МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"МИРЭА - Российский технологический университет"
РТУ МИРЭА

Институт Информационных Технологий

Кафедра Вычислительной Техники

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

по дисциплине

«Теория принятия решений»

Двойственная задача

Студент группы: ИКБО-42-23 ____Голев С.С.____
(Ф. И.О. студента)

Преподаватель __Железняк Л.М.__
(Ф.И.О. преподавателя)

Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение задач линейного программирования часто сопровождается построением двойственной задачи, которая представляет собой задачу, логически связанную с исходной (прямой) и позволяющую анализировать её с другой стороны. Двойственная задача не только даёт возможность проверить оптимальность найденного решения, но и предоставляет ценную информацию об оценке ресурсов, их "цене" (двойственных переменных) и чувствительности модели к изменениям параметров.

Суть метода заключается в том, что каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной, и наоборот. Таким образом, двойственная задача позволяет по-другому интерпретировать ту же экономико-математическую ситуацию. Например, если прямая задача описывает максимизацию прибыли при ограничениях по ресурсам, то двойственная может описывать минимизацию затрат на эти ресурсы при обеспечении заданного уровня выпуска продукции.

В данной работе была построена и решена двойственная задача, соответствующая исходной задаче оптимизации производственного плана. Использование двойственной задачи позволяет глубже понять структуру исходной модели, а также проверить корректность и устойчивость полученного решения.

1 ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

1.2 Постановка задачи

Задание 8. Решить прямую ЗЛП с помощью симплексного метода и обратную с помощью теорем двойственности. Определить интервалы устойчивости.

Задача. Для изготовления четырех видов продукции A, B, C и D используются три вида ресурсов I, II, III. Дальнейшее условие задачи в таблице П.8.

Таблица П.8. Исходные данные задачи.

Ресурсы	Нормы расхода сырья на единицу продукции, ед.				Запасы ресурсов, ед.
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	3400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	7,5	3	6	12	

Требуется определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

1.3 Математическая модель исходной задачи

Пусть x1 – тип шкафа A, x2 –тип шкафа B, x3 –тип шкафа C. Прибыль от продажи шкафов составит 9x1 + 11x2 + 15x3, прибыль требуется максимизировать.

$$f(x) = 7.5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 4x_4 + x_5 = 3400 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_6 = 1200 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 + x_7 = 3000 \\ xi \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 7 \end{cases}$$

Векторный вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A_7} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В ходе решения прямой задачи было определено, что максимальный доход от продажи составляет $f_{max} = 11851$ тыс. ден.ед., оптимальный план $\overline{x^*} = (x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7) = (0, 20, 367, 799, 0,0,0)$.

1.4 Соответствующая исходной двойственная задача

Найдем соответствующую двойственную задачу. Введем вектор двойственных переменных размерности три $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)^{T}$. Соответствующие векторы и матрица ограничений имеет вид:

$$\overline{c} = (7.5,3, 6,12), \overline{b} = (3400, 1200, 3000), A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0.5 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем двойственную задачу. Найти минимум функции.

$$g(\overline{y}) = (\overline{b}, \overline{y}) = 3400y_1 + 1200y_2 + 3000y_3 \to min$$

При ограничениях:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0.5 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 7.5 \\ 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \text{следовательно}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 7.5, \\ y_1 + 5y_2 \geq 3, \\ 0.5y_1 + 3y_2 + 6y_3 \geq 6, \\ 4y_1 + y_3 \geq 12, \\ yi \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

1.5 Первая теорема двойственности

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем экстремальные значения целевых функций равны. В ходе решения прямой задачи было определено, что максимальный доход от продажи составляет $f_{max} = 11851$ тыс. ден.ед., оптимальный план $\overline{\mathrm{x}^*} = (\mathrm{x}1, \mathrm{x}2, \mathrm{x}3, \mathrm{x}4, \mathrm{x}5, \mathrm{x}6, x7) = (0, 20, 367, 799, 0,0,0)$.

