Soluções do Livro
Geometria Analítica e Álgebra Linear
de Elon Lages Lima
Segunda Edição–Oitava Impressão

Gustavo de Oliveira

11 de maio de 2021

Sumário

1 Seção 1 – Coordenadas na reta

Exercício (E1.S1)**.** Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. O comprimento de cada parte do intervalo é $l = d(A, B)/n$. Para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, observamos que $d(X_j, A) = jl$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j. Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b - a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b - a)/n$ ou ainda $x_j = (1 - j/n)a + (j/n)b$ para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. □

Exercício (E2.S1)**.** Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, X e B do eixo E. Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente $d(A, X)/d(A, B)$ é chamado *razão áurea*.) Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

Solução. Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a-x|}{|a-b|} = \frac{|x-b|}{|a-x|}.$$

Como $a < x < b$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{x-a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b-3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = 5(b-a)^2$. Portanto as raízes são

$$x_\pm = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b-a)).$$

Usando a condição $a < x < b$, obtemos que $a < x_+ < b$ e $x_- < a$. Logo a única raiz no intervalo $[a, b]$ é x_+. Portanto o ponto X procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b).$$

□

Exercício (E3.S1)**.** Se O é a origem do eixo E e A é o ponto desse eixo que tem coordenada 1, qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento de reta OA em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea* $d(O, X)/d(O, A)$.

Solução. O ponto X tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})0 + (\sqrt{5}-1)1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Calculamos $d(O, A) = |0 - 1| = 1$. Portanto a razão áurea é

$$\frac{d(O, X)}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

□

Exercício (E4.S1)**.** Os pontos A, B e X sobre o eixo E têm coordenadas a, b e x respectivamente. Se X' é o simétrico de X em relação ao ponto A e X'' é o simétrico de X' em relação a B, quais são as coordenadas de X' e X''?

Solução. Sejam x' e x'' as coordenadas de X' e X''. Como A é o ponto médio de XX', temos $a = (x + x')/2$. Logo $x' = 2a - x$. Como B é o ponto médio de $X'X''$, temos $b = (x' + x'')/2$. Portanto $x'' = 2b - x' = 2(b - a) + x$. □

Exercício (E5.S1)**.** Dados os pontos A, B no eixo E, defina a distância orientada $\delta(A, B)$ entre eles pondo $\delta(A, B) = d(A, B)$ se A está à esquerda de B e $\delta(A, B) = -d(A, B)$ se A está à direita de B. Prove que para quaisquer A, B e C do eixo E tem-se $\delta(A, B) + \delta(B, C) + \delta(C, A) = 0$.

Solução. Sem perda de generalidade podemos supor que A está à esquerda de B e que B está à esquerda de C. Logo

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) + \delta(C, A) = d(A, B) + d(B, C) - d(C, A) = 0$$

pois $d(A, B) + d(B, C) = d(C, A)$, já que o ponto B pertence ao segmento de reta AC. □

Exercício (E6.S1)**.** Sejam $a < b < c$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, B e C situados sobre um eixo. Sabendo que $a = 17$, $c = 32$ e

$$\frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{2}{3},$$

qual é o valor de b?

Solução. Usando a fórmula $d(X, Y) = |x - y|$, temos que

$$\frac{3}{2} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{|a - b|}{|a - c|} = \frac{|17 - b|}{|17 - 32|}.$$

Como $b > 17$ e $32 > 17$, essa equação é equivalente a

$$\frac{b - 17}{32 - 17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$b = \frac{2}{3}15 + 17 = 27.$$

□

Exercício (E7.S1)**.** Qual seria a resposta do exercício anterior se soubéssemos apenas que $a < c$?

Solução. Se soubéssemos apenas que $a < c$, poderíamos ter $a < b$ ou $a \geq b$. Logo, além do caso $b > 17$ considerado no item (a), teríamos o caso em que $b \leq 17$. Dessa forma teríamos $|17 - b| = 17 - b$ e consequentemente

$$\frac{17 - b}{32 - 17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$-b = \frac{2}{3}15 - 17 = -7.$$

Isso implica em $b = 7$. Em resumo, $b = 7$ ou $b = 27$. □

Exercício (E8.S1)**.** Sejam A, B, C, D pontos dispostos nesta ordem sobre um eixo E. Esboce os gráficos das funções $\varphi, f, g : E \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= d(X,A) + d(X,B), \\
f(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C), \\
g(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C) + d(X,D).
\end{aligned}$$

Solução. Por exemplo, tomamos A, B, C e D com coordenadas 0, 1, 3 e 7, respectivamente. Seja x a coordenada de X. Então

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= |x| + |x-1|, \\
f(x) &= |x| + |x-1| + |x-3|, \\
g(x) &= |x| + |x-1| + |x-3| + |x-7|.
\end{aligned}$$

Para ver o gráfico dessas funções, visite `https://sagecell.sagemath.org` e execute o código

```
a = 0
b = 1
c = 3
d = 7
m = -5
n = 8
phi(x) = abs(x-a) + abs(x-b)
f(x) = phi(x) + abs(x-c)
g(x) = f(x) + abs(x-d)
p1 = plot(phi(x), (x,m,n), color="blue")
p2 = plot(f(x), (x,m,n), color="red")
p3 = plot(g(x), (x,m,n), color="green")
p = p1 + p2 + p3
show(p, axes_labels=["x", "y"])
```

$\square$

Exercício (E9.S1)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Pondo $f(0) = a$, defina a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim: $g(x) = f(x) - a$. Prove então que $|g(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Também $(g(x))^2 = x^2$.

(ii) Use a identidade $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x-y)^2]$ para provar a igualdade $xy = g(x)\,g(y)$.

(iii) Se $g(1) = 1$, mostre que $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, mostre que $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Conclua que $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou então $f(x) = -x + a$ para todo x.

Solução. (i) Observamos que $g(x) = f(x) - a = f(x) - f(0)$. Logo

$$|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $|g(1)| = 1$, o que implica $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Temos também que

$$g(x)^2 = |g(x)|^2 = |x|^2 = x^2.$$

(ii) Usando as definições e propriedades, calculamos

$$\begin{aligned}
xy &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - (x - y)^2] \\
&= 2^{-1}[x^2 + y^2 - |x - y|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - f(y)|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - a - f(y) + a|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |g(x) - g(y)|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - (g(x) - g(y))^2] \\
&= g(x)g(y).
\end{aligned}$$

(iii) Se $g(1) = 1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)(-1) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Observamos que $f(x) = g(x) + a$. Pela parte (i), temos $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Usando (iii), isso implica $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$ para todo x, respectivamente. Portanto $f(x) = x + a$ ou $f(x) = -x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$