Errata e Soluções do Livro
Geometria Analítica e Álgebra Linear
de Elon Lages Lima
Segunda Edição–Oitava Impressão

Gustavo de Oliveira

15 de maio de 2021

Sumário

Parte I

Errata

1 Seção 4 – A Distância entre Dois Pontos

- Página 28, linha 3: "...as reta..." em vez de "...os segmentos...".

2 Seção 11 – Desigualdades Lineares

- Página 70, linha -9: "...a idéia é justamente tomar..."
- Página 71, Figura 11.6: Falta indicar o ponto C na figura.
- Página 72, Exercício 6: "...conjunto das soluções de..."

3 Seção 17 – Equação da Hipérbole

- Página 110, linha 21: "...as assíntotas da hipérbole."

4 Seção 26 – Distância entre Dois Pontos no Espaço

- Página 172, linha 6: "...a um segmento como, por..."

5 Seção 34 – Operações com Matrizes

- Página 234, linha 4: "...3×3..." em vez de "...3×4..."
- Página 237, linha 1: Não seria "Consequentemente..." em vez de "Reciprocamente..."?

Parte II

Soluções

6 Seção 1 – Coordenadas na reta

Exercício (E1.S1)**.** Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. O comprimento de cada parte do intervalo é $l = d(A, B)/n$. Para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, observamos que $d(X_j, A) = jl$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j. Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b - a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b - a)/n$ ou ainda $x_j = (1 - j/n)a + (j/n)b$ para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. $\square$

Exercício (E2.S1)**.** Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, X e B do eixo E. Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente $d(A, X)/d(A, B)$ é chamado *razão áurea.*) Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

Solução. Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a - x|}{|a - b|} = \frac{|x - b|}{|a - x|}.$$

Como $a < x < b$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{b - x}{x - a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b - 3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = 5(b - a)^2$. Portanto as raízes são

$$x_\pm = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b - a)).$$

Usando a condição $a < x < b$, obtemos que $a < x_+ < b$ e $x_- < a$. Logo a única raiz no intervalo $[a, b]$ é x_+. Portanto o ponto X procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$

$\square$

Exercício (E3.S1)**.** Se O é a origem do eixo E e A é o ponto desse eixo que tem coordenada 1, qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento de reta OA em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea* $d(O, X)/d(O, A)$.

Solução. O ponto X tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})0 + (\sqrt{5} - 1)1) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Calculamos $d(O, A) = |0 - 1| = 1$. Portanto a razão áurea é

$$\frac{d(O, X)}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

$\square$

Exercício (E4.S1)**.** Os pontos A, B e X sobre o eixo E têm coordenadas a, b e x respectivamente. Se X' é o simétrico de X em relação ao ponto A e X'' é o simétrico de X' em relação a B, quais são as coordenadas de X' e X''?

Solução. Sejam x' e x'' as coordenadas de X' e X''. Como A é o ponto médio de XX', temos $a = (x + x')/2$. Logo $x' = 2a - x$. Como B é o ponto médio de $X'X''$, temos $b = (x' + x'')/2$. Portanto $x'' = 2b - x' = 2(b - a) + x$. $\square$

Exercício (E5.S1)**.** Dados os pontos A, B no eixo E, defina a distância orientada $\delta(A, B)$ entre eles pondo $\delta(A, B) = d(A, B)$ se A está à esquerda de B e $\delta(A, B) = -d(A, B)$ se A está à direita de B. Prove que para quaisquer A, B e C do eixo E tem-se $\delta(A, B) + \delta(B, C) + \delta(C, A) = 0$.

Solução. Sem perda de generalidade podemos supor que A está à esquerda de B e que B está à esquerda de C. Logo

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) + \delta(C, A) = d(A, B) + d(B, C) - d(C, A) = 0$$

pois $d(A, B) + d(B, C) = d(C, A)$, já que o ponto B pertence ao segmento de reta AC. $\square$

Exercício (E6.S1)**.** Sejam $a < b < c$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, B e C situados sobre um eixo. Sabendo que $a = 17$, $c = 32$ e

$$\frac{d(A,B)}{d(A,C)} = \frac{2}{3},$$

qual é o valor de b?

Solução. Usando a fórmula $d(X,Y) = |x - y|$, temos que

$$\frac{3}{2} = \frac{d(A,B)}{d(A,C)} = \frac{|a-b|}{|a-c|} = \frac{|17-b|}{|17-32|}.$$

Como $b > 17$ e $32 > 17$, essa equação é equivalente a

$$\frac{b-17}{32-17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$b = \frac{2}{3}15 + 17 = 27.$$

$\square$

Exercício (E7.S1)**.** Qual seria a resposta do exercício anterior se soubéssemos apenas que $a < c$?

