# Systems Engineering

**101-0031-01L**
**HS 2019**

Bryan T. ADEY
Clemens KIELHAUSER

Zürich, HS 2019

ETH Zürich
Institut für Bau- und Infrastrukturmanagement
Professur für Infrastrukturmanagement

# Vorwort

Unser Institut hat sich viel Mühe gegeben, dieses Skriptum zu erstellen. Trotzdem können sich noch vereinzelt Fehler verstecken. Über Rückmeldungen diesbezüglich würden wir uns sehr freuen.

Die enthaltenen Rechenbeispiele sind nur zur Anschauung und beruhen nicht auf wirklichen Gegebenheiten. Es kann daher vorkommen, dass die enthaltenen Werte und Preise z.B. für Güter oder ähnliches nicht immer mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Dieses Skriptum soll eine Hilfestellung beim Erlernen des Stoffes sein, ist aber keine vollständige Abbildung der Vorlesung. Der gesamte Vorlesungsstoff besteht aus der Kombination von Skriptum und allem Vorgetragenen in den Vorlesungseinheiten. Diese beiden Teile sollen sich gegenseitig ergänzen und ergeben erst gemeinsam ein vollständiges Bild.

In diesem Sinne wünsche ich Ihnen und uns eine gelungene Vorlesung Systems Engineering.

Prof. Dr. Bryan T. ADEY und Team

# Danksagung

Dieses Skriptum ist das Ergebnis einer Gemeinschaftsarbeit, die von vielen Leuten geleistet wurde; es ist unmöglich, sie hier alle aufzuführen. Trotzdem möchten wir zunächst Miriam Esders und Craig Richmond danken, die in hervorragender Weise beim Erstellen der ersten Version dieses Skriptums beteiligt waren. Weiterer Dank gebührt auch allen Korrekturleserinnen und Korrekturlesern, die in aufwändiger Arbeit mitgeholfen haben, so viele Fehler wie möglich auszubessern.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

## 1.1 Systemtheorie

Systeme sind allgegenwärtig für uns. Offensichtlich sind Beispiele wie Ökosysteme, politische Systeme oder Kanalsysteme. Systeme existieren jedoch auch in nicht so offensichtlicher Form. Soziale Beziehungen, eine Kaffeemaschine, eine Autovermietung etc. Genau genommen besteht unsere ganze Realität aus ineinandergreifenden Systemen.

Als Ingenieure haben wir die Aufgabe, Probleme zu lösen. Wichtig ist aber, nicht «irgendeine» Lösung zu finden, sondern diejenige Lösung, die der Aufgabenstellung am besten angepasst ist. Die Lösung des Problems besteht wiederum aus einem System.

Das Lösungssystem lässt sich am besten finden, wenn wir das Lösungssystem an sich und die interagierenden Fremdsysteme sowie ihre Wechselwirkungen begreifen.

Um nun mit Systemen strukturiert arbeiten zu können, muss man zuerst einmal grundsätzlich verstehen, was der Begriff System bedeutet.

Jeder kennt den Begriff System, aber kann es jemand beschreiben, ohne das Wort System zu verwenden?

### 1.1.1 Definitionen

Ein System ist generell eine Verkettung von Aktion und Reaktion. Diese Verkettung kann in vielen verschiedenen Formen existieren:

- Eine Ansammlung oder Kombination von Elementen oder Teilelementen, die einen Komplex oder ein einheitliches Ganzes bilden
- Ein geordnetes und umfassendes System aus Tatsachen, Grundsätzen oder Lehrsätzen auf einem bestimmten Wissensgebiet oder aus einem Gedankengut
- Eine einzelne Methode bzw. ein geordneter Verbund aus Methoden, ein Vorgehensplan oder eine Vorgehensweise

Systeme können generell in zwei Gruppen eingeteilt werden:

- Komplizierte Systeme sind Systeme, die zwar umfangreich sind, d.h. aus vielen Elementen bestehen, welche aber (wiederum) eine klare Ursache-Wirkungs-Beziehung haben. (Beispiel: Die Schaltkreise in einem Computerprozessor sind zwar sehr kompliziert, aber der Strom fliesst nach einfachen physikalischen Gesetzen)
- Komplexe Systeme enthalten Rückkopplungen, d.h. es ist nicht mehr feststellbar, was Ursache und was Wirkung ist. (Beispiel: Wird eine neue Autobahn gebaut, weil viel Verkehr ist oder fliesst mehr Verkehr, weil eine Autobahn da ist?)

Rückkopplung ist ein Mechanismus in Systemen, bei dem ein Teil der Ausgangsgrösse auf den Eingang des Systems zurückgeführt wird (siehe Abb. 1.1). Da Rückkopplungen ein wichtiger Bestandteil von sehr vielen Systemen sind, gibt es eine eigene Wissenschaft, die sich damit beschäftigt: Die Kybernetik.

> *Kybernetik* – die Wissenschaft der Steuerung und Regelung der komplexen Prozesse in mechanischen, elektromechanischen, elektrischen und biologischen Systemen. Das Wort wurde von Norbert Wiener (1894-1964) im Rahmen des Buches «Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine (1948)» geschaffen. Es leitet sich von dem griechischen Wort *κυβερνήτης* (kybernētes) = Steuermann ab.

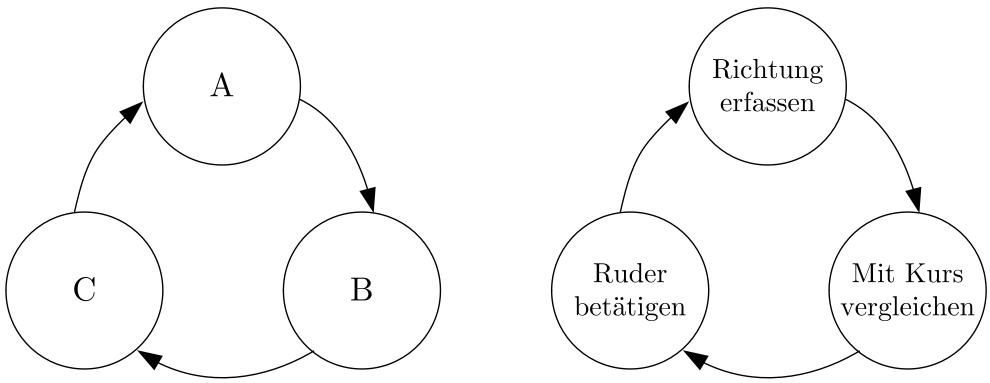



Abbildung 1.1: Zirkulärer Aufbau einer Rückkopplungsschleife allgemein und am Beispiel «Steuerung eines Schiffes».

Zwei wichtige Beiträge der Kybernetik sind:

- Der Informationsfluss ist ein eigenständiger Teil des Systems und macht den Unterschied zwischen der aktivierenden Kraft und dem Informationssignal deutlich
- Ähnlichen Vorgängen liegen (im Wesentlichen) identische Prinzipien zugrunde

Wenn wir uns mit komplexen Systemen beschäftigen, d.h. solchen mit Rückkopplungen, spielt der Informationsfluss eine grosse Rolle bei der effizienten Erstellung eines Systems.

Um mit Systemen – egal ob kompliziert oder komplex – zu arbeiten, insbesondere wenn verschiedene Personen beteiligt sind, ist es wichtig, sich auf gemeinsame Begrifflichkeiten zu verständigen (siehe Abb. 1.2).

Die Analyse von Strukturen und Funktionen soll Vorhersagen über das Systemverhalten erlauben. Der Bedarf einer einheitlichen Terminologie entstand aus der Schwierigkeit, zwischen verschiedenen Disziplinen zu kommunizieren und z.B. Ergebnisse auszutauschen. Die Systemtheorie ist ein interdisziplinäres Grundsatzmodell, in dem Systeme zur Beschreibung und Erklärung unterschiedlich komplexer Phänomene herangezogen werden.

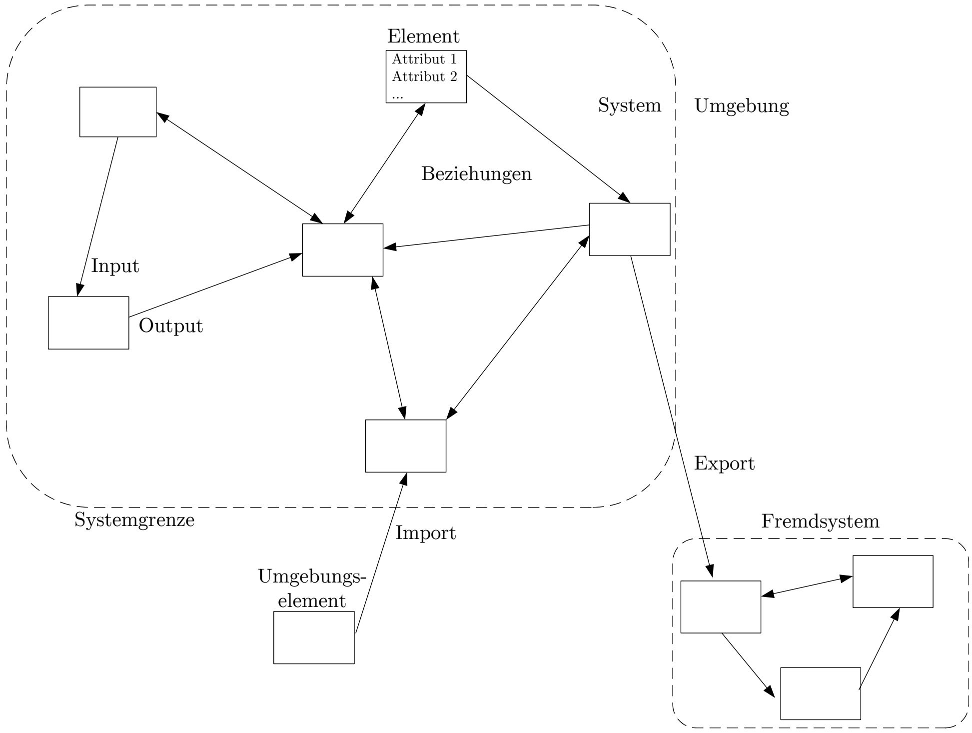



Abbildung 1.2: Terminologie

**Elemente:** Teile eines Systems mit Input, Output und Prozessen

**Beziehungen:** Verknüpfungen zwischen Elementen

**Attribute:** Charakteristika der Elemente. Jedes Attribut besitzt einen Attributwert (Beispiel: Attribut «Farbe», Attributwert «grün»)

**Systemgrenze:** Abgrenzung zwischen dem System und seiner Umgebung bzw. seinem Umfeld. Sie kann physisch oder rein gedanklicher Natur sein

**Umgebung:** Systeme und Elemente, die ausserhalb der Systemgrenze liegen und Einfluss auf das System nehmen oder von diesem beeinflusst werden können

**Import:** Material, Energie oder Informationen, die über die Systemgrenzen in das System gelangen

**Export:** Material, Energie oder Informationen, die über die Systemgrenzen das System verlassen

**Input:** Material, Energie oder Informationen, die in ein Element gelangen

**Output:** Material, Energie oder Informationen, die ein Element verlassen

**Funktion:** Das zielgerichtete Handeln durch ein System, der «Zweck»- z.B. der Bau eines Autobahnnetzes, die Umwandlung von Kohle in elektrischen Strom, die Informationsverarbeitung in einem Computersystem etc.

**Fremdsystem:** Ein anderes System, das mit dem betrachteten System in Verbindung steht, sonst aber unabhängig ist

Da wir zur Lösungsfindung eigene Systeme erstellen wollen, befassen wir uns hauptsächlich mit anthropogenen (vom Menschen erschaffenen) Systemen.

Anthropogene Systeme[1]

- sind eine Antwort auf ein identifiziertes Bedürfnis,
- sollten die benötigte Funktionalität haben (funktionelle / operative Zwecke),
- beginnen mit einem Bedürfnis, bestehen über einem Lebenszyklus[2] und enden mit der Entsorgung oder dem Rückbau,
- bestehen aus Kombinationen von Ressourcen, z.B. Personen, Maschinen, Werkzeugen, Informationen, Materialien,
- sind Teil grösserer Systeme, die diese Systeme einschliessen,
- sind aus Elementen aufgebaut, die zur Verfügung stehen müssen
  - für den normalen Betrieb oder
  - falls andere Elemente versagen,
- sind in eine nicht-anthropogene Umgebung eingegliedert und interagieren mit dieser auf erwünschte oder unerwünschte Weise und
- werden von den anthropogenen Fremdsystemen und Fremdelementen in ihrer Umgebung beeinflusst.

Beispiel:

- Autobahnabschnitt

  **Bedürfnis:** mehr Mobilität

  **Funktion:** Fähigkeit, 10'000 Autos/Stunde von A nach B bei 120 km/h Geschwindigkeit zu befördern

- Wolkenkratzer

  **Bedürfnis:** mehr Wohnungen und Einkaufsmöglichkeiten benötigt

  **Funktion:** Raum für neue Wohnungen und Einkaufsmöglichkeiten bieten; neue architektonische Massstäbe für Geschäftsliegenschaften setzen

- Managementsystem

  **Bedürfnis:** logische und vertretbare finanzielle Prognose benötigt

  **Funktion:** Fähigkeit, innerhalb einer kurzen Zeit eine logische und vertretbare finanzielle Prognose zu machen

### 1.1.2 Systemmodelle

#### 1.1.2.1 Allgemein

Systemmodelle

- veranschaulichen komplexe Zusammenhänge der Systeme,

[1] Nicht-anthropogene Systeme sowie andere Klassifizierungen von Systemmodellen werden auf Seite 15 bzw. in der Vorlesung diskutiert.

[2] Der Begriff wird in Kapitel 1.2.2.3 on page 22 erklärt.

- sind Abstraktionen und Vereinfachungen der Realität,
- sollten in Bezug auf die Situation und die Problemstellung genügend aussagekräftig sein,
- haben einen Gestalter (d.h. jemanden, der sie entwirft),
- haben einen Zweck (Modellverwendung),
- bilden das System unter gewissen Aspekten (Interessenfilter) ab,
- sind für jemanden bestimmt (Modellanwender), und
- sind kontextbezogen bzw. nur in raum-zeitlichen Zusammenhängen interpretierbar. Damit sind sie nur in bestimmten Zusammenhängen und unter gewissen Voraussetzungen anwendbar.

#### 1.1.2.2 Klassifizierung

Eine Klassifizierung, d.h. eine Einteilung in bestimmte Klassen nach bestimmten Kriterien, ist dann sinnvoll, wenn man auf der Suche nach ähnlichen Systemen ist. Wie schon auf Seite 12 erwähnt, basieren ähnliche Vorgänge auf ähnlichen Systemen. Deshalb kann einem eine Einteilung nach Klassen bei der Suche nach schon existenten Systemen eine grosse Hilfe sein.

- Klassifizierung nach dem Systemersteller

  **Anthropogen:** Vom Menschen geschaffen oder verändert (Bsp. Strassennetz)

  **Nicht-anthropogen:** Ohne Menschen entstanden (Bsp. Sonnensystem)

- Klassifizierung nach der Art der Existenz

  **Materiell:** Existiert in physischer Form (Bsp. Brücke)

  **Konzeptionell:** Besteht aus Ideen, Abläufen, Konzepten etc.; existiert nur «im Kopf» oder auf dem Papier (Bsp. Bildungssystem)

- Klassifizierung nach der Interaktion mit der Umgebung

  **Geschlossen:** System interagiert nur unwesentlich mit der Umgebung (Bsp. Universum)

  **Offen:** Interaktion des Systems mit der Umgebung ist ein wesentlicher Bestandteil (Bsp. offener Kochtopf)

- Klassifizierung nach zeitlichem Verhalten

  **Statisch:** Es kann angenommen werden, dass sich die Strukturen im Laufe der Zeit nicht ändern (Bsp. ruhendes Pendel)

  **Dynamisch:** Es muss angenommen werden, dass sich die Strukturen im Laufe der Zeit ändern (Bsp. Holzfassade)

- Klassifizierung nach Sicherheit der Datenlage

  **Deterministisch:** Keine oder genau bekannte[3] Variation von Input und Output (Bsp. mechanische Uhr)

  **Probabilistisch:** Unsichere Variation von Input und Output (Bsp. Blitzeinschlag)

[3] Material-, Energie- und/oder Informationsfluss sind in Form einer mathematischen Funktion darstellbar, z.B.: «Input nimmt jedes Jahr um exakt 10% zu»

#### 1.1.2.3 Abstraktionsebenen

Systemmodelle können auf verschiedenen Abstraktionsebenen gebaut werden. Es ist klar, dass man umso mehr Informationen benötigt, je genauer man ein System darstellen will. Für bestimmte Fragestellungen reicht vielleicht schon eine «grobe» Betrachtungsweise aus, während hingegen manche Fragestellungen einen hohen Detaillierungsgrad benötigen.

Aus diesem Grund gibt es eine Abfolge von immer genauer werdenden Betrachtungsweisen, die je nach benötigtem Detaillierungsgrad verwendet werden. Grafik 1.3 auf Seite 17 erläutert dies weiter.

**Umfeldorientierte Betrachtung:** Das System wird als Black-Box angesehen. Man konzentriert sich auf die Zusammenhänge zwischen dem System und dessen Umgebung. Was innerhalb des Systems passiert, ist nicht von Interesse (es bleibt «im Dunklen» – daher der Name). Es sind nur Input und Output wichtig.

**Wirkungsorientierte Betrachtung:** Das System wird als Grey-Box angesehen. Die beteiligte Funktion wird als Übergangsfunktion bezeichnet. Sofern eine (mathematische) Funktion zur Beschreibung von Gesetzmässigkeiten der Umsetzung von Inputs in Outputs angegeben werden kann, spricht man von einer sogenannten Übergangsfunktion.

Bei der wirkungsorientierten Betrachtungsweise stellen sich die folgenden Fragen:

- Welche Einwirkungen oder Eingangsgrössen (Inputs) aus dem Umfeld wirken auf das System?
- Was sind die Verhaltensmöglichkeiten des Systems (mögliche Ergebnisse der Übergangsfunktion)?
- Welche Auswirkungen oder Ausgangsgrössen (Outputs) auf das Umfeld haben welche Folgen?

Die wirkungsorientierte Betrachtung ist ein gutes Hilfsmittel, um den Zustand und die «Qualität» eines Systems grob zu beurteilen.

**Strukturorientierte Betrachtung:** Das System wird mitsamt seiner Einzelelemente betrachtet (deshalb auch «White-Box» genannt). Man konzentriert sich darauf, wie Input beim Durchlaufen des Systems Output erzeugt oder wie Input in einen gewünschten Output umgewandelt werden soll. Dabei ist das Verhalten von den Einzelelementen und deren Beziehungen von grosser Bedeutung.

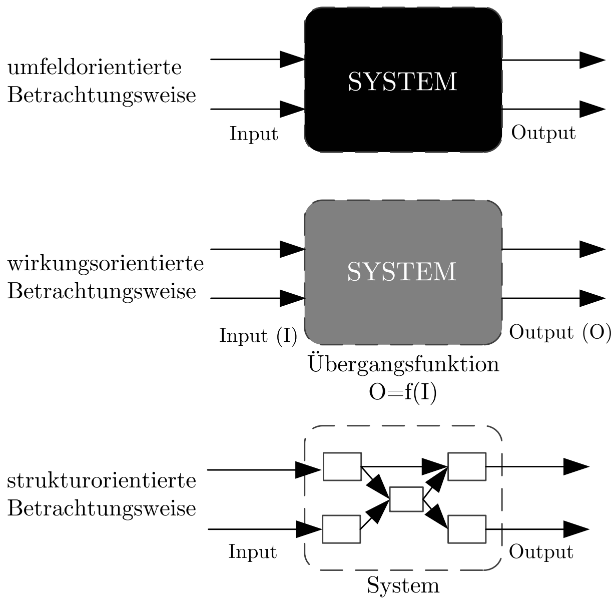



Abbildung 1.3: Konzeptuelle Betrachtungsweise für die Entwicklung der Systemmodelle

Ein guter Ansatz zum Einstieg in diese Betrachtung besteht darin, nach Art und Umfang externer Faktoren zu fragen, welche die Funktionsweise des Systems beeinflussen.

Dabei ist es sinnvoll, zwischen Fremdsystemen einerseits und den Beziehungen zum betrachten System andererseits zu unterscheiden.

Bevor mit der detaillierten Untersuchung bzw. Gestaltung begonnen wird, grenzt man grobe Funktionsblöcke ab, definiert deren angenommene oder gewünschte Funktionen und deren Zusammenspiel (Input-Output) und steigt erst dann in strukturorientierte und damit detailliertere Überlegungen ein.

#### 1.1.2.4 Aspekte

Jedes System lässt sich unter verschiedenen Aspekten (Gesichtspunkten oder «Filter») betrachten und beschreiben. Eine konzeptuelle Illustration ist in Abb. 1.4 gezeigt.

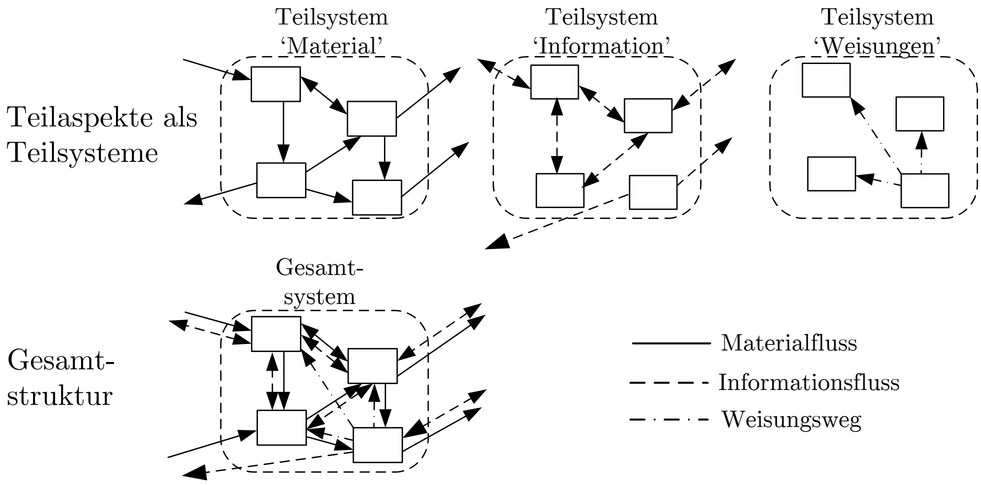



Abbildung 1.4: Illustration der verschiedenen Aspekte eines Systems

Durch die Betrachtung verschiedener Aspekte treten bestimmte Attribute von Elementen bzw. deren Beziehungen in den Vordergrund. Eine Industrie könnte z.B. unter den Aspekten Materialfluss, Informationsfluss, Finanzfluss, Energiefluss, Anordnungswege usw. betrachtet werden. Dadurch kommen unterschiedliche Strukturen, Gliederungen, Eigenschaften von Elementen und Beziehungen zum Vorschein und werden bedeutungsvoll.

## 1.2 Systems Engineering

### 1.2.1 Allgemein

Systems Engineering (SE) ist ein fächerübergreifender Denkansatz mit dem Ziel, den Entwurf und die Entwicklung erfolgreicher Systeme zu ermöglichen. Systems Engineering wird als Verallgemeinerung und Erweiterung der ingenieurwissenschaftlichen Methodik betrachtet.

Der Fokus beim Systems Engineering liegt auf

- der Definition von Bedürfnissen, d.h. dessen, was wir tatsächlich benötigen,
- dem Sicherstellen der Berücksichtigung der Funktionalität des zu entwickelnden Systems bereits zu Beginn des Entwicklungsprozesses,
- den Anforderungen an die Dokumentation aller relevanten Informationen über das System und seine Entwicklung,
- dem strukturierten Vorgehen zur Systementwicklung mit Darstellung des Entwicklungsprozesses und
- der Bewertung der Systemlösung,

während das Problem immer ganzheitlich[4] betrachtet wird. Dazu ist es notwendig, klare Systemanforderungen festzulegen. Systemanforderungen sind genaue Entwurfskriterien für das System. Sie werden mit Folgeanalysen verbunden, um die Effektivität von frühen Entscheidungen im Entwurfsprozess sicherzustellen. Dies alles erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass alle Entwurfsziele auf eine effektive und effiziente Weise berücksichtigt werden.

### 1.2.2 Prinzipien

Die Methodik des Systems Engineering baut auf 4 Prinzipien auf, die für den Bau von Systemen hilfreich sind:

- Vom Groben zum Detail
- Variantenbildung
- Phasengliederung
- Problemlösungsprozess

Die Beachtung dieser 4 Prinzipien hilft dabei, dass bei der Entwicklung eines Systems alle Bedürfnisse und alle möglichen Lösungsvarianten berücksichtigt werden und das Problem ganzheitlich gelöst wird.

#### 1.2.2.1 Vom Groben zum Detail

Das Prinzip «Vom Groben zum Detail» beschreibt die Vorgehensweise, ein Problem zuerst grob zu strukturieren, Abgrenzungen und Schnittstellen zu erkennen und erst dann eine Ausarbeitung der Details vorzunehmen. Dadurch kann der Fehler vermieden werden, sich zu früh um die Details zu kümmern, und dabei das «Grosse Ganze» zu übersehen.

Systems Engineering geht bei diesem Prinzip davon aus, dass das System zuerst eine «Blackbox» ist, die dann in unterschiedlichen «Graustufen» schrittweise aufgelöst wird.

Bei der Erstellung von Systemen sollte man also

- zuerst generelle Ziele bestimmen,
- dann einen generellen Lösungsrahmen festlegen
- und erst danach den Konkretisierungs- und Lösungsgrad schrittweise vertiefen.

Beispiel:
Wenn ich ein Universitätsgebäude plane, beginne ich mit der Definition der generellen Zielsetzungen, z.B. Angebot von Unterrichtsräumen, Büroarbeitsplätzen sowie Versorgungseinrichtungen für alle Nutzer.

Dann definiere ich einen Lösungsrahmen, z.B. ein Gebäude auf einer bestimmten Fläche auf dem Hönggerberg, das eine bestimmte Anzahl an Räumen mit definierten Funktionen enthält.

