

## GAAL – Seção 1 – Exercício 2

**E2.S1.** Sejam  $a < x < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $X$  e  $B$  do eixo  $E$ . Diz-se que o ponto  $X$  divide o segmento  $AB$  em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente  $d(A, X)/d(A, B)$  é chamado *razão áurea*.) Supondo que  $X$  divide o segmento de reta  $AB$  em média e extrema razão, calcule  $x$  em função de  $a$  e  $b$ .

*Solução.* Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a - x|}{|a - b|} = \frac{|x - b|}{|a - x|}.$$

Como  $a < x < b$ , essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{b - x}{x - a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b - 3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é  $\Delta = 5(b - a)^2$ . Portanto as raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b - a)).$$

Usando a condição  $a < x < b$ , obtemos que  $a < x_+ < b$  e  $x_- < a$ . Logo a única raiz no intervalo  $[a, b]$  é  $x_+$ . Portanto o ponto  $X$  procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$