Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung umfasst die Untersuchung und Beschreibung von Zufallsexperimenten sowie -ereignissen. Bei der Diskussion der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind vor allem Begriffe wie *Zufallsereignis*, *Zufallsvariable*, *Ereignismenge*, *Erwartungswert* oder *Standardabweichung* wichtig. Ein ebenso essentieller Bestandteil der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Kombinatorik, durch welche sich Kombinationen und Permutationen von Ereignissen ermitteln lassen. Unter bestimmten Bedingungen wird die Modellierung eines Zufallsexperiment durch die *Binomialverteilung* möglich, welchem ein *Bernoulli-Experiment* zu Grunde liegt.

Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment wie das Werfen einer Münze oder eines Würfels ist ein Prozess, dessen Resultat so irregulär ist, dass es nicht definitiv vorhergesagt werden kann. Dennoch hat dieses Zufallsexperiment, sofern es diskret ist, einen bestimmten Ergebnisraum. Dieser Ergebnisraum wird *Ergebnismenge* Ω genannt und umfasst alle möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs. Ein einzelnes Element der Ergebnismenge Ω wird dabei als *Elementarereignis* ω bezeichnet. Liefert ein Zufallsversuch mehrere Elementarereignisse, werden diese in einem *Ereignis* zusammengefasst. Ein Ereignis A ist also eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω. Für jedes Ereignis A existiert außerdem ein logisches *Gegenereignis* A'. Dieses umfasst alle Elementarereignisse der Ergebnismenge, außer jene des Ereignisses A.

Ergebnismenge Ω … Alle bei einem Zufallsversuch möglichen Ergebnisse: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$

Elementarereignis … Ein Element der Ergebnismenge: $\omega \in \Omega$

Ereignis A … Die Menge aller bei einem Zufallsversuch auftretenden Elementarereignisse: $A \subseteq \Omega$

Gegenereignis A' … Die Menge aller ω, die bei einem Ereignis nicht auftreten: $A' = \Omega \setminus A$

Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

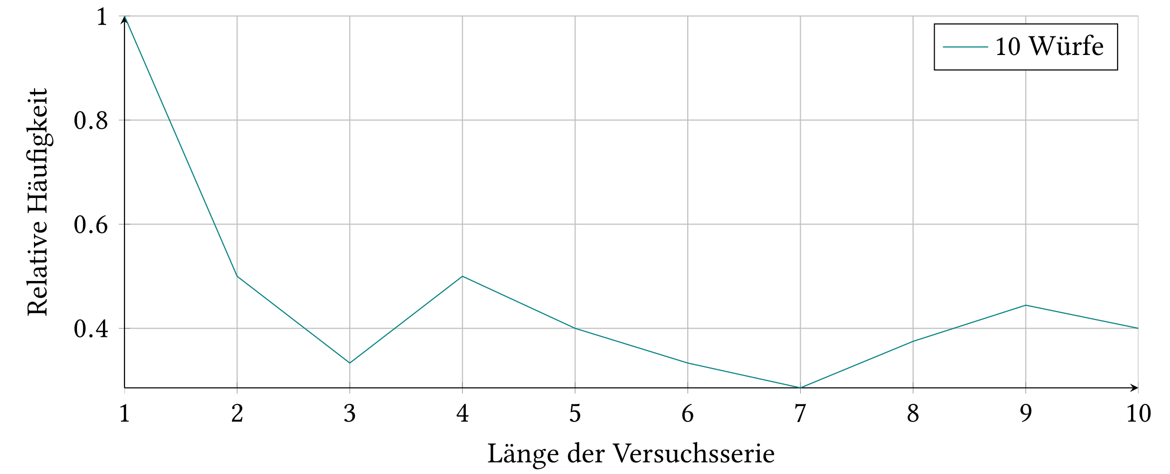
Die *theoretische* Wahrscheinlichkeit eines Zufallsereignisses ist ihr relativer Anteil an der Ergebnismenge. Beispielsweise ist die theoretische Wahrscheinlichkeit, eine beliebige Zahl zu würfeln, jeweils $1 \div 6 \approx 0.167$. Dies folgt daraus, dass der relative Anteil des Ereignises A, welches eine beliebige Zahl umfasst, genau ein Sechstel der Ergebnismenge Ω ausmacht, welches sechs Zahlen umfasst. Führt man ein solches Zufallsexperiment durch, wird man jedoch merken, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei einer kleinen Versuchsserie stark von der theoretischen Wahrscheinlichkeit abweicht. Beispielsweise ist es meistens nicht der Fall, dass bei sechs Würfen eines Würfels jede Zahl genau einmal vorkommt. Erst bei einer großen Anzahl an Durchführungen nähert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses seiner theoretischen Wahrscheinlichkeit. So mag nach sechs Würfen eines Würfels die relative Häufigkeit jeder Zahl meist stark von den theoretisch erwarteten ˜16.67 Prozent abweichen, so wird sie sich jedoch nach einer sehr langen Versuchsreihe — eine Million Würfe — stark an die theoretische Wahrscheinlichkeit nähren. Dieses Phänomen wird das „empirische Gesetz der großen Zahlen“ genannt.