Оптимальное решение двойственной задачи может быть получено из оптимального решения прямой задачи. Так как прямая задача имеет решение, то на основании первой теоремы о двойственности задача также разрешима. Ее решение может быть найдено из формулы:

$$\overline{\mathrm{x}^*} = \overline{C_B} \cdot D^{-1},$$

где D – матрица, составленная из компонентов векторов входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

В последней симплекс-таблице базисными переменными являются $x4$, $x2$, $x3$. Соответствующие этим переменным векторы $\overline{\mathrm{A}_4}$, $\overline{\mathrm{A}_2}, \overline{\mathrm{A}_3}$ в разложении используются для формирования столбцов матрицы D.

$$\overline{\mathrm{A}_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A}_3} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

Тогда,

$$D = (\overline{\mathrm{A}_4}, \overline{\mathrm{A}_2}, \overline{\mathrm{A}_3}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0.5 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления обратной матрицы D^{-1} запишем матрицу D дописав к ней справа единичную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Для нахождения обратной матрицы D^{-1} используем элементарные преобразования над строками матрицы. Таким образом, преобразуются левая часть полученной матрицы в единичную.

Переставим 1 и 3 строку;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Из третьей строки вычтем первую строку умноженную на два;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -23,5 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right),$$

Делим вторую строку на два;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 1 & -23,5 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right),$$

Из третьей строки вычтем вторую строку;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & -24,1 & 1 & -0,2 & -4 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на -24,1;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,04 & 0,008 & 0,17 \end{array}\right).$$

Из первой вычтем третью умноженную на 6 и из второй третью умноженную на 0.6;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.25 & -0.05 & 0.004 \\ 0 & 1 & 0 & 0.02 & 0,2 & -0.09 \\ 0 & 0 & 1 & -0,04 & 0,008 & 0,17 \end{array}\right)$$

Запишем обратную матрицу.

$$D^{-1} = (y_4^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.05 & 0.004 \\ 0.02 & 0,2 & -0.09 \\ -0,04 & 0,008 & 0,17 \end{pmatrix}.$$

Базисными переменными в симплекс-таблице являются $\overline{\text{C}_{\text{Б}}} = (12, 3, 6)$, тогда

$$\overline{\text{y}^*} = (y_4^*, y_2^*, y_3^*) = \overline{\text{C}_{\text{Б}}} \cdot D^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} (0.25 * 12 - 0.05 * 3 + 0.004 * 6); (0.02 * 12 + 0.2 * 3 - 0.09 * 6); \\ (-0.04 * 12 + 0.008 * 3 + 0.17 * 6) \end{pmatrix} =$$
$$= (2.81;\ 0.03;\ 0.75).$$

При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$g_{min} = g\overline{(y^*)} = \left(\bar{b}, \overline{y^*}\right) = 3400 * 2.81 + 1200 * 0.03 +$$
$$+ 3000 * 0.75 = 11851 \text{ тыс. ден. ед}$$

совпадает с максимальным значением $f_{max} = 11851$ [ден.ед.] прямой задачи, что является результатом взаимодвойственности. Таким образом:

$$maxf(\bar{x}) = ming(\bar{y}) = 11851 \text{ [ден. ед.]}$$

1.6 Вторая теорема двойственности

Для того, чтобы планы $\overline{\text{x}^*} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $\overline{y^*} = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ ЗЛП двойственной пары были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы эти планы удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости.

$$\{x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, j = \overline{1,n}.$$

$$\{y_i^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, i = \overline{1,m}.$$

Итак, имеем оптимальное решение прямой задачи: недельный объем производства продукции типа А – x_1 = 0; недельный объем производства продукции типа В – x_2 = 20; недельный объем производства продукции типа С – x_3 = 367; недельный объем производства продукции типа D – x_3 = 799; максимальный доход от продажи $f_{max} = 11851$ [ден.ед. / неделю]. Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке $x4$, $x2$, $x3$ в систему ограничений (Таблица 1.2).

Согласно Таблице 1.2 имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 = 3 \\ 0.5y_1 + 3y_2 + 6y_3 = 6 \\ 4y_1 + y_3 = 12, \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений

$y1$ = 678/241, y2 = 9/241, y3 = 180/241

Решение, найденное из первой теоремы двойственности, равнозначно решению из второй теоремы.

$$g\overline{(y^*)} = \left(\bar{b}, \overline{y^*}\right) = 3400 * 9/241 + 1200 * 678/241 + 3000 * 180/241$$
$$= 11851 \text{ ден. ед}$$

$$min\, g(\bar{y}) = 11851[\text{ден. ед.}]$$

Таким образом, вторая теорема дает нахождение оптимального решения двойственной задачи, пользуясь условием обращения в равенство сопряженных неравенств в системах ограничения.

