

Física Estatística 2

Gabriel Golfetti

2 O Gás Ideal

[...] eu era o mais disposto a contestar algumas Objeções de *Francisco Lineu*, uma vez que o medo de admitir o *Vácuo* tem prevalecido em tantas pessoas proeminentes criadas pela aclamada Filosofia das Escolas, que mesmo que discordem com ele e entre si sobre a solução para o *Fenômeno* do Experimento de *Torricelli*, concordam em atribuí-la a uma substância extremamente rarefeita que preenche o espaço deixado pelo Mercúrio.

Robert Boyle, A Defence of the Doctrine Touching the Spring and Weight of the Air (1662)

Entre meados do século XVII houveram esforços dirigidos a entender a natureza do ar, que até o final do século XIX tornaram-se um estudo da natureza dos gases em geral de um ponto de vista termodinâmico. Com as limitações experimentais e teóricas da época, foi desenvolvido o modelo mais simples possível de um sistema termodinâmico com algum grau de liberdade além da própria quantidade de calor absorvida, o *gás ideal*.

Dentro do escopo do que era possível experimentalmente, determinou-se que até uma ótima precisão, o volume V , a *pressão* p - força por unidade de área que uma amostra de gás exerce nas paredes de seu recipiente - e o número de moléculas N de uma amostra de gás caracterizam completamente sua isoterma,

$$\frac{pV}{N} \equiv RT,$$

onde T é uma escala de temperatura conhecida como *temperatura termodinâmica*, cujo valor numérico é determinado pela constante dos gases ideais R , hoje fixada em $R = 8,3145 \text{ J/mol K}$, de forma que o ponto triplo da água (ponto de coexistência entre seus três estados físicos) ocorre a uma temperatura de 273,16 K. A equação de estado acima normalmente é da forma

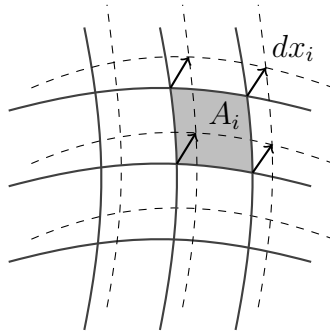
$$pV = NRT,$$

e recebe o nome de *lei dos gases ideais*.

2.1 Trabalho e Energia

Uma descrição da termodinâmica de um sistema não se esgota com as equações de estado. É necessário também um entendimento das maneiras que o sistema pode realizar trabalho, e também identificar o comportamento da sua energia interna. Para isso, considere uma pequena expansão do gás de um volume V para $V + dV$. Independente do formato do recipiente, podemos dividir sua superfície em pequenas facetas i , cada uma com área A_i , deslocando-se perpendicularmente por uma distância dx_i , contribuindo uma variação de volume $dV_i = A_i dx_i$ de forma que $\sum_i dV_i = dV$.

Supondo a pressão aproximadamente constante durante essa expansão, a força atuando em cada uma dessas facetas é, por definição $F_i = pA_i$, e portanto sua expansão realiza trabalho



$\delta W_i = p A_i dx_i = p dV_i$. Assim, ao longo da superfície toda, o gás realiza um trabalho $\sum_i \delta W_i = p dV$. Concluimos portanto que a expressão para o trabalho infinitesimal em termos de variáveis de estado para o nosso gás deve ser

$$\delta W_{\text{expansão}} = -p dV,$$

ou seja, V é a coordenada de trabalho conjugada ao coeficiente de trabalho $-p$. Isso nos permite escrever que o trabalho realizado por um gás em um processo traçado em um diagrama de pressão por volume é dado pela área sob a curva em questão.

Por sua vez, a energia interna do gás ideal é tomada como proporcional a quantidade e temperatura, dada por

$$U = \frac{NRT}{\gamma - 1}.$$

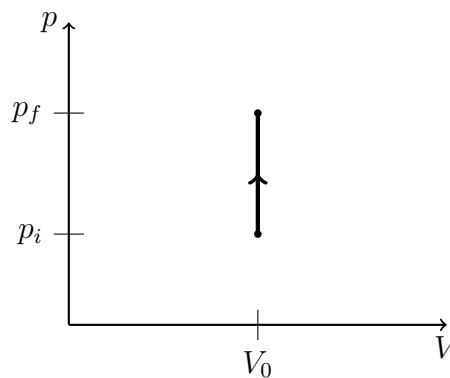
O parâmetro γ recebe o nome de *coeficiente de Poisson*, e para gases nobres como hélio e neônio temos $\gamma = 5/3$, enquanto para gases diatômicos usuais como oxigênio e nitrogênio temos $\gamma = 7/5$.

2.2 Processos Importantes

Aqui vamos encontrar expressões para o trabalho realizado pelo gás e a capacidade térmica de alguns processos de maior incidência e importância teórica, assim como traçá-los em um diagrama de pressão por volume.

2.2.1 Isocórico

O processo isocórico é o processo contínuo em que mantemos as coordenadas de trabalho (volume) constantes.



