Termodinâmica Clássica e Teoria da Informação

Gabriel Golfetti

1 Acessibilidade Adiabática

Definição. Um *sistema termodinâmico* consiste em um *espaço de estados* Γ onde temos pontos $X \in \Gamma$ chamados *estados*. Podemos realizar a *composição* de sistemas termodinâmicos Γ, Δ denotada por $\Gamma \oplus \Delta$ tal que para quaisquer $X \in \Gamma$ e $Y \in \Delta$ temos $X \oplus Y \in \Gamma \oplus \Delta$. Podemos também construir para qualquer $t \geq 0$ e qualquer sistema Γ uma *cópia redimensionada* $t\Gamma$ onde, para todo ponto $X \in \Gamma$ existe um ponto $tX \in t\Gamma$. Supomos que para quaisquer sistemas Γ, Δ, estados $X \in \Gamma, Y \in \Delta$ e $t, s \geq 0$ vale

- $\Gamma \oplus 0\Delta = \Gamma, \quad X \oplus 0Y = X$
- $1\Gamma = \Gamma, \quad 1X = X$
- $t(s\Gamma) = (ts)\Gamma, \quad t(sX) = (ts)X$
- $\Gamma \oplus \Delta = \Delta \oplus \Gamma, \quad X \oplus Y = Y \oplus X$
- $t(\Gamma \oplus \Delta) = (t\Gamma) \oplus (t\Delta), \quad t(X \oplus Y) = (tX) \oplus (tY)$

Definição. Dados dois estados X, Y, dizemos que Y é *adiabaticamente acessível* de X, denotado $X \preceq Y$ se existe uma transformação que leva de X para Y por meio de interação com algum dispositivo e um peso, de forma que o dispositivo retorna ao seu estado inicial após o processo, mas o peso pode ter subido ou descido. Quando vale pelo menos um de $X \preceq Y$ ou $Y \preceq X$, dizemos que X e Y são *comparáveis*. Quando valem ambos, dizemos que são *adiabaticamente equivalentes*, ou $X \equiv Y$. Quando apenas $X \preceq Y$ mas não vale que $Y \preceq X$, denotamos por $X \prec Y$. A relação $\preceq$ satisfaz

A1) **Reflexividade**. $X \equiv X$

A2) **Transitividade**. $X \preceq Y \wedge Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z$

A3) **Consistencia** $X \preceq Y \wedge Z \preceq W \Rightarrow X \oplus Z \preceq Y \oplus W$

A4) **Invariância de escala**. $\forall t > 0\,(X \preceq Y \Rightarrow tX \preceq tY)$

A5) **Recombinação**. $\forall t \in [0,1]\,(X \equiv tX \oplus (1-t)X)$

A6) **Estabilidade**. $\exists Z, W, a_n \to 0^+\, \forall n \in \mathbb{N}\,(X \oplus a_n Z \preceq Y \oplus a_n W) \Rightarrow X \preceq Y$

Teorema 1.1 (Cancelamento). *$X \oplus Z \preceq Y \oplus Z \Rightarrow X \preceq Y$.* □

Com o cancelamento podemos estender a definição das cópias redimensionadas para todo $\mathbb{R}$ no contexto de sistemas compostos na acessibilidade adiabática:

$$X \oplus tY \preceq Z \Leftrightarrow X \preceq (-tY) \oplus Z.$$

Definição. Um espaço de estados Γ é dito satisfazer a *hipótese de comparação* (**HC**) se, para todo $X, Y \in \Gamma$ vale pelo menos um de $X \preceq Y$ ou $Y \preceq X$.

Teorema 1.2. *Seja $\preceq$ uma relação definida sobre um sistema termodinâmico Γ e suas composições de cópias redimensionadas. São equivalentes.*

1. *$\preceq$ satisfaz **A1-A6** e vale **HC** para todos os $t\Gamma$*
2. *Existe uma* entropia *$S : \Gamma \to \mathbb{R}$ que caracteriza $\preceq$ no seguinte sentido. Para todos $t_1 + \cdots + t_m = s_1 + \cdots + s_n$, temos que*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} t_i X_i \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} s_j Y_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} t_i S(X_i) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j S(Y_j).$$

   S é única até uma transformação afim.

