

Soluções do Livro  
Geometria Analítica e Álgebra Linear  
de Elon Lages Lima  
Segunda Edição–Oitava Impressão

Gustavo de Oliveira

20 de abril de 2021

## Sumário

|   |                               |   |
|---|-------------------------------|---|
| 1 | Seção 1 – Coordenadas na reta | 1 |
|---|-------------------------------|---|

## 1 Seção 1 – Coordenadas na reta

**Exercício** (E1.S1). Sejam  $a < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  sobre o eixo  $E$ . Determine as coordenadas dos pontos  $X_1, \dots, X_{n-1}$  que dividem o segmento  $AB$  em  $n$  partes iguais.

*Solução.* O comprimento de cada parte do intervalo é  $l = d(A, B)/n$ . Para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , observamos que  $d(X_j, A) = jl$ . Seja  $x_j$  a coordenada do ponto  $X_j$ . Então  $|x_j - a| = j|a - b|/n$ , ou seja,  $x_j - a = j(b - a)/n$ , pois  $x_j > a$  e  $b > a$ . Portanto  $x_j = a + j(b - a)/n$  ou ainda  $x_j = (1 - j/n)a + (j/n)b$  para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .  $\square$

**Exercício** (E2.S1). Sejam  $a < x < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $X$  e  $B$  do eixo  $E$ . Diz-se que o ponto  $X$  divide o segmento  $AB$  em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente  $d(A, X)/d(A, B)$  é chamado *razão áurea*.) Supondo que  $X$  divide o segmento de reta  $AB$  em média e extrema razão, calcule  $x$  em função de  $a$  e  $b$ .

*Solução.* Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a-x|}{|a-b|} = \frac{|x-b|}{|a-x|}.$$

Como  $a < x < b$ , essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{x-a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b-3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é  $\Delta = 5(b-a)^2$ . Portanto as raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b-a)).$$

Usando a condição  $a < x < b$ , obtemos que  $a < x_+ < b$  e  $x_- < a$ . Logo a única raiz no intervalo  $[a, b]$  é  $x_+$ . Portanto o ponto  $X$  procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$

□