A cada passo vale que $dV = 0$, e portanto o trabalho deste processo é

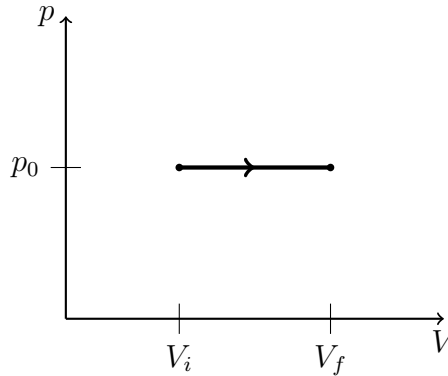
$$W_{\text{isocórico}} = 0.$$

A capacidade térmica, por sua vez é

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT} = \frac{NR}{\gamma - 1}.$$

2.2.2 Isobárico

O processo isobárico é o processo contínuo em que mantemos os coeficientes de trabalho (pressão) constantes.



A pressão no processo todo é constante, e portanto a integral do trabalho é simplesmente

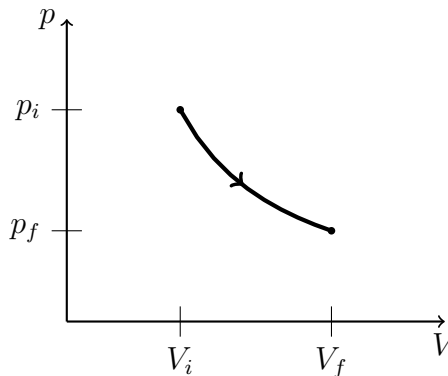
$$W_{\text{isobárico}} = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p_0(V_f - V_i).$$

A capacidade térmica torna-se

$$C_p = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT} = \frac{\gamma NR}{\gamma - 1} = \gamma C_V = C_V + NR.$$

2.2.3 Isotérmico

O processo isotérmico é o processo contínuo em que mantemos a temperatura constante. Para o gás ideal isso significa simplesmente que $pV = \text{const.}$



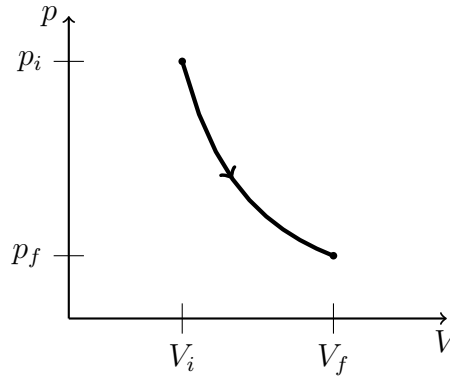
A expressão para o trabalho fica mais simétrica quando expressada em termos da temperatura de operação T_0 :

$$W_{\text{isotérmico}} = \int_{V_i}^{V_f} p dV = NRT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = NRT_0 \log \frac{V_f}{V_i} = NRT_0 \log \frac{p_i}{p_f}.$$

Como não há variação de temperatura, a capacidade térmica diverge.

2.2.4 Isotérmico

O processo adiabático é o processo contínuo em que mantemos o sistema isolado, sem permitir trocas de calor.



Partindo da primeira lei $dU + pdV = 0$ e da equação de estado $pV = NRT$ podemos deduzir três relações que se realizam no processo adiabático:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} &= 0 \Leftrightarrow pV^\gamma = \text{const.} \\ \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} &= 0 \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const.} \\ \gamma \frac{dT}{T} - (\gamma - 1) \frac{dp}{p} &= 0 \Leftrightarrow T^\gamma / p^{\gamma-1} = \text{const.}\end{aligned}$$

Note que no diagrama acima com $\gamma = 5/3$ a curva é mais inclinada do que a isoterma do diagrama anterior. Como não há troca de calor, podemos calcular o trabalho realizado diretamente pela variação de energia interna,

$$W_{\text{adiabático}} = U_i - U_f = \frac{NR(T_f - T_i)}{\gamma - 1} = \frac{p_i V_i - p_f V_f}{\gamma - 1}.$$

Como não há calor absorvido, a capacidade térmica é zero.

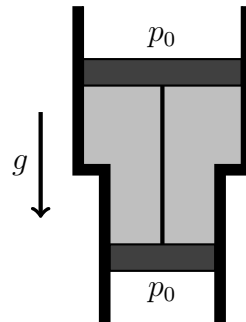
2.3 Problemas

1. A lei de Stevin relaciona a variação de pressão p de um fluido de densidade ρ sob ação da gravidade g com a variação de altura h como

$$dp = -\rho g dh.$$

- (a) Considere o fluido como sendo um gás ideal de massa molar μ . Encontre a densidade ρ como função da pressão p e da temperatura T .
- (b) Partindo da Lei de Stevin, escreva uma equação para como a pressão varia com a altura.
- (c) Seja p_0 a pressão atmosférica no nível do mar, marcado como $h = 0$. Supondo que a temperatura da atmosfera seja constante com a altura, encontre $p(h)$.
- (d) O monte Everest possui uma altura de 8848 m com relação ao nível do mar. Suponha que a temperatura do ar é constante $T = 273 \text{ K}$ e a gravidade $g = 9,79 \text{ m/s}^2$. Dado que a pressão no topo do everest é $0,333p_0$, estime a massa molar μ do ar atmosférico.

