最短路小总结-----图论小知识

作者： wuog (https://www.acwing.com/user/myspace/index/4329/) ，2019-08-12 03:11:18 ，所有人可见 ，阅读 5168

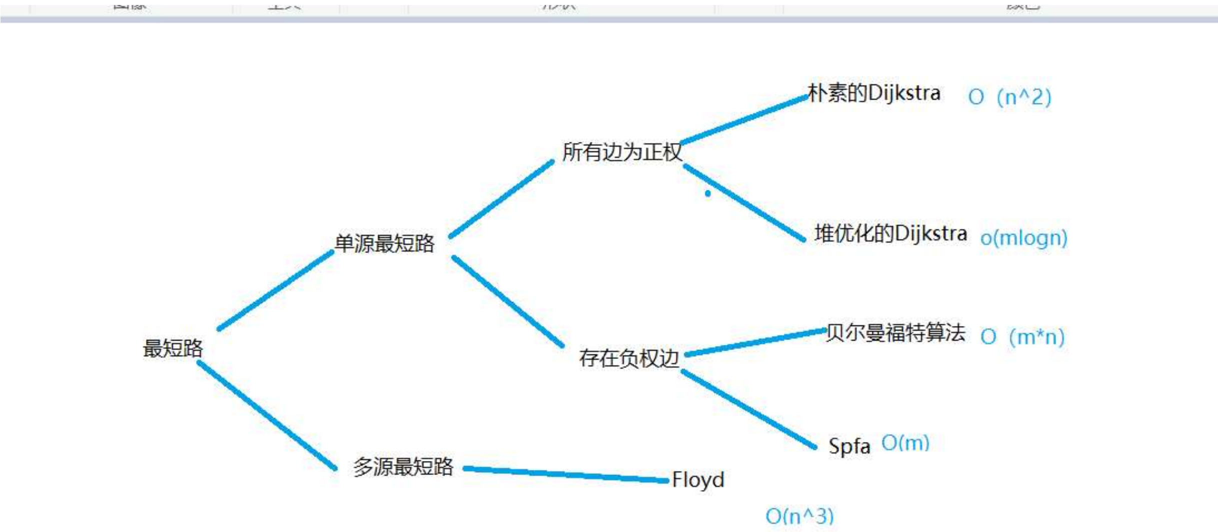
概述

现在有一个问题就是有北京—>成都选什么路径使时间花费最少？或者同时求北京---->海南，天津—>石家庄？当然我给你全国的路线，我们一般是枚举选最少的！现在我们来看一下怎么样用高效的算法去解决！

解决最短路径问题有几个优秀的算法:

```
1.dijkstra算法,最经典的单源最短路径算法

2.bellman-ford算法,允许负权边的单源最短路径算法

3.spfa,其实是bellman-ford+队列优化,其实和bfs的关系更密一点

4.floyd算法,经典的多源最短路径算法
```

我们来看一下yxc老师的知识结构图:



下面我们来开始一个一个认识:

Dijkstra

Dijkstra 算法，用于对有权图进行搜索，找出图中两点的最短距离，既不是DFS搜索，也不是BFS搜索。
把Dijkstra 算法应用于无权图，或者所有边的权都相等的图，Dijkstra 算法等同于BFS搜索。

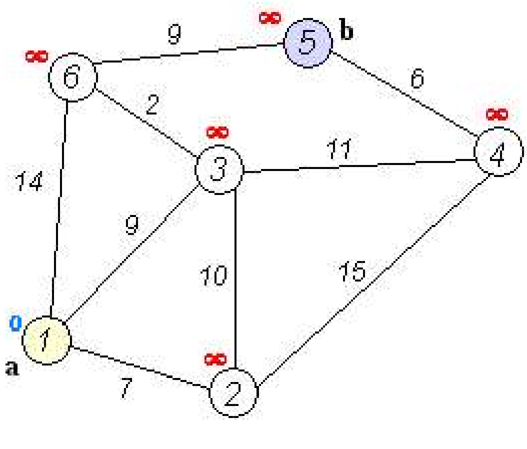
首先我们来看一下它能干什么：

能解决源点到任意一个点的距离（就是有北京到全国各地的最短时间路程规划）

算法的思路：
设G=(V,E)是一个带权有向图，把图中顶点集合V分成两组第一组为已求出最短路径的顶点集合（用S表示，初始时S中只有一个源点，以后每求得一条最短路径，就将加入到集合S中，直到全部顶点都加入到S中，算法就结束了）第二组为其余未确定最短路径的顶点集合（用U表示），按最短路径长度的递增次序依次把第二组的顶点加入S中。在加入的过程中，总保持从源点v到S中各顶点的最短路径长度不大于从源点v到U中任何顶点的最短路径长度。此外，每个顶点对应一个距离，S中的顶点的距离就是从v到此顶点的最短路径长度，U中的顶点的距离，是从v到此顶点只包括S中的顶点为中间顶点的当前最短路径长度。

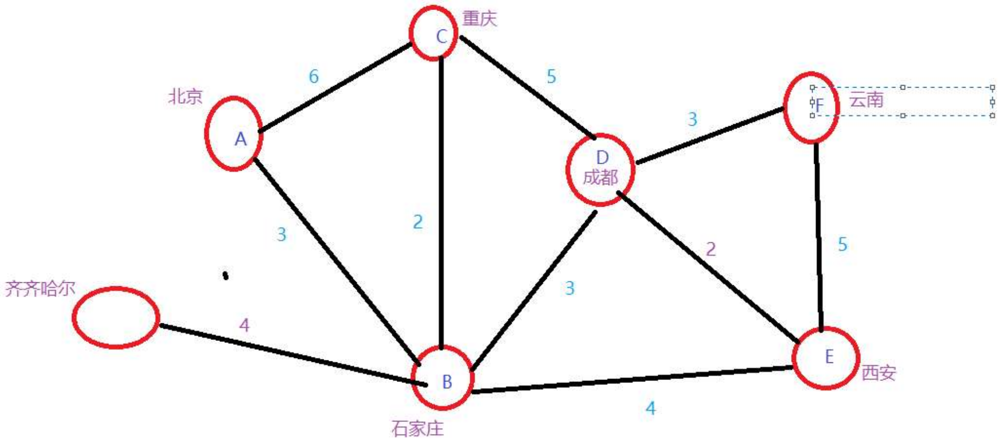
简单来说就是：
1. 先定义dist[1]=0,dist[i]=INF;
2. for 1~n i判断不在S中，且距离最近的点，把他加入s中
3. 然后开始更新一下它到其他点的距离

如果觉得麻烦就看一个动态图：



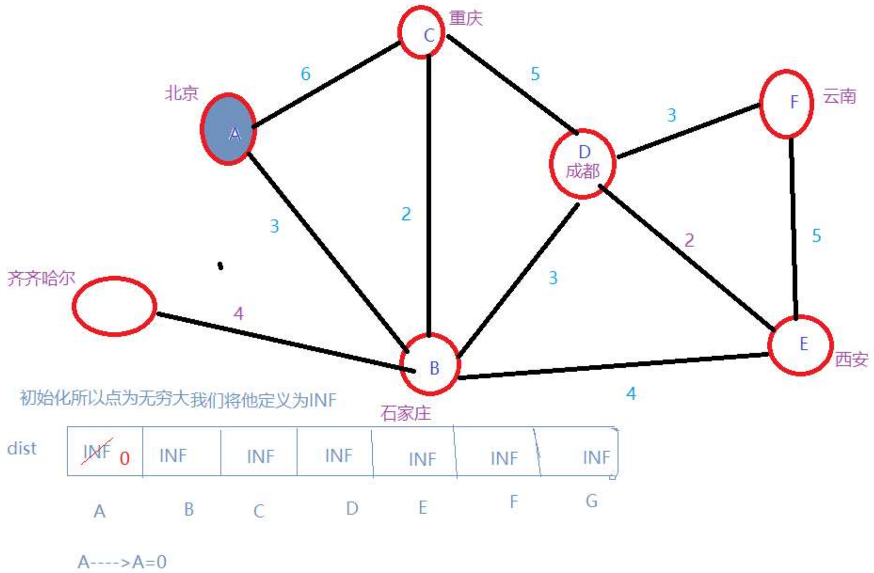
其实一句话来说就是，对于全国路线网，你要确定北京为起点，然后根据路线图来现在最优路线！