Таблица 1 – Выполнение неравенств прямой задачи

Ограничение	Расчет	Вывод
$2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 4x_4 \leq 3400$	$2*0 + 20 + 0.5*366 + 4*799 < 3400$ $3399 < 3400$	Первое ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, остается спрос на продукцию. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю ($y_1 = 0$).
$x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0x_4 \leq 1200$	$0 + 5*20 + 3*366 + 0*799 = 1200$ $1200 = 1200$	Второе ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что шкафы полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_3 \neq 0$).
$3x_1 + 0x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 3000$	$3*0 + 0*20 + 6*366 + 799= 3000$ $3000 = 3000$	Третье ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что шкафы полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_3 \neq 0$).

Окончание таблицы 1

x1 = 0	0 = 0	Первое ограничение в двойственной задаче не будем учитывать
x2 ≥ 0	19 > 0	Второе ограничение в двойственной задаче будет равенством $y_1 + 5y_2 = 3$
x3 ≥ 0	366 > 0	Третье ограничение в двойственной задаче будет равенством $0.5y_1 + 3y_2 + 6y_3 = 6$, т.е.
X4 ≥ 0	799 > 0	Третье ограничение в двойственной задаче будет равенством $4y_1 + y_3 \geq 12$

1.6 Третья теорема двойственности

Третью теорему двойственности иногда называют теоремой об оценках. Рассматривая ограничения ЗЛП, можно констатировать: изменение правых частей ограничений исходной задачи приводит к изменению максимального значения целевой функции Z_{max}.

Выпишем необходимые элементы из прямой задачи о максимальном доходе. Обратная матрица базиса оптимального плана:

$$D^{-1} = (y_4^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.05 & 0.004 \\ 0.02 & 0,2 & -0.09 \\ -0,04 & 0,008 & 0,17 \end{pmatrix}$$

Свободные члены неравенств (ограничений) прямой задачи:

$$\overline{\mathrm{A}_0} = (b_1, b_2, b_3\ ) = \begin{pmatrix} 3400 \\ 1200 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся формулами для нахождения нижней и верхней границ интервалов устойчивости оценок по видам ресурсов.

Ресурс 3 (Тип С). Найдем нижнюю границу. В третьем столбце обратной матрицы есть положительные элементы (0,17 и 0,004), им соответствуют индексы базисных переменных оптимального плана.

$$\Delta b_1^H = \begin{cases} min\{3000/0{,}17\} = 17647 \\ min\{3400/0{,}004\} = 850000 \end{cases}$$

Выбираем минимальное значение 17647.

Найдем верхнюю границу. В третьем столбце единственное отрицательное значение (–0,09), которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана (1200).

$$\Delta b_1^{\text{В}} = |max\{1200/(-0{,}09)\}| = |-13334| = 13334$$

Таким образом, получаем $\Delta b_1 \in (-17647; 13334)$.

Тогда первый ресурс может изменяться в интервале:

$$(b_1 - \Delta b_1^H, b_1 + \Delta b_1^B) = (3000 - 17647; 3000 + 13334)$$
$$= (-14247; 16734)\text{шт./неделю}$$

При таком значении оптимальный план двойственной задачи остается неизменным. Аналогичные рассуждения позволяют найти интервалы устойчивости оценок для остальных ресурсов.

Ресурс 2 (Ингредиент В). Рассматриваем второй столбец обратной матрицы, в котором один положительный элемент (1/2) и два отрицательных (−1/2, −1/2). Данным элементам соответствуют следующие индексы базисных переменных оптимального плана: положительного элемента – 520; для отрицательных – 360, 220.

Тогда находим нижнюю границу.

$$\Delta b_2^H = \begin{cases} min\{1200/0{,}2\} = 6000 \\ min\{3000/0{,}008\} = 375000 \end{cases}$$

Выбираем наименьшее значение, равное 24.

