Exercícios Resolvidos do Livro Geometria Analítica e Álgebra Linear de Elon Lages Lima (Segunda Edição–Oitava Impressão)

Gustavo de Oliveira

2 de junho de 2020

Seção 1 – Coordenadas na Reta

S1.E1. Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. Para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, observamos que $d(X_j, A) = jd(A, B)/n$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j. Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b - a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b - a)/n$, ou ainda $x_j = (1 - j/n) + (j/n)b$ para $j \in \{1, \ldots, n - 1\}$.

S1.E2. Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, X e B do eixo E. Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente $d(A, X)/d(A, B)$ é chamado *razão áurea*.) Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

Solução. Em coordenadas, a condição corresponde a

$$\frac{|a - x|}{|a - b|} = \frac{|x - b|}{|a - x|}.$$

Como $a < x < b$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{b - x}{x - a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b - 3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = 5(b - a)^2$. Portanto as raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b - a)).$$

Usando a condição $a < x < b$, obtemos que $a < x_+ < b$ e $x_- < a$. Logo a única raiz no intervalo $[a, b]$ é x_+. Portanto o ponto X procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$

S1.E3. Se O é a origem do eixo E e A é o ponto desse eixo que tem coordenada 1. Qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento de reta OA em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea* $d(O, X)/d(O, A)$.

Solução. O ponto X tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})0 + (\sqrt{5} - 1)1) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Calculamos $d(O, A) = |0 - 1| = 1$. Portanto a razão áurea é

$$\frac{d(O, X)}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

S1.E4. Os pontos A, B e X sobre o eixo E têm coordenadas a, b e x respectivamente. Se X' é o simétrico de X em relação ao ponto A e X'' é o simétrico de X' em relação a B, quais são as coordenadas de X' e X''?

Solução. Sejam x' e x'' as coordenadas de X' e X''. Como A é o ponto médio de XX', temos $a = (x + x')/2$. Logo $x' = 2a - x$. Como B é o ponto médio de $X'X''$, temos $b = (x' + x'')/2$. Portanto $x'' = 2b - x' = 2(b - a) + x$.

S1.E6. Sejam $a < b < c$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, B e C situados sobre um eixo. Sabendo que $a = 17$, $c = 32$ e

$$\frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{2}{3},$$

qual é o valor de b?

Solução. Usando a fórmula $d(X, Y) = |x - y|$, temos que

$$\frac{3}{2} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{|a - b|}{|a - c|} = \frac{|17 - b|}{|17 - 32|}.$$

Como $b > 17$ e $32 > 17$, essa equação é equivalente a

$$\frac{b-17}{32-17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$b = \frac{2}{3}15 + 17 = 27.$$

S1.E7. Qual seria a resposta do exercício anterior se soubéssemos apenas que $a < c$?

Solução. Se soubéssemos apenas que $a < c$, poderíamos ter $a < b$ ou $a \geq b$. Logo, além do caso $b > 17$ considerado no item (a), teríamos o caso em que $b \leq 17$. Dessa forma teríamos $|17 - b| = 17 - b$ e consequentemente

$$\frac{17-b}{32-17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$-b = \frac{2}{3}15 - 17 = -7.$$

Isso implica em $b = 7$. Em resumo, $b = 7$ ou $b = 27$.

S1.E9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Pondo $f(0) = a$, defina a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim: $g(x) = f(x) - a$. Prove então que $|g(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Também $(g(x))^2 = x^2$.

(ii) Use a identidade $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x - y)^2]$ para provar a igualdade $xy = g(x)\, g(y)$.

(iii) Se $g(1) = 1$, mostre que $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, mostre que $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Conclua que $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou então $f(x) = -x + a$ para todo x.

Solução. (i) Observamos que $g(x) = f(x) - a = f(x) - f(0)$. Logo $|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $|g(1)| = 1$, o que implica $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Temos também que $g(x)^2 = |g(x)|^2 = |x|^2 = x^2$.

(ii) Usando as definições e propriedades, calculamos

$$\begin{aligned}
xy &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - (x-y)^2] \\
&= 2^{-1}[x^2 + y^2 - |x-y|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - f(y)|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - a - f(y) + a|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |g(x) - g(y)|^2] \\
&= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - (g(x) - g(y))^2] \\
&= g(x)g(y).
\end{aligned}$$

(iii) Se $g(1) = 1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)(-1) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Observamos que $f(x) = g(x) + a$. Pela parte (i), temos $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Usando (iii), isso implica $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$ para todo x, respectivamente. Portanto $f(x) = x + a$ ou $f(x) = -x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seção 2 – Coordenadas no Plano

S2.E1. Diz-se que o ponto A' é o simétrico do ponto A em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento AA'. Sabendo que $A = (x, y)$, determine os simétricos de A em relação aos eixos OX e OY.

Solução. Sejam A' e A'' os simétricos de A em relação aos eixos OX e OY, respectivamente. Fazendo uma figura, é simples verificar que OX é a mediatriz do segmento AA' com $A' = (x, -y)$ e OY é a mediatriz do segmento AA'' com $A'' = (-x, y)$.