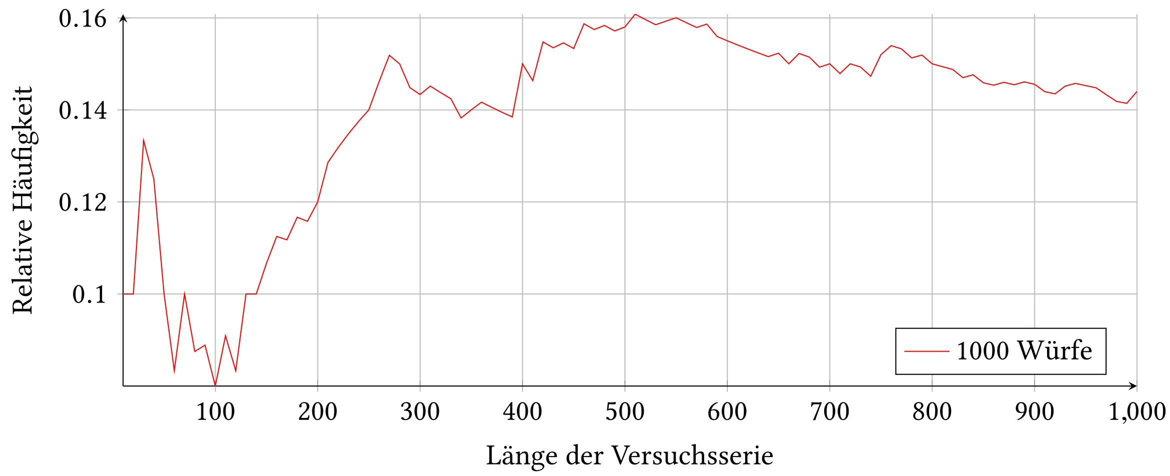
Theoretische Wahrscheinlichkeit … der relative Anteil eines Ereignisses an der Ergebnismenge

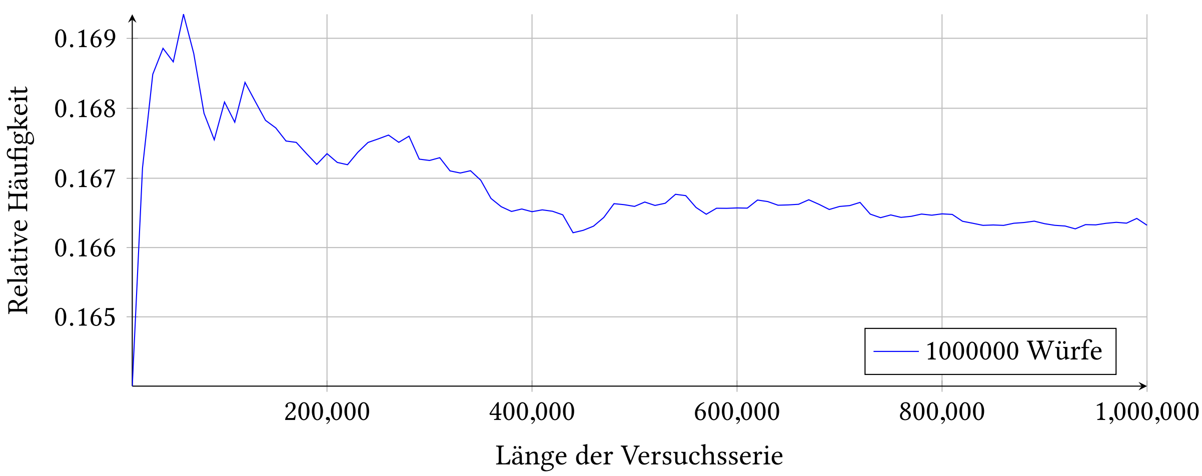
Empirische Wahrscheinlichkeit … die Häufigkeit eines Zufallsreignisses relativ zur Versuchsserie

Die Theoretische Wahrscheinlchkeit ist also der Grenzwert der relativen Häufigkeit bzw. der empirischen Wahrscheinlichkeit bei einer unendlich langen Versuchsserie:

$$\text{Theoretische Wahrscheinlichkeit} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Häufigkeit eines Ereignisses}}{\text{Länge der Verssuchserie } n}$$







Noch einige Definitionen:

- Jedes Elementarereignis ω sowie jedes Ereignis A besitzen eine Wahrscheinlichkeit zwischen null und eins: $0 \leq P(A) \leq 1 \; \forall \; A \subseteq \Omega$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches nicht gänzlich Teilmenge der Ergebnismenge Ω ist, beträgt stets null: $P(A) = 0 \; \forall \; A \nsubseteq \Omega$
- Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ereignis eintritt, gleich null: $P(\emptyset) = 0$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein beliebiges Ereignis eintritt ist gleich eins: $P(\omega) = 1$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses A' ist gleich der Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses A: $P(A') = 1 - P(A)$

Kombinatorik

In vielen Fällen gibt mehrere Möglichkeiten, aus der Ergebnismenge Ω das selbe Ereignis $A \subseteq \Omega$ zu bilden. Ist beispielsweise die Reihenfolge der Elemente des Ereignisses $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ egal, so gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten, die Reihenfolge zu verändern, in der die Elementarereignisse auftreten. Diese Möglichkeiten werden *Variationen* genannt. Die Untersuchung der Variationen eines Zufallsversuchs ist ein Teilgebiet der Kombinatorik, welche sich ebenso mit den *Permutationen* sowie *Kombinationen* von Ereignissen beschäftigt.

