Exercícios Resolvidos do Livro
Geometria Analítica e Álgebra Linear
de Elon Lages Lima
(Segunda Edição–Oitava Impressão)

Gustavo de Oliveira

7 de julho de 2018

Seção 1 – Coordenadas na Reta

1. Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. Para $j = 1, \ldots, n-1$, observamos que $d(X_j, a) = j\, d(A, B)/n$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j. Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b - a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b - a)/n$.

2. Sejam a, x e b, com $a < x < b$, as coordenadas dos pontos A, X e B sobre um eixo $\mathcal{E}$, respectivamente. Dizemos que o ponto X divide o segmento de reta AB em *média e extrema razão* se X satisfaz

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

O quociente $d(A, X)/d(A, B)$ é chamado *razão áurea.* Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

Solução. Usando coordenadas, a condição se escreve

$$\frac{|a - x|}{|a - b|} = \frac{|x - b|}{|a - x|}.$$

Como $a < x < b$, essa expressão é equivalente a

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{b - x}{x - a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b - 3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = 5(b-a)^2$. Portanto as raízes da equação são

$$x_\pm = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b - a)).$$

Usando a condição $a < x < b$, obtemos que $a < x_+ < b$ e $x_- < a$. Logo a única raiz no intervalo $[a, b]$ é x_+. Portanto o ponto X procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$

3. Seja O a origem de um eixo $\mathcal{E}$, e seja A o ponto desse eixo cuja coordenada é igual a 1. Qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento de reta OA em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea* $d(O, X)/d(O, A)$ (veja o exercício anterior).

Solução. O ponto X tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})0 + (\sqrt{5} - 1)1) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

A razão áurea é

$$\frac{d(O, X)}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Seção 7 – As Equações da Reta

10. Sejam $A = (1, 2)$, $B = (2, 4)$ e $C = (3, 1)$. Ache as equações da mediana e da altura do triângulo ABC que partem do vértice A.

Solução. A mediana que parte do vértice A é o segmento AM onde M é o ponto médio do lado BC. Calculando M, obtemos $M = (5/2, 5/2)$. A reta que passa por A e M tem inclinação $[(5/2) - 2]/[(5/2) - 1] = 1/3$, ou seja, a equação dessa reta é da forma $y = (1/3)x + b$. Calculando b, obtemos $b = 5/3$. Logo a equação da reta AM é $y = (1/3)x + 5/3$.

A reta que contém a altura do vértice A é a reta perpendicular ao lado BC passando por A. O lado BC é paralelo a OC' com $C' = (1, -5)$. Logo a equação da reta tem a forma $x - 5y = c$. Como a reta passa por A, devemos ter $1 - 5(2) = c$, ou seja, $c = -9$. Portanto a equação da reta é $x - 5y = -9$.

22. Qual é a distância entre as retas paralelas $x - 3y = 4$ e $2x - 6y = 1$?

Solução. Sejam r e s as retas definidas por $x - 3y = 4$ e $2x - 6y = 1$, respectivamente. Seja t a reta perpendicular a r (e portanto a s) que passa pela origem. Uma equação para t é $3x + y = 0$. Calculamos $P = r \cap t$, ou seja, resolvemos o sistema $x - 3y = 4$, $3x + y = 0$. A solução desse sistema é $x = 2/5$ e $y = -6/5$. Portanto $P = (2/5, -6/5)$. Calculamos $Q = s \cap t$, ou seja, resolvemos o sistema $2x - 6y = 1$, $3x + y = 0$. A solução desse sistema é $x = 1/20$ e $y = -3/20$. Portanto $Q = (1/20, -3/20)$. Observamos que $d(r, s) = d(P, Q)$. Calculando $d(P, Q)$, concluímos que $d(r, s) = 7/(2\sqrt{10})$.

Seção 12 – Equação da Circunferência

4. Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e tem o centro sobre o eixo OY?

Solução. Como o centro da circunferência está sobre o eixo OY, a equação da circunferência tem a forma $x^2 + (y - b)^2 = r^2$. Como A e B pertencem à circunferência, devemos ter

$$\begin{aligned} 1 + (2 - b)^2 &= r^2 \\ 9 + (4 - b)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $b = 5$ e $r = \sqrt{10}$. Portanto a equação da circunferência é $x^2 + (y - 5)^2 = 10$.

