

Soluções do Livro  
Geometria Analítica e Álgebra Linear  
de Elon Lages Lima  
Segunda Edição–Oitava Impressão

Gustavo de Oliveira

17 de maio de 2021

## Sumário

1	Seção 1 – Coordenadas na reta	1
2	Seção 2 – Coordenadas no plano	5

## 1 Seção 1 – Coordenadas na reta

**Exercício** (E1.S1). Sejam  $a < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  sobre o eixo  $E$ . Determine as coordenadas dos pontos  $X_1, \dots, X_{n-1}$  que dividem o segmento  $AB$  em  $n$  partes iguais.

*Solução.* O comprimento de cada parte do intervalo é  $l = d(A, B)/n$ . Para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , observamos que  $d(X_j, A) = jl$ . Seja  $x_j$  a coordenada do ponto  $X_j$ . Então  $|x_j - a| = j|a - b|/n$ , ou seja,  $x_j - a = j(b - a)/n$ , pois  $x_j > a$  e  $b > a$ . Portanto  $x_j = a + j(b - a)/n$  ou ainda  $x_j = (1 - j/n)a + (j/n)b$  para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .  $\square$

**Exercício** (E2.S1). Sejam  $a < x < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $X$  e  $B$  do eixo  $E$ . Diz-se que o ponto  $X$  divide o segmento  $AB$  em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente  $d(A, X)/d(A, B)$  é chamado *razão áurea*.) Supondo que  $X$  divide o segmento de reta  $AB$  em média e extrema razão, calcule  $x$  em função de  $a$  e  $b$ .

*Solução.* Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a - x|}{|a - b|} = \frac{|x - b|}{|a - x|}.$$

Como  $a < x < b$ , essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{b - x}{x - a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b - 3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é  $\Delta = 5(b - a)^2$ . Portanto as raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b - a)).$$

Usando a condição  $a < x < b$ , obtemos que  $a < x_+ < b$  e  $x_- < a$ . Logo a única raiz no intervalo  $[a, b]$  é  $x_+$ . Portanto o ponto  $X$  procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$

□

**Exercício (E3.S1).** Se  $O$  é a origem do eixo  $E$  e  $A$  é o ponto desse eixo que tem coordenada 1, qual é a coordenada do ponto  $X$  que divide o segmento de reta  $OA$  em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea*  $d(O, X)/d(O, A)$ .

*Solução.* O ponto  $X$  tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})0 + (\sqrt{5} - 1)1) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Calculamos  $d(O, A) = |0 - 1| = 1$ . Portanto a razão áurea é

$$\frac{d(O, X)}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

□

**Exercício (E4.S1).** Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $X$  sobre o eixo  $E$  têm coordenadas  $a$ ,  $b$  e  $x$  respectivamente. Se  $X'$  é o simétrico de  $X$  em relação ao ponto  $A$  e  $X''$  é o simétrico de  $X'$  em relação a  $B$ , quais são as coordenadas de  $X'$  e  $X''$ ?

*Solução.* Sejam  $x'$  e  $x''$  as coordenadas de  $X'$  e  $X''$ . Como  $A$  é o ponto médio de  $XX'$ , temos  $a = (x + x')/2$ . Logo  $x' = 2a - x$ . Como  $B$  é o ponto médio de  $X'X''$ , temos  $b = (x' + x'')/2$ . Portanto  $x'' = 2b - x' = 2(b - a) + x$ . □

**Exercício** (E5.S1). Dados os pontos  $A, B$  no eixo  $E$ , defina a distância orientada  $\delta(A, B)$  entre eles pondo  $\delta(A, B) = d(A, B)$  se  $A$  está à esquerda de  $B$  e  $\delta(A, B) = -d(A, B)$  se  $A$  está à direita de  $B$ . Prove que para quaisquer  $A, B$  e  $C$  do eixo  $E$  tem-se  $\delta(A, B) + \delta(B, C) + \delta(C, A) = 0$ .