Найдем верхнюю границу.

$$\Delta b_2^{В} = |max\{3400/(-0{,}05)\}| = |-68000| = 68000$$

Получаем $\Delta b_2 \in (-6000; 68000)$.

Тогда второй ресурс может изменяться в интервале:

$$(b_2 - \Delta b_2^H, b_2 + \Delta b_2^B) = (1200 - 6000; 1200 + 68000) =$$
$$= (-4800; 69200) \text{ шт./неделю}$$

Ресурс 3 (Ограничение по недельному объему производства шкафов типа C по сравнению с объемом производства шкафов типа B). Рассматриваем первый столбец обратной матрицы, в котором два положительных элемента. Данным элементам соответствует индекс соответствующих базисных переменных оптимального плана.

Находим нижнюю границу.

$$\Delta b_3^H = \begin{cases} min\{3400/0{,}25\} = 13600 \\ min\{1200/0{,}02\} = 60000 \end{cases}$$

Найдем верхнюю границу.

$$\Delta b_3^{В} = |max\{3000/(-0{,}04)\}| = |-75000| = 75000$$

Получаем $\Delta b_3 \in (-13600; 75000)$.

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению:

$$(b_3 - \Delta b_3^H, b_3 + \Delta b_3^B) = (3400 - 13600; 3400 + 75000)$$
$$= (-10200; 78400) \text{ шт./неделю}$$

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов на величину максимальной стоимости продукции. Как известно, это дефицитные ресурсы $y_1^* = 2.87$ и $y_2^* = 0.3$ и $y_3^* = 0.56.$ Введем верхние границы $\Delta b_1^В$ и $\Delta b_2^В$ в формулу:

$$\Delta G_{max}^{i} \approx y_i^* \times \Delta b_i$$

$$\Delta G_{max_1} = y_1 \times \Delta b_1^B = 2{,}87 \times 78400 = 210995$$

$$\Delta G_{max_2} = y_2 \times \Delta b_2^B = 0{,}3 \times 69200 = 2539$$

$$\Delta G_{max_3} = y_3 \times \Delta b_3^B = 0{,}56 \times 16734 = 9958$$

Совместное влияние изменений этих ресурсов приводит к изменению максимальной стоимости продукции G_{max} на величину:

$$\Delta G_{max} = \Delta G_{max_1} + \Delta G_{max_2} + \Delta G_{max_3} = 210995 + 2539 + 9958 = 235344$$

Следовательно, оптимальное значение целевой функции при максимальном изменении ресурсов:

$$G_{max} \approx 11851 + \ 235344 = \ 247195[\text{ден. ед./неделю}]$$

Таким образом, двойственные оценки позволяют судить о чувствительности решения к изменениям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задач линейного программирования часто сопровождается построением двойственной задачи, которая представляет собой задачу, логически связанную с исходной (прямой) и позволяющую анализировать её с другой стороны. Двойственная задача не только даёт возможность проверить оптимальность найденного решения, но и предоставляет ценную информацию об оценке ресурсов, их "цене" (двойственных переменных) и чувствительности модели к изменениям параметров.

Суть метода заключается в том, что каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной, и наоборот. Таким образом, двойственная задача позволяет по-другому интерпретировать ту же экономико-математическую ситуацию. Например, если прямая задача описывает максимизацию прибыли при ограничениях по ресурсам, то двойственная может описывать минимизацию затрат на эти ресурсы при обеспечении заданного уровня выпуска продукции.

В данной работе была построена и решена двойственная задача, соответствующая исходной задаче оптимизации производственного плана. Использование двойственной задачи позволяет глубже понять структуру исходной модели, а также проверить корректность и устойчивость полученного решения.

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Болотова Л. С. Многокритериальная оптимизация. Болотова Л. С., Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Метод. указания по вып. курсовой работы — М.: МИРЭА, 2015.
2. Сорокин А. Б. Методы оптимизации: гибридные генетические алгоритмы. Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2016.
3. Сорокин А. Б. Линейное программирование: практикум. Сорокин А. Б., Бражникова Е. В., Платонова О. В. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2017.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А – Код реализации двойственной задачи на языке Python.

