Exercícios Resolvidos do Livro Geometria Analítica e Álgebra Linear de Elon Lages Lima (Segunda Edição–Oitava Impressão)

Gustavo de Oliveira

27 de junho de 2017

Seção 1 – Coordenadas na Reta

1. Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. Para $j = 1, \ldots, n-1$, observamos que $d(X_j, a) = j\, d(A, B)/n$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j. Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b - a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b - a)/n$.

Seção 14 – Vetores no Plano

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

Solução. ($\Rightarrow$) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo. O paralelogramo é formado por dois pares de lados. Em cada par de lados, os lados são paralelos e têm o mesmo comprimento. Portanto $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Seja P o ponto médio de DB, e seja Q o ponto médio de AC. Vamos provar que $Q = P$. Escolhemos um sistema de coordenadas OXY de modo que $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $D = (c, d)$. Logo $\overrightarrow{AD} = (c, d)$ e $C = B + \overrightarrow{AD} = (b + c, d)$. Calculando os pontos P e Q, obtemos

$$P = \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d+0}{2}\right) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right),$$
$$Q = \left(\frac{b+c+0}{2}, \frac{d+0}{2}\right) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right).$$

Portanto $P = Q$.

($\Leftarrow$) Seja P o ponto médio de DB, e seja Q o ponto médio de AC. Suponha que as diagonais do paralelogramo se cortam mutuamente ao meio, ou seja, suponha que $P = Q$. Escolhemos um sistema de coordenadas OXY de modo que $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $D = (c, d)$. Temos então $\overrightarrow{AD} = (c, d)$ e $\overrightarrow{AB} = (b, 0)$. Escrevemos $C = (x, y)$. Vamos determinar x e y. Calculando os pontos P e Q, obtemos

$$P = \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d}{2}\right),$$
$$Q = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

A igualdade $P = Q$ implica $x = c + b$ e $y = d$. Logo $(x, y) = (b + c, d)$, ou seja, $C = (b + c, d)$. Portanto $C = B + \overrightarrow{AD}$ e $C = D + \overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Isso implica que $ABCD$ é um paralelogramo.

Seção 15 – Operações com Vetores

7. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 0$. Prove que as retas AP, BP e CP são medianas de ABC, logo P é o baricentro desse triângulo.

Solução. Seja Q o ponto de intersecção da reta BP com o segmento AC. Observamos que $\overrightarrow{QA} = \alpha\overrightarrow{CA}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (\alpha - 1)\overrightarrow{CA}.$$

Vamos provar que Q é o ponto médio do lado AC, ou seja, vamos provar que $\alpha = 1/2$. Escrevemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PQ} + \alpha\overrightarrow{CA}, \\
\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}, \\
\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1)\overrightarrow{CA}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PQ} + (3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Além disso,

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{CB} + (1 - \alpha)\overrightarrow{CA}$$

e, para algum $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\overrightarrow{PQ} = \beta\overrightarrow{BQ}.$$

Portanto

$$\overrightarrow{PQ} = \beta\overrightarrow{BQ} = -\beta\overrightarrow{CB} + \beta(1-\alpha)\overrightarrow{CA}.$$

Consequentemente

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (3\beta(1-\alpha) + 3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + (1-3\beta)\overrightarrow{CB}.$$

Por outro lado, temos $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Logo

$$(3\beta(1-\alpha) + 3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + (1-3\beta)\overrightarrow{CB} = 0.$$

Como $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são linearmente independentes, essa igualdade implica (veja o Exercício 1 da Seção 15)

$$(3\beta(1-\alpha) + 3\alpha - 2) = 0 \qquad \text{e} \qquad 1 - 3\beta = 0.$$

A segunda equação implica $\beta = 1/3$. Substituindo esse valor de β na primeira equação, obtemos $3(1/3)(1-\alpha) + 3\alpha - 2 = 0$, ou seja, $\alpha = 1/2$. Portanto Q é o ponto médio de AC. Renomeando os pontos, obtemos a demonstração para as medianas correspondentes aos outros vértices do triângulo.

Seção 16 – Equação da Elipse

10. Quais são as tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$ que têm inclinação igual a $1/2$?

Solução. Uma reta com inclinação $1/2$ é dada por $y = (1/2)x + b$ para $b \in \mathbb{R}$. Vamos determinar os valores de b para os quais a reta $y = (1/2)x + b$ é tangente à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$, ou seja, vamos determinar os valores de b para os quais o sistema

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 32 \\ y &= (1/2)x + b \end{aligned}$$

tem apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira e desenvolvendo, obtemos

$$2x^2 + 4bx + (4b^2 - 32) = 0.$$

Essa equação possui apenas uma solução se, e somente se, o discriminante da equação é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 16^2 = 0.$$

Isso implica $b = \pm 4$. Portanto, as retas tangentes são

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

Seção 17 – Equação da Hipérbole

2. Para todo ponto $P = (m, n)$ na hipérbole $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, mostre que a reta $r : (m/a^2)x - (n/b^2)y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com H. A reta r chama-se a *tangente* a H no ponto P.