S2.E2. O conjunto r formado pelos pontos $(x, 5)$ cujas ordenadas são iguais a 5 é uma reta paralela ao eixo OX. Determine o simétrico do ponto $P = (3, -2)$ em relação à reta r.

Solução. A reta s perpendicular a r passando por P é formada pelos pontos $(3, y)$ cujas abcissas são iguais a 3. O ponto P está à distância $5 - (-2) = 7$ da reta r. A intersecção da reta r com a reta s é o ponto $(3, 5)$. Logo o simétrico de P em relação à reta r é o ponto $P' = (3, 5+7) = (3, 12)$.

Seção 5 – Escolhendo o Sistema de Coordenadas

S5.E2. O triângulo ABC é equilátero e cada lado mede l. Num sistema de coordenadas em que a origem é equidistante de A, B e C, e o ponto C está sobre o eixo OY, quais são as coordenadas dos três vértices?

Solução. Tomando o sistema de coordenadas OXY da forma sugerida, obtemos os triângulos ABO, BCO e CAO com $O = (0,0)$, $A = (-a,-b)$, $B = (a,-b)$ e $C = (0,c)$. Esses três triângulos são isóceles e congruentes. Por exemplo, temos ABO com $\hat{A} = \hat{B} = 30^0$ e $\hat{O} = 120^o$. Logo

$$d(A,O)\cos 30^o = l/2,$$

ou seja, $d(A,O)\sqrt{3}/2 = l/2$, ou ainda, $d(A,O) = l/\sqrt{3}$. Seja M o ponto médio de AB. Então

$$d(M,O) = d(A,O)\sin 30^o = (l/\sqrt{3})(1/2) = l/(2\sqrt{3}).$$

Logo

$$\begin{aligned} a &= l/2, \\ b &= d(M,O) = l/(2\sqrt{3}), \\ c &= d(O,C) = d(O,A) = l/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto

$$A = \left(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2\sqrt{3}}\right), \qquad B = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2\sqrt{3}}\right), \qquad C = \left(0, \frac{l}{\sqrt{3}}\right).$$

Seção 7 – As Equações da Reta

S7.E10. Sejam $A = (1,2)$, $B = (2,4)$ e $C = (3,-1)$. Ache as equações da mediana e da altura do triângulo ABC que partem do vértice A.

Solução. A mediana que parte do vértice A é o segmento AM onde M é o ponto médio do lado BC. Calculando M, obtemos $M = (5/2, 3/2)$. A reta que passa por A e M tem inclinação $[(3/2)-2]/[(5/2)-1] = -1/3$, ou seja, a equação dessa reta é da forma $y = -(1/3)x + b$. Calculando b, obtemos $b = 7/3$. Logo a equação da mediana AM é $y = -(1/3)x + 7/3$.

A reta que contém a altura do vértice A é a reta perpendicular ao lado BC passando por A. O lado BC é paralelo a OC' com $C' = (1,-5)$. Logo a equação da altura tem a forma $x - 5y = b$. Como a reta passa por A, devemos ter $1 - 5(2) = b$, ou seja, $b = -9$. Portanto a equação da altura é $x - 5y = -9$.

S7.E22. Qual é a distância entre as paralelas $x - 3y = 4$ e $2x - 6y = 1$?

Solução. Sejam r e s as retas definidas por $x - 3y = 4$ e $2x - 6y = 1$, respectivamente. Seja t a reta perpendicular a r (e portanto a s) que passa pela origem. Uma equação para t é $3x + y = 0$. Calculamos $\{P\} = r \cap t$, ou seja, resolvemos o sistema $x - 3y = 4$, $3x + y = 0$. A solução desse sistema é

$x = 2/5$ e $y = -6/5$. Portanto $P = (2/5, -6/5)$. Calculamos $\{Q\} = s \cap t$, ou seja, resolvemos o sistema $2x - 6y = 1$, $3x + y = 0$. A solução desse sistema é $x = 1/20$ e $y = -3/20$. Portanto $Q = (1/20, -3/20)$. Observamos que $d(r, s) = d(P, Q)$. Calculando $d(P, Q)$, concluímos que $d(r, s) = 7/(2\sqrt{10})$.

S7.E33. Ache uma representação paramétrica para a reta $5x - 2y = 1$.

Solução. Tomamos $x = t$ e procuramos y tal que $5t - 2y = 1$. Obtemos $y = -1/2 + (5/2)t$. Portanto $t \mapsto (t, -1/2 + (5/2)t)$ é uma parametrização para a reta.

Seção 9 – Distância de um Ponto a uma Reta

S9.E2. Qual é o raio da circunferência que tem centro em $P = (4, 1)$ e é tangente à reta $3x + 7y = 2$?

