

Exercícios Resolvidos do Livro
Geometria Analítica e Álgebra Linear
de Elon Lages Lima
(Segunda Edição–Oitava Impressão)

Gustavo de Oliveira

5 de junho de 2017

Seção 1 – Coordenadas na Reta

1. Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E . Determine as coordenadas dos pontos X_1, \dots, X_{n-1} que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. Para $j = 1, \dots, n-1$, observamos que $d(X_j, a) = j d(A, B)/n$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j . Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b - a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b - a)/n$.

Seção 14 – Vetores no Plano

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

Solução. (\Rightarrow) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo. O paralelogramo é formado por dois pares de lados. Em cada par de lados, os lados são paralelos e têm o mesmo comprimento. Portanto $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Seja P o ponto médio de DB , e seja Q o ponto médio de AC . Vamos provar que $Q = P$. Escolhemos um sistema de coordenadas OXY de modo que $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $D = (c, d)$. Logo $\overrightarrow{AD} = (c, d)$ e $C = B + \overrightarrow{AD} = (b + c, d)$. Calculando os pontos P e Q , obtemos

$$P = \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d+0}{2} \right) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2} \right),$$
$$Q = \left(\frac{b+c+0}{2}, \frac{d+0}{2} \right) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2} \right).$$

Portanto $P = Q$.

(\Leftarrow) Seja P o ponto médio de DB , e seja Q o ponto médio de AC . Suponha que as diagonais do paralelogramo se cortam mutuamente ao meio, ou seja, suponha que $P = Q$. Escolhemos um sistema de coordenadas OXY de modo que $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $D = (c, d)$. Temos então $\overrightarrow{AD} = (c, d)$ e $\overrightarrow{AB} = (b, 0)$. Escrevemos $C = (x, y)$. Vamos determinar x e y . Calculando os pontos P e Q , obtemos

$$P = \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d}{2} \right),$$

$$Q = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right).$$

A igualdade $P = Q$ implica $x = c + b$ e $y = d$. Logo $(x, y) = (b + c, d)$, ou seja, $C = (b + c, d)$. Portanto $C = B + \overrightarrow{AD}$ e $C = D + \overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Isso implica que $ABCD$ é um paralelogramo.

Seção 15 – Operações com Vetores

7. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Prove que as retas AP , BP , CP são medianas de ABC , logo P é o baricentro desse triângulo.

Solução. Seja Q o ponto de intersecção da reta BP com o segmento AC . Observamos que $\overrightarrow{QA} = \alpha \overrightarrow{CA}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (\alpha - 1) \overrightarrow{CA}.$$

Vamos provar que Q é o ponto médio do lado AC , ou seja, vamos provar que $\alpha = 1/2$.

Escrevemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PQ} + \alpha \overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PQ} + (3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Além disso

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{CB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{CA}.$$

Para algum $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ}.$$

Portanto

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ} = -\beta \overrightarrow{CB} + \beta(1 - \alpha) \overrightarrow{CA}.$$

Consequentemente

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta) \overrightarrow{CB}.$$

Por outro lado, temos $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Logo

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta) \overrightarrow{CB} = 0.$$

Como \overrightarrow{CA} e \overrightarrow{CB} são linearmente independentes, essa igualdade implica (veja o Exercício 1 da Seção 15)

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) = 0 \quad \text{e} \quad 1 - 3\beta = 0.$$

A segunda equação implica $\beta = 1/3$. Substituindo esse valor de β na primeira equação, obtemos $3(1/3)(1 - \alpha) + 3\alpha - 2 = 0$, ou seja, $\alpha = 1/2$. Portanto Q é o ponto médio de AC . Renomeando os pontos, obtemos a demonstração para as medianas correspondentes aos outros vértices do triângulo.

Seção 16 – Equação da Elipse

10. Quais são as tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$ que têm inclinação igual a $1/2$?

Solução. Uma reta com inclinação $1/2$ é dada por $y = (1/2)x + b$ para $b \in \mathbb{R}$. Vamos determinar os valores de b para os quais a reta $y = (1/2)x + b$ é tangente à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$, ou seja, vamos determinar os valores de b para os quais o sistema

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 32 \\ y &= (1/2)x + b \end{aligned}$$

tem apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira e desenvolvendo, obtemos

$$2x^2 + 4bx + (4b^2 - 32) = 0.$$

Essa equação possui apenas uma solução se, e somente se, o discriminante da equação é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 16^2 = 0.$$

Isso implica em $b = \pm 4$. Portanto, as retas tangentes são

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

Seção 17 – Equação da Hipérbole

2. Para todo ponto $P = (m, n)$ na hipérbole $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, mostre que a reta $r : (m/a^2)x - (n/b^2)y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com H . A reta r chama-se a *tangente* a H no ponto P .