Lema 1.1. *Sendo $X_0, X_1 \in \Gamma$ com $X_0 \prec X_1$, definimos*

$$\Omega(\lambda \,|\, X_0, X_1) = \{X \in \Gamma \,|\, (1-\lambda)X_0 \oplus \lambda X_1 \preceq X\}.$$

*Se todos os $t\Gamma$ satisfazem **HC**, vale que*

1. $\forall X \in \Gamma \, \exists \lambda \in \mathbb{R} \, (x \in \Omega(\lambda \,|\, X_0, X_1))$
2. $\forall X \in \Gamma \, (\sup\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, X \in \Omega(\lambda \,|\, X_0, X_1)\} < \infty)$ □

Definição. Dados $X_0, X_1 \in \Gamma$ com $X_0 \prec X_1$, a **entropia canônica** com **pontos de referência** X_0, X_1 é definida por

$$S_0(X \,|\, X_0, X_1) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, X \in \Omega(\lambda \,|\, X_0, X_1)\}$$

Lema 1.2. *Suponha que $X_0 \prec X_1$ e que $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$. Vale que*

$$a_0 X_0 \oplus a_1 X_1 \preceq b_0 X_0 \oplus b_1 X_1 \Leftrightarrow a_1 \leq b_1$$

Em particular, $a_0 X_0 \oplus a_1 X_1 \equiv b_0 X_0 \oplus b_1 X_1 \Leftrightarrow a_1 = b_1$. □

Lema 1.3. *Suponha que Γ satisfaz **HC**. São equivalentes*

1. $\lambda = S_0(X \,|\, X_0, X_1)$
2. $X \equiv (1-\lambda)X_0 \oplus \lambda X_1$ □

Lema 1.4. *Se Γ satisfaz **HC** e $S^* : \Gamma \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$(1-t)X \oplus tY \preceq (1-t)Z \oplus tW$$

se, e somente se

$$(1-t)S^*(X) + tS^*(Y) \leq (1-t)S^*(Z) + tS^*(W)$$

então

$$S^*(X) = (S^*(X_1) - S^*(X_0))S_0(X \,|\, X_0, X_1) + S^*(X_0).$$

Teorema 1.3. *Suponha que uma familia de sistemas satisfaça as seguintes condições:*

1. *Quaisquer dois sistemas são disjuntos*

2. *Todas as composições de cópias redimensionadas de sistemas da família também pertencem à família*

3. *Todo sistema da família satisfaz* ***HC***

Para cada Γ *na família seja* S_Γ *uma entropia neste definido. Então existem constantes* $\alpha_\Gamma, \beta_\Gamma$ *tal que a função definida para todos os estados dos sistemas da família por*

$$S(X) = \alpha_\Gamma S_\Gamma(X) + \beta_\Gamma$$

quando $X \in \Gamma$ *têm as propriedades*

a. *Se* X *e* Y *vêm do mesmo sistema,*

$$X \preceq Y \Leftrightarrow S(X) \leq S(Y)$$

b. *S é extensiva, ou seja,*

$$S(X \oplus Y) = S(X) + S(Y)$$
$$S(tX) = tS(X)$$

□

2 Sistemas simples

Definição. Um *sistema simples* é definido por um subconjunto aberto e convexo $\Gamma \in \mathbb{R}^{n+1}$. Seus pontos são denotados $(U, \mathbf{V})$, onde $U \in \mathbb{R}$ é chamado de *energia* e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ são os *volumes* ou *coordenadas de trabalho*. Suas cópias redimensionadas são obtidas por simples multiplicação:

$$t\Gamma = \{tX \mid X \in \Gamma\}, \quad t(U, \mathbf{V}) = (tU, t\mathbf{V}).$$

Além disso supomos que para um sistema simples vale

S1) **Combinação convexa**. $\forall X, Y \in \Gamma, t \in [0,1] \, (tX \oplus (1-t)Y \preceq tX + (1-t)Y)$

S2) **Irreversibilidade** $\forall X \in \Gamma \, \exists Y \in \Gamma \, (X \prec Y)$

S3) **Planos tangentes Lipshitz** Para todo $X \in \Gamma$ o setor de sucessores A_X possui um plano de suporte único Π_X. Este plano tangente é assumido possuir inclinação finita com relação às coordenadas de trabalho, chamada *pressão*. Esta é suposta ser uma função localmente Lipshitz