*Solução.* Sem perda de generalidade podemos supor que  $A$  está à esquerda de  $B$  e que  $B$  está à esquerda de  $C$ . Logo

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) + \delta(C, A) = d(A, B) + d(B, C) - d(C, A) = 0$$

pois  $d(A, B) + d(B, C) = d(C, A)$ , já que o ponto  $B$  pertence ao segmento de reta  $AC$ .  $\square$

**Exercício** (E6.S1). Sejam  $a < b < c$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A, B$  e  $C$  situados sobre um eixo. Sabendo que  $a = 17, c = 32$  e

$$\frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{2}{3},$$

qual é o valor de  $b$ ?

*Solução.* Usando a fórmula  $d(X, Y) = |x - y|$ , temos que

$$\frac{3}{2} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{|a - b|}{|a - c|} = \frac{|17 - b|}{|17 - 32|}.$$

Como  $b > 17$  e  $32 > 17$ , essa equação é equivalente a

$$\frac{b - 17}{32 - 17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$b = \frac{2}{3}15 + 17 = 27.$$

$\square$

**Exercício** (E7.S1). Qual seria a resposta do exercício anterior se soubéssemos apenas que  $a < c$ ?

*Solução.* Se soubéssemos apenas que  $a < c$ , poderíamos ter  $a < b$  ou  $a \geq b$ . Logo, além do caso  $b > 17$  considerado no item (a), teríamos o caso em que  $b \leq 17$ . Dessa forma teríamos  $|17 - b| = 17 - b$  e consequentemente

$$\frac{17 - b}{32 - 17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$-b = \frac{2}{3}15 - 17 = -7.$$

Isso implica em  $b = 7$ . Em resumo,  $b = 7$  ou  $b = 27$ .  $\square$

**Exercício** (E8.S1). Sejam  $A, B, C, D$  pontos dispostos nesta ordem sobre um eixo  $E$ . Esboce os gráficos das funções  $\varphi, f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= d(X, A) + d(X, B), \\ f(X) &= d(X, A) + d(X, B) + d(X, C), \\ g(X) &= d(X, A) + d(X, B) + d(X, C) + d(X, D).\end{aligned}$$

*Solução.* Por exemplo, tomamos  $A, B, C$  e  $D$  com coordenadas 0, 1, 3 e 7, respectivamente. Seja  $x$  a coordenada de  $X$ . Então

$$\begin{aligned}\psi(x) &= |x| + |x - 1|, \\ f(x) &= |x| + |x - 1| + |x - 3|, \\ g(x) &= |x| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 7|.\end{aligned}$$

Para ver o gráfico dessas funções, visite <https://sagecell.sagemath.org> e execute o código

```
a = 0
b = 1
c = 3
d = 7
m = -5
n = 8
phi(x) = abs(x-a) + abs(x-b)
f(x) = phi(x) + abs(x-c)
g(x) = f(x) + abs(x-d)
p1 = plot(phi(x), (x,m,n), color="blue")
p2 = plot(f(x), (x,m,n), color="red")
p3 = plot(g(x), (x,m,n), color="green")
p = p1 + p2 + p3
show(p, axes_labels=["x", "y"])
```

□

**Exercício** (E9.S1). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- (i) Pondo  $f(0) = a$ , defina a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  assim:  $g(x) = f(x) - a$ . Prove então que  $|g(x)| = |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $g(1) = 1$  ou  $g(1) = -1$ . Também  $(g(x))^2 = x^2$ .
- (ii) Use a identidade  $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x - y)^2]$  para provar a igualdade  $xy = g(x)g(y)$ .

- (iii) Se  $g(1) = 1$ , mostre que  $g(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Se  $g(1) = -1$ , mostre que  $g(x) = -x$  para todo  $x$ .
- (iv) Conclua que  $f(x) = x + a$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  ou então  $f(x) = -x + a$  para todo  $x$ .