5. Escreva a equação da circunferência que tem centro no ponto $P = (2, 5)$ e é tangente à reta $y = 3x + 1$.

Solução. A equação da circunferência tem a forma $(x-2)^2+(y-5)^2 = r^2$. Para que a circunferência seja tangente à reta, o sistema

$$\begin{aligned} &(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = r^2 \\ &y = 3x + 1 \end{aligned}$$

deve possuir apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos $10x^2 - 28x + 20 - r^2 = 0$. Essa equação em x tem apenas uma solução se e somente se $28^2 - 800 + 40r^2 = 0$, ou seja, $r = \sqrt{2/5}$. Portanto a equação da circunferência é $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 2/5$.

Seção 14 – Vetores no Plano

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

Solução. ($\Rightarrow$) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo. O paralelogramo é formado por dois pares de lados. Em cada par de lados, os lados são paralelos e têm o mesmo comprimento. Portanto $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Seja P o ponto médio de DB, e seja Q o ponto médio de AC. Vamos provar que $Q = P$. Escolhemos um sistema de coordenadas OXY de modo que $A = (0,0)$, $B = (b,0)$ e $D = (c,d)$. Logo $\overrightarrow{AD} = (c,d)$ e $C = B + \overrightarrow{AD} = (b+c,d)$. Calculando os pontos P e Q, obtemos

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d+0}{2}\right) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right), \\ Q &= \left(\frac{b+c+0}{2}, \frac{d+0}{2}\right) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto $P = Q$.

($\Leftarrow$) Seja P o ponto médio de DB, e seja Q o ponto médio de AC. Suponha que as diagonais do paralelogramo se cortam mutuamente ao meio, ou seja, suponha que $P = Q$. Escolhemos um sistema de coordenadas OXY de modo que $A = (0,0)$, $B = (b,0)$ e $D = (c,d)$. Temos então $\overrightarrow{AD} = (c,d)$ e $\overrightarrow{AB} = (b,0)$. Escrevemos $C = (x,y)$. Vamos determinar x e y. Calculando os pontos P e Q, obtemos

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d}{2}\right), \\ Q &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right). \end{aligned}$$

A igualdade $P = Q$ implica $x = c + b$ e $y = d$. Logo $(x,y) = (b+c,d)$, ou seja, $C = (b+c,d)$. Portanto $C = B + \overrightarrow{AD}$ e $C = D + \overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Isso implica que $ABCD$ é um paralelogramo.

Seção 15 – Operações com Vetores

1. Dados os vetores u e v, prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Uma combinação linear $\alpha u + \beta v$ só pode ser igual a zero quando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(b) Se $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$, então $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

(c) Nenhum dos vetores u e v é múltiplo do outro.

(d) Para $u = (a,b)$ e $v = (a',b')$, temos $ab' - a'b \neq 0$.

(e) Todo vetor do plano é combinação linear de u e v.

(Neste exercício, devem ser provadas as implicações (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a).)

Solução. (a) $\Rightarrow$ (b). Se $\alpha u+\beta v = \alpha' u+\beta' v$, então $(\alpha-\alpha')u+(\beta-\beta')v = 0$. Logo (a) implica que $\alpha - \alpha' = 0$ e $\beta - \beta' = 0$, ou seja, $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Vamos provar que $-$(c) implica $-$(b). Se existe λ tal que $u = \lambda v$, então $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$ com $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\alpha' = 0$ e $\beta' = 0$, onde $\alpha \neq \alpha'$ e $\beta \neq \beta'$, ou seja, a afirmação $-$(b) é verdadeira.

