Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die exklusivste und fundamentalste Zahlenmenge, welche nur positive, ganze Zahlen beeinschließt. $\mathbb{N}$ ist bezüglich der **Addition** und **Multiplikation** abgeschlossen, nicht aber bezüglich der Subtraktion und Division.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\mathbb{N}_{\mathrm{g}} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

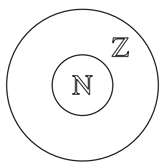
$\mathbb{N}_{\mathrm{u}} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

Eigenschaften der natürlichen Zahlen:

- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl: 0
- Jede natürliche Zahl n außer 0 hat einen Vorgänger $n - 1$
- Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$
- Es gibt keine größte natürliche Zahl
- Zwischen zwei natürlichen Zahlen gibt es keine weitere natürliche Zahl

Ganze Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ schließt die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ein, erweitert sie aber auf negative ganze Zahlen. Somit ist $\mathbb{Z}$ bezüglich der **Addition**, **Mulitplikation** und nun auch der **Subtraktion**, jedoch noch nicht bezüglich der Division, abgeschlossen.



Eigenschaften der ganzen Zahlen:

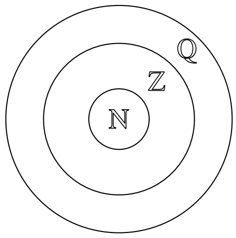
- Jede ganze Zahl z hat einen Vorgänger $z - 1$ und einen Nachfolger $z + 1$
- Es gibt weder eine größte noch eine kleinste ganze Zahl
- Zwischen zwei ganzen Zahlen gibt es keine weitere ganze Zahl

Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auf jene *endlichen* oder *unendlichen, periodischen* Dezimahlzahlen, welche als Bruch $\frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$ darstellbar sind:

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist bezüglich der **Addition**, **Subtraktion** und **Mulitplikation** abgeschlossen. Ohne null, also $\mathbb{Q} \backslash \{0\}$, ist sie auch bezüglich der **Division** abgeschlossen.

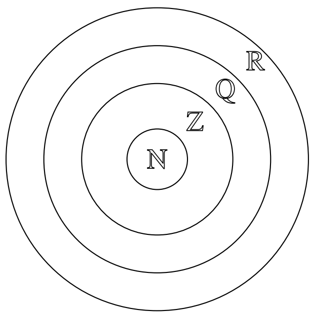


Eigenschaften der rationalen Zahlen:

- Zwischen zwei rationalen Zahlen lässt sich stets eine weitere rationale Zahl einfügen
- Daher hat eine rationale Zahl r weder einen definitiven Vorgänger noch Nachfolger
- Eine rationale Zahl r lässt sich als Bruch $\frac{z}{n}$ darstellen, wo gilt $z, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$
- Auch unendliche Zahlen können rational sein, wenn sie sich als Bruch darstellen lassen: $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$
- Es gibt keine größte oder kleinste rationale Zahl

Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erweitert jene der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auf unendliche, nicht-periodische Zahlen, welche sich nicht als Bruch darstellen lassen. Beispiele dafür wären Konstanten wie π, e oder $\sqrt{2}$. Formal gesehen vereinigt $\mathbb{R}$ die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Menge der *irrationalen* Zahlen $\mathbb{I}$.



$$\mathbb{R} = \begin{cases} \text{rationale Zahlen } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{endliche Dezimalzahlen: } 1.2, \frac{3}{4}, 45, \sqrt{4}, \ldots \\ \text{unendliche, periodische Dezimalzahlen: } \frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \ldots \end{cases} \\ \text{irrationale Zahlen } \mathbb{I} \rightarrow \text{ unendliche, nicht-periodische Dezimalzahlen } \sqrt{5}, \pi, e, \ldots \end{cases}$$

Beweis, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist

Schon der antike griechische Mathematiker Euklid bewies, dass die Wurzel aus zwei keine rationale Zahl ist. Um diesen Beweis durchzuführen, muss man zuerst annehmen, dass die Zahl doch eine rationale Zahl ist, also dass gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. In diesem Fall müsste man die Wurzel aus zwei als Bruch zweier ganzer Zahlen m und n darstellen können. Es wird dabei angenommen, dass dieser Bruch schon vollständig gekürzt ist, also m und n teilerfremd sind. Sind Nenner und Zähler *teilefremd*, bedeutet das, dass sie *nicht beide gerade Zahlen* sein können. Dies ist eine wichtige Beobachtung, da ihr im Laufe des weiteren Beweises widersprochen wird. Gilt also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, muss gelten:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad \Rightarrow \qquad 2 = \frac{m^2}{n^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot n^2 = m^2$$

Man sieht also, dass m^2 doppelt so groß ist wie n^2 bzw. dass m^2 die Zahl zwei als Teiler hat. Daher muss m^2 gerade sein. Nun muss bemerkt werden, dass wenn eine Zahl gerade ist, auch ihr Quadrat gerade ist. Ist eine Zahl ungerade, so ist auch ihr Quadrat ungerade. Ist m^2 also gerade, muss auch m gerade sein. Da nun also angenommen werden kann, dass m gerade ist, kann m als Produkt der Zahl 2 sowie einer bestimmten Zahl k dargestellt werden (m hat nun 2 als Teiler):

$$m = 2 \cdot k$$

Daher muss 4 ein Teiler des Quadrates von m sein:

$$m^2 = 4 \cdot k^2$$

Setzt man diesen Ausdruck nun für m^2 in der anfangs gegebenen Gleichung ein, erhält man:

$$2 \cdot n^2 = m^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot n^2 = 4 \cdot k^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2 \cdot k^2$$

Man sieht nun, dass auch n^2 gerade ist, da jede Zahl die in der Form $2 \cdot k$ geschrieben werden kann, gerade sein muss. Ist n^2 gerade, muss also auch n gerade sein. m und n müssten nun also *beide* gerade Zahlen sein. Dies widerspricht der anfänglichen Beobachtung, dass man die Wurzel aus zwei sowie jede rationale Zahl als Bruch aus zwei ganzen Zahlen dargestellen können müsste, wobei nicht sowohl Nenner als auch Zähler gerade sein können. m und n können (sofern schon teilerfremd) für eine mathematisch richtige Aussage also nicht beide gerade sein. Der Widerspruch ist perfekt.