Solução. A reta r é tangente à hipérbole H no ponto P se, e somente se, $x = m$ e $y = n$ é a única solução do sistema

$$\begin{aligned} (m/a^2)x - (n/b^2)y &= 1 \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 &= 1. \end{aligned}$$

A primeira equação implica

$$x = \frac{a^2}{m}\left(1 + \frac{n}{b^2}\right).$$

Substituindo essa expressão para x na segunda equação e desenvolvendo, obtemos

$$(a^2n^2 - b^2m^2)y^2 + b^2a^22ny + b^4(a^2 - m^2) = 0.$$

Como P pertence à hipérbole, temos $a^2n^2 - b^2m^2 = -a^2b^2$. Substituindo essa expressão na equação anterior e simplificado, encontramos

$$-a^2y^2 + a^22ny + b^2(a^2 - m^2) = 0.$$

Calculando o discriminante Δ dessa equação quadrática, obtemos

$$\Delta = 4a^2(a^2n^2 - b^2m^2 + b^2a^2) = 4a^2(-a^2b^2 + b^2a^2) = 4a^2(0) = 0.$$

Nesse cálculo, usamos novamente que P pertence a H. Como $\Delta = 0$, a equação para y possui apenas uma solução. Associado a essa solução temos apenas um valor para x. Portanto o sistema de equações possui apenas uma solução (x, y), ou seja, a reta r é tangente à hipérbole H.

Seção 20 – Formas Quadráticas

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

1. Escreva sua matriz e sua equação característica;
2. Obtenha seus autovalores;
3. Descreva suas linhas de nível;
4. Ache autovetores unitários ortogonais u e u^*;

5. Determine os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como $A's^2 + C't^2$;

6. Ache os focos da cônica $A's^2 + C't^2 = 1$ em termos das coordenadas x e y.

As formas quadráticas são:

(a) $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

(b) $\varphi(x, y) = xy$.

(c) $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$.

(d) $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

(e) $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$.

(f) $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$.

Solução. (a) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = 1/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad u^* = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}s - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s, t) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/3} + \frac{t^2}{2}.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s, t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s, t) = d$ é o ponto $(0, 0)$. Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s, t) = d$ são elipses. Nesse caso, temos uma elipse com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{2d/3}$, e portanto os focos da elipse são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(-\frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}, -\frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}\right), \qquad \left(\frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{3}}\right).$$

(c) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 10\lambda = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \qquad u^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{\sqrt{10}}s - \frac{1}{\sqrt{10}}t, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{10}}s + \frac{3}{\sqrt{10}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = 10t^2.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ é a reta horizontal $t = 0$ que passa pela origem. Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o par de retas horizontais $t = \pm\sqrt{d/10}$. Em termos das coordenadas x e y, a reta $t = 0$ é $x - 3y = 0$, e as retas $t = \pm\sqrt{d/10}$ são $x - 3y = \mp\sqrt{d}$.

(d) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 5/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = \sqrt{5}/2$ e $\lambda_2 = -\sqrt{5}/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}\right), \qquad u^* = \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= u_1 s - u_2 t, \\ y &= u_2 s + u_1 t, \end{aligned}$$

onde u_1 e u_2 são as coordenadas de u, a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{\sqrt{5}}{2}s^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/\sqrt{5}} - \frac{t^2}{2/\sqrt{5}}.$$

Para $d = 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm s$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Nesse caso, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{d}/\sqrt{\sqrt{5}}$, e portanto os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}}, \frac{4-2\sqrt{5}}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}}\right), \qquad \left(\frac{2}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}}, \frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{10\sqrt{5}-20}}\right).$$

Seção 23 – Transformações Lineares

11. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

Solução. Seja $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, e seja M a matriz de T. Como M tem posto 2, os vetores-coluna de M são não-colinares. Se r é uma reta vertical, então r é formada pelos pontos $(x,y) = (\alpha, t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo os pontos

$$T(x,y) = T(\alpha,t) = (a\alpha + bt, c\alpha + dt) = \alpha(a,c) + t(b,d)$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois $(b,d) \neq (0,0)$ (caso contrário teríamos $ad - bc = 0$, o que é impossível). Se r é uma reta não-vertical, então r é o conjunto dos pontos $(x,y) = (t, \alpha t + \beta)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo os pontos

$$T(x,y) = T(t, \alpha t + \beta) = \beta(b,d) + t\big((a,c) + \alpha(b,d)\big)$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois não existe α tal que $(a,c) + \alpha(b,d) = 0$ (caso contrário (a,c) e (b,d) seriam colineares).

