Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung umfasst die Untersuchung und Beschreibung von Zufallsexperimenten sowie -ereignissen. Bei der Diskussion der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind vor allem Begriffe wie *Zufallsereignis*, *Zufallsvariable*, *Ereignismenge*, *Erwartungswert* oder *Standardabweichung* wichtig. Ein ebenso essentieller Bestandteil der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Kombinatorik, durch welche sich Kombinationen und Permutationen von Ereignissen ermitteln lassen. Unter bestimmten Bedingungen wird die Modellierung eines Zufallsexperiment durch die *Binomialverteilung* möglich, welchem ein *Bernoulli-Experiment* zu Grunde liegt.

Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment wie das Werfen einer Münze oder eines Würfels ist ein Prozess, dessen Resultat so irregulär ist, dass es nicht definitiv vorhergesagt werden kann. Dennoch hat dieses Zufallsexperiment, sofern es diskret ist, einen bestimmten Ergebnisraum. Dieser Ergebnisraum wird *Ergebnismenge* Ω genannt und umfasst alle möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs. Ein einzelnes Element der Ergebnismenge Ω wird dabei als *Elementarereignis* ω bezeichnet. Liefert ein Zufallsversuch mehrere Elementarereignisse, werden diese in einem *Ereignis* zusammengefasst. Ein Ereignis A ist also eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω. Für jedes Ereignis A existiert außerdem ein logisches *Gegenereignis* A'. Dieses umfasst alle Elementarereignisse der Ergebnismenge, außer jene des Ereignisses A.

Ergebnismenge Ω … Alle bei einem Zufallsversuch möglichen Ergebnisse: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

Elementarereignis … Ein Element der Ergebnismenge: $\omega \in \Omega$

Ereignis A … Die Menge aller bei einem Zufallsversuch auftretenden Elementarereignisse: $A \subseteq \Omega$

Gegenereignis A' … Die Menge aller ω, die bei einem Ereignis nicht auftreten: $A' = \Omega \setminus A$

Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

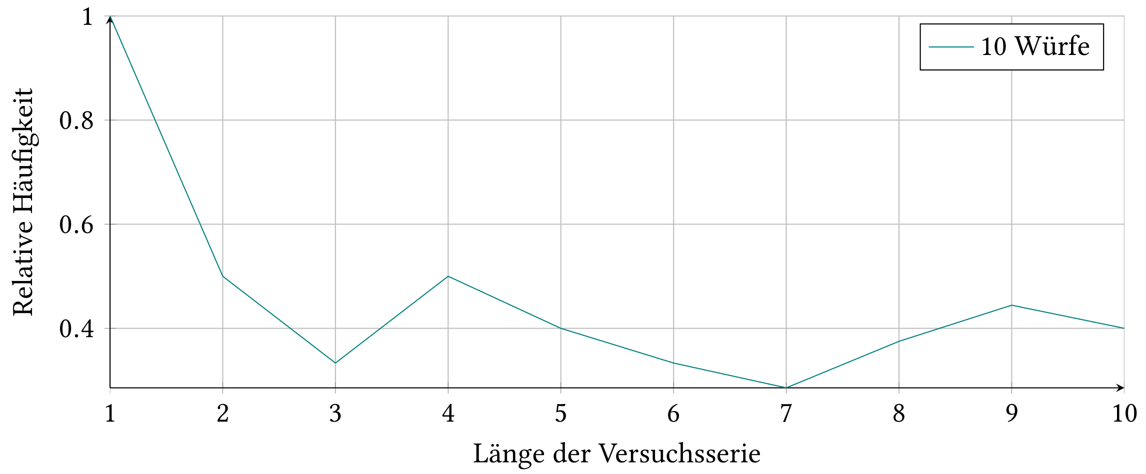
Die *theoretische* Wahrscheinlichkeit eines Zufallsereignisses ist ihr relativer Anteil an der Ergebnismenge. Beispielsweise ist die theoretische Wahrscheinlichkeit, eine beliebige Zahl zu würfeln, jeweils $1 \div 6 \approx 0.167$. Dies folgt daraus, dass der relative Anteil des Ereignises A, welches eine beliebige Zahl umfasst, genau ein Sechstel der Ergebnismenge Ω ausmacht, welches sechs Zahlen umfasst. Führt man ein solches Zufallsexperiment durch, wird man jedoch merken, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei einer kleinen Versuchsserie stark von der theoretischen Wahrscheinlichkeit abweicht. Beispielsweise ist es meistens nicht der Fall, dass bei sechs Würfen eines Würfels jede Zahl genau einmal vorkommt. Erst bei einer großen Anzahl an Durchführungen nähert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses seiner theoretischen Wahrscheinlichkeit. So mag nach sechs Würfen eines Würfels die relative Häufigkeit jeder Zahl meist stark von den theoretisch erwarteten ˜16.67 Prozent abweichen, so wird sie sich jedoch nach einer sehr langen Versuchsreihe — eine Million Würfe — stark an die theoretische Wahrscheinlichkeit nähren. Dieses Phänomen wird das „empirische Gesetz der großen Zahlen“ genannt.