Danach kann ich den Konkretisierungsgrad vertiefen, indem ich bspw. entscheide, ob es sich um ein Stahlbeton- oder Holzgebäude oder um ein Gebäude in Skelettbauweise handeln soll.

Ist dies entschieden, vertiefe ich den Konkretisierungsgrad, indem ich die Art der Fassade, der technischen Ausrüstung, Anordnung der Räume etc. tiefer plane.

[4] in diesem Fall: Man versucht, alle relevanten Aspekte des Problems bei der Lösung zu berücksichtigen.

Diese Vorgehensweise lässt sich auch so beschreiben, dass ein Problem zuerst auf einer hohen, allgemeinen Stufe betrachtet wird und dann stufenweise in tieferen Ebenen immer detaillierter ausgearbeitet wird (s. Abb. 1.5). Der benötigte Kenntnisstand in Bezug auf die Modellierung hängt dabei vom Projektfortschritt bzw. der Tiefe der betrachteten Ebene ab. Je weiter ein Projekt fortgeschritten ist, desto mehr Informationen fliessen in das Modell ein.

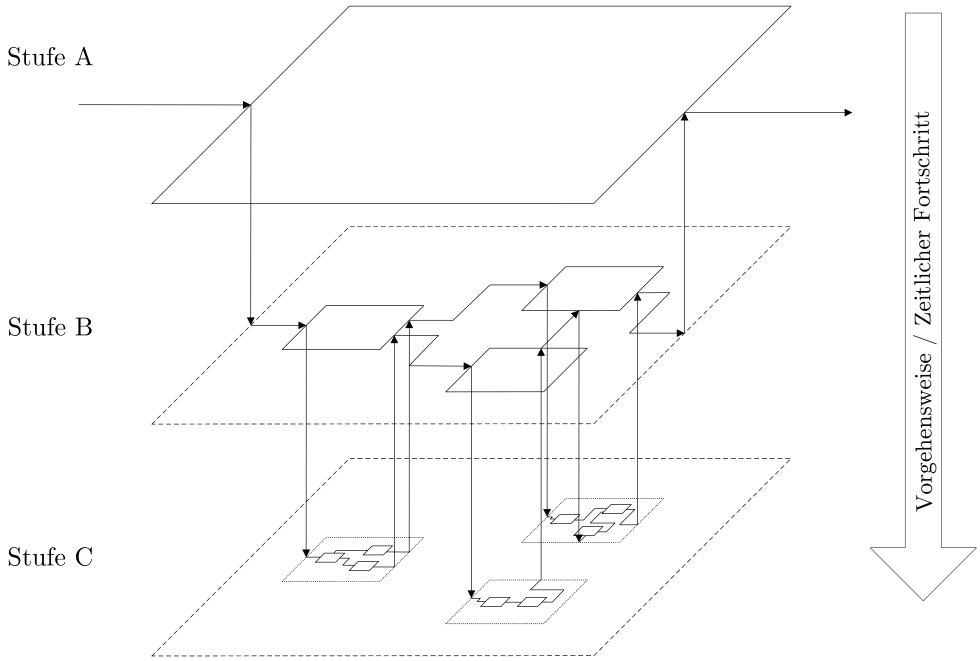



Abbildung 1.5: Abstraktionsebenen

#### 1.2.2.2 Variantenbildung

Das Prinzip der Variantenbildung ist insofern wichtig, als dass es für praktisch jedes Problem mehrere Lösungen gibt, aus denen bestenfalls die optimale ausgewählt wird. Deshalb ist dieses Prinzip ein unverzichtbarer Bestandteil guter Problemlösung. In der Realität ist es aber oftmals so, dass die Variantenstudie gar nicht bzw. unvollständig durchgeführt wird. Dies führt dazu, dass das endgültige Lösungssystem eventuell nicht das bestmögliche ist.

Die Bildung von Varianten setzt voraus, dass man sich auf einer hohen, eher abstrakten Ebene der Grundidee bewusst ist, auf der die Lösungsideen beruhen. Dies hilft, sich den Zusammenhang mit dem Problem in Erinnerung zu rufen und den Blick auf andere – auch denkbare – Lösungen zu schwenken. Auf dieser hohen Ebene stellt sich auch die Frage, welche Betrachtungsweise verwendet werden sollte. Bei tieferen Ebenen, d.h. höherem Detaillierungsgrad, kommt aber auch eine strukturbezogene Betrachtungsweise zum Zuge. Aufbauend auf dem Prinzip «Vom Groben zum Detail» wird die Variantenbildung für jede Ebene durchgeführt.

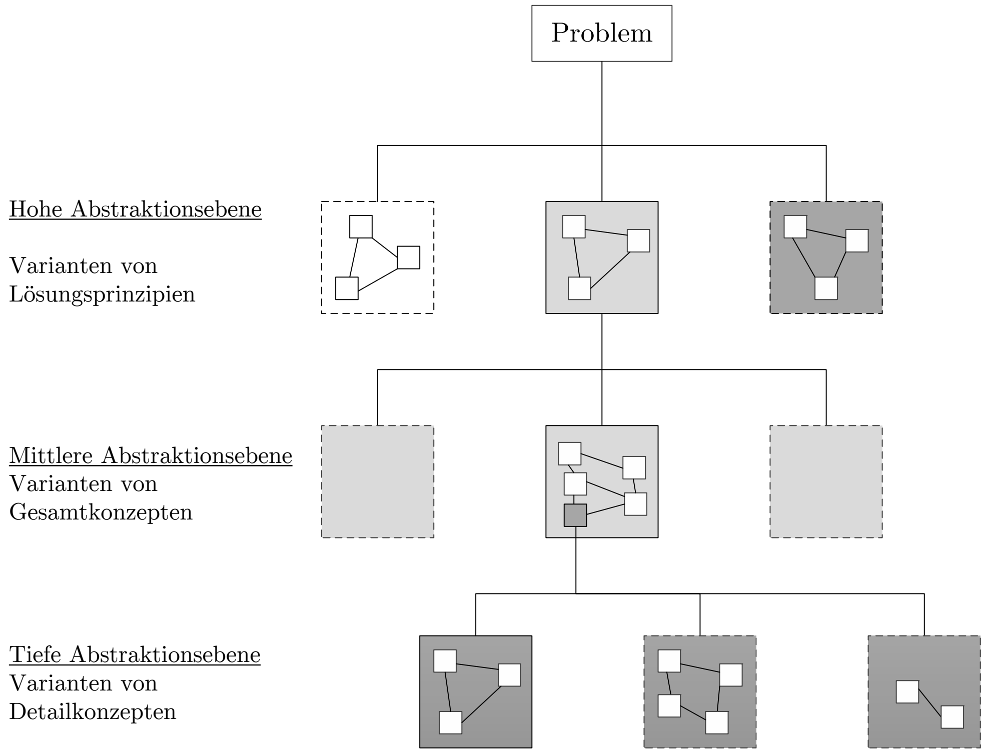



Abbildung 1.6: Variantenbildung in verschiedenen Projektphasen

Bei der Erstellung von Systemen sollten also

- zu jeder Systemebene Varianten erarbeitet, analysiert und verglichen werden und
- die Anforderungen an die Genauigkeit mit jeder Systemebene steigen.

#### 1.2.2.3 Phasengliederung

Um die Systemerstellung oder Problemlösung zu erleichtern, ist es oft sinnvoll, den Erstellungsvorgang in Phasen vorzunehmen. Diese Gliederung in Phasen reduziert die Komplexität des Problems und damit wiederum das Risiko von Fehlentscheidungen.

Das Verständnis des Lebenszyklus' eines Systems ist fundamental für die Anwendung von Systems Engineering. Dabei wird der Prozess der Systementwicklung und -realisierung nach zeitlichen Gesichtspunkten gegliedert (Phasenablauf). Dies wird oft Systems Engineering Prozess genannt.

Abb. 1.7 zeigt einen Lebenszyklus eines Systems.

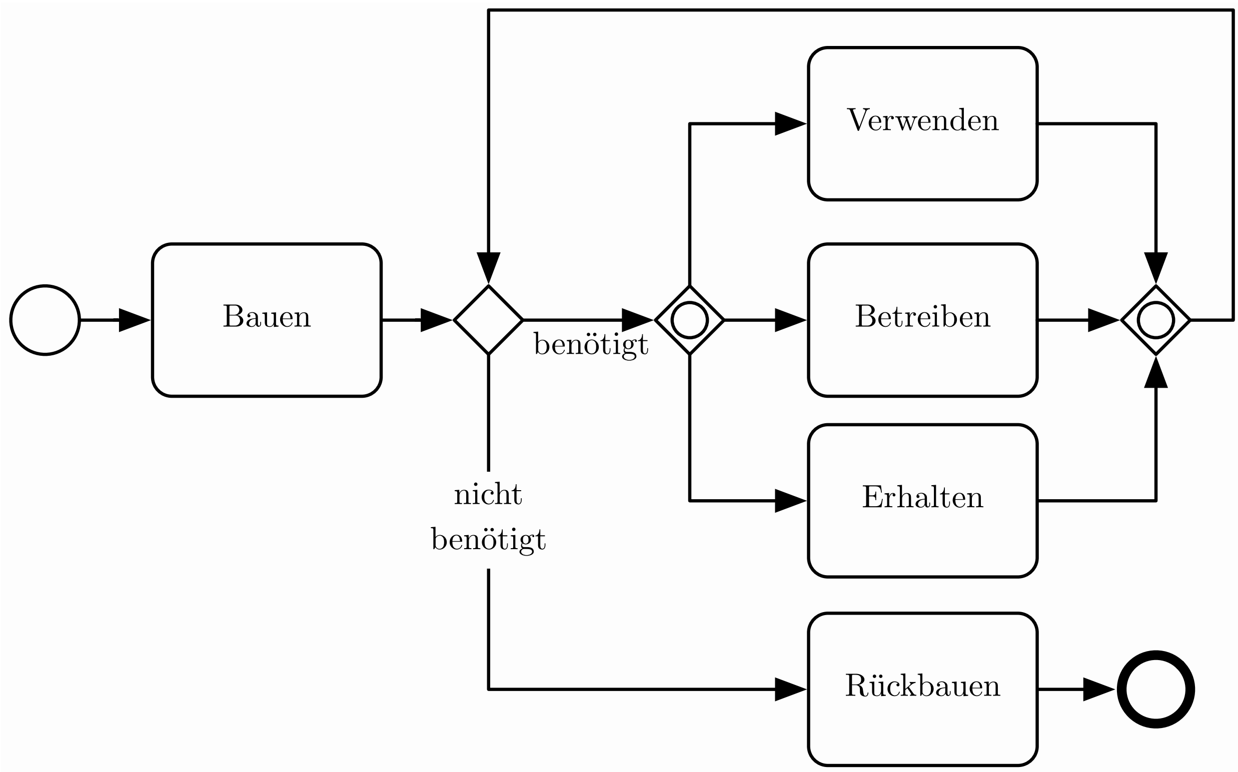



Abbildung 1.7: Lebenszyklus

**Lebenszyklusphasen** Der Lebenszyklus eines Systems kann in Phasen (Lebenszyklusphasen genannt) eingeteilt werden. Diese Phasen sind:

Bauen — Diese Phase reicht vom Anstoss bis zur Fertigstellung und Übergabe des Systems, weshalb sie manchmal auch Systemerstellungsphase genannt wird. Sie kann (und wird meist) weiter unterteilt. Eine genauere Beschreibung dieser Unterteilung findet sich auf Seite 23.

Verwenden — In dieser Phase wird das System vom Verwender genutzt. Der Verwender kann der Systembesitzer sein, dies muss aber nicht sein. Ein Beispiel dafür wäre eine Autobahn. Die Verwender sind hier alle Autofahrer, der Systembesitzer ist allerdings das ASTRA[5]. Diese Phase findet gleichzeitig mit «Betreiben» und «Erhalten» statt.

[5] Bundesamt für Strassen

Betreiben Hier werden alle Aktivitäten des Systembesitzers zusammengefasst, die dafür notwendig sind, dass das System im täglichen Betrieb funktioniert.

Erhalten Die meisten Systeme sind gewissen Alterungserscheinungen unterworfen bzw. verringern im Laufe der Zeit ihre Leistungsfähigkeit. Die Erhaltung wirkt dem entgegen. Sie umfasst also alle Prozesse und Aktivitäten, die den Zustand des Systems feststellen und derart ändern, dass das System die definierten Bedürfnisse dauerhaft erfüllen kann.

Rückbau Wie in Abb. 1.7 ersichtlich, enthält der Lebenszyklus eine Schleife, die untersucht, ob das System in seiner aktuellen Form benötigt wird oder nicht. Wenn das System nicht mehr so benötigt wird, wie es ist, muss es entweder neu- oder umgestaltet oder sogar entsorgt werden. Das System wird in diesem Zuge ausser Funktion gestellt, womit der Lebenszyklus des Systems endet. Bei einer Neu- oder Umgestaltung beginnt dann anschliessend ein neuer Lebenszyklus eines Systems, das das alte System integriert und erweitert.

**Systemerstellungsphasen:** Die Systemerstellungsphasen sind eine genauere Unterteilung der Phase «Bauen» aus dem Lebenzyklus. Grund dafür ist oftmals der Transfer der Verantwortlichkeit für das System nach seiner Realisierung. Abb. 1.8 zeigt die Systemerstellungsphasen.

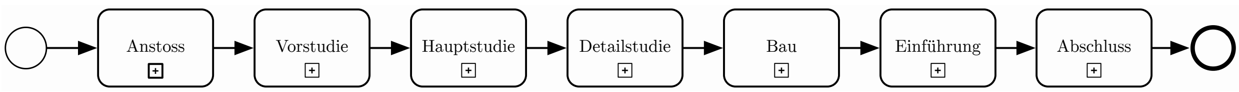



Abbildung 1.8: Systemerstellungsphasen

In vielen Ländern existieren Definitionen für Systemerstellungsphasen, oft auch Projektphasen genannt, in Form von Normen oder Regelungen. Für den Baubereich gelten beispielsweise in Deutschland die Phasen nach HOAI (Honorarordnung für Architekten und Ingenieure), in Österreich die Phasen nach ÖNORM B1801-1 sowie in der Schweiz die Phasen des Leistungsmodells 112 nach SIA (Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein).

Im Folgenden werden die einzelnen Systemerstellungsphasen vorgestellt:

### Anstoss

**Zweck** Hier wird der Unterschied zwischen Wunsch und Wirklichkeit identifiziert und das allgemeine Verständnis des Problems entwickelt.

**Eigenschaften/Attribute** Der Anstoss ist eher unstrukturiert und umfasst die Zeitspanne zwischen dem Empfinden eines Problems und dem Entschluss, etwas Konkretes zu unternehmen.

**Entscheidung** In der Systemerstellungsphase des Anstosses wird der konkrete Projektauftrag erteilt und die erforderlichen Mittel zugeteilt.

**Teil-Checkliste**

☐ Besteht tatsächlich ein Problem?

☐ Ist ein klarer Projektauftrag an den richtigen Adressaten erteilt worden?

☐ Sind Mittel für eine erste Analyse des Problems vorhanden?

### Vorstudie

**Zweck** In der Vorstudie wird das Problem auf oberster Ebene angegangen, sozusagen «im Groben». Es ist vor allem notwendig, mehr Informationen zu beschaffen, sodass die Erstellung des Systems gut gesteuert werden kann; insbesondere wird eine erhöhte Klarheit darüber gefordert,

- welches Problem gelöst werden sollte,
- wie weit der Untersuchungsbereich gefasst werden soll,
- welche Mechanismen wirken,
- in welcher Art und in welchem Umfang ein Bedürfnis nach einer neuen oder geänderten Lösung besteht,
- welchen Anforderungen die Lösung genügen sollte und
- welche allgemeinen Lösungen grundsätzlich denkbar sind.

**Eigenschaften/Attribute** Der eingesetzte Aufwand in der Vorstudie sollte vertretbar sein, d.h. der Detaillierungsgrad sollte so niedrig wie möglich gehalten werden.

**Entscheidung** In dieser Phase ist zu entscheiden, welches allgemeine Lösungsprinzip das erfolgversprechendste ist und damit, in welche Richtung die nachfolgende Hauptstudie gehen soll.

**Teil-Checkliste**

☐ Ist das Problem ausreichend bekannt?

☐ Ist der Gestaltungsbereich ausreichend definiert und bekannt?

☐ Besteht darüber Einigkeit mit dem Auftraggeber?

☐ Sind die Ziele im Sinne der Anforderungen an die Lösung klar?

☐ Besteht eine ausreichende Übersicht über grundsätzlich denkbare Varianten?

☐ Können diese Varianten hinsichtlich ihrer Eignung beurteilt werden?

☐ Sind die kritischen Annahmen bzw. Komponenten bekannt?

### Hauptstudie

**Zweck** In der Hauptstudie wird das in der Vorstudie gewählte Lösungsprinzip und damit die Struktur des Gesamtsystems verfeinert.

**Eigenschaften/Attribute** Der Fokus liegt in der Hauptstudie auf dem konkreten Aufbau der Lösung; es entstehen Gesamtkonzepte (Varianten), die eine fundierte Beurteilung der Funktionstüchtigkeit, der Zweckmässigkeit und der Wirtschaftlichkeit erlauben.

**Entscheidung** In der Hauptstudie ist zu entscheiden, welches Gesamtkonzept den grössten Erfolg verspricht. Es muss entschieden werden, was in der nachfolgenden Detailstudie herausgearbeitet oder vertieft werden soll.

**Teil-Checkliste**

☐ Ist das vorgeschlagene Gesamtkonzept überzeugend und realisierbar (funktionell, wirtschaftlich, personell, organisatorisch,...)?

☐ Besteht eine Übersicht über denkbare Varianten?

☐ Sind die kritischen Komponenten bekannt?

☐ Ist die Situation entscheidungsreif?

☐ Sind die Prioritäten für die weitere Detaillierung bzw. Realisierung klar?

#### Detailstudie

**Zweck** Hier sind für das in der Hauptstudie gewählte Gesamtkonzept detaillierte Lösungskonzepte zu erarbeiten; das heisst, Lösungsteile sind so weit zu konkretisieren, dass sie anschliessend reibungslos «gebaut» und eingeführt werden können.

**Eigenschaften/Attribute** In der Detailstudie ist der Detaillierungsgrad am höchsten. Der Aufwand sollte also entsprechend hoch sein, um zu gewährleisten, dass für den Systembau alle wichtigen Pläne vorhanden sind.

**Entscheidung** In der Detailstudie wird entschieden, welches System wie konkret gebaut werden wird.

**Teil-Checkliste**

☐ Sind die sich aus dem Gesamtkonzept ergebenden Anforderungen an die Detailkonzepte erfüllt?

☐ Kann das Detailkonzept in den Rahmen des Gesamtkonzepts eingeordnet werden, ist es integrierbar?

☐ Erfüllt es die ihm zugedachten Funktionen?

☐ Weist es Eigenschaften auf, die aus der Sicht des Gesamtkonzepts unerwünscht sind?

☐ Ist es so konkretisiert, dass es in der Folge gebaut werden kann?

#### Bau

**Zweck** Hier wird das geplante System hergestellt, also gebaut oder produziert.

**Eigenschaften/Attribute** Da die Planung eines Systems fast nie abschliessend sein kann oder unvorhergesehene Ereignisse eintreten können, ergeben sich während des Systembaus Abweichungen von der Planung, die unbedingt dokumentiert werden müssen. Ausserdem sollten Tests durchgeführt werden, um sicherzustellen, dass das gebaute System den Anforderungen der Planung tatsächlich entspricht.

**Entscheidung** Während des Systembaus muss vor der Systemübergabe über Veränderungen gegenüber der ursprünglichen Planung entschieden werden, z.B. wie sie verändert werden sollten, wer dafür bezahlt und wie die Systemübergabe zu gestalten ist.

**Teil-Checkliste**

☐ Wurde das System anhand der gegebenen Planung gebaut?

☐ Wenn nicht, welche Veränderungen wurden vorgenommen?

☐ Wer bezahlt für vorgenommene Veränderungen?

☐ Wie ist die Systemübergabe zu gestalten?

☐ Wurden alle Änderungen und Ereignisse ausreichend dokumentiert?

### Einführung

**Zweck** Der Zweck der Systemeinführung ist die komplette Übergabe des Systems mit allen relevanten Informationen an den Nutzer.

**Eigenschaften/Attribute** Wichtig in dieser Phase ist es, sicherzustellen, dass die Kommunikation der wichtigen Informationen optimal ist.

**Entscheidungen** Keine

**Teil-Checkliste**

☐ Wurde der Anwender, Betreiber bzw. Nutzer ausreichend in der Nutzung des Systems geschult?

☐ Wurde die Erfüllung von Zielen, Spezifikationen bzw. Gewährleistungen überprüft und von allen Vertragsparteien abgesegnet?

☐ Wurden alle Voraussetzungen zur Übernahme des Systems durch den Auftraggeber, Bauherrn bzw. Betreiber erfüllt?

### Abschluss

**Zweck** In der Phase des Abschlusses der Systemerstellung ist das Ziel, Betriebserfahrungen mit dem System zu sammeln, die für die Verbesserung der vorliegenden Lösung oder für die Gestaltung ähnlicher Systeme genutzt werden sollen.

**Eigenschaften/Attribute** In dieser Phase ist es wichtig, Fehler des Systems objektiv aufzunehmen und zu bewerten. Dabei ist Selbstkritik wichtig.

**Entscheidungen** In dieser Phase müssen die Schlussfolgerungen aus der Erstellung des Systems an die richtigen Stellen weitergeleitet werden, um zu gewährleisten, dass begangene Fehler nicht wieder vorkommen.

**Teil-Checkliste**

☐ Wurden alle Fehler des Systems aufgenommen?

☐ Wurden die aufgenommenen Fehler analysiert?

☐ Wurden die richtigen Schlussfolgerungen für die Erstellung weiterer Systeme gezogen?

☐ Wurden diese Schlussfolgerungen an die relevanten Stellen weitergeleitet, damit diese Fehler bei der nächsten Erstellung nicht mehr auftreten?

#### 1.2.2.4 Problemlösungsprozess

Der Problemlösungsprozess ist ein universell einsetzbarer Ablauf mit einem formalen Aufbau, der die Entwicklung von Systemen (d.h. Problemlösungen) unterstützt. Er hilft dabei, alle Aspekte zum richtigen Zeitpunkt zu berücksichtigen und die optimale Lösung für das Problem zu finden.

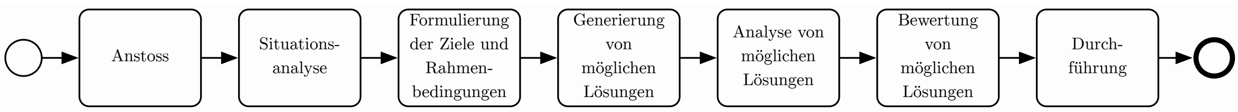



Abbildung 1.9: Schritte des Problemlösungsprozesses

Der Problemlösungsprozess ist eine allgemeine Methodik, die für alle Arten der Problemlösung genutzt werden kann. Wie bei näherer Betrachtung klar wird, steht der Problemlösungsprozess in enger Verbindung mit den anderen Prinzipien des Systems Engineering. Er greift die Prinzipien «Vom Groben zum Detail» und «Variantenbildung» direkt auf und integriert diese. Bezüglich der Phaseneinteilung ist festzustellen, dass der Problemlösungsprozess in jeder Phase der gewählten Einteilung angewendet werden kann und damit Lösungen für alle gegebenen Aufgaben liefert.

Der Problemlösungsprozess wird als Grundlage dieser Vorlesung in Bezug auf die Erstellung der Systeme dienen. Jeder seiner Schritte für die Erstellung von Systemen wird im Laufe der Vorlesung weiter ausgeführt werden. Ausserdem werden wichtige Werkzeuge für jeden seiner Schritte vorgestellt werden. Dies gibt den Studenten ein Werkzeug an die Hand, das es ihnen ermöglicht, Probleme systematisch anzugehen und Systeme zu entwickeln, die den gewünschten Anforderungen entsprechen.

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte kurz näher vorgestellt. Eine nähere Betrachtung folgt im nächsten Kapitel und in der Gesamtheit der Vorlesung.

**Anstoss** Der Anstoss des Problemlösungsprozesses unterscheidet sich in seiner Definition wenig von dem der Phaseneinteilung, d.h. hier wird der Unterschied zwischen Wunsch und Wirklichkeit identifiziert und das allgemeine Verständnis des Problems entwickelt.

**Situationsanalyse** Zweck der Situationsanalyse ist es, sich mit der Ausgangssituation und der Aufgabenstellung vertraut zu machen. Hier wird die Basis formuliert, für die konkrete Ziele zu schaffen sind.

Dies beinhaltet

- die Aufgabenstellung und deren Ausgangssituation zu erkennen,
- das Problemfeld zu strukturieren und abzugrenzen,
- den Eingriffs- bzw. Gestaltungsbereich für die Schritte der Lösungssuche abzustecken und
- die Informationsbasis für die Schritte der Lösungssuche und für die Zielformulierung zu legen.

**Formulierung der Ziele und Rahmenbedingungen** Hier werden die Absichten aller Beteiligten zusammengefasst. Diese wiederum sollen der Lösungssuche zugrunde gelegt werden. Die Formulierungen sollten

- lösungsneutral sein (d.h. noch nicht spezifisch auf eine Art der Lösung ausgerichtet sein),
- vollständig sein,
- präzise und verständlich sein (operational),
- realistisch sein,
- Prioritätensetzung ermöglichen und
- so formuliert werden, dass die Zielerfüllung feststellbar ist.

**Generierung von möglichen Lösungen** Hier werden Lösungsvarianten erarbeitet, die dem Konkretisierungsniveau der jeweils gerade bearbeiteten Phase entsprechen. Die Generierung baut auf den Ergebnissen der Situationsanalyse und der Zielformulierung auf. Sie erfordert sehr viel Kreativität, da

- Lösungskonzepte «erahnt» werden,
- erforderliche Lösungskomponenten erkannt und
- die Lösungskomponenten in ein taugliches Ganzes integriert werden müssen.

**Analyse von möglichen Lösungen** In der Analysephase werden die in der Generierung erarbeiteten Varianten geprüft. Dabei ist festzustellen, ob ein Konzept den gestellten Anforderungen entspricht oder ob es wesentliche Schwachstellen aufweist. Ein Lösungskonzept ist naturgemäss leichter zu «reparieren», solange es nur auf dem Papier existiert.

