durch ihre Parameter k und d mit $k, d \in \mathbb{R}$ bestimmt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion $f(x) = k \cdot x + d$, für deren Parameter k und d die nachfolgenden Bedingungen gelten, in das Koordinatensystem ein!

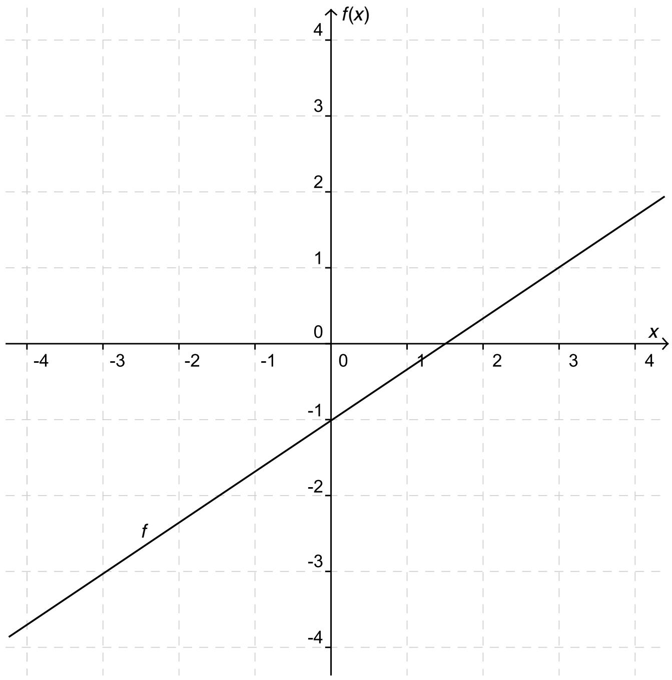
$$k = \frac{2}{3},\ d < 0$$



* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

Eine mögliche Lösung:



Lösungsschlüssel

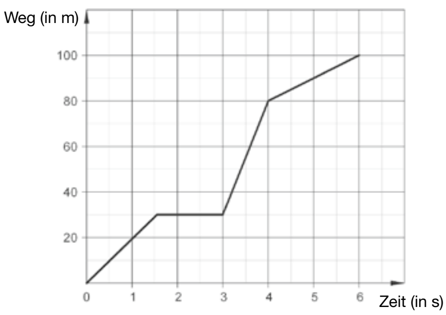
Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn ein Graph gezeichnet worden ist, der die Bedingungen für die Parameter k und d erfüllt. D. h., richtig sind alle Graphen, deren Steigung $k = \frac{2}{3}$ und deren $d < 0$ ist.

Zeit-Weg-Diagramm, Geschwindigkeiten*

Aufgabennummer: 1_153	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Das folgende Zeit-Weg-Diagramm stellt eine Bewegung dar. Der Weg wird in Metern (m), die Zeit in Sekunden (s) gemessen. Zur Beschreibung dieser Bewegung sind zudem verschiedene Geschwindigkeiten (v_x) gegeben.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jeweils jedem Zeitintervall jene Geschwindigkeit zu, die der Bewegung in diesem Intervall entspricht!

Zeitintervall	
[0; 1,5]	
[1,5; 3]	
[3; 4]	
[4; 6]	

Geschwindigkeit	
A	$v_A = 0$ m/s
B	$v_B = 5$ m/s
C	$v_C = 10$ m/s
D	$v_D = 20$ m/s
E	$v_E = 25$ m/s
F	$v_F = 50$ m/s

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

Zeitintervall	
[0; 1,5]	D
[1,5; 3]	A
[3; 4]	F
[4; 6]	C

Geschwindigkeit	
A	v_A = 0 m/s
B	v_B = 5 m/s
C	v_C = 10 m/s
D	v_D = 20 m/s
E	v_E = 25 m/s
F	v_F = 50 m/s

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Charakteristische Eigenschaften einer linearen Funktion

Aufgabennummer: 1_018	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.4	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit $f(x) = 3x + 2$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Eigenschaften an, die auf die Funktion f zutreffen!

$f(x + 1) = f(x) + 3$	☑
$f(x + 1) = f(x) + 2$	☐
$f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$	☐
$f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$	☐
$f(x_2) - f(x_1) = 3 \cdot (x_2 - x_1)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$	☑

Lösungsweg

$f(x + 1) = f(x) + 3$	☒
$f(x + 1) = f(x) + 2$	
$f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$	
$f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$	
$f(x_2) - f(x_1) = 3 \cdot (x_2 - x_1)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$	☒

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

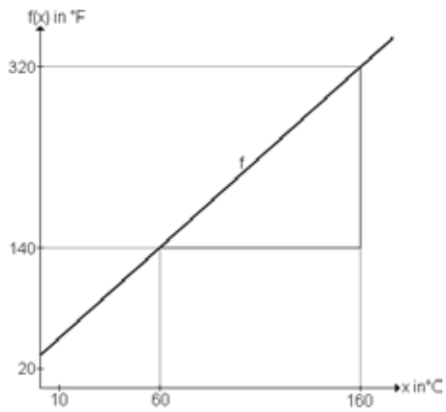
Temperaturskala

Aufgabennummer: 1_063	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Temperaturen werden bei uns in °C (Celsius) gemessen; in einigen anderen Ländern ist die Messung in °F (Fahrenheit) üblich.

Die Gerade f stellt den Zusammenhang zwischen °C und °F dar.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen können Sie der Abbildung entnehmen? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

160 °C entsprechen doppelt so vielen °F.	☑
140 °F entsprechen 160 °C.	☐
Eine Zunahme um 1 °C bedeutet eine Zunahme um 1,8 °F.	☑
Eine Abnahme um 1 °F bedeutet eine Abnahme um 18 °C.	☐
Der Anstieg der Geraden ist $k = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{100}{180}$.	☐

Lösungsweg

160 °C entsprechen doppelt so vielen °F.	☒
Eine Zunahme um 1 °C bedeutet eine Zunahme um 1,8 °F.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Eigenschaften linearer Funktionen*

Aufgabennummer: 1_131	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 4x - 2$.

Aufgabenstellung:

Wählen Sie zwei Argumente x_1 und x_2 mit $x_2 = x_1 + 1$ und zeigen Sie, dass die Differenz $f(x_2) - f(x_1)$ gleich dem Wert der Steigung k der gegebenen linearen Funktion f ist!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$f(x) = 4x - 2 \rightarrow k = 4$
$x_1 = 3$ und $f(x_1) = 10$
$x_2 = 4$ und $f(x_2) = 14$
$\rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 14 - 10 = 4 = k$

Lösungsschlüssel

Es können beliebige Argumente gewählt werden, die sich um 1 unterscheiden!
Jedoch muss die Argumentation in jedem Fall korrekt wiedergegeben werden!

Modellierung mittels linearer Funktionen*

Aufgabennummer: 1_136	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Reale Sachverhalte können durch eine lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$ mathematisch modelliert werden.

Aufgabenstellung:

In welchen Sachverhalten ist eine Modellierung mittels einer linearen Funktion sinnvoll möglich? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Sachverhalte an!

der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit bei einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 30 km/h	☑
die Einwohnerzahl einer Stadt in Abhängigkeit von der Zeit, wenn die Anzahl der Einwohner/innen in einem bestimmten Zeitraum jährlich um 3 % wächst	☐
Der Flächeninhalt eines Quadrates in Abhängigkeit von der Seitenlänge	☐
Die Stromkosten in Abhängigkeit von der verbrauchten Energie (in kWh) bei einer monatlichen Grundgebühr von € 12 und Kosten von € 0,4 pro kWh	☑
die Fahrzeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für eine bestimmte Entfernung	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit bei einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 30 km/h	☒
Die Stromkosten in Abhängigkeit von der verbrauchten Energie (in kWh) bei einer monatlichen Grundgebühr von € 12 und Kosten von € 0,4 pro kWh	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Funktionsgraphen zuordnen

Aufgabennummer: 1_064	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 3.1

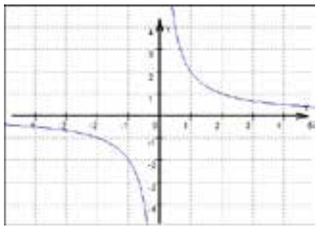
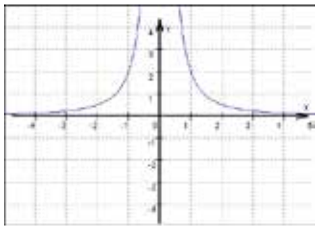
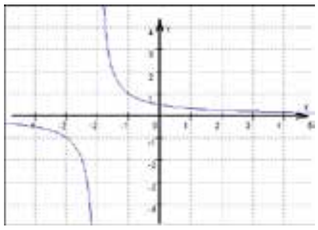
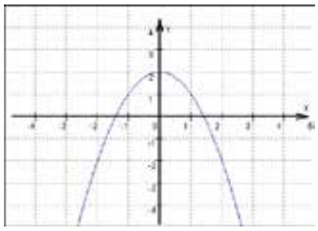
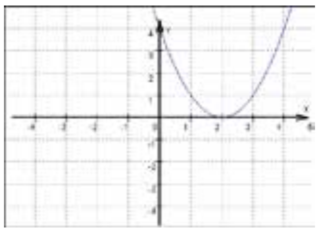
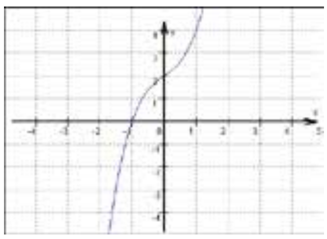
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Den nachfolgenden vier Gleichungen von Potenzfunktionen stehen sechs Graphen gegenüber.

Aufgabenstellung:

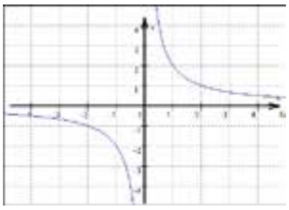
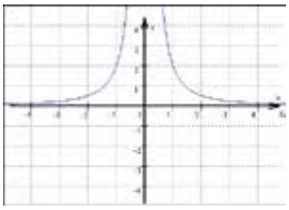
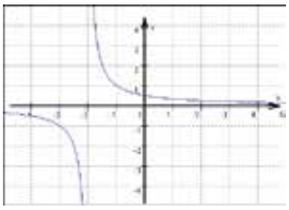
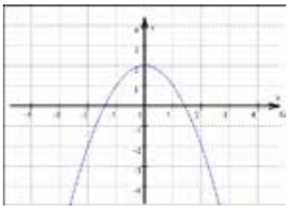
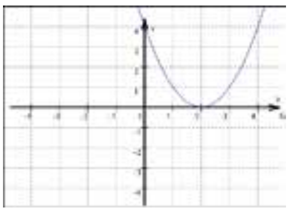
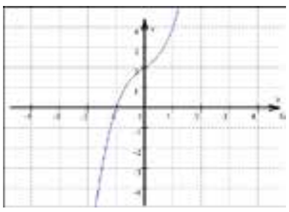
Ordnen Sie den jeweiligen Funktionsgleichungen die zugehörigen Funktionsgraphen zu!

$y = -x^2 + 2$	
$y = (x - 2)^2$	
$y = (x + 2)^{-1}$	
$y = 2x^{-2}$	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsweg

$y = -x^2 + 2$	D
$y = (x - 2)^2$	E
$y = (x + 2)^{-1}$	C
$y = 2x^{-2}$	B

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel

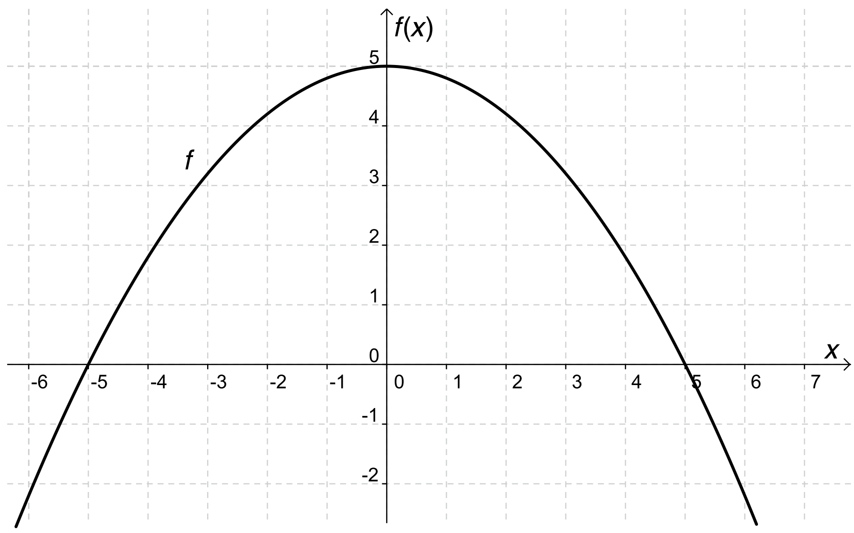
Die Aufgabe ist nur dann als richtig gelöst zu werten, wenn alle Buchstaben korrekt zugewiesen wurden.

Potenzfunktion*

Aufgabennummer: 1_122	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Von einer Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ist der Graph gegeben:



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b!

a = ____

b = ____

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$a = -0{,}2$

$b = 5$

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide Parameter richtig angegeben sind.

Bundesinstitut bifie

Indirekte Proportionalität

Aufgabennummer: 1_102	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

t ist indirekt proportional zu x und y^2.

Aufgabenstellung:

Welche der angegebenen Formeln beschreiben diese Abhängigkeiten?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Formeln an!

$t = \frac{z}{3 \cdot x \cdot y^2}$	☑
$t = \frac{x \cdot z}{3 \cdot y^2}$	☐
$t = \frac{x \cdot y^2}{3 \cdot z}$	☐
$t = \frac{3 \cdot z}{x \cdot y^2}$	☑
$t = x \cdot y^2 \cdot z$	☐

Lösungsweg

$t = \frac{z}{3 \cdot x \cdot y^2}$	☒
$t = \frac{3 \cdot z}{x \cdot y^2}$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Ideales Gas*

Aufgabennummer: 1_117	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

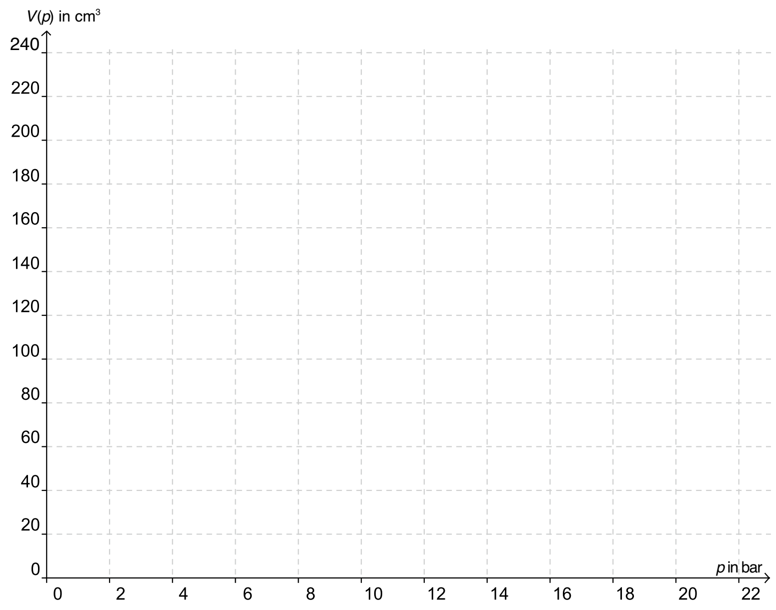
Die Abhängigkeit des Volumens *V* vom Druck *p* kann durch eine Funktion beschrieben werden. Bei gleichbleibender Temperatur ist das Volumen *V* eines idealen Gases zum Druck *p* indirekt proportional.

200 cm^3 eines idealen Gases stehen bei konstanter Temperatur unter einem Druck von 1 bar.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Term der Funktionsgleichung an und zeichnen Sie deren Graphen!

$V(p)$ = ______________________________



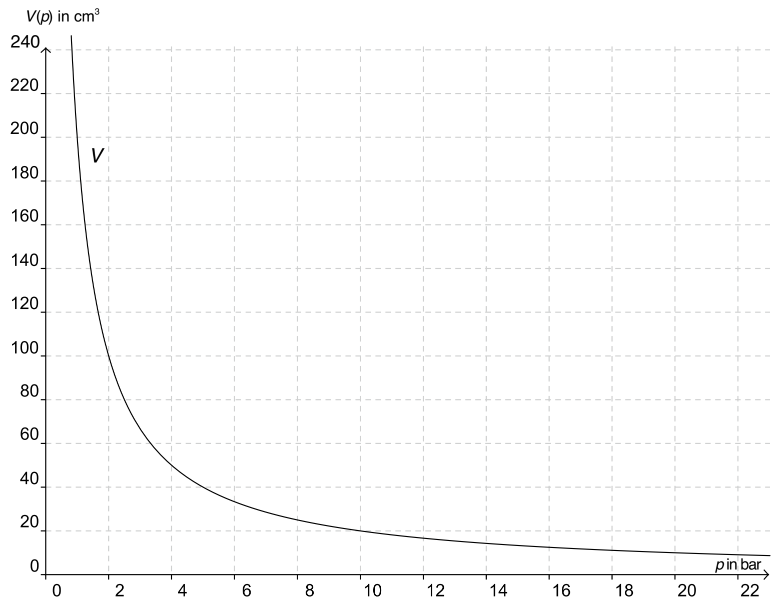
* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$V(p) = \frac{c}{p}$

$200 = \frac{c}{1}$

$V(p) = \frac{200}{p}$



Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn die Funktionsgleichung richtig angegeben ist und der Graph den entsprechenden Verlauf (in seiner charakteristischen Ausprägung) zeigt.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

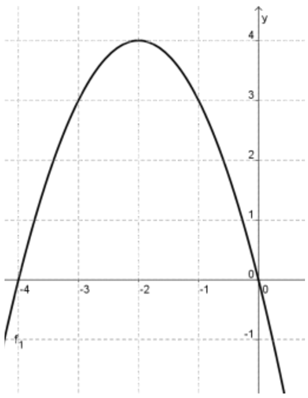
Grad einer Polynomfunktion

Aufgabennummer: 1_040	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.1

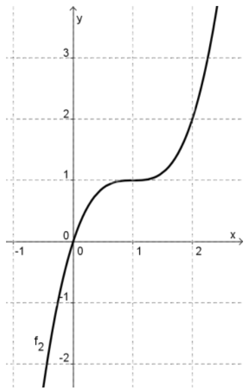
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind Ausschnitte der Graphen von fünf Polynomfunktionen f_1 bis f_5. Die Ausschnitte enthalten alle Extrem- und Wendepunkte der Graphen.

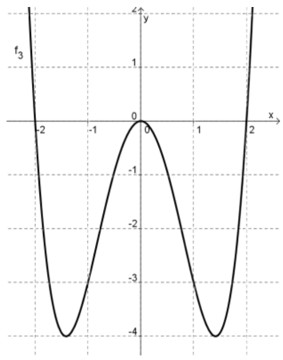
f_1



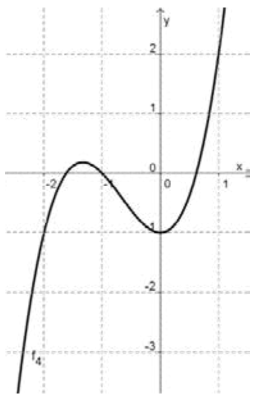
f_2



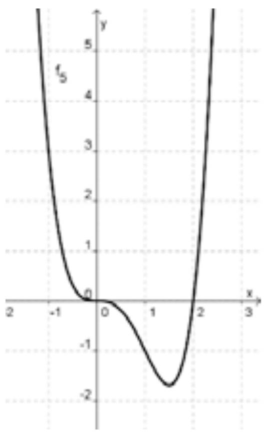
f_3



f_4



f_5



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) zum Grad an!

Die Polynomfunktion f_1 hat den Grad 2.	☑
Die Polynomfunktion f_2 hat den Grad 2.	☐
Die Polynomfunktion f_3 hat den Grad 4.	☑
Die Polynomfunktion f_4 hat den Grad 3.	☑
Die Polynomfunktion f_5 hat den Grad 3.	☐

Lösungsweg

Die Polynomfunktion f_1 hat den Grad 2.	☒
Die Polynomfunktion f_2 hat den Grad 2.	
Die Polynomfunktion f_3 hat den Grad 4.	☒
Die Polynomfunktion f_4 hat den Grad 3.	☒
Die Polynomfunktion f_5 hat den Grad 3.	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Quadratische Funktion

Aufgabennummer: 1_103	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Ihr Graph ist eine Parabel.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vorgegebenen Bedingungen für *a, b* und *c* die daraus jedenfalls resultierende Eigenschaft zu!

$a < 0$	
$a > 0$	
$c = 0$	
$b = 0$	

A	Der Funktionsgraph hat keine Nullstelle.
B	Der Graph hat mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
C	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Hochpunkt.
D	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Tiefpunkt.
E	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur x-Achse.
F	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

Lösungsweg

$a < 0$	C
$a > 0$	D
$c = 0$	B
$b = 0$	F

A	Der Funktionsgraph hat keine Nullstelle.
B	Der Graph hat mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
C	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Hochpunkt.
D	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Tiefpunkt.
E	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur x-Achse.
F	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn alle Buchstaben korrekt zugeordnet wurden.

Polynomfunktion*

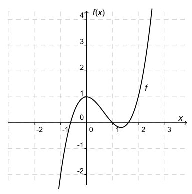
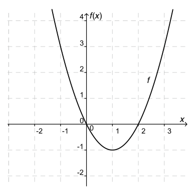
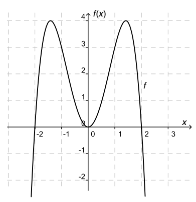
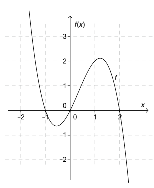
Aufgabennummer: 1_123	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Es sind die Graphen von vier Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben.

Aufgabenstellung:

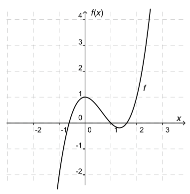
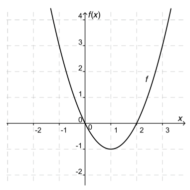
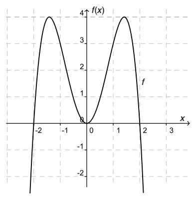
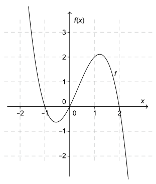
Ordnen Sie den folgenden Graphen jeweils die entsprechende Funktionsgleichung zu!

A	$f(x) = x^2 - 2x$
B	$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$
C	$f(x) = x^2 + 2x - 1$
D	$f(x) = -x^4 + 4x^2$
E	$f(x) = x^4 - 4x^3$
F	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

	F
	A
	D
	B

A	$f(x) = x^2 - 2x$
B	$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$
C	$f(x) = x^2 + 2x - 1$
D	$f(x) = -x^4 + 4x^2$
E	$f(x) = x^4 - 4x^3$
F	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

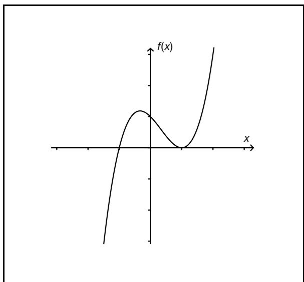
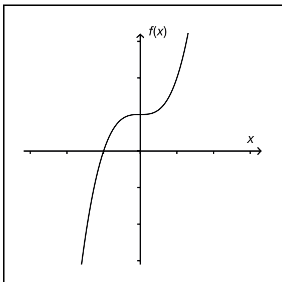
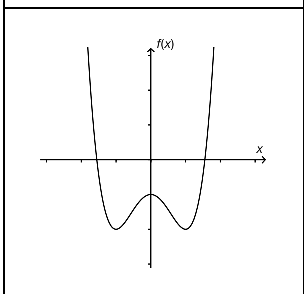
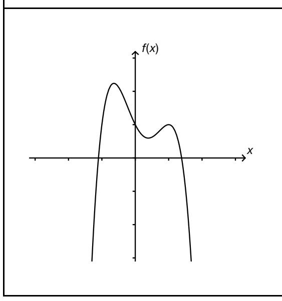
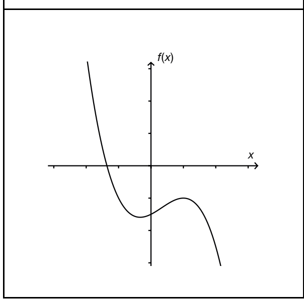
Graphen von Polynomfunktionen*

Aufgabennummer: 1_158	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.1	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine Polynomfunktion *f* dritten Grades.

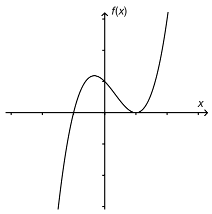
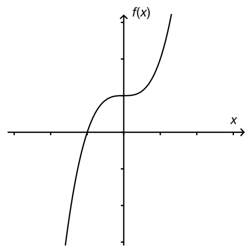
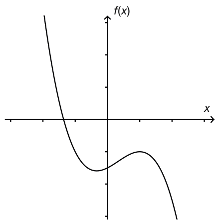
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Abbildung(en) an, die einen möglichen Funktionsgraphen von *f* zeigt/zeigen!

	☑		☑
	☐		☐
	☑		

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

	☒		☒
	☒		

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Abbildungen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Polynomfunktionen

Aufgabennummer: 1_019	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die folgenden Aussagen beschreiben Eigenschaften von Polynomfunktionen f mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	☑
Jede Polynomfunktion vierten Grades hat mindestens eine Nullstelle.	☐
Jede Polynomfunktion, die zwei lokale Extremstellen hat, ist mindestens vom Grad 3.	☑
Jede Polynomfunktion, die genau zwei lokale Extremstellen hat, hat mindestens eine Wendestelle.	☑
Jede Polynomfunktion, deren Grad größer als 3 ist, hat mindestens eine lokale Extremstelle.	☐

Lösungsweg

Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	☒
Jede Polynomfunktion vierten Grades hat mindestens eine Nullstelle.	
Jede Polynomfunktion, die zwei lokale Extremstellen hat, ist mindestens vom Grad 3.	☒
Jede Polynomfunktion, die genau zwei lokale Extremstellen hat, hat mindestens eine Wendestelle.	☒
Jede Polynomfunktion, deren Grad größer als 3 ist, hat mindestens eine lokale Extremstelle.	

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Nullstellen einer Polynomfunktion

Aufgabennummer: 1_039	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 4.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

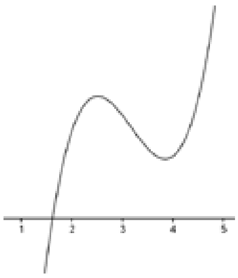
Wie viele verschiedene reelle Nullstellen kann eine Polynomfunktion 3. Grades haben?

Aufgabenstellung:

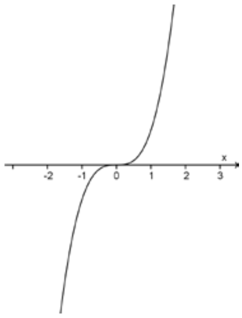
Veranschaulichen Sie Ihre Lösungsfälle durch jeweils einen möglichen Graphen!

Möglicher Lösungsweg

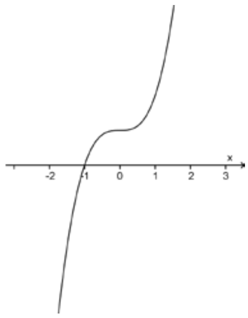
Eine Nullstelle:



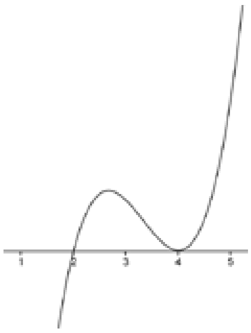
oder



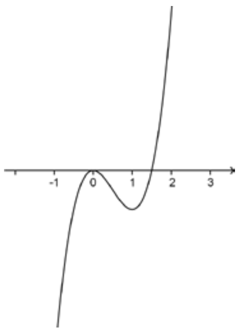
oder



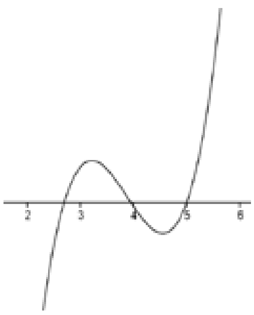
Zwei Nullstellen:



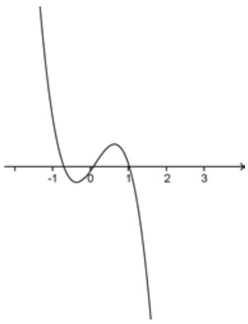
oder



Drei Nullstellen:



oder



Lösungsschlüssel
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die Graphen entsprechend der richtigen Nullstellenanzahl korrekt skizziert sind.

Polynomfunktion 3. Grades

Aufgabennummer: 1_083	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Polynomfunktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Wie viele reelle Nullstellen kann diese Funktion besitzen?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

keine	☐
mindestens eine	☑
höchstens drei	☑
genau vier	☐
unendlich viele	☐

Lösungsweg

mindestens eine	☒
höchstens drei	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Exponentialgleichung

Aufgabennummer: 1_104	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Funktionswert $\sqrt[3]{4}$ der Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die rationale Zahl x so, dass sie die Gleichung $2^x = \sqrt[3]{4}$ erfüllt!

$x =$ ____________

Lösungsweg

$x = \frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel

Die Angabe eines Lösungsweges ist nicht erforderlich.

Werte einer Exponentialfunktion

Aufgabennummer: 1_105	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Exponentialfunktion f durch die Gleichung $f(x) = 2^x$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie diejenige rationale Zahl x, für die $f(x) = \frac{1}{8}$ gilt!

x = ______________

Lösungsweg

$x = -3$

Lösungsschlüssel

Die Angabe des Zahlenwertes muss korrekt sein.

Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Exponentielle Abnahme

Aufgabennummer: 1_020	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die angegebenen Funktionsgleichungen beschreiben exponentielle Zusammenhänge.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Funktionsgleichungen an, die eine exponentielle Abnahme beschreiben!

$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}2x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^x$	☑
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^{-x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$	☑

Lösungsweg

$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$	
$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}2x}$	
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^x$	☒
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^{-x}$	
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$	☒

Lösungsschlüssel

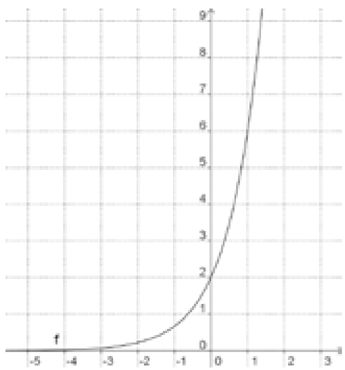
Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Parameter einer Exponentialfunktion

Aufgabennummer: 1_065	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot 3^x$.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den für diesen Graphen richtigen Parameterwert a mit $a \in \mathbb{N}$!

a = ___________

Möglicher Lösungsweg

$a \cdot 3^0 = 2 \Rightarrow a = 2$

Lösungsschlüssel

Die Angabe eines Lösungsweges ist hier nicht erforderlich.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Aufgabennummer: 1_084	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($c \in \mathbb{R}$, $a > 0$).

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse!

Möglicher Lösungsweg

$f(0) = c \cdot a^0 = c \rightarrow$ Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S = (0|c)$.

Lösungsschlüssel

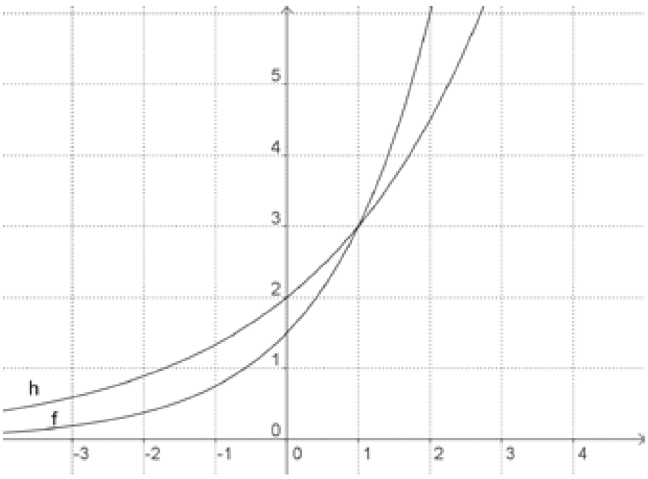
Die Aufgabe ist nur dann richtig gelöst, wenn beide Koordinaten des Schnittpunktes korrekt angegeben sind.

Exponentialfunktionen vergleichen

Aufgabennummer: 1_106	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind zwei Exponentialfunktionen f und h mit $f(x) = a \cdot b^x$ und $h(x) = c \cdot d^x$.
Dabei gilt: $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen über die Parameter a, b, c und d sind zutreffend?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$a > c$	☐
$b > d$	☑
$a < c$	☑
$b < d$	☐
$a = c$	☐

Lösungsweg

$b > d$	☒
$a < c$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Exponentialfunktion

Aufgabennummer: 1_021	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.	☐
Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e-Fache.	☑
Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e.	☑
Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $\frac{1}{e}$-Fache.	☑
Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.	☑

Lösungsweg

Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.	
Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e-Fache.	☒
Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e.	☒
Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $\frac{1}{e}$-Fache.	☒
Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Exponentielles Wachstum

Aufgabennummer: 1_023	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Funktion f mit $f(x) = 100 \cdot 2^x$ beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess.
Wie verändert sich der Funktionswert, wenn x um 1 erhöht wird?

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Funktionswert $f(x+1)$ ist ...

um 1 größer als $f(x)$	☐
doppelt so groß wie $f(x)$	☑
um 100 größer als $f(x)$	☐
um 200 größer als $f(x)$	☐
um 100 % größer als $f(x)$	☑

Lösungsweg

Der Funktionswert $f(x+1)$ ist ...

um 1 größer als $f(x)$	
doppelt so groß wie $f(x)$	☒
um 100 größer als $f(x)$	
um 200 größer als $f(x)$	
um 100 % größer als $f(x)$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_145	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die für die Funktion f zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f'(x) = a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$	☑
Für $a > 0$ sind alle Funktionswerte negativ.	☐
Die Funktion f hat mindestens eine reelle Nullstelle.	☐
Die Funktion f schneidet die y-Achse bei $(0 \mid a)$.	☑
Die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $\lambda < 0$ und $a \neq 0$ ist.	☑

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$f'(x) = a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$	☒
Die Funktion f schneidet die y-Achse bei $(0 \mid a)$.	☒
Die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $\lambda < 0$ und $a \neq 0$ ist.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Halbwertszeit eines Isotops*

Aufgabennummer: 1_138	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der radioaktive Zerfall des Iod-Isotops ^{131}I verhält sich gemäß der Funktion N mit $N(t) = N(0) \cdot e^{-0{,}086 \cdot t}$ mit t in Tagen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Gleichung(en) an, mit der/denen die Halbwertszeit des Isotops in Tagen berechnet werden kann!