Allgemein sei gesagt, dass die gesamte Anzahl an Möglichkeiten eines k-stufigen kombinatorischen Versuchs gleich dem Produkt der Möglichkeiten jeder Stufe ist. Dies nennt sich die *Produktregel der Kombinatorik*. Gibt es beispielsweise in der ersten Stufe eines Zufallsversuchs fünf Möglichkeiten, ein für das Ereignis A günstiges Elementarereignis auszuwählen, in der zweite Stufe vier Möglichkeiten und in der dritten drei Möglichkeiten, so ist die Gesamtanzahl an Möglichkeiten gleich $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Permutationen

Die Anzahl an Permutationen einer Menge von Ereignissen oder Objekten beschreibt die Anzahl an Möglichkeiten, diese Objekte in einer bestimmten Reihenfolge und ohne Wiederholung anzuordnen. Dabei muss jedes Objekt der Menge pro Anordnung genau einmal ausgewählt werden. Die Anzahl an Permutationen von n Objekten lässt durch ihre Fakultät $n!$ beschreiben. Der Ausdruck $n!$ ist dabei equivalent zur folgenden Produktserie:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} n - k$$

Es lässt sich also festhalten:

$$n! \; \ldots \; \text{Anzahl an Permutationen von } n \text{ Objekten ohne Wiederholung}$$

Beispiel: *Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Äpfel, 5 Menschen und 8 Kartoffeln zu essen, wenn man jedes Objekt einer Nahrungsform aufgegessen haben muss, bevor man eine neue Nahrungsform zu verspeisen beginnt?*

Man beginnt bei den Äpfeln. Für diese gibt es zuerst drei Möglichkeiten, einen Apfel zu essen. Danach ist es einer weniger, also gibt es in der zweiten Stufe des Versuchs nur mehr zwei Möglichkeiten, einen

Apfel zu essen. Ist der Zweite gegessen, bleibt nur mehr eine einzige Möglichkeit, einen Apfel zu essen, da es nur mehr einen gibt. Somit ist die Anzahl an Permutationen für die Äpfel gleich $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Das selbe Verfahren führt zu $5! = 120$ Permutationen für die Menge der Menschen und $8! = 40320$ für die Menge der Kartoffeln. Da alle Objekte einer Nahrungsform gegessen werden müssen, bevor eine neue begonnen wird (z.B. zuerst Menschen, dann Kartoffeln, dann Äpfel), gibt es nochmals $3! = 6$ Möglichkeiten, die einzelnen „Blöcke“ anzureihen. Insgesamt gibt es also:

$$(3! \cdot 5! \cdot 8!) \cdot 3! = 174\,182\,400 \text{ Möglichkeiten}$$

Untersucht man hingegen die Anzahl an Permutationen mit Wiederholung von Objekten, so kann jedes der n Objekte n mal vorkommen:

$$n^n \ldots \text{ Anzahl an Permutationen von } n \text{ Objekten mit Wiederholung}$$

Variationen

Die Anzahl an Variationen $(n)_k$ von k aus n Objekten beschreibt die Anzahl an Möglichkeiten, aus den n Objekten k in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen. Dabei darf keines der k Objekte doppelt gewählt werden. Man überlege sich, dass es zuerst n Möglichkeiten gibt, dann $n-1$, dann $n-2$ usw. bis $n-k$. Gilt $k = n$, so ist dies equivalent zur Fakultät von n und somit zur Berechnung der Permutationen einer Menge von Objekten. Die Berechnung der Variationen einer Menge von Objekten ist also gewissermaßen eine verkürzte Form der Berechnung ihrer Permutationen. Ebenso kann eine Permutation als eine Sonderform einer Variation gesehen werden, für die gilt $k = n$. Allgemein sei also definiert:

$$(n)_k = \prod_{i=1}^{k} n - (k + i) \ldots \text{ Anzahl an Variationen von } k \text{ aus } n \text{ Objekten, ohne Wiederholung.}$$

Beispiel: *Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 32 Sportmannschaften bei einem Turnier einen Erst-, einen Zweit- und einen Drittplatzierten zu finden?*

Für den ersten Platz gibt es 32 mögliche Teams. Ist ein Sieger gefunden, verbleiben 31 Mannschaften für den zweiten Platz. Somit gibt es letztlich 30 Möglichkeiten, den Drittplatzierten zu bestimmen. Insgesamt gibt es also:

$$(32)_3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760 \text{ Möglichkeiten}$$

Ist die Anzahl an Variationen von k aus n Objekten in einer bestimmten Reihenfolge *mit* Wiederholung gesucht, so gibt es für jedes der k Objekte n Möglichkeiten:

$$n^k \ldots \text{ Anzahl an Variationen von } k \text{ aus } n \text{ Objekten, mit Wiederholung}$$

Kombinationen

Die Anzahl an Kombinationen $\binom{n}{k}$ einer Menge von n Objekten ist definiert als die Anzahl an Möglichkeiten, k Objekte aus den n in *beliebiger* Reihenfolge und ohne Wiederholung auszuwählen. Dieser Wert wird auch *Binomialkoeffizient* genannt. Die Tatsache, dass aus n Objekten k ohne Wiederholung ausgewählt werden sollen, lässt auf eine Berechnung ähnlich jener der Variationen von k aus n Objekten schließen. Diese Anzahl wäre also gleich $(n)_k$. Da nun aber die Reihenfolge egal ist, muss noch ein weiterer Schritt folgen. Eine beliebige Reihenfolge bedeutet, dass zwei Ereignisse A_1 und A_2 dasselbe Ereignis sind, wenn A_2 eine Permuation von A_1 darstellt. Sei $A_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $A_2 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_1\}$. Wäre die Reihenfolge nicht egal, wie bei der Berechnung der Variationen, so wären A_1 und A_2 separate, von einander komplett verschiedene Ereignisse. Beide würden jeweils als eine Möglichkeit bzw. eine Variation zählen. Da nun aber bei der Berechnung der Kombinationen die Reihenfolge der k aus n Objekten beliebig sein darf, sind A_1 und A_2 zueinander equivalent. Somit zählen beide nur als eine einzige Kombinationsmöglichkeit, nicht als zwei.