Solução. A reta r é tangente à hipérbole H no ponto P se, e somente se, $x = m$ e $y = n$ é a única solução do sistema

$$\begin{aligned}(m/a^2)x - (n/b^2)y &= 1 \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 &= 1.\end{aligned}$$

A primeira equação implica

$$x = \frac{a^2}{m} \left(1 + \frac{n}{b^2} y \right).$$

Substituindo essa expressão para x na segunda equação e desenvolvendo, obtemos

$$(a^2n^2 - b^2m^2)y^2 + b^2a^22ny + b^4(a^2 - m^2) = 0.$$

Como P pertence à hipérbole, temos $a^2n^2 - b^2m^2 = -a^2b^2$. Substituindo essa expressão na equação anterior e simplificado, encontramos

$$-a^2y^2 + a^22ny + b^2(a^2 - m^2) = 0.$$

Calculando o discriminante Δ dessa equação quadrática, obtemos

$$\Delta = 4a^2(a^2n^2 - b^2m^2 + b^2a^2) = 4a^2(-a^2b^2 + b^2a^2) = 4a^2(0) = 0.$$

Nesse cálculo, usamos novamente que P pertence a H . Como $\Delta = 0$, a equação para y possui apenas uma solução. Associado a essa solução temos apenas um valor para x . Portanto o sistema de equações possui apenas uma solução (x, y) , ou seja, a reta r é tangente à hipérbole H .

Seção 23 – Transformações Lineares

11. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

Solução. Seja $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, e seja M a matriz de T . Como M tem posto 2, os vetores-coluna de M são não-colinares. Se r é uma reta vertical, então r é formada pelos pontos $(x, y) = (\alpha, t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo os pontos

$$T(x, y) = T(\alpha, t) = (a\alpha + bt, c\alpha + dt) = \alpha(a, c) + t(b, d)$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois $(b, d) \neq (0, 0)$ (caso contrário teríamos $ad - bc = 0$, o que é impossível). Se r é uma reta não-vertical, então r é o conjunto dos pontos $(x, y) = (t, \alpha t + \beta)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo os pontos

$$T(x, y) = T(t, \alpha t + \beta) = \beta(b, d) + t((a, c) + \alpha(b, d))$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois não existe α tal que $(a, c) + \alpha(b, d) = 0$ (caso contrário (a, c) e (b, d) seriam colineares).

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível. Mostre que T transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

Solução. Seja $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, e seja M a matriz de T . Como T é invertível, para todo $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ existe apenas um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (m, n)$. Dito de outra forma, o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Portanto as retas $ax + by = m$ e $cx + dy = n$ são concorrentes. Logo os vetores (a, b) e (c, d) são não-colineares, ou seja, $ad - bc \neq 0$. Isso implica que os vetores (a, c) e (b, d) são não-colineares, ou seja, que a matriz de M tem posto 2. Pela solução do Exercício 11, para qualquer valor de α , a transformação T mapeia a reta $x = \alpha$ em uma reta paralela ao vetor (b, d) que passa por (a, c) . Isso mostra que T transforma as retas paralelas $x = \alpha$ e $x = \alpha'$ em retas paralelas ao vetor (b, d) . Pela solução do Exercício 11, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a, c) + \alpha(b, d)$ que passa por (a, c) . Analogamente, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha'x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a, c) + \alpha'(b, d)$ que passa por (a, c) . Como $(a, b) + \alpha(c, d)$ e $(a, c) + \alpha'(b, d)$ são vetores colineares, concluímos que T transforma retas não-verticais paralelas em retas não-verticais paralelas. Além disso, concluímos que T transforma paralelogramos em paralelogramos. A transformação T não mapeia losangos em losangos, em geral. De fato, considere o quadrado cujos vértices são os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$ (esse é um exemplo de losango). Observamos que os vetores unitários $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$ são mapeados nos vetores (a, c) e (b, d) , que não são unitários, em geral. Logo o quadrado $ABCD$ não é transformado em um quadrado, em geral.

Seção 24 – Coordenadas no Espaço

5. Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos $P = (2, 3, 4)$ e $Q = (1, 1, 758)$.

Solução. O plano vertical que passa por P e Q deve conter todos os pontos da forma $(2, 3, z)$ e $(1, 1, z')$ para $z \in \mathbb{R}$ e $z' \in \mathbb{R}$. Em particular, o plano vertical deve conter os pontos $P' = (2, 3, 0)$ e $Q' = (1, 1, 0)$. Além disso, observamos que o plano vertical deve conter a reta $\overline{P'Q'}$. As coordenadas de P' e Q' no plano Π_{xy} são $(2, 3)$ e $(1, 1)$. Portanto $\overrightarrow{P'Q'} = (-1, -2)$ no plano Π_{xy} . O vetor $v = (2, -1)$ é ortogonal a $\overrightarrow{P'Q'}$. Logo a equação da reta $P'Q'$ no plano Π_{xy} é $2x - y = c = 2(1) - 1(1) = 1$, ou seja, $2x - y = 1$. O plano vertical que passa por P e Q é formado por todos os pontos (x, y, z) tais que $2x - y = 1$. Essa é a equação do plano.

7. Escreva a equação geral de um plano vertical.

Solução. A equação geral de um plano vertical é $ax + by = c$, onde a , b e c são números reais. De fato, o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que $ax + by = c$ forma um plano que contém o eixo OZ ou é paralelo ao eixo OZ . (Veja a solução do Exercício 5.)