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}086 \cdot t \cdot \ln e$	☑
$2 = e^{-0{,}086 \cdot t}$	☐
$N(0) = \frac{N(0)}{2} \cdot e^{-0{,}086 \cdot t}$	☐
$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 0{,}086 \cdot t \cdot e$	☐
$\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-0{,}086 \cdot t}$	☑

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}086 \cdot t \cdot \ln e$	☒
$\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-0{,}086 \cdot t}$	☒

Lösungsschlüssel

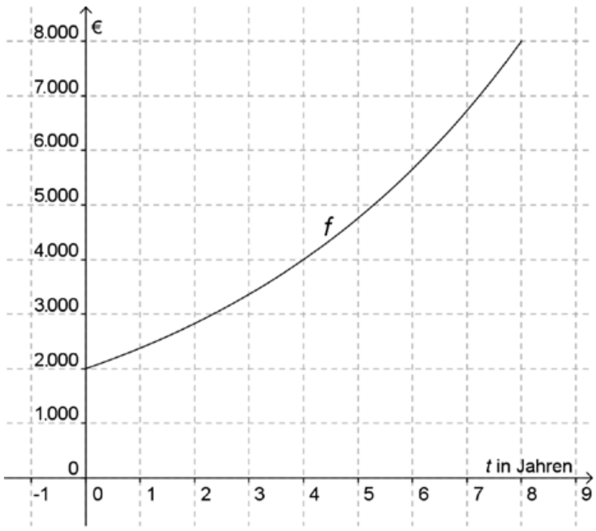
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Gleichungen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Verdoppelungszeit*

Aufgabennummer: 1_142	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie mithilfe des Graphen die Größe der Verdoppelungszeit!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

z. B.: $f(0) = 2000$ und $f(4) = 4000$

→ In 4 Jahren ist der doppelte Betrag vorhanden. Die Verdoppelungszeit beträgt also 4 Jahre.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn der Wert richtig angegeben ist.

Halbwertszeit von Felbamat*

Aufgabennummer: 1_155	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Zur Behandlung von Epilepsie wird oft der Arzneistoff Felbamat eingesetzt.
Nach der Einnahme einer Ausgangsdosis D_0 nimmt die Konzentration D von Felbamat im Körper näherungsweise exponentiell mit der Zeit ab.

Für D gilt folgender funktionaler Zusammenhang: $D(t) = D_0 \cdot 0{,}9659^t$.
Dabei wird die Zeit t in Stunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Halbwertszeit von Felbamat! Geben Sie die Lösung auf Stunden gerundet an!

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$\frac{D_0}{2} = D_0 \cdot 0{,}9659^t$

$\frac{1}{2} = 0{,}9659^t$

$\ln(0{,}5) = t \cdot \ln(0{,}9659)$

$\Rightarrow \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9659)} \approx 20$ Stunden

Lösungsschlüssel

1 Punkt für die richtige Lösung

Relative und absolute Zunahme

Aufgabennummer: 1_085	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.6

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Formel $N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $a > 1$ beschreibt ein exponentielles Wachstum.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die relative Zunahme ist in gleichen Zeitintervallen gleich groß.	☑
Die absolute Zunahme ist in gleichen Zeitintervallen gleich groß.	☐
Die relative Zunahme ist unabhängig von N_0.	☑
Die relative Zunahme ist abhängig von a.	☑
Die absolute Zunahme ist abhängig von a.	☑

Lösungsweg

Die relative Zunahme ist in gleichen Zeitintervallen gleich groß.	☒
Die relative Zunahme ist unabhängig von N_0.	☒
Die relative Zunahme ist abhängig von a.	☒
Die absolute Zunahme ist abhängig von a.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Trigonometrische Funktion skalieren

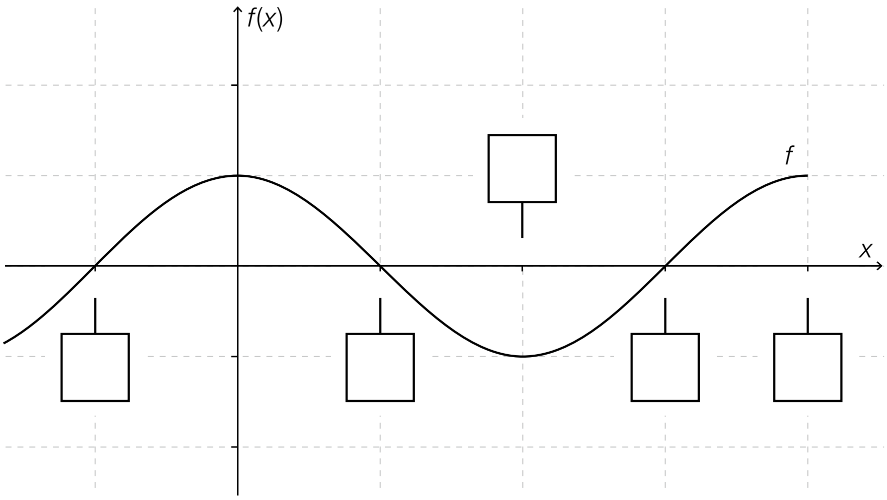
Aufgabennummer: 1_086	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 6.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

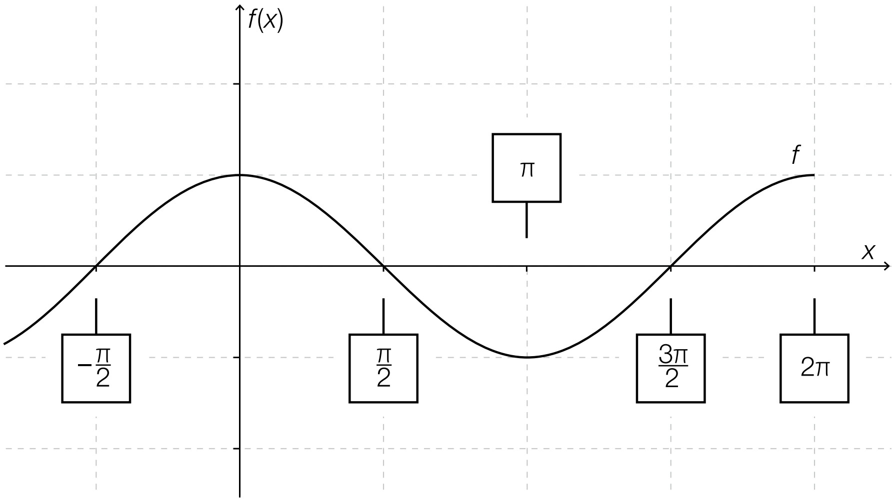
Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie in der nachstehenden Zeichnung die Skalierung in den vorgegebenen fünf Kästchen!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Alle fünf Werte müssen korrekt angegeben sein. Auch die Angabe als Dezimalzahl ist richtig zu werten – vorausgesetzt, es ist mindestens eine Nachkommastelle angegeben.

Wirkung der Parameter einer Sinusfunktion

Aufgabennummer: 1_066	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 6.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine Sinusfunktion der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$.

Dabei beeinflussen die Parameter a und b das Aussehen des Graphen von f im Vergleich zum Graphen von $g(x) = \sin(x)$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Parameterwerten die entsprechenden Auswirkungen auf das Aussehen von f im Vergleich zu g zu!

$a = 2$	
$a = \frac{1}{2}$	
$b = 2$	
$b = \frac{1}{2}$	

A	Dehnung des Graphen der Funktion entlang der x-Achse auf das Doppelte
B	Phasenverschiebung um 2
C	doppelte Frequenz
D	Streckung entlang der y-Achse auf das Doppelte
E	halbe Amplitude
F	Verschiebung entlang der y-Achse um –2

Lösungsweg

$a = 2$	D
$a = \frac{1}{2}$	E
$b = 2$	C
$b = \frac{1}{2}$	A

A	Dehnung des Graphen der Funktion entlang der x-Achse auf das Doppelte
B	Phasenverschiebung um 2
C	doppelte Frequenz
D	Streckung entlang der y-Achse auf das Doppelte
E	halbe Amplitude
F	Verschiebung entlang der y-Achse um –2

Lösungsschlüssel

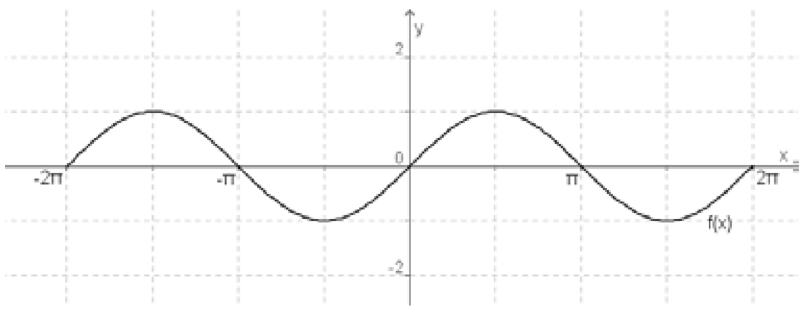
Die Aufgabe ist nur dann als richtig zu werten, wenn alle Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Trigonometrische Funktion

Aufgabennummer: 1_107	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 6.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

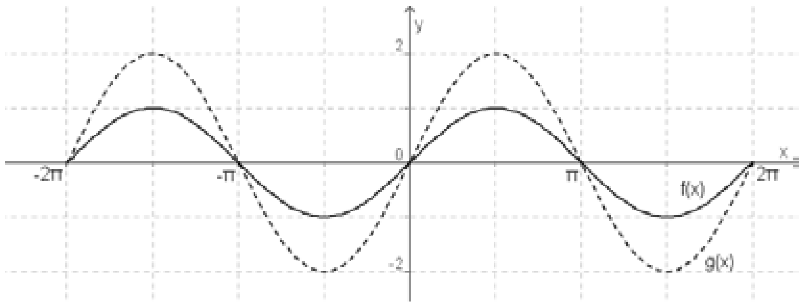
Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$.



Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in die gegebene Abbildung den Graphen der Funktion $g(x) = 2 \cdot \sin(x)$ ein!

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

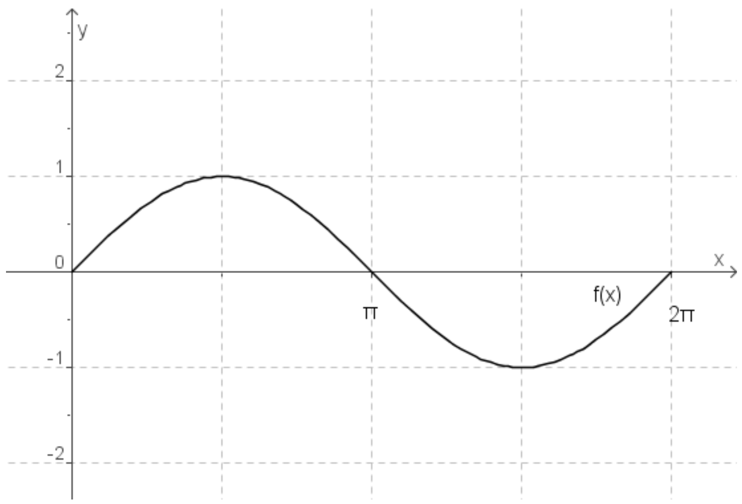
Die Lösungsfunktion muss mit der in der Lösungserwartung angegebenen Funktion $g(x)$ in den Nullstellen und Extremwerten übereinstimmen und die entsprechende Charakteristik aufweisen.

Variation einer trigonometrischen Funktion

Aufgabennummer: 1_108	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 6.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

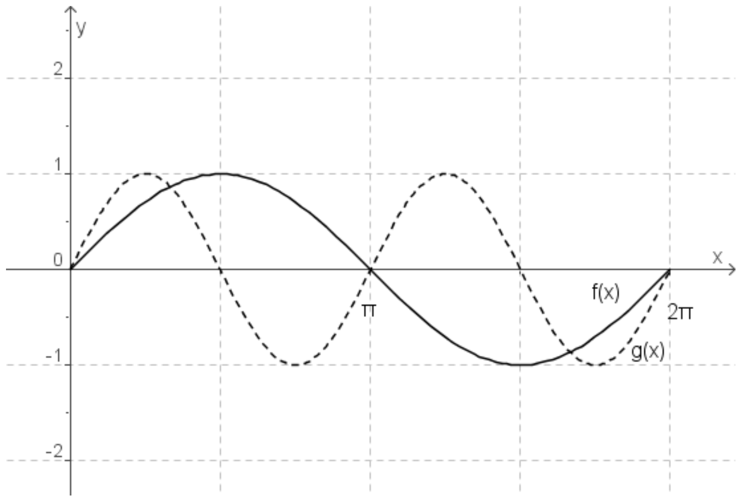
Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$.



Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in die gegebene Abbildung den Graphen der Funktion $g(x) = \sin(2x)$ ein!

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

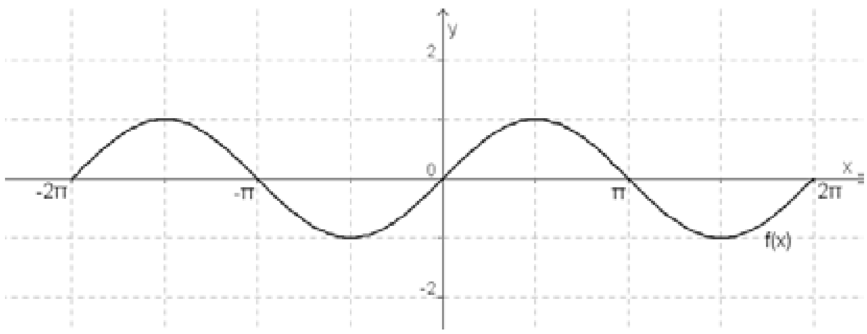
Die Lösungsfunktion muss mit der in der Lösungserwartung angegebenen Funktion $g(x)$ in den Nullstellen und Extremwerten übereinstimmen und die entsprechende Charakteristik aufweisen.

Negative Sinusfunktion

Aufgabennummer: 1_109	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 6.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

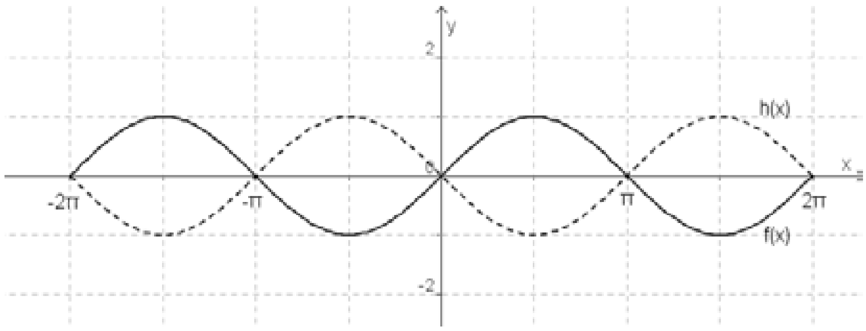
Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$.



Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in die gegebene Abbildung den Graphen der Funktion $h(x) = -\sin(x)$ ein!

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Lösungsfunktion muss mit der in der Lösungserwartung angegebenen Funktion $h(x)$ in den Nullstellen und Extremwerten übereinstimmen und die entsprechende Charakteristik aufweisen.

Cosinusfunktion*

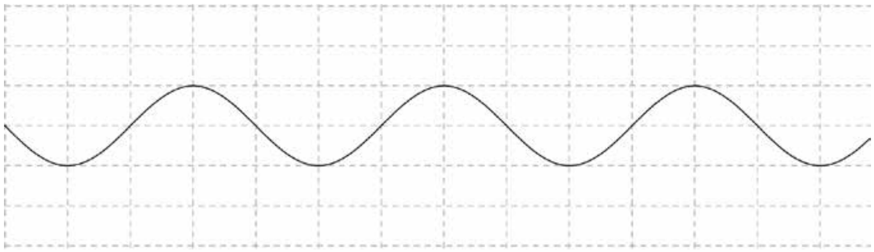
Aufgabennummer: 1_139	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 6.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Cosinusfunktion ist eine periodische Funktion.

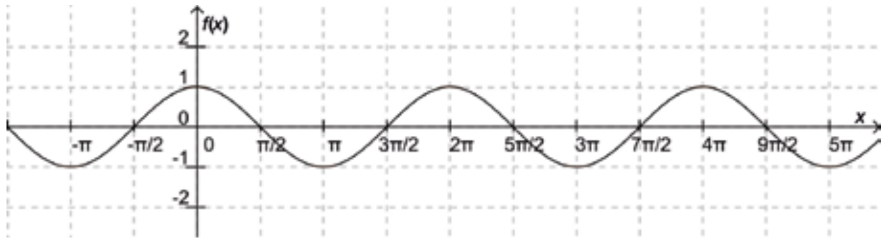
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Koordinatenachsen und deren Skalierung so ein, dass der angegebene Graph dem Graphen der Cosinusfunktion entspricht! Die Skalierung beider Achsen muss jeweils zwei Werte umfassen!



* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Lösung ist dann als richtig zu werten, wenn auf beiden Achsen mindestens zwei Werte im Bogen- oder Gradmaß richtig gekennzeichnet sind, wobei der Wert 0 für beide Achsen gelten darf. Alle eingezeichneten Werte müssen richtig sein.

Ableitung der Sinusfunktion

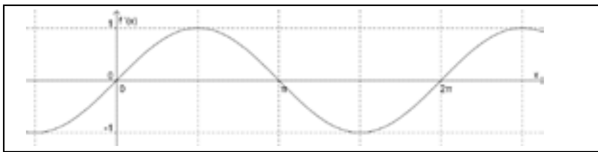
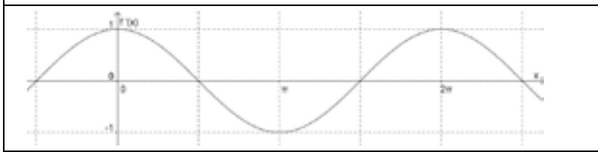
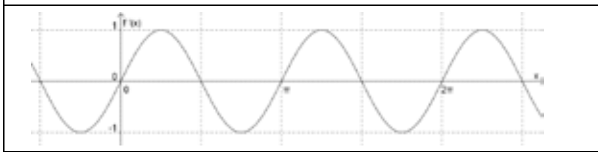
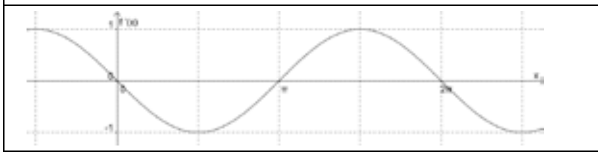
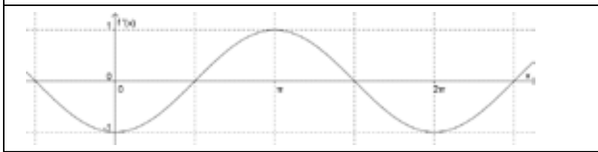
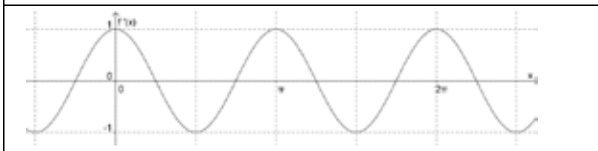
Aufgabennummer: 1_041	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 6.6

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

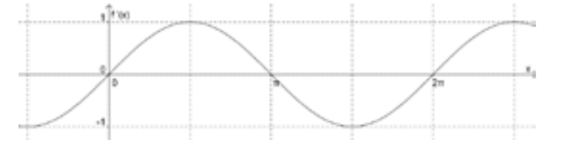
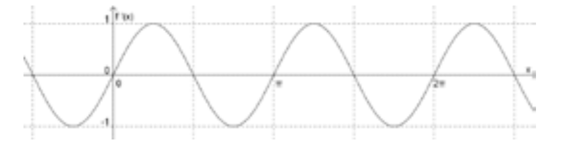
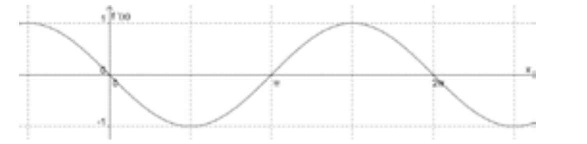
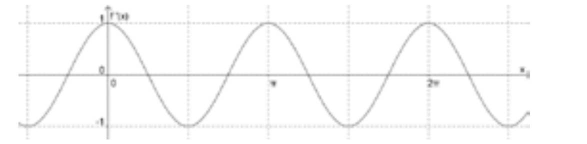
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie von den gegebenen Graphen von Ableitungsfunktionen f' denjenigen an, der zur Funktion f gehört!

	☐
	☑
	☐
	☐
	☐
	☐

Lösungsweg

	
	☒
	
	
	
	

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Ableitung der Cosinusfunktion

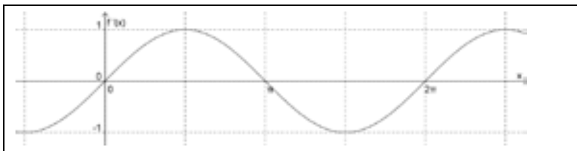
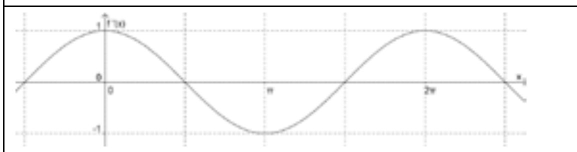
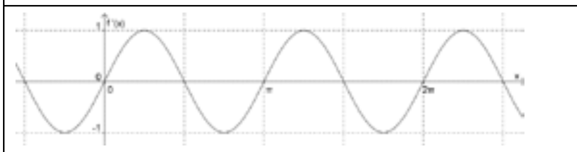
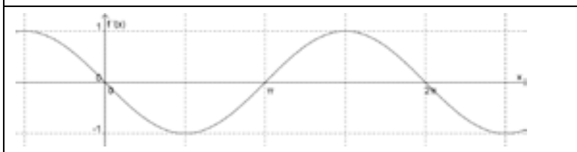
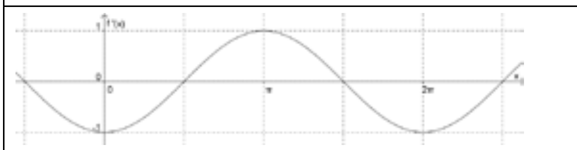
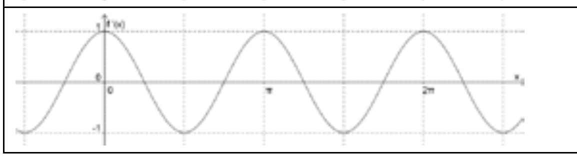
Aufgabennummer: 1_042	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 6.6

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

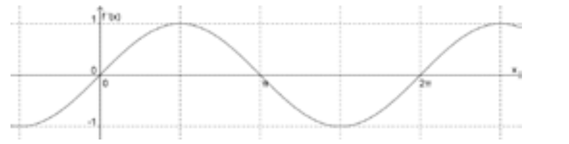
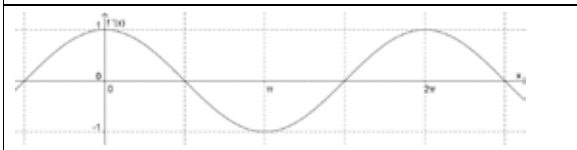
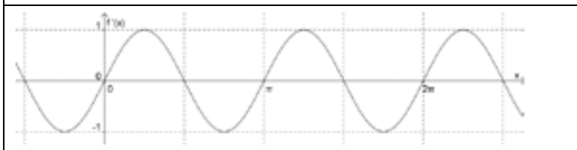
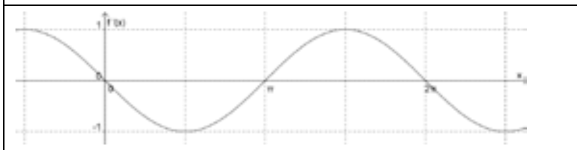
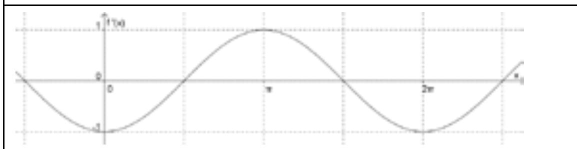
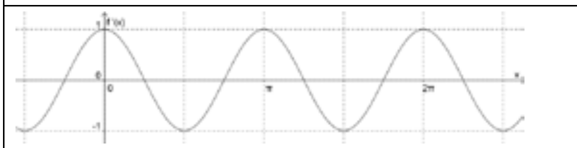
Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \cos(x)$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie von den gegebenen Graphen von Ableitungsfunktionen f' denjenigen an, der zur Funktion *f* gehört!

	☐
	☐
	☐
	☑
	☐
	☐

Lösungsweg

	
	
	
	☒
	
	

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

3. Inhaltsbereich *Analysis (AN)*

AN 1.1	Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
AN 1.2	Den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
AN 1.3	Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können
AN 1.4	Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können
AN 2.1	Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ *und* $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)
AN 3.1	Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
AN 3.2	Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
AN 3.3	Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen
AN 4.1	Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
AN 4.2	Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(k \cdot x)\,\mathrm{d}x$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können
AN 4.3	Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Luftwiderstand*

Aufgabennummer: 1_143		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format		Grundkompetenz: AN 1.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich	

Der Luftwiderstand F_L eines bestimmten PKWs in Abhängigkeit von der Fahrtgeschwindigkeit v lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben: $F_L(v) = 0{,}4 \cdot v^2$. Der Luftwiderstand ist dabei in Newton (N) und die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die mittlere Zunahme des Luftwiderstandes in $\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$ bei einer Erhöhung der Fahrtgeschwindigkeit von 20 m/s auf 30 m/s!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{F_L(30) - F_L(20)}{30 - 20} = \frac{360 - 160}{10} = 20\ \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$$

Lösungsschlüssel

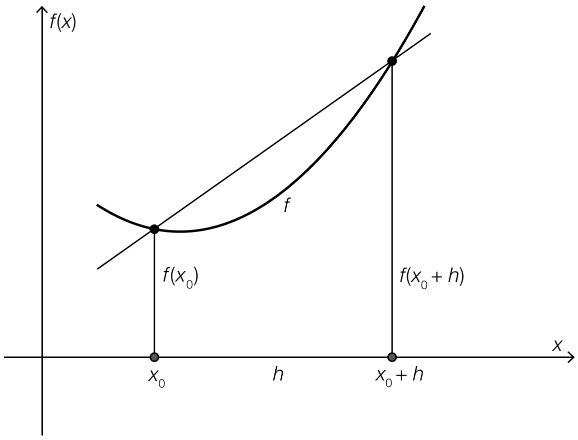
Die Angabe der Einheit $\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$ ist nicht notwendig für die Korrektheit der Lösung (da in der Aufgabenstellung vorgegeben); es genügt die Verwendung des korrekten Änderungsmaßes und die Ermittlung des numerischen Wertes 20.

Differenzenquotient

Aufgabennummer: 1_003	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit einer Sekante.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Der Ausdruck ______①______ beschreibt die ______②______.

①	
$\frac{f(x) - f(x_0)}{h}$	☐
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	☑
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0}$	☐

②	
die Steigung von f an der Stelle x	☐
die 1. Ableitung der Funktion f	☐
die mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_0 + h]$	☑

Lösungsweg

Der Ausdruck ___①___ beschreibt die ___②___.

①	
$\frac{f(x) - f(x_0)}{h}$	
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	☒
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0}$	

②	
die Steigung von f an der Stelle x	
die 1. Ableitung der Funktion f	
die mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_0 + h]$	☒

Lösungsschlüssel

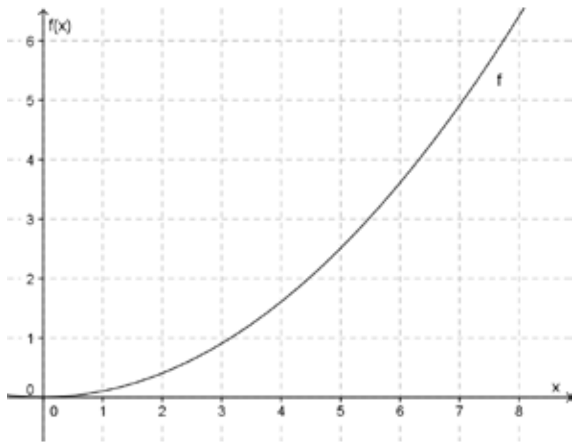
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Änderungsmaße

Aufgabennummer: 1_004	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0{,}1x^2$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die gegebene Funktion f zutreffend sind!

Die absolute Änderung in den Intervallen [0; 3] und [4; 5] ist gleich groß.	☑
Die mittlere Änderungsrate der Funktion f in den Intervallen [0; 2] und [2; 4] ist gleich.	☐
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 5$ hat den Wert 2,5.	☐
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 2$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 6$.	☐
Die Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (3\|f(3))$ und $B = (6\|f(6))$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 3$.	☑

Lösungsweg

Die absolute Änderung in den Intervallen [0; 3] und [4; 5] ist gleich groß.	☒
Die mittlere Änderungsrate der Funktion f in den Intervallen [0; 2] und [2; 4] ist gleich.	
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 5$ hat den Wert 2,5.	
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 2$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 6$.	
Die Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (3\|f(3))$ und $B = (6\|f(6))$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 3$.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Freier Fall

Aufgabennummer: 1_093	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für einen frei fallenden Körper ist eine Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ durch $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ gegeben. Dabei ist $g \approx 10$ m/s² die Fallbeschleunigung.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit in m/s im Zeitintervall [2; 4] Sekunden!

Möglicher Lösungsweg

$\overline{v} = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{80 - 20}{2} = 30$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt 30 m/s.

Lösungsschlüssel

Es muss ein Lösungsweg erkennbar sein. Die Angabe der korrekten Maßzahl ohne entsprechende Einheit ist ausreichend.

Freier Fall – Momentangeschwindigkeit

Aufgabennummer: 1_094	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für einen frei fallenden Körper ist eine Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ durch $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ gegeben. Dabei ist $g \approx 10$ m/s² die Fallbeschleunigung.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt $t = 2$ Sekunden!

Möglicher Lösungsweg

$v(t) = s'(t) = 10t$

$v(2) = 20$

Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2$ Sekunden beträgt 20 m/s.

Lösungsschlüssel

Es muss ein Lösungsweg erkennbar sein. Die Angabe der korrekten Maßzahl ohne entsprechende Einheit ist ausreichend.

Differenzenquotient*

Aufgabennummer: 1_151	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Funktion s: $[0; 6] \to \mathbb{R}$ beschreibt den von einem Radfahrer innerhalb von t Sekunden zurückgelegten Weg.

Es gilt: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$.

Der zurückgelegte Weg wird dabei in Metern angegeben, die Zeit wird ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ in Sekunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Differenzenquotienten der Funktion s im Intervall $[0; 6]$ und deuten Sie das Ergebnis!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$\frac{s(6) - s(0)}{6 - 0} = \frac{30 - 0}{6} = 5$

Das Ergebnis bedeutet, dass die mittlere Geschwindigkeit (auch Durchschnittsgeschwindigkeit) des Radfahrers im Zeitintervall [0; 6] 5 m/s beträgt.

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt als richtig, wenn der Differenzenquotient richtig berechnet und gedeutet wurde.

Wachstum

Aufgabennummer: 1_005	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Wachstum tritt in der Natur fast nie unbegrenzt auf, es erreicht einmal eine gewisse Grenze (Sättigung). Diese Sättigungsgrenze sei K. Der vorhandene Bestand zum Zeitpunkt n sei x_n.

Zur Beschreibung vieler Vorgänge (Wachstum von Populationen, Ausbreitung von Krankheiten oder Informationen, Erwärmung etc.) verwendet man folgendes mathematisches Modell:

$x_{n+1} - x_n = r \cdot (K - x_n)$ mit $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < r < 1$ (r ist ein Proportionalitätsfaktor)

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende(n) Aussage(n) an!

Diese Gleichung kann als eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ gedeutet werden.	☐
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum momentanen Bestand.	☐
Es liegt ein kontinuierliches Wachstumsmodell vor, d. h., man kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Größe des Bestands errechnen.	☐
Der Zuwachs bei diesem Wachstum ist proportional zur noch verfügbaren Restkapazität (= Freiraum).	☐
Mit zunehmender Zeit wird der Zuwachs immer geringer.	☐

Lösungsweg

Diese Gleichung kann als eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ gedeutet werden.	☒
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum momentanen Bestand.	
Es liegt ein kontinuierliches Wachstumsmodell vor, d. h., man kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Größe des Bestands errechnen.	
Der Zuwachs bei diesem Wachstum ist proportional zur noch verfügbaren Restkapazität (= Freiraum).	☒
Mit zunehmender Zeit wird der Zuwachs immer geringer.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Wirkstoffe im Körper

Aufgabennummer: 1_006	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Ein Patient, der an Bluthochdruck leidet, muss auf ärztliche Empfehlung ab sofort täglich am Morgen eine Tablette mit Wirkstoffgehalt 100 mg zur Therapie einnehmen. Der Körper scheidet im Laufe eines Tages 80 % des Wirkstoffs wieder aus.

Die Wirkstoffmenge W_n im Körper des Patienten nach n Tagen kann daher (rekursiv) aus der Menge des Vortags W_{n-1} nach folgender Beziehung bestimmt werden:

$W_n = 0{,}2 \cdot W_{n-1} + 100$, $W_0 = 100$ (W_i in mg)

In welcher Weise wird sich die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten langfristig entwickeln?

Aufgabenstellung:

Die beiden Textfelder sind so zu ergänzen, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht. Kreuzen Sie dazu in der ersten und der zweiten Spalte jeweils die passende Aussage an!

Die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten wird langfristig ___①___, weil ___②___.

①	
unbeschränkt wachsen	☐
beschränkt wachsen	☐
wieder sinken	☐

②	
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr abbaut und damit der Abbau letztlich die Zufuhr übersteigt	☐
dem Körper täglich zusätzlicher Wirkstoff zugeführt wird, der nur zu 80 % abgebaut werden kann, und somit die Zufuhr im Vergleich zum Abbau überwiegt	☐
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr davon abbaut, auch wenn der Prozentsatz gleich bleibt	☐

Lösungsweg

Die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten wird langfristig ___①___, weil ___②___.

①	
unbeschränkt wachsen	
beschränkt wachsen	☒
wieder sinken	

②	
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr abbaut und damit der Abbau letztlich die Zufuhr übersteigt	
dem Körper täglich zusätzlicher Wirkstoff zugeführt wird, der nur zu 80 % abgebaut werden kann, und somit die Zufuhr im Vergleich zum Abbau überwiegt	
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr davon abbaut, auch wenn der Prozentsatz gleich bleibt	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Ableitung einer Polynomfunktion

Aufgabennummer: 1_007	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + 2x - 3$.

Aufgabenstellung:

Bilden Sie die 1. und die 2. Ableitung der Funktion f!

Möglicher Lösungsweg

$f'(x) = 21x^2 - 10x + 2$
$f''(x) = 42x - 10$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die 1. und die 2. Ableitung richtig angegeben sind.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Ableitung von Sinus- und Cosinus-Funktion

Aufgabennummer: 1_010	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind vier Funktionen und sechs Ableitungsfunktionen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Funktionen die richtige Ableitungsfunktion f' zu!