- (e) Por fim, supondo que o ar seja composto de gás nitrogênio N_2 e oxigênio O_2 , encontre a proporção x de oxigênio na atmosfera.
2. Defina a taxa de evacuação r de um gás como o volume perdido por unidade de tempo quando medido à própria pressão e temperatura do gás. Encontre a pressão p como função do tempo para um gás dentro de um recipiente de volume V que expulsa gás a uma taxa de evacuação constante r . Suponha que a temperatura do gás não muda durante o processo e que a pressão inicial é p_0 .
3. Um tubo vertical liso possui dois raios, com a área superior maior do que a inferior por uma parcela A , equipado com um par de pistões de massa total M , como na figura abaixo.



Cada pistão move-se na seção correspondente. Uma quantidade N de gás ideal de massa desprezível encontra-se entre os pistões, e estes estão presos um ao outro por um fio inextensível de comprimento L . A pressão externa aos tubos é p_0 e a gravidade local é g . Encontre

- (a) A temperatura mínima T_0 para que o sistema comece a subir
- (b) A temperatura mínima T_1 para que o pistão de baixo descarrilhe para o tubo de cima.
4. Mostre que a para um processo num gás ideal

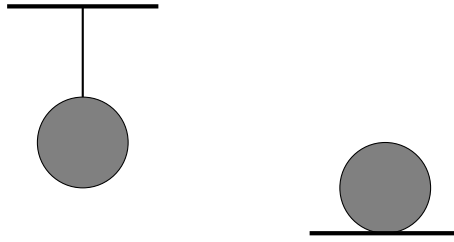
$$pV^\alpha = \text{const} \Leftrightarrow C = \text{const}.$$

5. Um gás nobre de N moléculas é sujeito aos seguintes processos:

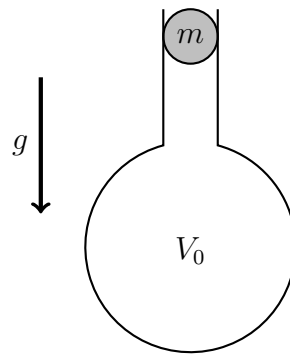
- (a) $p = p_0(1 - V/V_0)$
- (b) $p = p_0(1 - (V/V_0)^2)$
- (c) $p = p_0 e^{-V/V_0}$

Encontre a temperatura máxima e a capacidade térmica como função do volume em cada um deles

6. Considere um longo cilindro horizontal semiaberto. Coloque-o para girar, com seu eixo na vertical posicionado no lado aberto, a uma velocidade angular ω . Encontre a pressão p do ar dentro do tubo como função da distância r do eixo de rotação. Suponha o ar um gás ideal de temperatura T e massa molar μ .
7. (IPhO 1996) Considere duas bolas metálicas idênticas. Uma está pendurada no teto pela superfície enquanto a outra está apoiada no chão, como na figura abaixo.
- Uma mesma pequena quantidade de calor é fornecida para ambas as bolas. Qual delas fica com uma temperatura maior?



8. Considere um recipiente com paredes isolantes e rígidas inicialmente evacuado. Faz-se um pequeno furo no recipiente e ar atmosférico entra lentamente. Encontre a temperatura do ar no interior do balão no momento em que o fluxo de ar para dentro cessa. O ar atmosférico pode ser considerado um gás ideal de coeficiente de Poisson γ .
9. O método de Rüchhardt para medir o coeficiente de Poisson do ar consiste no seguinte. Uma garrafa de volume V_0 é preenchida com ar atmosférico. Seu gargalo tem área A e neste é colocado uma bola justa de massa m , solta a partir do repouso. Dado que a gravidade local é g e a pressão atmosférica é p_0 .



Desprezando atritos e trocas de calor entre a garrafa e o meio externo e supondo que o volume do gargalo é muito menor do que o do resto da garrafa, encontre

- (a) A distância máxima L que a bola afunda no gargalo após ser solta
- (b) O período τ do movimento subsequente
10. Um cilindro vertical isolante possui a base fechada e dois pistões de peso desprezível. Entre a base e o primeiro pistão, diatérmico, existe certa quantidade de hélio. Entre o primeiro e o segundo pistão, isolante, existe certa quantidade de hidrogênio. Inicialmente, o volume de de hidrogênio é $1/3$ do volume de hélio. Dá se uma quantidade de calor Q para o hélio e o pistão superior move-se para cima uma distância D . Após certo tempo, há outra movimentação do pistão superior. Quanto ele se moveu e para qual direção?