(c) $\Rightarrow$ (d). Vamos provar que $-$(d) implica $-$(c). Suponha que $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$. Se $\alpha = \alpha' = \beta = \beta'$, então $u = 0$ e $v = 0$, e portanto $u = \lambda v$ para todo λ, ou seja, a afirmação $-$(c) é verdadeira. Se $\alpha = \beta = 0$, então $u = 0$, e portanto $u = 0v$. Logo $-$(c) é verdadeira. Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, então $\beta'/\beta = \alpha'/\alpha = \lambda$ para alguma constante λ. Logo $\alpha' = \lambda\alpha$ e $\beta' = \lambda\beta$, ou seja, $(\alpha', \beta') = \lambda(\alpha, \beta)$, ou seja $v = \lambda u$, ou seja, a afirmação $-$(c) é verdadeira.

(d) $\Rightarrow$ (e). Sejam $u = (\alpha, \beta)$, $v = (\alpha', \beta')$ e $w = (\gamma, \delta)$. Então a equação $w = xu + yv$ é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha' y &= \lambda \\ \beta x + \beta' y &= \gamma. \end{aligned}$$

Como $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, esse sistema possui apenas uma solução. De fato, a solução é

$$x = \frac{\beta'\gamma - \alpha'\delta}{\beta'\alpha - \alpha'\beta}, \qquad y = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\beta\alpha' - \alpha\beta'}.$$

(e) $\Rightarrow$ (a). Temos que $xu+yv = 0$ para x e y únicos. Como $x = 0$ e $y = 0$ é solução desse sistema, essa deve ser a única solução, ou seja, a afirmação (a) é verdadeira.

7. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 0$. Prove que as retas AP, BP e CP são medianas de ABC, logo P é o baricentro desse triângulo.

Solução. Seja Q o ponto de intersecção da reta BP com o segmento AC. Observamos que $\overrightarrow{QA} = \alpha\overrightarrow{CA}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (\alpha - 1)\overrightarrow{CA}.$$

Vamos provar que Q é o ponto médio de AC, ou seja, vamos provar que $\alpha = 1/2$. Escrevemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PQ} + \alpha\overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1)\overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

Logo
$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PQ}+(3\alpha-2)\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}.$$
Além disso,
$$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{QC}=-\overrightarrow{CB}+(1-\alpha)\overrightarrow{CA}.$$
Para algum $\beta\in\mathbb{R}$, temos
$$\overrightarrow{PQ}=\beta\overrightarrow{BQ}.$$
Portanto
$$\overrightarrow{PQ}=\beta\overrightarrow{BQ}=-\beta\overrightarrow{CB}+\beta(1-\alpha)\overrightarrow{CA}.$$
Consequentemente
$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(3\beta(1-\alpha)+3\alpha-2)\overrightarrow{CA}+(1-3\beta)\overrightarrow{CB}.$$
Por outro lado, temos $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$. Logo
$$(3\beta(1-\alpha)+3\alpha-2)\overrightarrow{CA}+(1-3\beta)\overrightarrow{CB}=0.$$
Como $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são linearmente independentes, essa igualdade implica (veja o Exercício 1 da Seção 15)
$$(3\beta(1-\alpha)+3\alpha-2)=0 \qquad \text{e} \qquad 1-3\beta=0.$$
A segunda equação implica $\beta=1/3$. Substituindo esse valor de β na primeira equação, obtemos $3(1/3)(1-\alpha)+3\alpha-2=0$, ou seja, $\alpha=1/2$. Portanto Q é o ponto médio de AC. Renomeando os pontos, obtemos a demonstração para as medianas correspondentes aos outros vértices do triângulo.

Seção 16 – Equação da Elipse

10. Quais são as tangentes à elipse $x^2+4y^2=32$ que têm inclinação igual a $1/2$?

Solução. Uma reta com inclinação $1/2$ é dada por $y=(1/2)x+b$ para $b\in\mathbb{R}$. Vamos determinar os valores de b para os quais a reta $y=(1/2)x+b$ é tangente à elipse $x^2+4y^2=32$, ou seja, vamos determinar os valores de b para os quais o sistema
$$\begin{aligned} x^2+4y^2&=32\\ y&=(1/2)x+b \end{aligned}$$
tem apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira e desenvolvendo, obtemos
$$2x^2+4bx+(4b^2-32)=0.$$

Essa equação possui apenas uma solução se, e somente se, o discriminante da equação é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 16^2 = 0.$$

Isso implica $b = \pm 4$. Portanto, as retas tangentes são

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

Seção 17 – Equação da Hipérbole

2. Para todo ponto $P = (m, n)$ na hipérbole $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, mostre que a reta $r : (m/a^2)x - (n/b^2)y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com H. A reta r chama-se a *tangente* a H no ponto P.

