Komplexe Zahlen

Die Menge der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist nach den Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ die letzte uns erschlossene Zahlenmenge, mit welcher vorher unlösbare Gleichungen und Probleme nun gelöst werden können.

Definitionen

Die Menge der Komplexen Zahlen beschäftigt sich mit der Verwendung der **imaginären Einheit** i, für welche gilt $i^2 = -1$. Dadurch können vorher nicht lösbare Gleichungen gelöst werden:

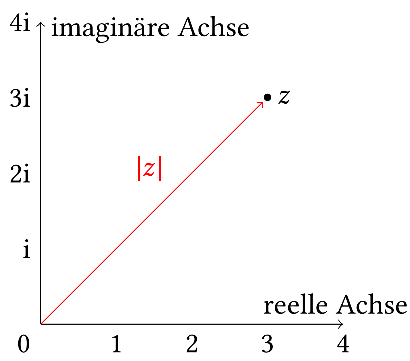
$$x = 5 + \sqrt{-4} \Rightarrow \text{in } \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ nicht lösbar}$$

$$x = 5 + \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 5 + 2 \cdot i \Rightarrow \text{in } \mathbb{C} \text{ lösbar}$$

Generell hat eine komplexe Zahl die Form $a + b \cdot i$, wobei a als der **Realteil** und b als der **Imaginärteil** bezeichnet wird. Zahlen, die nur aus dem Imaginärteil bestehen, also $b \cdot i$, werden **imaginäre Zahlen** genannt. Das negative Gegenstück zu einer komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ nennt man **konjugiert komplexe Zahl**: $\bar{z} = a - b \cdot i$

Hierbei ist es wichtig anzumerken, dass alle Zahlenmengen unter der Menge der komplexen Zahlen dennoch in $\mathbb{C}$ enthalten sind, da jede reelle Zahl a als $a + 0 \cdot i$ angeschrieben werden kann.

Den **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ berechnet man gleich wie jenen eines Vektors: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Der Grund dafür ist, dass eine komplexe Zahl grafisch bzw. geometrisch ähnlich wie ein Vektor ein Koordinatentupel darstellt, wo a die Koordinate auf der **reellen Zahlenachse** und b die Koordinate auf der **imaginären Zahlenachse** ist:



Potenzen von i

Der Wert der imaginären Einheit i hoch einer Potenz n verändert sich in Abhängigkeit von n:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

...

Für eine potenzierte imaginäre Einheit i^n mit beliebigem n kann man somit sagen:

$$i^n = \begin{cases} 1, \text{ wenn } n \bmod 4 = 0 \\ i, \text{ wenn } n \bmod 4 = 1 \\ -1, \text{ wenn } n \bmod 4 = 2 \\ -i, \text{ wenn } n \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

Grundrechnungsarten

Addition und Subtraktion

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + b \cdot i$ und $z_2 = c + d \cdot i$ werden addiert bzw. subtrahiert, in dem man die jeweilige Operation für die Real- und Imaginärteile der beiden komplexen Zahlen, also für a und c bzw. b und d durchführt:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d) \cdot i$$

Multiplikation

Bei der Multiplizierung zweier komplexer Zahlen $z_1 = a + b \cdot i$ und $z_2 = c + d \cdot i$ werden die beiden Zahlen miteinander ausmultipliziert:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i)$$

Wobei man diese Multiplikation immer auf die folgende Formel reduzieren kann:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$

Division

Um zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + b \cdot i$ und $z_2 = c + d \cdot i$ zu dividieren, muss man die Division im Nenner als auch im Zähler um die konjugiert komplexe Zahl des Nenners, also $\bar{z}_2$, erweitern. Dadurch wird der Nenner wieder zu einer reellen Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{(c+di) \cdot (c-di)} = \frac{(ac+bd) \cdot (bc-ad) \cdot i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+b^2} \cdot i$$

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ sind in der Menge der komplexen Zahlen immer lösbar, da nun auch negative Diskriminanten behandelt werden können. Beispiel:

Löse die quadratische Gleichung $x^2 + 4x + 13 = 0$ *in* $\mathbb{C}$!

I. Wir verwenden die kleine Lösungsformel:	$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
II. Einsetzen der Gleichung:	$x_{1,2} = \frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{2} - 13}$
III. Vereinfachung der Gleichung nach x:	$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9}$
IV. Einsetzen der imaginären Einheit i:	$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9} \cdot i$
V. Lösung von $x_{1,2}$:	$x_{1,2} = -2 \pm 3i$

Eine quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit p, q $\in \mathbb{R}$ besitzt somit in $\mathbb{C}$

- zwei reelle Lösungen, wenn $D > 0$
- eine reelle Lösung, wenn $D = 0$
- zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen, wenn $D < 0$

wobei D die Diskriminante unter der Wurzel der kleinen

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{D}$$

oder der großen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Lösungsformel ist.