**Bewertung von möglichen Lösungen** In der Bewertungsphase werden taugliche Varianten einander systematisch gegenübergestellt, um diejenige zu ermitteln, die am besten geeignet ist.

**Durchführung** Im letzten Schritt wird entsprechend dem Ergebnis der Bewertung gehandelt. Je nach Phase, in der der Porblemlösungsprozess angewandt wird, kann die Durchführung z.B. der Beginn der Vorstudie sein (nach dem Anstoss) oder der Bau des Systems (nach den Detailstudien). Um die Konsistenz zu wahren, sollte man sich nur für einzelne Varianten entscheiden und nicht für Kombinationen davon.

## 1.3 Kontrollfragen

Viele Kontrollfragen finden sich zum Ende jedes Kapitels und sollten zum Nachdenken über den Kapitelinhalt. Für manche Fragen gibt es konkrete, eindeutige Antworten, für manche jedoch nicht.

- Ist ein komplexes System immer auch kompliziert?
- Was ist der Unterschied zwischen Input und Import bzw. zwischen Output und Export?
- Ist ein geschlossener Kochtopf ein geschlossenes System?
- Inwiefern sind Input und Output bei der umfeldorientierten Betrachtung wichtig?
- Muss bei anthropogenen Systemen auch auf nicht anthropogene Einflüsse geachtet werden?
- Inwiefern stehen die vier Prinzipien mit den Abstraktionsebenen bei der Erstellung eines Systems in Zusammenhang?
- Was ist der Zusammenhang zwischen den Systemerstellungsphasen (Prinzipien) und dem PLP? Was wird beim PLP noch integriert?
- Was versteht man unter der Durchführung beim PLP?

# 2 Problemlösungsprozess im Detail

## 2.1 Einleitung

Die Lösung eines Problems kann (optimalerweise) mit Hilfe eines Systems erfolgen. Ein System zu entwickeln, das die optimale Lösung eines Problems liefert, ist einfacher, wenn man einem systematischen Prozess folgt. Dieser Prozess wird *Problemlösungsprozess* genannt. Der Problemlösungsprozess kann verwendet werden, um jede Art von Problemen zu lösen, nicht nur zur Erstellung eines Systems.

Im Folgenden werden wir uns jedoch auf das Problem der Systemerstellung beschränken, da dieses in Bezug auf die Studienrichtungen Bauingenieurwesen, Geomatik und Umweltingenieurwesen am häufigsten anzutreffen ist.

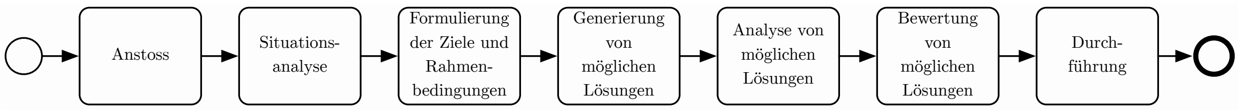



Abbildung 2.1: Problemlösungsprozess

## 2.2 Anstoss

Sinn des Anstosses ist, folgende Fragen mit vertretbarem Aufwand abzuklären bzw. sich über die Aspekte Gewissheit zu verschaffen:

- Wo sind die Grenzen des Problemfeldes bzw. wie weit soll der Untersuchungsbereich gefasst werden?
- Welche Mechanismen wirken im Problemfeld?
- Wird das richtige Problem angegangen?
- In welcher Art und in welchem Umfang besteht das Bedürfnis nach einer neuen oder geänderten Lösung?
- Welchen Bereich sollte eine neue oder geänderte Lösung umfassen?
- Welchen Anforderungen sollte die Lösung genügen?
- Welche Varianten
  - sind grundsätzlich denkbar und
  - versprechen den meisten Erfolg hinsichtlich der Beurteilungskriterien in der Vorstudie?

## 2.3 Situationsanalyse

### 2.3.1 Allgemein

Sinn der Situationsanalyse ist es, das Problem zu definieren, dessen Greifbarkeit zu erhöhen sowie den Bedarf zu identifizieren. Dazu gehört,

- Probleme und Ursachen sowie deren Zusammenhänge zu verstehen,
- das Problem- bzw. Untersuchungsfeld zu strukturieren und abzugrenzen,
- den Eingriffs- bzw. Gestaltungsbereich für die Lösungssuche abzustecken und
- die Informationsbasis für die folgenden Schritte zu schaffen.

Meist besteht eine Diskrepanz zwischen Wunsch und Wirklichkeit. (Wichtig: Es gibt sowohl die *tatsächliche* als auch die *wahrgenommene* Wirklichkeit!)

- Die Erschaffung eines Systems entsteht oft aus persönlichem Interesse oder aus jemandes Lust und Laune heraus.
- In manchen Fällen glauben die Planungsingenieure, die Bedürfnisse der Kunden zu kennen, ohne die Kunden in den Planungsprozess involviert zu haben. (Dies bedeutet nicht, dass man – wider besseres Wissen – nur das machen sollte, was die Kunden verlangen; genauso falsch ist es aber auch, die Kunden gar nicht zu berücksichtigen.)

Beispiele:

- Situationsanalyse Spital:
  - Die Erreichbarkeit des Spitals ist nicht akzeptabel (es ist nicht möglich, innerhalb einer gewissen Zeit ein Spital zu erreichen)
  - Die Kosten sind ungewöhnlich hoch (eine Operation im betrachteten Spital kostet etwa zwei Mal so viel wie in ähnlichen Spitälern)
  - Die internen Wege sind zu lang (Der Fussweg von Abteilung A zu Abteilung B dauert 10 Minuten)
- Situationsanalyse Brücke:
  - Die Leistungsfähigkeit ist nicht ausreichend (in Stosszeiten bildet sich ein Stau vor der Brücke)
  - Bei der Planung wurde nicht auf eine einfache Erhaltung Rücksicht genommen (Instandhaltungsmassnahmen lassen sich nicht durchführen, ohne eine Spur zu schliessen)

Ganz allgemein ist der Problemlösungsprozess darauf ausgerichtet, die wahrgenommenen Diskrepanzen zwischen Wunsch und Wirklichkeit zu verringern oder sogar verschwinden zu lassen.

Am Ende der Situationsanalyse sollte man eine Definition des WAS, aber noch nicht des WIE erhalten:

- WELCHE Funktionen werden erwartet? (primäre, sekundäre)
- WAS muss gemacht werden?
- WANN muss es gemacht werden?
- WO soll es gemacht werden?

Die Situationsanalyse sollte detailliert genug durchgeführt werden, sodass eine ausreichende Entscheidungsgrundlage für die nächsten Schritte vorhanden ist.

Es lohnt sich, hier etwas mehr Zeit zu investieren, da in der Realisierungsphase notwendige Korrekturen sehr teuer werden können.

### 2.3.2 Betrachtungsweise

Komplexe Situationen können mit eindimensionalen Betrachtungen und Darstellungen nicht ausreichend erfasst werden. Deshalb werden hier verschiedene Betrachtungsweisen vorgestellt, die sich – je nach Art des Problems – bewährt haben.

#### 2.3.2.1 Systemorientiert

Die systemorientierte Betrachtungsweise basiert auf der Frage «Wie schaut das System aus?». Der wichtigste Punkt hierbei ist es, Strukturmodelle für Systeme, Systemteile und relevante Teile der Umgebung zu erarbeiten. Dies kann auf mehreren Abstraktionsebenen passieren (d.h. diese Betrachtungsweise ist in verschiedenen Projektphasen anwendbar). Ein Beispiel ist die Einflussgrössenanalyse. Hier werden die verschiedenen Einflüsse auf das System identifiziert.

Beispiel Stadtspital Waid und Wärmebad Käferberg:

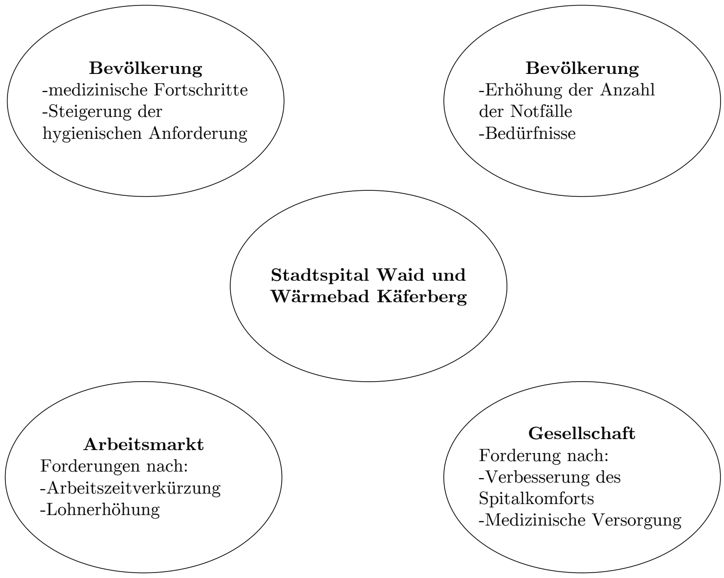



Abbildung 2.2: Einflussgrössenanalyse am Beispiel Stadtspital Waid und Wärmebad Käferberg

Eine anderes Beispiel einer systemorientierten Betrachtungsweise ist die Wirkungsanalyse. Diese hat das Ziel, ein «Black-Box»-Modell (wie in Kap. 1.1.2.3 auf Seite 16 erklärt) zu erstellen.

Beispiel für eine Wirkungsanalyse:
Es interessiert nur, welche Ein- und Auswirkungen ein System erzeugt


Abbildung 2.3: Systemorientierte Betrachtungsweise: Wirkungsanalyse

Eine weitere systemorientierte Betrachtungsweise ist die statische Strukturanalyse. Sie dient vor allem dazu, sich ein räumliches Bild über die Anordnungen von verschiedenen Bereichen zu machen. Man kann sich leicht vorstellen, dass es den Arbeitsablauf in einem Betrieb erheblich vereinfacht, wenn Produktionsschritte, die nacheinander stattfinden, in angrenzenden Räumen stattfinden. Ausserdem erscheint es sicherlich logisch, das Teilelager neben den Produktionsräumen zu haben statt weit davon entfernt.

Dies kann mit Hilfe einer statischen Strukturanalyse sehr übersichtlich dargestellt werden.

Beispiel räumliche Anordnung eines Industriebetriebs:

<table>
<tr><td rowspan="3">Roh-, Hilfs- u. Betriebs-stoffe</td><td>Energie-zentrale</td><td colspan="2">Reparatur-werkstatt</td><td>Transport-zentrale</td><td>Abfall-sammlung</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Giesserei</td><td colspan="2">Schmiede</td><td>Oberflächen-behandlung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teilelager</td><td>Maschinen-montage</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Waren-eingang</td><td colspan="4" rowspan="4">Mechanische Bearbeitung</td><td>Elektro-montage</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fertig-lager</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Kantine Verwalt-ung</td></tr>
<tr><td>Spedition</td></tr>
</table>

Abbildung 2.4: Systemorientierte Betrachtungsweise: Statische Strukturanalyse am Beispiel einer räumlichen Anordnung eines Industriebetriebs

Eine vierte systemorientierte Betrachtungsweise ist die dynamische Strukturanalyse. Diese entspricht in etwa einem Ablaufdiagramm, in dem der Prozess des Systems dargestellt wird.

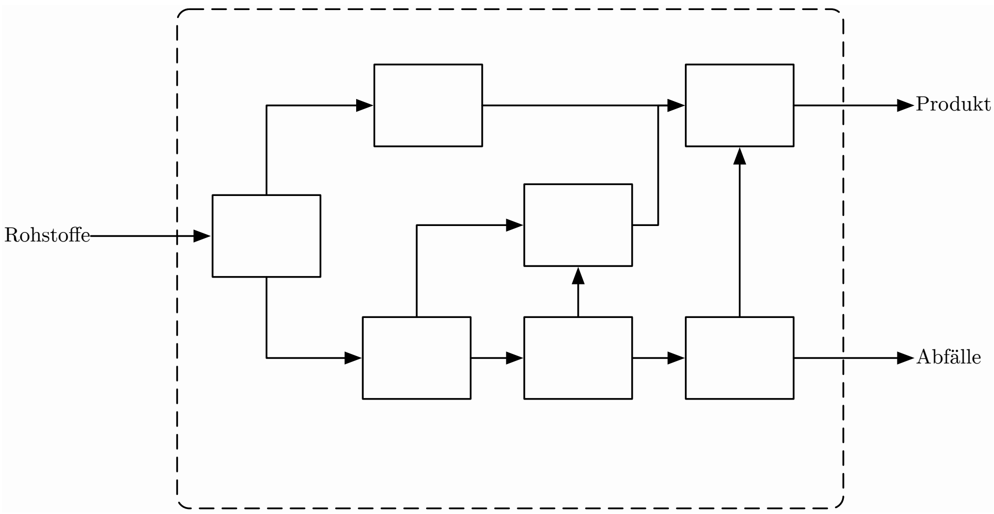



Abbildung 2.5: Systemorientierte Betrachtungsweise: Dynamische Strukturanalyse

#### 2.3.2.2 Ursachenorientiert

Die ursachenorientierte Betrachtungsweise basiert auf der Frage «Warum ist das Ergebnis so wie es ist?». Sie hat folgende Zwecke:

- Offenliegende Symptome einer unbefriedigenden Situation, einer sich abzeichnenden Gefahr oder Chance
  - zu identifizieren,
  - zu beschreiben,
  - zu sammeln,
  - zu gliedern und
  - auf Vollständigkeit, Doppelspurigkeit und Widersprüchlichkeit zu prüfen.
- Diese Symptome den entsprechenden Elementen einer Sachverhalts-Darstellung zuzuordnen, dabei verborgene Elemente aufzuspüren und sie in Verbindung zu bringen sowie Hintergründe aufzudecken.

Mithilfe einer ursachenorientierten Betrachtungsweise werden die möglichen Ursachen, Ursachenketten und Ursachenvernetzungen herausgearbeitet. Eine schematische Darstellung ist in den Abb. 2.6 bis 2.10 gezeigt.

*Einstufig linearer Zusammenhang:*

Es herrscht eine klare Ursache-Wirkungs-Beziehung, und je eine Ursache ist für eine Wirkung verantwortlich.

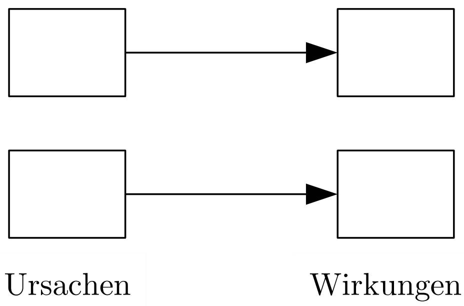



Abbildung 2.6: Einstufig linearer Zusammenhang

*Einstufig vernetzter Zusammenhang:*

Einer Gruppe von Ursachen steht eine Gruppe von Wirkungen gegenüber, allerdings kann eine Ursache mehrere Wirkungen hervorrufen, genauso wie eine Wirkung von mehreren Ursachen hervorgerufen werden kann. Allerdings gibt es nur eine «Stufe», d.h. zwischen den Ursachen und Wirkungen gibt es keine Zwischenelemente.

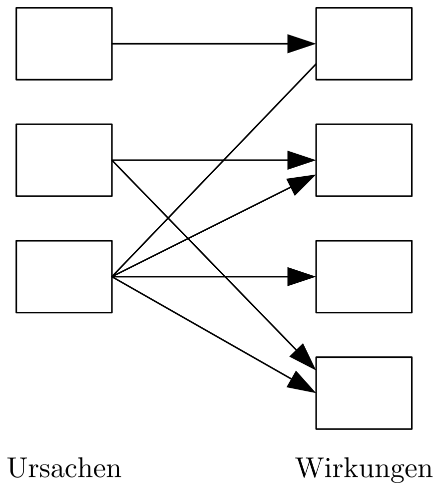



Abbildung 2.7: Einstufig vernetzter Zusammenhang

*Mehrstufig vernetzter Zusammenhang:*

Im Gegensatz zum einstufig vernetzten Zusammenhang stehen mehrere Zwischenschritte zwischen Ursache und Wirkung. Trotzdem gibt es eine klare Abfolge von Ursachen und Wirkungen, d.h. es gibt immer Ursachen, die am Anfang stehen und Wirkungen, die am Ende herauskommen.

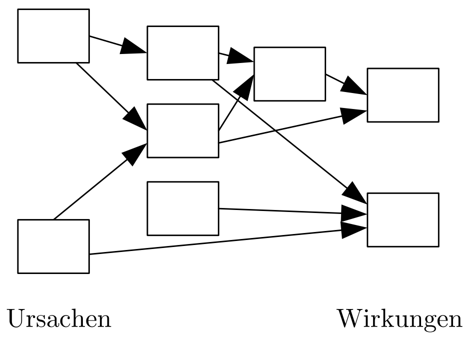



Abbildung 2.8: Mehrstufig vernetzter Zusammenhang

*Komplex vernetzter Zusammenhang:*

Bei einem komplex vernetzten Zusammenhang existieren keine eindeutigen Ursache-Wirkungs-Beziehungen mehr, das System enthält mindestens eine Rückkopplungsschleife (siehe dazu auch Kap.1.1.1 auf Seite 12). Dies ist die häufigste Form aller Zusammenhänge.

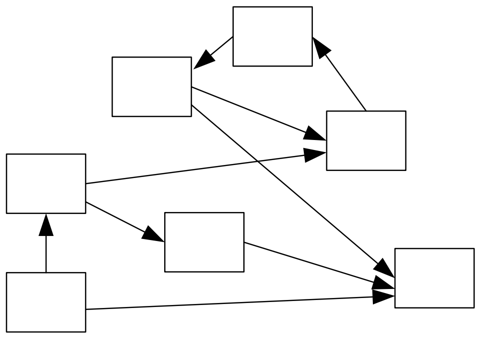


Abbildung 2.9: Komplex vernetzter Zusammenhang

*Fischgrat-Zusammenhang:*

Einer Gruppe von fischgrätenähnlich zusammenhängenden Ursachen steht nur eine Wirkung gegenüber.

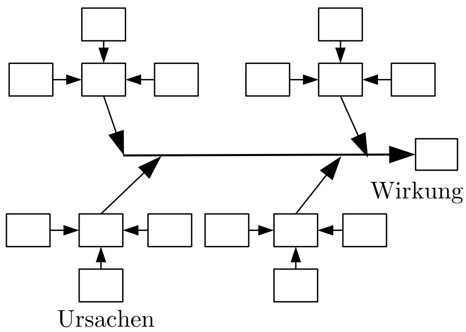



Abbildung 2.10: Fischgrat-Zusammenhang

#### 2.3.2.3 Lösungsorientiert

Die lösungsorientierte Betrachtungsweise basiert auf der Frage «Was muss ich tun, um etwas bestimmtes zu erreichen?»

Der Blick wird dabei auf Eingriffs- und Gestaltungsmöglichkeiten und deren Abgrenzung gerichtet. Dies ist vielfach schon nötig, um überhaupt das Problem zu verstehen und zu realistischen Zielvorstellungen zu gelangen.

Ein Problem im Sinne der lösungsorientierten Betrachtungsweise ist die Differenz zwischen der IST- und der SOLL- Vorstellung.

Funktionsanalysen fokussieren auf die funktionale Betrachtung von Elementen eines Systems bzw. auf die Ablaufschritte eines Prozesses:

- Was wird ausgeführt?
- Wie wird es ausgeführt?
- Womit wird es ausgeführt?

Dies dient dazu, den Ablauf zu verstehen, damit eine Möglichkeit gefunden werden kann, die Differenz zwischen IST und SOLL zu bereinigen.

#### 2.3.2.4 Zukunftsorientiert

Die zukunftsorientierte Betrachtungsweise basiert auf der Frage: «Wenn ich längerfristig plane, was ändert sich?» Das Ziel ist die Herausarbeitung der möglichen Geschehnisse in der Zukunft.

Fragestellungen sind:

- Wie wird sich die Situation kurz-, mittel- und langfristig entwickeln, wenn nicht eingegriffen wird (Entwicklung des Problemfelds)?
- Welche Entwicklungen sind im Umfeld zu erwarten?
- Was resultiert daraus für das Lösungs- und Eingriffsfeld?
- Was bedeutet dies für die Dringlichkeit einer Lösung?
- Welche Auswirkungen haben mögliche Eingriffe und Lösungen des Untersuchungsbereichs, in welche Richtung und auf welche Art wirken sie?

Im Gegensatz zu der ursachenorientierten und der lösungsorientierten Betrachtungsweise liegt hier der Fokus explizit auf der zukünftigen Entwicklung.

### 2.3.3 Techniken

Es gibt eine Fülle von Techniken, die bei der Situationsanalyse hilfreich sind. Diese lassen sich grob in drei Gruppen aufteilen (Informationsbeschaffung, Informationsaufbereitung und Informationsdarstellung). Exemplarisch werden zwei Methoden näher vorgestellt.

Zur Informationsbeschaffung sind folgende Techniken oft hilfreich:

- Befragungstechniken
- Beobachtungstechniken
- Datenbanksysteme
- **Delphi-Methode**
- Interview
- ...

Zur Informationsaufbereitung sind folgende Techniken oft hilfreich:

- **ABC-Analyse**
- Regressionsanalyse
- Korrelationsanalyse
- Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Delphi-Methode
- ...

Zur Informationsdarstellung sind folgende Techniken oft hilfreich:

- Ablaufdiagramm
- Flussdiagramm
- Zuordnungsstrukturen
- Histogramm
- Graphen
- ...

#### 2.3.3.1 Delphi-Methode

Die Delphi-Methode ist ein Hilfsmittel zur Strukturierung intuitiven Denkens. Die Idee dahinter ist, Diskussionen zwischen den Teilnehmern zu vermeiden, da dadurch unerwünschte gruppendynamische Effekte auftreten können. (So tritt z.B. Teilnehmer A sehr dominant auf, weshalb sich Teilnehmer B nicht traut, seine Meinung zu sagen). Aus diesem Grund wird die Delphi-Methode meist schriftlich und anonym durchgeführt.

1. Jede Person bekommt eine Problembeschreibung und reicht einen Lösungsvorschlag ein.
2. Die Antworten werden zusammengefasst und es wird jedem Gruppenmitglied ein anonymisiertes Feedback gegeben, inkl. den Lösungsvorschlägen der anderen Teilnehmer.
3. Jede Person berücksichtigt, ob sie ihre vorherigen Ansichten modifizieren will oder mehr Informationen beitragen möchte.
4. Dies wird iterativ fortgesetzt, bis ein Konsens gefunden wird.

#### 2.3.3.2 ABC Analyse

Die ABC-Analyse dient dazu, die wichtigsten Punkte, Vorschläge etc. zu identifizieren, damit die Prioritäten entsprechend angepasst werden können. Am einfachsten lässt sich dies anhand eines Beispiels erklären:

Eine Handelsfirma möchte wissen, bei welchen Artikeln es sich lohnt, die Lieferverträge neu zu verhandeln. Dazu soll die ABC-Analyse verwendet werden.
Vorgehen:

- Die Artikel werden nach absteigendem Umsatz sortiert
- Für die Artikel werden laufend Zwischensummen gebildet
- Danach werden sowohl die Anzahl der Artikel sowie der zugehörige kumulierte Umsatz in %-Werte umgerechnet

Dies ergibt z.B. folgende Grafik:

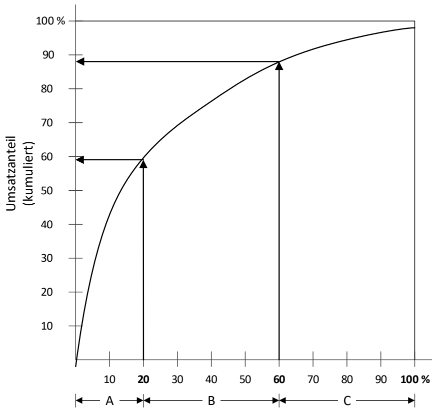



Abbildung 2.11: ABC-Analyse

Man sieht, dass 20% der Artikel (Gruppe A: 0-20%) hier für etwa 58% des Umsatzes verantwortlich sind. Hier könnte es sich also am meisten lohnen, die Lieferverträge neu zu verhandeln, da eine kleine Änderung einen grossen Einfluss auf den Umsatz hat. Gruppe B (20-60%) ist in diesem Beispiel für weitere 30% des Umsatzes verantwortlich, weshalb sich auch hier eine Neuverhandlung der Lieferverträge lohnen könnte, wenngleich der Einfluss wahrscheinlich deutlich geringer ausfällt. Gruppe A und Gruppe B zusammen sind hier für etwa 88% des Umsatzes verantwortlich, weshalb sich eine Neuverhandlung der Lieferverträge der Gruppe C (60-100%) nicht lohnen würde, da der Einfluss auf den Umsatz vermutlich äusserst gering ist.

## 2.4 Formulierung der Ziele und Rahmenbedingungen

### 2.4.1 Allgemein

In alltäglicher Sprache sind Ziele «Sachen, die erreicht werden sollten». Abhängig davon, wie Ziele behandelt werden, können sie in drei verschiedene Kategorien eingeteilt werden.

**Rahmenbedingungen:** Ziele, die unbedingt erreicht werden müssen. Sie beschreiben eine Bedingung, welche zwingend erfüllt werden muss, wobei jedoch nicht unbedingt klar ist, ob von einem bestimmten Attribut mehr oder weniger erwünscht ist.

**Sollziele:** Ziele, die mit hoher Priorität erreicht werden sollen. Sie definieren auf einer relativen Skala, welche Ziele eher und welche eher nicht erwünscht sind und geben so eine Stossrichtung an, in welche der Entschluss vorzugsweise führen soll.

**Wunschziele:** Ziele, die mit tieferer Priorität erreicht werden sollen.

Wenn erwünscht ist, dass sowohl eine generelle Bedingung als auch eine spezielle Präferenz erfüllt werden muss, dann muss man diese in eine Rahmenbedingung und ein Sollziel aufteilen. Grundsätzlich ist noch zu beachten, dass Aspekte, die Rahmenbedingungen darstellen, nicht gegeneinander abgewogen werden können, weswegen es keinen Sinn ergibt, ihre relative Wichtigkeit abzuschätzen.