$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	
$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	
$f(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	
$f(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	

A	$f'(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
B	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
C	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
D	$f'(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
E	$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
F	$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Lösungsweg

$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	D
$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	C
$f(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	A
$f(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	B

A	$f'(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
B	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
C	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
D	$f'(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
E	$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
F	$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die vier Zuordnungen richtig erfolgt sind.

Ableitungsfunktion einer linearen Funktion

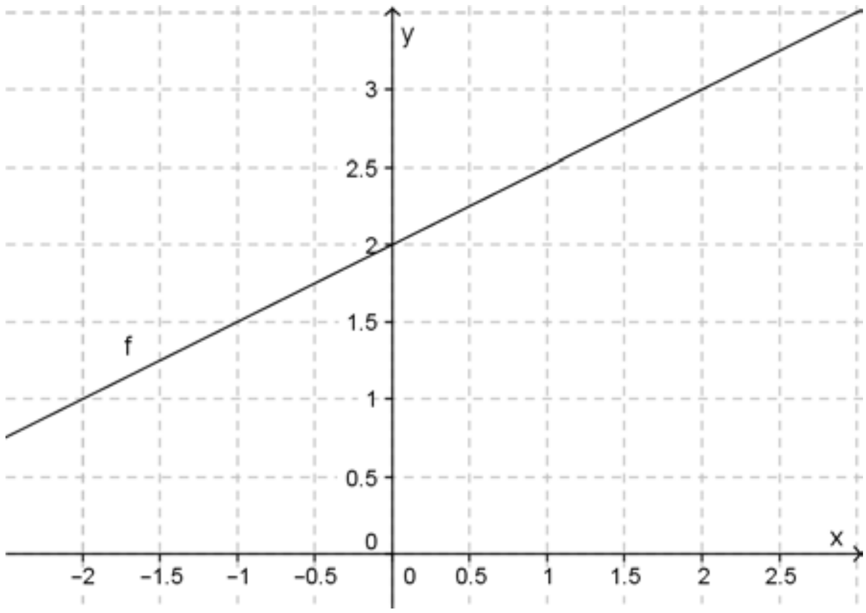
Aufgabennummer: 1_009	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

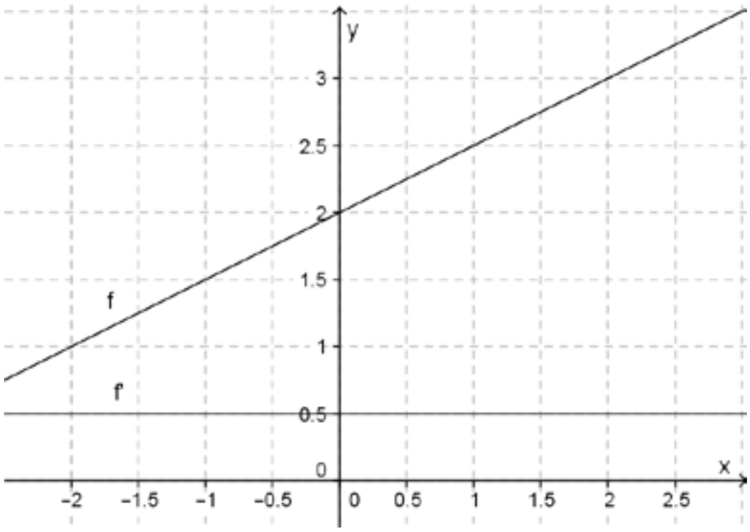
In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion *f* dargestellt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie die Ableitungsfunktion *f'* der Funktion *f* ein!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Graph von f' deutlich erkennbar eine konstante Funktion mit der Funktionsgleichung $f'(x) = 0{,}5$ ist. Die Funktionsgleichung der 1. Ableitung muss nicht angegeben werden.

Aussagen zum Integral

Aufgabennummer: 1_030	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Nachstehend werden Aussagen zu Funktionen und deren Stammfunktionen angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.	☐
Die Stammfunktion einer Summe von zwei Funktionen f und g ist (abgesehen von Integrationskonstanten) gleich der Summe der Stammfunktionen von f und g.	☐
f ist immer eine Stammfunktion von f'.	☐
Wenn $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$, dann ist F eine Stammfunktion von f.	☐
Für beliebige Funktionen f und g gilt: $\int [f(x) \cdot g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.	☐

Lösungsweg

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.	☒
Die Stammfunktion einer Summe von zwei Funktionen f und g ist (abgesehen von Integrationskonstanten) gleich der Summe der Stammfunktionen von f und g.	☒
f ist immer eine Stammfunktion von f'.	☒
Wenn $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$, dann ist F eine Stammfunktion von f.	☒
Für beliebige Funktionen f und g gilt: $\int [f(x) \cdot g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Stammfunktion

Aufgabennummer: 1_032	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Es gilt die Aussage:
„Besitzt eine Funktion f eine Stammfunktion, so besitzt sie sogar unendlich viele. Ist nämlich F eine Stammfunktion von f, so ist für jede beliebige reelle Zahl c auch die durch $G(x) = F(x) + c$ definierte Funktion G eine Stammfunktion von f."
(Quelle: Wikipedia)

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Ist die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f, dann gilt ___①___.
Gilt zudem ___②___, dann ist auch die Funktion G eine Stammfunktion von f.

①	
$F(x) = f(x)$	☐
$F(x) = f'(x)$	☐
$F'(x) = f(x)$	☑

②	
$G'(x) = F'(x) = f(x)$	☑
$G(x) = F(x) = f'(x)$	☐
$G'(x) = F(x) = f'(x)$	☐

Lösungsweg

①	
$F(x) = f(x)$	
$F(x) = f'(x)$	
$F'(x) = f(x)$	☒

②	
$G'(x) = F'(x) = f(x)$	☒
$G(x) = F(x) = f'(x)$	
$G'(x) = F(x) = f'(x)$	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Ausdrücke angekreuzt sind.

Funktion und Stammfunktion

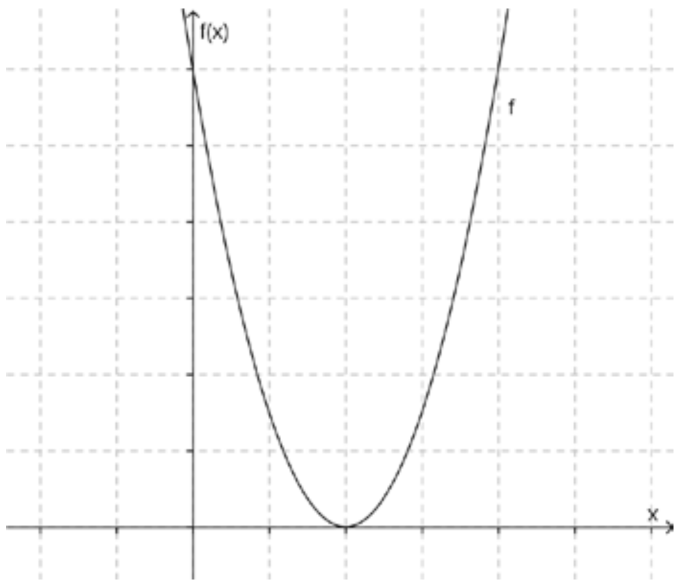
Aufgabennummer: 1_008	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

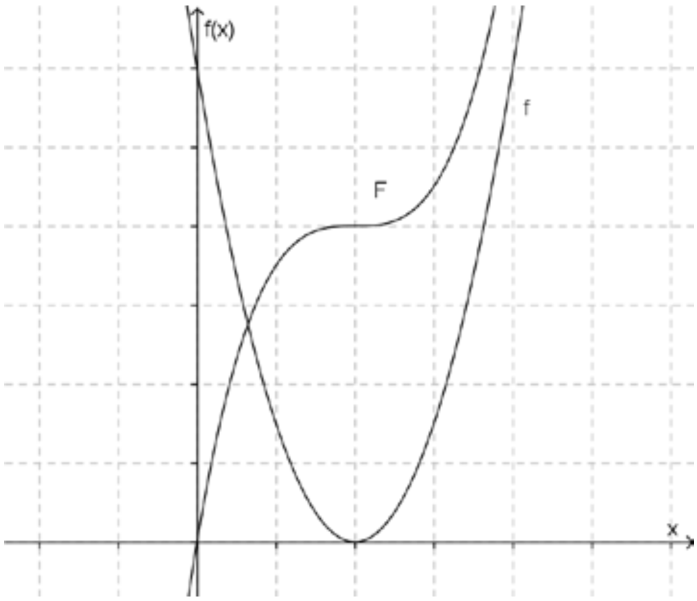
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f*.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer Stammfunktion *F* der Funktion *f* in die Abbildung ein!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

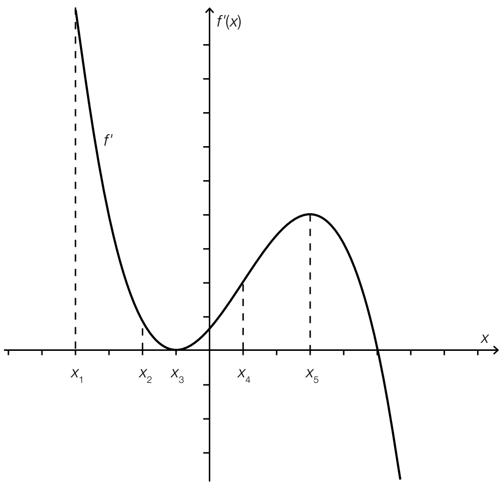
Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Graph der Funktion *F* im gesamten dargestellten Bereich monoton wachsend dargestellt wird und an der Stelle 2 einen deutlich erkennbaren Sattelpunkt aufweist.

Funktion – Ableitungsfunktion

Aufgabennummer: 1_033	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle x_5 eine horizontale Tangente.	☐
Es gibt eine Funktion f mit der Ableitungsfunktion f', deren Graph durch den Punkt $P = (0\|0)$ verläuft.	☑
Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f' ist im Intervall $[x_1; x_2]$ streng monoton fallend.	☐
Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f' ist im Intervall $[x_3; x_4]$ streng monoton steigend.	☑
Die Funktionswerte $f(x)$ jeder Funktion f mit der Ableitungsfunktion f' sind für $x \in [x_3; x_5]$ stets positiv.	☐

Lösungsweg

Es gibt eine Funktion f mit der Ableitungsfunktion f', deren Graph durch den Punkt $P = (0\|0)$ verläuft.	☒
Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f' ist im Intervall $[x_3; x_4]$ streng monoton steigend.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Gleiche Ableitungsfunktion

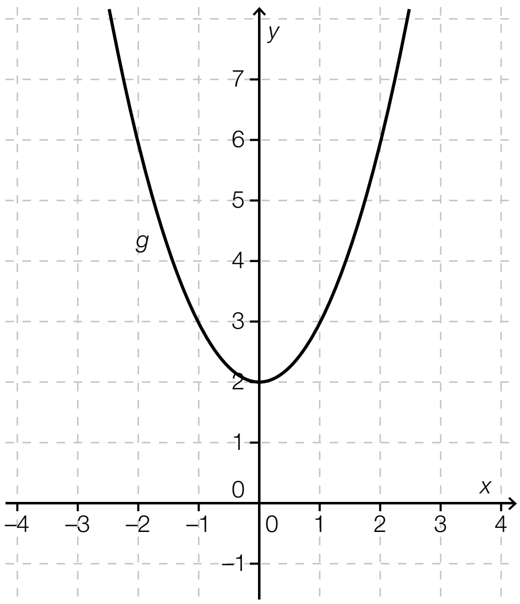
Aufgabennummer: 1_035	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

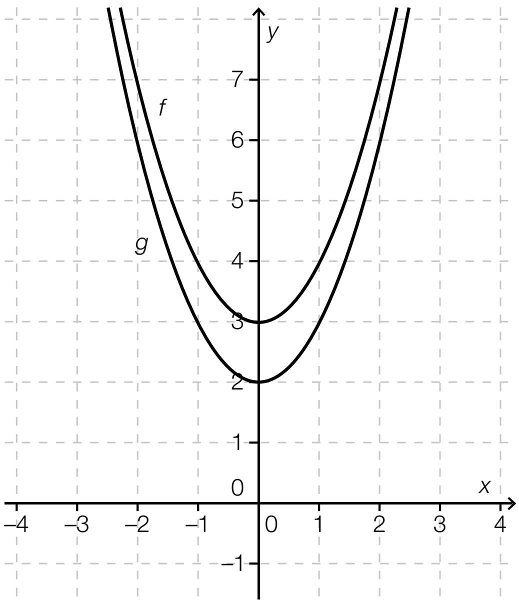
In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Funktion g dargestellt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im vorgegebenen Koordinatensystem den Graphen einer Funktion f ($f \neq g$) ein, die die gleiche Ableitungsfunktion wie die Funktion g hat!



Möglicher Lösungsweg



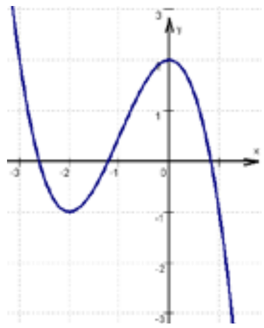
Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn der Graph von f erkennbar durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse aus dem Graphen von g entsteht.

Graph der ersten Ableitungsfunktion

Aufgabennummer: 1_077	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 3.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

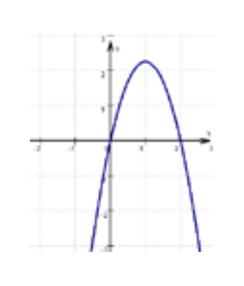
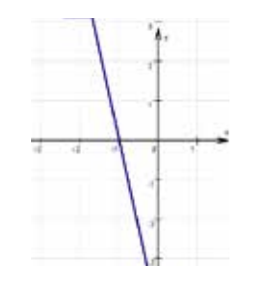
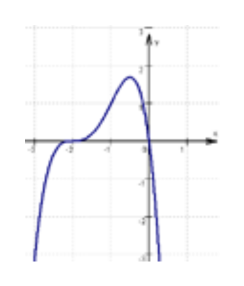
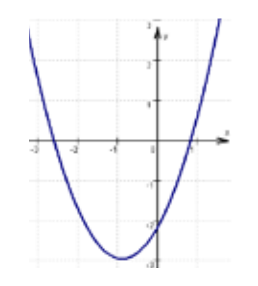
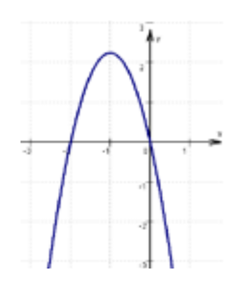
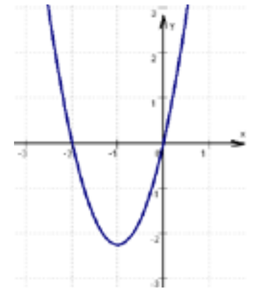
Gegeben ist der Graph der Funktion *f*.



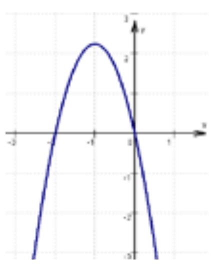
Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Abbildungen beschreibt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion der Funktion *f*?

Kreuzen Sie die zutreffende Abbildung an!

	☐		☐
	☐		☐
	☐		☐

Lösungsweg

	☒		

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die eine zutreffende Abbildung angekreuzt ist.

Lokale Extrema

Aufgabennummer: 1_013	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Von einer Polynomfunktion f dritten Grades sind die beiden lokalen Extrempunkte $E_1 = (0|-4)$ und $E_2 = (4|0)$ bekannt.

Aufgabenstellung:

Welche Bedingungen müssen in diesem Zusammenhang erfüllt sein? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f(0) = -4$	☐
$f'(0) = 0$	☐
$f(-4) = 0$	☐
$f'(4) = 0$	☐
$f''(0) = 0$	☐

Lösungsweg

$f(0) = -4$	☒
$f'(0) = 0$	☒
$f(-4) = 0$	
$f'(4) = 0$	☒
$f''(0) = 0$	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Ermittlung einer Funktionsgleichung

Aufgabennummer: 1_027	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2 + bx + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f verläuft durch den Ursprung. Die Steigung der Funktion im Ursprung hat den Wert null.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Werte der Parameter b und c und geben Sie die Gleichung der Funktion f an!

Möglicher Lösungsweg

Die Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung, daher gilt: $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.
Die Steigung der Funktion im Koordinatenursprung hat den Wert null, daher gilt:
$f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$.
Die gesuchte Funktionsgleichung lautet daher: $f(x) = x^2$.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn die Funktionsgleichung angegeben ist.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Eigenschaften einer Polynomfunktion

Aufgabennummer: 1_028	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt $A = (2|4)$ und berührt die x-Achse im Koordinatenursprung.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die für die Funktion f zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f(0) = 0$	☑
$f(4) = 2$	☐
$f(2) = 4$	☑
$f'(0) = 0$	☑
$f'(2) = 0$	☐

Lösungsweg

$f(0) = 0$	☒
$f(4) = 2$	
$f(2) = 4$	☒
$f'(0) = 0$	☒
$f'(2) = 0$	

Lösungsschlüssel

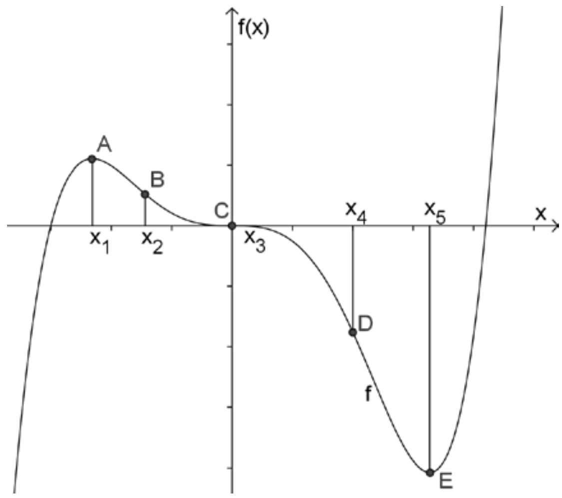
Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Eigenschaften von Funktionen

Aufgabennummer: 1_029	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f dargestellt. Der Punkt C ist ein Wendepunkt der Funktion f. Die Punkte A und E sind lokale Extrema.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f''(x_1) > 0$	☐
$f'(x_2) > 0$	☐
$f''(x_3) = 0$	☑
$f'(x_4) < 0$	☑
$f''(x_5) > 0$	☑

Lösungsweg

$f''(x_1) > 0$	
$f'(x_2) > 0$	
$f''(x_3) = 0$	☒
$f'(x_4) < 0$	☒
$f''(x_5) > 0$	☒

Lösungsschlüssel

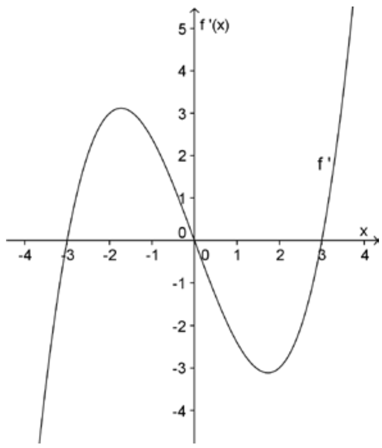
Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Ableitungsfunktion

Aufgabennummer: 1_031	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Funktion f hat im Intervall [–4; 4] drei lokale Extremstellen.	☑
Die Funktion f ist im Intervall (2; 3) streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 0] eine Wendestelle.	☑
Die Funktion f'' hat im Intervall [–3; 3] zwei Nullstellen.	☑
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum.	☐

Lösungsweg

Die Funktion f hat im Intervall $[-4; 4]$ drei lokale Extremstellen.	☒
Die Funktion f ist im Intervall $(2; 3)$ streng monoton steigend.	
Die Funktion f hat im Intervall $[-3; 0]$ eine Wendestelle.	☒
Die Funktion f'' hat im Intervall $[-3; 3]$ zwei Nullstellen.	☒
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum.	

Lösungsschlüssel

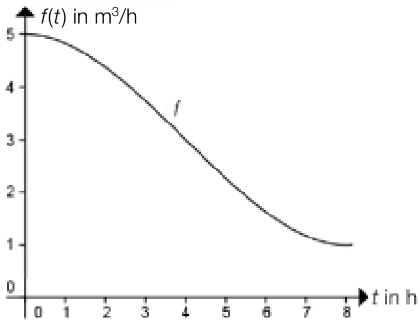
Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Wendestelle

Aufgabennummer: 1_034	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Ein Becken wird mit Wasser gefüllt. Die in das Becken zufließende Wassermenge, angegeben in m^3 pro Stunde, kann im Intervall [0; 8) durch die Funktion f beschrieben werden.
Die Funktion f hat an der Stelle $t = 4$ eine Wendestelle.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die für die Funktion f zutreffende(n) Aussage(n) an!

An der Stelle $t = 4$ geht die Linkskrümmung ($f''(t) > 0$) in eine Rechtskrümmung ($f''(t) < 0$) über.	☐
An der Stelle $t = 4$ geht die Rechtskrümmung ($f''(t) < 0$) in eine Linkskrümmung ($f''(t) > 0$) über.	☑
Der Wert der zweiten Ableitung der Funktion f an der Stelle 4 ist null.	☑
Es gilt $f''(t) > 0$ für $t > 4$.	☑
Für $t > 4$ sinkt die pro Stunde zufließende Wassermenge.	☑

Lösungsweg

An der Stelle $t = 4$ geht die Rechtskrümmung ($f''(t) < 0$) in eine Linkskrümmung ($f''(t) > 0$) über.	☒
Der Wert der zweiten Ableitung der Funktion f an der Stelle 4 ist null.	☒
Es gilt $f''(t) > 0$ für $t > 4$.	☒
Für $t > 4$ sinkt die pro Stunde zufließende Wassermenge.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Steigung einer Funktion

Aufgabennummer: 1_036	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 5$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Wert der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 2$!

Möglicher Lösungsweg

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 4$

$f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 13$

Der Wert der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 2$ ist 13.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Wert der Steigung (13) richtig berechnet ist.

Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wendepunkt

Aufgabennummer: 1_037	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 5$ sowie die Gleichung der dritten Ableitungsfunktion $f'''(x) = \frac{3}{2} \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f!

Möglicher Lösungsweg

$f''(x) = \frac{3}{2}x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-8) + \frac{3}{2} \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 5 = 1 \quad \Rightarrow$

Die Koordinaten des Wendepunktes lauten daher $W = (-2|1)$.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn beide Koordinaten des Wendepunktes korrekt angegeben sind.

Berührung zweier Funktionsgraphen

Aufgabennummer: 1_078	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Graphen zweier Funktionen f und g berühren einander im Punkt $P = (x_1 \mid y_1)$.

Für die Funktion f gilt: Die Tangente in P schließt mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein und hat einen positiven Anstieg.

Aufgabenstellung:

Welche der angeführten Aussagen folgen jedenfalls aus diesen Bedingungen?

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f(x_1) = g(x_1)$	☐
$f'(x_1) = g(x_1)$	☐
$f(x_1) = 1$	☐
$g'(x_1) = 1$	☐
$f'(x_1) = g'(x_1) = -1$	☐

Lösungsweg

$f(x_1) = g(x_1)$	☒
$g'(x_1) = 1$	☒

Lösungsschlüssel

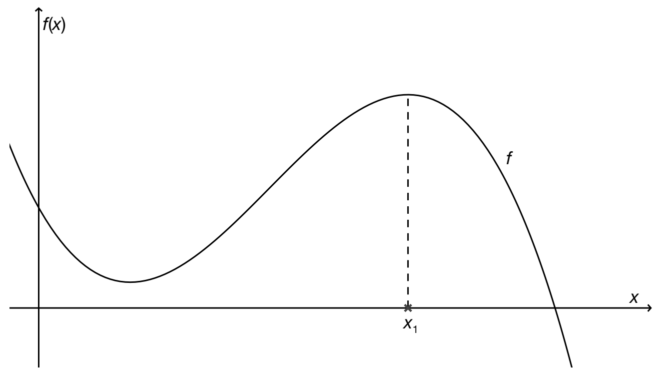
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Lokales Maximum*

Aufgabennummer: 1_146	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine Polynomfunktion f.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Wenn ______①______ ist und ______②______ ist, besitzt die gegebene Funktion f an der Stelle x_1 ein lokales Maximum.

①	
$f'(x_1) < 0$	☐
$f'(x_1) = 0$	☑
$f'(x_1) > 0$	☐

②	
$f''(x_1) < 0$	☑
$f''(x_1) = 0$	☐
$f''(x_1) > 0$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

①	
$f'(x_1) = 0$	☒

②	
$f''(x_1) < 0$	☒

Lösungsschlüssel

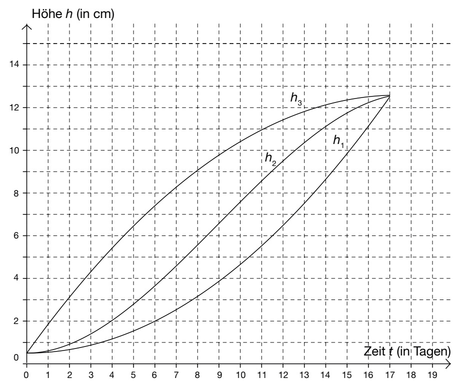
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken jeweils der richtige Satzteil angekreuzt ist.

Pflanzenwachstum*

Aufgabennummer: 1_147	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Höhe *h* (in cm) von drei verschiedenen Pflanzen in Abhängigkeit von der Zeit *t* (in Tagen) wurde über einen längeren Zeitraum beobachtet und mittels geeigneter Funktionen h_1 (für Pflanze 1), h_2 (für Pflanze 2) und h_3 (für Pflanze 3) modelliert. Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der drei Funktionen h_1, h_2 und h_3.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Graph der Funktion h_1 ist im Intervall [1; 5] links gekrümmt.	☑
Die Wachstumsgeschwindigkeit von Pflanze 1 nimmt im Intervall [11; 13] ab.	☐
Während des Beobachtungszeitraums [0; 17] nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit von Pflanze 2 ständig zu.	☑
Für alle Werte $t \in [0; 17]$ gilt $h_3''(t) \leq 0$.	☑
Für alle Werte $t \in [3; 8]$ gilt: $h_1'(t) < 0$.	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

Der Graph der Funktion h_1 ist im Intervall [1; 5] links gekrümmt.	☒
Für alle Werte $t \in [0; 17]$ gilt $h_3''(t) \leq 0$.	☒

Lösungsschlüssel

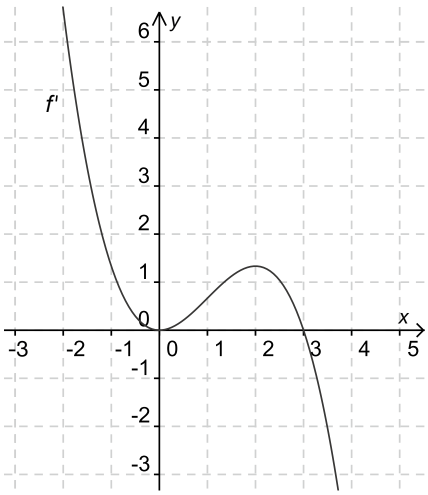
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Funktionseigenschaften*

Aufgabennummer: 1_149	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ einen lokalen Hochpunkt.	☑
Die Funktion f ist im Intervall $[2; 5]$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.	☑
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine lokale Extremstelle.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-2; 0]$ links gekrümmt.	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ einen lokalen Hochpunkt.	☒
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Polynomfunktion – Funktionsuntersuchung*

Aufgabennummer: 1_150	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit den Parametern $a \neq 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Die Funktion f hat einen Hochpunkt im Punkt $H = (2|2)$ und einen Wendepunkt an der Stelle $x_2 = -1$. An der Stelle $x_3 = 3$ hat die Steigung der Funktion den Wert –9.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f'(3) = -9$	☑
$f(2) = 0$	☐
$f''(-1) = 0$	☑
$f'(2) = 0$	☑
$f''(2) = 0$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$f'(3) = -9$	☒
$f''(-1) = 0$	☒
$f'(2) = 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Monotonie*

Aufgabennummer: 1_154	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die Funktion f ist im Intervall [2; 3] ___①___, weil ___②___.

①	
streng monoton fallend	☐
konstant	☐
streng monoton steigend	☑

②	
für alle $x \in [2; 3]$ $f''(x) > 0$ gilt	☐
für alle $x \in [2; 3]$ $f'(x) > 0$ gilt	☑
es ein $x \in [2; 3]$ mit $f'(x) = 0$ gibt	☐

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

①	
streng monoton steigend	☒

②	
für alle $x \in [2; 3]$ $f'(x) > 0$ gilt	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken jeweils der richtige Satzteil angekreuzt ist.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Unbestimmtes Integral

Aufgabennummer: 1_038	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind Aussagen über die Lösung eines unbestimmten Integrals. Nur eine Rechnung ist richtig. Die Integrationskonstante wird in allen Fällen mit $c = 0$ angenommen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die korrekte Rechnung an!

$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 5)^2$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 5x$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 15)^2$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3 \cdot (x^2 + 5x)$	☑
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 15$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 6x^2 + 15x$	☐

Lösungsweg

$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 5)^2$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 5x$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 15)^2$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3 \cdot (x^2 + 5x)$	☒
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 15$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 6x^2 + 15x$	☐

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn ausschließlich die zutreffende Aussage angekreuzt ist.

Bestimmte Integrale

Aufgabennummer: 1_060	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 4.3

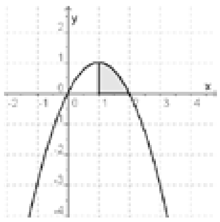
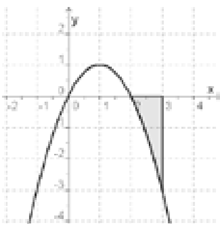
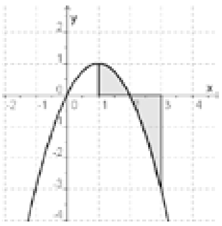
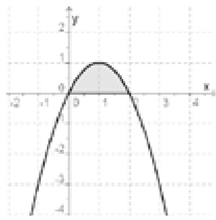
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x$.

Die nachstehende Tabelle zeigt Graphen der Funktion mit unterschiedlich schraffierten Flächenstücken.

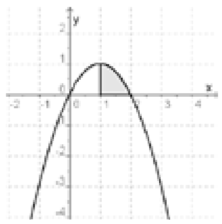
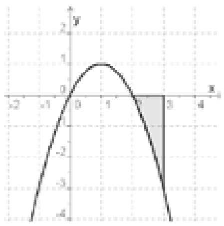
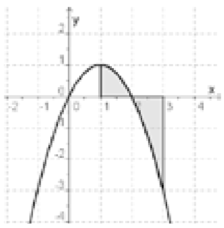
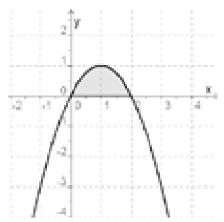
Aufgabenstellung:

Beurteilen Sie, ob die nachstehend angeführten Integrale den Flächeninhalt einer der markierten Flächen ergeben, und ordnen Sie entsprechend zu!

	f
	e
	
	

A	$2 \cdot \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
B	$\int_1^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
C	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x + \left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x \right\rvert$
D	$\int_0^1 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x - \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
E	$\left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x \right\rvert$
F	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$

Lösungsweg

	F
	E
	C
	A

A	$2 \cdot \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
B	$\int_1^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
C	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x + \left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x \right\rvert$
D	$\int_0^1 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x - \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
E	$\left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x \right\rvert$
F	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$

Lösungsschlüssel

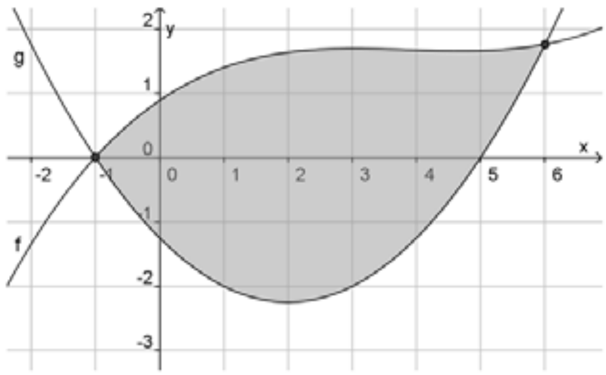
Die Aufgabe ist nur dann als richtig zu werten, wenn alle Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Fläche zwischen zwei Kurven

Aufgabennummer: 1_095	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Funktionsgraphen von *f* und *g* schließen ein gemeinsames Flächenstück ein.



Aufgabenstellung:

Mit welchen der nachstehenden Berechnungsvorschriften kann man den Flächeninhalt des gekennzeichneten Flächenstücks ermitteln?

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Berechnungsvorschriften an!

$\int_{-1}^{6} [g(x) - f(x)]dx$	☐
$\int_{-1}^{6} [f(x) - g(x)]dx$	☑
$\int_{-1}^{6} f(x)dx + \int_{5}^{6} g(x)dx - \int_{-1}^{5} g(x)dx$	☐
$\int_{-1}^{6} f(x)dx + \int_{-1}^{6} g(x)dx$	☐
$\int_{-1}^{6} f(x)dx - \int_{5}^{6} g(x)dx + \left\vert\int_{-1}^{5} g(x)dx\right\vert$	☑

Lösung

$\int_{-1}^{6} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$	☒
$\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x - \int_{5}^{6} g(x)\mathrm{d}x + \left\lvert \int_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x \right\rvert$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Begrenzung einer Fläche

Aufgabennummer: 1_096	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Inhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion $f: x \to x^2$, der positiven x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) eingeschlossen wird, beträgt 72 Flächeneinheiten.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Wert a!

Möglicher Lösungsweg

$72 = \int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3} \;\Rightarrow\; a^3 = 216 \;\Rightarrow\; a = 6$

Lösungsschlüssel

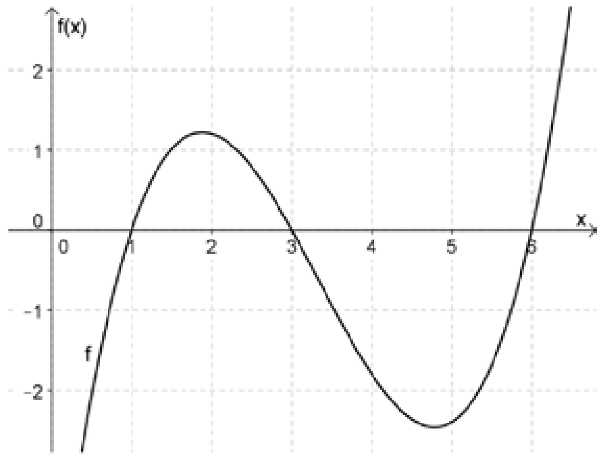
Ein Rechenweg muss erkennbar sein. Die Aufgabe ist als richtig zu werten, wenn der Ansatz $72 = \int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x$ korrekt ist und richtig integriert wurde.

