

Exercícios Resolvidos do Livro  
Geometria Analítica e Álgebra Linear  
de Elon Lages Lima  
(Segunda Edição–Oitava Impressão)

Gustavo de Oliveira

6 de julho de 2020

## Seção 1 – Coordenadas na Reta

**S1.E1.** Sejam  $a < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  sobre o eixo  $E$ . Determine as coordenadas dos pontos  $X_1, \dots, X_{n-1}$  que dividem o segmento  $AB$  em  $n$  partes iguais.

*Solução.* Para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , observamos que  $d(X_j, A) = jd(A, B)/n$ . Seja  $x_j$  a coordenada do ponto  $X_j$ . Então  $|x_j - a| = j|a - b|/n$ , ou seja,  $x_j - a = j(b - a)/n$ , pois  $x_j > a$  e  $b > a$ . Portanto  $x_j = a + j(b - a)/n$ , ou ainda  $x_j = (1 - j/n)a + (j/n)b$  para  $j \in \{1, \dots, n - 1\}$ .

**S1.E2.** Sejam  $a < x < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $X$  e  $B$  do eixo  $E$ . Diz-se que o ponto  $X$  divide o segmento  $AB$  em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente  $d(A, X)/d(A, B)$  é chamado *razão áurea*.) Supondo que  $X$  divide o segmento de reta  $AB$  em média e extrema razão, calcule  $x$  em função de  $a$  e  $b$ .

*Solução.* Em coordenadas, a condição corresponde a

$$\frac{|a - x|}{|a - b|} = \frac{|x - b|}{|a - x|}.$$

Como  $a < x < b$ , essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{b - x}{x - a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b - 3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é  $\Delta = 5(b - a)^2$ . Portanto as raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b - a)).$$

Usando a condição  $a < x < b$ , obtemos que  $a < x_+ < b$  e  $x_- < a$ . Logo a única raiz no intervalo  $[a, b]$  é  $x_+$ . Portanto o ponto  $X$  procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$

**S1.E3.** Se  $O$  é a origem do eixo  $E$  e  $A$  é o ponto desse eixo que tem coordenada 1. Qual é a coordenada do ponto  $X$  que divide o segmento de reta  $OA$  em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea*  $d(O, X)/d(O, A)$ .

*Solução.* O ponto  $X$  tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})0 + (\sqrt{5} - 1)1) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Calculamos  $d(O, A) = |0 - 1| = 1$ . Portanto a razão áurea é

$$\frac{d(O, X)}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

**S1.E4.** Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $X$  sobre o eixo  $E$  têm coordenadas  $a$ ,  $b$  e  $x$  respectivamente. Se  $X'$  é o simétrico de  $X$  em relação ao ponto  $A$  e  $X''$  é o simétrico de  $X'$  em relação a  $B$ , quais são as coordenadas de  $X'$  e  $X''$ ?

*Solução.* Sejam  $x'$  e  $x''$  as coordenadas de  $X'$  e  $X''$ . Como  $A$  é o ponto médio de  $XX'$ , temos  $a = (x + x')/2$ . Logo  $x' = 2a - x$ . Como  $B$  é o ponto médio de  $X'X''$ , temos  $b = (x' + x'')/2$ . Portanto  $x'' = 2b - x' = 2(b - a) + x$ .

**S1.E6.** Sejam  $a < b < c$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  situados sobre um eixo. Sabendo que  $a = 17$ ,  $c = 32$  e

$$\frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{2}{3},$$

qual é o valor de  $b$ ?

*Solução.* Usando a fórmula  $d(X, Y) = |x - y|$ , temos que

$$\frac{3}{2} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{|a - b|}{|a - c|} = \frac{|17 - b|}{|17 - 32|}.$$

Como  $b > 17$  e  $32 > 17$ , essa equação é equivalente a

$$\frac{b - 17}{32 - 17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$b = \frac{2}{3}15 + 17 = 27.$$

**S1.E7.** Qual seria a resposta do exercício anterior se soubéssemos apenas que  $a < c$ ?

*Solução.* Se soubéssemos apenas que  $a < c$ , poderíamos ter  $a < b$  ou  $a \geq b$ . Logo, além do caso  $b > 17$  considerado no item (a), teríamos o caso em que  $b \leq 17$ . Dessa forma teríamos  $|17 - b| = 17 - b$  e consequentemente

$$\frac{17 - b}{32 - 17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$-b = \frac{2}{3}15 - 17 = -7.$$

Isso implica em  $b = 7$ . Em resumo,  $b = 7$  ou  $b = 27$ .

**S1.E9.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- (i) Pondo  $f(0) = a$ , defina a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  assim:  $g(x) = f(x) - a$ . Prove então que  $|g(x)| = |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $g(1) = 1$  ou  $g(1) = -1$ . Também  $(g(x))^2 = x^2$ .
- (ii) Use a identidade  $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x - y)^2]$  para provar a igualdade  $xy = g(x)g(y)$ .
- (iii) Se  $g(1) = 1$ , mostre que  $g(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Se  $g(1) = -1$ , mostre que  $g(x) = -x$  para todo  $x$ .
- (iv) Conclua que  $f(x) = x + a$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  ou então  $f(x) = -x + a$  para todo  $x$ .

*Solução.* (i) Observamos que  $g(x) = f(x) - a = f(x) - f(0)$ . Logo  $|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sendo assim,  $|g(1)| = 1$ , o que implica  $g(1) = 1$  ou  $g(1) = -1$ . Temos também que  $g(x)^2 = |g(x)|^2 = |x|^2 = x^2$ .

(ii) Usando as definições e propriedades, calculamos

$$\begin{aligned}
 xy &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - (x - y)^2] \\
 &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - |x - y|^2] \\
 &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - f(y)|^2] \\
 &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - a - f(y) + a|^2] \\
 &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |g(x) - g(y)|^2] \\
 &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - (g(x) - g(y))^2] \\
 &= g(x)g(y).
 \end{aligned}$$

(iii) Se  $g(1) = 1$ , então  $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Se  $g(1) = -1$ , então  $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)(-1) = -g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto  $g(x) = -x$  para todo  $x$ .