我们来举一个例子：

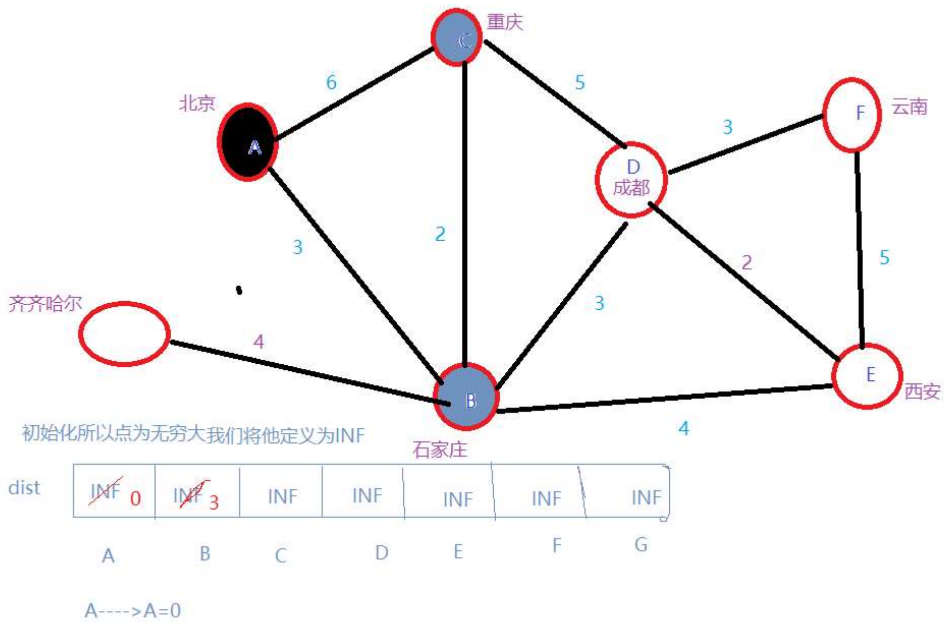


1.创建一个dist[]数组用于存储距离，先将他们初始化为INT_MAX,一个给g图数组！然后开始从A开始搜索：

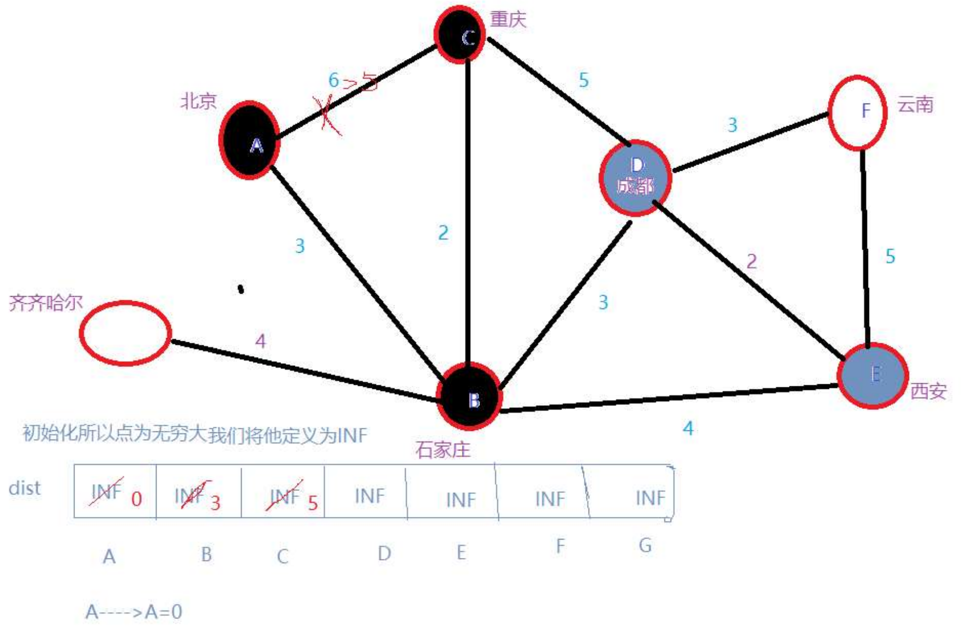
为了方便为定义灰色将要处理，黑色已经处理！



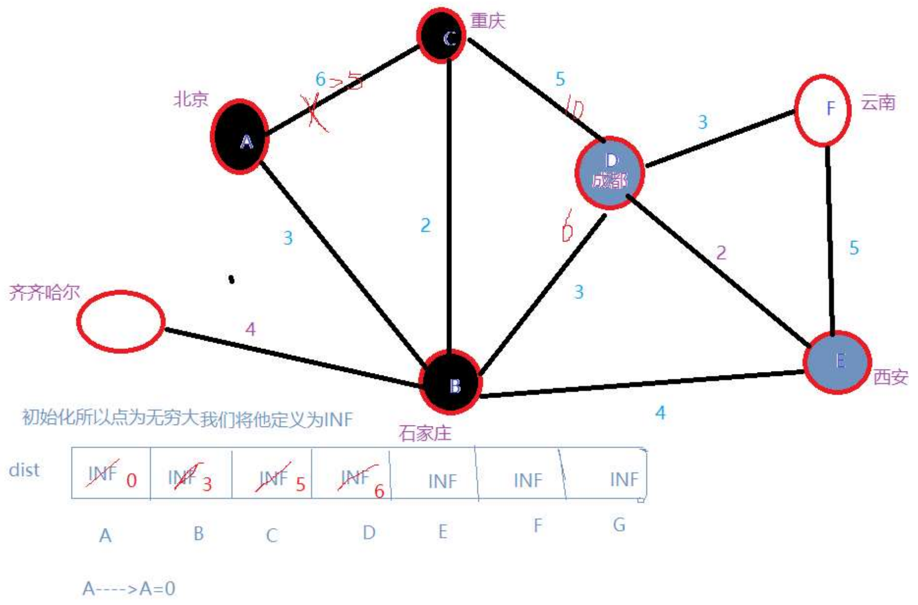
2.A–>A=0,现在有A的最短路径A–A=0,A–>B=3



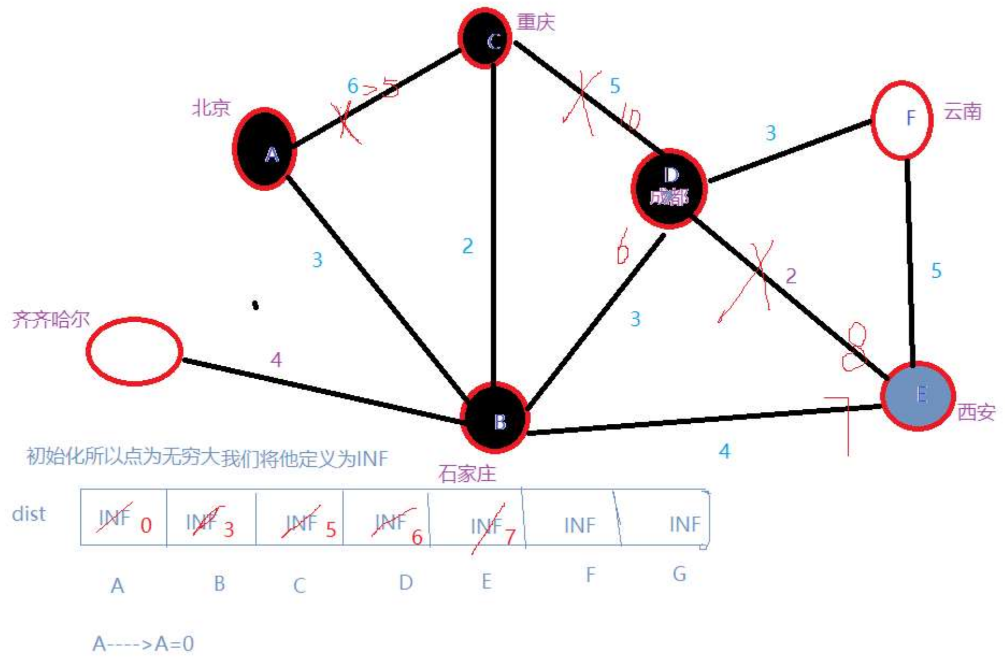
3.然后选入C,此时有最短路A–>A=0,B=3,C=5;