Aussagen über bestimmte Integrale

Aufgabennummer: 1_113	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die stetige reelle Funktion f mit dem abgebildeten Graphen hat Nullstellen bei $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 6$.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen ist/sind zutreffend?
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x < 2$	☑
$\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☑
$\left\| \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x \right\| < 6$	☑
$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x > 0$	☐
$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x > 0$ und $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☑

Lösungsweg

$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x < 2$	☒
$\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☒
$\lvert \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x \rvert < 6$	☒
$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x > 0$ und $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

4. Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)*

WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

WS 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können

WS 1.3 Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können

WS 1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können

WS 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können

WS 2.2 Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können

WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können

WS 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können

WS 3.1 Die Begriffe *Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert* und *Standardabweichung* verständig deuten und einsetzen können

WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen

WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann

WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können

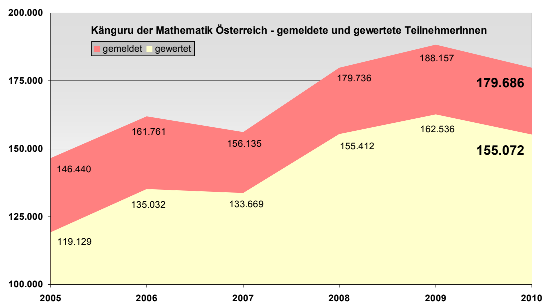
WS 4.1 Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können

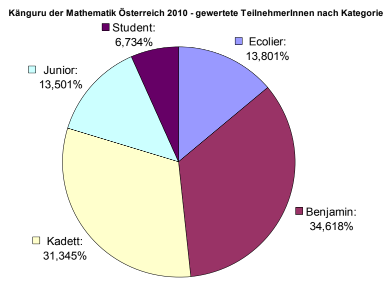
Känguru

Aufgabennummer: 1_067	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die folgenden Grafiken enthalten Daten über die Teilnahme am Wettbewerb *Känguru der Mathematik* in Österreich seit 2005.





Quelle: http://kaenguru.diefenbach.at/

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Anzahl der österreichischen Volksschüler/innen (Teilnehmer/innen der Kategorie Ecolier: 3. und 4. Schulstufe), die im Jahr 2010 tatsächlich gewertet wurden!

Möglicher Lösungsweg

13,801 % von 155 072: 155 072 · 0,13801 = 21 401,49 $\Rightarrow$ ca. 21 400 Schüler/innen

Lösungsschlüssel

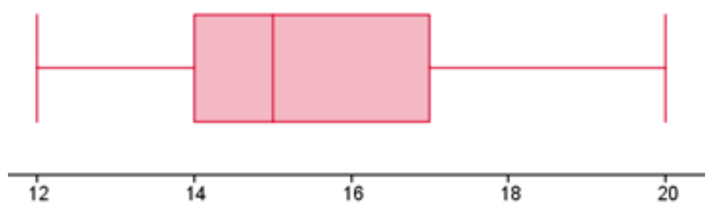
Werte aus dem Intervall [21 400; 21 402] sind als richtig zu werten.

Studiendauer

Aufgabennummer: 1_110	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Das nachstehende Kastenschaubild (Boxplot) zeigt die Studiendauer in Semestern für eine technische Studienrichtung.



Aufgabenstellung:

Welche Aussagen können Sie diesem Kastenschaubild entnehmen?
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Spannweite beträgt 12 Semester.	☐
25 % der Studierenden studieren höchstens 14 Semester lang.	☐
¼ der Studierenden benötigt für den Abschluss des Studiums mindestens 17 Semester.	☐
Mindestens 50 % der Studierenden benötigen für den Abschluss des Studiums zwischen 15 und 17 Semestern.	☐
Es gibt Studierende, die ihr Studium erst nach 10 Jahren beenden.	☐

Lösungsweg

25 % der Studierenden studieren höchstens 14 Semester lang.	☒
¼ der Studierenden benötigt für den Abschluss des Studiums mindestens 17 Semester.	☒
Es gibt Studierende, die ihr Studium erst nach 10 Jahren beenden.	☒

Lösungsschlüssel

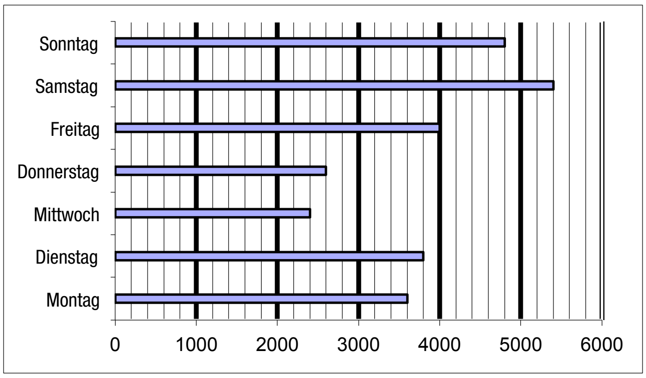
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Tagesumsätze

Aufgabennummer: 1_112	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Tagesumsätze (in €) eines Restaurants für eine bestimmte Woche sind im folgenden Diagramm angegeben:



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den durchschnittlichen Tagesumsatz für diese Woche!

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{4\,800 + 5\,400 + 4\,000 + 2\,600 + 2\,400 + 3\,800 + 3\,600}{7} = 3\,800$$

Der durchschnittliche Tagesumsatz beträgt € 3.800.

Lösungsschlüssel

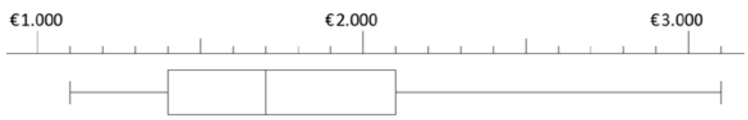
Die Aufgabe ist nur dann als richtig zu werten, wenn alle Werte korrekt abgelesen wurden und das Ergebnis richtig ist.

Boxplot*

Aufgabennummer: 1_159	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Nettogehälter von 44 Angestellten einer Firmenabteilung werden durch folgendes Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt:



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

22 Angestellte verdienen mehr als € 2.400.	☐
Drei Viertel der Angestellten verdienen € 2.100 oder mehr.	☐
Ein Viertel aller Angestellten verdient € 1.400 oder weniger.	☐
Es gibt Angestellte, die mehr als € 3.300 verdienen.	☐
Das Nettogehalt der Hälfte aller Angestellten liegt im Bereich [€ 1.400; € 2.100].	☐

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

Ein Viertel aller Angestellten verdient € 1.400 oder weniger.	☒
Das Nettogehalt der Hälfte aller Angestellten liegt im Bereich [€ 1.400; € 2.100].	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Histogramm erstellen

Aufgabennummer: 1_024	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.2

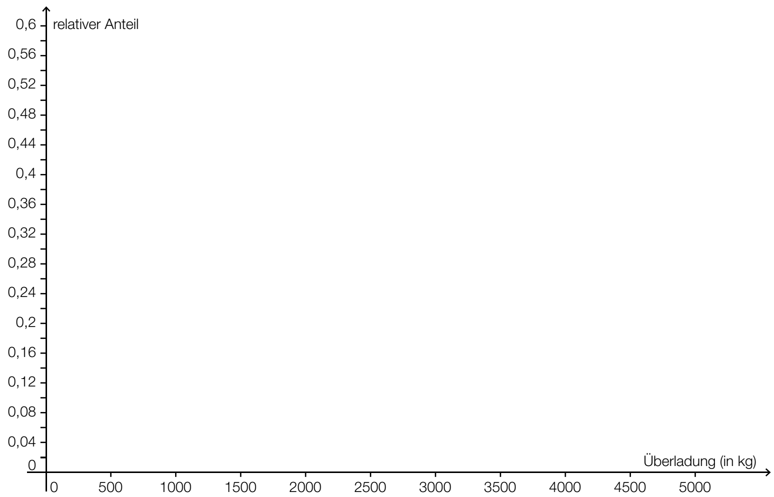
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Bei einer LKW-Kontrolle wurde bei 500 Fahrzeugen eine Überladung festgestellt. Zur Festlegung des Strafrahmens wurde die Überladung der einzelnen Fahrzeuge in der folgenden Tabelle festgehalten.

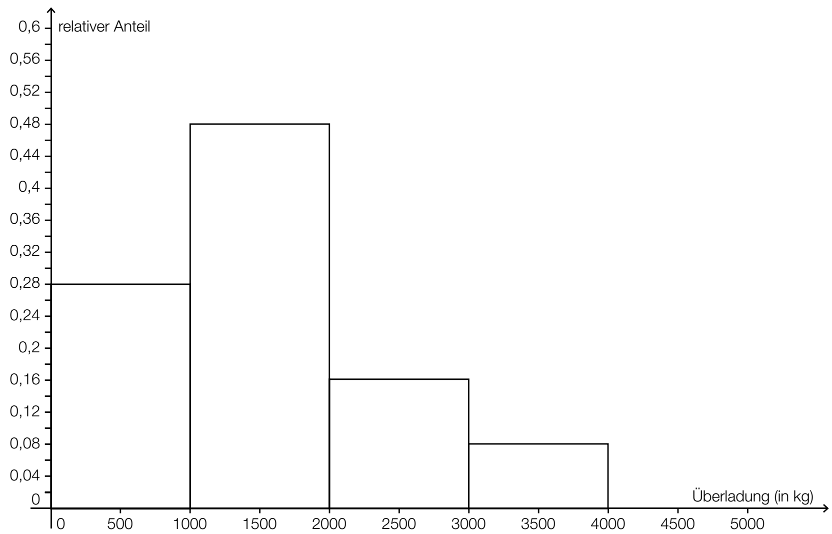
Überladung (in kg)		Anzahl der LKW
von	bis	
	< 1 000	140
1 000	< 2 000	240
2 000	< 3 000	80
3 000	< 4 000	40

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie ein Histogramm der Daten im vorgegebenen Koordinatensystem!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn das Histogramm korrekt in das Koordinatensystem eingezeichnet wurde.

Boxplots zuordnen

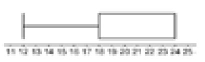
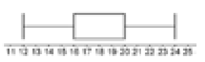
Aufgabennummer: 1_049	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 1.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Tankstellenkette hat in den Shops von Filialen die Umsatzzahlen eines Tiefkühlproduktes jeweils über einen Zeitraum von 15 Wochen beobachtet und der Größe nach festgehalten.

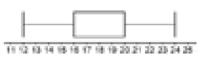
Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den angegebenen Boxplots die entsprechenden Filial-Umsatzzahlen zu!

A	Umsatz Filiale 1	12	12	12	12	13	15	17	17	17	20	20	24	24	24	24
B	Umsatz Filiale 2	12	13	13	15	15	18	18	20	20	20	22	22	24	24	26
C	Umsatz Filiale 3	12	14	14	16	16	17	18	18	18	22	22	23	23	23	24
D	Umsatz Filiale 4	12	16	18	18	18	18	19	24	24	24	24	24	24	24	24
E	Umsatz Filiale 5	12	12	12	12	18	18	18	18	18	23	23	23	23	23	24
F	Umsatz Filiale 6	12	14	14	16	16	18	18	20	20	20	20	20	24	24	24

Lösungsweg

	C
	A
	D
	F

A	Umsatz Filiale 1	12	12	12	12	13	15	17	17	17	20	20	24	24	24	24
B	Umsatz Filiale 2	12	13	13	15	15	18	18	20	20	20	22	22	24	24	26
C	Umsatz Filiale 3	12	14	14	16	16	17	18	18	18	22	22	23	23	23	24
D	Umsatz Filiale 4	12	16	18	18	18	18	19	24	24	24	24	24	24	24	24
E	Umsatz Filiale 5	12	12	12	12	18	18	18	18	18	23	23	23	23	23	24
F	Umsatz Filiale 6	12	14	14	16	16	18	18	20	20	20	20	20	24	24	24

Lösungsschlüssel

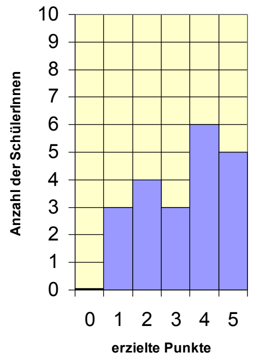
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die vier Zuordnungen richtig erfolgt sind.

Testergebnis

Aufgabennummer: 1_068	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 1.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

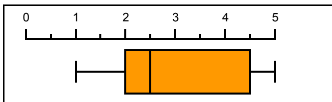
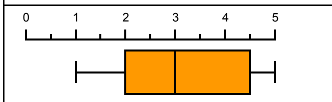
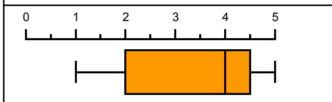
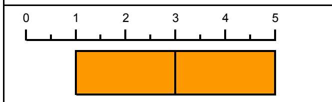
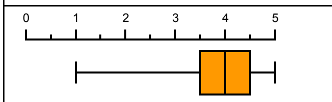
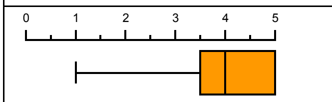
Ein Test enthält fünf Aufgaben, die jeweils nur mit einem Punkt (alles richtig) oder keinem Punkt (nicht alles richtig) bewertet werden. Die nebenstehende Grafik zeigt das Ergebnis dieses Tests für eine bestimmte Klasse.



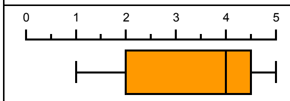
Aufgabenstellung:

Welches der folgenden Kastenschaubilder (Boxplots) stellt die Ergebnisse des Tests richtig dar?

Kreuzen Sie das zutreffende Kastenschaubild an!

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Lösungsweg

	☒

Lösungsschlüssel

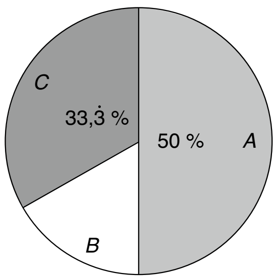
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Säulendiagramm*

Aufgabennummer: 1_124	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.2

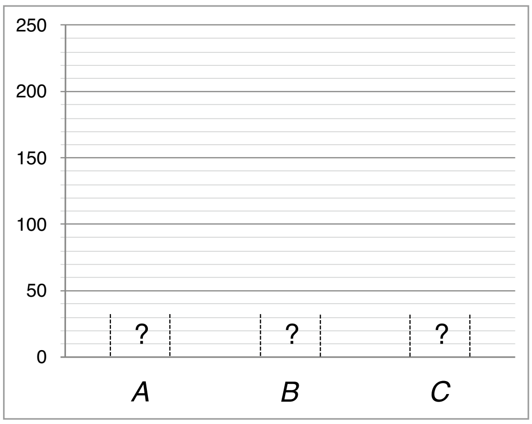
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Bei einer Umfrage werden die 480 Schüler/innen einer Schule befragt, mit welchem Verkehrsmittel sie zur Schule kommen. Die Antwortmöglichkeiten waren „öffentliche Verkehrsmittel" (*A*), „mit dem Auto / von den Eltern gebracht" (*B*) sowie „mit dem Rad / zu Fuß" (*C*). Folgendes Kreisdiagramm zeigt die Ergebnisse:



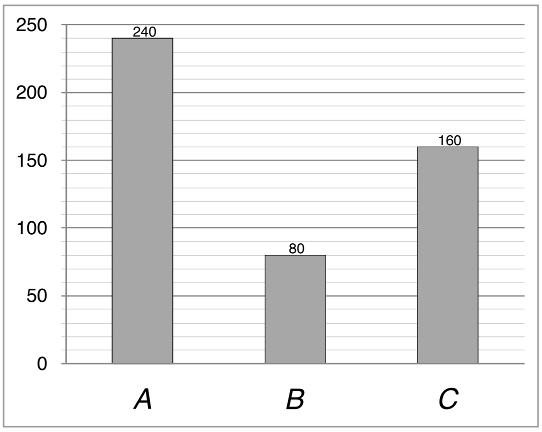
Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie das folgende Säulendiagramm anhand der Werte aus dem obenstehenden Kreisdiagramm!



* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn alle drei Säulen die richtige Höhe aufweisen.

Brotverbrauch*

Aufgabennummer: 1_126	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In einer Bäckerei wurden über einen Zeitraum von 36 Wochen Aufzeichnungen über den Tagesbedarf einer Brotsorte an einem bestimmten Wochentag gemacht und in einer geordneten Liste festgehalten:

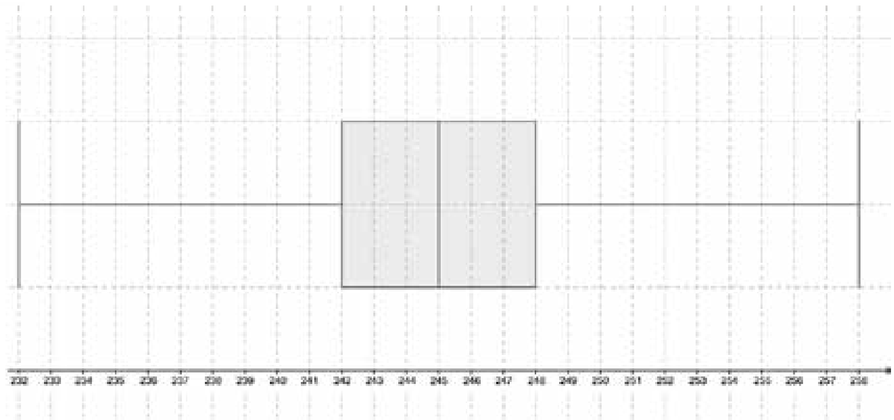
232, 234, 235, 237, 237, 237, 239, 242, 242, 242, 243, 244, 244, 244, 244, 245, 245, 245, 245, 245, 246, 246, 246, 246, 247, 247, 248, 248, 249, 250, 250, 251, 253, 255, 258, 258

Aufgabenstellung:

Stellen Sie diese Daten in einem Boxplot dar!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn alle fünf charakteristischen Werte (Minimum, Q1, Median, Q3, Maximum) richtig eingezeichnet sind.

Boxplot zeichnen

Aufgabennummer: 1_025	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.3

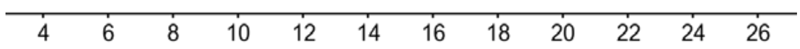
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Tankstellenkette hat in den Shops von Filialen die Umsatzzahlen eines Tiefkühlprodukts jeweils über einen Zeitraum von 15 Wochen beobachtet und der Größe nach festgehalten.

Umsatzzahlen	12	12	12	12	18	18	18	18	18	23	23	23	23	23	24

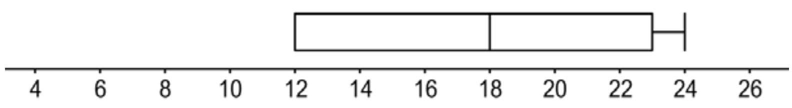
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den entsprechenden Boxplot und tragen Sie die angegebenen Kennzahlen unter der Grafik ein!



Minimum	erstes Quartil	Median	drittes Quartil	Maximum
$m =$	$Q_1 =$	$med =$	$Q_3 =$	$M =$

Lösungsweg



Minimum	erstes Quartil	Median	drittes Quartil	Maximum
$m = 12$	$Q_1 = 12$	$med = 18$	$Q_3 = 23$	$M = 24$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Boxplot korrekt eingezeichnet ist und alle Kennzahlen korrekt angegeben sind.

Geldausgaben

Aufgabennummer: 1_079	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Karin hat das arithmetische Mittel ihrer monatlichen Ausgaben im Zeitraum Jänner bis (einschließlich) Oktober mit € 25 errechnet. Im November gibt sie € 35 und im Dezember € 51 aus.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel für die monatlichen Ausgaben in diesem Jahr!

Möglicher Lösungsweg

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 10 + 35 + 51}{12}$$

$\bar{x} = 28$

Die monatlichen Ausgaben betragen durchschnittlich € 28.

Lösungsschlüssel

Es muss der Zahlenwert 28 korrekt angegeben sein.

Mittelwert einfacher Datensätze*

Aufgabennummer: 1_125	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die unten stehende Tabelle bietet eine Übersicht über die Zahl der Einbürgerungen in Österreich und in den jeweiligen Bundesländern im Jahr 2010 nach Quartalen.
Ein Quartal fasst dabei jeweils den Zeitraum von drei Monaten zusammen. Das 1. Quartal ist der Zeitraum von Jänner bis März, das 2. Quartal der Zeitraum von April bis Juni usw.

Quartal	Österreich	Bundesland des Wohnortes								
		Burgenland	Kärnten	Niederösterreich	Oberösterreich	Salzburg	Steiermark	Tirol	Vorarlberg	Wien
1. Quartal 2010	1 142	1	119	87	216	112	101	131	97	278
2. Quartal 2010	1 605	80	120	277	254	148	106	138	125	357
3. Quartal 2010	1 532	4	119	187	231	98	121	122	61	589
4. Quartal 2010	1 856	53	113	248	294	158	102	183	184	521

Quelle: STATISTIK AUSTRIA

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden korrekten Berechnungsmöglichkeiten für den Mittelwert der Einbürgerungen im Bundesland Kärnten pro Quartal im Jahr 2010 an!

$\overline{m} = (1\,142 + 1\,605 + 1\,532 + 1\,856) : 9$	☐
$\overline{m} = \frac{2 \cdot 119 + 113 + 120}{4}$	☐
$\overline{m} = 119 + 120 + 119 + 113 : 4$	☐
$\overline{m} = \frac{1}{12} \cdot (113 + 2 \cdot 119 + 120) \cdot 3$	☐
$\overline{m} = \frac{113 + 119 + 119 + 120}{12} \cdot 4$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Lösungsweg

$\overline{m} = \frac{2 \cdot 119 + 113 + 120}{4}$	☒
$\overline{m} = \frac{1}{12} \cdot (113 + 2 \cdot 119 + 120) \cdot 3$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Datenreihe*

Aufgabennummer: 1_127	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ der Datenreihe $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ist $\bar{x} = 20$. Die Standardabweichung σ der Datenreihe ist $\sigma = 5$.

Die Datenreihe wird um die beiden Werte $x_{11} = 19$ und $x_{12} = 21$ ergänzt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Das Maximum der neuen Datenreihe $x_1, \dots, x_{12}$ ist größer als das Maximum der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \dots, x_{10}$.	☐
Die Spannweite der neuen Datenreihe $x_1, \dots, x_{12}$ ist um 2 größer als die Spannweite der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \dots, x_{10}$.	☐
Der Median der neuen Datenreihe $x_1, \dots, x_{12}$ stimmt immer mit dem Median der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \dots, x_{10}$ überein.	☐
Die Standardabweichung der neuen Datenreihe $x_1, \dots, x_{12}$ ist kleiner als die Standardabweichung der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \dots, x_{10}$.	☐
Der arithmetische Mittelwert der neuen Datenreihe $x_1, \dots, x_{12}$ stimmt mit dem arithmetischen Mittelwert der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \dots, x_{10}$ überein.	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Lösungsweg

Die Standardabweichung der neuen Datenreihe $x_1, \dots, x_{12}$ ist kleiner als die Standardabweichung der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \dots, x_{10}$.	☒
Der arithmetische Mittelwert der neuen Datenreihe $x_1, \dots, x_{12}$ stimmt mit dem arithmetischen Mittelwert der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \dots, x_{10}$ überein.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Arithmetisches Mittel einer Datenreihe*

Aufgabennummer: 1_128	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für das arithmetische Mittel einer Datenreihe $x_1, x_2, \ldots, x_{24}$ gilt: $\overline{x} = 115$.

Die Standardabweichung der Datenreihe ist $s_x = 12$. Die Werte einer zweiten Datenreihe $y_1, y_2, \ldots, y_{24}$ entstehen, indem man zu den Werten der ersten Datenreihe jeweils 8 addiert, also $y_1 = x_1 + 8$, $y_2 = x_2 + 8$ usw.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Mittelwert $\overline{y}$ und die Standardabweichung s_y der zweiten Datenreihe an!

$\overline{y}$ = ____

s_y = ____

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$\bar{y} = 123$

$s_y = 12$

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide Werte richtig angegeben sind.

Geordnete Urliste*

Aufgabennummer: 1_162	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

9 Kinder wurden dahingehend befragt, wie viele Stunden sie am Wochenende fernsehen. Die nachstehende Tabelle gibt ihre Antworten wieder.

Kind	Fernsehstunden
Fritz	2
Susi	2
Michael	3
Martin	3
Angelika	4
Paula	5
Max	5
Hubert	5
Lisa	8

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Median würde sich erhöhen, wenn Fritz um eine Stunde mehr fernsehen würde.	☐
Der Median ist kleiner als das arithmetische Mittel der Fernsehstunden.	☐
Die Spannweite der Fernsehstunden beträgt 3.	☐
Das arithmetische Mittel würde sich erhöhen, wenn Lisa anstelle von 8 Stunden 10 Stunden fernsehen würde.	☐
Der Modus ist 8.	☐

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

Der Median ist kleiner als das arithmetische Mittel der Fernsehstunden.	☒
Das arithmetische Mittel würde sich erhöhen, wenn Lisa anstelle von 8 Stunden 10 Stunden fernsehen würde.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Eigenschaften des arithmetischen Mittels*

Aufgabennummer: 1_140	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist das arithmetische Mittel $\bar{x}$ von Messwerten.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Eigenschaften treffen für das arithmetische Mittel zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

Das arithmetische Mittel teilt die geordnete Liste der Messwerte immer in eine untere und eine obere Teilliste mit jeweils gleich vielen Messwerten.	☐
Das arithmetische Mittel kann durch Ausreißer stark beeinflusst werden.	☐
Das arithmetische Mittel kann für alle Arten von Daten sinnvoll berechnet werden.	☐
Das arithmetische Mittel ist immer gleich einem der Messwerte.	☐
Multipliziert man das arithmetische Mittel mit der Anzahl der Messwerte, so erhält man immer die Summe aller Messwerte.	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

Das arithmetische Mittel kann durch Ausreißer stark beeinflusst werden.	☒
Multipliziert man das arithmetische Mittel mit der Anzahl der Messwerte, so erhält man immer die Summe aller Messwerte.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Würfelergebnisse

Aufgabennummer: 1_111	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: WS 2.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Zwei Spielwürfel (6 Seiten, beschriftet mit 1 bis 6 Augen) werden geworfen und die Augensumme wird ermittelt.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die Wahrscheinlichkeit, das Ereignis „Augensumme 6“ zu würfeln, ist ____①____ Wahrscheinlichkeit, das Ereignis „Augensumme 9“ zu würfeln, weil ____②____.

①	
größer als die	☐
kleiner als die	☐
gleich der	☐

②	
6 kleiner als 9 ist und das Ereignis „Augensumme 6“ somit seltener eintritt	☐
die Wahrscheinlichkeit beide Male $\frac{5}{36}$ beträgt	☐
es nur vier Möglichkeiten gibt, die Augensumme „9“ zu würfeln, aber fünf Möglichkeiten, die Augensumme „6“ zu würfeln	☐

Lösungsweg

①	
größer als die	☒

②	
es nur vier Möglichkeiten gibt, die Augensumme „9“ zu würfeln, aber fünf Möglichkeiten, die Augensumme „6“ zu würfeln	☒

Lösungsschlüssel

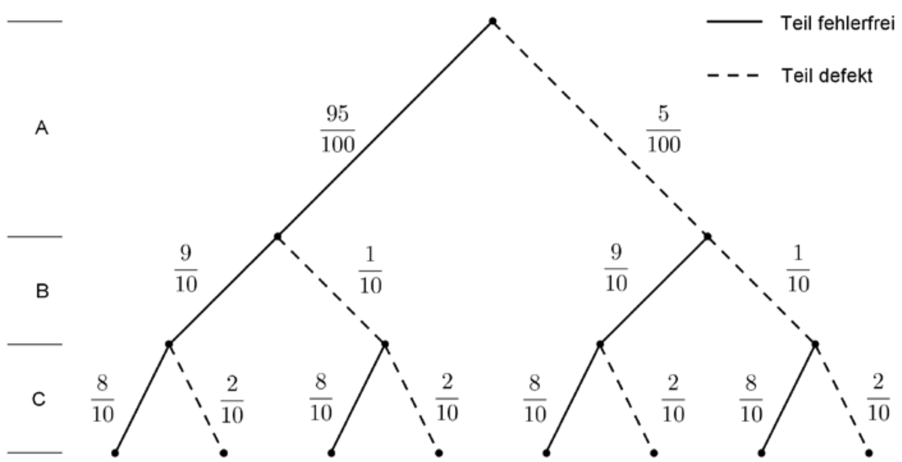
Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn für beide Lücken jeweils die zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Wahrscheinlichkeit eines Defekts

Aufgabennummer: 1_014	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Maschine besteht aus den drei Bauteilen A, B und C. Diese haben die im nachstehenden Modell eingetragenen, voneinander unabhängigen Defekthäufigkeiten. Eine Maschine ist defekt, wenn mindestens ein Bauteil defekt ist.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Maschine zwei oder mehr Bauteile defekt sind!

$P(X \geq 2)$ = ______________________________

Möglicher Lösungsweg

$$P(X \geq 2) = \frac{95}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{33}{1000} = 0{,}033$$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Wert der Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben ist.

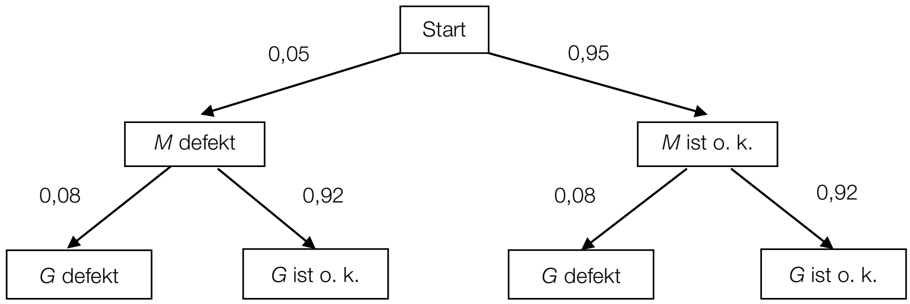
Kugelschreiber

Aufgabennummer: 1_051	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Ein Kugelschreiber besteht aus zwei Bauteilen, der Mine (M) und dem Gehäuse mit dem Mechanismus (G). Bei der Qualitätskontrolle werden die Kugelschreiber einzeln entnommen und auf ihre Funktionstüchtigkeit hin getestet. Ein Kugelschreiber gilt als defekt, wenn mindestens ein Bauteil fehlerhaft ist.

Im nachstehenden Baumdiagramm sind alle möglichen Fälle für defekte und nicht defekte Kugelschreiber aufgelistet.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Ereignissen E_1, E_2, E_3 bzw. E_4 die entsprechende Wahrscheinlichkeit p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 oder p_6 zu!

E_1: Eine Mine ist defekt und das Gehäuse ist in Ordnung.	
E_2: Ein Kugelschreiber ist defekt.	
E_3: Höchstens ein Teil ist defekt.	
E_4: Ein Kugelschreiber ist nicht defekt.	

A	$p_1 = 0{,}95 \cdot 0{,}92$
B	$p_2 = 0{,}05 \cdot 0{,}08 + 0{,}95 \cdot 0{,}08$
C	$p_3 = 0{,}05 + 0{,}92$
D	$p_4 = 0{,}05 + 0{,}95 \cdot 0{,}08$
E	$p_5 = 0{,}05 \cdot 0{,}92$
F	$p_6 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}08$

Lösungsweg

E_1: Eine Mine ist defekt und das Gehäuse ist in Ordnung.	E
E_2: Ein Kugelschreiber ist defekt.	D
E_3: Höchstens ein Teil ist defekt.	F
E_4: Ein Kugelschreiber ist nicht defekt.	A

A	$p_1 = 0{,}95 \cdot 0{,}92$
B	$p_2 = 0{,}05 \cdot 0{,}08 + 0{,}95 \cdot 0{,}08$
C	$p_3 = 0{,}05 + 0{,}92$
D	$p_4 = 0{,}05 + 0{,}95 \cdot 0{,}08$
E	$p_5 = 0{,}05 \cdot 0{,}92$
F	$p_6 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}08$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die vier Zuordnungen richtig erfolgt sind.

FSME-Infektion*

Aufgabennummer: 1_141	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Infizierte Zecken können durch einen Stich das FSME-Virus (Frühsommer-Meningo-enzephalitis) auf den Menschen übertragen. In einem Risikogebiet sind etwa 3 % der Zecken FSME-infiziert. Die FSME-Schutzimpfung schützt mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % vor einer FSME-Erkrankung.

Aufgabenstellung:

Eine geimpfte Person wird in diesem Risikogebiet von einer Zecke gestochen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person durch den Zeckenstich an FSME erkrankt!

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$0{,}03 \cdot 0{,}02 = 0{,}0006$

Die Wahrscheinlichkeit einer Erkrankung beträgt 0,06 %.

Lösungsschlüssel

Die Angabe der Wahrscheinlichkeit als Dezimalzahl oder als Bruch reicht aus.

Würfeln*

Aufgabennummer: 1_144	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Ein idealer sechsseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird einmal geworfen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Fragestellungen in der linken Spalte die passenden Wahrscheinlichkeiten in der rechten Spalte zu!

Fragestellung	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 4 gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl kleiner als 2 gewürfelt wird.	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 1 und kleiner als 6 gewürfelt wird?	

Wahrscheinlichkeit	
A	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{2}$
D	1
E	$\frac{5}{6}$
F	$\frac{2}{3}$

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

Fragestellung	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird?	C
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 4 gewürfelt wird?	A
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl kleiner als 2 gewürfelt wird.	B
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 1 und kleiner als 6 gewürfelt wird?	F

Wahrscheinlichkeit	
A	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{2}$
D	1
E	$\frac{5}{6}$
F	$\frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Aufgabennummer: 1_043	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich ☒ gewohnte Hilfsmittel möglich ☐ besondere Technologie erforderlich

Gustav kommt in der Nacht nach Hause und muss im Dunkeln die Haustüre aufsperren. An seinem ringförmigen Schlüsselbund hängen fünf gleiche Schlüsseltypen, von denen nur einer sperrt. Er beginnt die Schlüssel zufällig und nacheinander zu probieren. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl k der Schlüssel an, die er probiert, bis die Tür geöffnet ist.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie in der Tabelle die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ dieser Zufallsvariablen X!

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$					

$E(X) =$ ____________________

Möglicher Lösungsweg

Gleichwahrscheinlichkeit liegt vor, weil:

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$

Erwartungswert:

$$E(X) = \left(1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5}\right) = 3$$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die Tabelle korrekt ausgefüllt und der Erwartungswert richtig berechnet ist.