(iv) Observamos que  $f(x) = g(x) + a$ . Pela parte (i), temos  $g(1) = 1$  ou  $g(1) = -1$ . Usando (iii), isso implica  $g(x) = x$  ou  $g(x) = -x$  para todo  $x$ , respectivamente. Portanto  $f(x) = x + a$  ou  $f(x) = -x + a$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Seção 2 – Coordenadas no Plano

**S2.E1.** Diz-se que o ponto  $A'$  é o simétrico do ponto  $A$  em relação à reta  $r$  quando  $r$  é a mediatriz do segmento  $AA'$ . Sabendo que  $A = (x, y)$ , determine os simétricos de  $A$  em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$ .

*Solução.* Sejam  $A'$  e  $A''$  os simétricos de  $A$  em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Fazendo uma figura, é simples verificar que  $OX$  é a mediatriz do segmento  $AA'$  com  $A' = (x, -y)$  e  $OY$  é a mediatriz do segmento  $AA''$  com  $A'' = (-x, y)$ .

**S2.E2.** O conjunto  $r$  formado pelos pontos  $(x, 5)$  cujas ordenadas são iguais a 5 é uma reta paralela ao eixo  $OX$ . Determine o simétrico do ponto  $P = (3, -2)$  em relação à reta  $r$ .

*Solução.* A reta  $s$  perpendicular a  $r$  passando por  $P$  é formada pelos pontos  $(3, y)$  cujas abscissas são iguais a 3. O ponto  $P$  está à distância  $5 - (-2) = 7$  da reta  $r$ . A intersecção da reta  $r$  com a reta  $s$  é o ponto  $(3, 5)$ . Logo o simétrico de  $P$  em relação à reta  $r$  é o ponto  $P' = (3, 5 + 7) = (3, 12)$ .

## Seção 5 – Escolhendo o Sistema de Coordenadas

**S5.E2.** O triângulo  $ABC$  é equilátero e cada lado mede  $l$ . Num sistema de coordenadas em que a origem é equidistante de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e o ponto  $C$  está sobre o eixo  $OY$ , quais são as coordenadas dos três vértices?

*Solução.* Tomando o sistema de coordenadas  $OXY$  da forma sugerida, obtemos os triângulos  $ABO$ ,  $BCO$  e  $CAO$  com  $O = (0,0)$ ,  $A = (-a, -b)$ ,  $B = (a, -b)$  e  $C = (0, c)$ . Esses três triângulos são isóceles e congruentes. Por exemplo, temos  $ABO$  com  $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$  e  $\hat{O} = 120^\circ$ . Logo

$$d(A, O) \cos 30^\circ = l/2,$$

ou seja,  $d(A, O)\sqrt{3}/2 = l/2$ , ou ainda,  $d(A, O) = l/\sqrt{3}$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Então

$$d(M, O) = d(A, O) \sin 30^\circ = (l/\sqrt{3})(1/2) = l/(2\sqrt{3}).$$

Logo

$$a = l/2,$$

$$b = d(M, O) = l/(2\sqrt{3}),$$

$$c = d(O, C) = d(O, A) = l/\sqrt{3}.$$

Portanto

$$A = \left(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2\sqrt{3}}\right), \quad B = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2\sqrt{3}}\right), \quad C = \left(0, \frac{l}{\sqrt{3}}\right).$$

## Seção 7 – As Equações da Reta

**S7.E10.** Sejam  $A = (1, 2)$ ,  $B = (2, 4)$  e  $C = (3, -1)$ . Ache as equações da mediana e da altura do triângulo  $ABC$  que partem do vértice  $A$ .

*Solução.* A mediana que parte do vértice  $A$  é o segmento  $AM$  onde  $M$  é o ponto médio do lado  $BC$ . Calculando  $M$ , obtemos  $M = (5/2, 3/2)$ . A reta que passa por  $A$  e  $M$  tem inclinação  $[(3/2) - 2]/[(5/2) - 1] = -1/3$ , ou seja, a equação dessa reta é da forma  $y = -(1/3)x + b$ . Calculando  $b$ , obtemos  $b = 7/3$ . Logo a equação da mediana  $AM$  é  $y = -(1/3)x + 7/3$ .

A reta que contém a altura do vértice  $A$  é a reta perpendicular ao lado  $BC$  passando por  $A$ . O lado  $BC$  é paralelo a  $OC'$  com  $C' = (1, -5)$ . Logo a equação da altura tem a forma  $x - 5y = b$ . Como a reta passa por  $A$ , devemos ter  $1 - 5(2) = b$ , ou seja,  $b = -9$ . Portanto a equação da altura é  $x - 5y = -9$ .

**S7.E22.** Qual é a distância entre as paralelas  $x - 3y = 4$  e  $2x - 6y = 1$ ?

*Solução.* Sejam  $r$  e  $s$  as retas definidas por  $x - 3y = 4$  e  $2x - 6y = 1$ , respectivamente. Seja  $t$  a reta perpendicular a  $r$  (e portanto a  $s$ ) que passa pela origem. Uma equação para  $t$  é  $3x + y = 0$ . Calculamos  $\{P\} = r \cap t$ , ou seja, resolvemos o sistema  $x - 3y = 4$ ,  $3x + y = 0$ . A solução desse sistema é

$x = 2/5$  e  $y = -6/5$ . Portanto  $P = (2/5, -6/5)$ . Calculamos  $\{Q\} = s \cap t$ , ou seja, resolvemos o sistema  $2x - 6y = 1$ ,  $3x + y = 0$ . A solução desse sistema é  $x = 1/20$  e  $y = -3/20$ . Portanto  $Q = (1/20, -3/20)$ . Observamos que  $d(r, s) = d(P, Q)$ . Calculando  $d(P, Q)$ , concluímos que  $d(r, s) = 7/(2\sqrt{10})$ .