Um Übersicht und Klarheit über die Ziele und deren Prioritäten zu behalten, ist es von Vorteil, einen Zielkatalog zu erstellen. Dies ist eine Liste aller Ziele und Rahmenbedingungen, die normalerweise folgendes beinhaltet:

- Klassifikation der Ziele (Rahmenbedingungen / Soll- / Wunschziele)
- Zielobjekte – das Objekt, das verändert werden soll
  - Frage: Woran sind die Ziele gebunden?
  - Beispiel: Eine Glasfabrik
- Zieleigenschaften – die Eigenschaften des Objekts, die erreicht werden sollen
  - Frage: Was soll erreicht werden?
  - Beispiel: Reduktion der Schadstoffbelastung
- Zielausmasse – der Grad der Erfüllung der Objekteigenschaften
  - Frage: Wie viel soll erreicht werden?
  - Beispiel: Eine Reduktion um 25% gegenüber letztem Jahr
- Zeitbezüge – die Zeit, in der etwas erreicht werden soll
  - Frage: Wann soll es erreicht werden?
  - Beispiel: Innerhalb von 5 Jahren
- Ortsbezeichnungen – der Ort, an dem etwas erreicht werden soll
  - Frage: Wo soll es wirksam werden?
  - Beispiel: Messbare Reduktion in bestimmten Kantonen

| Beispiel Zielkatalog für einen Tunnel:<br>Verbindung zweier Autobahnabschnitte im Gebirge | |
|---|---|
| Rahmenbedingungen | Die gesetzlichen Anforderungen bezüglich Verkehrssicherheit erfüllen<br>Kapazität: mind. 1'000 Fahrzeuge pro Stunde in beide Richtungen<br>Kosten unter 2 Mrd. CHF<br>Verbindung zwischen A und B |
| Sollziele | Kosten unter 1.5 Mrd. CHF<br>Zeit bis Inbetriebnahme: drei Jahre<br>Unterhaltskosten (Elektrizität für Licht + Lüftung, Reparaturen, Reinigung) unter 500'000 CHF pro Jahr<br>Mindestens 2 h betriebsfähig bei Stromausfall (Lüftung/Licht intakt) |
| Wunschziele | Kosten (Unterhalt) möglichst gering<br>Kapazität: über 1500 Fahrzeuge pro Stunde in beide Richtungen<br>Fahrzeit unter fünf Minuten (Tempo 100)<br>Tiefe Unfallrate<br>Verwendung von Zusätzen im Beton zur Verminderung des $CO_2$-Ausstosses<br>Lange Betriebsdauer bis zur nächsten Instandsetzung |

### 2.4.2 Richtlinien

Um Ziele klar und vernünftig zu formulieren, ist es sinnvoll, sich an folgende Prinzipien zu halten:

#### Grundsätzliche Prinzipien

**Wertorientierung** Das «grosse Ganze», sprich: die Verbesserung der Gesamtsituation sollte bei der Formulierung einzelner Ziele stets im Auge behalten werden, um nicht am Ende das Hauptziel der ganzen Operation zu verfehlen. Zu beachten ist, dass dies nichts mit Wertvorstellungen im moralischen Sinne zu tun hat.

**Lösungsneutralität** Die Funktionen bzw. Wirkungen (das «Was?») von Lösungen sollen beschrieben werden und nicht die Lösungen selbst.

**Operationalität** Ziele sollen so beschrieben sein, dass sie in einem Entscheidungsprozess umgesetzt werden können. Das heisst, sie sollen möglichst präzise, verständlich und realistisch sein und damit die sachlichen Gegebenheiten der Situation, aber auch das soziale Umfeld und die subjektiven Wertvorstellungen der Entscheidungsträger, Meinungsbildner bzw. der Betroffenen berücksichtigen. Dabei kann es natürlich zu Widersprüchen bzw. Konflikten kommen.

#### Konkrete Kriterien für die Zielformulierung

**Vollständigkeit** Ziele sollen alle wichtigen Anforderungen an die gewünschte Lösung beinhalten.

**Feststellbarkeit** Die Erfüllung eines Zieles soll feststellbar sein (z.B: «Reduktion des $CO_2$-Ausstosses *um 25%*» statt «Reduktion des $CO_2$-Ausstosses»)

### 2.4.3 Zielkonflikte

Zielkonflikte, d.h Unverträglichkeiten zwischen verschiedenen Zielen, kommen häufig vor. Zur systematischen Überprüfung und Darstellung von Verträglichkeiten und Unverträglichkeiten dient die Zielkonfliktmatrix.

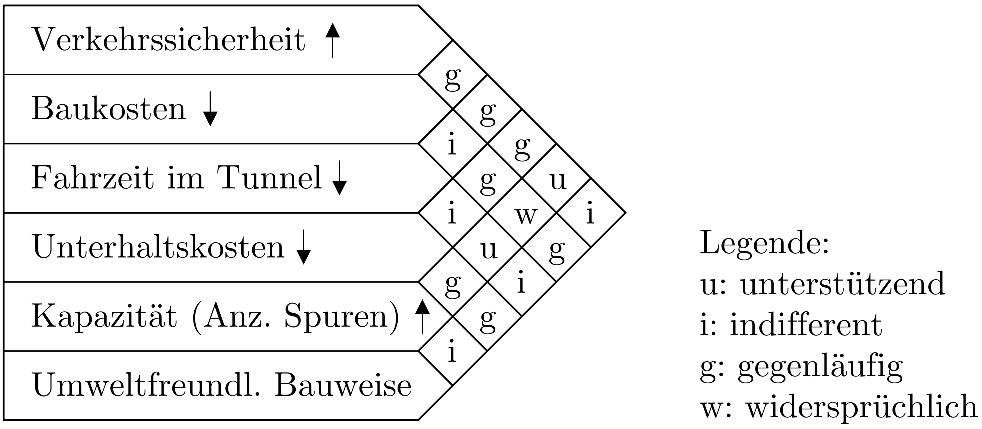



Abbildung 2.12: Zielkonfliktmatrix für das Tunnel-Beispiel

Eine klare Differenzierung zwischen den Attributen «gegenläufig» und «widersprüchlich» ist nicht immer ganz intuitiv. Daher werden diese Begrifflichkeiten nachfolgend an dem in Abb. 2.12 dargestellten Beispiel kurz erläutert:

Widersprüchlich sind Ziele dann, wenn ihre jeweilige Erfüllung aufgrund von Naturgesetzen oder rein logischen Zusammenhängen im Widerspruch miteinander steht. So widersprechen sich für den Bau eines neuen Tunnels beispielsweise das Ziel, eine möglichst hohe Kapazität zu haben, und die Zielsetzung möglichst niedriger Baukosten, da für eine höhere Anzahl Spuren mehr Baumaterial verwendet und ein grösserer Tunnel durch den Fels getrieben werden muss, was natürlicherweise mit steigenden Kosten einhergeht.

Sind Ziele gegenläufig, dann besteht zwar prinzipiell auch die Tendenz einer Widersprüchlichkeit, es besteht allerdings noch Handlungsspielraum, sofern man diese Problematik früh genug in der Projektentwicklung bemerkt. So kann häufig durch gute Planung oder durch Verwendung neuer Techniken doch noch die Erfüllung beider Ziele erreicht werden. Alternativ kann – falls sich keine direkte Lösung anbietet – auch eine Gewichtung der verschiedenen Ziele vorgenommen werden, um zu einem sinnvollen Kompromiss zu kommen.

### 2.4.4 Anforderungsanalyse

#### 2.4.4.1 Allgemein

Um Ziele zu definieren (insbesondere technische Leistungsmessgrössen eines Systems), benötigt man oft eine Anforderungsanalyse.

#### 2.4.4.2 Anforderungstypen

Oft ist es hilfreich, Anforderungen in die folgenden drei Kategorien aufzuteilen, in denen die entsprechenden Fragen im Rahmen einer Anforderungsanalyse beantwortet werden:

**Systemanforderungen**

- Was sind die primären bzw. die sekundären Funktionen des Systems?
- Wie sollte das System verwendet werden und wie lange?
- Was sind die Leistungs- bzw. physikalischen Parameter?

> Beispiel Systemanforderungen Tunnel:
>
> - Primäre Funktion: Beide Seiten des Berges miteinander zu verbinden
> - Sekundäre Funktion: Die Fahrzeit von A nach B zu verringern
> - Systemverwendung: Der Tunnel muss mindestens 100 Jahre verwendbar sein
> - Leistungsparameter/physikalische Parameter: Röhrendurchmesser, Anzahl Spuren, Verkehrskapazität,...

**Betriebsanforderungen**

- Welche Umweltbedingungen sind zu erwarten?
- Wie wird das System betrieben und was wird dazu benötigt?
- Wie wird das System betreut? Von wem?

> Beispiel Betriebsanforderungen Tunnel:
>
> - In der Tunnelmitte hat es konstant 14°C, an den Portalen hat es bis zu -28°C im Winter und +31°C im Sommer
> - Es sollte am Tunnelportal eine Fläche für Verkehrskontrollen der Kantonspolizei vorhanden sein
> - Benötigte Einrichtungen und Ressourcen sind: Belüftungssystem, Überwachung, Brandschutzsysteme, elektronische Leiteinrichtungen, Arbeitskräfte, ...

**Erhaltungsanforderungen**

- Wie sollte es überwacht werden?
- Wann sollten Massnahmen durchgeführt werden?
- Was für Massnahmen werden benötigt?
- Wie wird sich die Durchführung von Massnahmen auf die Interessengruppen (Benutzer, Nachbarn, ...) auswirken?

Erhaltungsanforderungen sind oft das Ergebnis eines Erhaltungskonzepts, welches auch zur Definition der technischen Leistungsmessgrössen und zur Veränderung im Systementwurf führt.

#### 2.4.4.3 Funktionsanalyse

Die Funktionsanalyse ist ein iterativer Prozess, in dem die Systemanforderungen in detaillierte Entwurfskriterien übersetzt und die später für die Betreibung und Erhaltung des Systems benötigten Ressourcen identifiziert werden.

Eine Funktionsanalyse gewährleistet, dass alle Facetten der Entwicklung des Systems berücksichtigt und alle Elemente des Systems erkannt und definiert werden.

Die Ergebnisse einer Funktionsanalyse sind:

- Eine Systemarchitektur auf oberster Ebene, die auf den «Anforderungen» und der «Struktur» eines Systems basiert
- Eine integrierte Beschreibung der funktionalen Systemarchitektur, die eine Grundlage für alle folgenden Entwurfs- und Erhaltungsaktivitäten bietet
- Eine Grundlage, von der ausgehend alle physischen Ressourcenanforderungen identifiziert und nachvollzogen werden können

Das Ergebnis wird mittels eines funktionalen Flussblockdiagramms (FFBD) dargestellt, welches

- alle Vorgänge im Lebenszyklus eines Systems beinhaltet,
- alle relevanten Abläufe und Schnittstellen darstellt,
- zuerst darstellt, WAS notwendig ist, und dann, WIE man es erreichen kann und
- so weit vertieft ist, dass es möglich ist, den einzelnen Funktionen Ressourcen zuzuordnen (Geld, Arbeit, Infrastruktur etc.).

Ein Beispiel eines FFBD, erstellt mit BPMN 2.0[1], ist in Abb. 2.13 zu sehen.

[1] Business Process Model and Notation 2.0 (ein Standard, um Funktionsabläufe grafisch darzustellen)

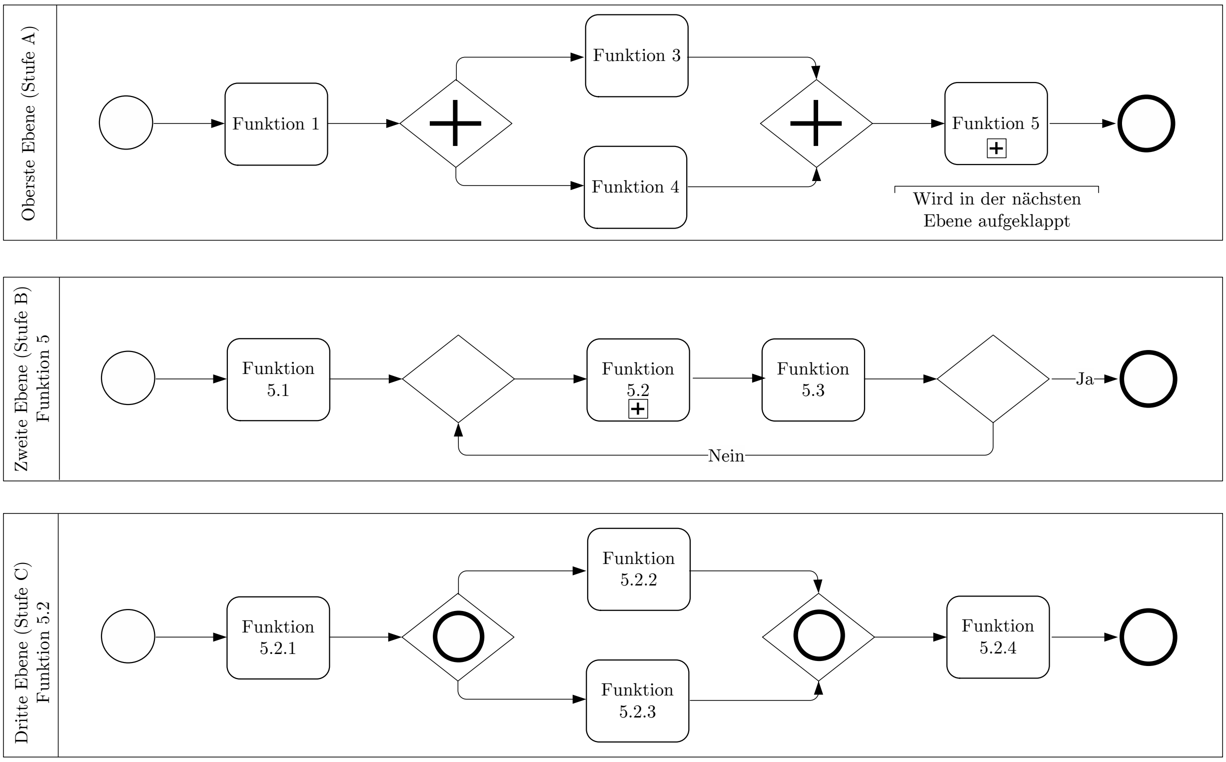



Abbildung 2.13: FFBD - Funktionales Flussblockdiagramm

#### 2.4.4.4 Technische Leistungsmessgrössen

Zusätzlich zu allgemeinen Informationen über das, was das System leisten sollte, bekommt man aus der Anforderungsanalyse die technischen Leistungsmessgrössen.

Technische Leistungsmessgrössen sind *messbare* Einheiten, die dazu dienen, eine Zielerreichung überprüfen zu können. Sie sind abgeschätzte, vorhergesagte oder gemessene quantitative Werte, welche die Anforderungen beschreiben. Technische Leistungsmessgrössen werden verwendet, um die Systementwurfsprozesse zu verbessern und die Wahrscheinlichkeit, dass die richtigen Attribute in einem System berücksichtigt werden, zu erhöhen.

Beispiele:

- Zuverlässigkeit (Reliability) – Bsp. Maschine: Durchschnittliche Lebensdauer eines Bauteils in Stunden
- Verfügbarkeit (Availability) – Bsp. Tunnel: Die Strecke ist nur an einem Tag pro Jahr wegen Wartungsarbeiten gesperrt
- Sicherheit (Safety) – Bsp. Tunnel: Die Breite ist so gross bemessen, dass statistisch nur 1.6 Unfälle pro Jahr passieren
- Reaktionszeit Logistik – Bsp. Maschine: Es dauert maximal zwei Tage, bis ein Ersatzteil geliefert wird
- Informationsbearbeitungszeit – Bsp. Behörde: Es dauert maximal 48 Stunden, bis eine Email beantwortet ist

## 2.5 Generierung von möglichen Lösungen

### 2.5.1 Allgemein

Das allgemeine Vorgehen bei der Entwicklung von Lösungen besteht aus folgenden Schritten:

- Analysieren der Gestaltungsaufgabe
- Generieren und Sammeln von Lösungsideen (die Bestimmung möglicher Systemebenen, Handlungsoptionen oder Herangehensweisen, die zur Erfüllung der Bedürfnisse dienen)
- Systematisches Ordnen tauglich erscheinender Lösungsideen
- Erarbeiten von möglichen Varianten (Lösungsvarianten)
- Systematisches erstes Analysieren der möglichen Lösungsvarianten
- Um- bzw. Weiterbearbeitung

### 2.5.2 Generelle Entwurfsprinzipien

Der Entwurf von Lösungsideen ist ein kreativer Prozess. Es lohnt sich trotzdem, die folgenden Prinzipien zu berücksichtigen.

*Prinzip der minimalen Präjudizierung*: Es werden Lösungsideen und -varianten bevorzugt, die weiteren Entwicklungen, Veränderungen, Detaillierungen und Auswechslungen von Lösungsbausteinen die grössten Freiräume offenhalten.

*Prinzip der Minimierung von Schnittstellen:* Bei der Strukturierung eines Systems werden möglichst wenige, einfach und eindeutig definierte Schnittstellen zwischen Baugruppen oder organisatorischen Einheiten eingeplant.

*Prinzip des modularen Aufbaus:* Die Lösungsbausteine werden so gestaltet, dass sie Funktionen erfüllen, die mehrfach und auch in anderen Systemen verwendet werden können, bzw. dass handelsübliche Bausteine oder gängige organisatorische Regelungen eingesetzt werden.

### 2.5.3 Variantenerstellung

#### 2.5.3.1 Allgemein

Das Denken in Varianten ist ein wichtiger Grundsatz bei jeder Problemlösungsstrategie. Es ist immer von Vorteil, nach weiteren Lösungsideen und Lösungen (=Varianten) zu suchen. Dabei sind jedoch auch ein paar wichtige Dinge zu beachten:

- Varianten sollen immer auf der gleichen logischen Ebene stehen:

Beispiel Bewältigung eines Kapazitätsengpasses:

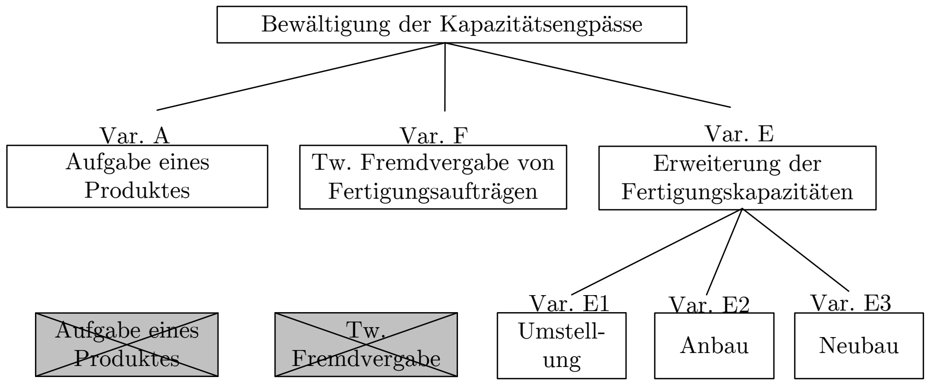



Abbildung 2.14: Unechte Varianten

Varianten A, F und E sind untereinander gleichwertig, da sie ein prinzipielles Vorgehen beschreiben. Varianten E1, E2 und E3 sind auch untereinander gleichwertig, da sie Variationen der Variante E darstellen. Es wäre jedoch nicht zulässig, die Varianten A und F mit den Varianten E1, E2 und E3 zu vergleichen, da diese auf einer unterschiedlichen logischen Ebene stehen.

- Das Lösungsspektrum sollte reduziert werden
- Die Rahmenbedingungen sind einzuhalten

Die Reduzierung des Lösungsspektrums dient dazu, aus vielen ungeordneten Lösungsideen Lösungskategorien zu machen. In Abb. 2.14 wären dies z.B. die Varianten(kategorien) A, F und E. Danach muss anhand der Rahmenbedingungen überprüft werden, ob die Lösungen alle Bedingungen erfüllen oder ob sie wegen Nichteinhaltung gestrichen werden müssen.

#### 2.5.3.2 Vorgehen für Variantenerstellung

Generell sind zwei Vorgehensweisen möglich:

- Von aussen nach innen: Man geht von den gewollten Wirkungen einer Lösung und deren Beziehungen zur Umgebung aus, um auf dieser Basis die erforderlichen Bestandteile der Lösung zu erarbeiten
- Von innen nach aussen: Es wird vorerst auf ein in die Umgebung eingebettetes Gesamtkonzept verzichtet. Man beginnt mit dem Zusammenfügen bekannter und vorhandener Lösungskomponenten, gestaltet sie nach den funktionellen und leistungsmässigen Erfordernissen und versucht, sie nachträglich an die Umgebung anzupassen. Dieses Vorgehen ist zwar schneller, aber dafür ist es weniger sicher, eine passende Lösung zu finden. Im Übrigen verstösst diese Vorgehensweise gegen ein Grundprinzip des SE: *«vom Groben zum Detail»*

Von dieser generellen Vorgehensweise ausgehend, können mit Hilfe von verschiedenen – im Folgenden beschriebenen – Strategien Lösungen gefunden werden. Oft können auch Kombinationen dieser Strategien verwendet werden.

Je grundsätzlicher die Entscheidungen sind, die aufgrund eines Planungsschrittes getroffen werden müssen, desto eher sollte in Richtung einer Mischung zwischen zyklischer und einstufig-optimierender

Strategie tendiert werden. Unter bestimmten Voraussetzungen ist dabei auch die lineare mehrstufig-optimierende Strategie geeignet. Die «Optimierungsspanne» sollte sich dabei jedoch aus Aufwandsgründen über möglichst wenige Stufen erstrecken. Mit abnehmendem Innovationsgrad gewinnt die nicht-optimierende Strategie und das Routinevorgehen an Bedeutung (Detailstudien, Systembau).

**Unstrukturierte Strategien** *Trial und Error* als individuelle Suchstrategie: Man probiert so lange, bis eine akzeptable Lösung erreicht wird. Dieses Vorgehen mag für einfache Problemstellungen manchmal funktionieren, bei schwierigeren Aufgaben ist der «Lerneffekt» durch die mangelnde Struktur aber sehr gering und führt deshalb zu sehr langen Bearbeitungszeiten.

*Brainstorming* als kooperative Suchstrategie: Brainstorming ist eine gute Möglichkeit, neue Ideen zu sammeln. Der Vorteil der Strukturlosigkeit ist, dass die Kreativität mehr Platz hat, da sie nicht durch vorgegebene Strukturen eingeschränkt ist. Als Nachteil ist zu sehen, dass durch die mangelnde Struktur eine Kategorisierung der Suchstrategien manchmal schwierig ist.

**Lineare Strategien** Lineare Strategien zeichnen sich durch eine Suche nach Lösungsvarianten ohne Möglichkeit und Notwendigkeit der Rückkehr auf frühere Entscheidungsstufen aus.

*Routinevorgehen:*

Bei einem Routinevorgehen werden die Suchschritte nacheinander abgearbeitet, es findet weder Vergleich noch Optimierung statt.

Abbildung 2.15: Routinevorgehen

*Nicht-optimierende lineare Strategie:*

Bei jedem Suchschritt wird so lange nach einer funktionstüchtigen Teillösungsvariante gesucht, bis eine gefunden wird; dann geht man zum nächsten Schritt.

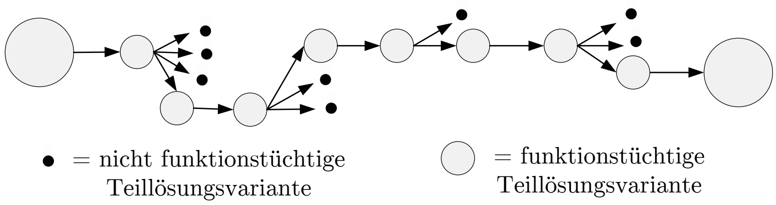



Abbildung 2.16: Nicht-optimierende lineare Strategie

*Einstufig-optimierende lineare Strategie:*

Bei jedem Suchschritt wird eine gewisse Anzahl von Teillösungsvarianten gesucht. Alle funktionstüchtigen Teile werden verglichen und der optimale davon ausgewählt; dann geht man zum nächsten Schritt.

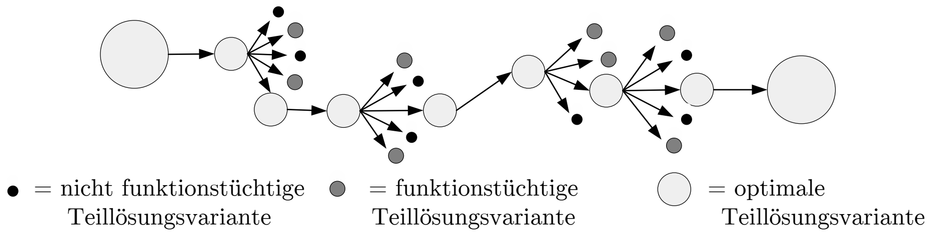



Abbildung 2.17: Einstufig-optimierende lineare Strategie

*Mehrstufig-optimierende lineare Strategie:*

Bei jedem Suchschritt wird eine gewisse Anzahl von Teillösungsvarianten gesucht. Alle funktionstüchtigen Teile werden notiert und von diesen ausgehend, wird für jede davon wieder ein Suchschritt erstellt. Dies ergibt eine baumartige Struktur, die in Kap. 7 auf Seite 167 näher erklärt wird.

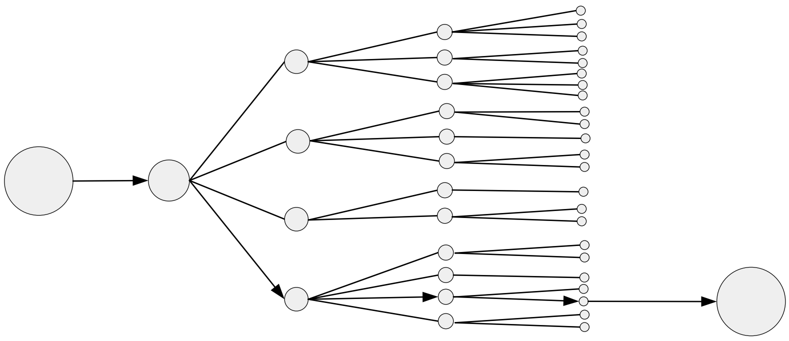


Abbildung 2.18: Mehrstufig-optimierende lineare Strategie

**Zyklische Strategien:** Zyklische Strategien werden angewandt, wenn ein lineares Vorgehen nicht geeignet ist. Diese sind den linearen Strategien ähnlich, jedoch gibt es immer noch ein «Abbruchkriterium», d.h. wenn an einem gewissen Punkt ein Kontrollwert überschritten wird, heisst es «Zurück zum Start».

