

Exercícios Resolvidos do Livro  
Geometria Analítica e Álgebra Linear  
de Elon Lages Lima  
(Segunda Edição–Oitava Impressão)

Gustavo de Oliveira

1 de junho de 2017

## Seção 1 – Coordenadas na reta

1. Sejam  $a < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  sobre o eixo  $E$ . Determine as coordenadas dos pontos  $X_1, \dots, X_{n-1}$  que dividem o segmento  $AB$  em  $n$  partes iguais.

*Solução.* Para  $j = 1, \dots, n-1$ , observamos que  $d(X_j, a) = jd(A, B)/n$ . Seja  $x_j$  a coordenada do ponto  $X_j$ . Então  $|x_j - a| = j|a - b|/n$ , ou seja,  $x_j - a = j(b - a)/n$ , pois  $x_j > a$  e  $b > a$ . Portanto  $x_j = a + j(b - a)/n$ .

## Seção 14 – Vetores no Plano

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

*Solução.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que o quadrilátero  $ABCD$  é um paralelogramo. O paralelogramo é formado por dois pares de lados. Em cada par, os lados são paralelos e têm o mesmo comprimento. Portanto  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Seja  $P$  o ponto médio de  $DB$ , e seja  $Q$  o ponto médio de  $AC$ . Vamos provar que  $Q = P$ .

Escolhemos um sistema de coordenadas  $OXY$  de modo que  $A = (0, 0)$ ,  $B = (b, 0)$  e  $D = (c, d)$ . Logo  $\overrightarrow{AD} = (c, d)$  e  $C = B + \overrightarrow{AD} = (b + c, d)$ . Calculando os pontos  $P$  e  $Q$ , obtemos

$$P = \left( \frac{c+b}{2}, \frac{d+0}{2} \right) = \left( \frac{b+c}{2}, \frac{d}{2} \right),$$
$$Q = \left( \frac{b+c+0}{2}, \frac{d+0}{2} \right) = \left( \frac{b+c}{2}, \frac{d}{2} \right).$$

Portanto  $P = Q$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $P$  o ponto médio de  $DB$ , e seja  $Q$  o ponto médio de  $AC$ . Suponha que as diagonais do paralelogramo se cortam mutuamente ao meio, ou seja, suponha que  $P = Q$ . Escolhemos um sistema de coordenadas  $OXY$  de modo que  $A = (0, 0)$ ,  $B = (b, 0)$  e  $D = (c, d)$ . Temos então  $\overrightarrow{AD} = (c, d)$  e  $\overrightarrow{AB} = (b, 0)$ . Escrevemos  $C = (x, y)$ . Vamos determinar  $x$  e  $y$ . Calculando os pontos  $P$  e  $Q$ , obtemos

$$P = \left( \frac{c+b}{2}, \frac{d}{2} \right),$$

$$Q = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right).$$

A igualdade  $P = Q$  implica  $x = c + b$  e  $y = d$ . Logo  $(x, y) = (b + c, d)$ , ou seja,  $C = (b + c, d)$ . Portanto  $C = B + \overrightarrow{AD}$  e  $C = D + \overrightarrow{AB}$ , ou seja,  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ . Isso implica que  $ABCD$  é um paralelogramo.

## Seção 15 – Operações com Vetores

**7.** Seja  $P$  um ponto interior ao triângulo  $ABC$  tal que  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$ . Prove que as retas  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  são medianas de  $ABC$ , logo  $P$  é o baricentro desse triângulo.

*Solução.* Seja  $Q$  o ponto de intersecção da reta  $BP$  com o segmento  $AC$ . Observamos que  $\overrightarrow{QA} = \alpha \overrightarrow{CA}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Logo

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (\alpha - 1) \overrightarrow{CA}.$$

Vamos provar que  $Q$  é o ponto médio do lado  $AC$ , ou seja, vamos provar que  $\alpha = 1/2$ .

Escrevemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PQ} + \alpha \overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PQ} + (3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Além disso

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{CB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{CA}$$

e

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ}$$

para  $\beta \in \mathbb{R}$ . Portanto

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ} = -\beta \overrightarrow{CB} + \beta(1 - \alpha) \overrightarrow{CA}.$$

Consequentemente

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta) \overrightarrow{CB}.$$

Por outro lado, temos  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$ . Logo

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta) \overrightarrow{CB} = 0.$$

Como  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  são linearmente independentes, essa igualdade implica (veja o Exercício 1 da Seção 15)

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) = 0 \quad \text{e} \quad 1 - 3\beta = 0.$$

A segunda equação implica  $\beta = 1/3$ . Substituindo esse valor de  $\beta$  na primeira equação, obtemos  $3(1/3)(1 - \alpha) + 3\alpha - 2 = 0$ , ou seja  $\alpha = 1/2$ . Portanto  $Q$  é o ponto médio de  $AC$ . Renomeando os pontos, obtemos a demonstração para as medianas correspondentes aos outros vértices do triângulo.

## Seção 16 – Equação da Elipse

**10.** Quais são as tangentes à elipse  $x^2 + 4y^2 = 32$  que têm inclinação igual a  $1/2$ ?

*Solução.* Uma reta com inclinação igual a  $1/2$  é dada por  $y = (1/2)x + b$  para  $b \in \mathbb{R}$ . Vamos determinar  $b$  para o qual a reta  $y = (1/2)x + b$  é tangente à elipse  $x^2 + 4y^2 = 32$ , ou seja, vamos determinar  $b$  para o qual o sistema

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 32, \\ y &= (1/2)x + b \end{aligned}$$

tem apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira e desenvolvendo obtemos

$$2x^2 + 4bx + (4b^2 - 32) = 0.$$

Essa equação em  $x$  possui apenas uma solução se e somente se o discriminante da equação é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 16^2 = 0.$$

Isso implica em  $b = \pm 4$ . Portanto as retas tangentes são

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

## Seção 17 – Equação da Hipérbole

**2.** Para todo ponto  $P = (m, n)$  na hipérbole  $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ , mostre que a reta  $r : (m/a^2)x - (n/b^2)y = 1$  tem apenas o ponto  $P$  em comum com  $H$ . A reta  $r$  chama-se a *tangente* a  $H$  no ponto  $P$ .

*Solução.* A reta  $r$  é tangente à hipérbole  $H$  no ponto  $P$  se e somente se  $x = m$  e  $y = n$  é a única solução do sistema

$$\begin{aligned}(m/a^2)x - (n/b^2)y &= 1, \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 &= 1.\end{aligned}$$

A primeira equação implica

$$x = \frac{a^2}{m} \left(1 + \frac{n}{b^2}\right).$$

Substituindo essa expressão para  $x$  na segunda equação e desenvolvendo, obtemos

$$(a^2n^2 - b^2m^2)y^2 + b^2a^22ny + b^4(a^2 - m^2) = 0.$$

Como  $P$  pertence à hipérbole, temos  $a^2n^2 - b^2m^2 = -a^2b^2$ . Substituindo essa expressão na equação anterior e simplificado, encontramos

$$-a^2y^2 + a^22ny + b^2(a^2 - m^2) = 0.$$

Calculamos o discriminante  $\Delta$  dessa equação quadrática. Obtemos

$$\Delta = 4a^2(a^2n^2 - b^2m^2 + b^2a^2) = 4a^2(-a^2b^2 + b^2a^2) = 4a^2(0) = 0.$$

Nesse cálculo, usamos novamente que  $P$  pertence a  $H$ . Como  $\Delta = 0$ , a equação para  $y$  possui apenas uma solução. Associado a essa solução, temos apenas um valor para  $x$ . Portanto o sistema de equações possui apenas uma solução  $(x, y)$ , ou seja, a reta  $r$  é tangente à hipérbole, como queríamos provar.

## Seção 23 – Transformações Lineares

**11.** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

*Solução.* Seja  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ , e seja  $M$  a matriz de  $T$ . Como  $M$  tem posto 2, os vetores-coluna de  $M$  são não-colinares. Se  $r$  é uma reta vertical, então  $r$  é formada pelos pontos  $(x, y) = (\alpha, t)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Logo os pontos

$$T(x, y) = T(\alpha, t) = (a\alpha + bt, c\alpha + dt) = \alpha(a, c) + t(b, d)$$

para  $t \in \mathbb{R}$  formam uma reta pois  $(b, d) \neq (0, 0)$  (caso contrário teríamos  $ad - bc = 0$ , o que é impossível). Se  $r$  é uma reta não-vertical, então  $r$  é o conjunto dos pontos  $(x, y) = (t, \alpha t + \beta)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Logo os pontos

$$T(x, y) = T(t, \alpha t + \beta) = \beta(b, d) + t((a, c) + \alpha(b, d))$$

para  $t \in \mathbb{R}$  formam uma reta pois não existe  $\alpha$  tal que  $(a, c) + \alpha(b, d) = 0$  (caso contrário  $(a, c)$  e  $(b, d)$  seriam colineares).