**S7.E33.** Ache uma representação paramétrica para a reta  $5x - 2y = 1$ .

*Solução.* Tomamos  $x = t$  e procuramos  $y$  tal que  $5t - 2y = 1$ . Obtemos  $y = -1/2 + (5/2)t$ . Portanto  $t \mapsto (t, -1/2 + (5/2)t)$  é uma parametrização para a reta.

## Seção 9 – Distância de um Ponto a uma Reta

**S9.E2.** Qual é o raio da circunferência que tem centro em  $P = (4, 1)$  e é tangente à reta  $3x + 7y = 2$ ?

*Solução.* Seja  $Q$  o ponto em que a reta toca a circunferência. Observamos que o segmento  $PQ$  é perpendicular à reta e o comprimento de  $PQ$  é igual a distância de  $P$  à reta, que por sua vez é igual ao raio  $r$  da circunferência. Portanto

$$r = d(P, \text{reta}) = \frac{|2 - (3(4) + 7(1))|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{17}{\sqrt{58}}.$$

## Seção 10 – Área de um Triângulo

**S10.E5.** Calcule a área do triângulo cujos vértices são intersecções de duas das retas  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$  e  $2x + y = 3$ .

*Solução.* Calculamos os vértices do triângulo resolvendo sistemas de equações lineares: A intersecção das retas  $x + y = 0$  e  $x - y = 0$  é o ponto  $O = (0, 0)$ . A intersecção das retas  $x + y = 0$  e  $2x + y = 3$  é o ponto  $A = (3, -3)$ . A intersecção das retas  $x - y = 0$  e  $2x + y = 3$  é o ponto  $B = (1, 1)$ . Portanto

$$\text{Área}_{OAB} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1-0 & 3-0 \\ 1-0 & -3-0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-3-3| = 3.$$

## Seção 12 – Equação da Circunferência

**S12.E4.** Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos  $A = (1, 2)$ ,  $B = (3, 4)$  e tem o centro sobre o eixo  $OY$ ?

*Solução.* Como o centro da circunferência está sobre o eixo  $OY$ , a equação da circunferência tem a forma  $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Como  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência, devemos ter

$$\begin{aligned}1 + (2 - b)^2 &= r^2 \\9 + (4 - b)^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos  $b = 5$  e  $r = \sqrt{10}$ . Portanto a equação da circunferência é  $x^2 + (y - 5)^2 = 10$ .

**S12.E5.** Escreva a equação da circunferência que tem centro no ponto  $P = (2, 5)$  e é tangente à reta  $y = 3x + 1$ .

*Solução.* A reta tem equação  $3x - y = -1$ . Logo

$$d(P, \text{reta}) = \frac{|-1 - (3(2) + (-1)5)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Portanto a equação da circunferência é  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 2/5$ .

**S12.E9.** A tangente, no ponto  $P$ , à circunferência de centro  $O$  e raio 3 é paralela à reta  $y = -2x + 1$ . Quais são as coordenadas de  $P$ ? E se o raio da circunferência fosse 5?

*Solução.* Primeiro, procuramos  $b$  tal que  $r : 2x + y = b$  passe por  $P$  (note que  $r$  é paralela à reta  $y = -2x + 1$ ). Calculamos

$$d(O, r) = \frac{|b - (2(0) + 1(0))|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}.$$

Suponha que  $d(O, r) = \rho$  (onde  $\rho$  é conhecida). Então  $|b|/\sqrt{5} = \rho$ . Logo  $b = \pm\rho\sqrt{5}$ .

Agora, observamos que  $P$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com a reta  $-x + 2y = 0$  (que é a reta perpendicular a  $r$  passando por  $O$ ). Calculando o ponto  $P$ , obtemos

$$P = \left(\frac{2b}{5}, \frac{b}{5}\right) = \left(\pm 2\rho\frac{\sqrt{5}}{5}, \pm\rho\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Portanto, se  $\rho = 3$  temos

$$P = \left(\pm \frac{5\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}\right),$$

e se  $\rho = 5$  obtemos

$$P = (\pm 2\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}).$$

## Seção 13 – Reconhecimento da Equação da Circunferência

**S13.E4.** Completando os quadrados, decida se cada uma das equações abaixo define uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio:

(a)  $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 1 = 0$ .

(b)  $-x^2 - y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$ .

(c)  $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$ .

(d)  $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 21 = 0$ .

*Solução.* (a) Completando os quadrados, obtemos

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Portanto a equação define uma circunferência.

(b) Completando os quadrados, obtemos

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4^2.$$

Portanto a equação define uma circunferência.

(c) Completando os quadrados, obtemos

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 0.$$

Portanto a equação define um ponto.

(d) Completando os quadrados, obtemos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = -4.$$

Portanto a equação define o conjunto vazio.

## Seção 14 – Vetores no Plano

**S14.E2.** Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

*Solução.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que o quadrilátero (com vértices consecutivos)  $ABCD$  é um paralelogramo. Então  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ . Além disso, existem constantes  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{DC}$  e  $\overrightarrow{AD} = \beta \overrightarrow{BC}$ . Logo  $\overrightarrow{AB} = -\alpha \overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{DA} = -\beta \overrightarrow{BC}$ . Portanto  $-\alpha \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \beta \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ ,



ou seja,  $(1 - \alpha)\overrightarrow{CD} + (1 - \beta)\overrightarrow{BC} = 0$ . Como  $ABCD$  é um quadrilátero, os vetores  $\overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{BC}$  não são colineares. Logo a última igualdade implica  $1 - \alpha = 0$  e  $1 - \beta = 0$ , isto é,  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ . Portanto  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  e  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Agora, temos duas relações que envolvem as diagonais do paralelogramo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= 0, \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} &= 0.\end{aligned}$$

Vamos eliminar dessas equações os vetores correspondentes aos lados do quadrilátero escrevendo-os em termos das direções diagonais. Usando as relações acima, obtemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= 0, \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} &= 0.\end{aligned}$$

Somando as duas igualdades, chegamos a

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = 0.$$

Como  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  não são colineares, as retas  $AC$  e  $BD$  que contêm as diagonais são concorrentes em um ponto  $M$ . Sejam  $\lambda$  e  $\gamma$  constantes tais que  $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{MB} = \gamma\overrightarrow{DB}$ . Calculamos

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} &= 0 \\ 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} &= 0 \\ 2(\lambda\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{DB}) - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} &= 0 \\ (2\lambda - 1)\overrightarrow{AC} + (2\gamma - 1)\overrightarrow{DB} &= 0.\end{aligned}$$

Essa igualdade implica  $2\lambda - 1 = 0$  e  $2\gamma - 1 = 0$ , ou seja,  $\lambda = 1/2$  e  $\gamma = 1/2$ , como queríamos provar.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que as diagonais de  $ABCD$  se bissectam em um ponto  $M$ . Então  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$  e  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$ . Mas  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$  e  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}$ . Logo  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ . Analogamente provamos que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Portanto  $ABCD$  é um paralelogramo.