Wie wird nun diese Eigenschaft, dass die Reihenfolge der k Objekte egal ist, in die Berchnung der Kombinationen miteinbezogen? Man überlege sich, dass es für k Objekte $k!$ Möglichkeiten gibt, diese k Objekte in ihrer Reihenfolge untereinander umzutauschen — $k!$ Permutationen. Ist nun also $(n)_k$ die Anzahl an Variationen von k aus n Objekten, so ist die Anzahl an Kombinationen von k aus n Objekten gleich $(n)_k$ dividiert durch die Anzahl an Permutationen der k Objekte:

$$\text{Kombinationen} = \frac{\text{Variationen}}{\text{Permutationen}}$$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Eine bekanntere Schreibweise dieser Formel lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Bei näherer Analyse dieser Formel zeigt sich, dass sie equivalent zur oberen ist. Expandiert man die Ausdrücke $n!$ und $(n-k)!$ der bekannten Formel, so wird klar, dass der Ausdruck $(n-k)!$ die letzten $n-k$ Terme der Fakultät von n wegkürzt. Sei $n = 5$ und $k = 3$:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1)}$$

Die eingeklammerten Terme kürzen sich weg:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{(2 \cdot 1)}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{(2 \cdot 1)}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Dieser Ausdruck ist nun equivalent zur hergeleiteten Formel. Man setze $n = 5$ und $k = 3$ ein:

$$\frac{(n)_k}{k!} = \frac{(5)_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Beispiel: *Vier Personen begrüßen einander. Wieviele Begrüßungen sind das?*

Untersucht man die Bedingungen der Kombination der Personen erkennt man:

1. Es gibt keine Wiederholung zwischen einzelnen Personen. Hat Person A Person B begrüßt, darf Person A Person B nicht mehr begrüßen.
2. Die Reihenfolge der Begrüßungen ist egal bzw. beliebig. Hat Person C Person D begrüßt, muss Person D Person C nicht auch noch begrüßen.

Es gilt also die möglichen Kombinationen der Begrüßungen zu suchen, ohne Wiederholung und ohne Reihenfolge der Personen. Wieviele Möglichkeiten gibt es also, aus vier Personen jeweils zwei nach diesen Bedingungen auszuwählen?

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6 \text{ Möglichkeiten}$$

Laplace Wahrscheinlichkeit

Bei einem Laplace'schen Zufallsexperiment hat jedes der n Elementarereignissse ω aus der Ergebnismenge Ω die selbe Wahrscheinlichkeit:

$$P(\omega) = \frac{1}{n}$$

Sind mehrere Elementarereignisse für ein bestimmtes Ereignis A günstig, so werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse addiert. Für N günstige Elementarereignisse ω eines Ereignisses A gilt somit:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{n}$$

Von dieser Summe lässt sich die bekannte Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsregel herleiten, welche besagt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Anzahl der günstigen Fälle, dividiert durch die Anzahl der möglichen Fälle ist:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Beispiel: *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, vier mal hintereinander eine ungerade Zahl zu würfeln?*

Die Ergebnismenge Ω umfasst alle 6 möglichen Augenzahlen des Würfels:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Für das gesuchte Ereignis A ist es günstig, entweder eine 1, eine 3 oder eine 5 zu würfeln. Die Anzahl der günstigen ist also 3. Die Wahrscheinlichkeit für A beträgt daher:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\omega|} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Dieses Ereignis soll vier mal hintereinander wiederholt werden:

$$P(A)^4 = 0.5^4 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.0625$$

Beispiel: *In einer Klasse sind 12 Mädchen und 15 Knaben. 5 Personen werden geprüft, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Mädchen und 3 Burschen geprüft werden?*

Die Ergebnismenge Ω umfasst hier alle möglichen Kombinationen von 5 Mädchen (M) oder Knaben (K) aus der Menge aller Schülerinnen und Schüler der Klasse:

$$\Omega = \{MMMMM, MMMMK, MMMKK, ..., KKKKK\}$$

Die Anzahl dieser Kombinationen ist: $\binom{23}{5}$. Das gesuchte Ereignis A ist jene Teilmenge von Ω, welche alle Möglichkeiten umfasst, von 12 Mädchen genau 2 auszuwählen $\rightarrow \binom{12}{2}$ und von 15 Knaben genau 3 auszuwählen $\rightarrow \binom{15}{3}$. Daher gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass genau 2 Mädchen und 3 Knaben geprüft werden:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{15}{3}}{\binom{23}{5}}$$

Baumdiagramme und Pfadregeln

Bei mehrstufigen Zufallsversuchen ist es oft vorteilhaft, die einzelnen Stufen und deren Abängigkeiten in einem Baumdiagramm zu visualisieren. Dafür seien zwei Regeln definiert:

1. **Summenregel**

   Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A oder Ereignis B eintritt, ist gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten: $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$