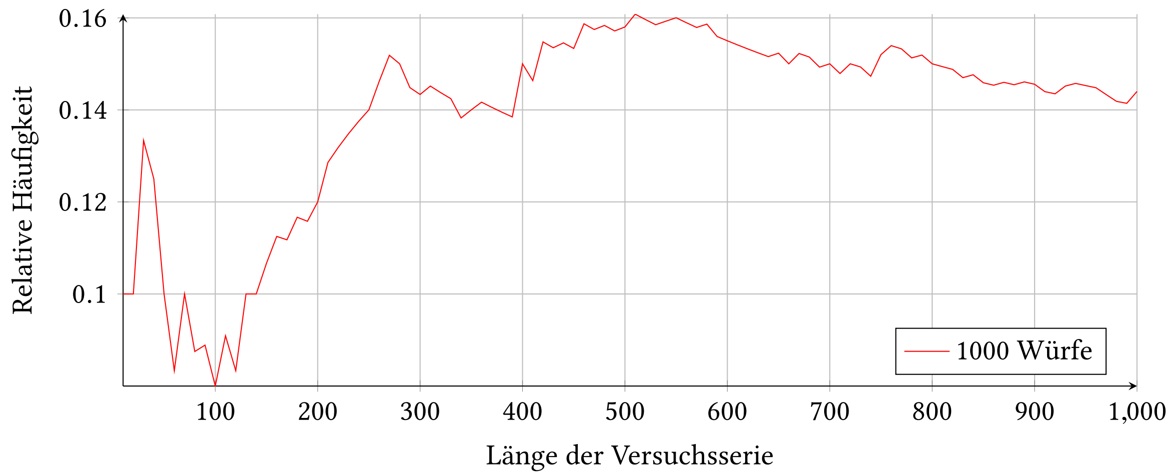
Theoretische Wahrscheinlichkeit … der relative Anteil eines Ereignisses an der Ergebnismenge

