Soluções do Livro
Geometria Analítica e Álgebra Linear
de Elon Lages Lima
Segunda Edição–Oitava Impressão

Gustavo de Oliveira

22 de abril de 2021

Sumário

1 Seção 1 – Coordenadas na reta

Exercício (E1.S1)**.** Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. O comprimento de cada parte do intervalo é $l = d(A, B)/n$. Para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, observamos que $d(X_j, A) = jl$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j. Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b-a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b-a)/n$ ou ainda $x_j = (1 - j/n)a + (j/n)b$ para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. □

Exercício (E2.S1)**.** Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, X e B do eixo E. Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente $d(A, X)/d(A, B)$ é chamado *razão áurea*.) Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

Solução. Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a-x|}{|a-b|} = \frac{|x-b|}{|a-x|}.$$

Como $a < x < b$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{x-a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b-3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = 5(b-a)^2$. Portanto as raízes são

$$x_\pm = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b-a)).$$

Usando a condição $a < x < b$, obtemos que $a < x_+ < b$ e $x_- < a$. Logo a única raiz no intervalo $[a,b]$ é x_+. Portanto o ponto X procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b).$$

□

Exercício (E3.S1)**.** Se O é a origem do eixo E e A é o ponto desse eixo que tem coordenada 1, qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento de reta OA em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea* $d(O,X)/d(O,A)$.

Solução. O ponto X tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})0 + (\sqrt{5}-1)1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Calculamos $d(O,A) = |0-1| = 1$. Portanto a razão áurea é

$$\frac{d(O,X)}{d(O,A)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

□