2. **Produktregel**

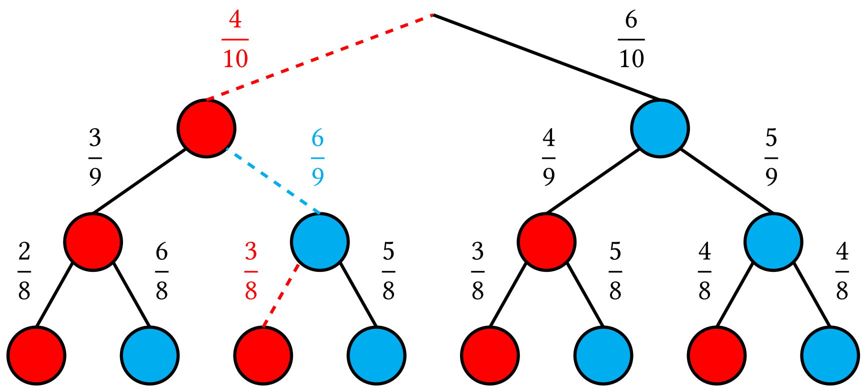
   Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A und Ereignis B eintritt, ist gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten: $P(A \wedge B) = P(A) + P(B)$

Beispiel: *In einer Urne liegen 4 rote und 6 blaue Kugeln. Drei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote, dann eine blaue, dann eine rote zu ziehen (1)? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nur gleichfarbige Kugeln zu ziehen (2) ?*

Bei diesen Beispielen liegen herkömmliche Laplace Wahrscheinlichkeiten vor. Es gibt insgesamt n Kugeln, wobei jedes Elementarereignis ω (jede Kugel) aus der Ergebnismenge Ω eine Wahrscheinlichkeit von n^{-1} hat, gezogen zu werden. Für das erste mögliche Ereignis A, dass eine rote Kugel gezogen wird, sind vier Elementarereignisse günstig. Für das zweite Ereignis B, dass eine blaue Kugel gezogen wird, sind sechs ω günstig. Die Anzahl an möglichen beträgt 10. Somit kann für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse festgelegt werden:

$$P(A) = \frac{4}{10} \qquad\qquad P(B) = \frac{6}{10}$$

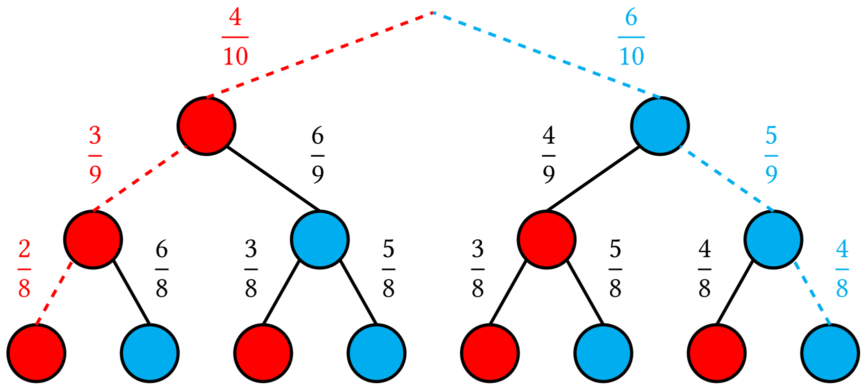
Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit von mehreren bestimmten Ereignissen hintereinander gefragt. Wichtig ist, dass die Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Das bedeutet, dass die Anzahl an Kugeln pro Ziehung schrumpft, somit auch die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Ereignisse. Problemstellung (1) fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass zuerst Ereignis $A = Rot$, dann Ereignis $B = Blau$ und dann wieder Ereignis A eintritt. Man bemerke, dass hierbei die Reihenfolge wichtig ist. Daher muss dem Baumdiagramm genau in dieser Reihung gefolgt werden. Da die Ereignisse hier wörtlich mit einem „und“ verbunden werden (Ereignis A und B und dann A), muss die Produktregel angewandt werden. Man kann den gewünschten Pfad in einem Baumdiagramm visualisieren:



Die Wahrscheinlichkeit beträgt also:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0.1 = 10\%$$

Die zweite Problemstellung erfordert die Anwendung der Summenregel. Dies folgt daraus, dass es hier mehrere (zwei) Möglichkeiten gibt, die gewünschte Serie an Ereignissen zu bilden („Alle rot *oder* alle blau"). Diese Ereignisserien können unabhängig von einander eintreten, ihre Wahrscheinlichkeiten werden also nach der Summenregel addiert. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse dieser Serien werden wie gehabt nach der Produktregel multipliziert. Orientiert man sich an einem Baumdiagramm, so wären die beiden günstigen Pfade jene, die immer links (rot) oder immer rechts (blau) gehen:



Die Wahrscheinlichkeit beträgt daher:

$$\left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}\right) = 0.2 = 20\%$$

Diskrete Zufallsvariablen

Eine diskrete Zufallsvariable X, auch *Zufallsgröße* genannt ist eine Abbildung der Ergebnismenge in die Menge der natürlichen Zahlen:

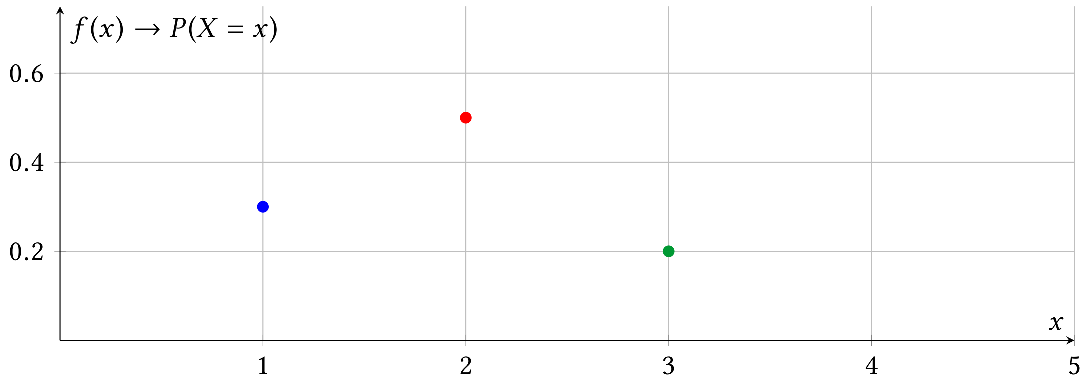
$$X : \Omega \to \mathbb{N}$$

Die Ergebnismenge Ω muss nun zählbare Werte enthalten, die als natürliche Zahlen repräsentiert werden können. Die Ereignismenge von zwei Würfeln könnte ihre Zahlenmenge enthalten, welche als natürliche Zahl darstellbar ist. Gegensätzlich dazu lässt sich die Ereignismenge $\Omega = \{\text{Kopf, Zahl}\}$ eines Münzwurfs nicht direkt einer Zufallsvariable zuordnen. Es ist jedoch dennoch möglich, wenn man die Elementarereignisse enumeriert, sodass Kopf = 0 und $Zahl = 1$ und somit $\Omega = \{0, 1\}$. Die Wahrscheinlichkeit P, mit der die Zufallsvariable X den Wert $x \in \mathbb{N}$ annimmt, wird durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f : \mathbb{N} \to [0; 1]$ beschrieben. Die Funktion f bildet also die Menge der natürlichen Zahlen — jene Werte, welche die diskrete Zufallsvariable X annehmen kann — auf das Intervall $[0; 1]$ ab. Die Funktion $f(x)$ wird dabei die *Wahrscheinlichekitsverteilung* der Zufallsvariable genannt:

$$f(x) = P(X = x)$$

Es sei angemerkt, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. -verteilung nur für die Elemente der Ergebnismenge Ω Werte größer null annimmt. Dies folgt daraus, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A, dass Elementarereignisse umfasst, die nicht $\in \Omega$ sind, gleich null sein muss. So kann ein Würfel beispielsweise nie die Zahl 7 annehmen, daher ist $P(X = 7) = 0$. Dasselbe gilt für alle $x < 1$ sowie alle $x > 6$.

Der folgende Graph bildet die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine diskrete Zufallsvariable X im Zusammenhang mit dem Ziehen einer Kugel aus einer Urne ab. In dieser Urne befinden sich insgesamt 10 Kugeln, von denen 3 blau, 5 rot und 2 grün sind. X ordnet dabei jedem Elementarereignis ω der Ergebnismenge Ω = Blau, Rot, Grün einen entsprechenden Definitionswert $\in \mathbb{N}$ zu. Da die Elementarereignisse hier keine Zahlen sind, müssen sie enumeriert werden. Sei also Blau = 1, Rot = 2 und Grün = 3. Nun sind alle $\omega \in \mathbb{N}$, können also als Definitionswerte bzw. x-Werte in einem Funktionsgraphen abgebildet werden. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ ordnet dann jedem dieser Deifnitionswerte einen entsprechenden Funktionswert zu, welcher die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass die Zufallsvariable X diesen Definitionswert x annimmt:



Erwartungswert

Der Erwartungswert μ (oder $E(x)$) einer diskreten Zufallsvariable X gibt an, welchen Wert die Zufallsvariable bei vielfacher Durchführung eines Zufallsversuchs durchschnittlich annimmt. μ wird berechnet, indem man die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der für X möglichen Werte, also alle $x \in \mathbb{N}$, multipliziert mit ihrem Wert berechnet. Da es kein größtes $x \in \mathbb{N}$ gibt, ist diese Summe theoretisch unendlich:

$$\mu = \mu = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \cdot x = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) \cdot x = P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 1) \cdot 1 + P(X = 2) \cdot 2 + \ldots$$

Praktisch gesehen sind die Wahrscheinlichkeiten aller Werte, die nicht $\in \Omega$, jedoch gleich null. Somit berechnet man in der Praxis den Erwartungswert nur für die N möglichen Elementarereignisse ω aus der Ergebnismenge Ω:

$$\mu = \mu = \sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) \cdot i \qquad \text{mit } \omega \in \Omega$$

Standardabweichung und Varianz

Die Standardabweichung σ einer diskreten Zufallsvariable X ist jener Wert, um welchen X durschnittlich um den Erwartungswert μ bzw. μ schwankt. X wird wie gesagt bei bei einer langen Verssuchsserie mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit den Wert μ annehmen. Mit noch höherer Wahrscheinlichkeit wird X im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen. Um die Standardabweichung zu berechnen, multipliziert man die Wahrscheinlichkeit jeden für X möglichen Werts $x \in \mathbb{N}$, mit der Differenz zwischen x und dem Erwartungswert μ, zum Quadrat. σ ist dann die Wurzel von diesem Wert. Die Differenz muss quadriert werden, damit sich das Vorzeichen aufhebt. Ansonsten könnten negative $x - \mu$ positive $x - \mu$ aufheben, was das Ergebnis verfälschen würde. Das Ziehen der Wurzel hebt die Quadrierung wieder auf. Theoretisch:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{x=0}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2} = \sqrt{f(0) \cdot (0 - \mu)^2 + f(1) \cdot (1 - \mu)^2 + \ldots}$$