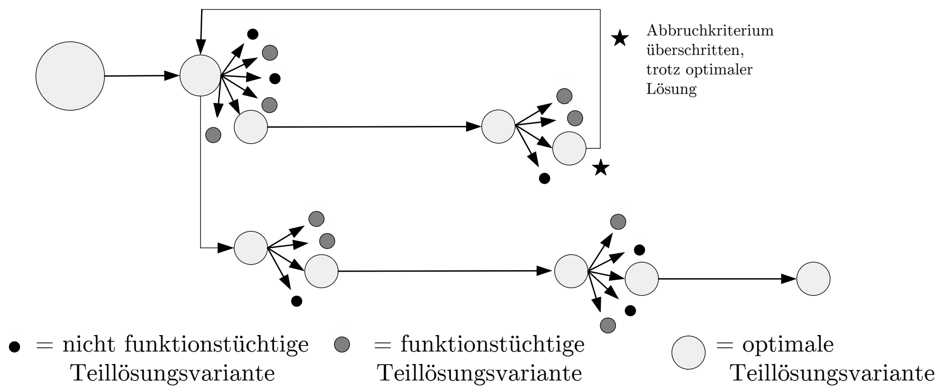



Abbildung 2.19: Zyklische Strategie

## 2.6 Analyse von möglichen Lösungen

### 2.6.1 Allgemein

Bei der Analyse der im vorigen Schritt entwickelten Lösungsvarianten werden diese in Bezug auf

- die Erfüllung aller Rahmenbedingungen und
- die Optimierung der Zielfunktion

überprüft.

Während die Generierung als aufbauend-«konstruktiver» Schritt im Problemlösungsprozess bezeichnet werden kann, ist die Analyse von möglichen Lösungen der kritische, analytisch-«destruktive» Schritt. Das bedeutet, die Varianten werden auf ihre Eignung bezüglich der gestellten Anforderungen und auf wesentliche Schwachstellen geprüft und gegebenenfalls verworfen.

Dieser Schritt ist sinnvoll, da festgestellte Schwachstellen der Lösungsvarianten naturgemäss leichter zu «reparieren» sind, solange diese nur auf dem Papier existieren.

In diesem Schritt geht es insbesondere darum, festzustellen, ob

- formale Aspekte, wie z.B. die vereinbarten Rahmenbedingungen, erfüllt werden,
- die einzelnen Lösungsvarianten auf dem für die entsprechende Phase «richtigen» Konkretisierungsniveau stehen oder ob unwichtige Teile zu detailliert sind und wesentliche Teile noch nicht einmal «angedacht» wurden,
- die Lösungsvariante integrationsfähig ist («Blick nach aussen»),
- die Funktionsweise einer Lösungsvariante erkennbar ist und sie damit beurteilt werden kann («Blick nach innen»),
- Fragen der Betriebstüchtigkeit (wie z.B. Sicherheit, Zuverlässigkeit, Bedienbarkeit, Wartbarkeit etc.) beantwortet werden können und
- die Voraussetzungen und Konsequenzen der Wahl der gerade analysierten Lösungsvariante in wirtschaftlicher, technischer, personeller, sozialer, emotionaler, ökologischer u.ä. Hinsicht beurteilt werden können.

### 2.6.2 Eliminierung

Untaugliche Varianten werden eliminiert durch:

- Rahmenbedingungen (Randbedingungen und Beschränkungen), die sich aus der Situation ergeben und deren Beeinflussung vom Gestalter, Entwerfer, Konstrukteur bzw. von der auftraggebenden oder zielsetzenden Instanz aus als nicht möglich bzw. nicht wünschenswert bezeichnet wurden
- Funktions- und Leistungsgrössen, die als Rahmenbedingungen vorgegeben wurden

Eine Machbarkeitsanalyse ist ein häufig verwendetes Werkzeug, um zu überprüfen, ob eine Lösungsvariante eliminiert werden muss oder nicht. In einer Machbarkeitsstudie werden die Varianten bezüglich der festgelegten Projektanforderungen überprüft.

Es gibt viele verschiedene mögliche Varianten, Probleme zu lösen; die Anzahl der Lösungen muss auf einige machbare Lösungsvarianten eingegrenzt werden, die mit den Terminbedingungen und sonstigen verfügbaren Ressourcen (z.B. Menschen, Materialien und Geld) vereinbar sind. Der Typ der Machbarkeitsanalyse hängt vom betrachteten System ab. Bei der baulichen Veränderung eines Gebäudes sind z.B. die folgenden Aspekte zu beachten:

- Gesetzliche Aspekte
- Finanzielle Aspekte
- Technische Aspekte
- Politisch-gesellschaftliche Aspekte

### 2.6.3 Attribute

Um die Eignung einer Lösungsvariante objektiv beurteilen und anhand der gesetzten Ziele bewerten zu können, müssen die Attribute, die zu einer solchen Beurteilung herangezogen werden, klar definiert sein. Attribute sind Eigenschaften eines Systems, die mithilfe bestimmter Leistungsmessgrössen oder Charakteristika beschrieben werden. Im Folgenden werden einige häufig verwendete Attribute näher erläutert:

Die **Funktionsfähigkeit** eines Systems leitet sich von den Leistungscharakteristika ab, die mit der technischen Leistung des Systems zusammenhängen.

Mögliche Leistungsmessgrössen der Funktionsfähigkeit sind:

- Transportkapazität
- Geschwindigkeit
- Fläche
- Tragfähigkeit
- Raumanzahl

Beispiel Transportkapazität: Ist das Bahnnetz in der Lage, die vorgegebene Anzahl Personen pro Tag zu transportieren?

Die **Zuverlässigkeit** ist ein Attribut des Entwurfs und der Installation, die den erfolgreichen Betrieb des Systems über den gesamten Lebenszyklus betrifft.

Mögliche Leistungsmessgrössen der Zuverlässigkeit sind:

- Durchschnittliche Zeit zwischen Versagenseintritten (Kehrwert der Ausfallrate)
- Wahrscheinlichkeit des Versagenseintritts
- Wahrscheinlichkeit, das Lebensende zu erreichen

Beispiel Wahrscheinlichkeit des Versagenseintritts: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Schwellentyp in einem Bahnnetz 20 Jahre lang verwendet werden kann?

Die **Instandhaltungsfreundlichkeit** ist ein Attribut, das anzeigt, wie einfach, genau, sicher und wirtschaftlich die Durchführung von Erhaltungsmassnahmen ist.

Mögliche Leistungsmessgrössen der Instandhaltungsfreundlichkeit sind:

- Durchschnittliche für Instandsetzungsmassnahmen verwendete Zeit
- Durchschnittliche für präventive Erhaltungsmassnahmen verwendete Zeit
- Aktive Instandhaltungszeit
- Maximale Instandhaltungszeit
- Logistische Wartezeit
- Gesamte Ausfallzeiten durch Instandhaltungsmassnahmen oder Anzahl der Arbeitsstunden für Instandhaltungsmassnahmen
- Kosten für Instandhaltungsmassnahmen

Beispiel Logistische Wartezeit: Wie gross ist die Zeitspanne zwischen der Entscheidung, alle Fenster im Gebäude zu ersetzen, und dem Zeitpunkt, an dem alle Fenster eingebaut sind?

Die **Gebrauchstauglichkeit** betrifft die Schnittstellen zwischen Mensch und Software, Mensch und Hardware, Mensch und Anlagen etc.

Mögliche Leistungsmessgrössen der Gebrauchstauglichkeit sind:

- Barrierefreiheit
- Maximale Verformung der Bauteile
- Maximale Deckenhöhe

Beispiel Deckenhöhe: Wie hoch sollten die Decken in einem Bürogebäude sein?

Die Charakteristik der **Sicherheit** befasst sich mit der Absicherung, dass durch das System keine Personen oder andere Systeme zu Schaden kommen.

Mögliche Leistungsmessgrössen der Sicherheit sind:

- Durchschnittliche Zeit zwischen Zwischenfällen
- Schwere des eingetretenen Zwischenfalls
- Anzahl der betroffenen Personen
- Einflussradius des Zwischenfalls

Beispiel Schwere des eingetretenen Zwischenfalls: Wie viele Todesfälle sind aufgrund einer Explosion in einem Chemiebetrieb eingetreten?

Die Attribute der **Produzierbarkeit** und der **Entsorgungsfreundlichkeit** beschreiben,

- wie einfach und wirtschaftlich etwas produziert und
- wie einfach und wirtschaftlich etwas entsorgt werden kann.

Mögliche Leistungsmessgrössen der Produzierbarkeit sind:

- Produktionskosten pro Produkt
- Zeitaufwand pro Produkt
- Abfallmenge pro Produkt
- Abfallkosten pro Produkt

Beispiel Produktionskosten pro Produkt: Wie teuer ist die Maschine, die zur Herstellung von Automobilen notwendig ist?

Das Attribut der **Erschwinglichkeit** hat Einfluss auf die Budgetbeschränkung. Dabei sind die gesamten Lebenszykluskosten und nicht nur die Kosten der Systemakquisition zu berücksichtigen!

Mögliche Leistungsmessgrössen der Erschwinglichkeit sind:

- Herstellungskosten
- Planungskosten
- Unterhaltskosten
- Entsorgungskosten

Beispiel Entsorgungskosten: Was kostet der Abriss eines Gebäudes und das Recycling der einzelnen Baukomponenten?

### 2.6.4 Gewichtung der Attribute

Bei der Bewertung spielt nicht nur die Art der betrachteten Attribute eine Rolle, sondern auch deren Gewichtung. Es ist oft nicht möglich, eine Lösungsvariante zu finden, die alle Attribute optimiert. Es kann z.B. passieren, dass sich Attribute durch Beschränkungen (wie das gegebene Budget oder andere knappe Ressourcen) oft gegenläufig beeinflussen, d.h., dass die Verbesserung eines Attributs die Verschlechterung eines anderen verursacht. Dies ist ähnlich zu den Zielkonflikten auf Seite 42. Daher ist es notwendig, die Gewichtung der verschiedenen Attribute abzuwägen.

Beispiele für sich gegenläufig beeinflussende Attribute:

- Höhere Leistung und ein fortgeschrittener funktionaler Entwurf können die Verlässlichkeit, die logistische Wartezeit und die Lebenszykluskosten erhöhen (Funktionsfähigkeit vs. Instandhaltungsfreundlichkeit)
- Zu viel Verlässlichkeit kann sehr teure Systemelemente erfordern und damit sehr hohe Kosten verursachen (Zuverlässigkeit vs. Erschwinglichkeit)
- Je mehr Züge auf einer Strecke fahren, desto weniger Zeit bleibt für die Wartungsarbeiten (Instandhaltungsfreundlichkeit vs. Funktionsfähigkeit)

### 2.6.5 Modellentwicklung

Um die Analyse von Lösungsvarianten zu unterstützen, kann es sinnvoll sein, eines oder mehrere Modelle des Systems zu entwickeln. Ein Modell stellt eine vereinfachte Repräsentation der realen

Welt dar, das die Aspekte der Situation in Bezug auf die aktuelle Fragestellung analysiert und abstrahiert. Dabei können Modelle für einzelne Systemkomponenten und je nach Stadium der Entwicklung erstellt werden. Die Darstellung der verschiedenen Abstraktionsebenen allein ist bereits ein solches Modell (siehe Abb. 1.5 on page 20).

Das Modell ist nicht der Entscheidungsträger selbst, unterstützt diesen aber in der Entscheidungsfindung.

Modelle

- ermöglichen es, ein Problem als Einheit zu betrachten und alle wichtigen Parameter gleichzeitig zu berücksichtigen,
- decken Beziehungen zwischen verschiedenen Aspekten des Problems auf, wenn keine verbale Beschreibung vorhanden ist,
- machen den Vergleich vieler verschiedener Lösungsvarianten möglich und helfen schnell und effizient bei der Auswahl der besten davon,
- helfen bei der Erklärung von Situationen und bei der Identifikation von «Ursache und Wirkung»-Beziehungen,
- ermöglichen die Prognose von zukünftigen Ereignissen und
- unterstützen die Identifikation von Unsicherheits- und Risikobereichen.

Modelle sollten

- einfach genug sein, dass sie gut verständlich und zu beeinflussen sind, aber gleichzeitig ausreichend gut die Realität abbilden, sodass sinnvolle Ergebnisse in einer vernünftigen Zeitperiode erzeugt werden können.
- die Faktoren von grosser Relevanz beleuchten und solche mit wenig Relevanz ausblenden,
- eine zuverlässige Reproduzierbarkeit der Ergebnisse ermöglichen und
- einfache Modifikationen oder Erweiterungen ermöglichen, sodass zusätzliche Parameter berücksichtigt werden können.

## 2.7 Bewertung von möglichen Lösungen

### 2.7.1 Allgemein

Nachdem die möglichen Lösungsvarianten eingehend analysiert wurden, ist es nun notwendig, diese zu bewerten, um sich schlussendlich für eine Lösungsvariante zu entscheiden. Die objektive Entscheidungsfindung ist die ausschlaggebende Komponente einer guten Problemlösung und steht am Ende des Bewertungsprozesses. Unglücklicherweise tendieren Menschen dazu, nicht rational oder unter objektiven Gesichtspunkten zu entscheiden, sofern sie dabei nicht systematisch unterstützt werden. Die subjektive Wahrnehmung spielt hierbei oft eine grosse Rolle und verhindert die Wahl der optimalen Lösungsvariante.

Generell existieren verschiedene Entscheidungsarten, denen verschiedene Bewertungsmethoden zugrunde liegen. Zunächst sind bewusste und unbewusste Entscheidungen zu unterscheiden. Bei der unbewussten Entscheidung wird entschieden, ohne sich der Wahl zwischen verschiedenen Lösungsvarianten überhaupt bewusst zu sein; die Bewertung und Entscheidung findet unbewusst statt.

Ist klar, dass eine Entscheidung zu treffen ist, können diese bewussten Entscheidungen wiederum in solche unterteilt werden, für die Bewertungs- und Entscheidungsroutinen bestehen, und solche, für die dies nicht der Fall ist. Bewertungs- und Entscheidungsroutinen kommen oft in Form von vorgegebenen «Wenn, dann ...»-Abläufen oder Checklisten bzw. Bewertungstabellen vor.

Sind keine Bewertungs- und Entscheidungsroutinen vorhanden, kann die Bewertung und Entscheidung entweder methodisch unterstützt oder improvisiert getroffen werden. Bei Improvisierung besteht die Gefahr, dass relevante Kriterien nicht beachtet werden und somit nicht die optimale Lösungsvariante ermittelt wird. Daher ist eine methodisch unterstützte Bewertung und Entscheidung wünschenswert und steht im Fokus dieser Vorlesung.

### 2.7.2 Werkzeuge zur Bewertung und Entscheidung

Es existieren viele Werkzeuge zur Unterstützung einer methodischen Entscheidungsfindung. Im Folgenden werden diese – bis auf die Argumentenbilanz – nur kurz vorgestellt, während sie in den verbleibenden Vorlesungen im Detail behandelt werden.

- Die **Argumentenbilanz** ist ein einfaches Mittel, um Lösungsvarianten zu bewerten. Dazu werden die in der Analyse ermittelten Eigenschaften der Lösungsvarianten daraufhin untersucht, ob es sich bei ihnen um einen Vorteil oder einen Nachteil handelt. Diese Vor- und Nachteile werden daraufhin einander gegenübergestellt, optimalerweise in Tabellenform. Tab. 2.1 zeigt ein Beispiel einer Argumentenbilanz für die Wahl einer neuen Wohnung. Aufgrund dieser Argumentenbilanz ist es möglich, bei einfachen Systemen, bei denen die Gewichtungen der einzelnen Attribute klar sind, mit wenig Aufwand eine methodisch unterstützte Entscheidung zu treffen.

| | **Vorteile** | **Nachteile** |
|---|---|---|
| Wohnung A | kurzer Schul- und Arbeitsweg | relativ laut |
| | oberstes Stockwerk, freier Blick | Deckenheizung |
| | gute Isolation | wenig sympathische Nachbarn |
| | Freunde in der Nähe | teuerste Wohnung |
| Wohnung B | attraktive Umgebung | umständlicher Arbeitsweg |
| | gute Einkaufsmöglichkeiten | keine Bekannten in der Nähe |
| | Fernwärmeanschluss | kleinste Wohnung |
| | günstige Miete | wenig Raumreserven |
| Wohnung C | gute Einkaufsmöglichkeiten | unattraktive Wohngegend |
| | wenig Strassenlärm | langer Arbeitsweg |
| | grösste Wohnung | schlechte Isolation |
| | günstige Wohnung | unzweckmässiger Grundriss |

Tabelle 2.1: Argumentenbilanz

- Die **Optimierung** kommt in all ihren Formen hauptsächlich bei der Bewertung von Lösungsvarianten sowie bei der Entscheidung für die beste Lösung zum Einsatz. Teile des Optimierungsvorgangs betreffen aber auch noch die Schritte der Synthese und Analyse. Einige Beispiele der Optimierung werden in Kap. 3 vorgestellt. Im Detail wird die Lineare Optimierung mit einer und mehreren Zielsetzungen in Kap. 4 vorgestellt. In Kap. 5 wird die Optimierung mithilfe von Netzwerkmethoden vorgestellt.

- **Entscheidungstabellen** und die entsprechenden Auswahlmethoden werden in Kap. 6 genauer vorgestellt. Bei diesen Methoden werden die Lösungsvarianten nach verschiedenen Attributen beurteilt, d.h., jeder Lösungsvariante wird für jedes Attribut ein bestimmter Wert zugeordnet. Je nach Methode werden nun entweder gewisse Lösungsvarianten eliminiert, um die Auswahl einzugrenzen, oder es wird eine optimale Lösung ermittelt.
- **Entscheidungsbäume** werden in Kap. 7 vorgestellt. Entscheidungsbäume setzen voraus, dass Entscheidungen aufgrund von gewissen Ereignissen getroffen werden und dass diese Ereignisse mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eintreten. Die möglichen Ereignisse und Entscheidungen werden durch Verzweigungen im Entscheidungsbaum dargestellt, mit dem komplexe Entscheidungswege übersichtlich dargestellt werden können. Oft spielt die Entwicklung dieser Ereignisse über einen bestimmten Zeitraum eine Rolle.
- Die **Wirtschaftlichkeitsrechnung** und ihre Methoden werden in den Kap. 8, 9 und 10 näher erläutert. In der Wirtschaftlichkeitsrechnung werden Lösungsvarianten anhand ihres finanziellen Werts beurteilt. Kosten und Nutzen werden einander gegenübergestellt und bilanziert. Auch Faktoren wie Teuerung und Zinsertrag werden in der Wirtschaftlichkeitsrechnung berücksichtigt.

## 2.8 Durchführung

Die Durchführung schliesst den Problemlösungsprozess ab. Hier wird entsprechend dem Ergebnis der Bewertung gehandelt. Je nach Phase, in der der Porblemlösungsprozess angewandt wird, kann die Durchführung z.B. der Beginn der Vorstudie sein (nach dem Anstoss) oder der Bau des Systems (nach den Detailstudien).

## 2.9 Kontrollfragen

- Nenne und beschreibe verschiedene Betrachtungsweisen einer Situation/eines Problems.
- Was wird bei einer Situationsanalyse gemacht, was nicht?
- Entspricht die systemorientierte Betrachtungsweise der umfeldorientierten Betrachtung?
- Nenne verschiedene Arten von Ursache-Wirkungs-Beziehungen.
- Welche Betrachtungsweise soll mit Vorzug verwendet werden?
- Nenne und beschreibe je eine Methode zur Informationsausfbereitung bzw. -beschaffung.
- Welche Prioritäten sollen den verschiedenen Wirkungskategorien im Zielkatalog zugeordnet werden?
- Weshalb ist es wichtig, hier Prioritäten zu setzen? Inwiefern ist die Prioritätensetzung für die Analyse wichtig?
- Wie können Zielkonflikte verhindert werden?
- Was macht einen guten Zielkatalog aus? Was gehört dazu?
- Was braucht es, um Ziele formulieren zu können?
- Welche Strategien gibt es zur Variantenerstellung? Welche Strategie ist am «wissenschaftlichsten»?

- Wie können untaugliche Varianten effizient aussortiert werden?
- Wie kann schlussendlich entschieden werden?
- Wie wird der PLP abgeschlossen?

# 3 Optimierung: Beispiel Hochwasserschutzdämme

## 3.1 Allgemein

Bei der Entwicklung von (anthropogenen) Systemen sind wir daran interessiert, diejenigen Systeme zu wählen, die unsere Ziele am besten erfüllen, d.h. das optimale System zu erstellen. Dafür können wir mathematische Modelle erstellen, die uns helfen, die optimale Lösungsvariante auszuwählen. Im folgenden Kapitel werden zwei Beispiele präsentiert, die zeigen, wie mathematische Optimierungsmodelle bei der Entwicklung von Systemen hilfreich sein können. Die Optimierung umfasst dabei die Schritte der Synthese, Analyse und Bewertung. Die ersten drei Schritte des Problemlösungsprozesses (Anstoss, Situationsanalyse und Zielformulierung) sind bei diesen Beispielen bereits gegeben.

## 3.2 Beispiel: Optimale Höhe eines Dammes

### 3.2.1 Anstoss

Der Fluss ist in der Vergangenheit mehrmals über die Ufer getreten, was zu Hochwasserschäden in der neben dem Fluss liegenden Stadt führte. Um den Hochwasserschutz zu verbessern, soll ein Hochwasserschutzdamm errichtet werden. Der volkswirtschaftliche Nutzen des Dammes sollte optimal sein.

### 3.2.2 Situationsanalyse

Je höher der Damm gebaut wird, desto kleiner ist einerseits das Risiko für die Stadt, umso grösser sind andererseits jedoch die Investitionskosten. Die Länge des Dammes beträgt insgesamt $l = 4km$. Der Zusammenhang zwischen der Höhe des Dammes (H) und der Einsparung bei den Schäden (E) wird mit folgender Formel angenähert: $E = 0.15 \cdot a \cdot \sqrt{H}$ $[Mio.\ CHF]$; $H$ in $m$; $a$ : Anzahl Jahre

### 3.2.3 Zielformulierung

Zielsetzung ist es, die optimale Höhe des Dammes zu finden, ohne dass eine Lebenszyklusanalyse durchgeführt wird. Für die Einsparungen soll eine Lebensdauer des Dammes von 80 Jahren angenommen werden.

### 3.2.4 Synthese von Lösungsvarianten

Es wurden zwei Varianten von Dämmen ausgearbeitet. Bei Variante A wird der Damm mit einer im Kern liegenden Tonschicht abgedichtet. Bei Variante B wird auf der Wasserseite eine Abdichtung aufgebracht. Da das Dammmaterial bei dieser Variante nicht nicht direkt dem Wasser ausgesetzt ist, kann die Böschung steiler als bei Variante A gebaut werden. Bei beiden Varianten wird auf dem Scheitel ein Fussweg mit einer Breite von $3\,m$ gebaut.

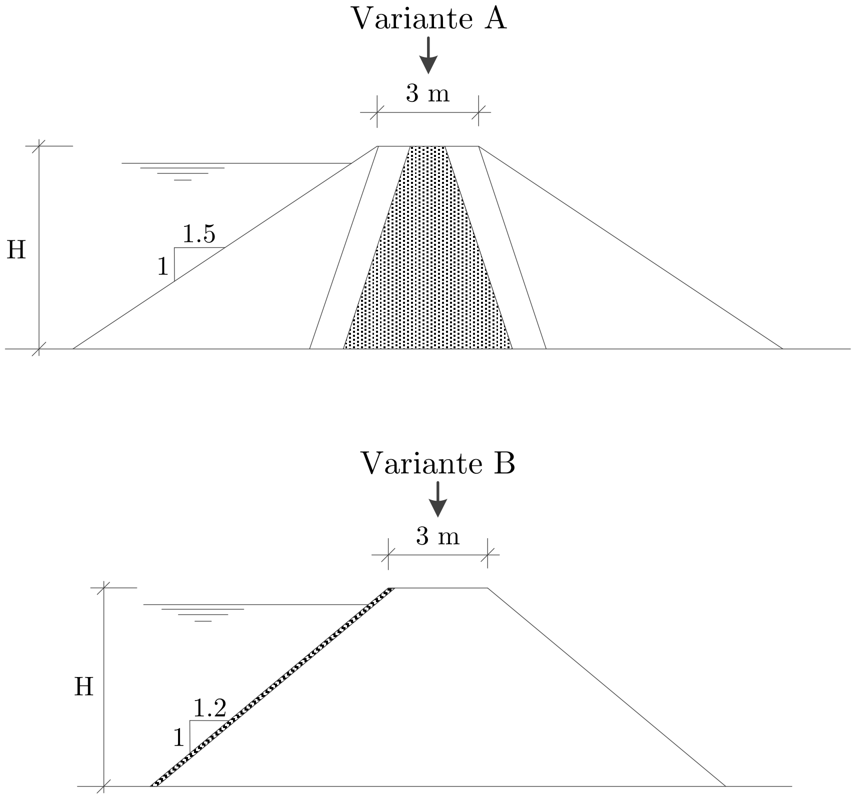



Abbildung 3.1: Varianten A und B für den Dammaufbau

**Variante A:**

Volumen des Dammes: $V_{D,A} = l \cdot (3m \cdot H + 1.5 \cdot H^2)\ [m^3]$

Kosten des Schüttguts (Durchschnitt): $30\,CHF/m^3$

**Variante B:**

Stärke der Abdichtung: $d = 0.3\,m$

Volumen des Dammes: $V_{D,B} = l \cdot (3m \cdot H + 1.2 \cdot H^2)\ [m^3]$

Volumen der Abdichtung: $V_B = l \cdot d \cdot \sqrt{H^2 + (1.2 \cdot H)^2}\ [m^3]$

Kosten des Schüttguts: $25\,CHF/m^3$

Kosten der Abdichtung: $270\,CHF/m^3$

### 3.2.5 Analyse von Lösungsvarianten

Die Analyse der beiden Varianten A und B erfolgt mithilfe einer Zielfunktion Z. Das Maximum der Zielfunktion wird mithilfe der ersten Ableitung ermittelt.

