

GAAL – Seção 1 – Exercício 2

Exercício (E2.S1). Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A , X e B do eixo E . Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente $d(A, X)/d(A, B)$ é chamado *razão áurea*.) Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b .

Solução. Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a - x|}{|a - b|} = \frac{|x - b|}{|a - x|}.$$

Como $a < x < b$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{b - x}{x - a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b - 3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = 5(b - a)^2$. Portanto as raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b - a)).$$

Usando a condição $a < x < b$, obtemos que $a < x_+ < b$ e $x_- < a$. Logo a única raiz no intervalo $[a, b]$ é x_+ . Portanto o ponto X procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$

□