**15.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear invertível. Mostre que  $T$  transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

*Solução.* Seja  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ , e seja  $M$  a matriz de  $T$ . Como  $T$  é invertível, para todo  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ , existe apenas um vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (m, n)$ . Dito de outra forma, o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Portanto as retas  $ax + by = m$  e  $cx + dy = n$  são concorrentes. Logo os vetores  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são não-colineares, ou seja,  $ad - bc \neq 0$ . Isso implica que os vetores  $(a, c)$  e  $(b, d)$  são não-colineares, ou seja, que a matriz de  $M$  tem posto 2. Pela solução do Exercício 11, para qualquer valor de  $\alpha$ , a transformação  $T$  mapeia a reta  $x = \alpha$  em uma reta paralela ao vetor  $(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Isso mostra que  $T$  transforma as retas paralelas  $x = \alpha$  e  $x = \alpha'$  em retas paralelas ao vetor  $(b, d)$ . Pela solução do Exercício 11, a transformação  $T$  mapeia a reta  $y = \alpha x + \beta$  em uma reta paralela ao vetor  $(a, c) + \alpha(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Analogamente, a transformação  $T$  mapeia a reta  $y = \alpha'x + \beta$  em uma reta paralela ao vetor  $(a, c) + \alpha'(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Como  $(a, b) + \alpha(c, d)$  e  $(a, c) + \alpha'(b, d)$  são vetores colineares, concluímos que  $T$  transforma retas não-verticais paralelas em retas não-verticais paralelas. Além disso, concluímos que  $T$  transforma paralelogramos em paralelogramos. A transformação  $T$  não mapeia losangos em losangos, em geral. De fato, considere o quadrado cujos vértices são os pontos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  e  $D = (0, 1)$  (esse é um exemplo de losango). Observamos que os vetores unitários  $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$  e  $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$  são mapeados nos vetores  $(a, c)$  e  $(b, d)$ , que não são unitários, em geral. Logo o quadrado  $ABCD$  não é transformado em um quadrado, em geral.

## Seção 24 – Coordenadas no Espaço

**5.** Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos  $P = (2, 3, 4)$  e  $Q = (1, 1, 758)$ .

*Solução.* O plano vertical que passa por  $P$  e  $Q$  deve conter todos os pontos da forma  $(2, 3, z)$  e  $(1, 1, z')$  para  $z \in \mathbb{R}$  e  $z' \in \mathbb{R}$ . Em particular, o plano vertical deve conter os pontos  $P' = (2, 3, 0)$  e  $Q' = (1, 1, 0)$ . Além disso, observamos que o plano vertical deve conter a reta  $\overline{P'Q'}$ . As coordenadas de  $P'$  e  $Q'$  no plano  $\Pi_{xy}$  são  $(2, 3)$  e  $(1, 1)$ . Portanto  $\overrightarrow{P'Q'} = (-1, -2)$  no plano  $\Pi_{xy}$ . O vetor  $v = (2, -1)$  é ortogonal a  $\overrightarrow{P'Q'}$ . Logo a equação da reta  $P'Q'$  no plano  $\Pi_{xy}$  é  $2x - y = c = 2(1) - 1(1) = 1$ , ou seja,  $2x - y = 1$ . O plano vertical que passa por  $P$  e  $Q$  é formado por todos os pontos  $(x, y, z)$  tais que  $2x - y = 1$ , ou seja, essa é a equação do plano.

7. Escreva a equação geral de um plano vertical.

*Solução.* A equação geral de um plano vertical é  $ax + by = c$  onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais. De fato, o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  tais que  $ax + by = c$  forma um plano que contém o eixo  $OZ$  ou é paralelo ao eixo  $OZ$ .