Solução. Seja Q o ponto em que a reta toca a circunferência. Observamos que o segmento PQ é perpendicular à reta e o comprimento de PQ é igual a distância de P à reta, que por sua vez é igual ao raio r da circunferência. Portanto

$$r = d(P, \text{reta}) = \frac{|2 - (3(4) + 7(1))|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{17}{\sqrt{58}}.$$

Seção 10 – Área de um Triângulo

S10.E5. Calcule a área do triângulo cujos vértices são intersecções de duas das retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y = 3$.

Solução. Calculamos os vértices do triângulo resolvendo sistemas de equações lineares: A intersecção das retas $x + y = 0$ e $x - y = 0$ é o ponto $O = (0, 0)$. A intersecção das retas $x + y = 0$ e $2x + y = 3$ é o ponto $A = (3, -3)$. A intersecção das retas $x - y = 0$ e $2x + y = 3$ é o ponto $B = (1, 1)$. Portanto

$$\text{Área}_{OAB} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1-0 & 3-0 \\ 1-0 & -3-0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|-3-3| = 3.$$

Seção 12 – Equação da Circunferência

S12.E4. Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e tem o centro sobre o eixo OY?

Solução. Como o centro da circunferência está sobre o eixo OY, a equação da circunferência tem a forma $x^2 + (y - b)^2 = r^2$. Como A e B pertencem à circunferência, devemos ter

$$\begin{aligned} 1 + (2 - b)^2 &= r^2 \\ 9 + (4 - b)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $b = 5$ e $r = \sqrt{10}$. Portanto a equação da circunferência é $x^2 + (y - 5)^2 = 10$.

S12.E5. Escreva a equação da circunferência que tem centro no ponto $P = (2, 5)$ e é tangente à reta $y = 3x + 1$.

Solução. A reta tem equação $3x - y = -1$. Logo

$$d(P, \text{reta}) = \frac{|-1 - (3(2) + (-1)5)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Portanto a equação da circunferência é $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 2/5$.

S12.E9. A tangente, no ponto P, à circunferência de centro O e raio 3 é paralela à reta $y = -2x + 1$. Quais são as coordenadas de P? E se o raio da circunferência fosse 5?

Solução. Primeiro, procuramos b tal que $r : 2x + y = b$ passe por P (note que r é paralela à reta $y = -2x + 1$). Calculamos

$$d(O, r) = \frac{|b - (2(0) + 1(0))|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}.$$

Suponha que $d(O, r) = \rho$ (onde ρ é conhecida). Então $|b|/\sqrt{5} = \rho$. Logo $b = \pm\rho\sqrt{5}$.

Agora, observamos que P é o ponto de interseção da reta r com a reta $-x + 2y = 0$ (que é a reta perpendicular a r passando por O). Calculando o ponto P, obtemos

$$P = \Big(\frac{2b}{5}, \frac{b}{5}\Big) = \Big(\pm 2\rho\frac{\sqrt{5}}{5}, \pm\rho\frac{\sqrt{5}}{5}\Big).$$

Portanto, se $\rho = 3$ temos

$$P = \Big(\pm \frac{5\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\Big),$$

e se $\rho = 5$ obtemos

$$P = (\pm 2\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}).$$

Seção 13 – Reconhecimento da Equação da Circunferência

S13.E4. Completando os quadrados, decida se cada uma das equações abaixo define uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio:

(a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 1 = 0$.

(b) $-x^2 - y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$.

(c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$.

(d) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 21 = 0$.

Solução. (a) Completando os quadrados, obtemos

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Portanto a equação define uma circunferência.

(b) Completando os quadrados, obtemos

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4^2.$$

Portanto a equação define uma circunferência.

(c) Completando os quadrados, obtemos

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 0.$$

Portanto a equação define um ponto.

(d) Completando os quadrados, obtemos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = -4.$$

Portanto a equação define o conjunto vazio.

Seção 14 – Vetores no Plano

S14.E2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

Solução. ($\Rightarrow$) Suponha que o quadrilátero (com vértices consecutivos) $ABCD$ é um paralelogramo. Então $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$. Além disso, existem constantes α e β tais que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \beta\overrightarrow{BC}$. Logo $\overrightarrow{AB} = -\alpha\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DA} = -\beta\overrightarrow{BC}$. Portanto $-\alpha\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \beta\overrightarrow{BC} = 0$, ou seja, $(1-\alpha)\overrightarrow{CD} + (1-\beta)\overrightarrow{BC} = 0$. Como $ABCD$ é um quadrilátero, os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são colineares. Logo a última igualdade implica $1-\alpha = 0$ e $1-\beta = 0$, isto é, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Portanto $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Agora, temos duas relações que envolvem as diagonais do paralelogramo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= 0,\\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} &= 0.\end{aligned}$$

Vamos eliminar dessas equações os vetores correspondentes aos lados do quadrilátero escrevendo-os em termos das direções diagonais. Usando as relações acima, obtemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= 0,\\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} &= 0.\end{aligned}$$

Somando as duas igualdades, chegamos a

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = 0.$$

Como A, B, C e D não são colineares, as retas AC e BD que contém as diagonais são concorrentes em um ponto M. Sejam λ e γ constantes tais que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{MB} = \gamma\overrightarrow{DB}$. Calculamos

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} &= 0\\ 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} &= 0\\ 2(\lambda\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{DB}) - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} &= 0\\ (2\lambda - 1)\overrightarrow{AC} + (2\gamma - 1)\overrightarrow{DB} &= 0.\end{aligned}$$

Essa iqualdade implica $2\lambda - 1 = 0$ e $2\gamma - 1 = 0$, ou seja, $\lambda = 1/2$ e $\gamma = 1/2$, como queríamos provar.