*Solução.* (i) Observamos que  $g(x) = f(x) - a = f(x) - f(0)$ . Logo

$$|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sendo assim,  $|g(1)| = 1$ , o que implica  $g(1) = 1$  ou  $g(1) = -1$ . Temos também que

$$g(x)^2 = |g(x)|^2 = |x|^2 = x^2.$$

- (ii) Usando as definições e propriedades, calculamos

$$\begin{aligned} xy &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - (x - y)^2] \\ &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - |x - y|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - f(y)|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - a - f(y) + a|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |g(x) - g(y)|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - (g(x) - g(y))^2] \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

(iii) Se  $g(1) = 1$ , então  $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Se  $g(1) = -1$ , então  $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)(-1) = -g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto  $g(x) = -x$  para todo  $x$ .

(iv) Observamos que  $f(x) = g(x) + a$ . Pela parte (i), temos  $g(1) = 1$  ou  $g(1) = -1$ . Usando (iii), isso implica  $g(x) = x$  ou  $g(x) = -x$  para todo  $x$ , respectivamente. Portanto  $f(x) = x + a$  ou  $f(x) = -x + a$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 2 Seção 2 – Coordenadas no plano

**Exercício** (E1.S2). Diz-se que o ponto  $A'$  é o simétrico do ponto  $A$  em relação à reta  $r$  quando  $r$  é a mediatriz do segmento  $AA'$ . Sabendo que  $A = (x, y)$ , determine os simétricos de  $A$  em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$ .

*Solução.* Sejam  $A'$  e  $A''$  os simétricos de  $A$  em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Fazendo uma figura, é simples verificar que o eixo  $OX$  é a mediatriz do segmento  $AA'$  com  $A' = (x, -y)$  e o eixo  $OY$  é a mediatriz do segmento  $AA''$  com  $A'' = (-x, y)$ .  $\square$

**Exercício (E2.S2).** O conjunto  $r$  formado pelos pontos  $(x, 5)$  cujas ordenadas são iguais a 5 é uma reta paralela ao eixo  $OX$ . Determine o simétrico do ponto  $P = (3, -2)$  em relação à reta  $r$ .

*Solução.* A reta  $s$  perpendicular a  $r$  passando por  $P$  é formada pelos pontos  $(3, y)$  cujas abcissas são iguais a 3. O ponto  $P$  está à distância  $5 - (-2) = 7$  da reta  $r$ . A intersecção da reta  $r$  com a reta  $s$  é o ponto  $(3, 5)$ . Logo o simétrico de  $P$  em relação à reta  $r$  é o ponto  $P' = (3, 5 + 7) = (3, 12)$ .  $\square$

**Exercício (E3.S2).** Enuncie e responda uma questão análoga à do exercício anterior, com a reta  $r' = \{(a, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  paralela ao eixo  $OY$ , e o ponto  $P = (c, d)$ .

*Solução.* O conjunto  $r'$  formado pelos pontos  $(a, y)$  cujas abcissas são iguais a  $a$  é uma reta paralela ao eixo  $OY$ . Determine o simétrico do ponto  $P = (c, d)$  em relação à reta  $r'$ .

Seja  $P'$  o simétrico de  $P$  em relação à reta  $r'$ . Então  $P'$  tem a forma  $P' = (c', d)$ . Além disso, o ponto médio do segmento  $PP'$  é o ponto  $(d, a)$ . Logo  $(c' + c)/2 = a$ , ou seja,  $c' = 2a - c$ . Portanto  $P' = (2a - c, d)$ .  $\square$

**Exercício (E7.S2).** Dado  $A = (x, y)$  com  $x \neq y$ , observe que os pontos  $B = (x, x)$ ,  $C = (y, x)$  e  $D = (y, y)$  formam, juntamente com  $A$ , os vértices de um quadrado de lados paralelos aos eixos. A partir daí determine o simétrico de  $A$  relativamente à diagonal  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

*Solução.* Seja  $A'$  o simétrico de  $A$  em relação à diagonal  $\Delta$ . As diagonais  $AC$  e  $BD$  do quadrado se intersectam mutuamente no ponto médio e são perpendiculares. Logo  $A' = C = (y, x)$ .  $\square$