#### 3.2.5.1 Zielfunktion:

$$Z = f(X, Y) \tag{3.1}$$

mit

$$\begin{aligned} Z &= Bewertungsmass \\ X &= Entscheidungsvariable \\ Y &= Systemparameter \end{aligned}$$

Die resultierenden Einsparungen $R$ sind

$$R_i = E - BK_i \tag{3.2}$$

mit

$$\begin{aligned} E &= Einsparungen\,durch\,die\,Verhinderung\,von\,Schäden \\ BK_i &= Baukosten\,der\,jeweiligen\,Variante \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E &= 150'000\,CHF \cdot a \cdot \sqrt{H} \\ &= 150'000 \cdot 80 \cdot \sqrt{H} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} BK_A &= V_{D,A} \cdot 30\,CHF/m^3 \\ &= 4000 \cdot (3 \cdot H + 1.5 \cdot H^2) \cdot 30 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} BK_B &= V_{D,B} \cdot 25\,CHF/m^3 + V_{Beton} \cdot 270\,CHF/m^3 \\ &= 4000 \cdot (3 \cdot H + 1.2 \cdot H^2) \cdot 25 + 4000 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{H^2 + (1.2 \cdot H)^2} \cdot 270 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$R_A = 150'000 \cdot 80 \cdot \sqrt{H} - 4000 \cdot (3H + 1.5 \cdot H^2) \cdot 30 \tag{3.6}$$

$$R_B = 150'000 \cdot 80 \cdot \sqrt{H} - 4000 \cdot (3H + 1.2 \cdot H^2) \cdot 25 - 4000 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{2.44 \cdot H^2} \cdot 270 \tag{3.7}$$

$R$ wird einmal nach $H$ differenziert, um die optimale Höhe des Dammes zu ermitteln.

$$\frac{d\,(R_A)}{dH} = \frac{6'000'000}{\sqrt{H}} - 360'000 \cdot H - 360'000 = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{d\,(R_B)}{dH} = \frac{6'000'000}{\sqrt{H}} - 240'000 \cdot H - 806'104 = 0 \tag{3.9}$$

#### 3.2.5.2 Ergebnisse

Aus der Differenzierung ergeben sich die folgenden optimalen Höhen für die beiden Varianten:

$$\begin{aligned} H_A^* &= 5.88\,m \\ H_B^* &= 6.47\,m \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die maximal resultierenden Einsparungen sind somit:

$$R_A(H_A^*) = 20.76\,Mio.\,CHF \tag{3.11}$$
$$R_B(H_B^*) = 20.28\,Mio.\,CHF \tag{3.12}$$

Die resultierenden Einsparungen werden in Abb. 3.2 in Abhängigkeit der Dammhöhe dargestellt.

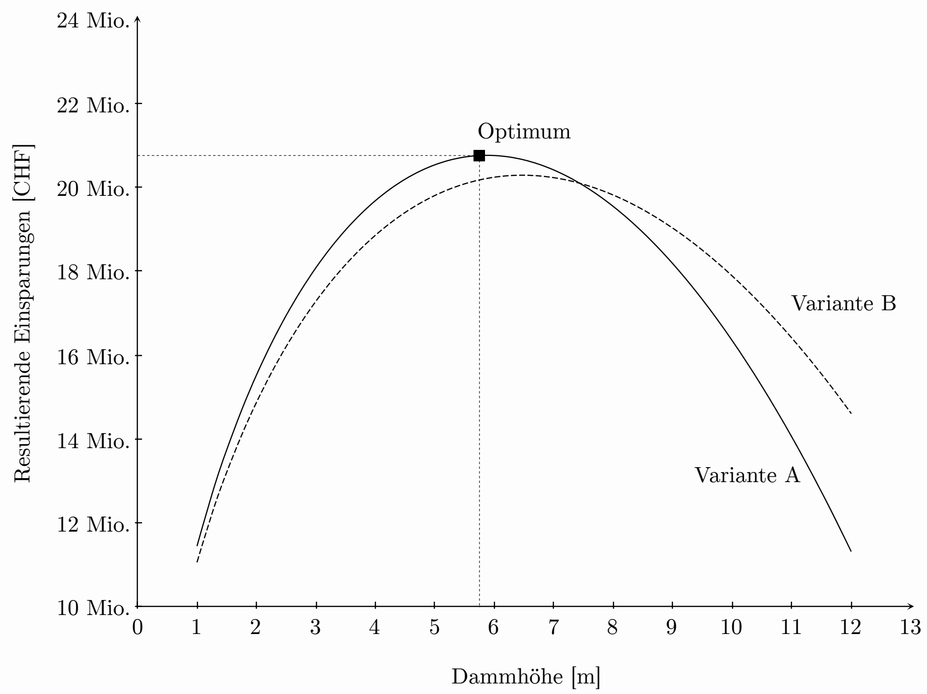



Abbildung 3.2: Resultierende Einsparungen in Abhängigkeit der Dammhöhe

### 3.2.6 Bewertung

Wie aus Abb. 3.2 und der Rechnung zu entnehmen ist, kann mit Variante A unter den gegebenen Bedingungen der grösste volkswirtschaftliche Nutzen erzielt werden.

## 3.3 Beispiel: Optimale Lebensdauer des Dammes

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die optimalen Höhen der Dämme anhand der Baukosten ermittelt wurden, sollen auch die Lebenszykluskosten berücksichtigt werden. Der Aufbau der Dämme bleibt derselbe wie im vorangegangenen Beispiel. Als Dammhöhe werden die optimalen Höhen vom vorhergehenden Beispiel eingesetzt.

### 3.3.1 Anstoss

Der Fluss ist in der Vergangenheit mehrmals über die Ufer getreten, was zu Hochwasserschäden in der neben dem Fluss liegenden Stadt führte. Um den Hochwasserschutz zu verbessern, soll ein Hochwasserschutzdamm errichtet werden. Der volkswirtschaftliche Nutzen des Dammes sollte optimal sein. Dabei sollen die gesamten Lebenszykluskosten beachtet werden.

### 3.3.2 Situationsanalyse

Die Länge des Dammes beträgt insgesamt $l = 4\,km$. Der Zusammenhang zwischen der Höhe des Dammes und der Einsparung hinsichtlich potenzieller Schäden wird mit folgender Formel angenähert: $E = 0.15 \cdot a \cdot \sqrt{H}\ [Mio.\,CHF]$; $H$ in $m$; $a$ : Anzahl Jahre

### 3.3.3 Zielformulierung

Es soll die maximale Einsparung bei gegebener Höhe und variabler Lebensdauer erreicht werden.

### 3.3.4 Synthese von Lösungsvarianten

Die beiden Varianten A und B, welche im vorangegangenen Kapitel beschrieben wurden, haben unterschiedliche Lebenszykluskosten:

**Variante A:**

Baukosten $= 8.34\,Mio.\,CHF$, bei einer Höhe von $5.88\,m$

Unterhaltskosten (pro Meter Dammlänge) $= 15\ \ CHF/m$ im 1. Jahr, mit 3% Zuwachs in jedem weiteren Jahr

**Variante B:**

Baukosten $= 10.24\,Mio.\,CHF$ bei einer Höhe von $6.47\,m$

Unterhaltskosten (pro Meter Dammlänge) $= 20\ \ CHF/m$ im 1. Jahr, mit 2% Zuwachs in jedem weiteren Jahr

### 3.3.5 Analyse von Lösungsvarianten

Die Lebenszykluskosten bestehen aus den Baukosten und den Unterhaltskosten. Um die optimalen Lebenszykluskosten zu berechnen, wird davon ausgegangen, dass die optimalen Baukosten übernommen werden können. Daher können die optimalen Dammhöhen aus dem vorangegangenen Beispiel direkt als gegeben betrachtet werden.

#### 3.3.5.1 Zielfunktion

$$R_i = E - LZK_i \tag{3.13}$$

$$LZK_i = BK_i + EK_i \tag{3.14}$$

$$EK_i = U_i \cdot \frac{1-(1+g_i)^a}{-g_i} \tag{3.15}$$

Einfachheitshalber wird bei diesem Beispiel ohne Zins gerechnet ($Zins = 0\%$). Damit entspricht Formel 3.15 der Formel 8.20 auf Seite 194 mit $i = 0$. Die Lebenszykluskosten ergeben sich somit zu:

$$LZK_A = 8.34\,Mio. + 15 \cdot 4000 \cdot \frac{1-(1+0.03)^a}{-0.03} \tag{3.16}$$

$$LZK_B = 10.24\,Mio. + 20 \cdot 4000 \cdot \frac{1-(1+0.02)^a}{-0.02} \tag{3.17}$$

mit

$$\begin{aligned}
E &= Einsparungen \\
LZK_i &= Lebenszykluskosten \\
BK_i &= Baukosten \\
EK_i &= Erhaltungskosten \\
a &= Anzahl\ Jahre \\
U_i &= Unterhaltskosten\ im\ ersten\ Jahr \\
g_i &= Zunahme\ der\ Erhaltungskosten\ jedes\ Jahr
\end{aligned}$$

$$R_A = 150'000 \cdot a \cdot \sqrt{5.88} - 8.34\,Mio. - 15 \cdot 4000 \cdot \frac{1-(1+0.03)^a}{-0.03} \tag{3.18}$$

$$R_B = 150'000 \cdot a \cdot \sqrt{6.47} - 10.24\,Mio. - 20 \cdot 4000 \cdot \frac{1-(1+0.02)^a}{-0.02} \tag{3.19}$$

$$\frac{d\,(R_i)}{da} = 0 \tag{3.20}$$

#### 3.3.5.2 Ergebnisse

Die optimale Lebensdauer beträgt:

$$a_A^* = 61.5\,Jahre \tag{3.21}$$

$$a_B^* = 79.4\,Jahre \tag{3.22}$$

Die dazugehörigen Einsparungen betragen:

$$R_A(a_A^*) = 3.71\, Mio.\, CHF \tag{3.23}$$
$$R_B(a_B^*) = 4.78\, Mio.\, CHF \tag{3.24}$$

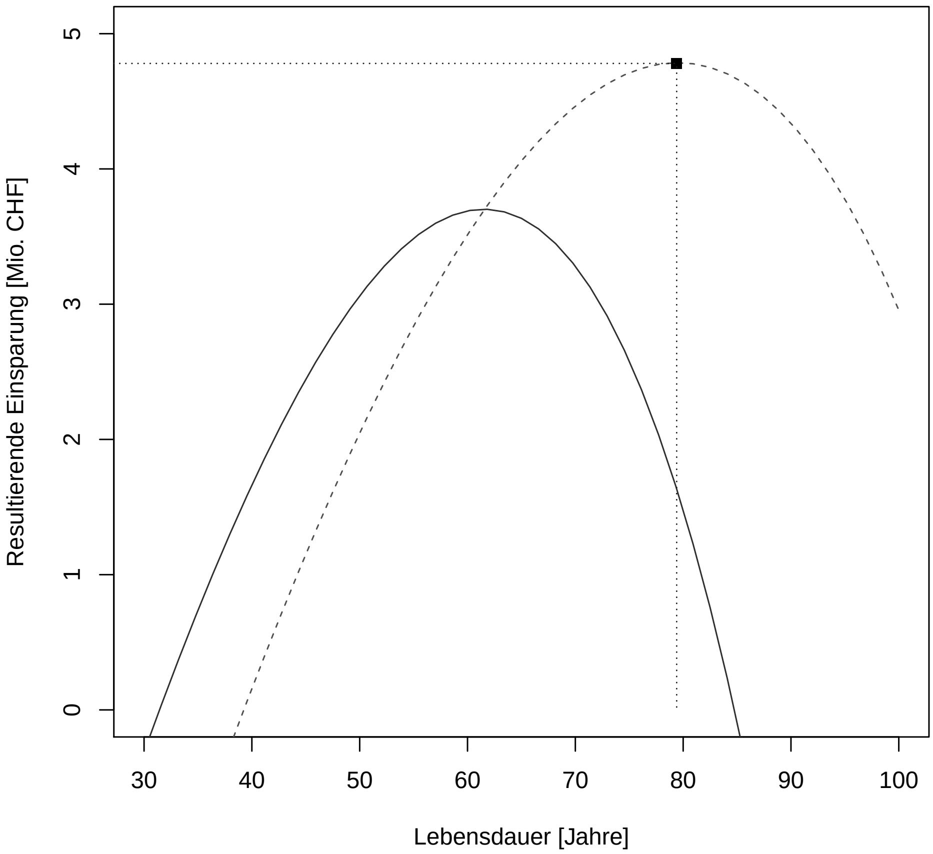



Abbildung 3.3: Resultierende Einsparungen in Abhängigkeit der Lebensdauer

### 3.3.6 Bewertung

Die Variante B stellt sich langfristig als ökonomischere Variante heraus. Daher würde nach dieser Betrachtung Variante B gewählt und eine Lebensdauer von 80 Jahren angestrebt werden.

## 3.4 Einschränkungen

Oft existieren physische und wirtschaftliche Einschränkungen oder Randbedingungen. Ein Beispiel für eine Einschränkung wäre, wenn die Dammbreite in Bsp. 3.2 durch angrenzende Bauten auf 15 $m$ begrenzt wäre. Mit der Geometrie des Dammaufbaus ergeben sich dadurch maximale Dammhöhen von $H_{A,Max} = 4\ m$ und $H_{B,Max} = 5\ m$. Die Einsparungen ergeben sich dann zu $R_A = 19.68\ Mio.\ CHF$ und $R_B = 19.80\ Mio.\ CHF$. Unter diesen Bedingungen würde ebenfalls Variante B gewählt.

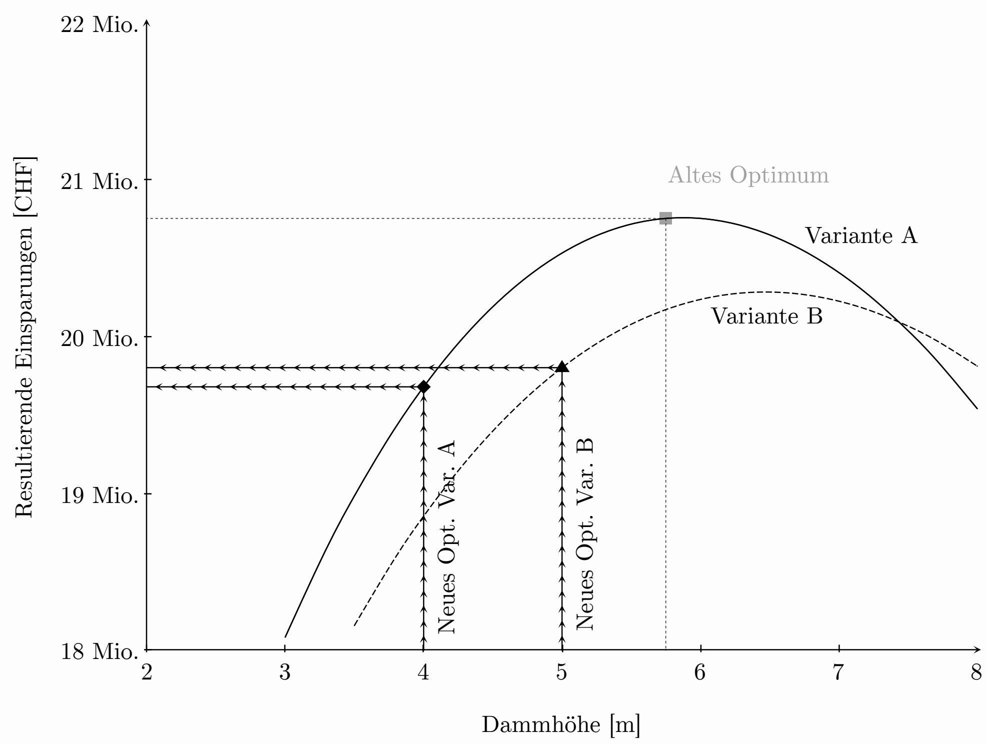



Abbildung 3.4: Einschränkung der Dammhöhen

## 3.5 Fazit

Die Optimierung ist bei der Erstellung von optimalen Systemen, insbesondere bei der Analyse von Lösungsvarianten sehr hilfreich. Wenn man eine Optimierung durchführen möchte, muss man zuerst alle notwendigen Informationen aus der Situationsanalyse und Zielformulierung in ein mathematisches Modell umwandeln. In den nächsten Kapiteln wird beschrieben, wie verschiedene Arten dieser mathematischen Modelle entwickelt werden können.

# 4 Optimierung: Lineare Programmierung

## 4.1 Modelle

Viele Optimierungsprobleme haben eine einheitliche Struktur:

- Eine Zielfunktion, die maximiert oder minimiert werden soll mit
- Nebenbedingungen, die den Bereich der Varianten limitieren.

Generell können die Zielfunktionen und Nebenbedingungen eine beliebige Form haben, d.h., sie können linear oder nichtlinear sein. Ein besonders nützliches Modell in der Analyse von Varianten ist ein Lineares Programm (LP). Lineare Programme sind Modelle mit einer linearen Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen. Sie sind mit dem Computer einfach zu lösen.

### 4.1.1 Modellformulierung

Eine der bekanntesten Verwendungen von LP ist die sogenannte Aktivitätsanalyse. Die Aktivitätsanalyse definiert das Ausmass der Durchführung einer Aktivität mit dem Aktivitätsindex $j$ (z.B. wie viele Einheiten eines gewissen Mörteltyps hergestellt werden sollen).

Die Aktivitätsanalyse zeichnet sich dadurch aus, dass

- jede Aktivität ein gewisses Mass an Gewinn bringt, wenn die Anzahl oder die Menge des Produkts $j$ zunimmt,
- jede Aktivität eine oder mehrere Ressourcen mit einer konstanten Verwendungsrate nutzt und
- jede Ressource nur in begrenzter Menge verfügbar ist.

#### 4.1.1.1 Zielfunktion

Ein allgemeines LP-Problem erlaubt eine Maximierung oder Minimierung der Zielfunktion und beliebige Formen der Beziehung zwischen der linken und der rechten Seite der Nebenbedingungen, wie $a \leq b$, $a \geq b$, $a = b$. Die allgemeine Formulierung eines LP setzt alle linearen Ausdrücke auf die linke Seite und alle konstanten Ausdrücke auf die rechte Seite des Verhältniszeichens.

Für das Aktivitätsanalyseproblem wird die Zielfunktion zu:

$$\textit{Maximiere: } Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \ldots + c_n \cdot x_n \tag{4.1}$$

mit

$$\begin{aligned} c_j &= \textit{Gewinn für jede Einheit der } j\textit{-ten Aktivität} \\ x_j &= \textit{Ausmass der } j\textit{-ten Aktivität oder Entscheidung} \\ j\,\{1 \ldots n\} &= \textit{Index der Aktivitäten oder Entscheidungen} \end{aligned}$$

#### 4.1.1.2 Nebenbedingungen

Nebenbedingungen sind die mathematischen Ausdrücke der Rahmenbedingungen. Für Aktivitätsanalyseprobleme repräsentieren sie die Anzahl an Einheiten der Ressource $i$, die in allen Aktivitäten $n$ konsumiert wird. Sie wird durch die Multiplikation der Einheiten von Ressource $i$, die von jeder Einheit der Aktivität $j$ konsumiert werden, mit der Anzahl der Einheiten der Aktivität $j$ bestimmt. Die Nebenbedingungen für die Verwendung der Ressource $i$ zu $b_i$ Einheiten sind insgesamt:

$$\begin{aligned} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + a_{1,3} \cdot x_3 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n &\leq b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + a_{2,3} \cdot x_3 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + a_{m,3} \cdot x_3 + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n &\leq b_m \end{aligned} \tag{4.2}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \textit{Koeffizient der j-ten Aktivität in der i-ten Nebenbedingung} \\ x_j &= \textit{Ausmass der j-ten Aktivität oder Entscheidung} \\ b_i &= \textit{Verfügbare Menge jeder Ressource i} \\ i\,\{1 \ldots m\} &= \textit{Index der Ressourcen} \\ j\,\{1...n\} &= \textit{Index der Aktivitäten oder Entscheidungen} \end{aligned}$$

#### 4.1.1.3 Nichtnegativitätsbedingungen

Die Nichtnegativitätsbedingungen verhindern, dass negative Zahlen im Ergebnis vorkommen. In der Aktivitätsanalyse bedeutet dies, dass jede Aktivität nur zu einem positiven Mass oder gar nicht durchgeführt werden darf. Diese Form von Nebenbedingungen muss für jede Art von Ressource definiert werden, die in einer Gruppe von Aktivitäten konsumiert wird, d.h. für i = 1, 2, ... m.

Die Nichtnegativitätsbedingungen für das Aktivitätsanalyseproblem sind:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{4.3}$$

#### 4.1.1.4 Annahmen

**Proportionalität** Der Beitrag jeder Aktivität zum Wert der Zielfunktion ist proportional zur Höhe von Aktivität $x_j$, was durch den Ausdruck $c_j \cdot x_j$ in der Zielfunktion repräsentiert wird. Der Beitrag jeder Aktivität zur linken Seite der funktionalen Nebenbedingungen ist proportional zur Höhe der Aktivität $x_j$, was durch den Ausdruck $a_j \cdot x_j$ in den Nebenbedingungen ausgedrückt wird. Diese Annahmen schliessen für alle Variablen alle Exponenten ausser 1 aus (→ *Linearität*).

**Additivität** Jede Funktion in einem LP, sei es die Zielfunktion oder die linke Seite einer funktionalen Nebenbedingung, ist die Summe der individuellen Beiträge der jeweiligen Aktivitäten.

**Teilbarkeit** Entscheidungsvariablen in einem LP können beliebige Werte annehmen, die die funktionalen Bedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen erfüllen, einschliesslich nicht ganzzahliger Werte. Das heisst, die Variablen sind nicht auf ganzzahlige Werte beschränkt.

**Gewissheit** Der Wert jedes Parameters eines LP wird als konstant angenommen.

#### 4.1.1.5 Mögliche Ergebnisse

Je nach Beschaffenheit des LP können vier verschiedene Lösungstypen vorkommen:

- Probleme mit einzigartigem Optimum: Es gibt nur einen Punkt, der alle Nebenbedingungen erfüllt, also nur eine optimale Variante. Die Lösung ist daher einzigartig.
- Probleme mit alternierenden Optima: Die Schnittpunkte der Zielfunktion und der zulässigen Region bilden im Optimum ein Liniensegment und alle Punkte auf diesem Liniensegment ergeben den gleichen Wert für die Zielfunktion.
- Probleme mit einer unbegrenzten Anzahl von Lösungen: Es gibt eine unendliche Anzahl an möglichen Varianten.
- Probleme ohne zulässige Lösung: Es gibt keine mögliche Variante, bei der alle Nebenbedingungen eingehalten werden können.

## 4.2 Grafische Lösungsmethode

Die grafische Lösungsmethode ermöglicht, Ergebnisse (= mögliche Lösungsvarianten) zu generieren und zu analysieren, wenn Probleme weniger als vier Entscheidungsvariablen haben. Ein zusätzlicher Vorteil der grafischen Methode ist, dass sie erlaubt, die geometrischen und mathematischen Eigenschaften der Ergebnisse der LP-Probleme zu verstehen. Diese Erkenntnisse können als Fundament für ein allgemeines algorithmisches Vorgehen verwendet werden, um beliebige LP zu lösen. Die grafische Methode kann manuell durchgeführt, aber auch programmiert werden.

### 4.2.1 Beispiel: Mörtelherstellung

#### 4.2.1.1 Informationen aus der Situationsanalyse

Eine Firma produziert zwei Bauprodukte: Produkt A, das 140 CHF/t Gewinn liefert und Produkt B, das 160 CHF/t Gewinn ergibt. Die benötigten Ressourcen sind nicht unbegrenzt verfügbar und jede Tonne Produkt A benötigt $2\,t$ roten Lehm aus dem Wallis, jede Tonne Produkt B benötigt $4\,t$ . Maximal sind $28\,t$ pro Woche verfügbar. Durch die Situationsanalyse ist auch klar, dass der Bediener des Mischgerätes für die zwei Produkte nicht mehr als 50 Stunden in der Woche arbeiten kann. Das Mischgerät benötigt zum Mischen einer Tonne jedes Produkts 5 Stunden (nicht gleichzeitig!). Jedes Material muss jeweils in einem separaten Aushärtebehälter gelagert werden. Der Aushärtebehälter für Produkt A hat eine Kapazität von 8 Tonnen, jener für Produkt B 6 Tonnen.

Diese Informationen sind nochmals in Tab. 4.1 zusammengefasst.

| **Ressource** | **Produkt A** | **Produkt B** | **Verfügbarkeit** |
|---|---|---|---|
| Lehm | 2 $t_{Lehm}$/t | 4 $t_{Lehm}$/t | 28 $t_{Lehm}$/Woche |
| Mischzeit | 5 h/d | 5 h/d | 50 h/Woche |
| Kapazität der Aushärtebehälter | 8 t | 6 t | |
| Gewinn | 140 CHF/t | 160 CHF/t | |

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der Informationen

#### 4.2.1.2 Informationen aus der Zielformulierung

Die Firma möchte ihren Gewinn maximieren und möchte deshalb wissen, welche Herstellungsstrategie verfolgt werden sollte, also wie viel von welchem Produkt hergestellt werden soll.

#### 4.2.1.3 Generieren von Lösungsvarianten

Prinzipiell gibt es unendlich viele Lösungsvarianten für eine Herstellungsstrategie, jedoch müssen alle vorgegebenen Rahmenbedingungen eingehalten werden. Wenn diese Bedingungen in eine mathematische oder grafische Form gebracht werden, lässt sich der «zulässige Bereich» (d.h. der Bereich der Werte, in dem jene Lösungsvarianten liegen, die alle Rahmenbedingungen erfüllen) bestimmen. Die gesuchte Lösung (in diesem Beispiel: der maximale Gewinn) ist Teil dieses Bereichs und liegt an dessen Rand. Dies gilt immer – sofern der Bereich in Richtung Verbesserung der Zielfunktion begrenzt ist.