($\Leftarrow$) Suponha que as diagonais de $ABCD$ se bissectam em um ponto M. Então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ e $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$. Mas $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}$. Logo $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Analogamente provamos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Portanto $ABCD$ é um paralelogramo.

Seção 15 – Operações com Vetores

S15.E1. Dados os vetores u e v, prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Uma combinação linear $\alpha u + \beta v$ só pode ser igual a zero quando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(b) Se $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$, então $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

(c) Nenhum dos vetores u e v é múltiplo do outro.

(d) Para $u = (a, b)$ e $v = (a', b')$, temos $ab' - a'b \neq 0$.

(e) Todo vetor do plano é combinação linear de u e v.

(Neste exercício, devem ser provadas as implicações (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a).)

Solução. (a) $\Rightarrow$ (b). Suponha (a), ou seja, suponha que $\alpha u + \beta v = 0$ implica $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Se $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$, então $(\alpha - \alpha')u + (\beta - \beta')v = 0$. Logo (a) implica $\alpha - \alpha' = 0$ e $\beta - \beta' = 0$, ou seja, $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Vamos provar que $-$(c) implica $-$(b). Se existe λ tal que $u = \lambda v$, então $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$ com $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\alpha' = 0$ e $\beta' = 0$, onde $\alpha \neq \alpha'$ e $\beta \neq \beta'$, ou seja, a afirmação $-$(b) é verdadeira.

(c) $\Rightarrow$ (d). Vamos provar que $-$(d) implica $-$(c). Suponha $ab' - a'b = 0$. Se $a = a' = b = b'$, então $u = 0$ e $v = 0$, e portanto $u = \lambda v$ para todo λ, ou seja, a afirmação $-$(c) é verdadeira. Se $a = b = 0$, então $u = 0$, e portanto $u = 0v$. Logo $-$(c) é verdadeira. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $b'/b = a'/a = \lambda$ em que λ é uma constante. Logo $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$, ou seja, $(a', b') = \lambda(a, b)$, ou seja $v = \lambda u$, ou seja, a afirmação $-$(c) é verdadeira.

(d) $\Rightarrow$ (e). Sejam $u = (a, b)$, $v = (a', b')$ e $w = (\gamma, \delta)$. Então a equação $w = xu + yv$ é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + a'y &= \lambda \\ bx + b'y &= \gamma. \end{aligned}$$

Como $ab' - a'b \neq 0$, esse sistema possui apenas uma solução. De fato, a solução é

$$x = \frac{b'\gamma - a'\delta}{b'a - a'b}, \qquad y = \frac{b\gamma - a\delta}{ba' - ab'}.$$

(e) $\Rightarrow$ (a). Suponha (e). Então, em particular, o vetor 0 é combinação de u e v. Logo $xu + yv = 0$ para x e y únicos. Como $x = 0$ e $y = 0$ é solução desse sistema, essa deve ser a única solução, ou seja, a afirmação (a) é verdadeira.

S15.E7. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Prove que as retas AP, BP e CP são medianas de ABC, logo P é o baricentro desse triângulo.

Solução. Seja Q o ponto de intersecção da reta BP com o segmento AC. Observamos que $\overrightarrow{QA} = \alpha \overrightarrow{CA}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (\alpha - 1)\overrightarrow{CA}.$$

Vamos provar que Q é o ponto médio de AC, ou seja, vamos provar que $\alpha = 1/2$. Escrevemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PQ} + \alpha\overrightarrow{CA},\\
\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB},\\
\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1)\overrightarrow{CA}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PQ} + (3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Além disso,

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{CB} + (1 - \alpha)\overrightarrow{CA}.$$

Agora, para algum $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\overrightarrow{PQ} = \beta\overrightarrow{BQ}.$$

Assim

$$\overrightarrow{PQ} = \beta\overrightarrow{BQ} = -\beta\overrightarrow{CB} + \beta(1 - \alpha)\overrightarrow{CA}.$$

Portanto

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta)\overrightarrow{CB}.$$

Por outro lado, temos $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Logo

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta)\overrightarrow{CB} = 0.$$

Como $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são linearmente independentes, essa igualdade implica (veja o Exercício 1 da Seção 15)

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) = 0 \qquad \text{e} \qquad 1 - 3\beta = 0.$$

A segunda equação implica $\beta = 1/3$. Substituindo esse valor de β na primeira equação, obtemos $3(1/3)(1-\alpha)+3\alpha-2 = 0$, ou seja, $\alpha = 1/2$. Portanto Q é o ponto médio de AC. As demonstrações para as medianas correspondentes aos outros vértices do triângulo são idênticas. Basta renomear os pontos.