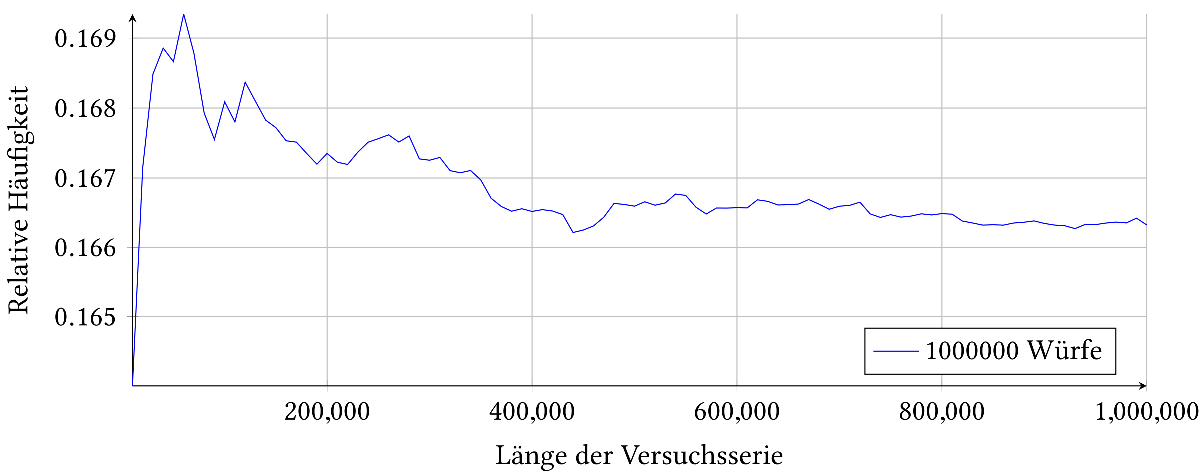
Empirische Wahrscheinlichkeit … die Häufigkeit eines Zufallsreignisses relativ zur Versuchsserie

Die Theoretische Wahrscheinlchkeit ist also der Grenzwert der relativen Häufigkeit bzw. der empirischen Wahrscheinlichkeit bei einer unendlich langen Versuchsserie:

$$\text{Theoretische Wahrscheinlichkeit} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Häufigkeit eines Ereignisses}}{\text{Länge der Verssuchserie } n}$$







Noch einige Definitionen:

- Jedes Elementarereignis ω sowie jedes Ereignis A besitzen eine Wahrscheinlichkeit zwischen null und eins: $0 \leq P(A) \leq 1 \ \forall \ A \subseteq \Omega$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches nicht gänzlich Teilmenge der Ergebnismenge Ω ist, beträgt stets null: $P(A) = 0 \ \forall \ A \nsubseteq \Omega$
- Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ereignis eintritt, gleich null: $P(\emptyset) = 0$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein beliebiges Ereignis eintritt ist gleich eins: $P(\omega) = 1$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses A' ist gleich der Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses A: $P(A') = 1 - P(A)$

Kombinatorik

In vielen Fällen gibt mehrere Möglichkeiten, aus der Ergebnismenge Ω das selbe Ereignis $A \subseteq \Omega$ zu bilden. Ist beispielsweise die Reihenfolge der Elemente des Ereignisses $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ egal, so gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten, die Reihenfolge zu verändern, in der die Elementarereignisse auftreten. Diese Möglichkeiten werden *Variationen* genannt. Die Untersuchung der Variationen eines Zufallsversuchs ist ein Teilgebiet der Kombinatorik, welche sich ebenso mit den *Permutationen* sowie *Kombinationen* von Ereignissen beschäftigt.

Allgemein sei gesagt, dass die gesamte Anzahl an Möglichkeiten eines k-stufigen kombinatorischen Versuchs gleich dem Produkt der Möglichkeiten jeder Stufe ist. Dies nennt sich die *Produktregel der Kombinatorik*. Gibt es beispielsweise in der ersten Stufe eines Zufallsversuchs fünf Möglichkeiten, ein für das Ereignis A günstiges Elementarereignis auszuwählen, in der zweite Stufe vier Möglichkeiten und in der dritten drei Möglichkeiten, so ist die Gesamtanzahl an Möglichkeiten gleich $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Permutationen

Die Anzahl an Permutationen einer Menge von Ereignissen oder Objekten beschreibt die Anzahl an Möglichkeiten, diese Objekte in einer bestimmten Reihenfolge und ohne Wiederholung anzuordnen. Dabei muss jedes Objekt der Menge pro Anordnung genau einmal ausgewählt werden. Die Anzahl an Permutationen von n Objekten lässt durch ihre Fakultät $n!$ beschreiben. Der Ausdruck $n!$ ist dabei equivalent zur folgenden Produktserie:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} n - k$$

