

Exercícios Resolvidos do Livro  
Geometria Analítica e Álgebra Linear  
de Elon Lages Lima  
(Segunda Edição–Oitava Impressão)

Gustavo de Oliveira

13 de junho de 2017

## Seção 1 – Coordenadas na Reta

1. Sejam  $a < b$  respectivamente as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  sobre o eixo  $E$ . Determine as coordenadas dos pontos  $X_1, \dots, X_{n-1}$  que dividem o segmento  $AB$  em  $n$  partes iguais.

*Solução.* Para  $j = 1, \dots, n-1$ , observamos que  $d(X_j, a) = j d(A, B)/n$ . Seja  $x_j$  a coordenada do ponto  $X_j$ . Então  $|x_j - a| = j|a - b|/n$ , ou seja,  $x_j - a = j(b - a)/n$ , pois  $x_j > a$  e  $b > a$ . Portanto  $x_j = a + j(b - a)/n$ .

## Seção 14 – Vetores no Plano

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

*Solução.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que o quadrilátero  $ABCD$  é um paralelogramo. O paralelogramo é formado por dois pares de lados. Em cada par de lados, os lados são paralelos e têm o mesmo comprimento. Portanto  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Seja  $P$  o ponto médio de  $DB$ , e seja  $Q$  o ponto médio de  $AC$ . Vamos provar que  $Q = P$ . Escolhemos um sistema de coordenadas  $OXY$  de modo que  $A = (0, 0)$ ,  $B = (b, 0)$  e  $D = (c, d)$ . Logo  $\overrightarrow{AD} = (c, d)$  e  $C = B + \overrightarrow{AD} = (b + c, d)$ . Calculando os pontos  $P$  e  $Q$ , obtemos

$$P = \left( \frac{c+b}{2}, \frac{d+0}{2} \right) = \left( \frac{b+c}{2}, \frac{d}{2} \right),$$
$$Q = \left( \frac{b+c+0}{2}, \frac{d+0}{2} \right) = \left( \frac{b+c}{2}, \frac{d}{2} \right).$$

Portanto  $P = Q$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $P$  o ponto médio de  $DB$ , e seja  $Q$  o ponto médio de  $AC$ . Suponha que as diagonais do paralelogramo se cortam mutuamente ao meio, ou seja, suponha que  $P = Q$ . Escolhemos um sistema de coordenadas  $OXY$  de modo que  $A = (0, 0)$ ,  $B = (b, 0)$  e  $D = (c, d)$ . Temos então  $\overrightarrow{AD} = (c, d)$  e  $\overrightarrow{AB} = (b, 0)$ . Escrevemos  $C = (x, y)$ . Vamos determinar  $x$  e  $y$ . Calculando os pontos  $P$  e  $Q$ , obtemos

$$P = \left( \frac{c+b}{2}, \frac{d}{2} \right),$$

$$Q = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right).$$

A igualdade  $P = Q$  implica  $x = c + b$  e  $y = d$ . Logo  $(x, y) = (b + c, d)$ , ou seja,  $C = (b + c, d)$ . Portanto  $C = B + \overrightarrow{AD}$  e  $C = D + \overrightarrow{AB}$ , ou seja,  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ . Isso implica que  $ABCD$  é um paralelogramo.

## Seção 15 – Operações com Vetores

**7.** Seja  $P$  um ponto interior ao triângulo  $ABC$  tal que  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$ . Prove que as retas  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  são medianas de  $ABC$ , logo  $P$  é o baricentro desse triângulo.

*Solução.* Seja  $Q$  o ponto de intersecção da reta  $BP$  com o segmento  $AC$ . Observamos que  $\overrightarrow{QA} = \alpha \overrightarrow{CA}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Logo

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (\alpha - 1) \overrightarrow{CA}.$$

Vamos provar que  $Q$  é o ponto médio do lado  $AC$ , ou seja, vamos provar que  $\alpha = 1/2$ .

Escrevemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PQ} + \alpha \overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PQ} + (\alpha - 1) \overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PQ} + (3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Além disso

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{QC} = -\overrightarrow{CB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{CA}.$$

Para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ , temos

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ}.$$

Portanto

$$\overrightarrow{PQ} = \beta \overrightarrow{BQ} = -\beta \overrightarrow{CB} + \beta(1 - \alpha) \overrightarrow{CA}.$$

Consequentemente

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta) \overrightarrow{CB}.$$

Por outro lado, temos  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$ . Logo

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) \overrightarrow{CA} + (1 - 3\beta) \overrightarrow{CB} = 0.$$

Como  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  são linearmente independentes, essa igualdade implica (veja o Exercício 1 da Seção 15)

$$(3\beta(1 - \alpha) + 3\alpha - 2) = 0 \quad \text{e} \quad 1 - 3\beta = 0.$$

A segunda equação implica  $\beta = 1/3$ . Substituindo esse valor de  $\beta$  na primeira equação, obtemos  $3(1/3)(1 - \alpha) + 3\alpha - 2 = 0$ , ou seja,  $\alpha = 1/2$ . Portanto  $Q$  é o ponto médio de  $AC$ . Renomeando os pontos, obtemos a demonstração para as medianas correspondentes aos outros vértices do triângulo.

## Seção 16 – Equação da Elipse

**10.** Quais são as tangentes à elipse  $x^2 + 4y^2 = 32$  que têm inclinação igual a  $1/2$ ?

*Solução.* Uma reta com inclinação  $1/2$  é dada por  $y = (1/2)x + b$  para  $b \in \mathbb{R}$ . Vamos determinar os valores de  $b$  para os quais a reta  $y = (1/2)x + b$  é tangente à elipse  $x^2 + 4y^2 = 32$ , ou seja, vamos determinar os valores de  $b$  para os quais o sistema

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 32 \\ y &= (1/2)x + b \end{aligned}$$

tem apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira e desenvolvendo, obtemos

$$2x^2 + 4bx + (4b^2 - 32) = 0.$$

Essa equação possui apenas uma solução se, e somente se, o discriminante da equação é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 16^2 = 0.$$

Isso implica em  $b = \pm 4$ . Portanto, as retas tangentes são

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

## Seção 17 – Equação da Hipérbole

2. Para todo ponto  $P = (m, n)$  na hipérbole  $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ , mostre que a reta  $r : (m/a^2)x - (n/b^2)y = 1$  tem apenas o ponto  $P$  em comum com  $H$ . A reta  $r$  chama-se a *tangente* a  $H$  no ponto  $P$ .

*Solução.* A reta  $r$  é tangente à hipérbole  $H$  no ponto  $P$  se, e somente se,  $x = m$  e  $y = n$  é a única solução do sistema

$$\begin{aligned}(m/a^2)x - (n/b^2)y &= 1 \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 &= 1.\end{aligned}$$

A primeira equação implica

$$x = \frac{a^2}{m} \left( 1 + \frac{n}{b^2} \right).$$

Substituindo essa expressão para  $x$  na segunda equação e desenvolvendo, obtemos

$$(a^2n^2 - b^2m^2)y^2 + b^2a^22ny + b^4(a^2 - m^2) = 0.$$

Como  $P$  pertence à hipérbole, temos  $a^2n^2 - b^2m^2 = -a^2b^2$ . Substituindo essa expressão na equação anterior e simplificado, encontramos

$$-a^2y^2 + a^22ny + b^2(a^2 - m^2) = 0.$$

Calculando o discriminante  $\Delta$  dessa equação quadrática, obtemos

$$\Delta = 4a^2(a^2n^2 - b^2m^2 + b^2a^2) = 4a^2(-a^2b^2 + b^2a^2) = 4a^2(0) = 0.$$

Nesse cálculo, usamos novamente que  $P$  pertence a  $H$ . Como  $\Delta = 0$ , a equação para  $y$  possui apenas uma solução. Associado a essa solução temos apenas um valor para  $x$ . Portanto o sistema de equações possui apenas uma solução  $(x, y)$ , ou seja, a reta  $r$  é tangente à hipérbole  $H$ .

## Seção 20 – Formas Quadráticas

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

1. Escreva sua matriz e sua equação característica;
2. Obtenha seus autovalores;
3. Descreva suas linhas de nível;
4. Ache autovetores unitários ortogonais  $u$  e  $u^*$ ;

5. Determine os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como  $A's^2 + C't^2$ ;
6. Ache os focos da cônica  $A's^2 + C't^2 = 1$  em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ .

As formas quadráticas são:

- (a)  $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$ .
- (b)  $\varphi(x, y) = xy$ .
- (c)  $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$ .
- (d)  $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$ .
- (e)  $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$ .
- (f)  $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$ .