S15.E9. Mostre que se os vetores u e v têm o mesmo comprimento então $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. E a recíproca?

Solução. Observamos que

$$\langle u+v, u-v\rangle = |u|^2 + \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle - |v|^2 = |u|^2 - |v|^2 = (|u| + |v|)(|u| - |v|).$$

Se $|u| = |v|$, então $\langle u + v, u - v\rangle = 0$. Logo $u + v$ e $u - v$ são ortogonais.

Por outro lado, se $u + v$ e $u - v$ são ortogonais, então $\langle u + v, u - v\rangle = 0$, logo $(|u| + |v|)(|u| - |v|) = 0$. Essa igualdade implica $|u| = -|v|$, o que é impossível (exceto se $u = 0$ e $v = 0$), ou $|u| = |v|$. Portanto $|u| = |v|$.

Seção 16 – Equação da Elipse

10. Quais são as tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$ que têm inclinação igual a $1/2$?

Solução. Uma reta com inclinação $1/2$ é dada por $y = (1/2)x + b$ para $b \in \mathbb{R}$. Vamos determinar os valores de b para os quais a reta $y = (1/2)x + b$ é tangente à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$, ou seja, vamos determinar os valores de b para os quais o sistema

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 32 \\ y &= (1/2)x + b \end{aligned}$$

tem apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira e desenvolvendo, obtemos

$$2x^2 + 4bx + (4b^2 - 32) = 0.$$

Essa equação possui apenas uma solução se, e somente se, o discriminante da equação é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 16^2 = 0.$$

Isso implica $b = \pm 4$. Portanto, as retas tangentes são

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

Seção 17 – Equação da Hipérbole

2. Para todo ponto $P = (m, n)$ na hipérbole $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, mostre que a reta $r : (m/a^2)x - (n/b^2)y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com H. A reta r chama-se a *tangente* a H no ponto P.

Solução. A reta r é tangente à hipérbole H no ponto P se, e somente se, $x = m$ e $y = n$ é a única solução do sistema

$$\begin{aligned} (m/a^2)x - (n/b^2)y &= 1 \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 &= 1. \end{aligned}$$

A primeira equação implica

$$x = \frac{a^2}{m}\left(1 + \frac{n}{b^2}\right).$$

Substituindo essa expressão para x na segunda equação e desenvolvendo, obtemos

$$(a^2n^2 - b^2m^2)y^2 + b^2a^22ny + b^4(a^2 - m^2) = 0.$$

Como P pertence à hipérbole, temos $a^2n^2 - b^2m^2 = -a^2b^2$. Substituindo essa expressão na equação anterior e simplificado, encontramos

$$-a^2y^2 + a^2 2ny + b^2(a^2 - m^2) = 0.$$

Calculando o discriminante Δ dessa equação quadrática, obtemos

$$\Delta = 4a^2(a^2n^2 - b^2m^2 + b^2a^2) = 4a^2(-a^2b^2 + b^2a^2) = 4a^2(0) = 0.$$

Nesse cálculo, usamos novamente que P pertence a H. Como $\Delta = 0$, a equação para y possui apenas uma solução. Associado a essa solução temos apenas um valor para x. Portanto o sistema de equações possui apenas uma solução (x, y), ou seja, a reta r é tangente à hipérbole H.

Seção 20 – Formas Quadráticas

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

1. Escreva sua matriz e sua equação característica;
2. Obtenha seus autovalores;
3. Descreva suas linhas de nível;
4. Ache autovetores unitários ortogonais u e u^*;
5. Determine os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como $A's^2 + C't^2$;
6. Ache os focos da cônica $A's^2 + C't^2 = 1$ em termos das coordenadas x e y.

As formas quadráticas são:

(a) $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

(b) $\varphi(x, y) = xy$.

(c) $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$.

(d) $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

(e) $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$.

(f) $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$.

Solução. (a) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = 1/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Tomamos $(\cos\theta, \sin\theta) = u_2$. Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}t^2 = \frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2/3}.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ é o ponto $(0,0)$. Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são elipses. Nesse caso, temos uma elipse com $c^2 = a^2 - b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{d/3}$. Portanto os focos da elipse são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-\sqrt{2d}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{3}}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{3}}\right).$$

(b) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 1/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = -1/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Tomamos $(\cos\theta, \sin\theta) = u_1$. Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}s - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2}.$$

Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm s$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d > 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{d}$. Portanto os focos da elipse são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$(-\sqrt{2d}, -\sqrt{2d}), \qquad (\sqrt{2d}, \sqrt{2d}).$$

(c) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 10\lambda = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 0$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right), \qquad u_2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

Tomamos $(\cos\theta, \sin\theta) = u_2$. Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$x = \frac{3\sqrt{10}}{10}s - \frac{\sqrt{10}}{10}t,$$
$$y = \frac{\sqrt{10}}{10}s + \frac{3\sqrt{10}}{10}t,$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = 10t^2.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ é a reta horizontal $t = 0$ que passa pela origem. Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o par de retas horizontais $t = \pm\sqrt{d/10}$. Em termos das coordenadas x e y, a reta $t = 0$ é dada por $x - 3y = 0$, e as retas $t = \pm\sqrt{d/10}$ são dadas por $x - 3y = \mp\sqrt{d}$.