Der Unterschied zur Praxis ist der selbe wie bei der Berechnung von μ. Es sei angemerkt, dass die Subtraktion mit μ bzw. μ^2 aus der obigen Berechnung herausgehoben werden und an das Ende der Summe gestellt werden kann. Somit muss man nicht die Differenz zwischen x und μ für jeden Term berechnen:

$$\sigma = \sqrt{\left(\sum_{x=0}^{\infty} f(x) \cdot x^2\right) - \mu^2} = \sqrt{\left[f(0) \cdot 0^2 + f(1) \cdot 1^2 + \ldots\right] - \mu^2}$$

Die Varianz V bzw. σ^2 ist das Quadrat der Standardabweichung. Es hat keinen praktischen Nutzen, da es Einheiten zum Quadrat (Quadrat-IQ, Quadrat-Augensumme, ...) beschreibt und nicht die eigentlichen Einheiten (IQ, Augensumme, ...).

Bewertungsfunktion

Eine Bewertungsfunktion $g(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X ordnet jedem möglichem Wert der Zufallsvariable eine bestimmte Wertung zu, oftmals ein Geldpreis. Ein Beispiel für eine Bewertungsfunktion sind die Preise bei einem Gewinnspiel. So könnte es ein Gewinnspiel geben, bei dem es gilt, mit zwei Würfeln eine bestimmte Augensumme zu würfeln. Der Einsatz ist 1 €. Beträgt die Augensumme eines Wurfes 7, so erhält man 5 €. Bei jeder anderen Augensumme verliert man seinen Einsatz. Die Zufallsvariable X beschreibt hierbei die Augensumme. Mit zwei Würfeln gibt es 36 verschiedene Möglichkeiten, eine Augensumme zu bilden. Von diesen sind 6 Kombinationen günstig für das Ereignis, dass die Zufallsvariable X den Wert 7 annimmt:

$$A_7 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 7 beträgt ist daher 6 Zehntel. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme nicht 7 beträgt, muss die restlichen möglichen Augensummen umfassen, also 30 Zehntel. Somit gilt für die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X = 7) = \frac{6}{36} \qquad P(X \neq 7) = 1 - P(X = 7) = \frac{30}{36}$$

Mit welcher Geldsumme steigt man bei diesem Gewinnspiel also erwartungsgemäß aus? Um diese Frage zu beantworten, berechnet man den Erwartungswert μ. Hierbei multipliziert man die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses mit dem entsprechenden Funktionswert der Bewertungsfunktion. In diesem Fall wäre der Erwartungswert gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme den Wert 7 erreicht, mal 4 €, plus der Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme einen anderen Wert als 7 annimmt, mal -1 €. Die letzte Geldsumme ist dabei negativ, weil man einen Euro Einsatz verliert. Die erste Geldsumme ist nur vier und nicht fünf Euro, weil man seinen Einsatz bei diesem Spiel nicht zurückerhält. Der Erwartungswert ist somit:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} P(X = A_i) \cdot g(X = A_i) = \left(\frac{6}{36} \cdot 4\,€\right) + \left(\frac{30}{6} \cdot -1\,€\right) \approx -0.17\,€$$

wo N die Anzahl an Ereignissen ist. Man kann also erwarten, dass wenn man an diesem Gewinnspiel sehr oft teilnimmt, man ungefähr 17 Cent verliert.

Es sei angemerkt, dass der Erwartungswert formal eigentlich definiert ist als die Wahrscheinlichkeit jeden Werts der Zufallsvariable multipliziert mit der entsprechenden Bewertung (nicht die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse, welche mehrere X umfassen). Die Ereignismenge Ω umfasst zwar nur eine endliche Anzahl an Elementarereignissen ω, die Zufallsvariable X ist jedoch $\in \mathbb{N}$. Somit ist diese Summe theoretisch unendlich, da es keine größte natürliche Zahl gibt:

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot g(i) = f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) + \ldots$$

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine besondere Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche nur unter den folgenden beiden Bedingungen gegeben ist:

1. **Nur zwei mögliche Ereignisse**

   Es darf nur zwei mögliche Ereignisse A und A' geben. Ereignis A hat eine Wahrscheinlichkeit von p. Ereignis A' ist das Gegenereignis von A und hat daher eine Wahrscheinlichkeit von $1 - p$. Ein solcher Zufallsversuch nennt sich *Bernoulli Experiment*.

2. **Konstante Wahrscheinlichkeit bei jeder Iteration**

   Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis A muss bei jeder Durchführung einer Serie konstant bleiben. So wäre beispielsweise eine Serie von Griffen aus einer Urne mit n Kugeln nur dann binomialverteilt, wenn nach jedem Griff die Kugel zurückelegt wird. Ansonsten würde sich die Gesamtanzahl an Kugeln n nach jedem Griff verändern, somit auch die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis.

Bei der Binomialverteilung spielt der Binomialkoeffizient eine wichtige Rolle, welcher die Anzahl an Möglichkeiten beschreibt, aus n Elementen k in beliebiger Reihenfolge und ohne Wiederholung einzelner Elemente auszuwählen. Die Variablen n und k beschreiben hierbei immer eine Anzahl an Ereignissen. Diese und andere Tatsachen die Binomialverteilung betreffend seien an einem Beispiel demonstriert.