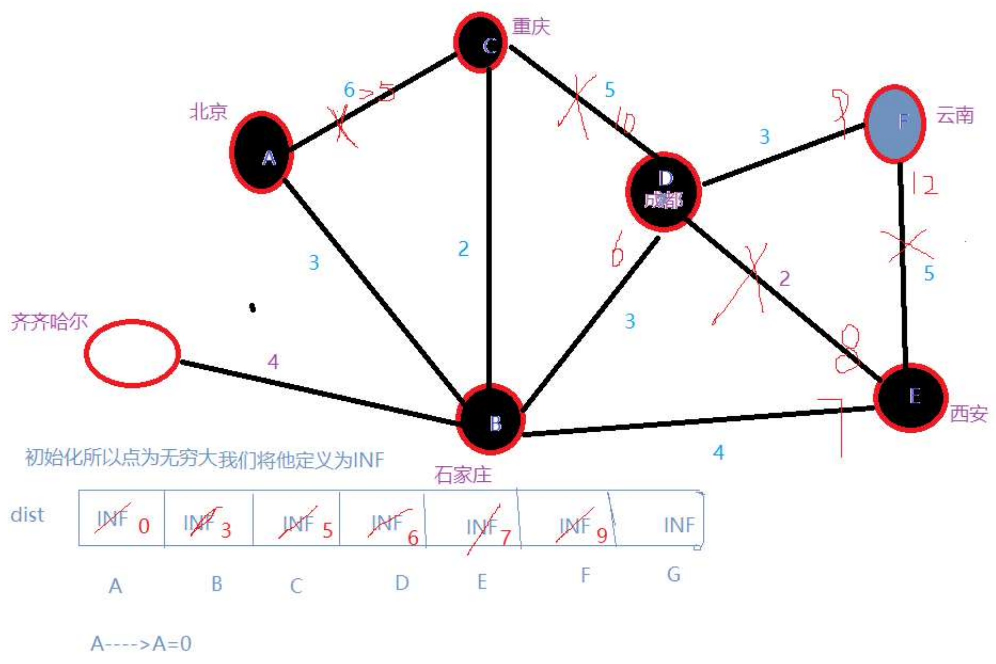
4.选入D,进行权重比较就有了，A–>B–>D=6最短



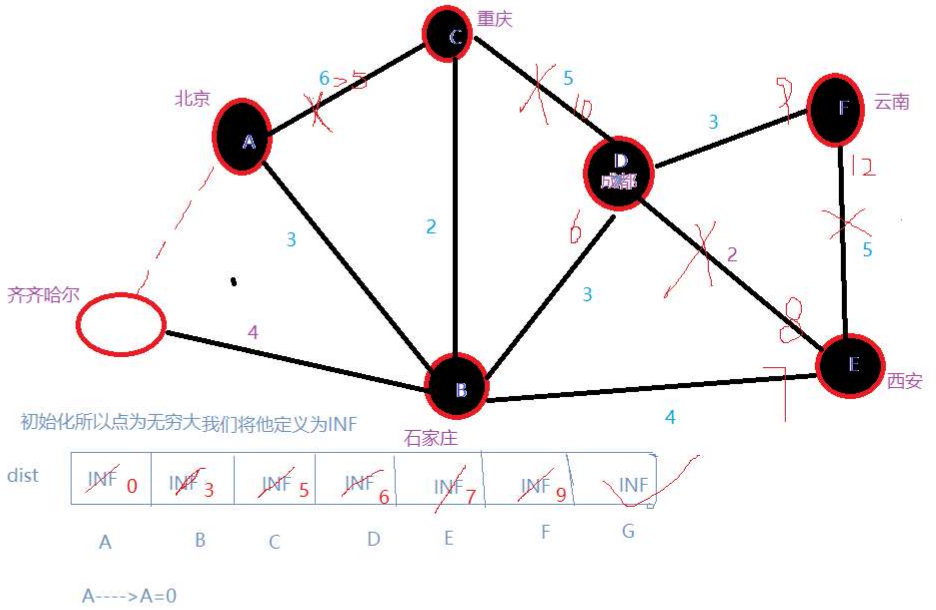
5.选入E，A–>c–>E=7最短



6.选入F，A->b->D–>F=9最短



7.选入齐齐哈尔，但是没有相应的路径，所以A–>齐齐哈尔=INF



8.由于图中的点已经全部松弛，所以结束！

如果你对得到最短路径有疑问！我来解释一段：就以选入B来说，选入B,那么图里面就要去除这个点，我们发现A–>B—>B=5,A–>B–>D=6,A–>B–>E=7,A–>B–>其他点为INF,所以最短路径就是A–B–C=5;其他点也是这样类似计算！

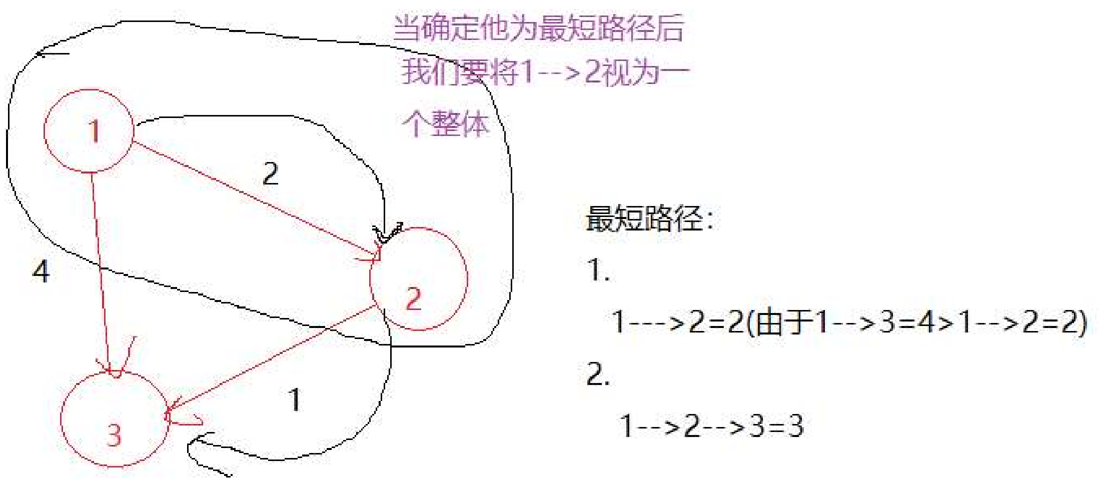
实例中我们可以发现，Dijkstra 算法是一个排序过程，就上面的例子来说，是根据A到图中其余点的最短路径长度进行排序，路径越短越先被找到，路径越长越靠后才能被找到，要找A到F的最短路径，我们依次找到了
(A,B)A –> B 的最短路径 3
(A,C)A –> B –> C 的最短路径 5
(A,D)A –> B –> D 的最短路径 6
(A,E)A –> B –> E 的最短路径 7
(A,F)A –> B –> D –> F 的最短路径 9
(A,G)A-______-G=INF;