Solução. Se soubéssemos apenas que $a < c$, poderíamos ter $a < b$ ou $a \geq b$. Logo, além do caso $b > 17$ considerado no item (a), teríamos o caso em que $b \leq 17$. Dessa forma teríamos $|17 - b| = 17 - b$ e consequentemente

$$\frac{17-b}{32-17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$-b = \frac{2}{3}15 - 17 = -7.$$

Isso implica em $b = 7$. Em resumo, $b = 7$ ou $b = 27$. $\square$

Exercício (E8.S1)**.** Sejam A, B, C, D pontos dispostos nesta ordem sobre um eixo E. Esboce os gráficos das funções $\varphi, f, g : E \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= d(X,A) + d(X,B),\\
f(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C),\\
g(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C) + d(X,D).
\end{aligned}$$

Solução. Por exemplo, tomamos A, B, C e D com coordenadas 0, 1, 3 e 7, respectivamente. Seja x a coordenada de X. Então

$$\begin{aligned}\psi(x) &= |x| + |x-1|,\\ f(x) &= |x| + |x-1| + |x-3|,\\ g(x) &= |x| + |x-1| + |x-3| + |x-7|.\end{aligned}$$

Para ver o gráfico dessas funções, visite `https://sagecell.sagemath.org` e execute o código

```
a = 0
b = 1
c = 3
d = 7
m = -5
n = 8
phi(x) = abs(x-a) + abs(x-b)
f(x) = phi(x) + abs(x-c)
g(x) = f(x) + abs(x-d)
p1 = plot(phi(x), (x,m,n), color="blue")
p2 = plot(f(x), (x,m,n), color="red")
p3 = plot(g(x), (x,m,n), color="green")
p = p1 + p2 + p3
show(p, axes_labels=["x", "y"])
```

□

Exercício (E9.S1)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)-f(y)| = |x-y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Pondo $f(0) = a$, defina a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim: $g(x) = f(x) - a$. Prove então que $|g(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Também $(g(x))^2 = x^2$.

(ii) Use a identidade $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x-y)^2]$ para provar a igualdade $xy = g(x)\,g(y)$.

(iii) Se $g(1) = 1$, mostre que $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, mostre que $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Conclua que $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou então $f(x) = -x + a$ para todo x.

Solução. (i) Observamos que $g(x) = f(x) - a = f(x) - f(0)$. Logo

$$|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $|g(1)| = 1$, o que implica $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Temos também que

$$g(x)^2 = |g(x)|^2 = |x|^2 = x^2.$$

(ii) Usando as definições e propriedades, calculamos

$$\begin{aligned} xy &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - (x-y)^2] \\ &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - |x-y|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - f(y)|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - a - f(y) + a|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |g(x) - g(y)|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - (g(x) - g(y))^2] \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

(iii) Se $g(1) = 1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)(-1) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Observamos que $f(x) = g(x) + a$. Pela parte (i), temos $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Usando (iii), isso implica $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$ para todo x, respectivamente. Portanto $f(x) = x + a$ ou $f(x) = -x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

7 Seção 2 – Coordenadas no plano

Exercício (E1.S2)**.** Diz-se que o ponto A' é o simétrico do ponto A em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento AA'. Sabendo que $A = (x, y)$, determine os simétricos de A em relação aos eixos OX e OY.

Solução. Sejam A' e A'' os simétricos de A em relação aos eixos OX e OY, respectivamente. Fazendo uma figura, é simples verificar que o eixo OX é a mediatriz do segmento AA' com $A' = (x, -y)$ e o eixo OY é a mediatriz do segmento AA'' com $A'' = (-x, y)$. □

Exercício (E2.S2)**.** O conjunto r formado pelos pontos $(x, 5)$ cujas ordenadas são iguais a 5 é uma reta paralela ao eixo OX. Determine o simétrico do ponto $P = (3, -2)$ em relação à reta r.

Solução. A reta s perpendicular a r passando por P é formada pelos pontos $(3, y)$ cujas abcissas são iguais a 3. O ponto P está à distância $5 - (-2) = 7$ da reta r. A intersecção da reta r com a reta s é o ponto $(3, 5)$. Logo o simétrico de P em relação à reta r é o ponto $P' = (3, 5 + 7) = (3, 12)$. □

Exercício (E3.S2)**.** Enuncie e responda uma questão análoga à do exercício anterior, com a reta $r' = \{(a, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ paralela ao eixo OY, e o ponto $P = (c, d)$.

Solução. O conjunto r' formado pelos pontos (a, y) cujas abcissas são iguais a a é uma reta paralela ao eixo OY. Determine o simétrico do ponto $P = (c, d)$ em relação à reta r'.

Seja P' o simétrico de P em relação à reta r'. Então P' tem a forma $P' = (c', d)$. Além disso, o ponto médio do segmento PP' é o ponto (d, a). Logo $(c' + c)/2 = a$, ou seja, $c' = 2a - c$. Portanto $P' = (2a - c, d)$. $\square$