Beispiel: *Bei einem Quiz werden 5 Fragen gestellt. Bei jeder Frage stehen 3 Antworten zur Auswahl, von denen je eine richtig ist. Ein Kandidat kreuzt rein zufällig an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei mindestens zwei Fragen die richtige Option ankreuzt?*

Zuerst muss überprüft werden, ob wirklich eine Binomialverteilung vorliegt. Die erste Bedingung besagt, dass es nur zwei mögliche Ereignisse für jede Iteration des Zufallsversuchs geben darf. Anhand des Textes erkennt man, dass man eine Frage entweder richtig oder falsch beantworten kann. Es liegt also ein Bernoulli Experiment vor, somit ist die erste Bedingung erfüllt. Für die Erfüllung der zweiten Bedingung muss die Wahrscheinlichkeit der beiden Ereignisse bei jeder Durchführung des Experiments gleich bleiben. Bei der ersten Frage beträgt die Wahrscheinlichkeit, sie bei zufälligem Ankreuzen richtig zu beantworten, ein Drittel. Bei der zweiten Frage ist dies ebenso der Fall. Bei der dritten Frage auch und bei den beiden letzten ebenso. Somit ist auch die zweite Bedingung erfüllt: es liegt also eine Binomialverteilung vor.

Die diskrete Zufallsvariable X soll hier die Anzahl an richtig angekreuzten Fragen beschreiben. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert größer oder gleich 2 annimmt. Dies sei das Ereignis A. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist equivalent zu jener, dass X gleich zwei, drei, vier oder fünf ist. Man erkennt, dass es hier leichter ist, mit dem Gegenereignis A' sowie mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - P(A)$ zu rechnen. Das Gegenereignis ist jenes, dass X nicht größer oder gleich 2 ist, sondern kleiner. Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ist also equivalent jener, dass X gleich 0 oder 1 ist:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$, dass keine Frage richtig beantwortet wird, steht für jenes Ereignis, dass sowohl Frage 1, als auch 2, 3, 4 und letztlich 5 falsch beantwortet wird. Die Wahrscheinlichkeit für die falsche Beantwortung einer Frage beträgt jeweils zwei Drittel, weil zwei von drei Antworten jeder Frage falsch sind. $P(X = 0)$ beträgt daher:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0.132$$

Eine mögliche Konstellation von richtig oder falsch beantworteten Fragen, die die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1)$ erfüllen würde, wäre dass die erste Frage richtig beantwortet wird und die folgenden vier falsch. Dies wäre so berechnet:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Eine weiter Möglichkeit wäre es, dass die dritte Frage richtig beantwortet wird und die anderen nicht:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Es wird klar, dass mehrere Möglichkeiten gibt, die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1)$ zu bilden. Die Anzahl dieser Möglichkeiten wird durch den Binomialkoeffizient beschrieben. Wiederholt man die Defintion des Binomialkoeffizienten aus der Sektion über Kombinatorik, so lautet diese: „Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl an Möglichkeiten, aus n Objekten k in beliebiger Reihenfolge und ohne Wiederholung einzelner Elemente auszuwählen." Die Elemente sind in diesem Fall die Fragen des Quiz. Die Zahl n beträgt fünf, da es fünf verschiedene Fragen gibt. Der Wert von k ist in diesem Fall 1, weil es gilt, aus den fünf Fragen eine zu auszuwählen. Es gibt daher

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5$$

Möglichkeiten, aus den fünf Fragen eine auszuwählen. Dieser Wert wird den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fragen als *Koeffizient* vorangestellt:

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0.329$$

Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses A' beträgt somit in Summe:

$$P(A') = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.132 + 0.329 \approx 0.461$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass der Kandidat mindestens zwei Faragen richtig ankreuzt ist nun:

$$P(A) = 1 - P(A') \approx 1 - 0.461 \approx 0.538 \approx 53.8\%$$

Der Kandidat wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 53.8% mindestens zwei der fünf Fragen richtig beantworten.

Es sei nun noch die allgemeine Formel zur Berechnung einer binomialverteilten Wahrscheinlichkeit gegeben:

$$P(A) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Hierbei drückt n eine Anzahl an Iterationen des Zufallsversuch aus; k die Anzahl Versuchen, die von den maximal n Versuchen für das Ereignis A günstig ausgehen sollen; $\binom{n}{k}$ somit die Anzahl an Möglichkeiten, aus den n Versuchen k für das Ereignis A günstige auszuwählen; p die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis A eintritt; $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit, mit der das Gegenereignis A' von

A eintritt. Es gibt k Versuche, die für das Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p günstig ausgehen. Daher wird diese Wahrscheinlichkeit p zur k-ten Potenz gestellt. Beispielsweise für $k = 3$:

$$\{\text{günstig für } A, \text{günstig für } A, \text{günstig für } A\} = p \cdot p \cdot p = p^3$$

Gehen von n Versuchen k für das Ereignis A günstig aus, so müssen die restlichen $n - k$ für das Gegenereignis A' günstig bzw. für das Ereignis A ungünstig ausgehen. Ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gleich p, so ist jene des Gegenereignisses A' gleich $1 - p$. Diese Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses soll $n - k$ mal vorkommen, wird also hoch $n - k$ genommen. Beispielsweise für $n = 5$ und $k = 3$:

$$\{\text{ungünstig für } A, \text{ungünstig für } A\} = \{\text{günstig für } A', \text{günstig für } A'\} = (1-p)(1-p) = (1-p)^{5-3} = (1-p)^2$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ stellt sicher, dass alle möglichen Kombinationen für die n aus k Objekte berücksichtigt werden.