Es lässt sich also festhalten:

$$n! \ \ldots \ \text{Anzahl an Permutationen von } n \text{ Objekten ohne Wiederholung}$$

Beispiel: *Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Äpfel, 5 Menschen und 8 Kartoffeln zu essen, wenn man jedes Objekt einer Nahrungsform aufgegessen haben muss, bevor man eine neue Nahrungsform zu verspeisen beginnt?*

Man beginnt bei den Äpfeln. Für diese gibt es zuerst drei Möglichkeiten, einen Apfel zu essen. Danach ist es einer weniger, also gibt es in der zweiten Stufe des Versuchs nur mehr zwei Möglichkeiten, einen

Apfel zu essen. Ist der Zweite gegessen, bleibt nur mehr eine einzige Möglichkeit, einen Apfel zu essen, da es nur mehr einen gibt. Somit ist die Anzahl an Permutationen für die Äpfel gleich $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Das selbe Verfahren führt zu $5! = 120$ Permutationen für die Menge der Menschen und $8! = 40320$ für die Menge der Kartoffeln. Da alle Objekte einer Nahrungsform gegessen werden müssen, bevor eine neue begonnen wird (z.B. zuerst Menschen, dann Kartoffeln, dann Äpfel), gibt es nochmals $3! = 6$ Möglichkeiten, die einzelnen „Blöcke“ anzureihen. Insgesamt gibt es also:

$$(3! \cdot 5! \cdot 8!) \cdot 3! = 174\,182\,400 \text{ Möglichkeiten}$$

Untersucht man hingegen die Anzahl an Permutationen mit Wiederholung von Objekten, so kann jedes der n Objekte n mal vorkommen:

$$n^n \ldots \text{ Anzahl an Permutationen von } n \text{ Objekten mit Wiederholung}$$

Variationen

Die Anzahl an Variationen $(n)_k$ von k aus n Objekten beschreibt die Anzahl an Möglichkeiten, aus den n Objekten k in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen. Dabei darf keines der k Objekte doppelt gewählt werden. Man überlege sich, dass es zuerst n Möglichkeiten gibt, dann $n-1$, dann $n-2$ usw. bis $n-k$. Gilt $k = n$, so ist dies equivalent zur Fakultät von n und somit zur Berechnung der Permutationen einer Menge von Objekten. Die Berechnung der Variationen einer Menge von Objekten ist also gewissermaßen eine verkürzte Form der Berechnung ihrer Permutationen. Ebenso kann eine Permutation als eine Sonderform einer Variation gesehen werden, für die gilt $k = n$. Allgemein sei also definiert:

$$(n)_k = \prod_{i=1}^{k} n - (k + i) \ldots \text{ Anzahl an Variationen von } k \text{ aus } n \text{ Objekten, ohne Wiederholung.}$$

Beispiel: *Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 32 Sportmannschaften bei einem Turnier einen Erst-, einen Zweit- und einen Drittplatzierten zu finden?*

Für den ersten Platz gibt es 32 mögliche Teams. Ist ein Sieger gefunden, verbleiben 31 Mannschaften für den zweiten Platz. Somit gibt es letztlich 30 Möglichkeiten, den Drittplatzierten zu bestimmen. Insgesamt gibt es also:

$$(32)_3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760 \text{ Möglichkeiten}$$

Ist die Anzahl an Variationen von k aus n Objekten in einer bestimmten Reihenfolge *mit* Wiederholung gesucht, so gibt es für jedes der k Objekte n Möglichkeiten:

$$n^k \ldots \text{ Anzahl an Variationen von } k \text{ aus } n \text{ Objekten, mit Wiederholung}$$