好了算法具体我们已经理解了：
我们来看一个例题：

习题

习题链接 (https://www.acwing.com/problem/content/851/)

分析:



代码:

```
int dijkstrac(){
    memset(dist,0x3f,sizeof dist);
    //初始化
    dist[1]=0;
    //设置A-->A=0开始距离

    for(int i=0;i<n;i++){
        int t=-1;
        for(int j=1;j<=n;j++)
        //寻找
        if(!st[j]&&(t==-1||dist[j]<dist[t]))
                t=j;
       st[t]=true;
       //最优路径
       for(int j=1;j<=n;j++)
       dist[j]=min(dist[j],dist[t]+g[t][j]);
    }
    if(dist[n]==0x3f3f3f3f)return -1;
    return dist[n];
}
```

真正想理解的快就自己画一个图，按照代码一步一步走！
代码一眼看过去你根本不知道那是干嘛，甚至有可能你还不清楚参数的含义！好了，看来模板之后，你可能会发现他居然是O(n^2)的算法，她有没有可能优化呢？

我们知道我们是寻找最小的数，而且寻找会要删除该点，然后向后移动，我们可以想到用最小优先队列实现，当然我可以用书写队列（太过于复杂不建议运用）！而且时间复杂度是O(nlogn)n代表边数，m是点数,他一般用于稀疏图，而朴素的Dijkstra用于稠

密图！
我们还是看代码理解吧：

```
int dijkstra(){
    memset(dist,0x3f,sizeof dist);
    //初始化
    dist[1]=0;
    //起点选定
    priority_queue<PII,vector<PII>,greater<PII> >heap;
    //定义一个小根堆

    heap.push({0,1});

    while(heap.size()){
        auto t=heap.top();
        heap.pop();

        int ver=t.second,distance=t.first;
        if(st[ver])continue;
        //开始循环查找
        for(int i=h[ver];i!=-1;i=ne[i]){
            int j=e[i];

            //如果距离大了，选择最小路径
            if(dist[j]>distance+w[i]){
                dist[j]=distance+w[i];
                heap.push({dist[j],j});
            }
        }
    }


    if(dist[n]==0x3f3f3f3f)return -1;
    return dist[n];

}
```

bellman-ford

我们知道Dijkstrac有不能有负权的边缺陷，而贝尔曼福特算法就可以解决它！当然还不止他一个算法可以处理负权问题！相比Dijkstrac，它的边的权值可以为负数、实现简单,而还可以限定边数，缺点是时间复杂度过高，高达O(n*m)。但算法可以进行若干种优化，提高了效率。

下面我们来看一下这个算法：
可用于解决以下问题：

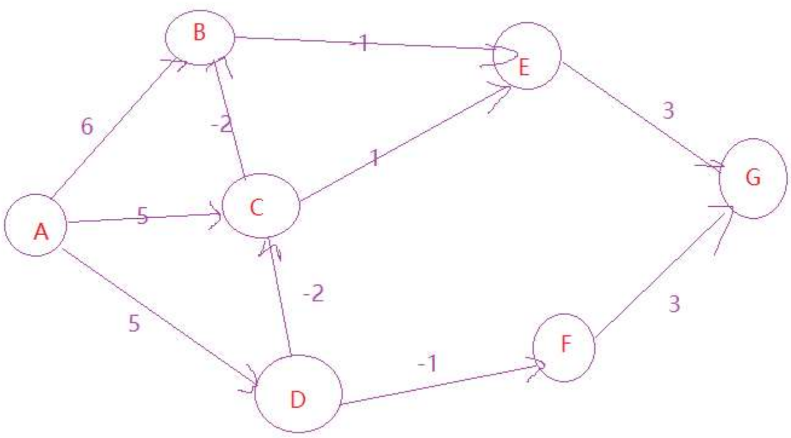
```
    从A出发是否存在到达各个节点的路径(有计算出值当然就可以到达);
    从A出发到达各个节点最短路径(时间最少、或者路径最少等)
     图中是否存在负环路（权重之和为负数）
```

其思路为:

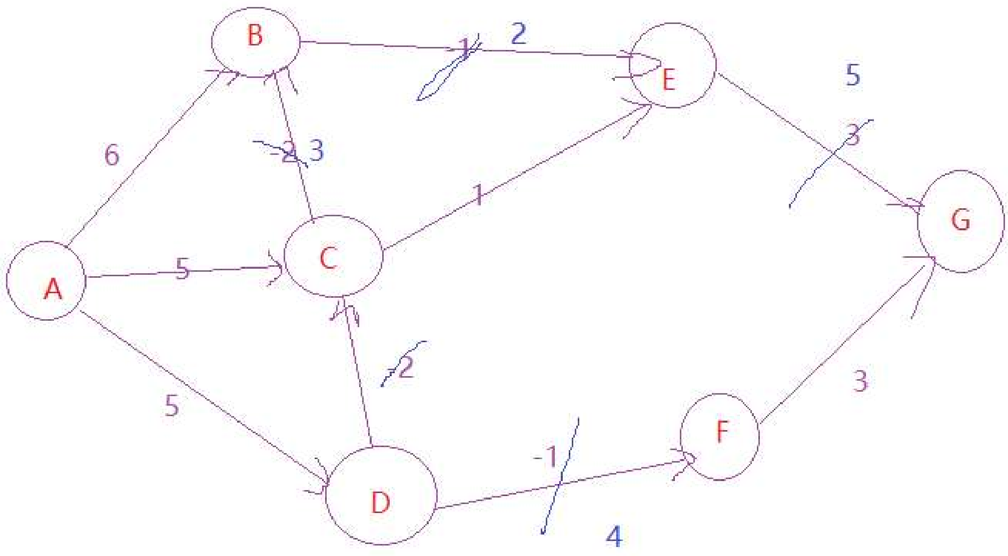
```
1.初始化时将起点s到各个顶点v的距离dist(s->v)赋值为INF，dist(s->s)赋值为0
2.后续进行最多n-1次遍历操作,对所有的边进行松弛操作,假设:
所谓的松弛，以边ab为例，若dist(a)代表起点s到达a点所需要花费的总数，dist(b)代表起点s到
若存在:三角不等式:
(dist(a) +weight(ab)) < dist(b)则说明存在到b的更短的路径,s->...->a->b,更新b点的总花

3.遍历都结束后，若再进行一次遍历，还能得到s到某些节点更短的路径的话，则说明存在负环路
```

思路上与狄克斯特拉算法(Dijkstra algorithm)最大的不同是每次都是从源点s重新出发进行"松弛"更新操作，而Dijkstra则是从源点出发向外扩逐个处理相邻的节点，不会去重复处理节点，这边也可以看出Dijkstra效率相对更高点。

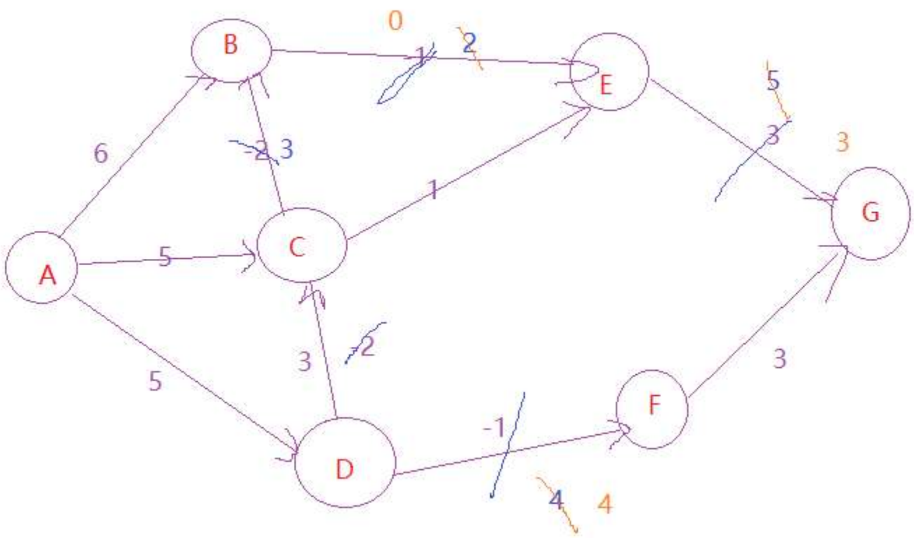
我们举一个例子:



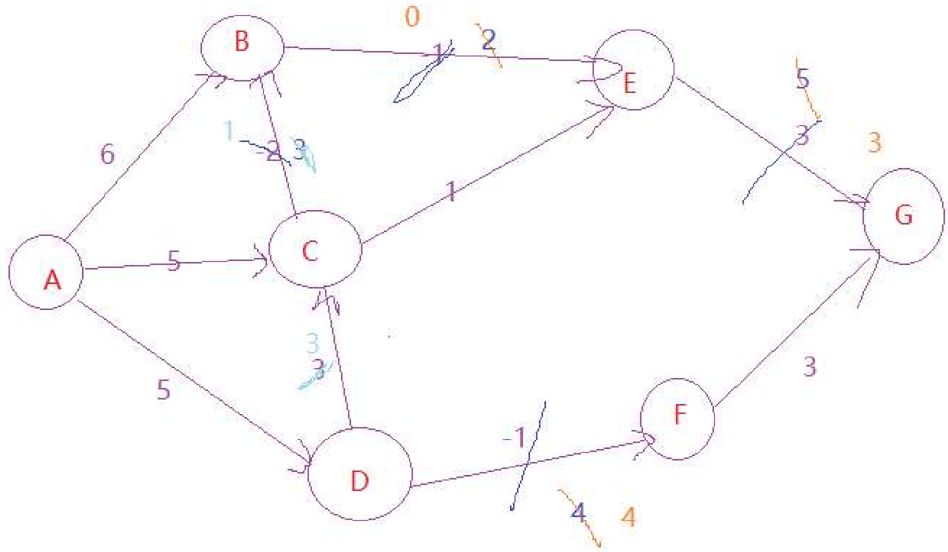
求A到任意一点的距离:
该图共有节点7个，最多需要进行7-1=6次的对所有边的松弛操作
1.进行第一次遍历松弛操作，可以得到:



2.进行第二次遍历松弛操作，得到：



3.再松弛：



4.此时上表边上A到各个节点的最短路径，可以通过倒序的方式得出路线，只是读入时可能会影响最优路径的顺序

比如上述,AB:6 ,AC:5,AD:5,CB:-2,DC:-2,BE:-1,CE:1,DF:-1,EG:3,FG:3 代码需要遍历3次才可以确认结果(最后一次用于确认结果不再更新);
AB:6，AC:5，AD:5，DC:-2，CB:-2，BE:-1，CE:1，DF:-1，EG:3，FG:3 代码需要遍历2次就可以确认结果;
AB:6，AC:5，AD:5，BE:-1，CE:1，DF:-1，DC:-2，CB:-2，EG:3，FG:3 代码需要遍历4次就可以确认结果;

有时候图的关系是用户输入的，对于顺序并不好强制一定是最佳的!

例题

例题链接 (https://www.acwing.com/problem/content/855/)

题意:
就是让我们求从1号点到n号点的最多经过k条边的最短距离!

代码:

```
struct Edge{
    int a,b,c;

}edges[M];

int bellman_ford(){
//初始化
    memset(dist,0x3f,sizeof dist);
    //定义起点
    dist[1]=0;
    for(int i=0;i<k;i++){
    //把dist复制到backup经行遍历松弛,不会产生串联
        memcpy(backup,dist, sizeof dist);

        for(int j=0;j<m;j++){
            int a=edges[j].a,b=edges[j].b,c=edges[j].c;
            //(dist(a) +weight(ab)) < dist(b)则说明存在到b的更短的路径,取最小值
            dist[b]=min(dist[b],backup[a]+c);
        }
    }
    if(dist[n]>0x3f3f3f3f/2)return -1;
    return dist[n];
}
```

1.BFS主要适用于无权重向图重搜索出源点到终点的步骤最少的路径，当方向图存在权重时，不再适用
2.Dijkstra主要用于有权重的方向图中搜索出最短路径，但不适合于有负权重的情况.对于环图，个人感觉和BFS一样，标志好已处理的节点避免进入死循环，可以支持
3.Bellman–Ford主要用于存在负权重的方向图中(没有负权重也可以用，但是效率比

Dijkstra低很多)，搜索出源点到各个节点的最短路径
4.Bellman–Ford可以判断出图是否存在负环路，但存在负环路的情况下不支持计算出各个节点的最短路径。只需要在结束(节点数目-1)次遍历后，再执行一次遍历，若还可以更新数据则说明存在负环路，当人为限制了遍历次数后，对于负环路也可以计算出，但似乎没有什么实际意义

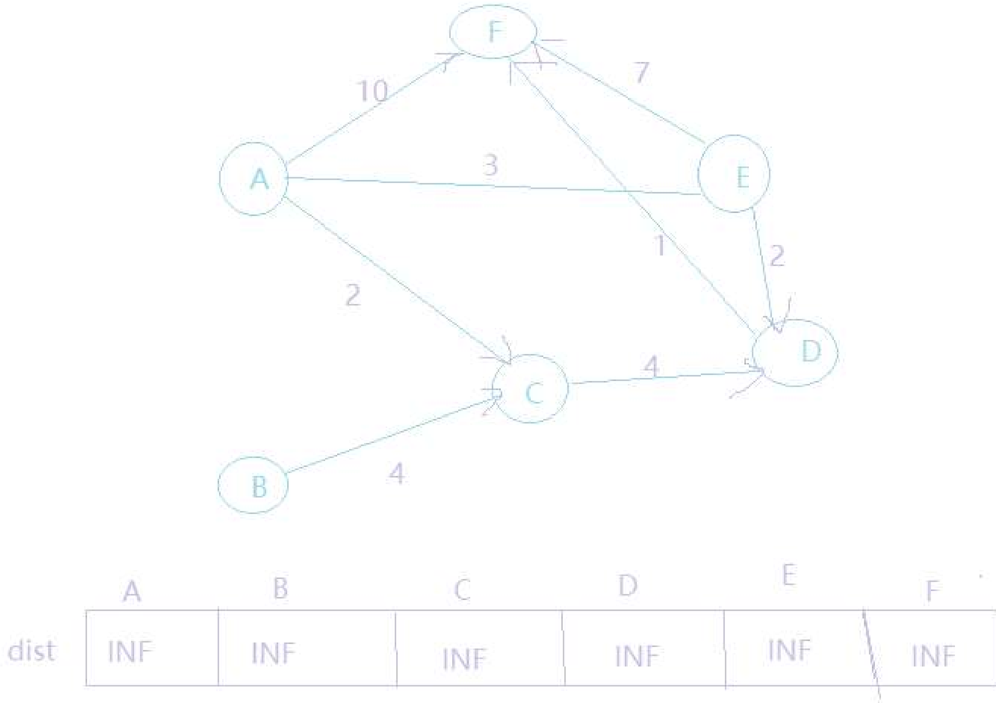
Spfa

前面两个算法，已经可以出单源到任意一个点的距离，而对于负环的判断和时间复杂度Bellman–Ford并没有那么完美：
下面我们看一下用Bellman–Ford队列优化的spfa算法：
算法的思路：
我们用数组dis记录每个结点的最短路径估计值，用邻接表或邻接矩阵来存储图G。我们采取的方法是动态逼近法：设立一个先进先出的队列用来保存待优化的结点，优化时每次取出队首结点u，并且用u点当前的最短路径估计值对离开u点所指向的结点v进行松弛操作，如果v点的最短路径估计值有所调整，且v点不在当前的队列中，就将v点放入队尾。这样不断从队列中取出结点来进行松弛操作，直至队列空为止，所以他的时间复杂度就是O(m),最坏O(n*m)!