(d) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 5/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = -\sqrt{5}/2$ e $\lambda_2 = \sqrt{5}/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{5}-2}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right), \qquad u_2 = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right).$$

Tomamos $(\cos\theta, \sin\theta) = u_2$. Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= as - bt, \\ y &= bs + at, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{\sqrt{5}}{2}s^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/\sqrt{5}} - \frac{t^2}{2/\sqrt{5}}.$$

Para $d = 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm s$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d > 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = 2\sqrt{d}/\sqrt{\sqrt{5}}$. Portanto os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-2\sqrt{d} - \sqrt{5d}}{\sqrt{10\sqrt{5}+20}}, \frac{-2\sqrt{d}}{\sqrt{10\sqrt{5}+20}}\right), \qquad \left(\frac{2\sqrt{d} + \sqrt{5d}}{\sqrt{10\sqrt{5}+20}}, \frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{10\sqrt{5}+20}}\right).$$

(e) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = -1 + \sqrt{5}$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{5}-2}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right), \qquad u_2 = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right).$$

Tomamos $(\cos\theta, \sin\theta) = u_2$. Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= as - bt, \\ y &= bs + at, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = \frac{s^2}{1/(-1+\sqrt{5})} + \frac{t^2}{1/(-1-\sqrt{5})}.$$

Para $d = 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm s\sqrt{3-\sqrt{5})/2}$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d > 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = \sqrt{3|d|}/2$.

Portanto os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-\sqrt{3d}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{15d}-2\sqrt{3d}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right), \quad \left(\frac{2\sqrt{3d}+\sqrt{15d}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{3d}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right)$$

(f) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 + 5\lambda - 150 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = -15$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \qquad u_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right).$$

Tomamos $(\cos\theta, \sin\theta) = u_1$. Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$x = \frac{4}{5}s - \frac{3}{5}t,$$
$$y = \frac{3}{5}s + \frac{4}{5}t,$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = 10s^2 - 15t^2 = \frac{s^2}{1/10} - \frac{t^2}{1/15}.$$

Para $d = 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são as retas $t = \pm\sqrt{2/3}s$. Para $d \neq 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são hipérboles. Em particular, para $d > 0$, temos uma hipérbole com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c = \sqrt{6d}/6$. Nesse caso, os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, no sistema s e t. Em termos das coordenadas x e y, os focos são, respectivamente,

$$\left(\frac{-4\sqrt{6d}}{30}, \frac{-3\sqrt{6d}}{30}\right), \qquad \left(\frac{4\sqrt{6d}}{30}, \frac{3\sqrt{6d}}{30}\right).$$

Seção 23 – Transformações Lineares

11. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

Solução. Seja $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ e seja M a matriz de T. Como M tem posto 2, os vetores-coluna de M são não-colineares. Se r é uma reta vertical, então r é formada pelos pontos $(x, y) = (\alpha, t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo, os pontos

$$T(x, y) = T(\alpha, t) = (a\alpha + bt, c\alpha + dt) = \alpha(a, c) + t(b, d)$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois $(b, d) \neq (0, 0)$ (caso contrário teríamos $ad - bc = 0$, o que é impossível). Se r é uma reta não-vertical, então r é o conjunto dos pontos $(x, y) = (t, \alpha t + \beta)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo, os pontos

$$T(x, y) = T(t, \alpha t + \beta) = \beta(b, d) + t\big((a, c) + \alpha(b, d)\big)$$

para $t \in \mathbb{R}$ formam uma reta, pois não existe α tal que $(a, c) + \alpha(b, d) = 0$ (caso contrário (a, c) e (b, d) seriam colineares).