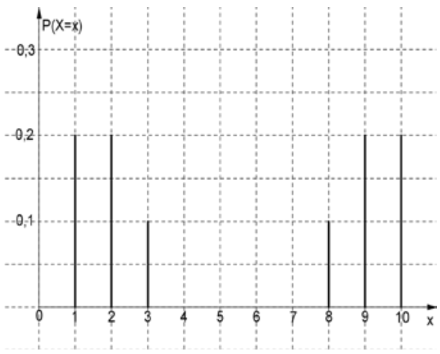
Testung

Aufgabennummer: 1_045	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.1

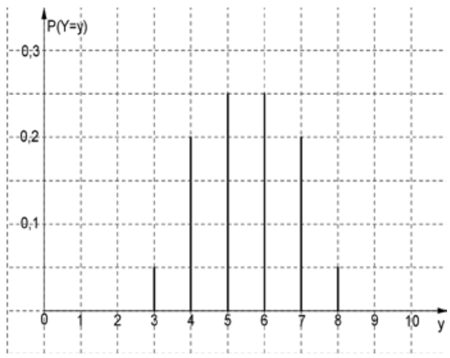
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Es werden zwei Tests T_X und T_Y, bei denen man jeweils maximal zehn Punkte erwerben kann, auf ihre Lösungshäufigkeit untersucht. Bei mehr als fünf Punkten gilt der jeweilige Test als bestanden. Die Zufallsvariablen X und Y beschreiben die Anzahl der erreichten Punkte. Die beiden untenstehenden Abbildungen zeigen jeweils die Verteilungen der beiden Variablen X und Y.

Test T_X



Test T_Y



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenigen zwei Aussagen an, die aus den gegebenen Informationen ablesbar sind!

Mit Test T_Y werden mehr Kandidatinnen/Kandidaten den Test bestehen als mit Test T_X.	☐
Beide Zufallsvariablen X und Y sind binomialverteilt.	☐
Die Erwartungswerte sind gleich: $E(X) = E(Y)$.	☐
Die Standardabweichungen sind gleich: $\sigma_X = \sigma_Y$.	☐
Der Test T_X unterscheidet besser zwischen Kandidatinnen/Kandidaten mit schlechteren und besseren Testergebnissen.	☐

Lösungsweg

Mit Test T_Y werden mehr Kandidatinnen/Kandidaten den Test bestehen als mit Test T_X.	
Beide Zufallsvariablen X und Y sind binomialverteilt.	
Die Erwartungswerte sind gleich: $E(X) = E(Y)$.	☒
Die Standardabweichungen sind gleich: $\sigma_X = \sigma_Y$.	
Der Test T_X unterscheidet besser zwischen Kandidatinnen/Kandidaten mit schlechteren und besseren Testergebnissen.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Bernoulli-Experiment

Aufgabennummer: 1_050	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Beim Realisieren eines Bernoulli-Experiments tritt Erfolg mit der Wahrscheinlichkeit p mit $0 < p < 1$ ein. Die Werte der binomialverteilten Zufallsvariablen X beschreiben die Anzahl der Erfolge beim n-maligen unabhängigen Wiederholen des Experiments. E bezeichnet den Erwartungswert, V die Varianz und σ die Standardabweichung.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für $n > 1$ zutreffenden Aussagen an!

$E(X) = \sqrt{n \cdot p}$	☐
$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$	☐
$P(X = 0) = 0$	☐
$P(X = 1) = p$	☐
$V(X) = \sigma^2$	☐

Lösungsweg

$E(X) = \sqrt{n \cdot p}$	
$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$	☒
$P(X = 0) = 0$	
$P(X = 1) = p$	
$V(X) = \sigma^2$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Erwartungswert*

Aufgabennummer: 1_148	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der nachstehenden Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X dargestellt.

a_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$	1	2	3	4
$P(X = a_i)$	0,1	0,3	0,5	0,1

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X!

$E(X)$ = ____

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg
$E(X) = 2{,}6$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn der Wert richtig angegeben ist.

Binomialverteilung

Aufgabennummer: 1_044	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit $n = 25$ und $p = 0{,}15$.
Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, sodass die Zufallsvariable X höchstens den Wert 2 annimmt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie den zutreffenden Term an!

$\binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$\binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$1 - \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$1 - \left[0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}\right]$	☐
$\binom{25}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{23}$	☐

Lösungsweg

$\binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☒
$\binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$1 - \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$1 - \left[0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}\right]$	
$\binom{25}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{23}$	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

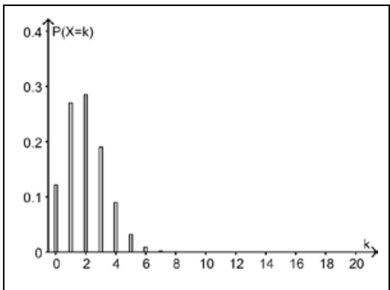
Graphen einer Binomialverteilung

Aufgabennummer: 1_046	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 3.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

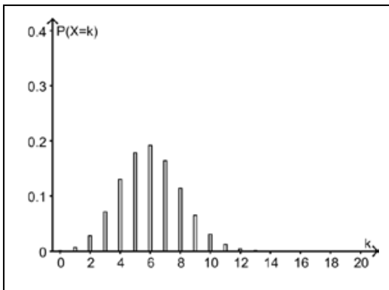
In den untenstehenden Grafiken sind Binomialverteilungen dargestellt.

Aufgabenstellung:

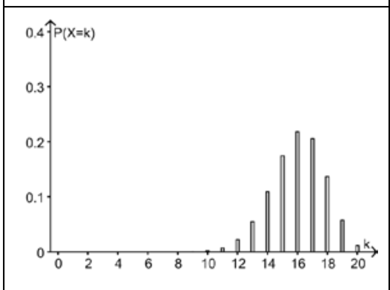
Kreuzen Sie diejenige Grafik an, die einer Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0,9$ zuzuordnen ist!



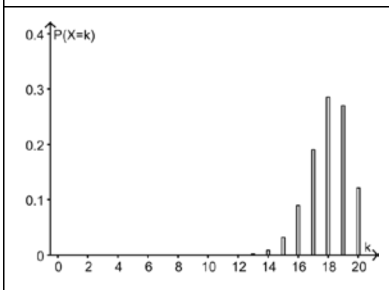
☐



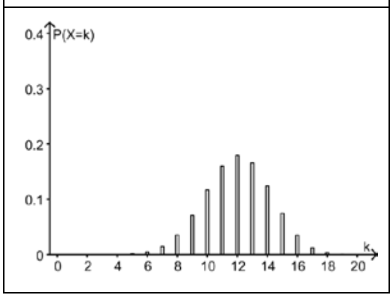
☐



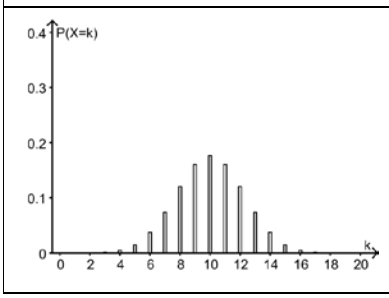
☐



☐

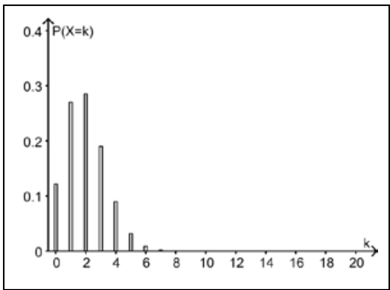


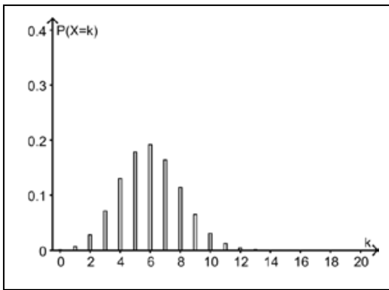
☐

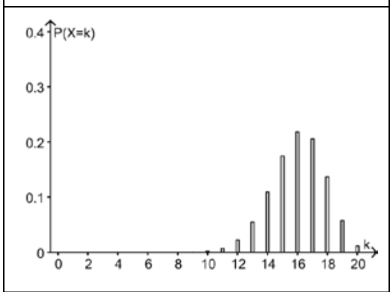


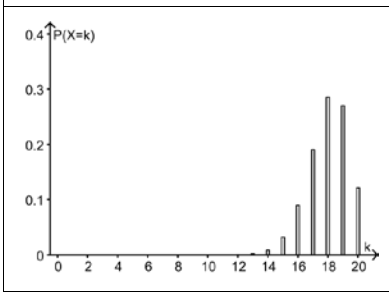
☐

Lösungsweg

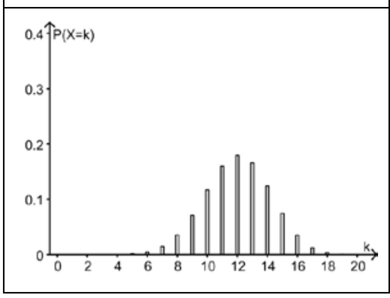


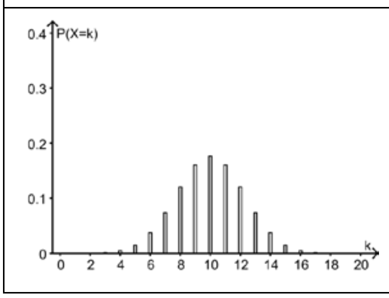






☒





Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Modellierung mithilfe einer Binomialverteilung

Aufgabennummer: 1_026	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Situation(en) an, die mithilfe der Binomialverteilung modelliert werden kann/können!

In der Kantine eines Betriebs essen 80 Personen. Am Montag werden ein vegetarisches Gericht und drei weitere Menüs angeboten. Erfahrungsgemäß wählt jede vierte Person das vegetarische Gericht. Es werden 20 vegetarische Gerichte vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese nicht ausreichen?	☐
Bei einer Lieferung von 20 Mobiltelefonen sind fünf defekt. Es werden drei Geräte gleichzeitig entnommen und getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens zwei davon defekt?	☐
In einer Klasse müssen die Schüler/innen bei der Überprüfung der Bildungsstandards auf einem anonymen Fragebogen ihr Geschlecht (m, w) ankreuzen. Die Wahrscheinlichkeit, das Ankreuzen des Geschlechts nicht durchzuführen, ist für Buben und Mädchen gleich. In der Klasse sind 16 Schülerinnen und 12 Schüler. Fünf Personen haben auf dem Fragebogen das Geschlecht nicht angekreuzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich drei Schüler unter den fünf Personen?	☐
Ein Großhändler erhält eine Lieferung von 2 000 Mobiltelefonen, von denen erfahrungsgemäß 5 % defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich 80 bis 90 defekte Geräte in der Lieferung?	☐
In einer Klinik werden 500 kranke Personen mit einem bestimmten Medikament behandelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass schwere Nebenwirkungen auftreten, beträgt 0,001. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als zwei Personen schwere Nebenwirkungen auftreten?	☐

Lösungsweg

In der Kantine eines Betriebs essen 80 Personen. Am Montag werden ein vegetarisches Gericht und drei weitere Menüs angeboten. Erfahrungsgemäß wählt jede vierte Person das vegetarische Gericht. Es werden 20 vegetarische Gerichte vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese nicht ausreichen?	☒
Ein Großhändler erhält eine Lieferung von 2 000 Mobiltelefonen, von denen erfahrungsgemäß 5 % defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich 80 bis 90 defekte Geräte in der Lieferung?	☒
In einer Klinik werden 500 kranke Personen mit einem bestimmten Medikament behandelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass schwere Nebenwirkungen auftreten, beträgt 0,001. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als zwei Personen schwere Nebenwirkungen auftreten?	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Aufnahmetest

Aufgabennummer: 1_047	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Universität führt einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig.
In den letzten Jahren wurden durchschnittlich 40 Bewerber/innen aufgenommen. Dabei traten etwa 95 % der angemeldeten Kandidatinnen und Kandidaten tatsächlich zum Aufnahmetest an. Heuer treten 122 Bewerber/innen zu diesem Aufnahmetest an.

Nehmen Sie an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Anzahl der angemeldeten Kandidatinnen und Kandidaten, die tatsächlich zum Aufnahmetest erscheinen, ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	☐
Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}25$.	☐
Die durchschnittliche Anzahl der richtig beantworteten Fragen aller angetretenen Kandidatinnen und Kandidaten ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	☐
Die Anzahl der zufällig ankreuzenden Kandidatinnen und Kandidaten, die aufgenommen werden, ist binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = 0{,}25$.	☐
Die Anzahl der falsch beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}75$.	☐

Lösungsweg

Die Anzahl der angemeldeten Kandidatinnen und Kandidaten, die tatsächlich zum Aufnahmetest erscheinen, ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	
Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}25$.	☒
Die durchschnittliche Anzahl der richtig beantworteten Fragen aller angetretenen Kandidatinnen und Kandidaten ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	
Die Anzahl der zufällig ankreuzenden Kandidatinnen und Kandidaten, die aufgenommen werden, ist binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = 0{,}25$.	
Die Anzahl der falsch beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}75$.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Binomialverteilung*

Aufgabennummer: 1_152	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Einige der unten angeführten Situationen können mit einer Binomialverteilung modelliert werden.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Situation(en) an, bei der/denen die Zufallsvariable X binomialverteilt ist!

Aus einer Urne mit vier blauen, zwei grünen und drei weißen Kugeln werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. (X = Anzahl der grünen Kugeln)	☐
In einer Gruppe mit 25 Kindern sind sieben Linkshänder. Es werden drei Kinder zufällig ausgewählt. (X = Anzahl der Linkshänder)	☐
In einem U-Bahn-Waggon sitzen 35 Personen. Vier haben keinen Fahrschein. Drei werden kontrolliert. (X = Anzahl der Personen ohne Fahrschein)	☐
Bei einem Multiple-Choice-Test sind pro Aufgabe drei von fünf Wahlmöglichkeiten richtig. Die Antworten werden nach dem Zufallsprinzip angekreuzt. Sieben Aufgaben werden gestellt. (X = Anzahl der richtig gelösten Aufgaben).	☐
Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens liegt bei 52 %. Eine Familie hat drei Kinder. (X = Anzahl der Mädchen)	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

Aus einer Urne mit vier blauen, zwei grünen und drei weißen Kugeln werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. (X = Anzahl der grünen Kugeln)	☒
Bei einem Multiple-Choice-Test sind pro Aufgabe drei von fünf Wahlmöglichkeiten richtig. Die Antworten werden nach dem Zufallsprinzip angekreuzt. Sieben Aufgaben werden gestellt. (X = Anzahl der richtig gelösten Aufgaben).	☒
Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens liegt bei 52 %. Eine Familie hat drei Kinder. (X = Anzahl der Mädchen)	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wahl

Aufgabennummer: 1_015	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Bei einer Befragung von 2 000 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Personen geben 14 % an, dass sie bei der nächsten Wahl für die Partei „Alternatives Leben" stimmen werden. Aufgrund dieses Ergebnisses gibt ein Meinungsforschungsinstitut an, dass die Partei mit 12 % bis 16 % der Stimmen rechnen kann.

Aufgabenstellung:

Mit welcher Sicherheit kann man diese Behauptung aufstellen?

Möglicher Lösungsweg

Konfidenzintervall: [0,12; 0,16]

$\mu = n \cdot p = 2\,000 \cdot 0{,}14 = 280$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 15{,}5$

$0{,}16 \cdot 2\,000 = 320$

$320 = 280 + z \cdot 15{,}5 \rightarrow z = 2{,}58 \rightarrow \Phi(z) = 0{,}995$

$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}99$

Die Behauptung kann mit 99%iger Sicherheit aufgestellt werden.

Lösungsschlüssel

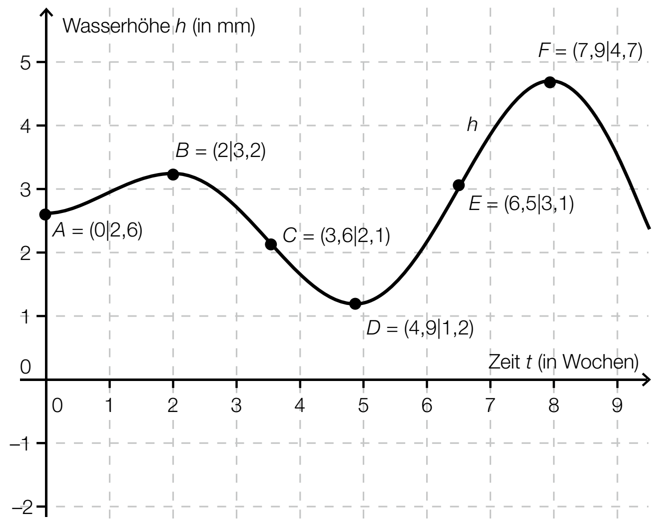
Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der korrekte Prozentwert angegeben ist.

Übungsaufgaben zu Teil 2

Wasserstand eines Bergsees

Aufgabennummer: 2_001	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒	
Grundkompetenzen: AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3		
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Funktion *h* beschreibt die Wasserhöhe eines Bergsees in Abhängigkeit von der Zeit *t*. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *h*.



Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten des Wasserstands im Intervall [0; 2] und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt! Um wie viel Prozent ist die Wasserhöhe während der ersten zwei Wochen gestiegen?

b) Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion h' der Funktion h? Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Differenzialquotienten der Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t = 6$ und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt!

c) Was beschreibt die zweite Ableitungsfunktion h'' der Funktion h? Wann etwa nimmt die Wasserhöhe am stärksten zu?

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{3,2 - 2,6}{2 - 0} = 0,3 \rightarrow$ Bis zum Ende der zweiten Woche nimmt die Wasserhöhe im Mittel pro Woche um 0,3 m zu.
$3,2 : 2,6 \approx 1,23 \rightarrow$ Der Wasserstand nahm um ca. 23 % zu.

b) Durch die erste Ableitungsfunktion h' ist die Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe bestimmt.
$h'(6) \approx 1,6 \rightarrow$ Das bedeutet, dass nach sechs Wochen die momentane Änderungsrate 1,6 m pro Woche beträgt.

c) Die zweite Ableitungsfunktion h'' beschreibt das Monotonieverhalten der Änderungsrate der Wasserhöhe bzw. die momentane Änderungsrate der Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe. Die Wasserhöhe nimmt nach ca. 6,5 Wochen am stärksten zu.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Aufnahmetest

Aufgabennummer: 2_002	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒	
Grundkompetenzen: WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3		
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Universität führt für die angemeldeten Bewerber/innen einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig. Wer mindestens acht Fragen richtig beantwortet, wird sicher aufgenommen. Wer alle zehn Fragen richtig beantwortet, erhält zusätzlich ein Leistungsstipendium. Die Ersteller/innen dieses Tests geben die Wahrscheinlichkeit, bei zufälligem Ankreuzen aller Fragen aufgenommen zu werden, mit 0,04158 % an. Nehmen Sie an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt.

Aufgabenstellung:

a) Nennen Sie zwei Gründe, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt ist!
Geben Sie einen möglichen Grund an, warum in der Realität das Modell der Binomialverteilung hier eigentlich nicht anwendbar ist!

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält!

Möglicher Lösungsweg

a) Dieser Aufgabenteil ist durch sinngemäßes Angeben von mindestens zwei der vier angeführten Gründe richtig gelöst:

Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt, weil

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet" und „falsch beantwortet" gibt
- das Experiment unabhängig mit n = 10 Mal wiederholt wird
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt
- es sich dabei um ein „Bernoulli-Experiment" handelt

Der zweite Aufgabenteil ist korrekt gelöst, wenn ein Grund (sinngemäß) angeführt wird, z. B.:

- Eine Bewerberin/ein Bewerber, die/der sich für ein Studium interessiert, wird sicher nicht beim Aufnahmetest zufällig ankreuzen.
- Sobald Kandidat K auch nur eine Antwortmöglichkeit einer Frage ausschließen kann, wäre die Voraussetzung für die Binomialverteilung verletzt. Genau aus diesem Grund wird die Universität mit zehn Multiple-Choice-Fragen nicht das Auslangen finden, da die Erfolgswahrscheinlichkeit für kompetenzbasiertes Antworten sicher wesentlich höher ist als 0,25.
- Die Unabhängigkeit der Wiederholung des Zufallsexperiments ist sicher dadurch verletzt, dass die einzelnen Kandidatinnen und Kandidaten aufgrund ihrer Vorbildung unterschiedliche Erfolgswahrscheinlichkeiten für die Beantwortung der einzelnen Fragen aufweisen. Somit kann unter diesen Voraussetzungen niemals von einer unabhängigen Wiederholung mit Zählen der Anzahl der Erfolge im Sinne eines Bernoulli-Experiments gesprochen werden.

Es sind auch weitere eigenständige Lösungen denkbar.

b) Für die Lösung ist keine Binomialverteilung nötig, da das gesuchte Ereignis das Gegenereignis zur „Aufnahme" darstellt. Somit beträgt die (von den Testautorinnen und Testautoren) angegebene Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Ablehnung}) = 1 - P(\text{Aufnahme}) = 1 - 0{,}0004158 = 0{,}9995842$$

Die Ablehnung des Kandidaten K ist somit praktisch sicher.

Auch hier ist keine Binomialverteilung nötig, da ein Zufallsexperiment mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,25 zehnmal unabhängig wiederholt wird, wobei bei jeder Wiederholung ein „Erfolg" eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit $P(\text{Leistungsstipendium}) = 0{,}25^{10} \approx 0$.

Section Control

Aufgabennummer: 2_003	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: WS 1.1, WS 1.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 3.3

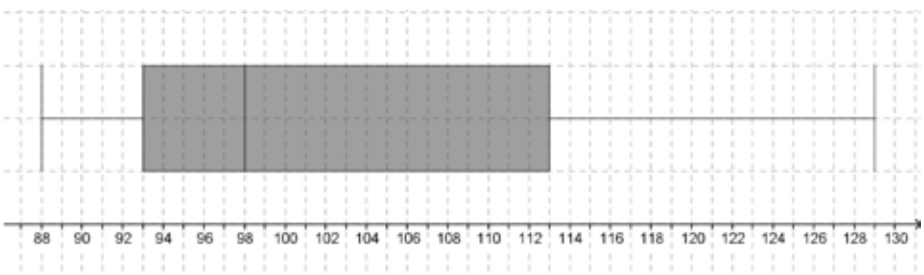
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Begriff *Section Control* (Abschnittskontrolle) bezeichnet ein System zur Überwachung von Tempolimits im Straßenverkehr, bei dem nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen wird, sondern die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine längere Strecke. Dies geschieht mithilfe von zwei Überkopfkontrollpunkten, die mit Kameras ausgestattet sind. Das Fahrzeug wird sowohl beim ersten als auch beim zweiten Kontrollpunkt fotografiert.

Die zulässige Höchstgeschwindigkeit bei einer bestimmten Abschnittskontrolle beträgt 100 km/h. Da die Polizei eine Toleranz kleiner 3 km/h gewährt, löst die *Section Control* bei 103 km/h aus. Lenker/innen von Fahrzeugen, die dieses Limit erreichen oder überschreiten, machen sich strafbar und werden im Folgenden als „Temposünder" bezeichnet.

Eine Stichprobe der Durchschnittsgeschwindigkeiten von zehn Fahrzeugen ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet und im abgebildeten Boxplot dargestellt.

v in km/h	88	113	93	98	121	98	90	98	105	129



Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Durchschnittsgeschwindigkeiten in der Stichprobe!

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) zur Standardabweichung an!

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	☐
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	☐
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	☐
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	☐
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von $\bar{x}$.	☐

b) Bestimmen Sie aus dem Boxplot (Kastenschaubild) der Stichprobe den Median sowie das obere und untere Quartil! Geben Sie an, welche zwei Streumaße aus dem Boxplot ablesbar sind! Bestimmen Sie auch deren Werte!

c) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens 103 km/h zu erfassen, 14 % beträgt. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Temposünder unter fünfzig zufällig ausgewählten Fahrzeuglenkern! Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der Temposünder unter fünfzig Fahrzeuglenkern innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert, d. h. im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = 103{,}3$ km/h

$s = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 13{,}6$ km/h

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	☒
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	☒
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	☒
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von $\bar{x}$.	

b) Daten aus dem Boxplot: Median … 98 km/h; unteres Quartil … 93 km/h;
oberes Quartil … 113 km/h; Spannweite … 41 km/h;
Quartilsabstand … 20 km/h

c) Lösung mittels Binomialverteilung

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}14 = 7$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = 2{,}45$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(5 \leq X \leq 9) =$
$= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$
$= 0{,}1286 + 0{,}1570 + 0{,}1606 + 0{,}1406 + 0{,}1068 = 0{,}6936 = 69{,}36$ %

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

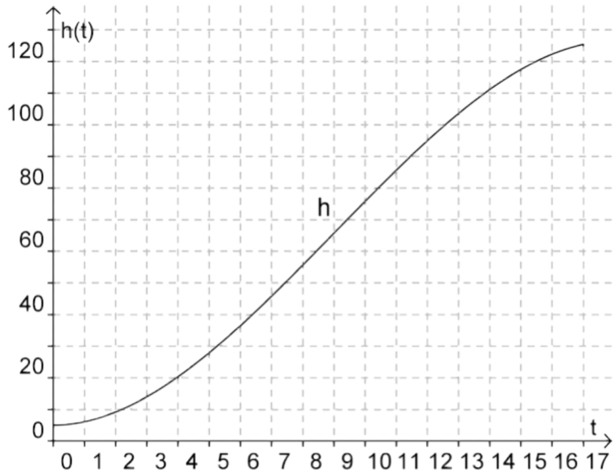
Wachstum einer Pflanze

Aufgabennummer: 2_004	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.3, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Manche einjährige Nutz- und Zierpflanzen wachsen in den ersten Wochen nach der Pflanzung sehr rasch. Im Folgenden wird nun eine spezielle Sorte betrachtet. Die endgültige Größe einer Pflanze der betrachteten Sorte hängt auch von ihrem Standort ab und kann im Allgemeinen zwischen 1,0 m und 3,5 m liegen. Pflanzen dieser Sorte, die im Innenbereich gezüchtet werden, erreichen Größen von 1,0 m bis 1,8 m.

In einem Experiment wurde der Wachstumsverlauf dieser Pflanze im Innenbereich über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe dokumentiert. Im Anschluss wurde die Höhe h dieser Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27t^2 + 120)$ modelliert. Dabei bezeichnet t die Anzahl der Wochen seit der Pflanzung und $h(t)$ die Höhe zum Zeitpunkt t in Zentimetern. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum [0; 17].



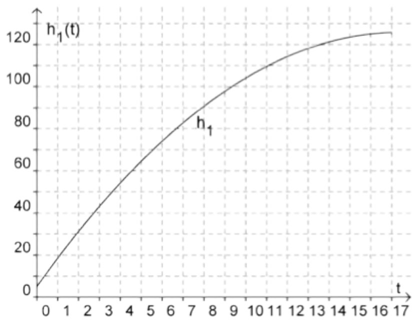
Aufgabenstellung:

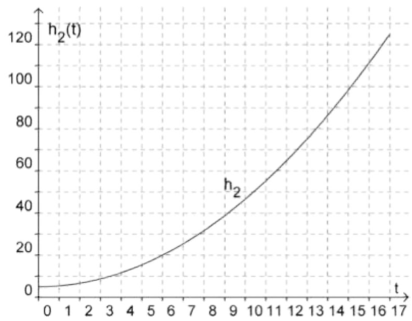
a) Berechnen Sie den Wert des Quotienten $\frac{h(13) - h(9)}{4}$ und den Wert von $h'(9)$! Geben Sie an, welche Bedeutung die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext haben!

b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion h im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt hat! Begründen Sie Ihre Rechenschritte!

c) Für das Wachstum der beobachteten Pflanze ist auch die entsprechende Düngung von Bedeutung. Im gegebenen Fall wurde die Pflanze zwei Wochen vor dem Zeitpunkt des stärksten Wachstums gedüngt. Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt durch Rechnung! Begründen Sie Ihre Überlegungen!

d) Im selben Zeitraum wurde das Höhenwachstum von zwei weiteren Pflanzen der gleichen Sorte beobachtet und modelliert. Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen der entsprechenden Funktionen h_1 und h_2.





Vergleichen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen h, h_1 und h_2 im Intervall [0; 17] und interpretieren Sie es im Hinblick auf das Wachstum der drei Pflanzen!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{h(13) - h(9)}{4} \approx 9{,}47$

$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$

$h'(9) \approx 10{,}13$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitintervall [9; 13] beträgt rund 9,5 cm pro Woche. Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 9$, d. h. nach 9 Wochen, beträgt rund 10,1 cm pro Woche.

b) In einem lokalen Hochpunkt muss die Tangente an den Graphen horizontal sein, d. h., die 1. Ableitung muss den Wert 0 haben.

$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$

$t \cdot (-t + 18) = 0$
$t_1 = 0, t_2 = 18$

Die Funktion hat an der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum und an der Stelle $t = 18$ ein lokales Maximum. Der Wert $t = 18$ liegt nicht im Beobachtungsintervall, d. h., die Funktion hat im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt.

c) $h''(t) = \frac{1}{4} \cdot (-t + 9)$

Die Kurve ist für $t < 9$ linksgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt zu.
Die Kurve ist für $t > 9$ rechtsgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt ab.
Daher ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 9 Wochen am größten. Die Pflanze wurde also am Beginn der 8. Woche gedüngt.

Ein weiterer Lösungsansatz wäre, das Maximum der Wachstumsfunktion (also von h') zu bestimmen.

d) Die Funktion h_1 ist rechtsgekrümmt, die Funktion h_2 ist linksgekrümmt, das Krümmungsverhalten der Funktion h ändert sich. Das bedeutet, die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_1 beschrieben wird, wird immer kleiner (sie wächst immer langsamer) und die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_2 beschrieben wird, wird immer größer (sie wächst immer schneller).

Im Vergleich dazu ändert sich das Monotonieverhalten der Wachstumsgeschwindigkeit bei derjenigen Pflanze, die durch h beschrieben wird, an der Stelle $t = 9$ [vgl. c)].

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Mathematikschularbeiten

Aufgabennummer: 2_005	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: WS 2.2, WS 3.1, WS 3.3	

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Wenn in der Oberstufe in einem Semester höchstens zwei Mathematikschularbeiten vorgesehen sind, muss jede versäumte Schularbeit nachgeholt werden.
Ein Mathematiklehrer hat auf Basis seiner langjährigen Erfahrung die untenstehende Tabelle erstellt. Dabei beschreibt $h(n)$ die relative Häufigkeit, dass bei einer Schularbeit insgesamt n Schüler/innen fehlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	> 7
$h(n)$	0,15	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02	0

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, mit wie vielen Fehlenden der Mathematiklehrer im Durchschnitt bei jeder Schularbeit rechnen muss!

Lässt sich aus dem errechneten Durchschnittswert mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☐
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	☐

In einer bestimmten Klasse werden im kommenden Schuljahr vier Schularbeiten (zwei pro Semester) geschrieben.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Mathematikschularbeiten dieser Klasse, die aufgrund fehlender Schüler/innen nachgeholt werden müssen, berechnet werden kann!

$P(X = k)$ = ... mit k = ...

Möglicher Lösungsweg

a) Im Durchschnitt muss der Mathematiklehrer mit 2,42 Fehlenden rechnen.

Eine auf ganze Zahlen gerundete Antwort ist nicht korrekt, da der Erwartungswert nur statistische Aussagekraft hat und somit die Rundung die Aussage verändert.

Daraus lässt sich aber nicht mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit jemand fehlt, da es sich dabei um eine statistische Kenngröße handelt, die keine konkrete Aussage über die einzelne Schularbeit erlaubt.

Eine Schülerantwort, die darauf abzielt, dass es entsprechend der empirischen Häufigkeitsverteilung mit 15%iger Häufigkeit zu keinem Fehlen kommt, ist als nicht korrekt zu bewerten, da in der Aufgabenstellung verlangt wird, den Erwartungswert zu interpretieren.

b)

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☒
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	

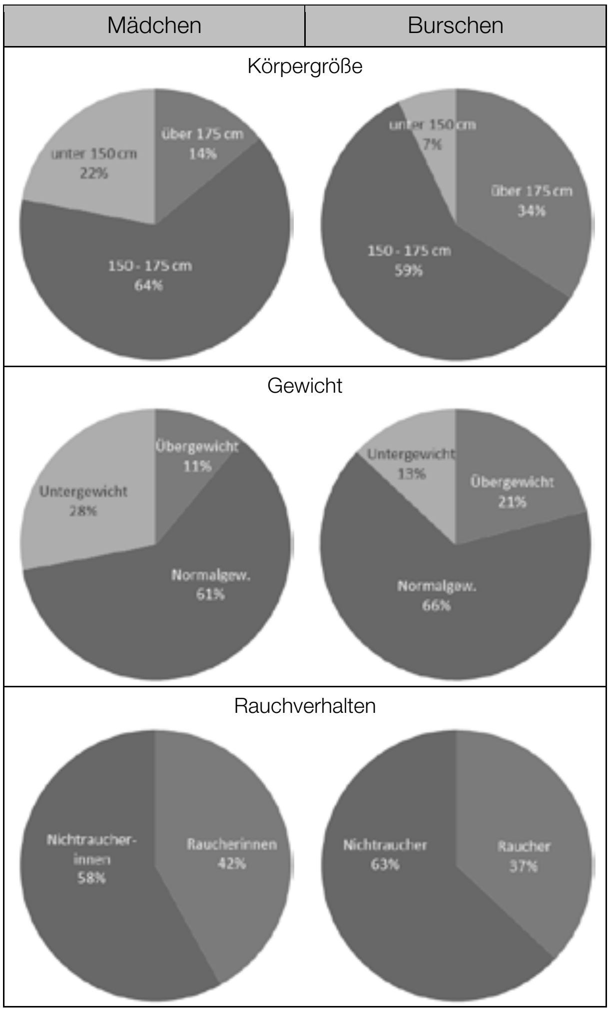
$P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{4-k}$ mit $k = 0, 1, \dots, 4$

Ärztliche Untersuchung an einer Schule

Aufgabennummer: 2_006	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: WS 2.2, WS 3.1, WS 3.2	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Schulärztin hat die Untersuchung der Oberstufenschüler/innen einer Schule abgeschlossen. Die Auswertung der Ergebnisse ist in den nachstehenden Abbildungen grafisch dargestellt.



Von den einzelnen Klassen wurde dabei folgende Schüleranzahl erfasst:

Klasse	5A	5B	6A	6B	7A	7B	8A	8B
weiblich	18	22	20	16	16	15	12	18
männlich	14	9	7	9	10	11	13	8
gesamt	32	31	27	25	26	26	25	26

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie auf Basis der erhobenen Daten einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis an, wobei angenommen wird, dass die angegebenen Prozentsätze unabhängig von der Schulstufe sind:

„In den 5. Klassen gibt es höchstens 2 Raucherinnen."

In dieser Schule wurden die Schüler/innen nicht nach Klassen geordnet untersucht, sondern jede/r entschied selbst, wann sie/er zur Schulärztin ging (zufällige Reihenfolge angenommen).
Wie viele Schüler/innen musste die Schulärztin untersuchen, um mit absoluter Sicherheit mindestens eine Raucherin/einen Raucher aus den 5. Klassen zu finden, wenn sie weiß, dass es in den 5. Klassen mindestens eine/n davon gibt?

b) Auf Basis der oben angeführten Daten wurde für die Burschen eines Jahrgangs der folgende statistische Kennwert ermittelt:

$$\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0{,}34 = 7{,}82$$

Was drückt dieser Kennwert aus? Interpretieren Sie diesen Kennwert im gegebenen Zusammenhang und nutzen Sie dabei sowohl die grafische Abbildung der Untersuchungsergebnisse als auch die tabellarische Übersicht über die Klassenschülerzahlen.

