Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die exklusivste und fundamentalste Zahlenmenge, welche nur positive, ganze Zahlen beeinschließt. $\mathbb{N}$ ist bezüglich der **Addition** und **Multiplikation** abgeschlossen, nicht aber bezüglich der Subtraktion und Division.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{N}_{\eth} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

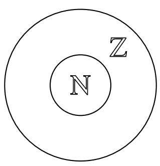
$\mathbb{N}_{\approxeq} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Eigenschaften der natürlichen Zahlen:

- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl: 0
- Jede natürliche Zahl n außer 0 hat einen Vorgänger $n - 1$
- Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$
- Es gibt keine größte natürliche Zahl
- Zwischen zwei natürlichen Zahlen gibt es keine weitere natürliche Zahl

Ganze Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ schließt die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ein, erweitert sie aber auf negative ganze Zahlen. Somit ist $\mathbb{Z}$ bezüglich der **Addition**, **Mulitplikation** und nun auch der **Subtraktion**, jedoch noch nicht bezüglich der Division, abgeschlossen.

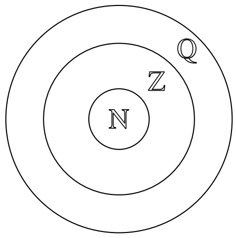


Eigenschaften der ganzen Zahlen:

- Jede ganze Zahl z hat einen Vorgänger $z - 1$ und einen Nachfolger $z + 1$
- Es gibt weder eine größte noch eine kleinste ganze Zahl
- Zwischen zwei ganzen Zahlen gibt es keine weitere ganze Zahl

Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert die Menge der ganzen Zahlen Z auf jene *endlichen* oder *unendlichen, periodischen* Zahlen r, welche als Bruch $\frac{z}{n}$ aus zwei ganzen Zahlen z, dem Zähler, und n, dem Nenner, darstellbar sind. Daher ist $\mathbb{Q}$ bezüglich der **Addition**, **Subtraktion**, **Mulitplikation** und nun auch der **Division** abgeschlossen.



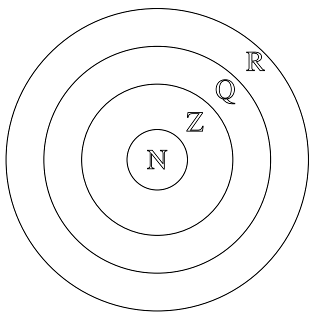
Eigenschaften der rationalen Zahlen:

- Zwischen zwei rationalen Zahlen lässt sich stets eine weitere rationale Zahl einfügen
- Daher hat eine rationale Zahl r weder einen definitiven Vorgänger noch Nachfolger
- Eine rationale Zahl r lässt sich als Bruch $\frac{z}{n}$ darstellen, wo gilt $z, n \in \mathbb{Z}$
- Auch unendliche Zahlen können rational sein, wenn sie sich als Bruch darstellen lassen: $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$
- Es gibt keine größte oder kleinste rationale Zahl

Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erweitert jene der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auf unendliche, nicht-periodische Zahlen, welche sich nicht als Bruch darstellen lassen. Beispiele dafür wären π, e oder $\sqrt{2}$. Formal gesehen vereinigt $\mathbb{R}$ die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Menge der *irrationalen* Zahlen $\mathbb{I}$.

Erst $\mathbb{R}$ ist bezüglich dem Wurzelziehen gänzlich abgeschlossen. Wurzelzahlen, welche zu einer rationalen Zahl vereinfacht werden können, beispielsweise $\sqrt{9} = 3$ oder $\sqrt{0.25} = 0.5$, gehören zwar schon zur Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, viele andere Wurzelzahlen wie $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$ sind jedoch unendlich und ohne Periode, daher irrational bzw. reell.



$$\mathbb{R} = \begin{cases} \text{rationale Zahlen } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{endliche Dezimalzahlen: } 1.2, \frac{3}{4}, 45, \sqrt{4} \ldots \\ \text{unendliche, periodische Dezimalzahlen: } \frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \ldots \end{cases} \\ \text{irrationale Zahlen } \mathbb{I} \rightarrow \text{ unendliche, nicht-periodische Dezimalzahlen } \sqrt{5}, \pi, e, \ldots \end{cases}$$