## Seção 15 – Operações com Vetores

**S15.E1.** Dados os vetores  $u$  e  $v$ , prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) Uma combinação linear  $\alpha u + \beta v$  só pode ser igual a zero quando  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ .

(b) Se  $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$ , então  $\alpha = \alpha'$  e  $\beta = \beta'$ .

(c) Nenhum dos vetores  $u$  e  $v$  é múltiplo do outro.

(d) Para  $u = (a, b)$  e  $v = (a', b')$ , temos  $ab' - a'b \neq 0$ .

(e) Todo vetor do plano é combinação linear de  $u$  e  $v$ .

(Neste exercício, devem ser provadas as implicações  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$ .)

*Solução.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Suponha (a), ou seja, suponha que  $\alpha u + \beta v = 0$  implica  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ . Se  $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$ , então  $(\alpha - \alpha')u + (\beta - \beta')v = 0$ . Logo (a) implica  $\alpha - \alpha' = 0$  e  $\beta - \beta' = 0$ , ou seja,  $\alpha = \alpha'$  e  $\beta = \beta'$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c). Vamos provar que  $\neg(c)$  implica  $\neg(b)$ . Se existe  $\lambda$  tal que  $u = \lambda v$ , então  $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$  com  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -\lambda$ ,  $\alpha' = 0$  e  $\beta' = 0$ , onde  $\alpha \neq \alpha'$  e  $\beta \neq \beta'$ , ou seja, a afirmação  $\neg(b)$  é verdadeira.

(c)  $\Rightarrow$  (d). Vamos provar que  $\neg(d)$  implica  $\neg(c)$ . Suponha  $ab' - a'b = 0$ . Se  $a = a' = b = b'$ , então  $u = 0$  e  $v = 0$ , e portanto  $u = \lambda v$  para todo  $\lambda$ , ou seja, a afirmação  $\neg(c)$  é verdadeira. Se  $a = b = 0$ , então  $u = 0$ , e portanto  $u = 0v$ . Logo  $\neg(c)$  é verdadeira. Se  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , então  $b'/b = a'/a = \lambda$  em que  $\lambda$  é uma constante. Logo  $a' = \lambda a$  e  $b' = \lambda b$ , ou seja,  $(a', b') = \lambda(a, b)$ , ou seja  $v = \lambda u$ , ou seja, a afirmação  $\neg(c)$  é verdadeira.

(d)  $\Rightarrow$  (e). Sejam  $u = (a, b)$ ,  $v = (a', b')$  e  $w = (\gamma, \delta)$ . Então a equação  $w = xu + yv$  é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + a'y &= \gamma \\ bx + b'y &= \delta. \end{aligned}$$

Como  $ab' - a'b \neq 0$ , esse sistema possui apenas uma solução. De fato, a solução é

$$x = \frac{b'\gamma - a'\delta}{b'a - a'b}, \quad y = \frac{b\gamma - a\delta}{ba' - ab'}.$$

(e)  $\Rightarrow$  (a). Suponha (e). Então, em particular, o vetor  $0$  é combinação de  $u$  e  $v$ . Logo  $xu + yv = 0$  para  $x$  e  $y$  únicos. Como  $x = 0$  e  $y = 0$  é solução desse sistema, essa deve ser a única solução, ou seja, a afirmação (a) é verdadeira.

**S15.E7.** Seja  $P$  um ponto interior ao triângulo  $ABC$  tal que  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$ . Prove que as retas  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  são medianas de  $ABC$ , logo  $P$  é o baricentro desse triângulo.

*Solução.* Seja  $Q$  o ponto de intersecção da reta  $BP$  com o segmento  $AC$ . Observamos que  $\overrightarrow{QA} = \alpha \overrightarrow{CA}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Logo

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (\alpha - 1)\overrightarrow{CA}.$$

Vamos provar que  $Q$  é o ponto médio de  $AC$ , ou seja, vamos provar que  $\alpha = 1/2$ . Escrevemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PQ} + \alpha \overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA}.\end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PQ} + (3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Além disso,

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{CB} + (1 - \alpha)\overrightarrow{CA}.$$

Agora, para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ , temos

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ}.$$

Assim

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ} = -\beta \overrightarrow{CB} + \beta(1 - \alpha)\overrightarrow{CA}.$$

Portanto

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta)\overrightarrow{CB}.$$

Por outro lado, temos  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$ . Logo

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2)\overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta)\overrightarrow{CB} = 0.$$

Como  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  são linearmente independentes, essa igualdade implica (veja o Exercício 1 da Seção 15)

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) = 0 \quad \text{e} \quad 1 - 3\beta = 0.$$

A segunda equação implica  $\beta = 1/3$ . Substituindo esse valor de  $\beta$  na primeira equação, obtemos  $3(1/3)(1 - \alpha) + 3\alpha - 2 = 0$ , ou seja,  $\alpha = 1/2$ . Portanto  $Q$  é o ponto médio de  $AC$ . As demonstrações para as medianas correspondentes aos outros vértices do triângulo são idênticas. Basta renomear os pontos.

**S15.E9.** Mostre que se os vetores  $u$  e  $v$  têm o mesmo comprimento então  $u + v$  e  $u - v$  são ortogonais. E a recíproca?

