МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"МИРЭА - Российский технологический университет"
РТУ МИРЭА

Институт Информационных Технологий

Кафедра Вычислительной Техники

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

по дисциплине
«Теория принятия решений»
Симплексный метод

Студент группы: ИКБО-42-23 ____Голев С.С.____
(Ф. И.О. студента)

Преподаватель __Железняк Л.М.__
(Ф.И.О. преподавателя)

Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.. 3
1 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД 4
1.1 Постановка задачи 4
1.2 Математическая модель задачи 4
1.3 Результат работы программы.. 11
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 12
СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ 13
ПРИЛОЖЕНИЯ... 14

ВВЕДЕНИЕ

Симплексный метод — это один из наиболее распространённых и эффективных алгоритмов решения задач линейного программирования. Он был разработан Джорджем Данцигом в 1947 году и используется для нахождения оптимального решения линейной целевой функции при наличии системы линейных ограничений.

Метод применяется в задачах, где требуется найти наилучшее распределение ограниченных ресурсов (времени, материалов, труда и т.д.) между различными видами деятельности с целью максимизации прибыли или минимизации затрат. Классические примеры применения симплексного метода — это задачи планирования производства, логистики, распределения ресурсов, управления проектами и другие экономико-математические задачи.

Суть метода заключается в последовательном переходе от одной допустимой вершины области решений к другой, улучшая значение целевой функции на каждом шаге, пока не будет достигнут оптимум. Симплексный метод является итерационным и хорошо масштабируется для задач с большим числом переменных и ограничений.

1 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

1.1 Постановка задачи

Задание 8. Решить прямую ЗЛП с помощью симплексного метода и обратную с помощью теорем двойственности. Определить интервалы устойчивости.

Задача. Для изготовления четырех видов продукции A, B, C и D используются три вида ресурсов I, II, III. Дальнейшее условие задачи в таблице П.8.

Таблица П.8. Исходные данные задачи.

Ресурсы	Нормы расхода сырья на единицу продукции, ед.				Запасы ресурсов, ед.
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	3400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	7,5	3	6	12	

Требуется определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

1.2 Математическая модель задачи

Пусть x_1 – тип ресурса A, x_2 –тип ресурса B, x_3 –тип ресурса C, x_4 – тип ресурса D. Прибыль от продажи шкафов составит $7.5x_1 + 3x_2 + 6x_3+12x_4$, прибыль требуется максимизировать.

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 4x_4 \le 3400 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 1200 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 \le 3000 \end{cases}$$

Таким образом, переходим к задаче линейного программирования:

$$f(x) = 7.5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 4x_4 \le 3400 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 1200 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 \le 3000 \\ xi \ge 0, \quad 1 \le i \le 4 \end{cases}$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого в левые части ограничений вводим дополнительные переменные: $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$. Эти переменные выбираются так, чтобы они обращали неравенства в равенства.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 4x_4 + x_5 = 3400 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_6 = 1200 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 + x_7 = 3000 \\ xi \ge 0, \quad 1 \le i \le 7 \end{cases}$$

$$f(x) = 7.5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

Построим начальную симплекс-таблицу. Запишем систему в векторной форме:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 + A_7x_7 = A_0,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 3400 \\ 1200 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Векторы A_5, A_6, A_7 являются линейно независимыми единичными векторами 3х-мерного пространства и образуют базис этого пространства.

Поэтому за базисные переменные выбираем переменные $x5$, $x6$, $x7$. Небазисными переменными являются x_1, x_2, x_3, x_4. Разложение позволяет найти первое базисное допустимое решение.

Для этого свободные переменные x_1, x_2, x_3, x_4 приравниваем нулю. В результате получим разложение

$$A_5x_5 + A_6x_6 + A_7x_7 = A_0,$$

Которому соответствует первоначальный опорный план

$$x^{(0)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_6, x_7) = (0,0,0,0,3400,1200,3000),$$
$$f\left(x^{(0)}\right) = 0.$$

Для проверки плана $x^{(0)}$ на оптимальность построим первую симплекс-таблицу. Введем в рассмотрение вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

$$\overline{C_B} = (c4, c5, c6)^T = (0,0,0)^T.$$

В левый столбец Таблицы 5.2 запишем переменные x_5, x_6, x_7 образующие базис, в верхней строке – небазисные переменные x_1, x_2, x_3, x_4. В строке c_j запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие небазисным переменным $c_1 = 9$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$, $c_4 = 12$. В столбце $\overline{C_B}$ запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным Столбец, определяемый переменной x_1, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_1}$. Аналогично, столбец, определяемый переменной x_2, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_2}$. Аналогично, столбец, определяемый переменной x_3, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_3}$. И столбец, определяемый переменной x_4 состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_4}$ Крайний правый столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план.