Kombinationen

Die Anzahl an Kombinationen $\binom{n}{k}$ einer Menge von n Objekten ist definiert als die Anzahl an Möglichkeiten, k Objekte aus den n in *beliebiger* Reihenfolge und ohne Wiederholung auszuwählen. Dieser Wert wird auch *Binomialkoeffizient* genannt. Die Tatsache, dass aus n Objekten k ohne Wiederholung ausgewählt werden sollen, lässt auf eine Berechnung ähnlich jener der Variationen von k aus n Objekten schließen. Diese Anzahl wäre also gleich $(n)_k$. Da nun aber die Reihenfolge egal ist, muss noch ein weiterer Schritt folgen. Eine beliebige Reihenfolge bedeutet, dass zwei Ereignisse A_1 und A_2 dasselbe Ereignis sind, wenn A_2 eine Permuation von A_1 darstellt. Sei $A_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $A_2 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_1\}$. Wäre die Reihenfolge nicht egal, wie bei der Berechnung der Variationen, so wären A_1 und A_2 separate, von einander komplett verschiedene Ereignisse. Beide würden jeweils als eine Möglichkeit bzw. eine Variation zählen. Da nun aber bei der Berechnung der Kombinationen die Reihenfolge der k aus n Objekten beliebig sein darf, sind A_1 und A_2 zueinander equivalent. Somit zählen beide nur als eine einzige Kombinationsmöglichkeit, nicht als zwei.

Wie wird nun diese Eigenschaft, dass die Reihenfolge der k Objekte egal ist, in die Berchnung der Kombinationen miteinbezogen? Man überlege sich, dass es für k Objekte $k!$ Möglichkeiten gibt, diese k Objekte in ihrer Reihenfolge untereinander umzutauschen — $k!$ Permutationen. Ist nun also $(n)_k$ die Anzahl an Variationen von k aus n Objekten, so ist die Anzahl an Kombinationen von k aus n Objekten gleich $(n)_k$ dividiert durch die Anzahl an Permutationen der k Objekte:

$$\text{Kombinationen} = \frac{\text{Variationen}}{\text{Permutationen}}$$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Eine bekanntere Schreibweise dieser Formel lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Bei näherer Analyse dieser Formel zeigt sich, dass sie equivalent zur oberen ist. Expandiert man die Ausdrücke $n!$ und $(n-k)!$ der bekannten Formel, so wird klar, dass der Ausdruck $(n-k)!$ die letzten $n-k$ Terme der Fakultät von n wegkürzt. Sei $n = 5$ und $k = 3$:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1)}$$

Die eingeklammerten Terme kürzen sich weg:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{(2 \cdot 1)}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{(2 \cdot 1)}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Dieser Ausdruck ist nun equivalent zur hergeleiteten Formel. Man setze $n = 5$ und $k = 3$ ein:

$$\frac{(n)_k}{k!} = \frac{(5)_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Beispiel: *Vier Personen begrüßen einander. Wieviele Begrüßungen sind das?*

Untersucht man die Bedingungen der Kombination der Personen erkennt man:

1. Es gibt keine Wiederholung zwischen einzelnen Personen. Hat Person A Person B begrüßt, darf Person A Person B nicht mehr begrüßen.
2. Die Reihenfolge der Begrüßungen ist egal bzw. beliebig. Hat Person C Person D begrüßt, muss Person D Person C nicht auch noch begrüßen.

Es gilt also die möglichen Kombinationen der Begrüßungen zu suchen, ohne Wiederholung und ohne Reihenfolge der Personen. Wieviele Möglichkeiten gibt es also, aus vier Personen jeweils zwei nach diesen Bedingungen auszuwählen?