Ist der so errechnete Kennwert aussagekräftig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Möglicher Lösungsweg

a) X … Anzahl der Raucherinnen aus allen 5. Klassen

X … Binomialverteilung mit $n = 40$, $p = 0{,}42$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$= \binom{40}{0} \cdot 0{,}42^0 \cdot 0{,}58^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0{,}42^1 \cdot 0{,}58^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0{,}42^2 \cdot 0{,}58^{38}$$

Da in der Angabe nur statistische Aussagen gemacht werden, aufgrund derer nicht mit Sicherheit behauptet werden kann, ob es mehr als eine Raucherin/einen Raucher in den 5. Klassen gibt, müssen alle Schüler/innen untersucht werden, um mit Sicherheit eine Raucherin/einen Raucher in der 5. Klasse zu finden.

b) In allen 5. Klassen zusammen gibt es 23 Burschen. Der Prozentsatz der Burschen mit einer Körpergröße von über 175 cm beträgt 34 %.

Somit drückt der berechnete Wert $\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0{,}34 = 7{,}82$ die Anzahl der zu erwartenden Burschen in den 5. Klassen mit einer Körpergröße von über 175 cm aus.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort sind:

- sinngemäße Formulierung für „Erwartungswert"
- Burschen aus 5. Klassen mit über 175 cm Körpergröße

Eine Rundung auf 8 ist in diesem Zusammenhang als falsch zu werten, da es sich bei μ nur um einen statistischen Kennwert und nicht um einen realen Ausgang eines Zufallsexperiments handelt.

Da die Daten für die gesamte Oberstufe ausgewertet sind und Schüler/innen während der Oberstufe noch wachsen, werden voraussichtlich weniger so große Schüler in den 5. Klassen zu finden sein. Somit ist der errechnete Erwartungswert nicht aussagekräftig bzw. sinnvoll.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort ist die sinngemäße Darstellung einer der folgenden Interpretationen:

- Die unabhängige Wiederholung (im Sinne des Bernoulli-Experiments) ist nicht gegeben.
- Die verwendete Wahrscheinlichkeit (über 175 cm Körpergröße) bzw. relative Häufigkeit ist auf die beobachtete Eigenschaft (Bursch aus 5. Klassen) nicht anzuwenden.

Die Burschen/Jugendlichen wachsen im Laufe der Oberstufe, daher ist die relative Häufigkeit auf diese Gruppe nur eingeschränkt übertragbar.

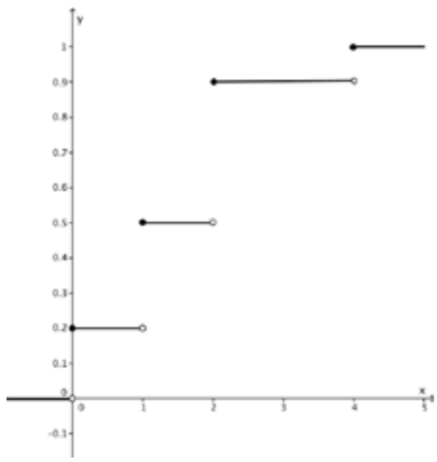
Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Glücksrad

Aufgabennummer: 2_007	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: FA 1.4, WS 3.1	

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Auf einem Jahrmarkt werden nach dem Drehen eines Glücksrades € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt. Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr e (in €) zu entrichten.
Der Spielbetreiber hat für mathematisch Interessierte den Graphen einer sogenannten kumulativen Verteilungsfunktion F mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben. Die Zufallsvariable X gibt dabei die Größe des auszuzahlenden Betrags an. Aus der Abbildung lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Auszahlungsbeträge ermitteln, wobei die Variable x angibt, welche Werte die Zufallsvariable X annimmt, d. h. wie groß die einzelnen auszuzahlenden Beträge sind.
Bei diesem Spiel sind sie, wie oben angegeben, € 0, € 1, € 2 oder € 4.



Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie mithilfe der Graphik die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und tragen Sie die entsprechenden Werte in der nachstehenden Tabelle ein!

Auszahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$				

Begründen Sie, warum die Funktion F monoton steigend ist und warum das Maximum von F immer 1 sein muss!

b) Der Erwartungswert von X beträgt bei diesem Spiel € 1,50, d. h., im Mittel beträgt der auszuzahlende Betrag € 1,50.
Versetzen Sie sich in die Lage des Spielbetreibers. Wie groß wählen Sie den Betrag der Spielgebühr e pro Drehung mindestens, wenn Sie die Größe des Erwartungswerts von X kennen? Geben Sie eine Begründung für Ihre Wahl an!

Die Zufallsvariable Y gibt die Höhe des (tatsächlichen) Gewinns aus der Sicht der Spielerin/des Spielers an.
Welche Werte y wird der Gewinn in Abhängigkeit von e bei den bekannten Auszahlungsbeträgen € 0, € 1, € 2 oder € 4 annehmen?
Vervollständigen Sie die Tabelle und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y an!

Gewinn y in €				
$P(Y = y)$				

Möglicher Lösungsweg

a)

Auszahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Eine kumulierte Verteilungsfunktion entsteht durch Summenbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Da die Einzelwahrscheinlichkeiten definitionsgemäß immer größer oder gleich 0 sein müssen, ist die Funktion F monoton steigend. Das Maximum muss 1 sein, da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergeben muss.

b) e muss größer als € 1,50 sein, da der Spielbetreiber auf lange Sicht einen Gewinn und keinen Verlust erzielen möchte, der sich aus $e - 1{,}5 > 0$ errechnet.

Gewinn y in €	$0 - e$	$1 - e$	$2 - e$	$4 - e$
$P(Y = y)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Haber'sche Regel

Aufgabennummer: 2_008	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 1.2, FA 1.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Abhängig von der Dosis von Giftgasen und der Dauer ihrer Einwirkung kann es zu toxischen Wirkungen bei lebenden Organismen kommen. Diesen Zusammenhang untersuchte der deutsche Chemiker Fritz Haber. Die nach ihm benannte Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit W = konstant) beschreibt den Zusammenhang zwischen toxischen Wirkungen W (in $\text{mg} \cdot \text{min} \cdot \text{L}^{-1}$ oder $\text{ppm} \cdot \text{min}$), der Einwirkzeit t (in min) der Verabreichung und der Wirkkonzentration c (in ppm oder $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$) eines Giftstoffes.

Die toxische Wirkung kann eine Erkrankung (beispielsweise Krebs) hervorrufen oder den Tod des diesem Gift ausgesetzten Lebewesens bedeuten. Nicht am Erbgut angreifende Gifte zeigen erst dann eine Wirkung W, wenn eine für das Gift spezifische Konzentration (Schwellenkonzentration e) erreicht wird. Zum Beispiel hat Kohlenmonoxid keinen schädlichen Effekt, wenn seine Konzentration unter einem Wert von 5 ppm liegt. Für Gifte mit einer Schwellenkonzentration e wird die Haber'sche Regel abgewandelt dargestellt: $(c - e) \cdot t = W$ (mit W = konstant).

Aufgabenstellung:

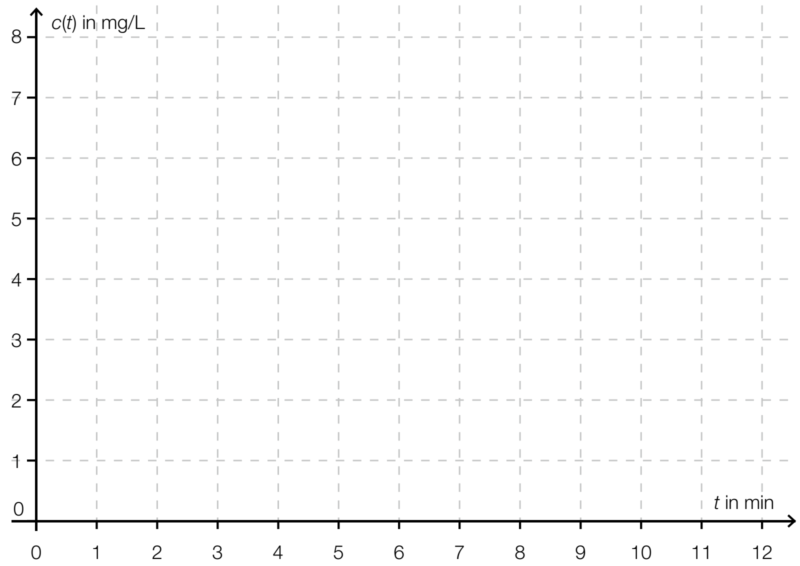
a) Die Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit W = konstant) kann als Funktion c in Abhängigkeit von der Variablen t geschrieben werden.

Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

Bei der Funktion c handelt es sich um eine lineare Funktion f vom Typ $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^n + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Polynomfunktion f vom Typ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Exponentialfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine konstante Funktion f vom Typ $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.	☐

Phosgen ist ein sehr giftiges Gas. Ein Lebewesen wird für eine Zeitdauer von 10 Minuten diesem Giftgas in einer Wirkkonzentration von 0,3 mg/L ausgesetzt. Geben Sie jene Wirkkonzentration in mg/L an, mit der in nur einer Minute die gleiche toxische Wirkung erreicht wird.

b) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Wirkkonzentration c (in mg/L) und der Einwirkzeit t (in min) für eine Wirkung von $W = 2\text{ mg} \cdot \text{min} \cdot \text{L}^{-1}$ dar!



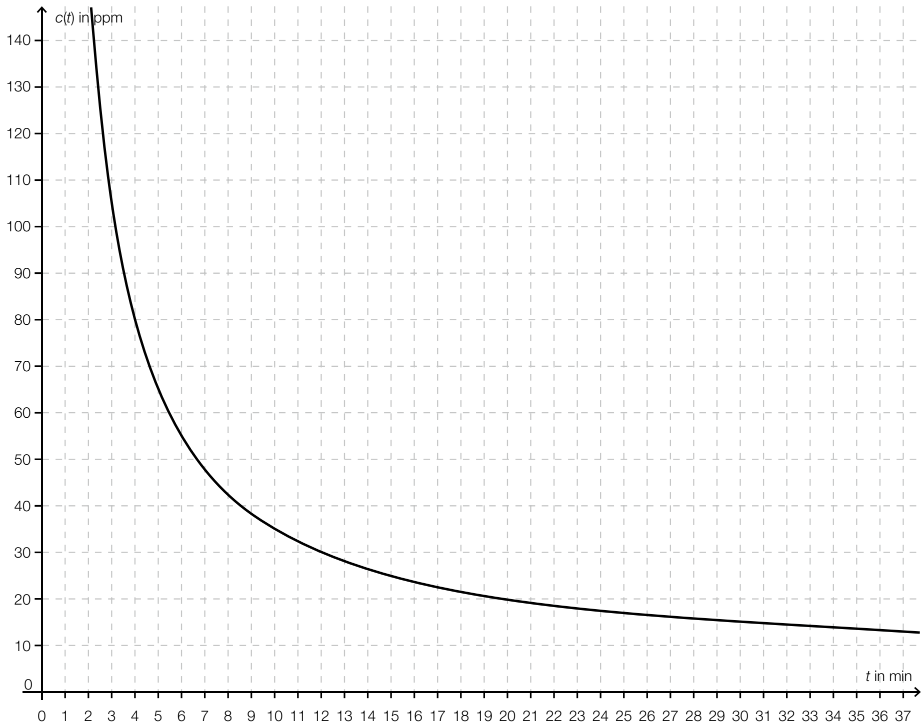
Die beiden Textfelder sind so zu ergänzen, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht. Kreuzen Sie dazu in der ersten und der zweiten Spalte jeweils die passende Aussage an!

Die Größen c und t in der Haber'schen Regel $c \cdot t = W$ (mit W = konstant) sind zueinander ___①___, weil ___②___ dieselbe Wirkung W erzielt wird.

①	
direkt proportional	☐
indirekt proportional	☐
weder indirekt noch direkt proportional	☐

②	
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das n-Fache und Reduktion der Konzentration c auf den n-ten Teil	☐
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das n-Fache und beliebiger Konzentration c	☐
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das n-Fache und Erhöhung der Konzentration c auf das n-Fache	☐

c) Ein nicht näher bezeichnetes Giftgas hat eine natürliche Schwellenkonzentration von $e = 5$ ppm. Bei einer Einwirkzeit von 10 min liegt die tödliche Dosis (letale Dosis) bei etwa $c = 35$ ppm. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Konzentration c in Abhängigkeit von der Einwirkzeit t bei der letalen Dosis.



Lesen Sie aus dem Graphen die letale Dosis des angegebenen Giftes für einen Menschen bei einer Einwirkzeit von 20 Minuten ab! Interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu den Angabewerten!

d) Die abgewandelte Haber’sche Regel $(c - e) \cdot t = W$ (mit W = konstant) kann als eine Funktion c in Abhängigkeit von der Einwirkzeit t geschrieben werden.

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine additive Konstante.	☐
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine multiplikative Konstante.	☐
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine von t abhängige Variable.	☐
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c nicht mehr vorhanden, weil der Wert e bei der Umformung wegfällt.	☐
Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c immer gleich groß wie W.	☐

Die Haber’sche Regel ohne Schwellenkonzentration lautet $c \cdot t = W$, die Form mit Schwellenkonzentration e und mit derselben biologischen Wirkungskonstante W lautet $(c - e) \cdot t = W$. Woran erkennt man an der graphischen Darstellung beider Funktionen c mit $c(t)$, um welche es sich handelt? Begründen Sie!

Möglicher Lösungsweg

a) Funktionsterm: $c(t) = \frac{W}{t}$

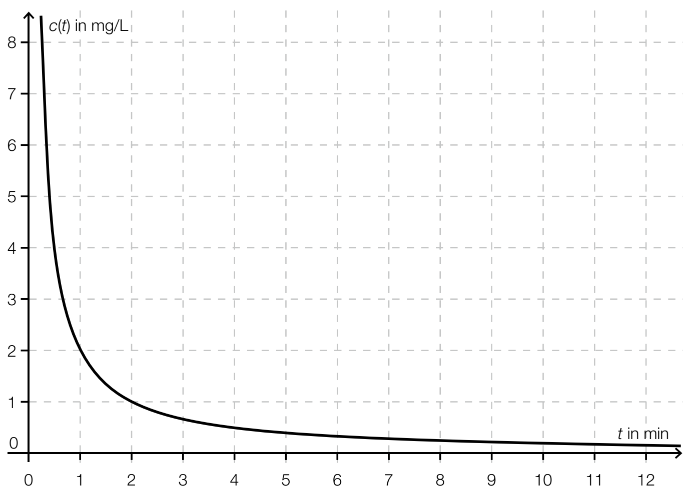
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}$.	☒

$W = c \cdot t = 0{,}3\ \frac{\text{mg}}{\text{L}} \cdot 10\ \text{min} = 3\ \text{mg} \cdot \text{min} \cdot \text{L}^{-1}$

$\rightarrow c(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow c(1) = 3$

Die Konzentration beträgt 3 mg/L. *(Der Rechengang sowie die Einheiten sind für das Erreichen des Punktes nicht von Bedeutung.)*

b)



Die Größen c und t in der Haber'schen Regel $c \cdot t = W$ (mit W = konstant) sind zueinander ___①___, weil ___②___ dieselbe Wirkung W erzielt wird.

①	
indirekt proportional	☒

②	
bei Erhöhung der Einwirkzeit t auf das n-Fache und Reduktion der Konzentration c auf den n-ten Teil	☒

c) Die letale Dosis beträgt für eine Einwirkzeit von 20 Minuten zirka 20 ppm.

Verdoppelt sich die Einwirkzeit, so halbiert sich die letale Dosis hier nicht. Durch das Vorhandensein einer Schwellenkonzentration von 5 ppm liegt das Ergebnis höher als die Hälfte von 35 ppm.

d) Funktionsterm: $c(t) = \frac{W}{t} + e$

Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c eine additive Konstante.	☒

Der Wert e ist im Funktionsterm der Funktion c **eine additive Konstante**, dadurch wird der Graph der Funktion $c(t) = \frac{W}{t}$ entlang der y-Achse verschoben.

Die Haber'sche Regel ohne Schwellenkonzentration lautet $c \cdot t = W$ und hat als Funktion c mit $c(t)$ gesehen die beiden Achsen als Asymptoten.

Die Haber'sche Regel mit Schwellenkonzentration $(c - e) \cdot t = W$ mit derselben biologischen Wirkungskonstante W besitzt statt der x-Achse an der Stelle $y = e$ eine Asymptote. Der Graph dieser Funktion ist entlang der y-Achse um den Wert e verschoben. *(Adäquate Antworten sind als richtig zu werten.)*

Gewinnfunktion

Aufgabennummer: 2_009	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.3, FA 1.4, FA 1.6, FA 1.7, FA 2.3

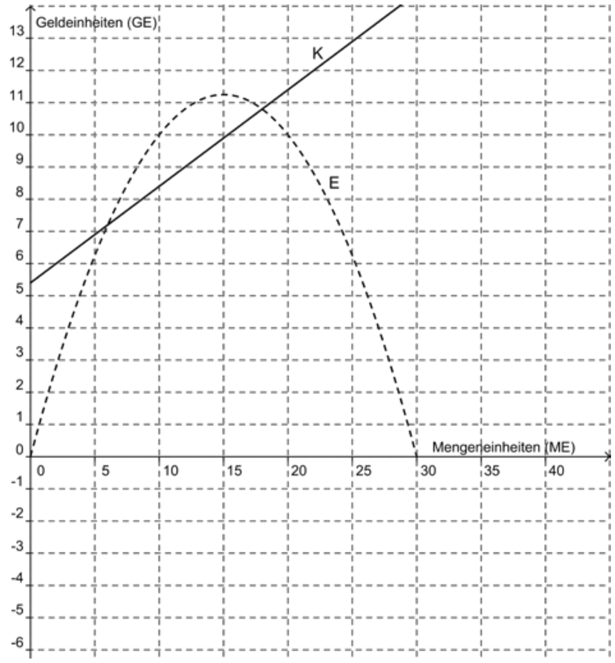
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In einem Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Geldeinheiten (GE) bei variabler Menge x in Mengeneinheiten (ME) beobachtet. Als Modellfunktionen werden die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ angewendet. Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen abgesetzt.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K! Beschreiben Sie, welche Informationen die Koordinaten dieser Schnittpunkte für den Gewinn des Unternehmens liefern!

b) Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion G in die untenstehende Abbildung ein! Markieren Sie in der Abbildung den Gewinn im Erlösmaximum!



c) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden!

Bei der gegebenen Kostenfunktion *K* gibt der Wert 5,4 die Fixkosten an. Im Folgenden werden Aussagen getroffen, die ausschließlich die Änderung der Fixkosten in Betracht ziehen. Kreuzen Sie die für den gegebenen Sachverhalt zutreffende(n) Aussage(n) an!

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	☐
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	☐
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	☐
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	☐
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	☐

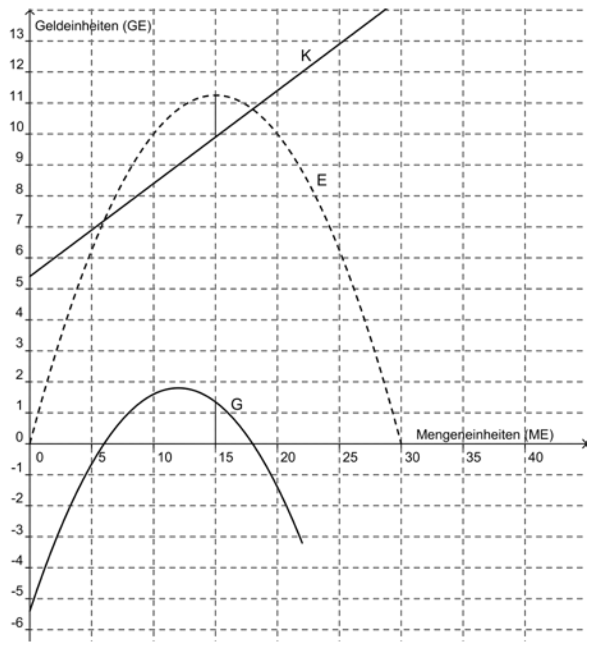
Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$
$-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4 = 0$

Die Lösung der quadratischen Gleichung führt zu den Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = 18$
$\rightarrow S_1(6|7{,}2)$ und $S_2(18|10{,}8)$.

Reflexion beispielsweise:
Für die Mengen x_1 und x_2 sind Erlös und Kosten jeweils gleich groß, der Gewinn ist daher null.
Für die Stückzahlen x_1 und x_2 wird kein Gewinn erzielt.
Für den Stückzahlenbereich $(x_1; x_2)$ wird ein Gewinn erzielt.

b) *Eine der möglichen Markierungen für den Gewinn reicht in der Lösung aus.*



$G(x)$ einzeichnen

Markierung des Gewinns

c) $G(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4$
$G(13) = 1{,}75$ GE (Geldeinheiten)

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	☒
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	☒
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	☒

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Baumwachstum

Aufgabennummer: 2_010	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.2, AN 1.3, FA 1.5, FA 5.1, FA 5.3

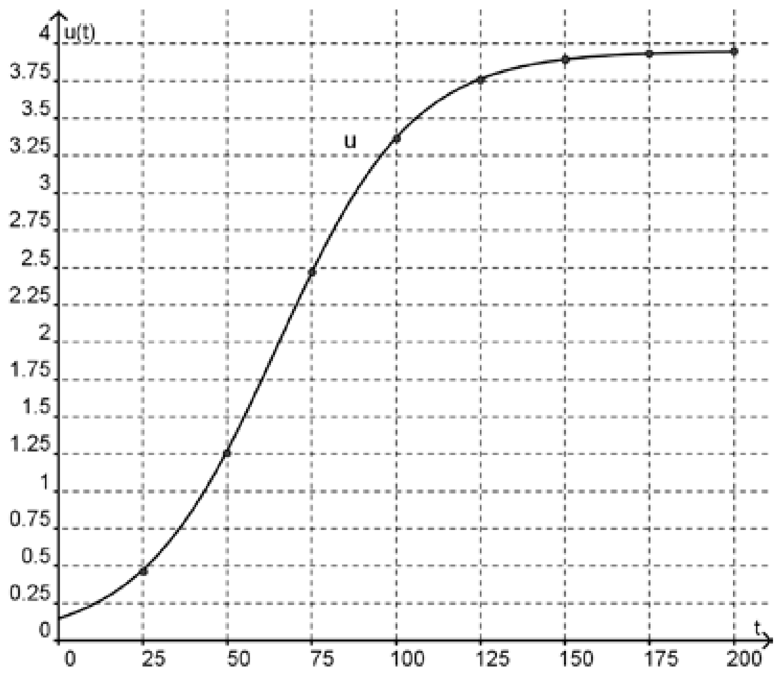
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

An einem gefällten Baum kann anhand der Jahresringe der jeweilige Umfang des Baumstamms zu einem bestimmten Baumalter ermittelt werden. Die Untersuchung eines Baumes ergab folgende Zusammenhänge zwischen Alter und Umfang:

Alter *t* (in Jahren)	25	50	75	100	125	150	175	200
Umfang *u* (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370	3,761	3,895	3,934	3,950

Der Zusammenhang zwischen Alter und Umfang kann durch eine Wachstumsfunktion *u* beschrieben werden, wobei der Wert *u*(*t*) den Umfang zum Zeitpunkt *t* angibt.

In der nachstehenden Graphik sind die gemessenen Werte und der Graph der Wachstumsfunktion *u* veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

a) Innerhalb der ersten 50 Jahre wird eine exponentielle Zunahme des Umfangs angenommen. Ermitteln Sie aus den Werten der Tabelle für 25 und 50 Jahre eine Wachstumsfunktion für diesen Zeitraum!

Begründen Sie mittels einer Rechnung, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht mehr gilt!

b) Berechnen Sie den Differenzenquotienten im Zeitintervall von 75 bis 100 Jahren! Geben Sie an, was dieser Wert über das Wachstum des Baumes aussagt!

Erläutern Sie, was die 1. Ableitungsfunktion u' im gegebenen Zusammenhang beschreibt!

c) Schätzen Sie mithilfe der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat! Geben Sie den Namen des charakteristischen Punktes des Graphen der Funktion an, der diesen Zeitpunkt bestimmt!

Beschreiben Sie, wie dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist!

d) Die beiden Wachstumsfunktionen f und g mit $f(t) = a \cdot q^t$ und $g(t) = b \cdot e^{k \cdot t}$ beschreiben denselben Wachstumsprozess, sodass $f(t) = g(t)$ für alle t gelten muss. Geben Sie die Zusammenhänge zwischen den Parametern a und b beziehungsweise q und k jeweils in Form einer Gleichung an!

Geben Sie an, welche Werte die Parameter q und k annehmen können, wenn die Funktionen f und g im Zusammenhang mit einer exponentiellen Abnahme verwendet werden!

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = a \cdot q^t$

$\to$ $1{,}256 = a \cdot q^{50}$ bzw. $0{,}462 = a \cdot q^{25}$

$\to$ (Division) $2{,}71861 = q^{25}$

$\to$ $q \approx 1{,}0408$

$\to$ $a = \dfrac{0{,}462}{q^{25}}$ $\to$ $a \approx 0{,}17$

$\to$ (näherungsweise) $f(t) = 0{,}17 \cdot 1{,}0408^t$ bzw. $f(t) = 0{,}17 \cdot e^{0{,}04 \cdot t}$ da $\ln(1{,}0408) \approx 0{,}04$

Begründung dafür, dass das Modell für die nächsten 25 Jahre nicht passend ist:
Nach dem Modell gilt $f(75) = 0{,}17 \cdot 1{,}0408^{75} \approx 3{,}412$. Dieser Wert weicht signifikant vom gemessenen Wert ab und spricht daher gegen eine Verwendung des exponentiellen Modells in den nächsten 25 Jahren.

b) Differenzenquotient: $\dfrac{3{,}370 - 2{,}465}{100 - 75} \approx 0{,}036$

Die durchschnittliche Zunahme zwischen 75 und 100 Jahren beträgt 3,6 cm pro Jahr.

Die 1. Ableitungsfunktion gibt die momentane Wachstumsrate an.

c) Der charakteristische Punkt ist der Wendepunkt. Die Wendestelle der Funktion bestimmt den Zeitpunkt für das maximale jährliche Wachstum des Baumumfangs. Am schnellsten nimmt der Baum bei etwa 65 Jahren an Umfang zu (Lösungsintervall [55; 75]).

Die Nullstelle der 2. Ableitungsfunktion bestimmt in diesem Fall denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Baumumfang am schnellsten zunimmt.

d) $f(0) = a$ und $g(0) = b$, daraus folgt: a und b sind gleich.

Da $q^t = e^{k \cdot t}$ gilt, folgt $\ln(q) = k$ bzw. $q = e^k$.

Bei einer Zerfallsfunktion muss $0 < q < 1$ bzw. $k < 0$ gelten.

Erlös und Gewinn

Aufgabennummer: 2_011	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

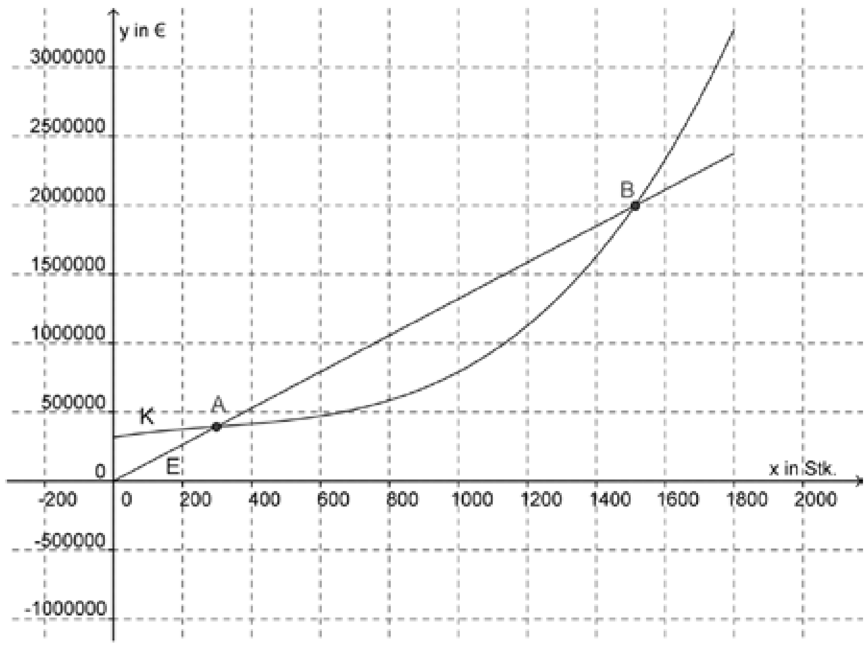
Grundkompetenzen: FA 1.6, FA 1.7, FA 2.1, AN 3.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Digital-Spiegelreflexkamera wird zu einem Stückpreis von € 1.320 angeboten.

Ein Produktionsbetrieb kann monatlich maximal 1 800 Stück dieser Kamera produzieren. Es wird dabei angenommen, dass der Verkaufspreis unabhängig von der verkauften Stückzahl x konstant gehalten wird und alle produzierten Kameras auch verkauft werden. Die Funktion K mit $K(x) = 0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317\,900$ beschreibt die Gesamtkosten K für die Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.

Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



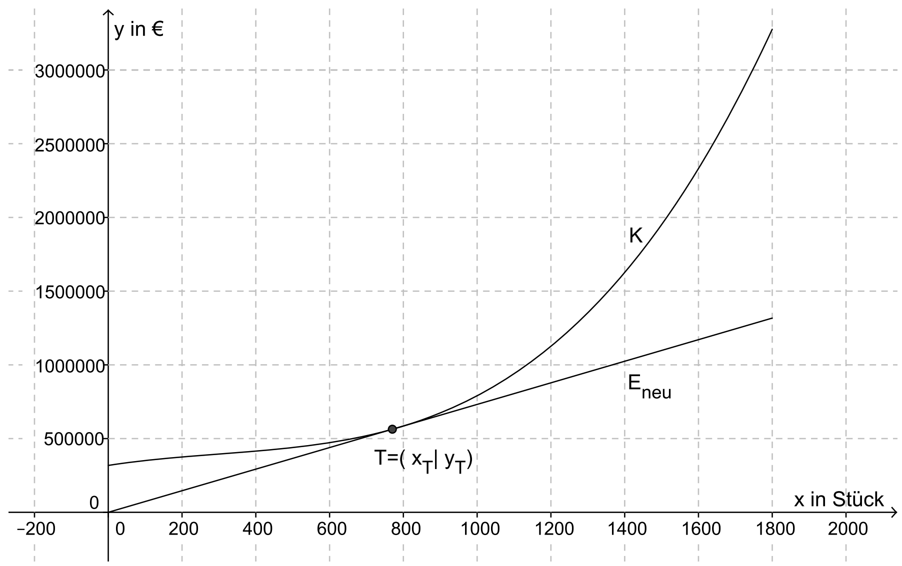
Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein!

Eine Stückpreisänderung wurde vorgenommen und hat bewirkt, dass der Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl erreicht wird. Geben Sie an, wie der Stückpreis verändert wurde und welchen Einfluss diese Veränderung auf die Lage der Nullstellen der Gewinnfunktion G und den Gewinnbereich hat!

b) Erstellen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G!
Berechnen Sie diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird!

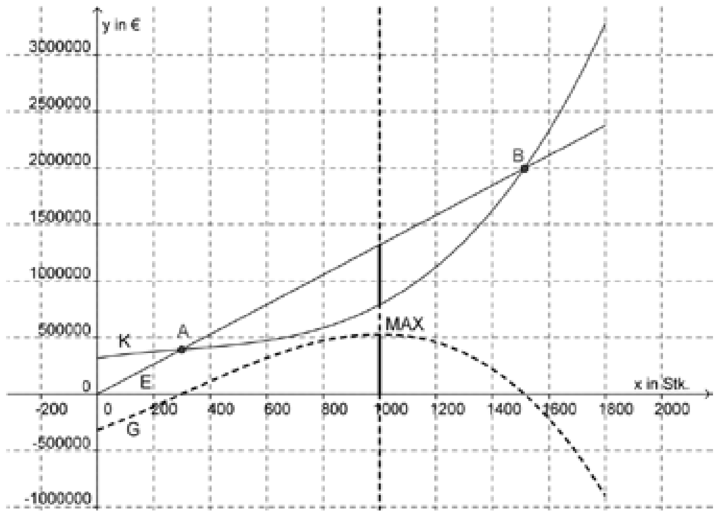
c) In der nachstehenden Grafik wurde die Erlösfunktion so abgeändert, dass die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E_{neu} einander im Punkt T berühren.
Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu}!



Interpretieren Sie die Koordinaten des Punktes T im gegebenen Kontext und erklären Sie, welche Auswirkungen die Änderung der Erlösfunktion auf den Gewinnbereich hat!

Möglicher Lösungsweg

a) Graph der Gewinnfunktion:



Der Stückpreis muss erhöht werden. Die Nullstellen liegen weiter auseinander, das heißt, der Gewinnbereich wird größer.

b) Gewinnfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = 1\,320x - (0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317\,900)$
$G(x) = -0{,}00077x^3 + 0{,}693x^2 + 924x - 317\,900$

Bedingung für maximalen Gewinn:
$G'(x) = 0$
$G'(x) = -0{,}00231x^2 + 1{,}386x + 924$

$$-0{,}00231x^2 + 1{,}386x + 924 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1{,}386 \pm \sqrt{1{,}386^2 + 4 \cdot 0{,}00231 \cdot 924}}{-0{,}00462} = \begin{cases} (-400) \\ 1\,000 \end{cases}$$

Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von 1 000 erzielt.

c) Die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu} lautet:
$E_{neu}(x) = \frac{y_T}{x_T} \cdot x$

Nur bei der Produktionsmenge von x_T Stück wird genau kostendeckend produziert.
Kosten und Erlös betragen je € y_T.
Bei dieser Produktionsmenge ist es nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Kostenfunktion

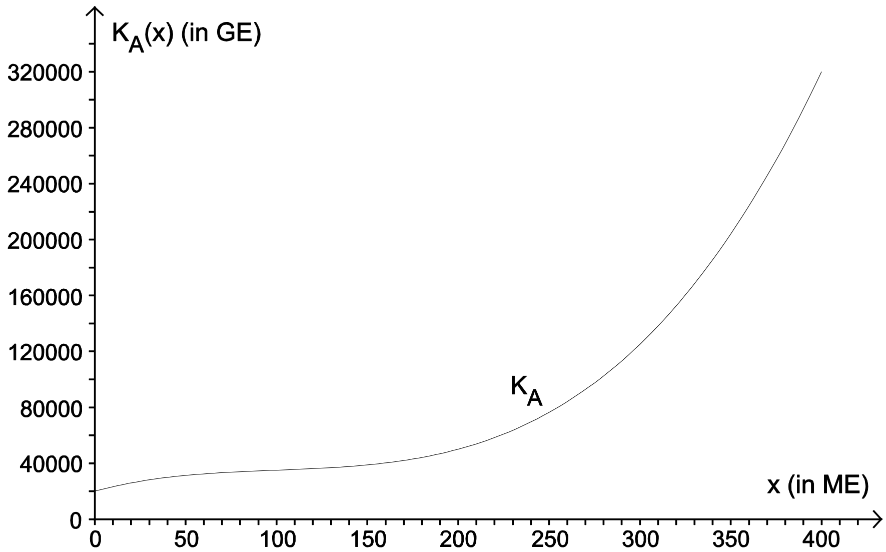
Aufgabennummer: 2_012	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 3.3, AG 2.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Im Zuge einer betriebswirtschaftlichen Analyse und Beratung werden bei zwei Firmen die Kostenverläufe in Abhängigkeit von der Produktionsmenge untersucht.