Заполнение f-строки (Таблица 1.3). Найдем относительные оценки Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 и значение целевой функции Q.

$$\Delta_1 = (\overline{C_B} * \overline{A_1}) - c_1 = 0 * 2 + 0 * 1 + 0 * 3 - 7.5 = -7.5;$$

$$\Delta_2 = (\overline{C_B} * \overline{A_2}) - c_2 = 0 * 1 + 0 * 5 + 0 * 0 - 3 = -3;$$

$$\Delta_3 = (\overline{C_B} * \overline{A_3}) - c_3 = 0 * 0.5 + 0 * 3 + 0 * 6 - 6 = -6;$$

$$\Delta_4 = (\overline{C_B} * \overline{A_4}) - c_4 = 0 * 4 + 0 * 0 + 0 * 1 - 12 = -12;$$

$$\mathrm{Q} = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 0 * 3400 + 0 * 1200 + 0 * 3000 = 0.$$

Таблица 1.2 – Начальная симплекс-таблица задачи о максимальном доходе

	c_j	7.5	3	6	12	
$\overline{C_B}$		X_1	X_2	X_3	X_4	$\overline{A_0}$
0	X_5	2	1	0.5	4	3400
0	X_6	1	5	3	0	1200
0	X_7	3	0	6	1	3000
	f					
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q

Таблица 1.3 – Заполнение f-строки

	c_j	7.5	3	6	12		
$\overline{C_B}$		X_1	X_2	X_3	X_4	$\overline{A_0}$	
0	X_5	2	1	0.5	4	3400	3400 / 4 = 850 min
0	X_6	1	5	3	0	1200	не имеет смысла
0	X_7	3	0	6	1	3000	3000 / 1 = 3000
	f	–7.5	–3	–6	–12	0	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q	

Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется выполнение неотрицательности всех относительных оценок $\Delta i \geq 0$. Так как оценки $\Delta_1 = -9$, $\Delta_2 = -11$, $\Delta_3 = -15$ и $\Delta_4 = -12$ в f-строке отрицательны, то это свидетельствуют о возможности улучшения полученного решения. Наибольшая по модулю отрицательная оценка $\Delta_4 = -12$. В базис будет включена соответствующая ей небазисная переменная x_4. Составим отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Данные отношения приведены справа от таблицы. Наименьшему частному соответствует строка с переменной x_5. Эта переменная исключается из базиса. В Таблице 1.3

разрешающий столбец и разрешающая строка выделены. Разрешающим элементом является число a_{14} = 4.

Далее построим новую симплекс-таблицу. Ниже поэтапно демонстрируется процесс заполнения новой симплекс-таблицы (Таблицы 1.4).

Таблица 1.4 – Новая симплекс-таблица

	c_j	7.5	3	6	0	
$\overline{C_B}$		X_1	X_2	X_3	X_5	$\overline{A_0}$
12	X_4				1/4	
0	X_6					
0	X_7					
	f					
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q

В Таблице 1.4 переменные x_4 и x_5 меняются местами вместе с коэффициентами cj. Разрешающий элемент заменяется на обратный. В Таблице 1.5 элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак.

Таблица 1.5 – Симплекс преобразования

	c_j	7.5	3	6	0	
$\overline{C_B}$		X_1	X_2	X_3	X_5	$\overline{A_0}$
12	X_4	1/2	1/4	1/8	1/4	850
0	X_6				0	
0	X_7				-1/4	
	f				3	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q

Таблица 1.6 – Итерация 0

	c_j	7.5	3	6	0		
$\overline{C_B}$		X_1	X_2	X_3	X_5	$\overline{A_0}$	
12	X_4	1/2	1/4	1/8	1/4	850	850 / 1/8 = 6800
0	X_6	1	5	3	0	1200	1200 / 3 = 400
0	X_7	2.5	-0.25	5.875	-1/4	2150	2150 / 5.875 = 365 *min*
	f	-1.5	0	-4.5	3	10200	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q	

Остальные элементы (Таблица 1.6) рассчитываются по «правилу прямоугольника».