Solução. A reta r é tangente à hipérbole H no ponto P se, e somente se, $x = m$ e $y = n$ é a única solução do sistema

$$\begin{aligned} (m/a^2)x - (n/b^2)y &= 1 \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 &= 1. \end{aligned}$$

A primeira equação implica

$$x = \frac{a^2}{m}\left(1 + \frac{n}{b^2}\right).$$

Substituindo essa expressão para x na segunda equação e desenvolvendo, obtemos

$$(a^2n^2 - b^2m^2)y^2 + b^2a^2 2ny + b^4(a^2 - m^2) = 0.$$

Como P pertence à hipérbole, temos $a^2n^2 - b^2m^2 = -a^2b^2$. Substituindo essa expressão na equação anterior e simplificado, encontramos

$$-a^2y^2 + a^2 2ny + b^2(a^2 - m^2) = 0.$$

Calculando o discriminante Δ dessa equação quadrática, obtemos

$$\Delta = 4a^2(a^2n^2 - b^2m^2 + b^2a^2) = 4a^2(-a^2b^2 + b^2a^2) = 4a^2(0) = 0.$$

Nesse cálculo, usamos novamente que P pertence a H. Como $\Delta = 0$, a equação para y possui apenas uma solução. Associado a essa solução temos apenas um valor para x. Portanto o sistema de equações possui apenas uma solução (x, y), ou seja, a reta r é tangente à hipérbole H.

Seção 20 – Formas Quadráticas

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

1. Escreva sua matriz e sua equação característica;
2. Obtenha seus autovalores;
3. Descreva suas linhas de nível;
4. Ache autovetores unitários ortogonais u e u^*;
5. Determine os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como $A's^2 + C't^2$;
6. Ache os focos da cônica $A's^2 + C't^2 = 1$ em termos das coordenadas x e y.

As formas quadráticas são:

(a) $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

(b) $\varphi(x, y) = xy$.

(c) $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$.

(d) $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

(e) $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$.

(f) $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$.

Solução. (a) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = 1/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad u^* = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}s - \frac{1}{\sqrt{2}}t,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t,$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/3} + \frac{t^2}{2}.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ é o ponto $(0,0)$. Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são elipses. Nesse caso, temos uma elipse com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{2d/3}$. Portanto os focos da elipse são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}, \frac{-2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}\right), \qquad \left(\frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}\right).$$

(b) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 1/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = -1/2$ e $\lambda_2 = 1/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \qquad u^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}s - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = -\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2}.$$

Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm s$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d < 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{|d|}$. Portanto os focos da elipse são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$(-\sqrt{2|d|}, -\sqrt{2|d|}), \qquad (\sqrt{2|d|}, \sqrt{2|d|}).$$

(c) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 10\lambda = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \qquad u^* = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{\sqrt{10}}s - \frac{1}{\sqrt{10}}t, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{10}}s + \frac{3}{\sqrt{10}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = 10t^2.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ é a reta horizontal $t = 0$ que passa pela origem. Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o par de retas horizontais $t = \pm\sqrt{d/10}$. Em termos das coordenadas x e y, a reta $t = 0$ é dada por $x - 3y = 0$, e as retas $t = \pm\sqrt{d/10}$ são dadas por $x - 3y = \mp\sqrt{d}$.