*Solução.* Observamos que

$$\langle u + v, u - v \rangle = |u|^2 + \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle - |v|^2 = |u|^2 - |v|^2 = (|u| + |v|)(|u| - |v|).$$

Se  $|u| = |v|$ , então  $\langle u + v, u - v \rangle = 0$ . Logo  $u + v$  e  $u - v$  são ortogonais.

Por outro lado, se  $u + v$  e  $u - v$  são ortogonais, então  $\langle u + v, u - v \rangle = 0$ , logo  $(|u| + |v|)(|u| - |v|) = 0$ . Essa igualdade implica  $|u| = -|v|$ , o que é impossível (exceto se  $u = 0$  e  $v = 0$ ), ou  $|u| = |v|$ . Portanto  $|u| = |v|$ .

## Seção 16 – Equação da Elipse

**S16.E10.** Quais são as tangentes à elipse  $x^2 + 4y^2 = 32$  que têm inclinação igual a  $1/2$ ?

*Solução.* Uma reta com inclinação  $1/2$  é dada por  $y = (1/2)x + b$  para  $b \in \mathbb{R}$ . Vamos determinar os valores de  $b$  para os quais essa reta é tangente à elipse  $x^2 + 4y^2 = 32$ , ou seja, vamos determinar os valores de  $b$  para os quais o sistema

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 &= 32 \\ y &= (1/2)x + b\end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Substituindo a segunda equação da primeira e desenvolvendo, obtemos

$$2x^2 + 4bx + (4b^2 - 32) = 0.$$

Essa equação possui apenas uma solução se e somente se o discriminante da equação é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 16^2 = 0.$$

Isso implica  $b = \pm 4$ . Portanto, as retas tangentes à elipse são

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

## Seção 17 – Equação da Hipérbole

**S17.E2.** Para todo ponto  $P = (m, n)$  na hipérbole  $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ , mostre que a reta  $r : (m/a^2)x - (n/b^2)y = 1$  tem apenas o ponto  $P$  em comum com  $H$ . A reta  $r$  chama-se a *tangente* a  $H$  no ponto  $P$ .

*Solução.* A reta  $r$  é tangente à hipérbole  $H$  no ponto  $P$  se e somente se  $x = m$  e  $y = n$  é a única solução do sistema

$$\begin{aligned}(m/a^2)x - (n/b^2)y &= 1 \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 &= 1.\end{aligned}$$

A primeira equação implica

$$x = \frac{a^2}{m} \left( 1 + \frac{n}{b^2} y \right).$$

Substituindo essa expressão para  $x$  na segunda equação e desenvolvendo, obtemos

$$(a^2 n^2 - b^2 m^2) y^2 + b^2 a^2 2ny + b^4 (a^2 - m^2) = 0.$$

Como  $P$  pertence à hipérbole, temos  $a^2n^2 - b^2m^2 = -a^2b^2$ . Substituindo essa expressão na equação anterior e simplificado, encontramos

$$-a^2y^2 + a^22ny + b^2(a^2 - m^2) = 0.$$

Calculando o discriminante  $\Delta$  dessa equação quadrática, obtemos

$$\Delta = 4a^2(a^2n^2 - b^2m^2 + b^2a^2) = 4a^2(-a^2b^2 + b^2a^2) = 4a^2(0) = 0.$$

Nesse cálculo, usamos novamente que  $P$  pertence a  $H$ . Como  $\Delta = 0$ , a equação para  $y$  possui apenas uma solução. Associado a essa solução temos apenas um valor para  $x$ . Portanto o sistema de equações possui apenas uma solução  $(x, y)$ , ou seja, a reta  $r$  é tangente à hipérbole  $H$ .

## Seção 20 – Formas Quadráticas

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

1. Escreva sua matriz e sua equação característica;
2. Obtenha seus autovalores;
3. Descreva suas linhas de nível;
4. Ache autovetores unitários ortogonais  $u$  e  $u^*$ ;
5. Determine os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como  $A's^2 + C't^2$ ;
6. Ache os focos da cônica  $A's^2 + C't^2 = 1$  em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ .

As formas quadráticas são:

(a)  $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$ .

(b)  $\varphi(x, y) = xy$ .

(c)  $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$ .

(d)  $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$ .

(e)  $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$ .

(f)  $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$ .

*Solução.* (a) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = 3/2$  e  $\lambda_2 = 1/2$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad u_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Tomamos  $(\cos \theta, \sin \theta) = u_2$ . Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}t^2 = \frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2/3}.$$

Para  $d < 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são o conjunto vazio. Para  $d = 0$ , a linha de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  é o ponto  $(0, 0)$ . Para  $d > 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são elipses. Nesse caso, temos uma elipse com  $c^2 = a^2 - b^2$ , ou seja,  $c = 2\sqrt{d/3}$ . Portanto os focos da elipse são  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , no sistema  $s$  e  $t$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , os focos são, respectivamente,

$$\left( \frac{-\sqrt{2d}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{3}} \right), \quad \left( \frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{3}} \right).$$

(b) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 - 1/4 = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = -1/2$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad u_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Tomamos  $(\cos \theta, \sin \theta) = u_1$ . Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}s - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2}.$$

Para  $d = 0$ , a linha de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são as retas  $t = \pm s$ . Para  $d \neq 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são hipérbolas. Em particular, para  $d > 0$ , temos uma hipérbole com  $c^2 = a^2 + b^2$ , ou seja,  $c = 2\sqrt{d}$ . Portanto os focos da elipse são  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , no sistema  $s$  e  $t$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , os focos são, respectivamente,

$$(-\sqrt{2d}, -\sqrt{2d}), \quad (\sqrt{2d}, \sqrt{2d}).$$

(c) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 - 10\lambda = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = 10$  e  $\lambda_2 = 0$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left( \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10} \right), \quad u_2 = \left( \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right).$$

Tomamos  $(\cos \theta, \sin \theta) = u_2$ . Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\sqrt{10}}{10}s - \frac{\sqrt{10}}{10}t, \\ y &= \frac{\sqrt{10}}{10}s + \frac{3\sqrt{10}}{10}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = 10t^2.$$

Para  $d < 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são o conjunto vazio. Para  $d = 0$ , a linha de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  é a reta horizontal  $t = 0$  que passa pela origem. Para  $d > 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são o par de retas horizontais  $t = \pm\sqrt{d/10}$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , a reta  $t = 0$  é dada por  $x - 3y = 0$ , e as retas  $t = \pm\sqrt{d/10}$  são dadas por  $x - 3y = \mp\sqrt{d}$ .

