

|  |
| --- |
| МИНОБРНАУКИ РОССИИ |
| Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  высшего образования  **"МИРЭА - Российский технологический университет"**  **РТУ МИРЭА** |

**Институт** Информационных Технологий

**Кафедра** Вычислительной Техники

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6**

**по дисциплине**

**«Теория принятия решений»**

**Двойственная задача**

Студент группы:ИКБО-42-23 \_\_\_\_Голев С.С.\_\_\_\_ *(Ф. И.О. студента)*

Преподаватель \_\_Железняк Л.М.\_\_

*(Ф.И.О. преподавателя)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Москва 2025

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc133218949)

[1ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА 4](#_Toc133218950)

[1.2 Постановка задачи 4](#_Toc133218951)

[1.2 Математическая модель исходной задачи 4](#_Toc133218952)

[1.3 Соответствующая исходной двойственная задача 4](#_Toc133218953)

[1.4 Первая теорема двойственности 5](#_Toc133218954)

[1.5 Вторая теорема двойственности 7](#_Toc133218955)

[1.6 Третья теорема двойственности 9](#_Toc133218956)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 13](#_Toc133218957)

[СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ 14](#_Toc133218958)

[ПРИЛОЖЕНИЯ 15](#_Toc133218959)

ВВЕДЕНИЕ

Двойственная задача является важным понятием в линейном программировании и теории оптимизации. Она формулируется на основе исходной (прямой) задачи и отражает её структуру с иной точки зрения — через ограничения и оценки ресурсов. Каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной, и наоборот. Анализ двойственной задачи позволяет получить дополнительную информацию о прямой задаче, включая экономические интерпретации, такие как теневая цена ресурсов. Сильная двойственность гарантирует равенство оптимальных значений целевых функций прямой и двойственной задач при наличии оптимальных решений. Использование двойственности облегчает решение задач и повышает эффективность вычислительных методов.

**1 ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА**

* 1. **Постановка задачи**

***Задание 8.*** Решить прямую ЗЛП с помощью симплексного метода и обратную с помощью теорем двойственности. Определить интервалы устойчивости.

***Задача.*** Для изготовления четырех видов продукции А, В, С и D используются три вида ресурсов I, II, III. Дальнейшее условие задачи в таблице П.8.

*Таблица П.8.* Исходные данные задачи.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Нормы расхода сырья на  единицу продукции, ед. | | | | Запасы  ресурсов, ед. |
| А | В | С | D |
| I | 2 | 1 | 0,5 | 4 | 3400 |
| II | 1 | 5 | 3 | 0 | 1200 |
| III | 3 | 0 | 6 | 1 | 3000 |
| Прибыль от единицы продукции, ден. ед. | 7,5 | 3 | 6 | 12 |  |

Требуется определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

**1.3 Математическая модель исходной задачи**

Пусть х1 – тип шкафа А, х2 –тип шкафа В, х3 –тип шкафа С. Прибыль от продажи шкафов составит 9х1 + 11х2 + 15х3, прибыль требуется максимизировать.

Векторный вид:

В ходе решения прямой задачи было определено, что максимальный доход от продажи составляет тыс. ден.ед., оптимальный план

**1.4 Соответствующая исходной двойственная задача**

Найдем соответствующую двойственную задачу. Введем вектор двойственных переменных размерности три . Соответствующие векторы и матрица ограничений имеет вид:

.

Запишем двойственную задачу. Найти минимум функции.

При ограничениях:

**1.5 Первая теорема двойственности**

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем экстремальные значения целевых функций равны. В ходе решения прямой задачи было определено, что максимальный доход от продажи составляет тыс. ден.ед., оптимальный план

Оптимальное решение двойственной задачи может быть получено из оптимального решения прямой задачи. Так как прямая задача имеет решение, то на основании первой теоремы о двойственности задача также разрешима. Ее решение может быть найдено из формулы:

где D – матрица, составленная из компонентов векторов входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

В последней симплекс-таблице базисными переменными являются 𝑥4, 𝑥2, 𝑥3. Соответствующие этим переменным векторы , в разложении используются для формирования столбцов матрицы D.

Тогда,

*.*

Для вычисления обратной матрицы 𝐷-1 запишем матрицу 𝐷 дописав к ней справа единичную матрицу.

.

Для нахождения обратной матрицы 𝐷-1 используем элементарные преобразования над строками матрицы. Таким образом, преобразуются левая часть полученной матрицы в единичную.

Переставим 1 и 3 строку;

.

Из третьей строки вычтем первую строку умноженную на два;

,

Делим вторую строку на два;

,

Из третьей строки вычтем вторую строку;

.

Разделим третью строку на -24,1;

.

Из первой вычтем третью умноженную на 6 и из второй третью умноженную на 0.6;

Запишем обратную матрицу.

.

Базисными переменными в симплекс-таблице являются , тогда

.

При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи

совпадает с максимальным значением 𝑓𝑚𝑎𝑥 = [ден.ед.] прямой задачи, что является результатом взаимодвойственности. Таким образом:

**1.6 Вторая теорема двойственности**

Для того, чтобы планы и ЗЛП двойственной пары были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы эти планы удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости.

.

.