Bei Firma A wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten [ME]) und den entstehenden Produktionskosten $K_A(x)$ (in Geldeinheiten [GE]) durch die Kostenfunktion K_A mit $K_A(x) = 0{,}01x^3 - 3x^2 + 350x + 20\,000$ beschrieben. Firma A kann monatlich maximal 400 ME produzieren. In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K_A im Intervall [0; 400] dargestellt.



Bei Firma B wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in ME) und den entstehenden Produktionskosten $K_B(x)$ (in GE) durch die Kostenfunktion K_B mit $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$ beschrieben. Firma B kann monatlich maximal 300 ME produzieren.

Aufgabenstellung:

a) Untersuchen Sie, ob der Kostenverlauf bei Firma B progressiv oder degressiv ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Allgemein kann eine solche Kostenfunktion in Abhängigkeit von den produzierten Mengeneinheiten durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) beschrieben werden.

Für welche Werte von a liegt im streng monoton wachsenden Bereich der Funktion ein progressiver bzw. ein degressiver Kostenverlauf vor? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die erste Ableitung einer Kostenfunktion bezeichnet man als *Grenzkostenfunktion*. Diese beschreibt näherungsweise die Kostensteigerung, wenn der Produktionsumfang vergrößert wird. Berechnen Sie, um wie viel GE sich der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A unterscheidet, wenn der Produktionsumfang von 50 ME auf 51 ME erhöht wird!

Für die vorliegende Kostenfunktion gilt die Aussage: „Die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion sind immer positiv.“ Interpretieren Sie diese Aussage im Hinblick auf den Verlauf!

c) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt den durchschnittlichen Preis pro erzeugter ME an.

Ermitteln Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}_B(x)$ bei Firma B!
Geben Sie an, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten sind!

Möglicher Lösungsweg

a) $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$

$K_B'(x) = x + 100$

$K_B''(x) = 1 > 0$

Da die zweite Ableitung positiv ist, ist die Funktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Andere richtige Begründungen (z. B. anhand des Graphen) sind auch zulässig.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Wenn $a > 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Wenn $a < 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion rechtsgekrümmt. Es liegt degressives Wachstum vor.

b) Grenzkostenfunktion $K_A'(x) = 0{,}03x^2 - 6x + 350$

$K_A'(50) = 125$

$K_A(51) - K_A(50) = 31\,373{,}51 - 31\,250 = 123{,}51$

Der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME unterscheidet sich vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A um 1,49 GE.

Da die Kostenfunktion $K(x)$ im angegebenen Bereich monoton steigend ist, gilt $K'(x) > 0 \rightarrow$ die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion (= Ableitungsfunktion der Kostenfunktion) sind also immer positiv.

c) $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$

$\overline{K}_B(x) = \frac{K_B(x)}{x}$

$\overline{K}_B(x) = 0{,}5x + 100 + \frac{15\,000}{x}$

$\overline{K}_B'(x) = 0{,}5 - \frac{15\,000}{x^2}$

$\overline{K}_B'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 0{,}5x^2 = 15\,000 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{30\,000}$

$x \approx 173{,}2$

Bei einer Produktion von ca. 173 Mengeneinheiten sind die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Photovoltaikanlagen

Aufgabennummer: 2_013	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: FA 1.3, FA 1.4, FA 1.7, AG 2.1

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die benachbarten Familien Lux und Hell haben auf den Dächern ihrer Einfamilienhäuser zwei baugleiche Photovoltaikanlagen installiert, deren Maximalleistung jeweils 5 kW beträgt. Nicht selbst verbrauchte elektrische Energie wird zu einem Einspeisetarif ins Netz geliefert. Energie, die nicht durch die Photovoltaikanlage bereitgestellt werden kann, muss von einem Energieunternehmen zum regulären Stromtarif zugekauft werden (netzgekoppelter Betrieb). Beide Familien wollen die Wirtschaftlichkeit ihrer Anlagen durch Messungen überprüfen.

Aufgabenstellung:

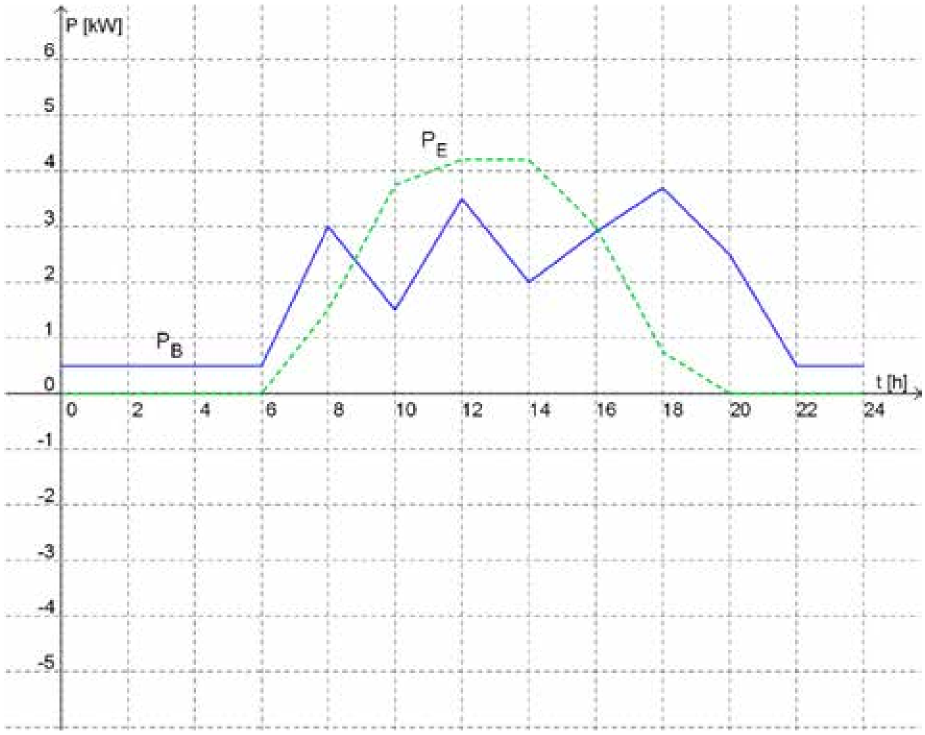
a) Familie Lux hat dazu an einem durchschnittlichen Frühlingstag folgende Leistungsdaten für P_B (im Haus der Familie Lux benötigte Leistung) und P_E (durch die Photovoltaikanlage erzeugte elektrische Leistung) in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t über den Tagesverlauf ermittelt. Die Leistungsdaten wurden um Mitternacht beginnend alle zwei Stunden aufgezeichnet.

Leistungsdaten:

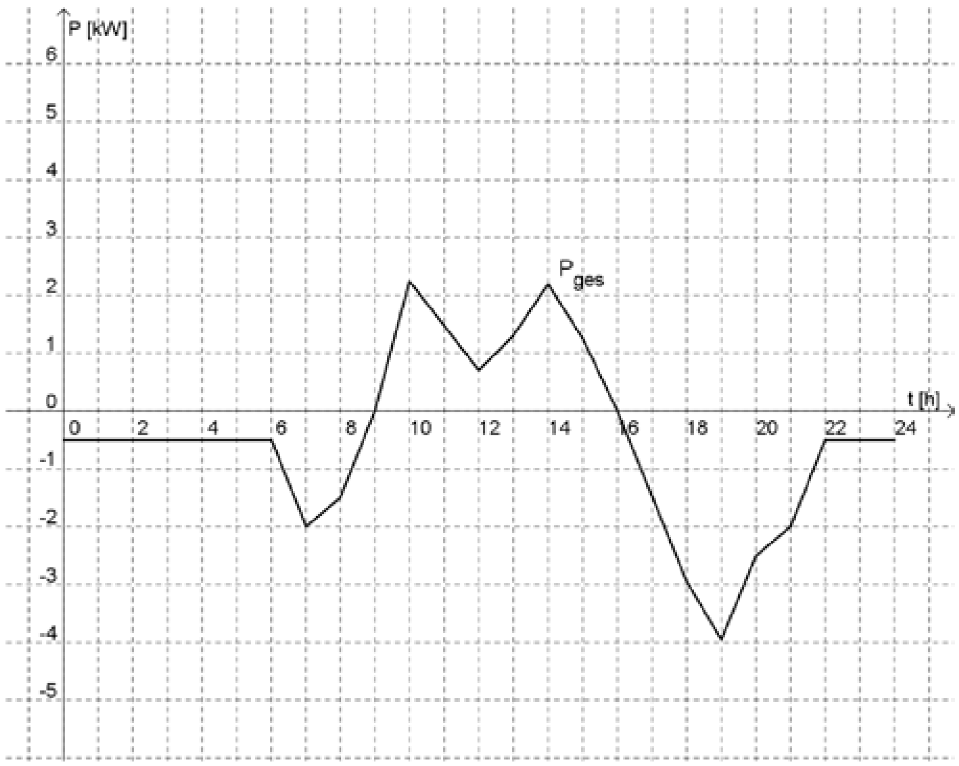
t in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
P_B in kW	0,5	0,5	0,5	0,5	3	1,5	3,5	2	2,9	3,7	2,5	0,5	0,5
P_E in kW	0	0	0	0	1,5	3,75	4,2	4,2	3	0,75	0	0	0

Zeichnen Sie in die nachstehende Abbildung aus den vorgegebenen Graphen für P_B und P_E den Tagesverlauf der elektrischen Gesamtleistungsbilanz P_{ges} für die Photovoltaikanlage der Familie Lux ein! Die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ist die Differenz der beiden Leistungsteile $P_E - P_B$.

Markieren Sie zusätzlich in der Abbildung die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage!


P [kW]
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
P_E
P_B
t [h]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

b) Familie Hell hat aus einer an einem durchschnittlichen Frühlingstag erfolgten stündlichen Messung folgenden Tagesverlauf für die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ihrer elektrischen Leistung ermittelt und durch den gegebenen Graphen modelliert:



Geben Sie an, was in dieser Grafik positive bzw. negative Funktionswerte für P_{ges} bedeuten!

Positive Funktionswerte ………………………………………………………………………...

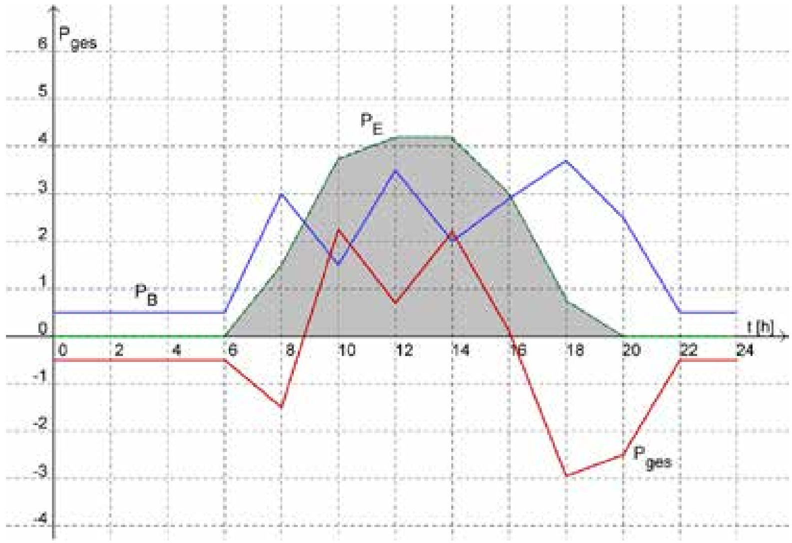
Negative Funktionswerte ……………………………………………………………………….

Familie Hell möchte den Amortisationszeitpunkt für die Photovoltaikanlage ermitteln. Das ist derjenige Zeitpunkt, ab dem die Errichtungskosten gleich hoch wie die Einsparungen durch den Betrieb der Anlage sind. Ab diesem Zeitpunkt arbeitet die Anlage rentabel.

Kann sich die Anlage für die Familie Hell auch amortisieren, wenn die finanzielle Tagesbilanz der Photovoltaikanlage für alle Tage im Jahr negativ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Möglicher Lösungsweg

a)



Die eingefärbte Fläche stellt die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage dar.

b) Positive Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie ans Stromnetz geliefert wird. Negative Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie aus dem Netz entnommen wird.

Die Anlage kann sich amortisieren, wenn der Betrag, den man aufgrund der Anlage an Stromkosten eingespart hat, größer ist als der Anschaffungsbetrag der Anlage.
(Formulierungen, die sinngemäß dieser Aussage entsprechen, sind als richtig zu werten.)

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Schwarzfahren als Volkssport

Aufgabennummer: 2_014	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.2, FA 1.7, FA 5.2, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Im Jahr 2010 wurden in den Graz-Linien exakt 36 449 Schwarzfahrer und Schwarzfahrerinnen auf frischer Tat ertappt.
„Ihren Fahrschein, bitte!" – diese freundliche, aber bestimmte Aufforderung treibt Schwarzfahrern regelmäßig den Angstschweiß ins Gesicht. Zu Recht, heißt es dann doch 65 Euro Strafe zahlen. Mehr als 800 000 Fahrscheinkontrollen wurden im Vorjahr in den Grazer Bus- und Straßenbahnlinien durchgeführt. 36 449 Personen waren Schwarzfahrer. Gegenüber 2009 ist das ein leichtes Minus von 300 Beanstandungen. Für die Graz-Linien ist das ein Beweis für den Erfolg der strengen Kontrollen. Für den Vorstand der Graz-Linien steht darum eines fest: „Wir werden im Interesse unserer zahlenden Fahrgäste auch 2011 die Kontrollen im gleichen Ausmaß fortsetzen." Denn den Graz-Linien entgehen durch den Volkssport Schwarzfahren jedes Jahr Millionen. Rechnet man die Quote der bei den Kontrollen ertappten Schwarzfahrer (ca. 5 %) auf die Gesamtzahl der beförderten Personen hoch (ca. 100 Mio. pro Jahr), dann werden aus 36 449 schnell fünf Millionen, die aufs Ticket pfeifen ... (Quelle: Meine Woche Graz, April 2011, adaptiert)

In diesem Zeitungsartikel wird der Begriff *Schwarzfahrer* für Personen, die ohne gültigen Fahrschein angetroffen werden, verwendet. Fahrgäste, die ihre Zeitkarte (z. B. Wochenkarte, Schülerfreifahrtsausweis) nicht bei sich haben, gelten nicht als Schwarzfahrer/innen.

Nach Angaben der Graz-Linien beträgt der Anteil der Schwarzfahrer/innen etwa 5 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle *Jakominiplatz* in einen Wagen der Straßenbahnlinie 5 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste. An der Haltestelle *Hauptplatz* steigen sie in einen Wagen der Linie 3 um, in dem sie alle 18 Fahrgäste kontrollieren.

Aufgabenstellung:

a) Es soll die Wahrscheinlichkeit p_1 berechnet werden, dass die Kontrolleure mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer ermitteln, aber erst in der Linie 3 auf diese Person treffen. Geben Sie einen geeigneten Term an, mit dem diese Wahrscheinlichkeit p_1 ermittelt werden kann, und berechnen Sie diese!

Es sei p_2 die Wahrscheinlichkeit, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer zu treffen. Begründen Sie, warum p_2 größer als p_1 sein muss, ohne p_2 zu berechnen!

b) Es wird angenommen, dass bei den durchgeführten Kontrollen nur 1 % aller fünf Millionen Personen, die keinen Fahrschein mithaben, entdeckt werden. Man weiß, dass 10 % dieser fünf Millionen Personen eine Zeitkarte besitzen, die sie aber nicht bei sich haben, und daher nicht als Schwarzfahrer/innen gelten. Wird eine Schwarzfahrerin/ein Schwarzfahrer erwischt, muss sie/er zusätzlich zum Fahrpreis von € 2 noch € 65 Strafe zahlen. Gehen Sie davon aus, dass im Durchschnitt die nicht erwischten Schwarzfahrer/innen jeweils entgangene Einnahmen eines Einzelfahrscheins von € 2 verursachen.

Berechnen Sie den in einem Jahr durch die Schwarzfahrer/innen entstandenen finanziellen Verlust für die Grazer Linien!

Das Bußgeld müsste wesentlich erhöht werden, um eine Kostendeckung zu erreichen. Ermitteln Sie den neuen Betrag für ein kostendeckendes Bußgeld!

c) Die Anzahl der entdeckten Schwarzfahrer/innen nahm gegenüber 2009 um 300 ab und betrug 2010 nur mehr 36 449. Man geht davon aus, dass durch verstärkte Kontrollen eine weitere Abnahme der Anzahl an Schwarzfahrerinnen/Schwarzfahrern erreicht werden kann.

Beschreiben Sie diese Abnahme beginnend mit dem Jahr 2009 sowohl als lineares als auch als exponentielles Modell!

Geben Sie jeweils einen Funktionsterm an, der die Anzahl S der Schwarzfahrer/innen nach t Jahren, ausgehend von dem Jahr 2009, beschreibt!

Berechnen Sie die Anzahl der Schwarzfahrer/innen nach 10 Jahren, also im Jahr 2019, mit beiden Modellen! Welche Schlussfolgerungen über die beiden Modelle ziehen Sie aus dem Ergebnis?

Möglicher Lösungsweg

a) $p_1 = 0{,}95^{25} \cdot (1 - 0{,}95^{18}) \approx 0{,}1672$

Mögliche Argumentationen:

- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 18 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu finden. Die Wahrscheinlichkeit p_2, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit p$_1$, da die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Kontrollierten eher 1 Schwarzfahrer/in anzutreffen, größer ist als unter 18 Kontrollierten.
- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen keine Schwarzfahrerin/keinen Schwarzfahrer zu finden. Diese ist kleiner als 0,5. Die Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen. p_2 ist größer als 0,5, also $p_2 > p_1$.

b) Der zu erwartende Verlust wird wie folgt berechnet:

10 % der Fahrgäste ohne Fahrschein besitzen eine Zeitkarte, daraus folgt, dass 90 % von den 99 % Schwarzfahrer/innen sind.

$V = (-0{,}99 \cdot 0{,}9 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 0{,}9 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 = (-0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 \approx -1{,}197 \cdot 5\,000\,000 \approx$ € $-5.985.000$

Soll der Verlust $V = 0$ sein, dann gilt: $0 = -0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot B \rightarrow B =$ € 198.
Das Bußgeld B müsste auf € 198 erhöht werden.

c) lineare Abnahme: $S(t) = 36\,749 - 300 \cdot t$
exponentielle Abnahme: $S(t) = 36\,749 \cdot (36\,449/36\,749)^t$

Bei linearer Abnahme sind es nach 10 Jahren noch 33 749, bei exponentieller Abnahme 33 857 Personen. Der Unterschied ist gering und beide Modelle sind für diesen Zeitraum gleich gut.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Treibstoffverbrauch

Aufgabennummer: 2_015	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch y des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0{,}00002x^4 + 0{,}6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Geben Sie den Term der Funktion f an!

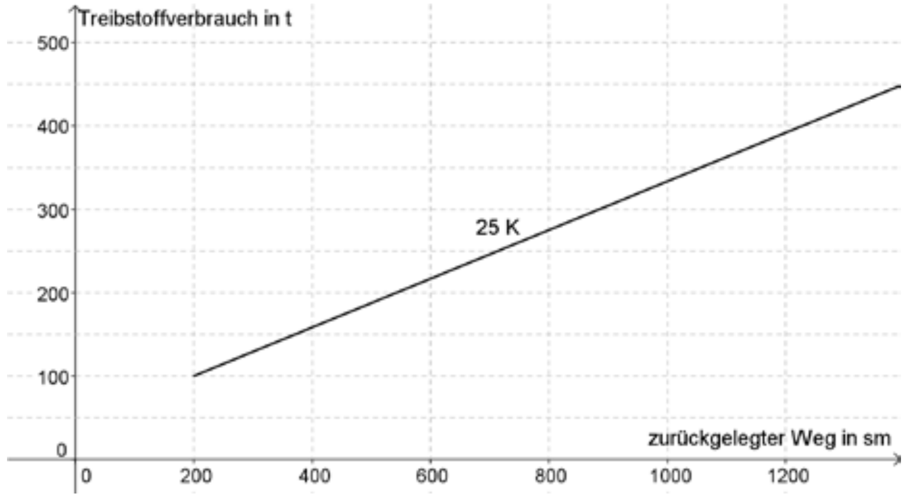
Die Funktion f hat in $H\,(10|7\,500)$ ein Maximum. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlegen Sie, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichnen Sie den entsprechenden Graphen ein!

Interpretieren Sie, was die 50%ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!



c) Eine Reederei hat den Auftrag erhalten, in einem vorgegebenen Zeitraum eine bestimmte Warenmenge zu transportieren. Ursprünglich plante sie, dafür acht Schiffe einzusetzen.

Geben Sie an, wie viele zusätzliche Schiffe gleichen Typs bei einer Drosselung der Geschwindigkeit von 25 auf 20 Knoten erforderlich sind, damit der Auftrag zeitgerecht ausgeführt werden kann! (Die Stehzeiten der Schiffe sind dabei zu vernachlässigen.)

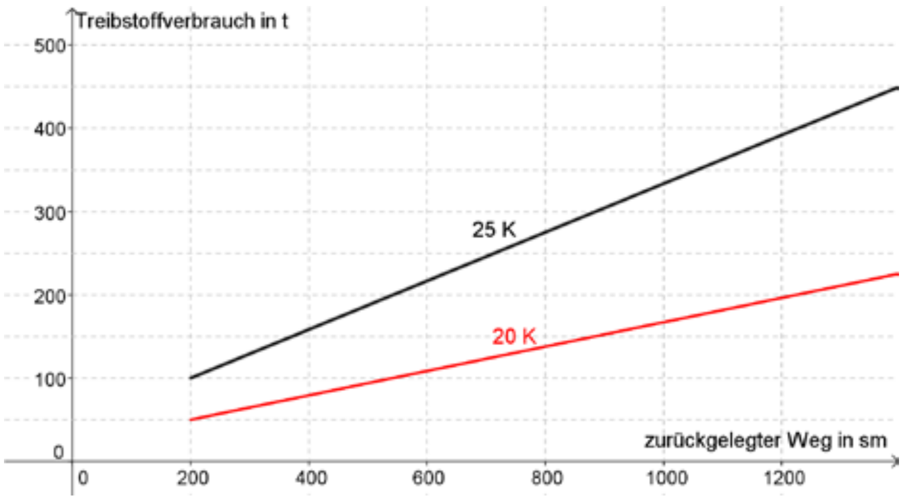
Geben Sie eine Formel an, mit der die erforderliche Anzahl der Schiffe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit *x* ermittelt werden kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $t = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6}$; $f(x) = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.

b)



Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn die Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

Anzahl der Schiffe = $\frac{200}{x}$

Produktionskosten*

Aufgabennummer: 2_016	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: FA 1.6, FA 2.3, FA 1.5, FA 2.2, AN 3.3, AN 1.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

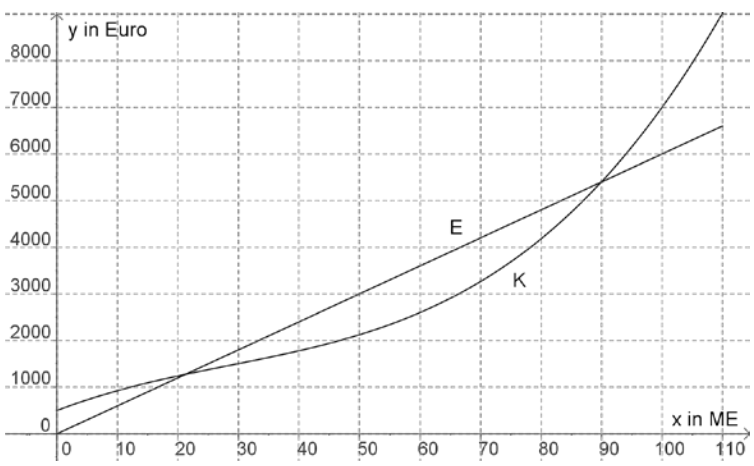
Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu.

Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.

Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.

Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



* Diese Aufgabe wurde dem unter https://www.bifie.at/node/1976 abrufbaren Dokument *Exemplarische Typ-2-Aufgaben* entnommen.

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!
Beschreiben Sie, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion E auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!

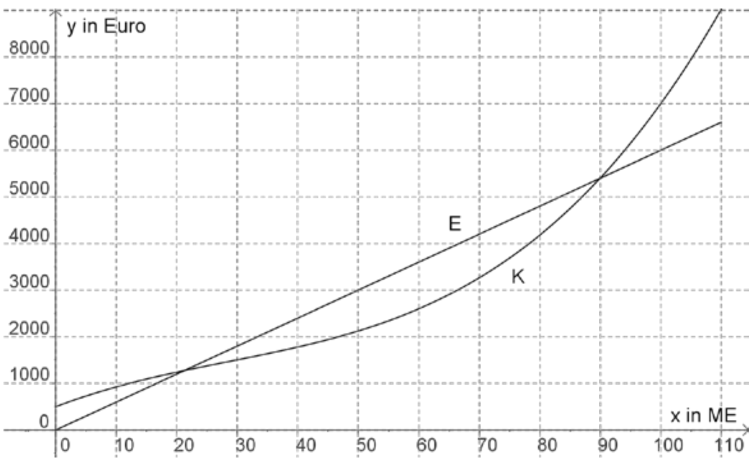
b) Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!

c) Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	☐
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☑
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	☐
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☑
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

Erklären Sie ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen!

d) Deuten Sie die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermitteln Sie anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1, für die dies zutrifft!
Begründen Sie, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!



Möglicher Lösungsweg

a) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn **beide** Grenzen des Grenzbereichs richtig angegeben sind, z. B.: *Bei einer Produktion von 2 100 bis 9 000 Stück wird Gewinn erzielt* (Toleranz bei Gewinngrenzen: ± 100 Stück).

Weiters muss eine richtige Interpretation angeführt sein, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Gewinnbereich auswirkt, z. B.: *Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner („schmäler") wird.*

Als richtig zu werten ist auch die Antwort, dass bei einer starken Senkung des Verkaufspreises bei allen Produktionsmengen Verlust erzielt wird.

b) **Fixkosten**: 500 Euro (Toleranz: ± 100 Euro)

Verkaufspreis pro ME: $\frac{3000}{50}$ = 60 Euro (Toleranz: ± 5 Euro)

Falls der Verkaufspreis durch ein „zu kleines" Steigungsdreieck sehr ungenau abgelesen wird (z. B. 50 Euro), so ist das Ergebnis als falsch zu werten.

c) Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☒
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☒

Zudem muss eine Erklärung angegeben sein, z. B.:
K'(x) beschreibt die Steigung der Kostenfunktion (oder: Steigung der Tangente) an der Stelle x (bei Produktion von x ME).
K''(x) beschreibt die Änderung der Steigung, also das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion an der Stelle x.
Im degressiven Bereich ist der Graph von K rechtsgekrümmt und im progressiven Bereich ist der Graph von K linksgekrümmt.

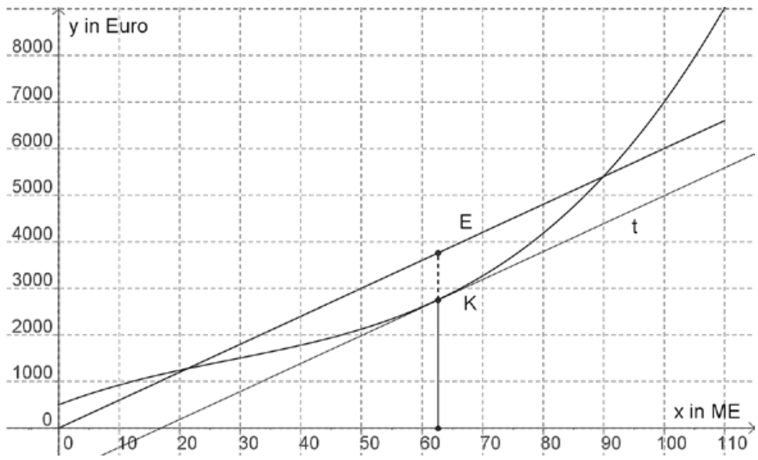
Auch folgende bzw. alle anderen inhaltlich richtigen Formulierungen sind als richtig zu werten:
K' beschreibt das Monotonieverhalten von K, d. h. falls K'(x) > 0 ist, steigt K an der Stelle x.
K'' beschreibt das Monotonieverhalten von K', d. h. falls K''(x) > 0 ist, steigt K' an der Stelle x (d. h., die Kostensteigerung nimmt zu).

Anmerkung: Aus der Antwort muss jedenfalls ersichtlich sein, welche geometrische Bedeutung K' und K'' besitzen, der Begriff *Monotonieverhalten* alleine ist nicht ausreichend.

d) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn die richtige geometrische Deutung angegeben ist und x_1 bestimmt ist (falls x_1 nur eingezeichnet ist, der Wert aber nicht angegeben ist, so ist dies auch als richtig zu werten), z. B.: *Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von K und der Graph von E an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen.*
Oder: *Die Tangente t an den Graphen von K verläuft parallel zum Graphen von E.*
Dies ist bei ca. 63 ME der Fall (Toleranz: ± 3 ME).

Zudem muss die Interpretation angegeben sein, dass an der gesuchten Stelle $G'(x) = 0$ gilt und somit $G(x_1)$ der maximale Gewinn ist, z. B.: *Wegen der Beziehung* $G(x) = E(x) - K(x)$ *gilt:* $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.
Somit gilt: $G'(x_1) = E'(x_1) - K'(x_1) = 0$ *und* $G(x_1)$ *ist daher der maximale Gewinn.*
(Anmerkung: Der Nachweis des Maximums (Monotoniewechsel von G an der Stelle x_1) ist nicht erforderlich.)

Auch die geometrische Begründung, dass der vertikale Abstand zwischen Erlös- und Kostenkurve an der Stelle x_1 am größten ist, ist als richtig zu werten, falls dieser Abstand (strichlierte Linie) richtig eingezeichnet ist.



Emissionen

Aufgabennummer: 2_017	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒	
Grundkompetenzen: AN 1.1, WS 1.1, AN 1.3, FA 1.9		
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Laut Immissionsschutzgesetz – Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h.

Abbildung 1 zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge von Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten (in km/h) für einen durchschnittlichen PKW. Die freigesetzte NO_x-Menge wird in Gramm pro gefahrenem Kilometer angegeben. Die Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und NO_x-Ausstoß wurde durch eine Funktion *A* modelliert, deren Graph ebenfalls in Abbildung 1 dargestellt ist.

Abbildung 2 zeigt den Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (= Emission) von Stickoxiden und Feinstaub (PM 10) im Unterinntal in Tirol.

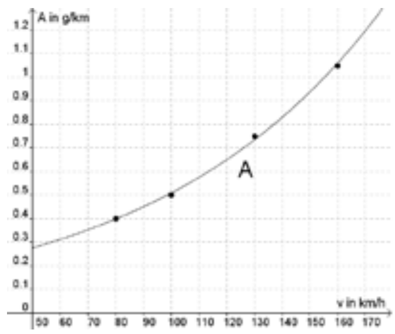


Abbildung 1

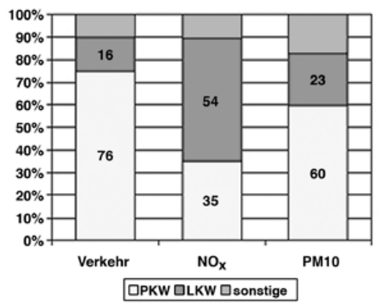


Abbildung 2

Quelle: http://www.tirol.gv.at/themen/verkehr/verkehrsplanung/verkehrsprojekte/tempo100

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie anhand der Messwerte in Abbildung 1, um wie viele Prozent der Stickoxid-Ausstoß eines PKW abnimmt, wenn statt der sonst erlaubten 130 km/h nur mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf!
Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion *A* in Abbildung 1.

* Diese Aufgabe wurde dem unter https://www.bifie.at/node/1976 abrufbaren Dokument *Exemplarische Typ-2-Aufgaben* entnommen.

b) Verursachen im Tiroler Unterinntal die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- bzw. Feinstaub-Emissionen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Geschwindigkeitsmessungen auf der Autobahn A12 im Tiroler Unterinntal haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitslimits von mehr als 90 % der Verkehrsteilnehmer/innen eingehalten werden und weniger als 1 % der Verkehrsteilnehmer/innen die Geschwindigkeitslimits um mehr als 10 % überschreiten. Die Geschwindigkeitsüberschreitungen können daher für die folgende Fragestellung vernachlässigt werden.
Begründen Sie, welche der beiden Maßnahmen (A oder B) wirkungsvoller ist, wenn entlang der A12 die Stickoxid-Emissionen weiter reduziert werden sollten! Durch Maßnahme A eventuell anfallende zusätzliche Emissionen durch die Bahn werden vernachlässigt.

A eine Verlagerung der Hälfte des Gütertransports durch LKW auf die Schiene (d. h. Transport der LKW mit der Bahn)
B ein Tempolimit von 80 km/h für PKW und LKW

Entnehmen Sie die für die Begründung benötigten Werte den Abbildungen 1 und 2 und führen Sie diese an!

c) Ermitteln Sie rechnerisch anhand von Abbildung 1 das Ergebnis des Ausdrucks $\frac{A(160) - A(100)}{60}$ auf vier Dezimalstellen genau!
Interpretieren Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks im Hinblick auf die NO_x-Emissionen!

d) Zur Modellierung der in Abbildung 1 dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes A von der Fahrgeschwindigkeit v kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion A verwendet worden sein? Kreuzen Sie die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	☐

Begründen Sie, warum die drei restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung von A in Abbildung 1 nicht geeignet sind!

Möglicher Lösungsweg

a) Richtige Berechnung der Abnahme der NO_x-Emissionen: $\frac{0,5}{0,75} \approx 0,67$.
Der Stickoxid-Ausstoß nimmt um ungefähr 33 % ab.
Alle Ergebnisse im Intervall [30 %; 35 %] sind als richtig zu werten.

Auch die Antwort, dass die Emissionen bei einer Reduktion der Geschwindigkeit auf 100 km/h nur mehr 67 % des Wertes bei 130 km/h betragen, ist als richtig zu werten (Lösungsintervall, falls die noch vorhandenen Emissionen angegeben werden: [65 %; 70 %]).