$$\mathrm{a}_{21} = \frac{(1*4)-(2*0)}{4} = 1;\ \mathrm{a}_{22} = \frac{(5*4)-(1*0)}{4} = 5;$$

$$\mathrm{a}_{23} = \frac{(3*4)-(0.5*0)}{4} = 3;\ \mathrm{a}_{31} = \frac{(3*4)-(2*1)}{4} = 2.5;$$

$$\mathrm{a}_{32} = \frac{(0*4)-(1*1)}{4} = -0.25;\ \mathrm{a}_{33} = \frac{(6*4)-(0.5*1)}{4} = 5.875;$$

$$\mathrm{a}_{25} = \frac{(1200*4)-(3400*0)}{4} = 1200;\ \mathrm{a}_{35} = \frac{(3000*4)-(1*3400)}{4} = 2150;$$

$$\Delta_1 = \frac{(-7.5*4)-(-12\ *\ 2)}{4} = -1.5;$$

$$\Delta_2 = \frac{(-3*4)-(-12\ *\ 1)}{4} = 0;$$

$$\Delta_3 = \frac{(-6*4)-(-12\ *\ 0.5)}{4} = -4.5;$$

Базисное решение, которое дает последняя таблица

$$\mathrm{x}^{(1)} = (\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}, \mathrm{x4}, \mathrm{x5}, \mathrm{x6}, x7) = (0, 0, 0, 850, 0, 1200, 2150),$$

$$f\left(x^{(1)}\right) = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 850 * 12 + 0 * 1200 + 0 * 2150 = 10200.$$

Это решение не является оптимальным, так как в f-строке имеются отрицательные оценки Δ_1, Δ_3.

Таблица 5.7 – Итерация 1

	c_j	7.5	3	0	0		
$\overline{C_B}$		X_1	X_2	X_7	X_5	$\overline{A_0}$	
12	X_4	0,45	0,25	-0,02	0,25	804	804/0.25 = 3654
0	X_6	-0,28	5,13	-0,51	0,126	102	102/5 = 51 min
6	X_3	0,42	-0,042	0,17	-0,042	365	-1
	f	0,41	-0,19	0,77	2,811	11847	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q	

Таблица 5.7 – Итерация 4

	c_j	7.5	3	0	0	
$\overline{C_B}$		X_1	X_6	X_7	X_5	$\overline{A_0}$
12	X_4	0,45	-0.05	0	0,25	799
3	X_2	-0,05	0.2	-0,1	0,02	20
6	X_3	0,42	0	0,17	-0,04	367
	f	0,40	0.04	0,75	2,81	11851
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q

Если в последней таблице f-строке не содержит отрицательных оценок, то это свидетельствует об оптимальности полученного решения:

Подставляем базисное решение, которое дает последняя таблица

$$\mathrm{x}^{(4)} = (\mathrm{x}1, \mathrm{x}2, \mathrm{x}3, \mathrm{x}4, \mathrm{x}5, \mathrm{x}6, x7) = (0, 20, 367, 799, 0,0,0),$$

Где n – количество итераций

$$f\left(x^{(4)}\right) = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 12 * 799 + 3 * 20 + 367 * 6 = 11851.$$

Проверим решение по «правилу прямоугольника».

$$f_{max} = Q = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = \frac{(11847 * 5.13) - ((-0.19) * 102)}{5.13} = 11851.$$

Таким образом, фабрика должна выпускать в течении недели x_4 = 800 шт. шкафов продукции D, x_2 = 20 шт. шкафов продукции B, и x_3 = 367 шт. продукции типа C. Тогда фабрика получит максимальный доход от продажи

11851 [тыс. ден.ед].

1.3 Результат работы программы

```
Вводимая переменная: x4
Выводимая переменная: x5

==================================================
Итерация 1
==================================================
    base |       x1 |       x2 |       x3 |       x4 |       x5 |       x6 |       x7 |          A
      x4 |     0.50 |     0.25 |     0.12 |     1.00 |     0.25 |     0.00 |     0.00 |     850.00
      x6 |     1.00 |     5.00 |     3.00 |     0.00 |     0.00 |     1.00 |     0.00 |    1200.00
      x7 |     2.50 |    -0.25 |     5.88 |     0.00 |    -0.25 |     0.00 |     1.00 |    2150.00
       f |    -1.50 |     0.00 |    -4.50 |     0.00 |     3.00 |     0.00 |     0.00 |   10200.00

Вводимая переменная: x3
Выводимая переменная: x7

==================================================
Итерация 2
==================================================
    base |       x1 |       x2 |       x3 |       x4 |       x5 |       x6 |       x7 |          A
      x4 |     0.45 |     0.26 |     0.00 |     1.00 |     0.26 |     0.00 |    -0.02 |     804.26
      x6 |    -0.28 |     5.13 |     0.00 |     0.00 |     0.13 |     1.00 |    -0.51 |     102.13
      x3 |     0.43 |    -0.04 |     1.00 |     0.00 |    -0.04 |     0.00 |     0.17 |     365.96
       f |     0.41 |    -0.19 |     0.00 |     0.00 |     2.81 |     0.00 |     0.77 |   11846.81

Вводимая переменная: x2
Выводимая переменная: x6

==================================================
Итерация 3
==================================================
    base |       x1 |       x2 |       x3 |       x4 |       x5 |       x6 |       x7 |          A
      x4 |     0.46 |     0.00 |     0.00 |     1.00 |     0.25 |    -0.05 |     0.00 |     799.17
      x2 |    -0.05 |     1.00 |     0.00 |     0.00 |     0.02 |     0.20 |    -0.10 |      19.92
      x3 |     0.42 |     0.00 |     1.00 |     0.00 |    -0.04 |     0.00 |     0.17 |     366.80
       f |     0.40 |     0.00 |     0.00 |     0.00 |     2.81 |     0.04 |     0.75 |   11850.62
x4: 799.17
x2: 19.92
x3: 366.80
Максимальная прибыль: 11850.62 ден. ед.
```