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível. Mostre que T transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

Solução. Seja $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ e seja M a matriz de T. Como T é invertível, para todo $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ existe apenas um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (m, n)$. Dito de outra forma, o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Portanto as retas $ax + by = m$ e $cx + dy = n$ são concorrentes. Logo os vetores (a, b) e (c, d) são não-colineares, ou seja, $ad - bc \neq 0$. Isso implica que os vetores (a, c) e (b, d) são não-colineares, ou seja, que a matriz de M tem posto 2. Pela solução do Exercício 11, para qualquer valor de α, a transformação T mapeia a reta $x = \alpha$ em uma reta paralela ao vetor (b, d) que passa por (a, c). Isso mostra que T transforma as retas paralelas $x = \alpha$ e $x = \alpha'$ em retas paralelas ao vetor (b, d). Pela solução do Exercício 11, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a, c) + \alpha(b, d)$ que passa por (a, c). Analogamente, a transformação T mapeia a reta $y = \alpha' x + \beta$ em uma reta paralela ao vetor $(a, c) + \alpha'(b, d)$ que passa por (a, c). Como $(a, b) + \alpha(c, d)$ e $(a, c) + \alpha'(b, d)$ são vetores colineares, concluímos que T transforma retas não-verticais paralelas em retas não-verticais paralelas. Além disso, concluímos que T transforma paralelogramos em paralelogramos. A transformação T não mapeia losangos em losangos, em geral. De fato, considere o quadrado cujos vértices são os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$ (esse é um exemplo de losango). Observamos que os os vetores unitários $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$ são mapeados nos vetores (a, c) e (b, d), que não são unitários, em geral. Logo o quadrado $ABCD$ não é transformado em um quadrado, em geral.

17. Dados $u = (1, 2)$, $v = (3, 4)$, $u' = (5, 6)$ e $v' = (7, 8)$, ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.

Solução. Seja $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Procuramos constantes a, b, c e d tais que $T(1, 2) = (5, 6)$ e $T(3, 4) = (7, 8)$, ou seja, $(a + 2b, c + 2d) = (5, 6)$ e $(3a + 4b, 3c + 4d) = (7, 8)$, ou seja, $a + 2b = 5$, $c + 2d = 6$ e $3a + 4b = 7$, $3c + 4d = 8$. Obtemos portanto um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, a, b, c e d. De fato, obtemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas, desacoplados:

$$\begin{aligned} a + 2b &= 5 \qquad & c + 2d &= 6 \\ 3a + 4b &= 7 \qquad & 3c + 4d &= 8. \end{aligned}$$

Resolvendo esses sistemas, obtemos $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$ e $d = 5$. Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x, y) = (-3x + 4y, -4x + 5y).$$

Seção 24 – Coordenadas no Espaço

5. Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos $P = (2, 3, 4)$ e $Q = (1, 1, 758)$.

Solução. O plano vertical que passa por P e Q deve conter todos os pontos da forma $(2, 3, z)$ e $(1, 1, z')$ para $z \in \mathbb{R}$ e $z' \in \mathbb{R}$. Em particular, o plano vertical deve conter os pontos $P' = (2, 3, 0)$ e $Q' = (1, 1, 0)$. Além disso, observamos que o plano vertical deve conter a reta $P'Q'$. As coordenadas de P' e Q' no plano Π_{xy} são $(2, 3)$ e $(1, 1)$. Portanto $\overrightarrow{P'Q'} = (-1, -2)$ no plano Π_{xy}. O vetor $v = (2, -1)$ é ortogonal a $\overrightarrow{P'Q'}$. Logo a equação da reta $P'Q'$ no plano Π_{xy} é $2x - y = c = 2(1) - 1(1) = 1$, ou seja, $2x - y = 1$. O plano vertical que passa por P e Q é formado por todos os pontos (x, y, z) tais que $2x - y = 1$. Essa é a equação do plano.

7. Escreva a equação geral de um plano vertical.

Solução. A equação geral de um plano vertical é $ax + by = c$, onde a, b e c são números reais. De fato, o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que $ax + by = c$ forma um plano que contém o eixo OZ ou é paralelo ao eixo OZ (veja a solução do Exercício 5).

Seção 25 – As Equações Paramétricas de uma Reta

S25.E6. Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$, determine os pontos em que a reta AB corta os planos Π_{xy}, Π_{yz}, Π_{zx}.

Solução. As equações paramétricas da reta AB são $x = 1+3t$, $y = 2+3t$, $z = 3 + 3t$. Na interseção da reta com o plano Π_{xy}, temos $z = 0$, ou seja, $3 + 3t = 0$. Isso implica em $t = -1$. O ponto correspondente é $P = (-2, -1, 0)$. Na interseção da reta com o plano Π_{yz}, temos $x = 0$, ou seja, $1 + 3t = 0$. Isso implica em $t = -1/3$. O ponto correspondente é $Q = (0, 1, 2)$. Na interseção da reta com o plano Π_{zx}, temos $y = 0$, ou seja, $2 + 3t = 0$. Isso implica em $t = -2/3$. O ponto correspondente é $R = (-1, 0, 1)$.

Seção 28 – Vetores no Espaço

3. Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário, com $abc \neq 0$. Determine o valor de t de modo que, pondo $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct - 1/t)$, os vetores u, v e w sejam unitários e mutuamente ortogonais.

Solução. Como u é unitário, temos $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Observamos que $u \cdot v = 0$ e $v \cdot w = 0$ para qualquer valor de t. Por outro lado, $u \cdot w = 0$ implica $t = \pm 1/\sqrt{a^2 + b^2}$. Para esses valores de t, obtemos $\|v\|^2 = (b^2 + a^2)t^2 = 1$ e $\|w\|^2 = c^2 + a^2 + b^2 = 1$. A condição $abc \neq 0$ pode ser substituída por $a^2 + b^2 \neq 0$.