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6 \text{ Möglichkeiten}$$

Laplace Wahrscheinlichkeit

Bei einem Laplace'schen Zufallsexperiment hat jedes der n Elementarereignissse ω aus der Ergebnismenge Ω die selbe Wahrscheinlichkeit:

$$P(\omega) = \frac{1}{n}$$

Sind mehrere Elementarereignisse für ein bestimmtes Ereignis A günstig, so werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse addiert. Für N günstige Elementarereignisse ω eines Ereignisses A gilt somit:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{n}$$

Von dieser Summe lässt sich die bekannte Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsregel herleiten, welche besagt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Anzahl der günstigen Fälle, dividiert durch die Anzahl der möglichen Fälle ist:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Beispiel: *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, vier mal hintereinander eine ungerade Zahl zu würfeln?*

Die Ergebnismenge Ω umfasst alle 6 möglichen Augenzahlen des Würfels:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Für das gesuchte Ereignis A ist es günstig, entweder eine 1, eine 3 oder eine 5 zu würfeln. Die Anzahl der günstigen ist also 3. Die Wahrscheinlichkeit für A beträgt daher:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\omega|} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Dieses Ereignis soll vier mal hintereinander wiederholt werden:

$$P(A)^4 = 0.5^4 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.0625$$

Beispiel: *In einer Klasse sind 12 Mädchen und 15 Knaben. 5 Personen werden geprüft, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Mädchen und 3 Burschen geprüft werden?*

Die Ergebnismenge Ω umfasst hier alle möglichen Kombinationen von 5 Mädchen (M) oder Knaben (K) aus der Menge aller Schülerinnen und Schüler der Klasse:

$$\Omega = \{MMMMM, MMMMK, MMMKK, \ldots, KKKKK\}$$

Die Anzahl dieser Kombinationen ist: $\binom{23}{5}$. Das gesuchte Ereignis A ist jene Teilmenge von Ω, welche alle Möglichkeiten umfasst, von 12 Mädchen genau 2 auszuwählen $\rightarrow \binom{12}{2}$ und von 15 Knaben genau 3 auszuwählen $\rightarrow \binom{15}{3}$. Daher gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass genau 2 Mädchen und 3 Knaben geprüft werden:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{15}{3}}{\binom{23}{5}}$$

Baumdiagramme und Pfadregeln

Bei mehrstufigen Zufallsversuchen ist es oft vorteilhaft, die einzelnen Stufen und deren Abängigkeiten in einem Baumdiagramm zu visualisieren. Dafür seien zwei Regeln definiert:

1. **Summenregel**

   fi Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A oder Ereignis B eintritt, ist gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten: $P(A \lor B) = P(A) + P(B)$

2. **Produktregel**

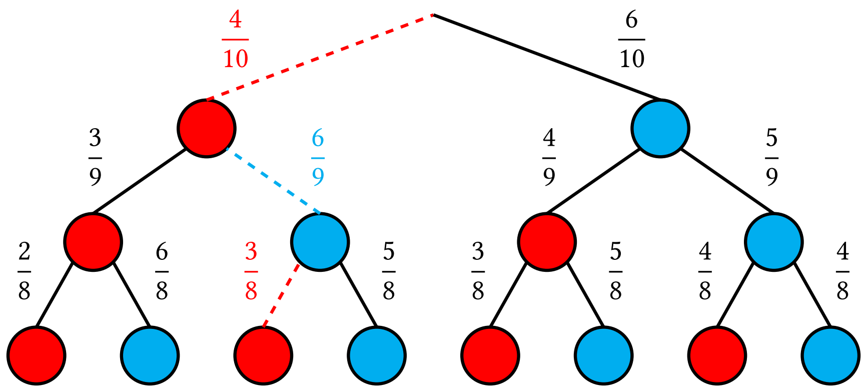
   fi Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A und Ereignis B eintritt, ist gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten: $P(A \land B) = P(A) + P(B)$

Beispiel: *In einer Urne liegen 4 rote und 6 blaue Kugeln. Drei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote, dann eine blaue, dann eine rote zu ziehen (1)? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nur gleichfarbige Kugeln zu ziehen (2) ?*