我们要知道带有负环的图是没有最短路径的，所以我们在执行算法的时候，要判断图是否带有负环，方法有两种：

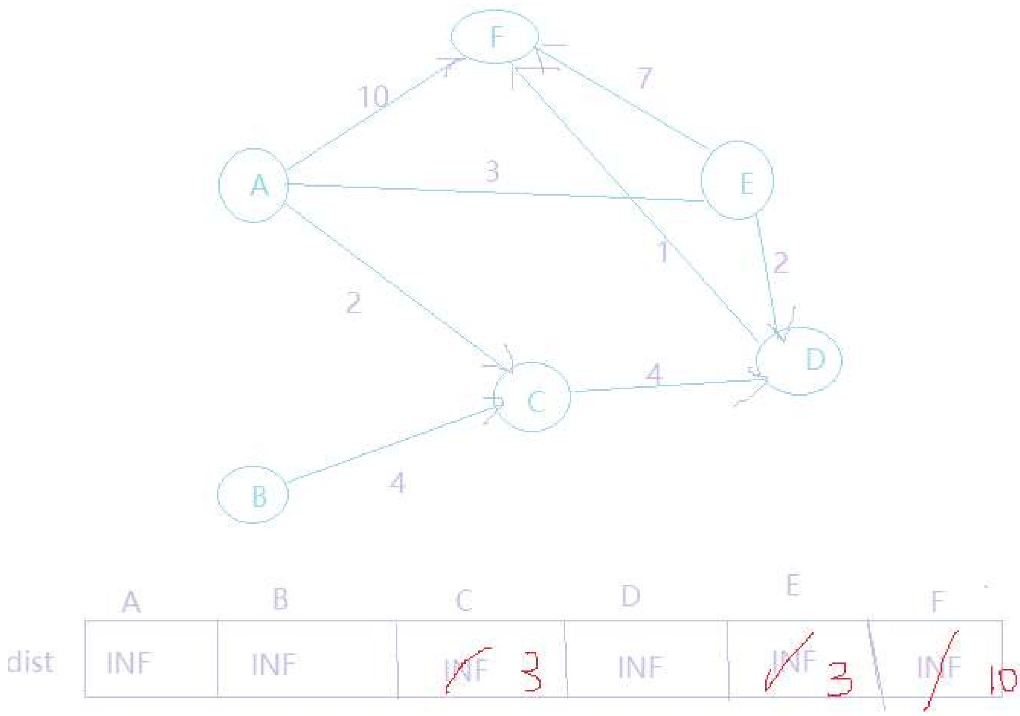
1.开始算法前，调用拓扑排序进行判断（一般不采用，浪费时间）
2.如果某个点进入队列的次数超过N次则存在负环（N为图的顶点数）

举一个例子：
v首先我们先初始化数组dis如下图所示：（除了起点赋值为0外，其他顶点的对应的dis的值都赋予无穷大，这样有利于后续的松弛）

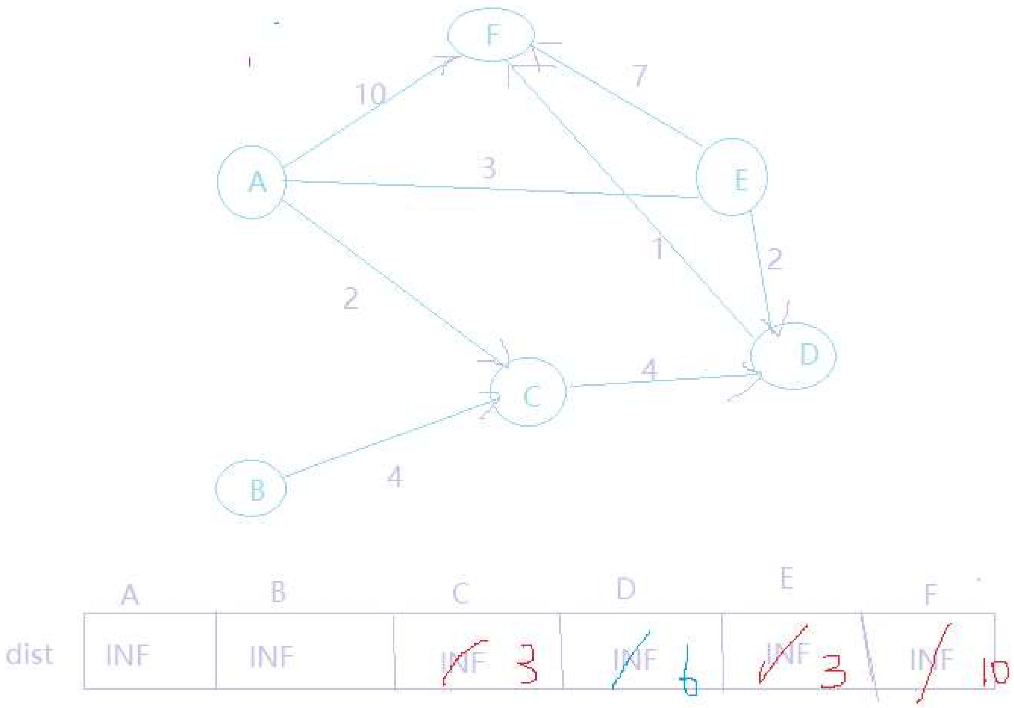


此时，我们还要把a推入队列：{a}现在进入循环，直到队列为空才退出循环。

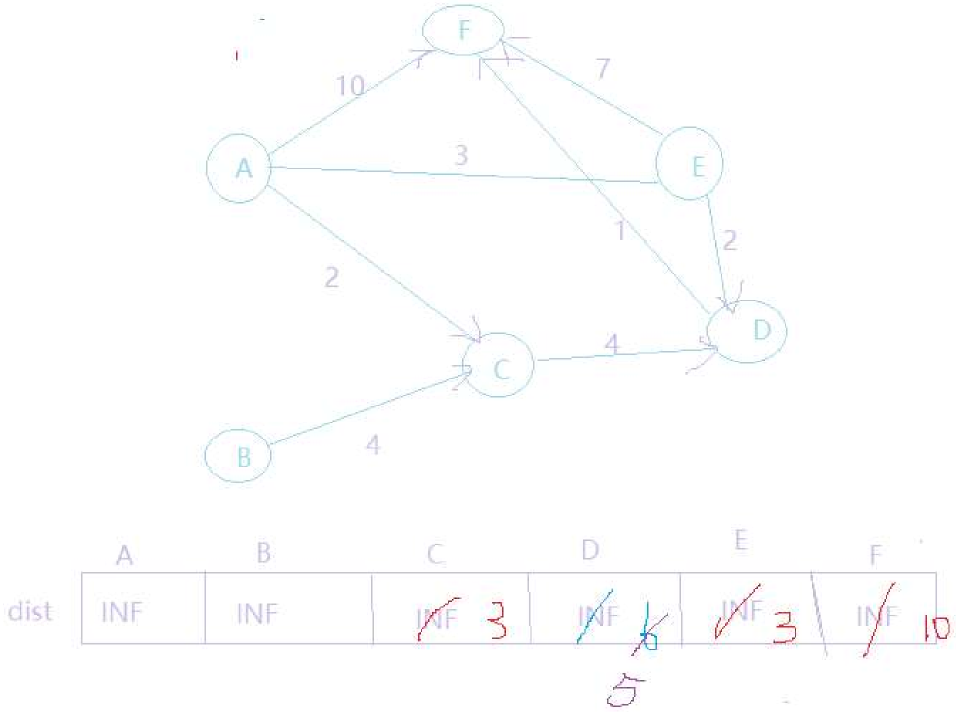
1.首先，队首元素出队列，即是a出队列，然后，对以a为弧尾的边对应的弧头顶点进行松弛操作，可以发现a到c，e，f三个顶点的最短路径变短了，更新dis数组的值，得到如下结果：