Seção 29 – Equação do Plano

2. Obtenha uma equação para o plano que contém P e é perpendicular ao segmento de reta AB nos seguintes casos:

(a) $P = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, -1, 2)$.

(b) $P = (1, 1, -2)$, $A = (3, 5, 2)$ e $B = (7, 1, 12)$.

(c) $P = (3, 3, 3)$, $A = (2, 2, 2)$ e $B = (4, 4, 4)$.

(d) $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$.

Solução. (a) Observamos que o plano é perpendicular à reta AB se e somente se o plano é perpendicular à reta OB' com $B' = (1, -3, -1)$. Logo uma equação para o plano é $x - 3y - z = d$ para alguma constante d. Como P pertence ao plano, devemos ter $1(0) - 3(0) - 1(0) = d$, ou seja, $d = 0$. Portanto uma equação do plano é $x - 3y - z = 0$.

(b) Procedendo como no item (a), obtemos a equação $4x - 4y + 10z = -20$.

(c) Procedendo como no item (a), obtemos a equação $2x + 2y + 2z = 18$.

(d) Procedendo como no item (a), obtemos a equação $(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z = (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + (z_2 - z_1)z_0$.

4. Sejam $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 3, 5)$ e $C = (1, 3, -2)$. Obtenha uma equação para o plano que contém a reta AB e o ponto C.

Solução. Procuramos um vetor $v = (a, b, c)$ tal que $\langle v, \overrightarrow{AB}\rangle = 0$ e $\langle v, \overrightarrow{AC}\rangle = 0$. Calculamos $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 3)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, 2, -4)$. Com isso obtemos o seguinte sistema de equações para (a, b, c):

$$\begin{aligned} 3a + 2b + 3c &= 0 \\ 2a + 2b - 4c &= 0. \end{aligned}$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= -3c \\ 2a + 2b &= 4c \end{aligned}$$

e resolvemos para a e b considerando c como um parâmetro. Obtemos que $(-7c, 9c, c)$ para $c \in \mathbb{R}$ são as soluções do sistema original. Em particular, o vetor $v = (-7, 9, 1)$ é solução do sistema. Portanto, uma equação do plano é $-7x + 9y + z = d$ para alguma constante d. Como A pertence ao plano, devemos ter $-7(-1) + 9(1) + 1(2) = d$, ou seja, $d = 18$. Portanto, uma equação para o plano é $-7x + 9y + z = 18$.

Seção 31 - Sistemas de Equações Lineares com Três Incógnitas

1. Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.

(a) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 3 \\ 4x - 2y + 10z &= 5 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 6x - 4y + 12z &= 2 \\ 9x - 6y + 18z &= 3 \end{aligned}$

Solução. (a) Observamos que os vetores $l_1 = (1, 2, 3)$ e $l_2 = (2, 3, 4)$ não são colineares. Logo os planos definidos pelas equações se intersectam segundo uma reta, ou seja, o sistema possui soluções. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto as soluções do sistema são $x = -2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = t$ para $t \in \mathbb{R}$.

(b) Observamos que os vetores $l_1 = (2, -1, 5)$ e $l_2 = (4, -2, 10)$ são colineares e os vetores $L_1 = (2, -1, 5, 3)$ e $L_2 = (4, -2, 10, 5)$ não são colineares. Logo os planos definidos pelas equações são paralelos, ou seja, o sistema não possui soluções.

(c) Observamos que os vetores $l_1 = (6, -4, 12)$ e $l_2 = (9, -6, 18)$ são colineares e os vetores $L_1 = (6, -4, 12, 2)$ e $L_2 = (9, -6, 18, 3)$ são colineares. Logo os planos definidos pelas equações são coincidentes, ou seja, o sistema possui soluções. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 12 & 2 \\ 9 & -6 & 18 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto as soluções do sistema são $x = 1/3 + (2/3)s - 2t$, $y = s$, $z = t$ para $s, t \in \mathbb{R}$.

Seção 41 - Mudança de Coordenadas no Espaço

1. Ache números α, β de modo que os múltiplos αm e βn das matrizes abaixo sejam matrizes ortogonais

$$m = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad n = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução. Procuramos α tal que $(\alpha m)(\alpha m)^T = I$, ou seja, $\alpha^2(mm^T) = I$. Calculando mm^T, obtemos

$$\alpha^2(mm^T) = \alpha^2 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a condição para β é $\beta^2 9 = 1$, ou seja, $\beta = \pm 1/3$.

Procuramos β tal que $(\beta n)(\beta n)^T = I$, ou seja, $\beta^2(nn^T) = I$. Calculando nn^T, obtemos

$$\beta^2(nn^T) = \beta^2 \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a condição para β é $\beta^2 49 = 1$, ou seja, $\beta = \pm 1/7$.