S4) **Fronteiras conexas** As fronteiras ∂A_X são conexos por caminhos

Teorema 2.1. *Para todo* $X \in \Gamma$, A_X *é convexo.* □

Teorema 2.2. *Em toda vizinhança de todo* $X \in \Gamma$ *existe* Z *tal que* $X \not\succeq Z$. □

Lema 2.1. *Considere três pontos colineares de um sistema simples,* X, Y, Z, *com* Y *entre* X *e* Z. *Se* $Y \preceq Z$ *então* $X \preceq Y$. □

Teorema 2.3. $\forall X \in \Gamma \, (\bar{A}_X = A_X)$ □

Teorema 2.4. $\forall X \in \Gamma \, (A_X^\circ \neq \emptyset)$ □

Definição. Para $X \in \Gamma$, A_X é dito *positivo* (*negativo*) se o vetor normal a Π_X apontando para A_X° tem componente de energia positiva (negativa).

Lema 2.2. *Se $X = (U_0, \mathbf{V}_0)$ é tal que A_X é positivo, então*

$$A_X \cap \{(U, \mathbf{V}_0) | U \in \mathbb{R}\} = \{(U, \mathbf{V}_0) | U \in \mathbb{R}\} \cap \Gamma$$

□

Teorema 2.5. *Se A_X é positivo para algum $X \in \Gamma$, então o mesmo vale para todo Γ.* □

Teorema 2.6. $(U_X, \mathbf{V}) \preceq (U_Y, \mathbf{V}) \Leftrightarrow U_X \leq U_Y$. □

Definição. A *projeção de trabalho* da fronteira de um setor de sucessores A_X é definida

$$\rho_X = \{\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists U \in \mathbb{R}\,((U, \mathbf{V}) \in \partial A_X)\}$$

Teorema 2.7. *Fixamos $X = (U_0, \mathbf{V}_0) \in \Gamma$.*

1. *Se $Y \in \partial A_X$, então A_X tem um plano tangente em Y e este é Π_Y*

2. *ρ_X é aberto e conexo em $\mathbb{R}^n$*

3. *Definindo $u_X : \rho_X \to \mathbb{R}$,*
$$u_X(\mathbf{V}) = \inf\{u \,|\, (u, \mathbf{V}) \in A_X\},$$
temos que $\partial A_X = \{(u(\mathbf{V}), \mathbf{V}) \,|\, V \in \rho_X\}$. u_X é localmente convexa e
$$\{(U, \mathbf{V}) \,|\, \mathbf{V} \in \rho_X \wedge U \geq u_X(\mathbf{V})\} \cap \Gamma \subseteq A_X$$

4. *u_X é diferenciável em ρ_X e satisfaz a equação diferencial*
$$\nabla u_X(\mathbf{V}) = -\mathbf{p}((u_X(\mathbf{V}), \mathbf{V}))$$
onde as pressões $\mathbf{p}$ *são definidas pelos planos tangentes*
$$\Pi_Y = \{Z \in \Gamma \,|\, (1, \mathbf{p}(Y)) \cdot (Z - Y) = 0\}$$

5. *u_X é a única função diferenciável que satisfaz a equação acima e $u_X(\mathbf{V}_0) = U_0$.*

Teorema 2.8. $Y \in \partial A_X \Rightarrow X \in \partial A_Y \Rightarrow A_X = A_Y$. □

Teorema 2.9. *Dados $X, Y \in \Gamma$, vale exatamente um de*

1. $A_X = A_Y$

2. $A_X \in A_Y^\circ$

3. $A_Y \in A_X^\circ$

*Para um sistema simples, vale **HC**.* □

Lema 2.3. *Para um sistema simples,*

1. *$\Omega(\lambda \,|\, X_0, X_1)$ é convexo*

2. *Se $X \in \Omega(\lambda \,|\, X_0, X_1)$ e $X' \in \Omega(\lambda' \,|\, X_0, X_1)$ então para todo $t \in [0, 1]$ temos que $tX + (1 - t)X' \in \Omega(t\lambda + (1-t)\lambda' \,|\, X_0, X_1)$* □

Teorema 2.10. *Para um sistema simples, $S_0(X \,|\, X_0, X_1)$ é côncava.* □