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível. Mostre que T transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

Solução. Seja $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, e seja M a matriz de T. Como T é invertível, para todo $(m,n) \in \mathbb{R}^2$ existe apenas um vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (m,n)$. Dito de outra forma, o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Portanto as retas $ax + by = m$ e $cx + dy = n$ são concorrentes. Logo os vetores (a, b) e (c, d) são não-colineares, ou seja, $ad - bc \neq 0$. Isso implica que os vetores (a, c) e (b, d) são não-colineares, ou seja, que a matrix de M tem posto 2. Pela solução do Exercício 11, para qualquer valor de α, a transformação T mapeia a reta $x = \alpha$ em uma reta paralela ao vetor (b, d) que passa por (a, c). Isso mostra que T transforma as retas paralelas $x = \alpha$ e $x = \alpha'$ em retas paralelas ao vetor (b, d). Pela solução do Exercício 11, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a, c) + \alpha(b, d)$ que passa por (a, c). Analogamente, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha' x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a, c) + \alpha'(b, d)$ que passa por (a, c). Como $(a, b) + \alpha(c, d)$ e $(a, c) + \alpha'(b, d)$ são vetores colineares, concluímos que T transforma retas não-verticais paralelas em retas não-verticais paralelas. Além disso, concluímos que T transforma paralelogramos em paralelogramos. A transformação T não mapeia losangos em losangos, em geral. De fato, considere o quadrado cujos vértices são os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$ (esse é um exemplo de losango). Observamos que os os vetores unitários $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$ são mapeados nos vetores (a, c) e (b, d), que não são unitários, em geral. Logo o quadrado $ABCD$ não é transformado em um quadrado, em geral.

17. Dados $u = (1, 2)$, $v = (3, 4)$, $u' = (5, 6)$ e $v' = (7, 8)$, ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.

Solução. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem a forma $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Procuramos constantes a, b, c e d tais que $T(1, 2) = (5, 6)$ e $T(3, 4) = (7, 8)$, ou seja, $(a + 2b, c + 2d) = (5, 6)$ e $(3a + 4b, 3c + 4d) = (7, 8)$, ou seja, $a + 2b = 5$, $c + 2d = 6$ e $3a + 4b = 7$, $3c + 4d = 8$. Obtemos portanto um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, a, b, c e d. De fato, obtemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas, desacoplados:

$$\begin{aligned} a + 2b &= 5 \qquad & c + 2d &= 6 \\ 3a + 4b &= 7 \qquad & 3c + 4d &= 8. \end{aligned}$$

Resolvendo esses sistemas, obtemos $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$ e $d = 5$. Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x, y) = (-3x + 4y, -4x + 5y).$$

Seção 24 – Coordenadas no Espaço

5. Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos $P = (2, 3, 4)$ e $Q = (1, 1, 758)$.

Solução. O plano vertical que passa por P e Q deve conter todos os pontos da forma $(2,3,z)$ e $(1,1,z')$ para $z \in \mathbb{R}$ e $z' \in \mathbb{R}$. Em particular, o plano vertical deve conter os pontos $P' = (2,3,0)$ e $Q' = (1,1,0)$. Além disso, observamos que o plano vertical deve conter a reta $P'Q'$. As coordenadas de P' e Q' no plano Π_{xy} são $(2,3)$ e $(1,1)$. Portanto $\overrightarrow{P'Q'} = (-1,-2)$ no plano Π_{xy}. O vetor $v = (2,-1)$ é ortogonal a $\overrightarrow{P'Q'}$. Logo a equação da reta $P'Q'$ no plano Π_{xy} é $2x - y = c = 2(1) - 1(1) = 1$, ou seja, $2x - y = 1$. O plano vertical que passa por P e Q é formado por todos os pontos (x,y,z) tais que $2x - y = 1$. Essa é a equação do plano.

7. Escreva a equação geral de um plano vertical.

Solução. A equação geral de um plano vertical é $ax + by = c$, onde a, b e c são números reais. De fato, o conjunto de todos os pontos (x,y,z) tais que $ax + by = c$ forma um plano que contém o eixo OZ ou é paralelo ao eixo OZ. (Veja a solução do Exercício 5.)