(d) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 5/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = \sqrt{5}/2$ e $\lambda_2 = -\sqrt{5}/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}\right), \qquad u^* = \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= u_1 s - u_2 t, \\ y &= u_2 s + u_1 t, \end{aligned}$$

onde u_1 e u_2 são as coordenadas de u, a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{\sqrt{5}}{2}s^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/\sqrt{5}} - \frac{t^2}{2/\sqrt{5}}.$$

Para $d = 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm s$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d > 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{d}/\sqrt{\sqrt{5}}$. Portanto os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-2\sqrt{d}}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}}, \frac{4\sqrt{d}-2\sqrt{5d}}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}} \right), \qquad \left(\frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}}, \frac{2\sqrt{5d}-4\sqrt{d}}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}} \right).$$

(e) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = -1 + \sqrt{5}$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{5}-2}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right), \qquad u^* = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= u_1 s - u_2 t, \\ y &= u_2 s + u_1 t, \end{aligned}$$

onde u_1 e u_2 são as coordenadas de u, a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{s^2}{-1/(1+\sqrt{5})} + \frac{t^2}{1/(-1+\sqrt{5})}.$$

Para $d = 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm s(\sqrt{5}+1)/2$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d < 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = \sqrt{3|d|}/2$. Portanto os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-\sqrt{3|d|}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{15|d|}-2\sqrt{3|d|}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right), \quad \left(\frac{2\sqrt{3|d|}+\sqrt{15|d|}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{3|d|}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right)$$

(f) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 + 5\lambda - 150 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = -15$ e $\lambda_2 = 10$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right), \qquad u^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}s + \frac{4}{5}t, \\ y &= -\frac{4}{5}s + \frac{3}{5}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = -15s^2 + 10t^2 = \frac{s^2}{-1/15} + \frac{t^2}{1/10}.$$

Para $d = 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm\sqrt{3/2}s$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d < 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = \sqrt{6|d|}/6$. Nesse caso, os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(-\frac{3\sqrt{6|d|}}{30}, \frac{4\sqrt{6|d|}}{30}\right), \qquad \left(\frac{3\sqrt{6|d|}}{30}, -\frac{4\sqrt{6|d|}}{30}\right).$$

Seção 23 – Transformações Lineares

11. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

Solução. Seja $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ e seja M a matriz de T. Como M tem posto 2, os vetores-coluna de M são não-colineares. Se r é uma reta vertical, então r é formada pelos pontos $(x,y) = (\alpha, t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo, os pontos

$$T(x,y) = T(\alpha,t) = (a\alpha + bt, c\alpha + dt) = \alpha(a,c) + t(b,d)$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois $(b,d) \neq (0,0)$ (caso contrário teríamos $ad - bc = 0$, o que é impossível). Se r é uma reta não-vertical, então r é o conjunto dos pontos $(x,y) = (t, \alpha t + \beta)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo, os pontos

$$T(x,y) = T(t, \alpha t + \beta) = \beta(b,d) + t\big((a,c) + \alpha(b,d)\big)$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois não existe α tal que $(a,c) + \alpha(b,d) = 0$ (caso contrário (a,c) e (b,d) seriam colineares).

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível. Mostre que T transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

Solução. Seja $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ e seja M a matriz de T. Como T é invertível, para todo $(m,n) \in \mathbb{R}^2$ existe apenas um vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (m,n)$. Dito de outra forma, o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Portanto as retas $ax + by = m$ e $cx + dy = n$ são concorrentes. Logo os vetores (a,b) e (c,d) são não-colineares, ou seja, $ad - bc \neq 0$. Isso implica que os vetores (a,c) e (b,d) são não-colineares, ou seja, que a matriz de M tem posto 2. Pela solução do Exercício 11, para qualquer valor de α, a transformação T mapeia a reta $x = \alpha$ em uma reta paralela ao vetor (b,d) que passa por (a,c). Isso mostra que T transforma as retas paralelas $x = \alpha$ e $x = \alpha'$ em retas paralelas ao vetor (b,d). Pela solução do Exercício 11, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a,c) + \alpha(b,d)$ que passa por (a,c). Analogamente, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha' x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a,c) + \alpha'(b,d)$ que passa por (a,c). Como $(a,b) + \alpha(c,d)$ e $(a,c) + \alpha'(b,d)$ são vetores colineares, concluímos que T transforma retas não-verticais paralelas em retas não-verticais paralelas. Além disso, concluímos que T transforma paralelogramos em paralelogramos. A transformação T não mapeia losangos em losangos, em geral. De fato, considere o quadrado cujos vértices são os pontos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ e $D = (0,1)$ (esse é um exemplo de losango). Observamos que os os vetores unitários $\overrightarrow{AB} = (1,0)$ e $\overrightarrow{AD} = (0,1)$ são mapeados nos vetores (a,c) e (b,d), que não são unitários, em geral. Logo o quadrado $ABCD$ não é transformado em um quadrado, em geral.