*Solução.* (a) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = 3/2$  e  $\lambda_2 = 1/2$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad u^* = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= u_1 s - u_2 t, \\ y &= u_2 s + u_1 t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/3} + \frac{t^2}{2}.$$

Para  $d < 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são o conjunto vazio. Para  $d = 0$ , a linha de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  é o ponto  $(0, 0)$ . Para  $d > 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são elipses. Para  $d = 1$ , temos uma elipse com  $c^2 = a^2 + b^2$ , ou seja,  $c = 2\sqrt{2/3}$ , e portanto os focos da elipse são  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , no sistema  $s$  e  $t$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , os focos são, respectivamente,

$$\left( -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right), \quad \left( \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

(c) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 - 10\lambda = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 10$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left( \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right), \quad u^* = \left( -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= u_1 s - u_2 t, \\ y &= u_2 s + u_1 t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = 10t^2.$$

Para  $d < 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são o conjunto vazio. Para  $d = 0$ , a linha de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  é uma reta horizontal que passa pela origem. Para  $d > 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são um par de retas horizontais.

(d) A matriz de  $\varphi$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de  $\varphi$  é  $\lambda^2 - 5/4 = 0$ . Logo os autovalores são  $\lambda_1 = \sqrt{5}/2$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{5}/2$ . Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left( \frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}} \right), \quad u^* = \left( \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}} \right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= u_1 s - u_2 t, \\ y &= u_2 s + u_1 t, \end{aligned}$$

a forma quadrática assume a forma

$$\bar{\varphi}(s, t) = \frac{\sqrt{5}}{2}s^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/\sqrt{5}} - \frac{t^2}{2/\sqrt{5}}.$$

Para  $d = 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são as retas  $t = s$  e  $t = -s$ . Para  $d \neq 0$ , as linhas de nível  $\bar{\varphi}(s, t) = d$  são hipérboles. Para  $d = 1$ , temos uma hipérbole com  $c^2 = a^2 + b^2$ , ou seja,  $c = 2/\sqrt{\sqrt{5}}$ , e portanto os focos da hipérbole são  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , no sistema  $s$  e  $t$ . Em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ , os focos são, respectivamente,

$$\left( \frac{-2}{\sqrt{10\sqrt{5} - 20}}, \frac{4 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{10\sqrt{5} - 20}} \right), \quad \left( \frac{2}{\sqrt{10\sqrt{5} - 20}}, \frac{2\sqrt{5} - 4}{\sqrt{10\sqrt{5} - 20}} \right).$$

## Seção 23 – Transformações Lineares

**11.** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

*Solução.* Seja  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ , e seja  $M$  a matriz de  $T$ . Como  $M$  tem posto 2, os vetores-coluna de  $M$  são não-colinares. Se  $r$  é uma reta vertical, então  $r$  é formada pelos pontos  $(x, y) = (\alpha, t)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Logo os pontos

$$T(x, y) = T(\alpha, t) = (a\alpha + bt, c\alpha + dt) = \alpha(a, c) + t(b, d)$$

para  $t \in \mathbb{R}$  formam uma reta, pois  $(b, d) \neq (0, 0)$  (caso contrário teríamos  $ad - bc = 0$ , o que é impossível). Se  $r$  é uma reta não-vertical, então  $r$  é o conjunto dos pontos  $(x, y) = (t, \alpha t + \beta)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Logo os pontos

$$T(x, y) = T(t, \alpha t + \beta) = \beta(b, d) + t((a, c) + \alpha(b, d))$$

para  $t \in \mathbb{R}$  formam uma reta, pois não existe  $\alpha$  tal que  $(a, c) + \alpha(b, d) = 0$  (caso contrário  $(a, c)$  e  $(b, d)$  seriam colineares).

**15.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear invertível. Mostre que  $T$  transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