2.我们发现c，e，f都被松弛了，而且不在队列中，所以要他们都加入到队列中：{c，e，f}此时，队首元素为c，c出队列，然后，对以c为弧尾的边对应的弧头顶点进行松弛操作，可以发现a到d的边，经过c松弛变短了，所以更新dis数组，得到如下结果：

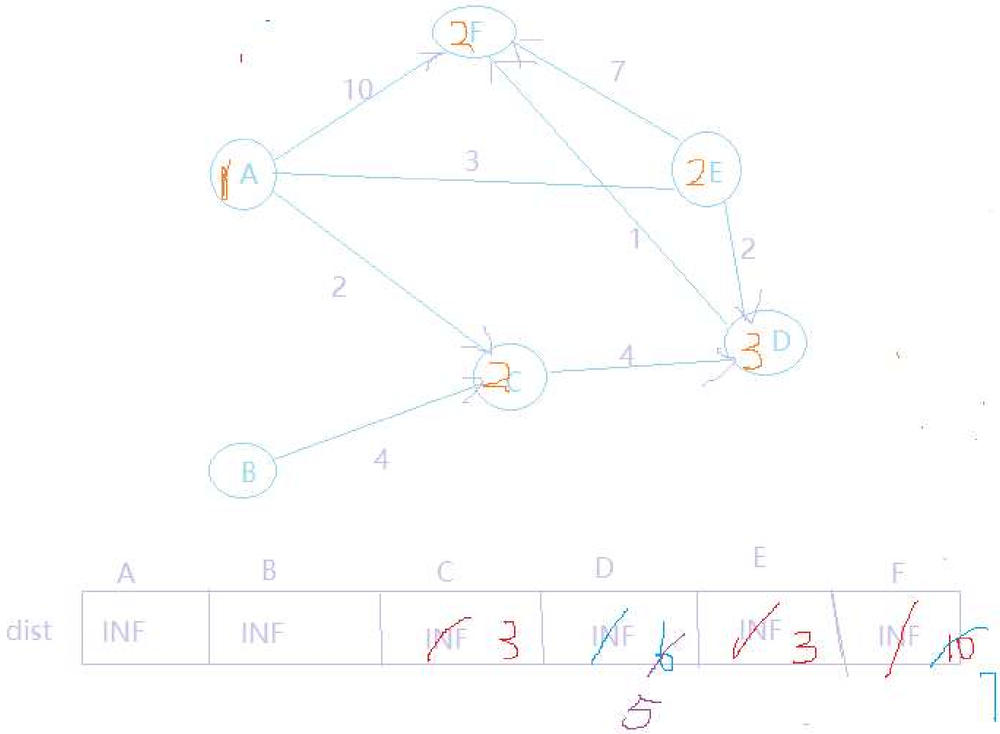


3.此时只有d对应的值被更新了，而且d不在队列中，则把它加入到队列中：{e,f,d}
此时，队首元素为e，e出队列，然后，对以e为弧尾的边对应的弧头顶点进行松弛操作，发现a到d和f的最短路径，经过e的松弛都变短了，更新dis的数组，得到如下结果



4.我们发现d、f对应的值都被更新了，但是他们都在队列中了，所以不用对队列做任何操作。队列值为：{f,d}

队首元素为f，f出队列，然后，对以f为弧尾的边对应的弧头顶点进行松弛操作，发现f出度为0,所以不变，下面对d处理：



队列元素为，循环停止！得到答案：

习题

习题链接 (https://www.acwing.com/problem/content/853/)

由于思路与BFS差不了多少所以直接看代码：

```
#include<iostream>
#include<cstring>
#include<algorithm>
#include<queue>

using namespace std;
typedef pair<int,int >PII;

const int N=100010;

int h[N],e[N],ne[N],w[N],dist[N],n,m,idx;
bool  st[N];

void add(int a,int b,int c)
{
    e[idx]=b;
    w[idx]=c;
    ne[idx]=h[a];
    h[a]=idx++;
}


int spfa()
{
    memset(dist, 0x3f, sizeof dist);
    dist[1] = 0;

    queue<int> q;
    q.push(1);
    st[1] = true;

    while (q.size())
    {
        int t = q.front();
        q.pop();

        st[t] = false;

        for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])
        {
            int j = e[i];
            if (dist[j] > dist[t] + w[i])
            {
                dist[j] = dist[t] + w[i];
                if (!st[j])
                {
                    q.push(j);
                    st[j] = true;
```

```
                }
            }
        }
    }

    return dist[n];
}



int main(){
    cin.tie(0);
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin>>n>>m;
    memset(h,-1,sizeof h);
    while(m--)
    {
        int a,b,c;
        cin>>a>>b>>c;
        add(a,b,c);
    }

    int t=spfa();
    if(t==0x3f3f3f3f)cout<<"impossible"<<endl;
    else cout<<t<<endl;
    return 0;
}
```

Floyd

由于他是一个经典的DP问题，所以我们后面DP部分会详细介绍：

当你想寻找理解我给你一些思路：

从任意节点i到任意节点j的最短路径不外乎2种可能，1是直接从i到j，2是从i经过若干个节点k到j。所以，我们假设dist(i,j)为节点u到节点v的最短路径的距离，对于每一个节点k，我们检查dist(i,k) + dist(k,j) < dist(i,j)是否成立，如果成立，证明从i到k再到j的路径比i直接到j的路径短，我们便设置dist(i,j) = dist(i,k) + dist(k,j)，这样一来，当我们遍历完所有节点k，dist(i,j)中记录的便是i到j的最短路径的距离。

模板：

```
初始化：
    for (int i = 1; i <= n; i ++ )
        for (int j = 1; j <= n; j ++ )
            if (i == j) d[i][j] = 0;
            else d[i][j] = INF;

// 算法结束后，d[a][b]表示a到b的最短距离
void floyd()
{
    for (int k = 1; k <= n; k ++ )
        for (int i = 1; i <= n; i ++ )
            for (int j = 1; j <= n; j ++ )
                d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]);
}
```

当然我们由模板就以看出时间复杂度为O（n^3）；
模板描述：
a.从任意一条单边路径开始。所有两点之间的距离是边的权，如果两点之间没有边相连，则权为无穷大。

b.对于每一对顶点 u 和 v，看看是否存在一个顶点 w 使得从 u 到 w 再到 v的距离k 比已知的路径更短。如果是更新它。

习题

链接 (https://www.acwing.com/problem/content/856/)

这个问题主要看DP状态方程！

```
#include<iostream>
#include<algorithm>
#include<cstring>

using namespace std;

const int N=10010,INF=1e9;
int n,m,k;
int d[N][N];
void floyd(){
    for(int k=1;k<=n;k++){
        for(int i=1;i<=n;i++){
            for(int j=1;j<=n;j++){
                d[i][j]=min(d[i][j],d[i][k]+d[k][j]);
            }
        }
    }
}
int main(){
   cin>>n>>m>>k;
   for(int i=1;i<=n;i++){
       for(int j=1;j<=n;j++){
           if(i==j)d[i][j]=0;
           else d[i][j]=INF;

       }
   }
   while(m--){
       int a,b,w;
       cin>>a>>b>>w;
       d[a][b]=min(d[a][b],w);
   }
   floyd();
   while(k--){
       int a,b;
       cin>>a>>b;
       if(d[a][b]>=INF/2)cout<<"impossible"<<endl;
      else cout<<d[a][b]<<endl;
   }
   return 0;

}
```