17. Dados $u = (1,2)$, $v = (3,4)$, $u' = (5,6)$ e $v' = (7,8)$, ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.

Solução. Seja $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Procuramos constantes a, b, c e d tais que $T(1,2) = (5,6)$ e $T(3,4) = (7,8)$, ou seja, $(a + 2b, c + 2d) = (5,6)$ e $(3a + 4b, 3c + 4d) = (7,8)$, ou seja, $a + 2b = 5$, $c + 2d = 6$ e $3a + 4b = 7$, $3c + 4d = 8$. Obtemos portanto um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, a, b, c e d. De fato, obtemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas, desacoplados:

$$\begin{aligned} a + 2b &= 5 \qquad & c + 2d &= 6 \\ 3a + 4b &= 7 \qquad & 3c + 4d &= 8. \end{aligned}$$

Resolvendo esses sistemas, obtemos $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$ e $d = 5$. Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x,y) = (-3x + 4y, -4x + 5y).$$

Seção 24 – Coordenadas no Espaço

5. Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos $P=(2,3,4)$ e $Q = (1, 1, 758)$.

Solução. O plano vertical que passa por P e Q deve conter todos os pontos da forma $(2, 3, z)$ e $(1, 1, z')$ para $z \in \mathbb{R}$ e $z' \in \mathbb{R}$. Em particular, o plano vertical deve conter os pontos $P' = (2, 3, 0)$ e $Q' = (1, 1, 0)$. Além disso, observamos que o plano vertical deve conter a reta $P'Q'$. As coordenadas de P' e Q' no plano Π_{xy} são $(2, 3)$ e $(1, 1)$. Portanto $\overrightarrow{P'Q'} = (-1, -2)$ no plano Π_{xy}. O vetor $v = (2, -1)$ é ortogonal a $\overrightarrow{P'Q'}$. Logo a equação da reta $P'Q'$ no plano Π_{xy} é $2x - y = c = 2(1) - 1(1) = 1$, ou seja, $2x - y = 1$. O plano vertical que passa por P e Q é formado por todos os pontos (x, y, z) tais que $2x - y = 1$. Essa é a equação do plano.

7. Escreva a equação geral de um plano vertical.

Solução. A equação geral de um plano vertical é $ax + by = c$, onde a, b e c são números reais. De fato, o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que $ax + by = c$ forma um plano que contém o eixo OZ ou é paralelo ao eixo OZ (veja a solução do Exercício 5).

Seção 28 – Vetores no Espaço

3. Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário, com $abc \neq 0$. Determine o valor de t de modo que, pondo $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct - 1/t)$, os vetores u, v e w sejam unitários e mutuamente ortogonais.

Solução. Como u é unitário, temos $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Observamos que $u \cdot v = 0$ e $v \cdot w = 0$ para qualquer valor de t. Por outro lado, $u \cdot w = 0$ implica $t = \pm 1/\sqrt{a^2 + b^2}$. Para esses valores de t, obtemos $\|v\|^2 = (b^2 + a^2)t^2 = 1$ e $\|w\|^2 = c^2 + a^2 + b^2 = 1$. A condição $abc \neq 0$ pode ser substituída por $a^2 + b^2 \neq 0$.

Seção 29 – Equação do Plano

2. Obtenha uma equação para o plano que contém P e é perpendicular ao segmento de reta AB nos seguintes casos:

(a) $P = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, -1, 2)$.

(b) $P = (1, 1, -2)$, $A = (3, 5, 2)$ e $B = (7, 1, 12)$.

(c) $P = (3, 3, 3)$, $A = (2, 2, 2)$ e $B = (4, 4, 4)$.

(d) $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$.