*Solução.* Seja  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ , e seja  $M$  a matriz de  $T$ . Como  $T$  é invertível, para todo  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$  existe apenas um vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (m, n)$ . Dito de outra forma, o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui apenas uma solução. Portanto as retas  $ax + by = m$  e  $cx + dy = n$  são concorrentes. Logo os vetores  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são não-colineares, ou seja,  $ad - bc \neq 0$ . Isso implica que os vetores  $(a, c)$  e  $(b, d)$  são não-colineares, ou seja, que a matriz de  $M$  tem posto 2. Pela solução do Exercício 11, para qualquer valor de  $\alpha$ , a transformação  $T$  mapeia a reta  $x = \alpha$  em uma reta paralela ao vetor  $(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Isso mostra que  $T$  transforma as retas paralelas  $x = \alpha$  e  $x = \alpha'$  em retas paralelas ao vetor  $(b, d)$ . Pela solução do Exercício 11, a transformação  $T$  mapeia a reta  $y = \alpha x + \beta$  em uma reta paralela ao vetor  $(a, c) + \alpha(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Analogamente, a transformação  $T$  mapeia a reta  $y = \alpha'x + \beta$  em uma reta paralela ao vetor  $(a, c) + \alpha'(b, d)$  que passa por  $(a, c)$ . Como  $(a, b) + \alpha(c, d)$  e  $(a, c) + \alpha'(b, d)$  são vetores colineares, concluímos que  $T$  transforma retas não-verticais paralelas em retas não-verticais paralelas. Além disso, concluímos que  $T$  transforma

paralelogramos em paralelogramos. A transformação  $T$  não mapeia losangos em losangos, em geral. De fato, considere o quadrado cujos vértices são os pontos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  e  $D = (0, 1)$  (esse é um exemplo de losango). Observamos que os vetores unitários  $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$  e  $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$  são mapeados nos vetores  $(a, c)$  e  $(b, d)$ , que não são unitários, em geral. Logo o quadrado  $ABCD$  não é transformado em um quadrado, em geral.

**17.** Dados  $u = (1, 2)$ ,  $v = (3, 4)$ ,  $u' = (5, 6)$  e  $v' = (7, 8)$ , ache uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $Tu = u'$  e  $Tv = v'$ .

*Solução.* Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem a forma  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Procuramos constantes  $a, b, c$  e  $d$  tais que  $T(1, 2) = (5, 6)$  e  $T(3, 4) = (7, 8)$ , ou seja,  $(a + 2b, c + 2d) = (5, 6)$  e  $(3a + 4b, 3c + 4d) = (7, 8)$ , ou seja,  $a + 2b = 5$ ,  $c + 2d = 6$  e  $3a + 4b = 7$ ,  $3c + 4d = 8$ . Obtemos portanto um sistema de quatro equações e quatro incógnitas,  $a, b, c$  e  $d$ . De fato, obtemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas, desacoplados:

$$\begin{aligned} a + 2b &= 5 & c + 2d &= 6 \\ 3a + 4b &= 7 & 3c + 4d &= 8. \end{aligned}$$

Resolvendo esses sistemas, obtemos  $a = -3$ ,  $b = 4$ ,  $c = -4$  e  $d = 5$ . Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x, y) = (-3x + 4y, -4x + 5y).$$

## Seção 24 – Coordenadas no Espaço

**5.** Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos  $P = (2, 3, 4)$  e  $Q = (1, 1, 758)$ .

*Solução.* O plano vertical que passa por  $P$  e  $Q$  deve conter todos os pontos da forma  $(2, 3, z)$  e  $(1, 1, z')$  para  $z \in \mathbb{R}$  e  $z' \in \mathbb{R}$ . Em particular, o plano vertical deve conter os pontos  $P' = (2, 3, 0)$  e  $Q' = (1, 1, 0)$ . Além disso, observamos que o plano vertical deve conter a reta  $\overrightarrow{P'Q'}$ . As coordenadas de  $P'$  e  $Q'$  no plano  $\Pi_{xy}$  são  $(2, 3)$  e  $(1, 1)$ . Portanto  $\overrightarrow{P'Q'} = (-1, -2)$  no plano  $\Pi_{xy}$ . O vetor  $v = (2, -1)$  é ortogonal a  $\overrightarrow{P'Q'}$ . Logo a equação da reta  $P'Q'$  no plano  $\Pi_{xy}$  é  $2x - y = c = 2(1) - 1(1) = 1$ , ou seja,  $2x - y = 1$ . O plano vertical que passa por  $P$  e  $Q$  é formado por todos os pontos  $(x, y, z)$  tais que  $2x - y = 1$ . Essa é a equação do plano.

**7.** Escreva a equação geral de um plano vertical.

*Solução.* A equação geral de um plano vertical é  $ax + by = c$ , onde  $a, b$  e  $c$  são números reais. De fato, o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  tais



que  $ax + by = c$  forma um plano que contém o eixo  $OZ$  ou é paralelo ao eixo  $OZ$ . (Veja a solução do Exercício 5.)