(d) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 - 5/4 = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = -\sqrt{5}/2$  e  $\lambda_2 = \sqrt{5}/2$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{5} - 2}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}} \right), \quad u_2 = \left( \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}} \right).$$

Tomamos  $(\cos \theta, \sin \theta) = u_2$ . Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}x &= as - bt, \\y &= bs + at,\end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = \frac{\sqrt{5}}{2}s^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/\sqrt{5}} - \frac{t^2}{2/\sqrt{5}}.$$

Para  $d = 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são as retas  $t = \pm s$ . Para  $d \neq 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são hipérboles. Em particular, para  $d > 0$ , temos uma hipérbole com  $c^2 = a^2 + b^2$ , ou seja,  $c = 2\sqrt{d}/\sqrt{\sqrt{5}}$ . Portanto os focos da hipérbole são  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , no sistema  $s$  e  $t$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , os focos são, respectivamente,

$$\left( \frac{-2\sqrt{d} - \sqrt{5d}}{\sqrt{10\sqrt{5} + 20}}, \frac{-2\sqrt{d}}{\sqrt{10\sqrt{5} + 20}} \right), \quad \left( \frac{2\sqrt{d} + \sqrt{5d}}{\sqrt{10\sqrt{5} + 20}}, \frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{10\sqrt{5} + 20}} \right).$$

(e) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5}$  e  $\lambda_2 = -1 + \sqrt{5}$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{5} - 2}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}} \right), \quad u_2 = \left( \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}} \right).$$

Tomamos  $(\cos \theta, \sin \theta) = u_2$ . Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}x &= as - bt, \\y &= bs + at,\end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = \frac{s^2}{1/(-1 + \sqrt{5})} + \frac{t^2}{1/(-1 - \sqrt{5})}.$$

Para  $d = 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são as retas  $t = \pm s\sqrt{(3 - \sqrt{5})/2}$ . Para  $d \neq 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são hipérboles. Em particular, para  $d > 0$ , temos uma hipérbole com  $c^2 = a^2 + b^2$ , ou seja,  $c = \sqrt{3|d|}/2$ .



Portanto os focos da hipérbole são  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$  no sistema  $s$  e  $t$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , os focos são, respectivamente,

$$\left( \frac{-\sqrt{3d}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{-\sqrt{15d-2\sqrt{3d}}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right), \quad \left( \frac{2\sqrt{3d} + \sqrt{15d}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{3d}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right)$$

(f) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 + 5\lambda - 150 = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = 10$  e  $\lambda_2 = -15$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u_1 = \left( \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right), \quad u_2 = \left( \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right).$$

Tomamos  $(\cos \theta, \sin \theta) = u_1$ . Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{5}s - \frac{3}{5}t, \\ y &= \frac{3}{5}s + \frac{4}{5}t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = 10s^2 - 15t^2 = \frac{s^2}{1/10} - \frac{t^2}{1/15}.$$

Para  $d = 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são as retas  $t = \pm\sqrt{2/3}s$ . Para  $d \neq 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são hipérbolas. Em particular, para  $d > 0$ , temos uma hipérbole com  $c^2 = a^2 + b^2$ , ou seja,  $c = \sqrt{6d}/6$ . Nesse caso, os focos da hipérbole são  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , no sistema  $s$  e  $t$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , os focos são, respectivamente,

$$\left( \frac{-4\sqrt{6d}}{30}, \frac{-3\sqrt{6d}}{30} \right), \quad \left( \frac{4\sqrt{6d}}{30}, \frac{3\sqrt{6d}}{30} \right).$$

## Seção 23 – Transformações Lineares

**S23.E11.** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

*Solução.* Seja  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  e seja  $M$  a matriz de  $T$ . Como  $M$  tem posto 2, os vetores-coluna de  $M$  são não-colineares. Se  $r$  é uma reta

vertical, então  $r$  é formada pelos pontos  $(x, y) = (\alpha, t)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, os pontos

$$T(x, y) = T(\alpha, t) = (a\alpha + bt, c\alpha + dt) = \alpha(a, c) + t(b, d)$$

para  $t \in \mathbb{R}$  formam uma reta, pois  $(b, d) \neq (0, 0)$  (caso contrário teríamos  $ad - bc = 0$ , o que é impossível). Se  $r$  é uma reta não-vertical, então  $r$  é o conjunto dos pontos  $(x, y) = (t, \alpha t + \beta)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, os pontos

$$T(x, y) = T(t, \alpha t + \beta) = \beta(b, d) + t((a, c) + \alpha(b, d))$$

para  $t \in \mathbb{R}$  formam uma reta, pois não existe  $\alpha$  tal que  $(a, c) + \alpha(b, d) = 0$  (caso contrário  $(a, c)$  e  $(b, d)$  seriam colineares).