Solução. (a) Observamos que o plano é perpendicular à reta AB se e somente se o plano é perpendicular à reta OB' com $B' = (1, -3, -1)$. Logo uma equação para o plano é $x - 3y - z = d$ para alguma constante d. Como P pertence ao plano, devemos ter $1(0) - 3(0) - 1(0) = d$, ou seja, $d = 0$. Portanto uma equação do plano é $x - 3y - z = 0$.

(b) Procedendo como no item (a), obtemos a equação $4x-4y+10z = -20$.

(c) Procedendo como no item (a), obtemos a equação $2x+2y+2z = 18$.

(d) Procedendo como no item (a), obtemos a equação $(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z = (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + (z_2 - z_1)z_0$.

4. Sejam $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 3, 5)$ e $C = (1, 3, -2)$. Obtenha uma equação para o plano que contém a reta AB e o ponto C.

Solução. Procuramos um vetor $v = (a, b, c)$ tal que $\langle v, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$ e $\langle v, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$. Calculamos $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 3)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, 2, -4)$. Com isso obtemos o seguinte sistema de equações para (a, b, c):

$$\begin{aligned} 3a + 2b + 3c &= 0 \\ 2a + 2b - 4c &= 0. \end{aligned}$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= -3c \\ 2a + 2b &= 4c \end{aligned}$$

e resolvemos para a e b considerando c como um parâmetro. Obtemos que $(-7c, 9c, c)$ para $c \in \mathbb{R}$ são as soluções do sistema original. Em particular, o vetor $v = (-7, 9, 1)$ é solução do sistema. Portanto, uma equação do plano é $-7x + 9y + z = d$ para alguma constante d. Como A pertence ao plano, devemos ter $-7(-1) + 9(1) + 1(2) = d$, ou seja, $d = 18$. Portanto, uma equação para o plano é $-7x + 9y + z = 18$.

Seção 31 - Sistemas de Equações Lineares com Três Incógnitas

1. Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.

(a) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 3 \\ 4x - 2y + 10z &= 5 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 6x - 4y + 12z &= 2 \\ 9x - 6y + 18z &= 3 \end{aligned}$

Solução. (a) Observamos que os vetores $l_1 = (1, 2, 3)$ e $l_2 = (2, 3, 4)$ não são colineares. Logo os planos definidos pelas equações se intersectam segundo uma reta, ou seja, o sistema possui soluções. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto as soluções do sistema são $x = -2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = t$ para $t \in \mathbb{R}$.

(b) Observamos que os vetores $l_1 = (2, -1, 5)$ e $l_2 = (4, -2, 10)$ são colineares e os vetores $L_1 = (2, -1, 5, 3)$ e $L_2 = (4, -2, 10, 5)$ não são colineares. Logo os planos definidos pelas equações são paralelos, ou seja, o sistema não possui soluções.

(c) Observamos que os vetores $l_1 = (6, -4, 12)$ e $l_2 = (9, -6, 18)$ são colineares e os vetores $L_1 = (6, -4, 12, 2)$ e $L_2 = (9, -6, 18, 3)$ são colineares. Logo os planos definidos pelas equações são coincidentes, ou seja, o sistema possui soluções. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 12 & 2 \\ 9 & -6 & 18 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto as soluções do sistema são $x = 1/3 + (2/3)s - 2t$, $y = s$, $z = t$ para $s, t \in \mathbb{R}$.

Seção 41 - Mudança de Coordenadas no Espaço

1. Ache números α, β de modo que os múltiplos αm e βn das matrizes abaixo sejam matrizes ortogonais

$$m = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad n = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução. Procuramos α tal que $(\alpha m)(\alpha m)^T = I$, ou seja, $\alpha^2(mm^T) = I$. Calculando mm^T, obtemos

$$\alpha^2(mm^T) = \alpha^2 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a condição para β é $\beta^2 9 = 1$, ou seja, $\beta = \pm 1/3$.

Procuramos β tal que $(\beta n)(\beta n)^T = I$, ou seja, $\beta^2(nn^T) = I$. Calculando nn^T, obtemos

$$\beta^2(nn^T) = \beta^2 \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a condição para β é $\beta^2 49 = 1$, ou seja, $\beta = \pm 1/7$.