小结

对于图论里面最短路算法，无负权基本上用堆优化Dijkstra,效率是比较乐观的，而且他还有优先队列优化！对于bellman-ford，像是Dijkstra到Spfa的一个过渡！
Spfa算法的基本思路与贝尔曼-福特算法相同，即每个节点都被用作用于松弛其相邻节

点的备选节点,spfa算法的提升在于它并不盲目尝试所有节点，而是维护一个备选节点队列，并且仅有节点被松弛后才会放入队列中。整个流程不断重复直至没有节点可以被松弛。当然这里我最喜欢Floyd，就时间复杂度不尽如人意！
对于最短路算法的看法就是这些了，当然由于图论的一些思想不好接受，慢慢理解，谢谢你能把它阅读完！希望你有所收获！

yxc老师的模板 链接 (https://www.acwing.com/blog/content/405/)

朴素dijkstra算法 —— 模板题 AcWing 849. Dijkstra求最短路 I
时间复杂是 O(n2+m)O(n2+m), nn 表示点数，mm 表示边数

```
int g[N][N];  // 存储每条边
int dist[N];  // 存储1号点到每个点的最短距离
bool st[N];   // 存储每个点的最短路是否已经确定

// 求1号点到n号点的最短路，如果不存在则返回-1
int dijkstra()
{
    memset(dist, 0x3f, sizeof dist);
    dist[1] = 0;

    for (int i = 0; i < n - 1; i ++ )
    {
        int t = -1;     // 在还未确定最短路的点中，寻找距离最小的点
        for (int j = 1; j <= n; j ++ )
            if (!st[j] && (t == -1 || dist[t] > dist[j]))
                t = j;

        // 用t更新其他点的距离
        for (int j = 1; j <= n; j ++ )
            dist[j] = min(dist[j], dist[t] + g[t][j]);

        st[t] = true;
    }

    if (dist[n] == 0x3f3f3f3f) return -1;
    return dist[n];
}
```

堆优化版dijkstra —— 模板题 AcWing 850. Dijkstra求最短路 II
时间复杂度 O(mlogn)O(mlogn), nn 表示点数，mm 表示边数

```
typedef pair<int, int> PII;

int n;      // 点的数量
int h[N], w[N], e[N], ne[N], idx;       // 邻接表存储所有边
int dist[N];        // 存储所有点到1号点的距离
bool st[N];     // 存储每个点的最短距离是否已确定

// 求1号点到n号点的最短距离，如果不存在，则返回-1
int dijkstra()
{
    memset(dist, 0x3f, sizeof dist);
    dist[1] = 0;
    priority_queue<PII, vector<PII>, greater<PII>> heap;
    heap.push({0, 1});      // first存储距离，second存储节点编号

    while (heap.size())
    {
        auto t = heap.top();
        heap.pop();

        int ver = t.second, distance = t.first;

        if (st[ver]) continue;
        st[ver] = true;

        for (int i = h[ver]; i != -1; i = ne[i])
        {
            int j = e[i];
            if (dist[j] > distance + w[i])
            {
                dist[j] = distance + w[i];
                heap.push({dist[j], j});
            }
        }
    }

    if (dist[n] == 0x3f3f3f3f) return -1;
    return dist[n];
}
```

Bellman-Ford算法 —— 模板题 AcWing 853. 有边数限制的最短路
时间复杂度 O(nm)O(nm), nn 表示点数，mm 表示边数

```
int n, m;       // n表示点数，m表示边数
int dist[N];        // dist[x]存储1到x的最短路距离

struct Edge     // 边，a表示出点，b表示入点，w表示边的权重
{
    int a, b, w;
}edges[M];

// 求1到n的最短路距离，如果无法从1走到n，则返回-1。
int bellman_ford()
{
    memset(dist, 0x3f, sizeof dist);
    dist[1] = 0;

    // 如果第n次迭代仍然会松弛三角不等式，就说明存在一条长度是n+1的最短路径，由抽屉原
    for (int i = 0; i < n; i ++ )
    {
        for (int j = 0; j < m; j ++ )
        {
            int a = edges[j].a, b = edges[j].b, w = edges[j].w;
            if (dist[b] > dist[a] + w)
                dist[b] = dist[a] + w;
        }
    }

    if (dist[n] == 0x3f3f3f3f) return -1;
    return dist[n];
}
```

spfa 算法（队列优化的Bellman-Ford算法） —— 模板题 AcWing 851. spfa求最短路
时间复杂度 平均情况下 O(m)O(m)，最坏情况下

```
O(nm)O(nm), nn 表示点数，mm 表示边数
int n;      // 总点数
int h[N], w[N], e[N], ne[N], idx;       // 邻接表存储所有边
int dist[N];        // 存储每个点到1号点的最短距离
bool st[N];     // 存储每个点是否在队列中

// 求1号点到n号点的最短路距离，如果从1号点无法走到n号点则返回-1
int spfa()
{
    memset(dist, 0x3f, sizeof dist);
    dist[1] = 0;

    queue<int> q;
    q.push(1);
    st[1] = true;

    while (q.size())
    {
        auto t = q.front();
        q.pop();

        st[t] = false;

        for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])
        {
            int j = e[i];
            if (dist[j] > dist[t] + w[i])
            {
                dist[j] = dist[t] + w[i];
                if (!st[j])     // 如果队列中已存在j，则不需要将j重复插入
                {
                    q.push(j);
                    st[j] = true;
                }
            }
        }
    }

    if (dist[n] == 0x3f3f3f3f) return -1;
    return dist[n];
}
```

spfa判断图中是否存在负环 —— 模板题 AcWing 852. spfa判断负环

```
时间复杂度是 O(nm)O(nm), nn 表示点数, mm 表示边数
int n;      // 总点数
int h[N], w[N], e[N], ne[N], idx;       // 邻接表存储所有边
int dist[N], cnt[N];        // dist[x]存储1号点到x的最短距离, cnt[x]存储1到x的最短
bool st[N];     // 存储每个点是否在队列中

// 如果存在负环，则返回true，否则返回false。
bool spfa()
{
    // 不需要初始化dist数组
    // 原理：如果某条最短路径上有n个点（除了自己），那么加上自己之后一共有n+1个点，由

    queue<int> q;
    for (int i = 1; i <= n; i ++ )
    {
        q.push(i);
        st[i] = true;
    }

    while (q.size())
    {
        auto t = q.front();
        q.pop();

        st[t] = false;

        for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])
        {
            int j = e[i];
            if (dist[j] > dist[t] + w[i])
            {
                dist[j] = dist[t] + w[i];
                cnt[j] = cnt[t] + 1;
                if (cnt[j] >= n) return true;       // 如果从1号点到x的最短路中包
                if (!st[j])
                {
                    q.push(j);
                    st[j] = true;
                }
            }
        }
    }

    return false;
}
```

floyd算法 —— 模板题 AcWing 854. Floyd求最短路
时间复杂度是 O(n3)O(n3), nn 表示点数
初始化:

```
    for (int i = 1; i <= n; i ++ )
        for (int j = 1; j <= n; j ++ )
            if (i == j) d[i][j] = 0;
            else d[i][j] = INF;

// 算法结束后，d[a][b]表示a到b的最短距离
void floyd()
{
    for (int k = 1; k <= n; k ++ )
        for (int i = 1; i <= n; i ++ )
            for (int j = 1; j <= n; j ++ )
                d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]);
}

作者：yxc
链接：https://www.acwing.com/blog/content/405/
来源：AcWing
著作权归作者所有。商业转载请联系作者获得授权，非商业转载请注明出处。
```