Zudem muss eine Begründung angegeben sein, dass A nicht direkt proportional zu v ist, z. B.: *Der Stickoxid-Ausstoß ist nicht direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit, weil der Graph von A nicht linear verläuft.*

Auch andere, aus der Abbildung ableitbare Formulierungen wie z. B. *Nicht direkt proportional, weil sich die Emissionen mehr als verdoppeln, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird*, aufgrund derer eine direkte Proportionalität ausgeschlossen werden kann, sind als richtig zu werten.

b) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn sinngemäß begründet ist, dass PKW zwar den größten Anteil an den Feinstaub-Emissionen besitzen, bei den Stickoxid-Emissionen aber die LKW die Hauptverursacher sind, z. B.: *Im Tiroler Unterinntal haben PKW mit 76 % den größten Anteil am Verkehrsaufkommen. Sie verursachen mit 60 % zwar den größten Anteil der Feinstaub-Emissionen, aber nur 35 % der Stickoxid-Emissionen.*
Anmerkung: Die Zahlenwerte müssen nicht angeführt sein.

Zudem muss eine schlüssige Begründung angegeben werden, dass Maßnahme A wirkungsvoller für eine Stickoxid-Reduktion ist, z. B.: *LKW verursachen 54 % der NO_x-Emissionen im Straßenverkehr, obwohl ihr Anteil am Verkehrsaufkommen nur 16 % beträgt. Eine Reduktion des LKW-Verkehrs auf die Hälfte würde die NO_x-Emissionen um ca. 27 % reduzieren.*
PKW haben zwar einen Anteil von 76 % am Verkehrsaufkommen, sind aber nur für 35 % der NO_x-Emissionen verantwortlich. Durch eine Reduktion des Tempolimits von 130 km/h auf 80 km/h könnten laut Abbildung 1 maximal die Hälfte dieser Emissionen, also etwa 17 %, vermieden werden. Eine Verlagerung der Hälfte des LKW-Verkehrs auf die Schiene wäre daher die wirkungsvollere Maßnahme zur Reduktion der NO_x-Emissionen.
Anmerkung: Auch eine Begründung mit gerundeten relativen Anteilen (*drei Viertel* etc.) ist als richtig zu werten.

c) Richtige Berechnung des Differenzenquotienten: $\frac{A(160) - A(100)}{60} = \frac{1,05 - 0,5}{60} \approx 0,0092$, wobei Ergebnisse aus dem Intervall [0,0088; 0,0095] als richtig zu werten sind. Die Angabe der Einheit ist nicht erforderlich.

Zudem muss der Differenzenquotient richtig interpretiert werden, z. B.: *Wenn die Geschwindigkeit von 100 km/h auf 160 km/h erhöht wird, beträgt die mittlere Zunahme der NO_x-Emissionen 0,0092 g/km pro km/h.*

Auch analoge Formulierungen wie z. B. *mittlere Änderungsrate des Stickoxid-Ausstoßes* sind als richtig zu werten. Das Geschwindigkeitsintervall [100 km/h; 160 km/h] muss in der Interpretation in irgendeiner Form vorkommen.

d) Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	☒
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	☒

Zudem müssen drei sinngemäß richtige Begründungen angegeben sein, warum die restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung nicht geeignet sind, z. B.:

Der Graph von $A(v) = a \cdot v + b$ ist linear und daher nicht geeignet.
Der Graph von $A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und daher nicht geeignet.
Der Graph von $A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$ ist fallend und daher nicht geeignet.

Wiener U-Bahn

Aufgabennummer: 2_018	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, FA 1.7, FA 5.3	

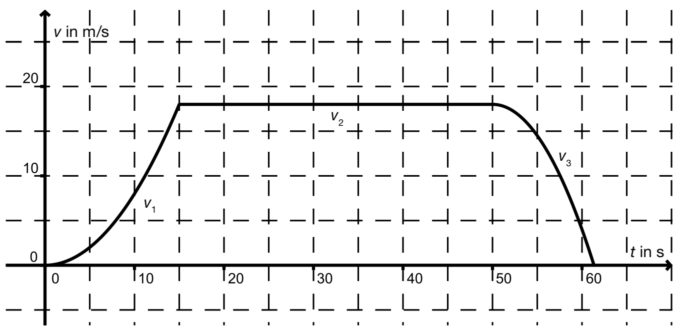
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Aspernstraße*. Die Gesamtstrecke der U2 beträgt 12,531 km (Stand 2012).

Quelle: http://www.wienerlinien.at/media/download/2012/Linie_U2_68801.pdf

Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* fährt die U-Bahn nahezu geradlinig und benötigt für diese 855 m lange Strecke ca. eine Minute.
Betrachtet man die Geschwindigkeit eines Zuges zwischen diesen beiden Stationen, so lässt sie sich näherungsweise durch drei Funktionen beschreiben. Diese Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dargestellt. Die Zeit t ist in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben.

$v_1(t) = 0{,}08t^2$ [0; 15)
$v_2(t) = 18$ [15; 50)
$v_3(t) = -0{,}14(t - 50)^2 + 18$ [50; 61,34]



* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den die U-Bahn im Zeitintervall [15; 50] zurücklegt!

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v_3(t) = -0{,}14(t - 50)^2 + 18$ verwendet.
Erläutern Sie, in welcher Weise eine Veränderung des Parameters von –0,14 auf –0,2 den Bremsvorgang beeinflusst!

b) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Zuges vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit!

Erklären Sie, wieso der Verlauf des Graphen des *v*-*t*-Diagramms im Intervall [14; 16] nicht exakt der Realität entsprechen kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $18 \cdot (50 - 15) = 630$
Der Weg ist 630 m lang.

Eine Veränderung des Parameters von −0,14 auf −0,2 würde bedeuten, dass der Zug „stärker" (d. h. mit einer größeren negativen Beschleunigung) bremst und daher rascher zum Stillstand kommt. Auch der Bremsweg verkürzt sich.

b) Mittlere Beschleunigung: $\overline{a_1}(0; 15) = \frac{v_1(15) - v_1(0)}{15 - 0} = \frac{18}{15} = 1{,}2\ \text{m/s}^2$

Bei diesem Geschwindigkeitsverlauf würden die Fahrgäste einen zu starken Ruck bei 15 s verspüren. Um diesen Ruck zu vermeiden, müsste in Wirklichkeit die Geschwindigkeitsfunktion ihre Steigung allmählich ändern, sodass kein Knick (wie jetzt) entsteht. Der Knick des Funktionsgraphen würde einen plötzlichen Sprung der Beschleunigung und somit einen für die Fahrgäste unangenehmen Ruck bedeuten. (Adäquate Erklärungen sind als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

a)
- 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der Weglänge
- 1 Reflexionspunkt für die Erläuterung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *kürzerer Bremsweg, schnellerer Stillstand, stärkere negative Beschleunigung, stärkere Bremsung.*

b)
- 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der mittleren Beschleunigung
- 1 Reflexionspunkt für die Erklärung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *plötzlicher Ruck, unstetige Änderung der Steigung, ruckartige Beschleunigungsveränderung.*

Grippeepidemie

Aufgabennummer: 2_019	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

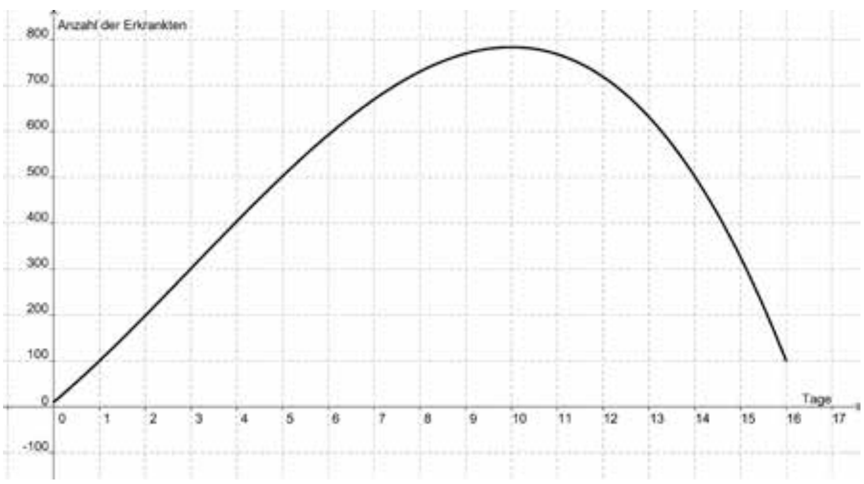
Grundkompetenzen: AN 3.3, FA 1.5, AN 1.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:

1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.
2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.
3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.
4) Am 8. Tag sind bereits 730 Personen erkrankt.
5) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.



Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\frac{E(8) - E(0)}{8}$!

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, die eine korrekte Interpretation des Ausdrucks $\frac{E(8)-E(0)}{8}$ ist/sind!

Der Ausdruck gibt die prozentuelle Änderung der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage an.	☐
Der Ausdruck gibt die Zunahme der Anzahl an Erkrankten in den ersten 8 Tagen an.	☐
Der Ausdruck gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grippewelle am 8. Tag an.	☐
Der Ausdruck beschreibt, wie viele Neuerkrankte es am 8. Tag gibt.	☐
Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	☑

b) Zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt:

1) $d = 10$
2) $a + b + c + d = 100$
3) $18a + 2b = 0$
4) $300a + 20b + c = 0$

Geben Sie an, welche der angegebenen Informationen durch die vierte Gleichung modelliert werden kann, und erklären Sie den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung!

c) Geben Sie an, an welchem Tag die progressive Zunahme der Anzahl an Erkrankten (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten wird von Tag zu Tag größer) in eine degressive Zunahme (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten nimmt pro Tag wieder ab) übergeht!

Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, mit der/denen man eine progressive Zunahme bestimmen kann!

$E'(t) > 0$	☐
$E(t) \geq 0$	☐
$E(t_1) < E(t_2)$ für alle $t_1 > t_2$	☐
$E''(t) > 0$	☐
$E'(t) = E''(t) = 0$	☐

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{E(8) - E(0)}{8} = \frac{730 - 10}{8} = 90$

(Innerhalb der ersten 8 Tage nimmt die Anzahl der Erkrankten um durchschnittlich 90 Personen pro Tag zu.)

Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	☒

b) „Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum" bzw. die 5. Information

Diese Textstelle beschreibt das lokale Maximum (den Hochpunkt), d. h., an dieser Stelle gilt: $E'(10) = 0$.

Durch das Aufstellen der ersten Ableitungsfunktion und das Einsetzen des Wertes $t = 10$ erhält man die nachstehende Gleichung:

$$E'(t) = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow E'(10) = 300a + 20b + c = 0$$

c) Am 3. Tag.

$E''(t) > 0$	☒

Lösungsschlüssel

a) – 1 Grundkompetenzpunkt (für die Berechnung des Ausdrucks)
– 1 Reflexionspunkt (für das richtige Ankreuzen der zutreffenden Aussage)

b) 2 Reflexionspunkte, davon:
– 1 Punkt für das Erkennen der zugehörigen Information
– 1 Punkt für die Erklärung (dieser Punkt ist auch zu geben, wenn die Erklärung nur in verbaler Form vorliegt oder nur die Rechenschritte durchgeführt wurden)

c) – 1 Reflexionspunkt für die kontextbezogene Frage
– 1 Grundkompetenzpunkt für das alleinige Ankreuzen der richtigen Aussage

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Höhe der Schneedecke

Aufgabennummer: 2_FT001	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.1, AN 1.3, FA 1.1, FA 2.2, FA 3.1	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie (teilweise) erforderlich

Die Höhe $H(t)$ einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit t ab. Zuerst ist die Abnahme gering, mit der Zeit wird sie aber immer stärker. Daher kann die Höhe der Schneedecke durch folgende quadratische Funktion $H(t)$ beschrieben werden:

$$H(t) = H_0 - a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad a > 0,\ t \geq 0$$

(H wird in cm und t in Tagen gemessen, H_0 beschreibt die Schneehöhe zu Beginn der Messung)

Das beschriebene Modell gilt in guter Näherung bei einer Witterung mit gleichbleibender Temperatur bis zur vollständigen Schneeschmelze. Dabei wird vorausgesetzt, dass bis zur vollständigen Schneeschmelze kein weiterer Schnee hinzukommt.

Aufgabenstellung:

a) Eine 20 cm dicke Schneedecke reduziert sich innerhalb von 12 Stunden auf 18 cm. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an) ist der Schnee gänzlich geschmolzen? Geben Sie die Lösung auf zwei Dezimalstellen genau an!

Wie wirkt sich eine Erhöhung des Parameters a auf $H(t)$ aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) In einem Alpendorf gilt für die Schneehöhe H (gemessen in cm) und die Zeit t (gemessen in Tagen) der folgende funktionale Zusammenhang:

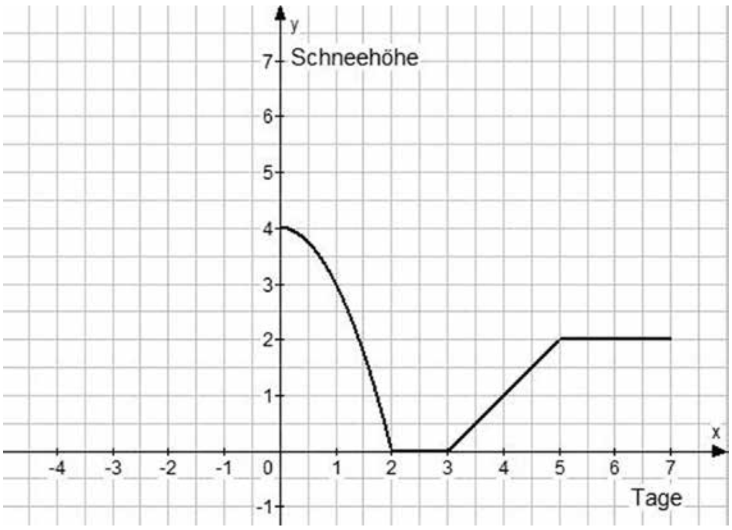
$$H(t) = 40 - 5t^2$$

Wie hoch ist die mittlere Änderungsrate der Schneehöhe innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung? Berechnen Sie diese!

Begründen Sie, warum die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall [0; 3] mithilfe der angegebenen Funktion nicht sinnvoll ist, um Aussagen über den Verlauf der Höhe der Schneedecke zu machen!

c) Berechnen Sie $H'(0{,}5)$ für $H(t) = H_0 - a \cdot t^2$ und $a = 3$!
Deuten Sie das Ergebnis hinsichtlich der Entwicklung der Schneehöhe H!

d) Der nachstehende Graph beschreibt idealisiert den Verlauf der Schneehöhe in Dezimetern innerhalb einer Woche in einem Alpendorf.



Handelt es sich bei diesem Graphen um eine auf [0; 7] definierte Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bestimmen Sie die Gleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ einer Funktion f, welche den Graphen im Intervall [3; 5] beschreibt!

Möglicher Lösungsweg

a) Frage 1:
$18 = 20 - a \cdot 0{,}5^2 \Rightarrow a = 8$; $20 - 8t^2 = 0 \Rightarrow t = 1{,}58$ Tage

Frage 2:
Je größer *a*, desto schneller nimmt die Schneehöhe ab!

b) Frage 1:
$\frac{H(2) - H(0)}{2} = \frac{20 - 40}{2} = -10$ cm/Tag

Frage 2:
Der Anwendungsbereich (Definitionsbereich) der Formel $H(t)$ liegt im Bereich $[0; \sqrt{8}]$, wobei $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ die positive Nullstelle von $H(t)$ ist.

Da [0; 2,8] eine Teilmenge des Intervalls [0; 3] ist, ist die Berechnung des Differenzenquotienten im Intervall [0; 3] nicht sinnvoll.

Oder:

An der Stelle $t = 3$ wird der Funktionswert $H(t)$ negativ. Die Schneehöhe *H* kann allerdings nicht negativ sein, daher ist die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Intervall [0; 3] nicht sinnvoll.

c) Frage 1:
$H(t) = H_0 - 3 \cdot t^2$
$H'(t) = -6 \cdot t$
$H'(0{,}5) = -3$ cm/Tag

Frage 2:
Nach $t = 0{,}5$ Tagen nimmt die Höhe der Schneedecke mit einer Geschwindigkeit von 3 cm/Tag ab.

d) Frage 1:
Der Graph beschreibt eine Funktion, da jedem Zeitpunkt *x* genau eine Schneehöhe *y* zugeordnet wird.

Frage 2:
$f(3) = 0 \Rightarrow 0 = k \cdot 3 + d$
$f(5) = 2 \Rightarrow 2 = k \cdot 5 + d$
daher: $k = 1$; $d = -3$
$y = x - 3$

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

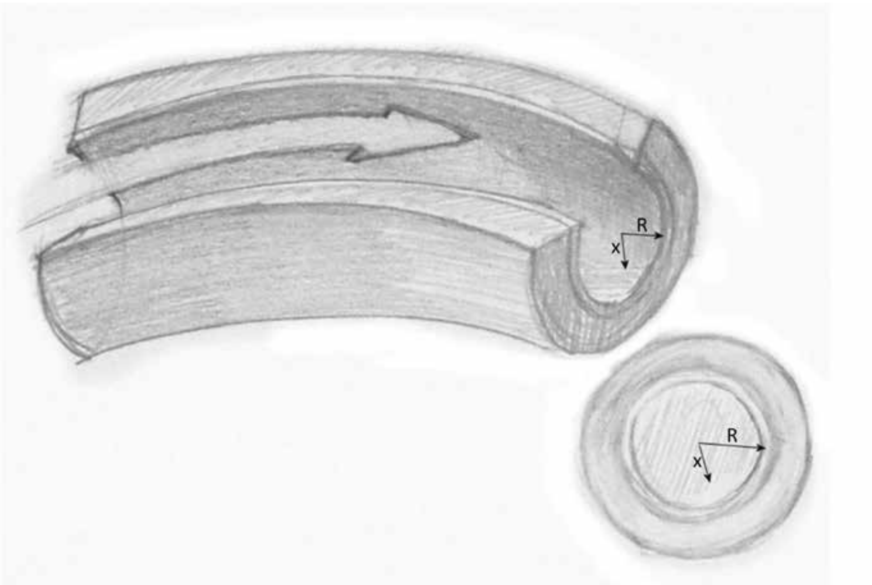
Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 2.1, FA 1.7

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In einem Blutgefäß hängt die Geschwindigkeit v des Blutes davon ab, wie groß der Abstand x zum Mittelpunkt ist. Ein gültiger Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und dem Abstand x kann mittels einer Formel $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$ modelliert werden.



(Bild aus http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php, ergänzt durch Pfeile und Beschriftung)

Die in der Formel auftretenden Größen sind im Folgenden beschrieben:

R ... Innenradius des Blutgefäßes in mm
v_m ... maximale Geschwindigkeit des Blutes im Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s
x ... Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in mm
$v(x)$ ... Geschwindigkeit des Blutes bei Abstand x vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Definitionsbereich für x an, der für das Blutgefäß sinnvoll ist, und begründen Sie, warum die Formel eine vereinfachte Beschreibung der Blutgeschwindigkeit ist!

b) In einem Lehrbuch der Medizin wird behauptet, dass beim Abstand $x = \frac{R}{2}$ die Geschwindigkeit des Blutes 75 % vom maximalen Wert beträgt. Um die Aussage mathematisch zu beweisen, wird der Ansatz $v(x) = \frac{3}{4} v_m$ gemacht, und damit wird die Stelle x berechnet.

Führen Sie die Berechnung von der Stelle x aus und zeigen Sie, dass man mit der Berechnung des Funktionswerts $v\left(\frac{R}{2}\right)$ zum gleichen Ergebnis kommt!

c) Formen Sie die gegebene Formel für $v(x)$ so um, dass man eine Funktion $x(v)$ erhält!

Erläutern Sie, was der Funktionswert $x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ für die Blutströmung bedeutet!

d) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v (bei Veränderung von x) beim Abstand x an und geben Sie an, was das Vorzeichen der Änderungsrate über das Verhalten der Blutströmung aussagt!

Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist $[0; R]$ (Minimalanforderung: Angabe des Intervalls).
Negative Abstände ($x < 0$) sind sinnlos, und $x > R$ würde bedeuten, dass das Blutkörperchen außerhalb des Blutgefäßes ist.

Die Formel ist deswegen eine Vereinfachung, weil das Blut am Innenrand des Blutgefäßes bestimmt nicht die Geschwindigkeit 0 hat.
Außerdem setzt die Formel voraus, dass das Blutgefäß an jeder Stelle einen kreisförmigen Querschnitt mit einem konstanten Radius R hat bzw. dass das Blutgefäß exakt zylinderförmig ist (Venen haben auch Venenklappen).
Schließlich strömt das Blut zeitlich nicht mit konstanter Geschwindigkeit, die Blutgeschwindigkeit verändert sich periodisch.

b) Lösungsweg 1:
Umformen: $\frac{3}{4}v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{x^2}{R^2} \Rightarrow \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

Lösungsweg 2:
$v\left(\frac{R}{2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{R^2}{4 \cdot R^2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = v_m \cdot \frac{3}{4}$

An der genannten Stelle ist der Funktionswert wieder 75 % von v_m.

c) $x(v) = R \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$

$x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ ist jener Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit auf die Hälfte des Maximalwertes abgesunken ist.

d) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2x}{R^2}$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeitsfunktion im gesamten Definitionsbereich $[0; R]$ streng monoton fallend ist. Für die Blutströmung bedeutet das, dass die Geschwindigkeit des Blutes vom Mittelpunkt der Vene bis zum Rand der Vene abnimmt.
Auch eine kurze Formulierung ist als korrekt zu werten: Negatives Vorzeichen → Geschwindigkeit nimmt ab.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Zehnkampf

Aufgabennummer: 2_FT003	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.3, FA 1.5, FA 1.8, WS 2.3, WS 3.2

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie (teilweise) erforderlich

Die „Königsdisziplin" der Leichtathletik ist bei den Männern der Zehnkampf. Dabei erhält jeder Athlet in jeder der 10 Disziplinen Punkte, die für jede Disziplin nach einer eigenen Formel errechnet werden. Für den Weitsprung gilt die Formel $P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$. Dabei ist x die Sprungweite in cm und P die Punktezahl (auf Ganze gerundet).
Im Bewerb sind 3 Sprünge erlaubt. Gewertet wird der weiteste fehlerfreie Sprung. Als Fehlversuch gilt in erster Linie das Übertreten beim Absprungbalken. Dies passiert in ca. 1 von 20 Versuchen. Der Weltrekord im Weitsprung liegt bei 895 cm.
Der Weltrekord im Zehnkampf wurde von Roman Šebrle 2001 beim Leichtathletikmeeting in Götzis aufgestellt und liegt bei 9026 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug dabei 811 cm.

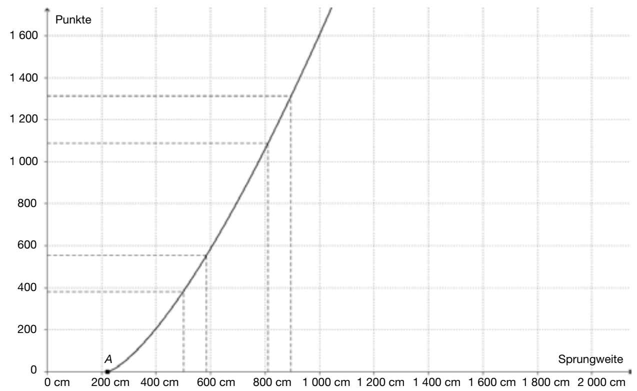
Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie, wie viele Punkte Roman Šebrle mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite gesprungen wäre!

Begründen Sie mit der Formel, warum erst Sprünge ab 220 cm einen Punktwert ergeben!

b) Eine Sprungleistungssteigerung um 84 cm bringt nicht von jedem Ausgangswert den gleichen durchschnittlichen Punktezuwachs (in Punkten/cm). Zeigen Sie das für die Intervalle [500 cm; 584 cm] und [811 cm; 895 cm] durch Rechnung!

Begründen Sie mithilfe der untenstehenden Graphik, warum ein absolut gleicher Weitenzuwachs für größere Ausgangswerte mehr Punkte bringt als für kleinere Ausgangswerte!



c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet die Weitsprungpunkte bei seinem Zehnkampf ohne Fehlversuch erhält!

Durch bessere Trainingsmethoden kann dieser Wahrscheinlichkeitswert erhöht werden, indem die Fehlerquote von 1 : 20 gesenkt wird, etwa auf 1 : *n*.
Wenn unter *n* Sprüngen nur ein Fehlversuch dabei ist, ergibt sich eine Erfolgsquote von $\frac{n-1}{n}$.
Begründen Sie damit, warum die oben genannte Wahrscheinlichkeit nie 1 sein kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $f(895) \approx 1\,312$
$f(811) \approx 1\,089$
Er hätte um 223 Punkte mehr erzielt.

Die Basis (der Radikand) wird erst ab 220 cm ≥ null. *(oder eine sinngemäße Formulierung)*

b) $\frac{f(584) - f(500)}{584 - 500}$ bzw. $\frac{f(895) - f(811)}{895 - 811}$

im ersten Intervall: ca. 2,02 Punkte/cm
im zweiten Intervall: ca. 2,65 Punkte/cm

Begründung: f ist streng monoton wachsend und steigt im zweiten Intervall schneller.
(Jede sinngemäß formulierte Antwort ist richtig.)

c) X ... Anzahl der Fehlversuche
$p = \frac{1}{20}$
$q = p - 1 = \frac{19}{20}$

$P(X = 0) = \ldots = \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0{,}857$
d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 85,7 %

Begründung: Da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist, ist $\frac{n-1}{n} < 1$. Daher muss auch die 3. Potenz < 1 sein.

Oder:
Sobald die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlversuch größer als 0 ist, muss die Wahrscheinlichkeit, dass 3 Sprünge ohne Fehlversuch gelingen, kleiner als 1 sein.
(Sinngemäße Argumentationen möglich!)

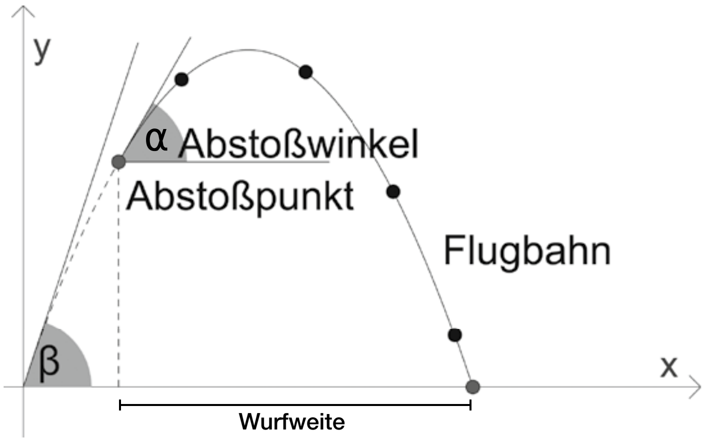
Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Kugelstoßen

Aufgabennummer: 2_FT004	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Für die Beschreibung der Flugbahn der gestoßenen Kugel beim Kugelstoßen kann mit guter Näherung die Gleichung der Wurfparabel verwendet werden.
Diese Gleichung lautet: $y = \tan\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta} \cdot x^2$ (g = 9,81 m/s²).
Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel und β der Winkel, unter dem die Parabel die x-Achse schneidet.
Die größte Wurfweite wird für β = 45° erzielt.



Die Computersimulation der Flugbahn der gestoßenen Kugel eines Athleten ergab für eine Gleichung der Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$. Der Abstoßpunkt der Kugel befand sich in einer Höhe von 2,1 m.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Größe des Abstoßwinkels α und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde! Runden Sie auf cm!

b) Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fallbeschleunigung g bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie für die Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$ die Größe des Winkels β und überprüfen Sie, ob dieser Athlet die größte Wurfweite erreicht hat!
Erläutern Sie, ob anhand der Parameter a und b in der allgemeinen Bahnkurve $y = ax - bx^2$ bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurfweite erzielt hat!

Möglicher Lösungsweg

a) f: $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$
Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad x_1 \approx 3{,}26 \quad x_2 \approx 10{,}74$

$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad f'(3{,}26) = 0{,}4488 \quad \tan\alpha = 0{,}4488 \quad \alpha \approx 24{,}18°$ bzw. $\alpha \approx 0{,}42$ rad
$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad 0 = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad x = 7 \quad f(7) = 2{,}94$
Die maximale Höhe der Kugel betrug 2,94 m.

b) f: $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$
Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad (x_1 \approx 3{,}26) \quad x_2 \approx 10{,}74$

Nullstellen: $0 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad (x_1 = 0)$ und $x_2 = 14$
$14 - 3{,}26 = 10{,}74$
Die Wurfweite der Kugel war 10,74 m.
Die Wurfweite wird bestimmt durch die rechte Nullstelle der Parabel:

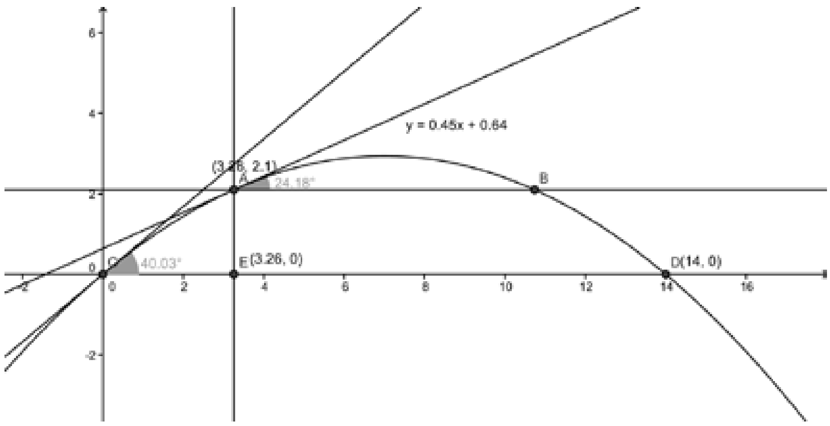
$$0 = \tan\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta} \cdot x^2$$
$$0 = x \cdot \left(\tan\beta - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta} \cdot x\right)$$
$$x = \frac{\tan\beta \cdot 2v_0^2 \cdot \cos^2\beta}{g}$$

Bei größerem g wird die Wurfweite kleiner. Es liegt eine indirekte Proportionalität vor.

c) $f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad f'(0) = k \quad \tan\beta = k \quad \beta \approx 40{,}03° < 45°$

Da der Winkel β ungleich 45° ist, könnte der Athlet durch Veränderung des Abstoßwinkels eine größere Wurfweite erzielen.

Oder Lösung mithilfe von Technologie:



Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Bevölkerungsentwicklung

Aufgabennummer: 2_FT005	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.1, FA 2.2, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie (teilweise) erforderlich

Die Weltbevölkerung ist in den vergangenen Jahrhunderten unterschiedlich stark gewachsen. Für die weitere Entwicklung bis zum Ende dieses Jahrhunderts gibt es unterschiedliche Prognosen.
Abbildung 1 zeigt die Bevölkerungsentwicklung in den vergangenen 3 000 Jahren.
Abbildung 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1750 bis 2000.
Abbildung 3 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1950 bis 2010.
Die untenstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.

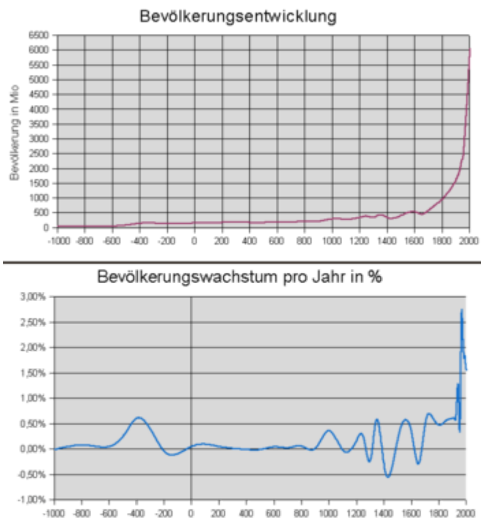


Abbildung 1

Abbildung 2

Abbildung 3

Jahr	Afrika	Asien	Europa	Lateinamerika	Nordamerika	Ozeanien
1900	133	925	430	74	82	6
1950	227	1 403	547	167	172	13
1975	419	2 379	676	323	242	21
2000	819	3 698	727	521	319	31

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie anhand der Abbildungen, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung von 1600 bis 1800 zugenommen hat!

Nennen Sie zwei Zeiträume, in denen die Weltbevölkerung mindestens 100 Jahre lang abgenommen hat, und begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die Weltbevölkerung hat von 1930 bis 1980 annähernd exponentiell zugenommen. Berechnen Sie unter dieser Annahme für diesen Zeitraum die jährliche Wachstumsrate auf Zehntelprozent genau!

c) Begründen Sie anhand der jährlichen Wachstumsraten aus Abbildung 3, warum die Entwicklung der Weltbevölkerung von 1950 bis 2010 nicht durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann!

Bei konstanter Zunahme der Bevölkerungszahl ab 2010 wird für das Jahr 2050 eine Bevölkerungszahl von 10,4 Milliarden prognostiziert.
Berechnen Sie, von welcher jährlichen Zunahme bei dieser Prognose ausgegangen wird! Geben Sie die jährliche Zunahme in Millionen Menschen an!

d) Angenommen, die absoluten Zahlen der Bevölkerungsentwicklung der Kontinente und Subkontinente im Zeitraum von 1900 bis 2000 werden in einem Säulendiagramm mit linearer Skalierung dargestellt.
Begründen Sie, warum die starke Bevölkerungszunahme in Ozeanien von 1900 bis 2000 in einem solchen Diagramm nicht erkennbar ist!

Gegeben sind fünf Aussagen zur Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	☐
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	☐
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	☐
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 geringer als von 1950 bis 1975.	☐
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	☐

Möglicher Lösungsweg

a) Zunahme von 1600 bis 1800: ca. 500 Millionen Menschen

Die Weltbevölkerung hat mindestens 100 Jahre lang abgenommen in [250 v. Chr.; 50 v. Chr.] (bzw. [–250; –50]) und [1400; 1500], da in diesen Zeitintervallen das jährliche Bevölkerungswachstum in % negativ ist.

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$4{,}5 = 2 \cdot a^{50}$

$a \approx 1{,}016$, d. h. Zunahme um 1,6 % pro Jahr

c) Bei einer exponentiellen Zunahme ist die jährliche Wachstumsrate konstant. Abbildung 3 zeigt, dass diese Voraussetzung im Zeitraum von 1950 bis 2010 nicht erfüllt ist.

Konstante jährliche Zunahme von 2010 bis 2050:
$\frac{10{,}4 - 6{,}9}{40} = 0{,}0875$ Milliarden = 87,5 Millionen

d) Da die Bevölkerungszahl Ozeaniens von 1900 bis 2000 jeweils weniger als 1 % der Bevölkerungszahl Asiens betrug, sind die entsprechenden Säulen für Ozeanien sehr niedrig (Höhe fast null).
Daher ist die Verfünffachung der Bevölkerungszahl Ozeaniens nicht erkennbar.

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	☒
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	☒
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 geringer als von 1950 bis 1975.	☒
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	