Приложение А

Код реализации двойственной задачи на языке Python.

Листинг А.1. Реализация двойственной задачи.

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
from sympy import symbols, Eq, solve
a_primal = np.array([ [2, 1, 0.5, 4], [1, 5, 3, 0], [3, 0, 6, 1] ])
b_primal = np.array([3400, 1200, 3000]) c_primal = np.array([7.5, 3, 6,
12])
A_dual = a_primal.T y1, y2, y3 = symbols('y1 y2 y3') Eqs = [] for i in
range(4): Eqs.append(Eq(A_dual[i][0]*y1 + A_dual[i][1]*y2 +
A_dual[i][2]*y3, c_primal[i]))
B_inv = np.array([ [0.25, -0.05, 0.004], [0.02, 0.2, -0.09], [-0.04,
0.008, 0.17] ])
print(f"Первая теорема двойственности:") res_primal = linprog( -c_primal,
A_ub=a_primal, b_ub=b_primal, bounds=[(0, None)] * 4, method='highs' )
x_opt = res_primal.x y_opt = -res_primal.ineqlin.marginals
g = b_primal[0] * (y_opt[0]) + b_primal[1] * (y_opt[1]) + b_primal[2] *
(y_opt[2])
print(f"y1 = {round(-res_primal.ineqlin.marginals[0],2)}, y2 = {round(-
res_primal.ineqlin.marginals[1],2)}, y3 = {round(-
res_primal.ineqlin.marginals[2],2)}") print(f"g_min = {round(g,2)}")
print(f"Совпадение с решением прямой задачи {np.isclose(round(g,0),
11851)}")
print(f"\nВторая теорема двойственности:") lims = 0 for line in a_primal:
check = [line[i] * x_opt[i] for i in range(4)] check = sum(check) >
b_primal[lims] lims += 1
if check:
    print(f"Невыполение условия")
    exit(0)

print(f"Ограничения прямой задачи выполняются")
fin_eqs = [] for i in range(4): if x_opt[i] > 0: fin_eqs.append(Eqs[i])
print(f"Ограничения двойственной задачи выполняются")
solutions = solve((fin_eqs), (y1, y2, y3)) g_min = b_primal[0] *
(solutions[y1]) + b_primal[1] * (solutions[y2]) + b_primal[2] *
(solutions[y3])
print(f"y1 = {round(solutions[y1],2)}, y2 = {round(solutions[y2],2)}, y3
= {round(solutions[y3],2)}") print(f"g_min = {round(g_min,2)}")
print(f"\nТретья теорема двойственности:")
def calculate_limits(B_inv, b): limits = [] for col in
range(B_inv.shape[1]): column = B_inv[:, col]
pos_mask = column > 0
    if any(pos_mask):
        delta_lower = min(b[pos_mask]/column[pos_mask])
    else:
        delta_lower = np.inf

    neg_mask = column < 0
    if any(neg_mask):
        delta_upper = min(b[neg_mask]/abs(column[neg_mask]))
    else:
```

Листинг А.2. Продолжение листинга А.1..

```
        delta_upper = np.inf

    limits.append((b[col] - delta_lower, b[col] + delta_upper))
return limits


def calculate_max_Z(y_opt, limits, Z_original): delta_Z = 0 for i in
range(len(y_opt)): if y_opt[i] > 1e-6: delta_b = limits[i][1] -
b_primal[i] delta_Z += y_opt[i] * delta_b return Z_original + delta_Z

resource_limits = calculate_limits(B_inv, b_primal) Z_max =
calculate_max_Z(y_opt, resource_limits, g_min)

print("\nИнтервалы устойчивости ресурсов:") i = 3 for (lower, upper) in
resource_limits: print(f"Ресурс {i}: ({lower:.2f}, {upper:.2f})") i -=
1

print("\nВценим влияние изменения объема ресурсов") for i in
range(len(b_primal)): if y_opt[i] > 1e-6: print(f"При
b_{i+1}={resource_limits[i][1]:.2f}:
Z={y_opt[i]*(resource_limits[i][1]-b_primal[i]):.2f}")
print(f"\nМаксимальное значение целевой функции: {Z_max:.2f}"
```