**S23.E15.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear invertível. Mostre que  $T$  transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

*Solução.* Seja  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  e seja  $M$  a matriz de  $T$ . Como  $T$  é invertível, para todo  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$  existe apenas um vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (m, n)$ . Dito de outra forma, o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Portanto as retas  $ax + by = m$  e  $cx + dy = n$  são concorrentes. Logo os vetores  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são não-colineares, ou seja,  $ad - bc \neq 0$ . Isso implica que os vetores  $(a, c)$  e  $(b, d)$  são não-colineares, ou seja, que a matriz de  $M$  tem posto 2. Pela solução do Exercício S23.E11, para qualquer valor de  $\alpha$ , a transformação  $T$  mapeia a reta  $x = \alpha$  em uma reta paralela ao vetor  $(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Isso mostra que  $T$  transforma as retas paralelas  $x = \alpha$  e  $x = \alpha'$  em retas paralelas ao vetor  $(b, d)$ . Pela solução do Exercício S23.E11, a transformação  $T$  mapeia a reta  $y = \alpha x + \beta$  em uma reta paralela ao vetor  $(a, c) + \alpha(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Analogamente, a transformação  $T$  mapeia a reta  $y = \alpha'x + \beta$  em uma reta paralela ao vetor  $(a, c) + \alpha'(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Como  $(a, b) + \alpha(c, d)$  e  $(a, c) + \alpha'(b, d)$  são vetores colineares, concluímos que  $T$  transforma retas não-verticais paralelas em retas não-verticais paralelas. Além disso, concluímos que  $T$  transforma paralelogramos em paralelogramos. A transformação  $T$  não mapeia losangos em losangos, em geral. De fato, considere o quadrado cujos vértices são os pontos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  e  $D = (0, 1)$  (esse é um exemplo de losango). Observamos que os vetores unitários  $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$  e  $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$  são mapeados nos vetores  $(a, c)$  e  $(b, d)$ , que não são unitários, em geral. Logo o quadrado  $ABCD$  não é transformado em um quadrado, em geral.

**S23.E17.** Dados  $u = (1, 2)$ ,  $v = (3, 4)$ ,  $u' = (5, 6)$  e  $v' = (7, 8)$ , ache uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $Tu = u'$  e  $Tv = v'$ .

*Solução.* Seja  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Procuramos constantes  $a, b, c$  e  $d$  tais que  $T(1, 2) = (5, 6)$  e  $T(3, 4) = (7, 8)$ , ou seja,  $(a + 2b, c + 2d) = (5, 6)$  e  $(3a + 4b, 3c + 4d) = (7, 8)$ , ou seja,  $a + 2b = 5$ ,  $c + 2d = 6$  e  $3a + 4b = 7$ ,  $3c + 4d = 8$ . Obtemos portanto um sistema de quatro equações e quatro incógnitas,  $a, b, c$  e  $d$ . De fato, obtemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas, desacoplados:

$$\begin{array}{rcl} a + 2b & = & 5 \\ 3a + 4b & = & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} c + 2d & = & 6 \\ 3c + 4d & = & 8. \end{array}$$

Resolvendo esses sistemas, encontramos  $a = -3$ ,  $b = 4$ ,  $c = -4$  e  $d = 5$ . Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x, y) = (-3x + 4y, -4x + 5y).$$

## Seção 24 – Coordenadas no Espaço

**S24.E5.** Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos  $P = (2, 3, 4)$  e  $Q = (1, 1, 758)$ .

*Solução.* O plano vertical que passa por  $P$  e  $Q$  deve conter todos os pontos da forma  $(2, 3, z)$  e  $(1, 1, z')$  para  $z \in \mathbb{R}$  e  $z' \in \mathbb{R}$ . Em particular, o plano vertical deve conter os pontos  $P' = (2, 3, 0)$  e  $Q' = (1, 1, 0)$ . Além disso, observamos que o plano vertical deve conter a reta  $\overline{P'Q'}$ . As coordenadas de  $P'$  e  $Q'$  no plano  $\Pi_{xy}$  são  $(2, 3)$  e  $(1, 1)$ . Portanto  $\overrightarrow{P'Q'} = (-1, -2)$  no plano  $\Pi_{xy}$ . O vetor  $v = (2, -1)$  é ortogonal a  $\overrightarrow{P'Q'}$ . Logo a equação da reta  $P'Q'$  no plano  $\Pi_{xy}$  é  $2x - y = c = 2(1) - 1(1) = 1$ , ou seja,  $2x - y = 1$ . Portanto, o plano vertical que passa por  $P$  e  $Q$  é formado por todos os pontos  $(x, y, z)$  tais que  $2x - y = 1$ .

**S24.E7.** Escreva a equação geral de um plano vertical.

*Solução.* A equação geral de um plano vertical é  $ax + by = c$ , onde  $a, b$  e  $c$  são números reais. De fato, o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  tais que  $ax + by = c$  forma um plano que contém o eixo  $OZ$  ou é paralelo ao eixo  $OZ$  (veja a solução do Exercício S24.E5).

## Seção 25 – As Equações Paramétricas de uma Reta

**S25.E6.** Dados  $A = (1, 2, 3)$  e  $B = (4, 5, 6)$ , determine os pontos em que a reta  $AB$  corta os planos  $\Pi_{xy}$ ,  $\Pi_{yz}$ ,  $\Pi_{zx}$ .

*Solução.* As equações paramétricas da reta  $AB$  são  $x = 1 + 3t$ ,  $y = 2 + 3t$ ,  $z = 3 + 3t$ . Na interseção da reta com o plano  $\Pi_{xy}$ , temos  $z = 0$ , ou seja,  $3 + 3t = 0$ . Isso implica em  $t = -1$ . O ponto correspondente é  $P = (-2, -1, 0)$ . Na interseção da reta com o plano  $\Pi_{yz}$ , temos  $x = 0$ , ou seja,  $1 + 3t = 0$ . Isso implica em  $t = -1/3$ . O ponto correspondente é  $Q = (0, 1, 2)$ . Na interseção da reta com o plano  $\Pi_{zx}$ , temos  $y = 0$ , ou seja,  $2 + 3t = 0$ . Isso implica em  $t = -2/3$ . O ponto correspondente é  $R = (-1, 0, 1)$ .

## Seção 28 – Vetores no Espaço

**S28.E3.** Seja  $u = (a, b, c)$  um vetor unitário, com  $abc \neq 0$ . Determine o valor de  $t$  de modo que, pondo  $v = (-bt, at, 0)$  e  $w = (act, bct - 1/t)$ , os vetores  $u$ ,  $v$  e  $w$  sejam unitários e mutuamente ortogonais.