Bei diesen Beispielen liegen herkömmliche Laplace Wahrscheinlichkeiten vor. Es gibt insgesamt n Kugeln, wobei jedes Elementarereignis ω (jede Kugel) aus der Ergebnismenge Ω eine Wahrscheinlichkeit von n^{-1} hat, gezogen zu werden. Für das erste mögliche Ereignis A, dass eine rote Kugel gezogen wird, sind vier Elementarereignisse günstig. Für das zweite Ereignis B, dass eine blaue Kugel gezogen wird, sind sechs ω günstig. Die Anzahl an möglichen beträgt 10. Somit kann für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse festgelegt werden:

$$P(A) = \frac{4}{10} \qquad P(B) = \frac{6}{10}$$

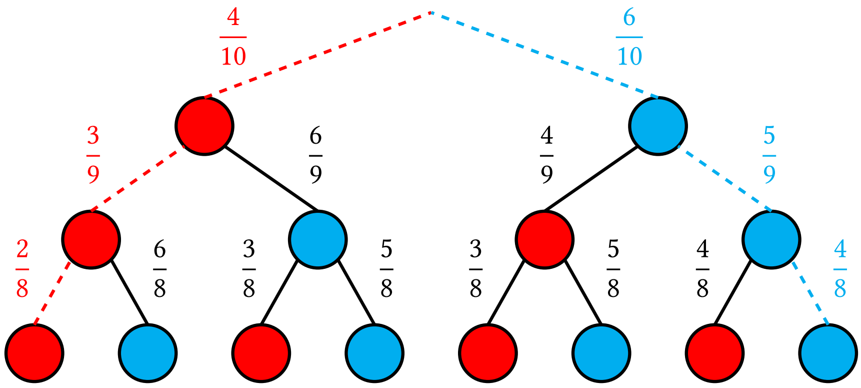
Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit von mehreren bestimmten Ereignissen hintereinander gefragt. Wichtig ist, dass die Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Das bedeutet, dass die Anzahl an Kugeln pro Ziehung schrumpft, somit auch die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Ereignisse. Problemstellung (1) fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass zuerst Ereignis $A = Rot$, dann Ereignis $B = Blau$ und dann wieder Ereignis A eintritt. Man bemerke, dass hierbei die Reihenfolge wichtig ist. Daher muss dem Baumdiagramm genau in dieser Reihung gefolgt werden. Da die Ereignisse hier wörtlich mit einem „und“ verbunden werden (Ereignis A und B und dann A), muss die Produktregel angewandt werden. Man kann den gewünschten Pfad in einem Baumdiagramm visualisieren:



Die Wahrscheinlichkeit beträgt also:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0.1 = 10\%$$

Die zweite Problemstellung erfordert die Anwendung der Summenregel. Dies folgt daraus, dass es hier mehrere (zwei) Möglichkeiten gibt, die gewünschte Serie an Ereignissen zu bilden („Alle rot **oder** alle blau“). Diese Ereignisserien können unabhängig von einander eintreten, ihre Wahrscheinlichkeiten werden also nach der Summenregel addiert. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse dieser Serien werden wie gehabt nach der Produktregel multipliziert. Orientiert man sich an einem Baumdiagramm, so wären die beiden günstigen Pfade jene, die immer links (rot) oder immer rechts (blau) gehen:



Die Wahrscheinlichkeit beträgt daher:

$$\left(\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\right)+\left(\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\right)=0.2=20\%$$

Diskrete Zufallsvariablen

Eine diskrete Zufallsvariable X, auch *Zufallsgröße* genannt ist eine Abbildung der Ergebnismenge in die Menge der natürlichen Zahlen:

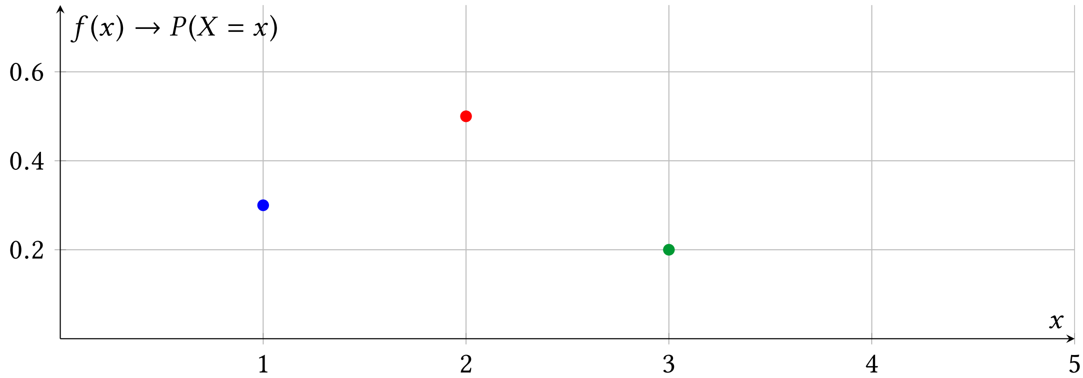
$$X:\Omega\to\mathbb{N}$$

Die Ergebnismenge Ω muss nun zählbare Werte enthalten, die als natürliche Zahlen repräsentiert werden können. Die Ereignismenge von zwei Würfeln könnte ihre Zahlenmenge enthalten, welche als natürliche Zahl darstellbar ist. Gegensätzlich dazu lässt sich die Ereignismenge $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ eines Münzwurfs nicht direkt einer Zufallsvariable zuordnen. Es ist jedoch dennoch möglich, wenn man die Elementarereignisse enumeriert, sodass Kopf = 0 und $Zahl = 1$ und somit $\Omega = \{0, 1\}$. Die Wahrscheinlichkeit P, mit der die Zufallsvariable X den Wert $x \in \mathbb{N}$ annimmt, wird durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f:\mathbb{N}\to[0;1]$ beschrieben. Die Funktion f bildet also die Menge der natürlichen Zahlen — jene Werte, welche die diskrete Zufallsvariable X annehmen kann — auf das Intervall $[0;1]$ ab. Die Funktion $f(x)$ wird dabei die *Wahrscheinlichekitsverteilung* der Zufallsvariable genannt:

$$f(x) = P(X = x)$$

Es sei angemerkt, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. -verteilung nur für die Elemente der Ergebnismenge Ω Werte größer null annimmt. Dies folgt daraus, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A, dass Elementarereignisse umfasst, die nicht $\in \Omega$ sind, gleich null sein muss. So kann ein Würfel beispielsweise nie die Zahl 7 annehmen, daher ist $P(X = 7) = 0$. Dasselbe gilt für alle $x < 1$ sowie alle $x > 6$.

Der folgende Graph bildet die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine diskrete Zufallsvariable X im Zusammenhang mit dem Ziehen einer Kugel aus einer Urne ab. In dieser Urne befinden sich insgesamt 10 Kugeln, von denen 3 blau, 5 rot und 2 grün sind. X ordnet dabei jedem Elementarereignis ω der Ergebnismenge Ω = Blau, Rot, Grün einen entsprechenden Definitionswert $\in \mathbb{N}$ zu. Da die Elementarereignisse hier keine Zahlen sind, müssen sie enumeriert werden. Sei also Blau = 1, Rot = 2 und Grün = 3. Nun sind alle $\omega \in \mathbb{N}$, können also als Definitionswerte bzw. x-Werte in einem Funktionsgraphen abgebildet werden. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ ordnet dann jedem dieser Deifnitionswerte einen entsprechenden Funktionswert zu, welcher die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass die Zufallsvariable X diesen Definitionswert x annimmt:



Erwartungswert und Standardabweichung

Binomialverteilung

Bernoulli

Binomial