Итак, имеем оптимальное решение прямой задачи: недельный объем производства продукции типа A – 𝑥1 = 0; недельный объем производства продукции типа В – 𝑥2 = 20; недельный объем производства продукции типа С – 𝑥3 = 367; недельный объем производства продукции типа D – 𝑥3 = 799; максимальный доход от продажи 𝑓𝑚𝑎𝑥 = [ден.ед. / неделю]. Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке 𝑥4, 𝑥2, *х*3 в систему ограничений (Таблица 1.2).

Согласно Таблице 1.2 имеем следующую систему уравнений:

Решим данную систему уравнений

1 = 678/241, y2 = 9/241, y3 = 180/241

Решение, найденное из первой теоремы двойственности, равнозначно решению из второй теоремы.

Таким образом, вторая теорема дает нахождение оптимального решения двойственной задачи, пользуясь условием обращения в равенство сопряженных неравенств в системах ограничения.

*Таблица 1 – Выполнение неравенств прямой задачи*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ограничение | Расчет | Вывод |
| 2x1 + х2 + 0.5х3 + 4x4 ≤ 3400 | 2\*0 + 20 + 0.5\*366 + 4\*799 < 3400  3399 < 3400 | Первое ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, остается спрос на продукцию. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю (𝑦1 = 0). |
| х1 + 5х2 + 3х3 +0x4 ≤ 1200 | 0 + 5\*20 + 3\*366 + 0\*799 = 1200  1200 = 1200 | Второе ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что шкафы полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля (𝑦3 ≠ 0). |
| 3х1 + 0х2 + 6х3 +x4 ≤ 3000 | 3\*0 + 0\*20 + 6\*366 + 799= 3000  3000 = 3000 | Третье ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что шкафы полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля (𝑦3 ≠ 0). |

*Окончание таблицы 1*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| х1 = 0 | 0 = 0 | Первое ограничение в двойственной задаче не будем учитывать |
| х2 ≥ 0 | 19 > 0 | Второе ограничение в двойственной задаче будет равенством |
| х3 ≥ 0 | 366 > 0 | Третье ограничение в двойственной задаче будет равенством , т.е. |
| Х4 ≥ 0 | 799 > 0 | Третье ограничение в двойственной задаче будет равенством |

**1.6 Третья теорема двойственности**

Третью теорему двойственности иногда называют теоремой об оценках. Рассматривая ограничения ЗЛП, можно констатировать: изменение правых частей ограничений исходной задачи приводит к изменению максимального значения целевой функции 𝑍𝑚𝑎𝑥.

Выпишем необходимые элементы из прямой задачи о максимальном доходе. Обратная матрица базиса оптимального плана:

Свободные члены неравенств (ограничений) прямой задачи:

Теперь воспользуемся формулами для нахождения нижней и верхней границ интервалов устойчивости оценок по видам ресурсов.

*Ресурс 3 (Тип C)*. Найдем нижнюю границу. В третьем столбце обратной матрицы есть положительные элементы (0,17 и 0,004), им соответствуют индексы базисных переменных оптимального плана.

Выбираем минимальное значение 17647.

Найдем верхнюю границу. В третьем столбце единственное отрицательное значение (–0,09), которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана (1200).

Таким образом, получаем

Тогда первый ресурс может изменяться в интервале:

При таком значении оптимальный план двойственной задачи остается неизменным. Аналогичные рассуждения позволяют найти интервалы устойчивости оценок для остальных ресурсов.

*Ресурс 2 (Ингредиент В).* Рассматриваем второй столбец обратной матрицы, в котором один положительный элемент (1/2) и два отрицательных (−1/2, −1/2). Данным элементам соответствуют следующие индексы базисных переменных оптимального плана: положительного элемента – 520; для отрицательных – 360, 220.

Тогда находим нижнюю границу.

Выбираем наименьшее значение, равное 24.

Найдем верхнюю границу.

Получаем

Тогда второй ресурс может изменяться в интервале:

*Ресурс 3 (Ограничение по недельному объему производства шкафов типа C по сравнению с объемом производства шкафов типа В).* Рассматриваем первый столбец обратной матрицы, в котором два положительных элемента. Данным элементам соответствует индекс соответствующих базисных переменных оптимального плана.

Находим нижнюю границу.

Найдем верхнюю границу.

Получаем

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению:

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов на величину максимальной стоимости продукции. Как известно, это дефицитные ресурсы Введем верхние границы в формулу:

Совместное влияние изменений этих ресурсов приводит к изменению максимальной стоимости продукции 𝐺𝑚𝑎𝑥 на величину:

Следовательно, оптимальное значение целевой функции при максимальном изменении ресурсов:

Таким образом, двойственные оценки позволяют судить о чувствительности решения к изменениям.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

(*Описать что было сделано, указать плюсы и минусы двойственной задачи*)

**СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Болотова Л. С. Многокритериальная оптимизация. Болотова Л. С., Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Метод. указания по вып. курсовой работы — М.: МИРЭА, 2015.
2. Сорокин А. Б. Методы оптимизации: гибридные генетические алгоритмы. Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2016.
3. Сорокин А. Б. Линейное программирование: практикум. Сорокин А. Б., Бражникова Е. В., Платонова О. В. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2017.

**ПРИЛОЖЕНИЯ**

Приложение А – Код реализации двойственной задачи на языке Python.

**Приложение А**

Код реализации двойственной задачи на языке Python.

*Листинг А.1. Реализация двойственной задачи.*

Код программы