

Soluções do Livro
Geometria Analítica e Álgebra Linear
de Elon Lages Lima
Segunda Edição—Oitava Impressão

Gustavo de Oliveira

20 de abril de 2021

Sumário

1	Seção 1 – Coordenadas na reta	1
---	-------------------------------	---

1 Seção 1 – Coordenadas na reta

E1.S1. Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E . Determine as coordenadas dos pontos X_1, \dots, X_{n-1} que dividem o segmento AB em n partes iguais.

Solução. O comprimento de cada parte do intervalo é $l = d(A, B)/n$. Para $j \in \{1, \dots, n-1\}$, observamos que $d(X_j, A) = jl$. Seja x_j a coordenada do ponto X_j . Então $|x_j - a| = j|a - b|/n$, ou seja, $x_j - a = j(b - a)/n$, pois $x_j > a$ e $b > a$. Portanto $x_j = a + j(b - a)/n$ ou ainda $x_j = (1 - j/n)a + (j/n)b$ para $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

E2.S1. Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A , X e B do eixo E . Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão* quando se tem

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)} = \frac{d(X, B)}{d(A, X)}.$$

(O quociente $d(A, X)/d(A, B)$ é chamado *razão áurea*.) Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b .

Solução. Em coordenadas, a condição dada corresponde a

$$\frac{|a-x|}{|a-b|} = \frac{|x-b|}{|a-x|}.$$

Como $a < x < b$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{x-a},$$

ou seja,

$$x^2 + (b-3a)x + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = 5(b-a)^2$. Portanto as raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{5}(b-a)).$$

Usando a condição $a < x < b$, obtemos que $a < x_+ < b$ e $x_- < a$. Logo a única raiz no intervalo $[a, b]$ é x_+ . Portanto o ponto X procurado tem coordenada

$$x = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{5})a + (\sqrt{5} - 1)b).$$