Die Maximierung des Gesamtgewinns $Z$ als Funktion der Verkaufsmenge pro Woche ergibt (mit Produkt A als $x_1$ und Produkt B als $x_2$):

$$\textit{Maximiere: } Z = 140 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2 \tag{4.4}$$

1. Randbedingung:

Die Kapazität des jeweiligen Aushärtebehälters für die Produkte A und B pro Woche darf nicht überschritten werden.

$$x_1 \leq 8 \tag{4.5}$$

$$x_2 \leq 6 \tag{4.6}$$

2. Randbedingung:

Pro Woche kann nicht mehr Lehm verwendet werden als zur Verfügung steht.

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 28 \tag{4.7}$$

3. Randbedingung:

Das Mischgerät kann pro Woche nicht länger als 50 Stunden verwendet werden.

$$5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 50 \tag{4.8}$$

Zusammengefasst in mathematischer Form gibt das:

$$Max.\, Z = 140 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & \leq & 28 \\ 5 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & \leq & 50 \\ x_1 & & & \leq & 8 \\ & & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

In Abb. 4.1 ist das LP grafisch dargestellt.

#### 4.2.1.4 Grafische Darstellung des zulässigen Lösungsbereichs

Die zu produzierende Menge von Produkt A ($x_1$) ist auf der x-Achse aufgetragen, die Menge von Produkt B ($x_2$) auf der y-Achse. Somit enthält die x-y-Ebene alle prinzipiell zulässigen Lösungsvarianten.

Die Geraden mit den Pfeilen repräsentieren die Ungleichungen: Die Gerade selbst beschreibt den Rand (dort, wo $\leq$ oder $\geq$ zu $=$ wird), der Pfeil zeigt in die Richtung, in der die Ungleichung erfüllt ist.

Die grau schraffierte Region repräsentiert jenen Bereich der x-y-Ebene, in dem alle Ungleichungen erfüllt sind. Wichtig zu bemerken ist, dass auch der Rand der schraffierten Region zulässig ist, vielmehr noch: Die gesuchte optimale Lösungsvariante liegt auf diesem Rand.

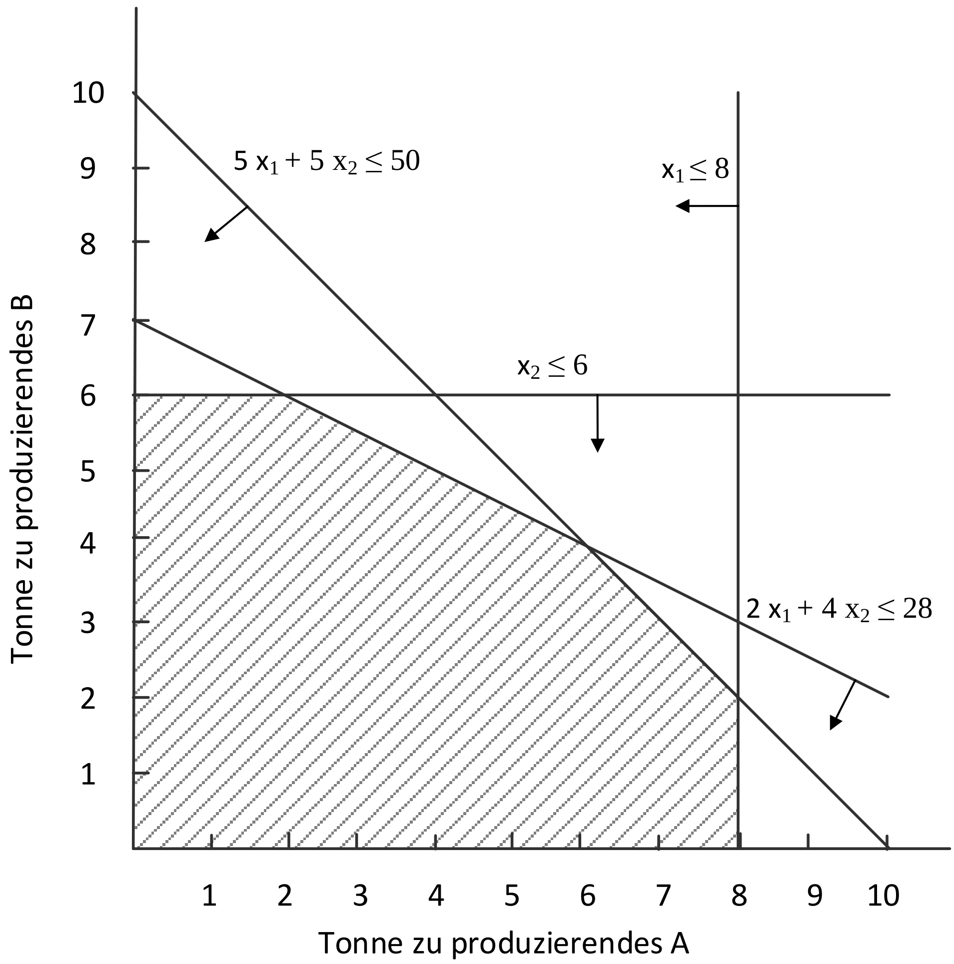



Abbildung 4.1: Grafische Programmdarstellung

#### 4.2.1.5 Analyse von Lösungsvarianten

Wenn die zulässige Region identifiziert ist, kann die Zielfunktion verwendet werden, um alle zulässigen Lösungsvarianten zu analysieren.

Wie dies abläuft, ist in Abb. 4.2 zu sehen:

Die Zielfunktion $Z = 140 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2$ ist viermal im Entscheidungsraum dargestellt – mit den Werten $Z = 0$, $Z = 560$, $Z = 1'120$, $Z = 1'480$. Wie man sieht, sind alle Geraden der Zielfunktion parallel. Dies ist deshalb der Fall, weil die Neigung der Zielfunktion nur durch die Koeffizienten der Entscheidungsvariablen bestimmt wird.

In der grafischen Methode wird zuerst eine Linie der Zielfunktion ausgewählt, die den zulässigen Bereich berührt. Dann wird diese Linie in Richtung Verbesserung bewegt, bis die Linie den zulässigen Bereich gerade noch berührt. Dies kann entweder an einem Punkt oder an einer Kante des zulässigen Bereichs sein. Somit ist die optimale Lösung des Problems gefunden.

Dies wird anhand von Abb. 4.2 illustriert:

- Linie 1 geht durch den Ursprung (0,0), was die Gleichung $Z = 0$ erfüllt. Auf dieser Linie liegt nur ein Punkt innerhalb des zulässigen Bereichs. Somit ist nur eine Variante möglich und diese ist (0,0). In anderen Worten: Um Z = 0 CHF Gewinn zu machen, müssten $x_1 = 0\,t$ und $x_2 = 0\,t$ der jeweiligen Produkte produziert werden.

- Linie 2 geht durch die Punkte (4,0) und (0,3.5), sodass jeder Punkt auf dieser Linie einen Wert der Zielfunktion von 560 ergibt. Eine Verbesserung! Auf dieser Linie liegen eine unendliche Anzahl von möglichen Varianten der Kombination von $x_1$ und $x_2$, um einen Gewinn von 560 CHF pro Woche zu erzielen, so z.B.: Herstellung von $2\,t$ Produkt A und $1.75\,t$ Produkt B.
- Linie 3 geht durch die Punkte (8,0) und (0,7), sodass jeder Punkt auf dieser Linie einen Wert der Zielfunktion von 1'120 und somit nochmals eine Verbesserung ergibt! Auf dieser Linie liegen ebenfalls eine unendliche Anzahl von möglichen Varianten, um einen Gewinn von 1'120 CHF pro Woche zu erreichen.
- Linie 4 (die oberste) geht nur durch einen einzigen Punkt (6,4) und ergibt einen Wert der Zielfunktion von 1'480. Damit ist die optimale Lösung gefunden: Es sollten $x_1 = 6\,t$ Produkt A und $x_2 = 4\,t$ Produkt B produziert werden, um den maximal möglichen Gewinn von 1'480 CHF pro Woche zu erhalten.

Es ist sehr wichtig, nochmals darauf hinzuweisen, dass die Lösung eines LP (falls eine existiert) immer am Rand des zulässigen Bereichs liegt.

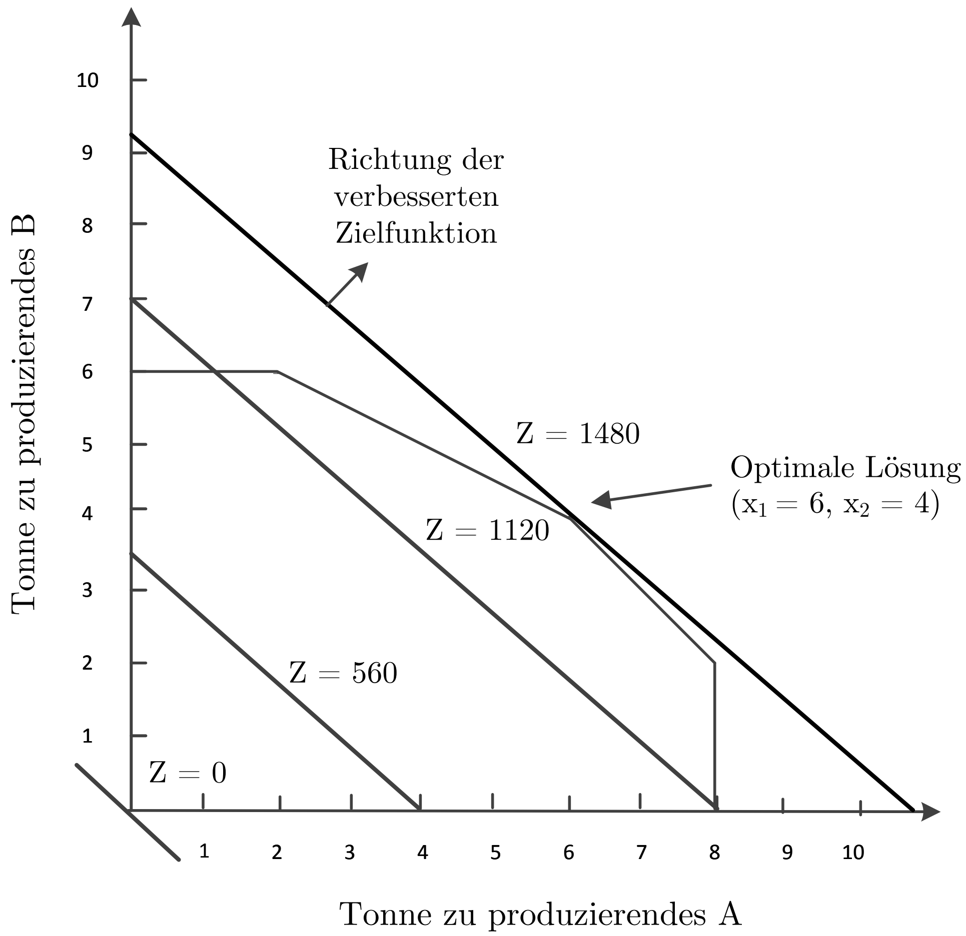



Abbildung 4.2: Lösung des Programms

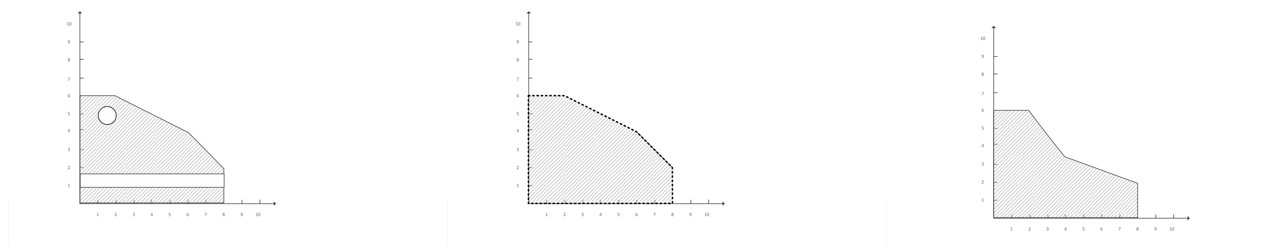
## 4.3 Simplex-Methode

Die grafische Methode zur Lösung eines LP ist sehr anschaulich und einfach nachvollziehbar, allerdings bei mehr als drei Variablen nicht mehr anwendbar. Um sämtliche LP-Probleme lösen zu können, ist eine leistungsstärkere Methode notwendig. Die SIMPLEX-Methode (oder anders auch als *SIMPLEX-Algorithmus* bezeichnet), bietet hier eine Vorgehensweise, mit der LP mit beliebig vielen Variablen und Nebenbedingungen gelöst werden können.

### 4.3.1 Eigenschaften des zulässigen Bereichs

Um zu verstehen, wie die SIMPLEX-Methode funktioniert, ist es zuerst wichtig, einige Eigenschaften des zulässigen Bereichs (d.h. der Gruppe von möglichen Varianten) zu verstehen:

- Die optimale(n) Lösung(en) eines LP-Modells wird (werden) auf der Grenzlinie des zulässigen Bereichs liegen, wenn ein zulässiger Bereich existiert und in Richtung der Verbesserung der Zielfunktion begrenzt ist (Beispiel Abb. 4.2).
- Der zulässige Bereich ist kontinuierlich. Das bedeutet, dass er keine Löcher oder Abstände aufweist.
- Der zulässige Bereich ist kompakt. Das bedeutet, dass er seine Grenze beinhaltet, oder in anderen Worten: Alle Varianten, die auf den Grenzlinien liegen, sind ebenfalls zulässig.
- Der zulässige Bereich ist konvex. Das bedeutet, dass ein beliebiger Punkt auf einem Liniensegment, das zwei Punkte im zulässigen Bereich verbindet, ebenfalls zulässig ist.
- Eine Nebenbedingung wird als verbindlich betrachtet, wenn die rechte Seite der Gleichung den Wert der Zielfunktion limitiert.
- Eine Nebenbedingung wird als nicht verbindlich betrachtet, wenn die rechte Seite der Gleichung den Wert der Zielfunktion nicht limitiert.
- Die Extrempunkte des zulässigen Bereichs sind die Varianten, die an der Kreuzung der Nebenbedingungsgleichungen (mit strikter Gleichheit ausgedrückt), bzw. an Eckpunkten des zulässigen Bereichs liegen. Oder genauer: Wenn ein LP $n$ Entscheidungsvariablen und $m$ Bedingungen beinhaltet, existiert dort ein einzigartiger Extrempunkt, an dem genau $n$ Bedingungen mit Gleichheit erfüllt sind.



(a) Nichtkontinuierlicher Lösungsbereich (weil: Loch, zweigeteilt)

(b) Nichtkompakter Lösungsbereich (weil: Rand ist nicht mit dabei)

(c) Nichtkonvexer Lösungsbereich (weil: Ecke nach innen)

Abbildung 4.3: Unzulässige Lösungsbereiche

## 4.3.2 Grundprinzip

Das Grundprinzip der SIMPLEX-Methode ist, dass

- eine Gruppe von optimalen Lösungen eines gegebenen LP immer mindestens einen Extrempunkt beinhaltet,
- eine einzigartige optimale Lösung an einem Extrempunkt des zulässigen Bereichs liegt und,
- wenn alternierende optimale Lösungen bestehen, mindestens zwei der Lösungen an Extrempunkten des zulässigen Bereichs liegen.

Für beliebige zulässige Bereiche, die durch eine Gruppe linearer Nebenbedingungen begrenzt sind, ist die Anzahl der Extrempunkte begrenzt und relativ einfach zu berechnen. Dies bedeutet, dass optimale Lösungen von LP-Problemen immer an Extrempunkten des zulässigen Bereichs liegen. Die Extrempunkte des zulässigen Bereichs wiederum liegen an den Schnittpunkten der Nebenbedingungen als strikte Gleichungen.

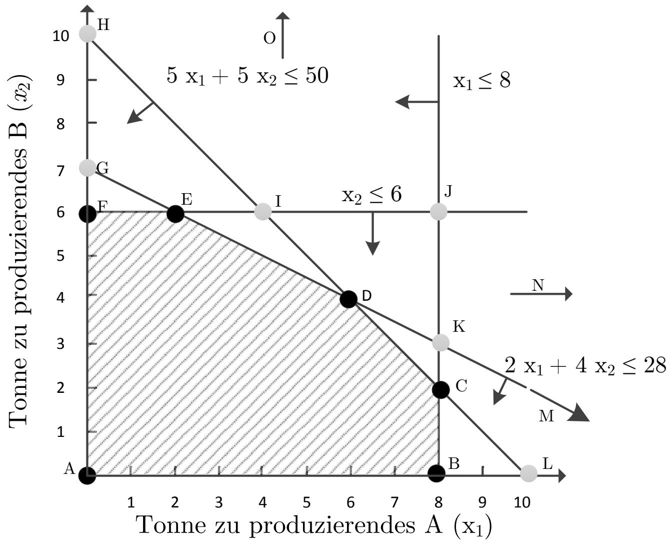



Abbildung 4.4: Zulässiger Bereich für Produkte A und B

## 4.3.3 Generierung von Lösungsvarianten / Identifikation von Extrempunkten

### 4.3.3.1 Modifikation der Modelle

Die Variante, die optimal sein könnte, wird durch die Untersuchung der Extrempunkte identifiziert. Dazu müssen alle Nebenbedingungen in eine Form übersetzt werden, die den zulässigen Bereich repräsentiert, aber in Form von strikten Gleichungen (statt Ungleichungen). Dafür ist es notwendig, sogenannte Schlupf- und Überschussvariablen einzuführen. Dies wird im Folgenden an den Nebenbedingungen des Beispiels aus dem vorangegangenen Kapitel gezeigt. Die erste Nebenbedingung wird nun von einer Ungleichung in eine Gleichung durch die Einführung der Schlupfvariablen $S_1$ folgendermassen umgeformt:

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 28 \tag{4.9}$$

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + S_1 = 28\ (Standardform) \tag{4.10}$$

$$S_1 = Die\ Menge\ des\ roten\ Lehms,\ der\ nicht\ gebraucht\ wird$$

Die Schlupfvariable $S_1$ beschreibt den Abstand der Nebenbedingung $2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$ zur Begrenzung von 28. Wie gross $S_1$ ist, ist an dieser Stelle noch nicht bekannt. Sobald die Schlupfvariable eingeführt ist, ist es möglich, die $m$ Gleichungen mit $m$ unbekannten Werten für jedes Problem zu lösen. Für das vorher erwähnte Beispiel wird das komplett erweiterte Problem $n$ Strukturvariablen (ursprüngliche Entscheidungsvariablen, hier: Tonnen zu produzierendes Produkt A / B) und $m$ Schlupfvariablen beinhalten. Und wenn genau $n$ dieser Variablen gleich 0 gesetzt werden, stellt die resultierende Lösung einen einzigartigen Extrempunkt des zulässigen Bereichs dar. Diese Gleichungen können so gelöst werden, dass eine genaue Lösung für jeden Extrempunkt erhalten werden kann, da $m$ Nebenbedingungen und $((n + m) - n =)$ $m$ Variablen $\neq 0$ an den Extrempunkten vorliegen. Für das vorher erwähnte Beispiel sieht das komplett erweiterte Problem wie folgt aus:

$$Max.\ Z = 140 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2 \tag{4.11}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
2 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & +S_1 & & & & = & 28 \\
5 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & & +S_2 & & & = & 50 \\
x_1 & & & & & +S_3 & & = & 8 \\
 & & x_2 & & & & +S_4 & = & 6 \\
x_1, & & x_2, & S_{1,} & S_{2,} & S_{3,} & S_4 & \geq & 0
\end{array} \tag{4.12}$$

#### 4.3.3.2 Lösen des Modells

Man erhält die sogenannte Basislösung, indem man $n$ Variablen (eines $m \times n-$ Problems) gleich Null setzt und das verbleibende Gleichungssystem mit den restlichen $m$ Variablen löst.

Die Variablen, die gleich 0 gesetzt werden, werden Nicht-Basisvariablen genannt; Variablen, die nicht gleich 0 gesetzt werden, werden Basisvariablen genannt.

Nicht alle Basislösungen sind zulässig, d.h. nicht alle Varianten, die zwei Nebenbedingungen erfüllen, sind akzeptabel. Nur Extrempunkte, die am zulässigen Bereich liegen, erfüllen alle Nebenbedingungen (z.B. erfüllen folgende Punkte in Abb. 4.4 nicht alle Nebenbedingungen: G, H, I, J, K, L). Eine Lösung eines LP ist nicht zulässig, wenn eine beliebige Variable in der erweiterten Problemdarstellung bei dieser Lösung negativ ist. Eine optimale Lösung muss immer eine zulässige Basislösung sein.

Ein Weg, die optimale Lösung zu finden, ist durch abschliessende Aufzählung und Analyse. Dies ist aber nur bei einer kleinen Anzahl von Extrempunkten möglich. Bei einer grösseren Anzahl ist dies unmöglich. Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl einer einzigartigen Teilmenge $n$ aus einer Gesamtmenge von $n + m$ Elementen ist:

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!\,((n+m)-n)!} \tag{4.13}$$

Für unser kleines Problem bedeutet das:

$$\binom{2+4}{2} = \frac{(2+4)!}{2!\,((2+4)-2)!} = 15 \tag{4.14}$$

Für relativ kleine Probleme mit 50 Strukturvariablen und 200 Restriktionen bedeutet es schon:

$$\binom{50+200}{50} = \frac{(50+200)!}{50!\,((50+200)-50)!} = 1.35 \cdot 10^{53} \tag{4.15}$$

Probleme dieser Grössenordnung können mit der SIMPLEX-Methode gelöst werden. Bevor aber der Algorithmus erklärt wird, ist es wichtig, das Konzept von angrenzenden Punkten zu verstehen.

### 4.3.4 Angrenzung von Extrempunkten

Die SIMPLEX-Methode identifiziert zuerst einen zulässigen Extrempunkt und bewegt sich dann systematisch von dieser zulässigen Basislösung zu der nächsten angrenzenden zulässigen Basislösung, bis keine weitere Verbesserung der Zielfunktion erreicht werden kann. Jeder Extrempunkt kann identifiziert werden, indem genau zwei Variablen gleich 0 gesetzt werden und das Problem für die anderen (Basis)-Variablen gelöst wird. Eine beliebige Lösung hat genau $n$ Basisvariablen und $m$ Nicht-Basisvariablen. Wenn zwei Extrempunkte für alle Nichtbasisvariablen ausser einer gleiche Werte haben, dann sind diese Punkte «angrenzend». Die Angrenzung von Extrempunkten beschreibt die Beziehung zwischen diesen Lösungen in Bezug auf ihre Basis (statt einer physischen Interpretation).

Dies erlaubt es uns,

- eine Teilmenge der zulässigen Extrempunkte zu identifizieren, zu der sich die gegebene Lösung «bewegen» kann, sodass sich die Zielfunktion verbessert und
- zu erkennen, wann so ein Schritt bedeutet, dass eine Lösung nicht mehr zulässig ist.

### 4.3.5 SIMPLEX-Algorithmus

#### 4.3.5.1 Übersicht

Der SIMPLEX-Algorithmus kann einfach beschrieben werden:

Man beginnt mit irgendeiner zulässigen Lösung. Wenn keine identifiziert werden konnte, hat das Problem keine zulässige Lösung. Wenn eine zulässige Lösung identifiziert werden konnte, kann sie mit der Zielfunktion bewertet werden. Wenn die momentane zulässige Lösung gegeben ist, bewegt man sich zur angrenzenden zulässigen Lösung, die den Wert der Zielfunktion verbessert. Man fährt damit fort, sich zur nächsten zulässigen Lösung zu bewegen, bis keine Verbesserung der Zielfunktion mehr erreicht werden kann. Wenn es möglich ist, sich von dieser zulässigen Lösung zu einer angrenzenden zulässigen Lösung zu bewegen, ohne den Wert der Zielfunktion zu verschlechtern, handelt es sich um alternierende Lösungen. Wenn es möglich ist, sich von dieser zulässigen Lösung zu einer angrenzenden zulässigen Lösung zu bewegen, sodass die Zielfunktion ohne Begrenzung verbessert werden kann, handelt es sich um ein Problem mit unbegrenzter Lösungsmenge.

Wie der SIMPLEX-Algorithmus konkret angewendet wird, wird nun beschrieben. Generell lässt sich der Algorithmus in folgende Schritte unterteilen, welche im Anschluss erklärt werden:

1. Auswahl der Anfangs-Basislösung
2. Überprüfung der Optimalität der Lösung
3. Bestimmen der Variable, die in die Basis gebracht werden soll

4. Bestimmen des Werts der Variable, die in die Basis kommen soll
5. Bestimmen der Variable, die die Basis verlässt
6. Bestimmen der neuen Werte der Basisvariablen

Der SIMPLEX-Algorithmus besteht aus zwei Phasen:

I. Der Auswahl einer zulässigen Anfangs-Basislösung und

II. der Verbesserung dieser Anfangs-Basislösung.

Für ein besseres Verständnis soll hier zunächst mit der simpelsten Anfangs-Basislösung begonnen werden – nämlich, wenn der Ursprung eine zulässige Anfangs-Basislösung ist. Dies ist aber nicht immer der Fall; wie man dann vorgeht, wird in Kap. 4.3.7 erklärt.