Рисунок 1 – Результат работы программы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения практической работы была решена задача линейного программирования, связанная с оптимизацией производства подшипников двух типов. На основании исходных данных была составлена математическая модель: целевая функция, отражающая прибыль, и система ограничений, описывающих доступное время работы оборудования. Затем задача была приведена к канонической форме, после чего решена с использованием симплексного метода.

Симплексный метод продемонстрировал свою эффективность для данной задачи, позволив найти оптимальное распределение ресурсов, максимизирующее прибыль предприятия.

К основным преимуществам симплексного метода можно отнести: высокую точность при решении линейных задач; чёткую пошаговую процедуру, удобную для алгоритмизации; возможность применения к задачам с большим числом переменных и ограничений.

Однако у метода есть и недостатки: чувствительность к численным ошибкам при большом количестве итераций; неэффективность при решении задач с огромным числом переменных; невозможность применения к задачам с нелинейными ограничениями или целевой функцией.

В целом, симплексный метод остаётся универсальным и надёжным инструментом для решения широкого класса прикладных задач линейного программирования.

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Болотова Л. С. Многокритериальная оптимизация. Болотова Л. С., Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Метод. указания по вып. курсовой работы — М.: МИРЭА, 2015.

2. Сорокин А. Б. Методы оптимизации: гибридные генетические алгоритмы. Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2016.

3. Сорокин А. Б. Линейное программирование: практикум. Сорокин А. Б., Бражникова Е. В., Платонова О. В. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2017.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А – Код реализации симплексного метода на языке Python.

Приложение А

Код реализации симплексного метода на языке Python

Листинг А.1. Реализация симплексного метда.

```
import numpy as np

def print_table(table, basis, columns, iteration):
    print(f"\n{'='*50}\nИтерация {iteration}\n{'='*50}")
    header = ["base"] + columns
    rows = []
    for i in range(len(table)-1):
        row = [basis[i]] + [f"{val:.2f}" if abs(val) >= 0.01 else "0.00" for val in table[i]]
        rows.append(row)
    rows.append(["f"] + [f"{val:.2f}" for val in table[-1]])
    for row in [header] + rows:
        print("{: >8} | {: >8} | {: >8} | {: >8} | {: >8} | {: >8} | {: >8} | {: >8} | {: >12}".format(*row))
def simplex_method():
    num_vars = 4
    num_slack = 3
    columns = ['x1', 'x2', 'x3', 'x4', 'x5', 'x6', 'x7', 'A']
    basis = ['x5', 'x6', 'x7']
    iteration = 1
    table = np.array([
        [2, 1, 0.5, 4, 1, 0, 0, 3400],
        [1, 5, 3, 0, 0, 1, 0, 1200],
        [3, 0, 6, 1, 0, 0, 1, 3000],
        [-7.5, -3, -6, -12, 0, 0, 0, 0]
    ], dtype=float)
    print_table(table, basis, columns, 0)
    while True:
        z_row = table[-1, :-1]
        if all(z_row >= 0):
            break
        entering_col = np.argmin(z_row)
        print(f"\nВводимая переменная: {columns[entering_col]}")
        ratios = []
        for row in table[:-1]:
            if row[entering_col] > 0:
                ratios.append(row[-1] / row[entering_col])
            else:
                ratios.append(np.inf)
        exiting_row = np.argmin(ratios)
        print(f"Выводимая переменная: {basis[exiting_row]}")
        pivot = table[exiting_row, entering_col]
        table[exiting_row] = table[exiting_row] / pivot
        for i in range(len(table)):
            if i != exiting_row:
                factor = table[i, entering_col]
                table[i] -= factor * table[exiting_row]
        basis[exiting_row] = columns[entering_col]
        print_table(table, basis, columns, iteration)
        iteration += 1
    for var, val in zip(basis, table[:-1, -1]):
        print(f"{var}: {val:.2f}")
    print(f"Максимальная прибыль: {table[-1, -1]:.2f} ден. ед.")
simplex_method()
```