GAAL – Seção 1 – Exercício 9

Exercício (E9.S1)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)-f(y)| = |x-y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Pondo $f(0) = a$, defina a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim: $g(x) = f(x) - a$. Prove então que $|g(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Também $(g(x))^2 = x^2$.

(ii) Use a identidade $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x-y)^2]$ para provar a igualdade $xy = g(x)\, g(y)$.

(iii) Se $g(1) = 1$, mostre que $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, mostre que $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Conclua que $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou então $f(x) = -x + a$ para todo x.

Solução. (i) Observamos que $g(x) = f(x) - a = f(x) - f(0)$. Logo

$$|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $|g(1)| = 1$, o que implica $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Temos também que

$$g(x)^2 = |g(x)|^2 = |x|^2 = x^2.$$

(ii) Usando as definições e propriedades, calculamos

$$\begin{aligned} xy &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - (x-y)^2] \\ &= 2^{-1}[x^2 + y^2 - |x-y|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - f(y)|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |f(x) - a - f(y) + a|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - |g(x) - g(y)|^2] \\ &= 2^{-1}[g(x)^2 + g(y)^2 - (g(x) - g(y))^2] \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

(iii) Se $g(1) = 1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, então $x = x(1) = g(x)g(1) = g(x)(-1) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Observamos que $f(x) = g(x) + a$. Pela parte (i), temos $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Usando (iii), isso implica $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$ para todo x, respectivamente. Portanto $f(x) = x + a$ ou $f(x) = -x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$