*Solução.* Como  $u$  é unitário, temos  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Observamos que  $u \cdot v = 0$  e  $v \cdot w = 0$  para qualquer valor de  $t$ . Por outro lado,  $u \cdot w = 0$  implica  $t = \pm 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ . Para esses valores de  $t$ , obtemos  $\|v\|^2 = (b^2 + a^2)t^2 = 1$  e  $\|w\|^2 = c^2 + a^2 + b^2 = 1$ . A condição  $abc \neq 0$  pode ser substituída por  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

## Seção 29 – Equação do Plano

**S29.E2.** Obtenha uma equação para o plano que contém o ponto  $P$  e é perpendicular ao segmento de reta  $AB$  nos seguintes casos:

- (a)  $P = (0, 0, 0)$ ,  $A = (1, 2, 3)$  e  $B = (2, -1, 2)$ .
- (b)  $P = (1, 1, -2)$ ,  $A = (3, 5, 2)$  e  $B = (7, 1, 12)$ .
- (c)  $P = (3, 3, 3)$ ,  $A = (2, 2, 2)$  e  $B = (4, 4, 4)$ .
- (d)  $P = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$ .

*Solução.* (a) Observamos que o plano é perpendicular à reta  $AB$  se e somente se o plano é perpendicular à reta  $OB'$  com  $B' = (1, -3, -1)$ . Logo uma equação para o plano é  $x - 3y - z = d$  para alguma constante  $d$ . Como  $P$  pertence ao plano, devemos ter  $1(0) - 3(0) - 1(0) = d$ , ou seja,  $d = 0$ . Portanto uma equação do plano é  $x - 3y - z = 0$ .

- (b) Procedendo como no item (a), obtemos a equação  $4x - 4y + 10z = -20$ .
- (c) Procedendo como no item (a), obtemos a equação  $2x + 2y + 2z = 18$ .
- (d) Procedendo como no item (a), obtemos a equação

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z = (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + (z_2 - z_1)z_0.$$

4. Sejam  $A = (-1, 1, 2)$ ,  $B = (2, 3, 5)$  e  $C = (1, 3, -2)$ . Obtenha uma equação para o plano que contém a reta  $AB$  e o ponto  $C$ .

*Solução.* Procuramos um vetor  $v = (a, b, c)$  tal que  $\langle v, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$  e  $\langle v, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$ . Calculamos  $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 3)$  e  $\overrightarrow{AC} = (2, 2, -4)$ . Com isso obtemos o seguinte sistema de equações para  $(a, b, c)$ :

$$\begin{aligned} 3a + 2b + 3c &= 0 \\ 2a + 2b - 4c &= 0. \end{aligned}$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= -3c \\ 2a + 2b &= 4c \end{aligned}$$

e resolvemos para  $a$  e  $b$  considerando  $c$  como um parâmetro. Obtemos que  $(-7c, 9c, c)$  para  $c \in \mathbb{R}$  são as soluções do sistema original. Em particular, o vetor  $v = (-7, 9, 1)$  é solução do sistema. Portanto, uma equação do plano é  $-7x + 9y + z = d$  para alguma constante  $d$ . Como  $A$  pertence ao plano, devemos ter  $-7(-1) + 9(1) + 1(2) = d$ , ou seja,  $d = 18$ . Portanto, uma equação para o plano é  $-7x + 9y + z = 18$ .

## Seção 31 - Sistemas de Equações Lineares com Três Incógnitas

1. Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{array} & \begin{array}{l} \text{(b)} \\ 2x - y + 5z = 3 \\ 4x - 2y + 10z = 5 \end{array} & \begin{array}{l} \text{(c)} \\ 6x - 4y + 12z = 2 \\ 9x - 6y + 18z = 3 \end{array} \end{array}$$

*Solução.* (a) Observamos que os vetores  $l_1 = (1, 2, 3)$  e  $l_2 = (2, 3, 4)$  não são colineares. Logo os planos definidos pelas equações se intersectam segundo uma reta, ou seja, o sistema possui soluções. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto as soluções do sistema são  $x = -2 + t$ ,  $y = 3 - 2t$ ,  $z = t$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

(b) Observamos que os vetores  $l_1 = (2, -1, 5)$  e  $l_2 = (4, -2, 10)$  são colineares e os vetores  $L_1 = (2, -1, 5, 3)$  e  $L_2 = (4, -2, 10, 5)$  não são colineares. Logo os planos definidos pelas equações são paralelos, ou seja, o sistema não possui soluções.

(c) Observamos que os vetores  $l_1 = (6, -4, 12)$  e  $l_2 = (9, -6, 18)$  são colineares e os vetores  $L_1 = (6, -4, 12, 2)$  e  $L_2 = (9, -6, 18, 3)$  são colineares. Logo os planos definidos pelas equações são coincidentes, ou seja, o sistema possui soluções. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 12 & 2 \\ 9 & -6 & 18 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto as soluções do sistema são  $x = 1/3 + (2/3)s - 2t$ ,  $y = s$ ,  $z = t$  para  $s, t \in \mathbb{R}$ .

## Seção 41 - Mudança de Coordenadas no Espaço

1. Ache números  $\alpha$ ,  $\beta$  de modo que os múltiplos  $\alpha m$  e  $\beta n$  das matrizes abaixo sejam matrizes ortogonais

$$m = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Solução.* Procuramos  $\alpha$  tal que  $(\alpha m)(\alpha m)^T = I$ , ou seja,  $\alpha^2(mm^T) = I$ . Calculando  $mm^T$ , obtemos

$$\alpha^2(mm^T) = \alpha^2 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a condição para  $\beta$  é  $\beta^2 9 = 1$ , ou seja,  $\beta = \pm 1/3$ .

Procuramos  $\beta$  tal que  $(\beta n)(\beta n)^T = I$ , ou seja,  $\beta^2(nn^T) = I$ . Calculando  $nn^T$ , obtemos

$$\beta^2(nn^T) = \beta^2 \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a condição para  $\beta$  é  $\beta^2 49 = 1$ , ou seja,  $\beta = \pm 1/7$ .