#### 4.3.5.2 Schritt 1: Auswahl der Anfangs-Basislösung

Wie schon erwähnt, wird mit der simpelsten Anfangs-Basislösung begonnen – nämlich, wenn alle Strukturvariablen $x_1$ und $x_2 = 0$ sind. Dies entspricht Punkt A des zulässigen Bereichs in Abb. 4.4.

$$Nicht-Basisvariablen: \; NB^A = \{x_1, x_2\} \tag{4.16}$$

Die korrespondierende Zielfunktion sowie die erweiterten Nebenbedingungen sehen folgendermassen aus:

$$Max.\, Z = 140 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2 \tag{4.17}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
2 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & +S_1 & & & & = & 28 \\
5 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & & +S_2 & & & = & 50 \\
x_1 & & & & & +S_3 & & = & 8 \\
 & & x_2 & & & & +S_4 & = & 6 \\
x_1, & & x_2, & S_{1,} & S_{2,} & S_{3,} & S_{4,} & \geq & 0
\end{array} \tag{4.18}$$

Die gewählte Anfangs-Basislösung ist zulässig, was überprüft werden kann, indem man $x_1$ und $x_2$ in die Nebenbedingungen einsetzt. Diese sind mit den gewählten Werten alle eingehalten. Wird dieses System nach den Schlupfvariablen aufgelöst, die in diesem Fall die Basisvariablen sind, ergibt sich die folgende **Basisdarstellung**:

$$Basisvariablen: \; B^A = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \tag{4.19}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S_1 & = & 28 & - & 2 & \cdot & x_1 & - & 4 & \cdot & x_2 \\
S_2 & = & 50 & - & 5 & \cdot & x_1 & - & 5 & \cdot & x_2 \\
S_3 & = & 8 & - & 1 & \cdot & x_1 & & & & \\
S_4 & = & 6 & & & & & - & 1 & \cdot & x_2 \\
\hline
Z & = & 0 & + & 140 & \cdot & x_1 & + & 160 & \cdot & x_2
\end{array} \tag{4.20}$$

$x_1$ und $x_2$ sind in diesem Fall die Nicht-Basisvariablen, d.h. sie haben den Wert 0. Daraus ergibt sich der Wert der Zielfunktion an diesem Extrempunkt ebenfalls zu 0. Dies ist logisch, da von Produkt A und B nichts produziert werden kann und der Gewinn folglich 0 ergibt, wenn jeweils für die Produktion kein roter Lehm vorhanden ist ($Z = 0 + 140 \cdot 0 + 160 \cdot 0$).

#### 4.3.5.3 Schritt 2: Überprüfung der Optimalität der Lösung

Nachdem eine erste Basislösung ausgewählt wurde, muss nun im nächsten Schritt überprüft werden, ob die gewählte Basislösung schon optimal ist. Die Koeffizienten, mit denen die Nicht-Basisvariablen in der Zielfunktion multipliziert werden (in diesem Fall $x_1$ und $x_2$), zeigen an, um wie viel die Zielfunktion verändert wird, wenn die entsprechende Nicht-Basisvariable in die Basis hineingebracht wird (d.h. von einem Wert $= 0$ auf einen Wert $\geq 0$ vergrössert wird). Wenn eine Verbesserung dadurch möglich ist, dass eine Nicht-Basisvariable in die Basis gebracht wird, dann ist die aktuelle Lösung nicht optimal. Dies ist dann der Fall, wenn es bei Maximierungsproblemen noch Variablen in der Zielfunktion gibt, die einen positiven Koeffizienten haben – bei Minimierungsproblemen entsprechend umgekehrt.

#### 4.3.5.4 Schritt 3: Bestimmen der Variable, die in die Basis gebracht werden soll

Den Koeffizienten, mit dem eine Variable in der Zielfunktion multipliziert wird, bezeichnet man als die *Reduzierten Kosten* der entsprechenden Variable. Diese sind definiert als der Wert, um den sich die Zielfunktion verändert, wenn eine Nicht-Basisvariable in die Basis gebracht wird. Das bedeutet, dass für ein Maximierungsproblem jene Variablen potenzielle Kandidaten dafür sind, in die Basis gebracht zu werden, die positive reduzierte Kosten haben. Für ein Minimierungsproblem gilt entsprechend das Gegenteil. Wenn mehr als eine Nicht-Basisvariable den Wert der Zielfunktion verbessert, spielt es theoretisch keine Rolle, welche dieser Variablen in die Basis gebracht wird. In diesem konkreten Beispiel sind die Koeffizienten von beiden Nicht-Basisvariablen positiv, d.h. die Zielfunktion würde sich immer verbessern – unabhängig von der Variablen, die in die Basis gebracht wird.

Nichtsdestotrotz ist es sinnvoll, die Auswahl der Variablen nicht willkürlich zu treffen, sondern genau die Nicht-Basisvariable in die Basis zu bringen, die den Wert der Zielfunktion am stärksten verbessert. Hier ist es wichtig zu beachten, dass dies jedoch nicht notwendigerweise die Variable mit dem betragsmässig grössten Koeffizienten sein muss. Im nächsten Schritt wird beschrieben, wie diese Auswahl durchgeführt werden kann.

#### 4.3.5.5 Schritt 4: Bestimmen des Werts der Variable, die in die Basis kommen soll

Der Wert der in die Basis kommenden Variable sollte so gross wie möglich sein, ohne dass die aus der Basis kommende Variable negativ wird (da die Lösung sonst unzulässig wird). Wenn $x_1$ für die Basis ausgewählt wurde, wird der grösstmögliche Wert für eine zulässige Lösung vom kleinsten Wert der anderen Nebenbedingungen vorgegeben. Die Frage ist hierbei (am Beispiel von $x_1$): Wie gross darf $x_1$werden, sodass die aus der Basis kommende Basisvariable noch grösser als 0 ist? Dies ist wichtig, da alle Variablen (Struktur- und Schlupfvariablen) positiv sein müssen. Dadurch wird auch gleichzeitig gewährleistet, dass der zulässige Bereich nicht verlassen wird.

Für $x_1$ und die Basisvariable $S_1$ sähe die Überlegung folgendermassen aus: Wenn $x_2$ weiterhin gleich 0 ist, wie gross darf $x_1$ höchstens werden, sodass $S_1$ immer grösser als 0 ist?

$$S_1 = 28 - 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \tag{4.21}$$

In diesem Fall bedeutet das, dass $x_1$ nicht grösser als 14 sein darf. Im Folgenden sind die entsprechenden Schlussfolgerungen auch für alle anderen Variablen, die für $x_1$ aus der Basis kommen könnten, zusammengefasst.

$$\begin{array}{llll} S_1 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_1 \leq 14 \\ S_2 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_1 \leq 10 \\ S_3 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_1 \leq 8 \\ S_4 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_1 \leq \infty \end{array} \tag{4.22}$$

Da alle Nebenbedingungen eingehalten werden müssen, darf $x_1$ nicht grösser als 8 werden (minimaler Wert).

Da vorher festgestellt wurde, dass die Zielfunktion auch dadurch optimiert werden kann, dass $x_2$ in die Basis kommt, muss auch hier die Einhaltung der Nebenbedingungen überprüft werden:

$$\begin{array}{llll} S_1 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_2 \leq 7 \\ S_2 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_2 \leq 10 \\ S_3 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_2 \leq \infty \\ S_4 \geq 0 & \textit{setzt} & \textit{voraus}, & \textit{dass} \quad x_2 \leq 6 \end{array} \tag{4.23}$$

Hier ist festzustellen, dass $x_2$ nicht grösser werden darf als 6.

#### 4.3.5.6 Schritt 5: Bestimmen der Variable, die die Basis verlässt

Die Basisvariable, die die Basis für die ausgewählte Nicht-Basisvariable verlassen sollte, ist die, die zuerst gegen 0 geht, wenn der Wert der hereinkommenden Variable grösser wird. Für das gegebene Beispiel bedeutet das, dass $x_1$ für $S_3$ in die Basis kommen würde sowie $x_2$ für $S_4$. Das Ergebnis ist ein **SIMPLEX-Schritt** oder **Pivotschritt** von einer zulässigen Basislösung zu einer angrenzenden zulässigen Basislösung.

Eine weitere optionale zusätzliche Analyse ist an dieser Stelle möglich: Welche der möglichen Nicht-Basisvariablen sollte in die Basis kommen? Wie schon vorhin angesprochen, sollte die Variable ausgewählt werden, die die Zielfunktion am meisten optimiert. Dazu wird der maximal mögliche Wert, den die jeweilige Nicht-Basisvariable annehmen könnte, in die Zielfunktion eingesetzt. Diejenige Variable, die die Zielfunktion stärker optimiert, wird in die Basis gebracht.

Für das gegebene Beispiel bedeutet das:

$x_1$ kommt in die Basis: $Z = 140 \cdot 8 + 160 \cdot 0 = 1120$

$x_2$ kommt in die Basis: $Z = 140 \cdot 0 + 160 \cdot 6 = 960$

Die Entscheidung $x_1$, in die Basis zu bringen, vergrössert Z also schneller. In der Grafik (Abb. 4.4) entspricht dies der Bewegung von Punkt A zu Punkt B.

#### 4.3.5.7 Schritt 6: Bestimmen der neuen Werte der Basisvariablen

Mit der Substitution der Gleichung für die Variable, die in die Basis kommt, können die Nebenbedingungen und die Zielfunktion als Funktionen der neuen Nicht-Basisvariable geschrieben werden; daraus entsteht die Basisdarstellung für die neue zulässige Extrempunktlösung. Für dieses Beispiel haben wir festgestellt, dass $x_1$ für $S_3$ in die Basis kommen soll. Durch Umformung der dritten Nebenbedingung in Gleichung 4.20 erhält man den folgenden Ausdruck von $x_1$ in Abhängigkeit von $S_3$.

$$x_1 = 8 - S_3 \tag{4.24}$$

Um nun die Basisdarstellung von Punkt A mit $B^A = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ in die Basisdarstellung von Punkt B mit $B^B = \{S_1, S_2, x_1, S_4\}$ umzuwandeln, werden alle Gleichungen durch Einsetzen der Gleichung 4.24 in die Zielfunktion und die Nebenbedingungen umgeformt.

$$\begin{array}{ccccccccc}
S_1 & = & 28 & - & 2 & \cdot(8 - S_3) & - & 4 & \cdot x_2 \\
S_2 & = & 50 & - & 5 & \cdot(8 - S_3) & - & 5 & \cdot x_2 \\
x_1 & = & 8 & - & & S_3 & & & \\
S_4 & = & 6 & & & & - & 1 & \cdot x_2 \\
\hline
Z & = & 0 & + & 140 & \cdot(8 - S_3) & + & 160 & \cdot x_2
\end{array} \tag{4.25}$$

Dies ergibt die folgende endgültige Basisdarstellung

$$B^B = \{S_1, S_2, x_1, S_4\} \tag{4.26}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
S_1 & = & 12 & - & 4 & \cdot x_2 & + & 2 & \cdot S_3 \\
S_2 & = & 10 & - & 5 & \cdot x_2 & + & 5 & \cdot S_3 \\
x_1 & = & 8 & & & & - & 1 & \cdot S_3 \\
S_4 & = & 6 & - & 1 & \cdot x_2 & & & \\
\hline
Z & = & 1120 & + & 160 & \cdot x_2 & - & 140 & \cdot S_3
\end{array} \tag{4.27}$$

Hiermit ist ein kompletter Pivotschritt durchgeführt worden.

#### 4.3.5.8 Schritt 7: Wiederholung der Schritte 2-6 bis zur optimalen Lösung

Nach dem ersten Pivotschritt von $B^A = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ nach $B^B = \{S_1, S_2, x_1, S_4\}$ ist nun wieder von vorne zu beginnen, d.h. zu überprüfen, ob die gegebene Basislösung $B^B$ optimal ist. Wenn nicht, müssen die Schritte 2-6 so lange wiederholt werden, bis die Basislösung nicht mehr optimiert werden kann. Das bedeutet in diesem Fall: So lange, bis alle Koeffizienten der Nicht-Basisvariablen in der Zielfunktion negative Koeffizienten haben. Bei einer Minimierung gilt wiederum das Gegenteil.

Für das Beispiel sehen die nächsten Pivotschritte folgendermassen aus:

**Pivotschritt 2**

**Schritt 2:** Ist die Basislösung schon optimal? Nein, da der Koeffizient für $x_2$ in der Zielfunktion positiv ist. Wenn also $x_2$ in die Basis gebracht wird, kann Z noch verbessert werden (siehe Gleichung 4.27).

**Schritt 3:** Welche Nicht-Basisvariable soll in die Basis gebracht werden? Da in diesem Fall nur $x_2$ einen positiven Koeffizienten hat (nämlich + 160), sollte diese Variable in die Basis gebracht werden.

**Schritt 4:** Wie gross sollte der Wert der Variable sein, die in die Basis kommen soll, so dass die Lösung weiterhin zulässig bleibt? Dies ist durch Analyse der Nebenbedingungen zu überprüfen.

$$\begin{array}{llll} S_1 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad x_2 \leq 3 \\ S_2 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad x_2 \leq \infty \\ S_4 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad x_2 \leq 6 \end{array} \tag{4.28}$$

$x_2$ darf also nicht grösser als 2 sein.

**Schritt 5:** Welche Variable sollte die Basis verlassen (d.h. auf 0 gesetzt werden)? $S_2$ ist die Basisvariable, die bei einer Vergrösserung von $x_2$ als erstes gegen 0 geht. Daher wird $x_2$ für $S_2$ in die Basis gebracht.

**Schritt 6:** Was sind die neuen Werte der anderen Basisvariablen? Die zweite Nebenbedingung aus Gleichung 4.27 wird nach $x_2$ umgeformt und entsprechend in die Zielfunktion und die anderen Nebenbedingungen eingesetzt.

$$x_2 = 2 - \frac{1}{5} S_2 + S_3 \tag{4.29}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} S_1 & = & 12 & - & 4 & \cdot\left(2 - \frac{1}{5}S_2 + S_3\right) & + & 2 & \cdot S_3 \\ x_2 & = & 2 & - & \frac{1}{5} & \cdot S_2 & + & 1 & \cdot S_3 \\ x_1 & = & 8 & & & & - & 1 & \cdot S_3 \\ S_4 & = & 6 & & & -\left(2 - \frac{1}{5}S_2 + S_3\right) & & & \\ \hline Z & = & 1120 & + & 160 & \cdot\left(2 - \frac{1}{5}S_2 + S_3\right) & - & 140 & \cdot S_3 \end{array} \tag{4.30}$$

Daraus ergibt sich die folgende Basisdarstellung für Punkt C:

$$B^C = \{S_1, x_2, x_1, S_4\} \tag{4.31}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} S_1 & = & 4 & + & \frac{4}{5} & \cdot S_2 & - & 2 & \cdot S_3 \\ x_2 & = & 2 & - & \frac{1}{5} & \cdot S_2 & + & 1 & \cdot S_3 \\ x_1 & = & 8 & - & & & - & 1 & \cdot S_3 \\ S_4 & = & 4 & + & \frac{1}{5} & \cdot S_2 & - & 1 & \cdot S_3 \\ \hline Z & = & 1440 & - & 32 & \cdot S_2 & + & 20 & \cdot S_3 \end{array} \tag{4.32}$$

### Pivotschritt 3

**Schritt 2:** Ist die Basislösung schon optimal? Nein, da der Koeffizient für $S_3$ in der Zielfunktion positiv ist. Wenn also $S_3$ in die Basis gebracht wird, kann Z noch verbessert werden (siehe Gleichung 4.32).

**Schritt 3:** Welche Nicht-Basisvariable soll in die Basis gebracht werden? Da in diesem Fall nur $S_3$ einen positiven Koeffizienten hat (nämlich + 20), sollte diese Variable in die Basis gebracht werden.

**Schritt 4:** Wie gross sollte der Wert der Variable sein, die in die Basis kommen soll, so dass die Lösung weiterhin zulässig bleibt? Dies ist durch Analyse der Nebenbedingungen zu überprüfen.

$$\begin{array}{llll} S_1 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad S_3 \leq 2 \\ x_2 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad S_3 \leq \infty \\ x_1 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad S_3 \leq 8 \\ S_4 \geq 0 & setzt & voraus, & dass \quad S_3 \leq 4 \end{array} \tag{4.33}$$

$S_3$ darf also nicht grösser als 2 sein.

**Schritt 5:** Welche Variable sollte die Basis verlassen (d.h. auf 0 gesetzt werden)? $S_1$ ist die Basisvariable, die bei einer Vergrösserung von $S_3$ als erstes gegen 0 geht. Daher wird $S_3$ für $S_1$ in die Basis gebracht.

**Schritt 6:** Was sind die neuen Werte der anderen Basisvariablen? Die erste Nebenbedingung aus Gleichung 4.32 wird nach $S_3$ umgeformt und entsprechend in die Zielfunktion und die anderen Nebenbedingungen eingesetzt. Dies ergibt die folgende Basislösung für Punkt D:

$$B^D = \{S_3, x_2, x_1, S_4\} \tag{4.34}$$

$$\begin{array}{rcrcrlcrl}
S_3 & = & 2 & - & \frac{1}{2} & \cdot S_1 & + & \frac{2}{5} & \cdot S_2 \\
x_2 & = & 4 & - & \frac{1}{2} & \cdot S_1 & + & \frac{1}{5} & \cdot S_2 \\
x_1 & = & 6 & + & \frac{1}{2} & S_1 & - & \frac{2}{5} & \cdot S_2 \\
S_4 & = & 2 & + & \frac{1}{2} & \cdot S_1 & - & \frac{1}{5} & \cdot S_2 \\
\hline
Z & = & 1480 & - & 10 & \cdot S_1 & - & 24 & \cdot S_2
\end{array} \tag{4.35}$$

Da jetzt alle Koeffizienten in Z negativ sind, kann die Zielfunktion nicht mehr weiter verbessert werden. Punkt D ist die optimale Lösung des Beispiels.

### 4.3.6 Interpretation der Ergebnisse

Im gegebenen Beispiel war sowohl durch die Grafik als auch durch das Ergebnis des SIMPLEX-Algorithmus' klar, dass hier nur eine einzige optimale Lösung des Problems existiert. Wie in Kapitel 4 bereits erwähnt, existieren aber noch andere Formen von Lösungsmengen. Im Folgenden wird kurz erläutert, wie diese in der SIMPLEX-Methode identifiziert werden können.

- **Unbegrenzte Lösungen**: Wenn alle Variablen, die die Basis verlassen können, eine unendliche Zulässigkeit besitzen, hat das Problem eine unbegrenzte Lösung.
- **Alternierende Optima**: Wenn mehr als eine zulässige Basislösung den gleichen Wert der Zielfunktion bei Optimalität ergibt, d.h. wenn sich der Wert der Zielfunktion durch einen Pivotschritt nicht verändert, existieren alternierende Optima. Dies ist daran zu erkennen, dass mindestens ein Koeffizient der Nicht-Basisvariablen in der Zielfunktion 0 ist.
- **Unzulässige Lösung**: Wenn für eine Basis-Repräsentation eine oder mehrere Basisvariablen negativ sind, ist die Lösung nicht zulässig. Dies ist zum Beispiel bei der folgenden Gruppe von Nebenbedingungen der Fall, in der noch eine neue Nebenbedingung hinzugekommen ist. Die im Beispiel gewählte Anfangslösung $B^A$ (mit $x_1 = 0, x_2 = 0$) wäre für diese Nebenbedingungen nicht zulässig, da $S_5$ damit negativ würde.

$$\begin{array}{rcrcrlcrl}
S_1 & = & 28 & - & 2 & \cdot x_1 & - & 4 & \cdot x_2 \\
S_2 & = & 50 & - & 5 & \cdot x_1 & - & 5 & \cdot x_2 \\
S_3 & = & 8 & - & 1 & \cdot x_1 & & & \\
S_4 & = & 6 & - & & & - & 1 & \cdot x_2 \\
S_5 & = & -3 & + & & x_1 & + & & x_2 \\
\hline
Z & = & 0 & + & 140 & \cdot x_1 & + & 160 & \cdot x_2
\end{array} \tag{4.36}$$

### 4.3.7 Künstliche Variablen

In Kap. 4.3.5.2 wurde zur Vereinfachung des Problems der Ursprungspunkt (0,0) als Anfangs-Basislösung für den SIMPLEX-Algorithmus gewählt. Diese Anfangslösung kann natürlich nicht für jedes Problem zulässig sein. Nimmt man bspw. an, dass die Nebenbedingungen aus Gleichungssystem 4.36 gelten, ist die Anfangslösung $B^A$ nicht zulässig. Dies lässt sich auch grafisch veranschaulichen.

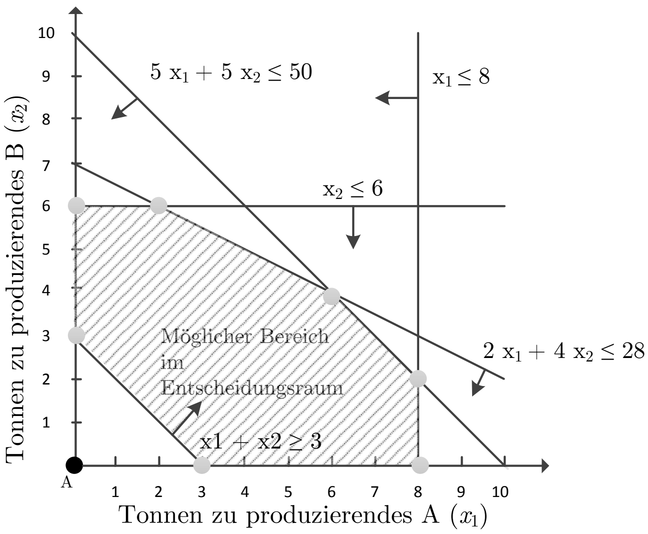



Abbildung 4.5: Nicht zulässige Anfangslösung $x_1$=0, $x_2$=0

Bei komplexeren Problemen ist es nicht möglich, eine zulässige Anfangslösung grafisch zu identifizieren. Daher muss eine andere Methode zur Identifikation herangezogen werden. Dazu ist es notwendig, die Problemformulierung so zu transformieren, dass ein zulässiger Bereich garantiert existiert. Das ist das Prinzip hinter der Identifikation einer zulässigen Anfangslösung.

Das Vorgehen wird anhand eines anderen Beispiels erläutert (Quelle: C. S. Revelle, E. E. Whitlatch, J. R. Wright, *Civil and Environmental Systems Engineering*, 2. Auflage, 2004, Kapitel 4):

$$Min.\, Z = 3 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \tag{4.37}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 40 \cdot x_1 & + & 15 \cdot x_2 & \geq & 100 \\ 14 \cdot x_1 & + & 35 \cdot x_2 & \geq & 140 \\ x_1 & & & \leq & 5 \\ & & x_2 & \leq & 5 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{4.38}$$

Die Anfangslösung $x_1$=0 und $x_2$=0 ist für dieses Problem nicht zulässig, da die ersten beiden Nebenbedingungen nicht erfüllt wären. Um dieses Anfangsproblem so zu transformieren, dass garantiert ein zulässiger Bereich existiert, werden «künstliche» Variablen eingeführt. Wenn eine zulässige Lösung gefunden werden kann, sodass diese künstlichen Variablen 0 sind, ist diese Lösung auch eine Basislösung für das ursprüngliche Problem. Wenn keine Lösung gefunden werden kann, gibt es keine zulässige Lösung für das Problem.

Sei A eine künstliche Variable, die beliebig gross sein kann, sodass sichergestellt wird, dass eine zulässige Lösung für den modifizierten Nebenbedingungssatz gefunden werden kann. Zur weiteren Erläuterung: Während die Schlupfvariablen bei der betrachteten Lösung den Abstand der betrachteten Basislösung zu den Grenzen des zulässigen Bereichs von der zulässigen Seite her beschreiben, beschreibt die künstliche Variable A den Abstand von der nicht zulässigen Seite des Bereichs her, also den Abstand von Lösungen ausserhalb des zulässigen Bereichs.

$$\begin{array}{rcrrcr} 40 \cdot x_1 & + & 15 \cdot x_2 & +A & \geq & 100 \\ 14 \cdot x_1 & + & 35 \cdot x_2 & +A & \geq & 140 \\ x_1 & & & -A & \leq & 5 \\ & & x_2 & -A & \leq & 5 \end{array} \tag{4.39}$$

Wenn eine zulässige Lösung gefunden werden kann, sodass A = 0 für diesen modifizierten Nebenbedingungssatz ist, ist diese Lösung zulässig für den ursprünglichen Nebenbedingungssatz. Das Ziel ist es, A zu minimieren. Das vollständig erweiterte Hilfs-Minimierungsproblem auf der Suche nach einer Anfangslösung sieht dann folgendermassen aus:

$$Min.\, Z = A \tag{4.40}$$

$$\begin{array}{rcccccccccr} 40 & \cdot & x_1 & + & 15 & \cdot & x_2 & + & A & \geq & 100 \\ 14 & \cdot & x_1 & + & 35 & \cdot & x_2 & + & A & \geq & 140 \\ & & x_1 & & & & & - & A & \leq & 5 \\ & & & & & & x_2 & - & A & \leq & 5 \\ & & x_1, & x_2, & S_1, & S_2, & S_3, & S_4, & A & \geq & 0 \end{array} \tag{4.41}$$

Die Lösung, dass alle Schlupfvariablen in der Basis sind, ist nicht zulässig! Schlupfvariablen und künstliche Variablen werden in der Lösung gleich behandelt. Die Basisrepräsentation des Anfangspunktes sieht umgeformt dann so aus:

$$B^{Anfang} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \tag{4.42}$$

$$\begin{array}{rcrcrcccrcccc} S_1 & = & -100 & + & 40 & \cdot & x_1 & + & 15 & \cdot & x_2 & + & A \\ S_2 & = & -140 & + & 14 & \cdot & x_1 & + & 35 & \cdot & x_2 & + & A \\ S_3 & = & 5 & - & & & x_1 & & & & & + & A \\ S_4 & = & 5 & - & & & & & & & x_2 & + & A \\ \hline Z & = & 0 & & & & & & & & & + & A \end{array} \tag{4.43}$$

Diese Lösung ist klar nicht zulässig, da zwei der Schlupfvariablen negativ sind $(S_1, S_2)$. Wenn jedoch die künstliche Variable A für die negativste dieser Variablen in die Basis kommt, könnte die Lösung für das Hilfsproblem zulässig werden (das Vorgehen ist hier das gleiche wie in den Schritten 4, 5 und 6 des Kap. 4.3.5).

$$B^{+1} = \{S_1, A, S_3, S_4\} \tag{4.44}$$

$$\begin{array}{rcrcrcccrcccc} S_1 & = & 40 & + & 26 & \cdot & x_1 & - & 20 & \cdot & x_2 & + & S_2 \\ A & = & 140 & - & 14 & \cdot & x_1 & - & 35 & \cdot & x_2 & + & S_2 \\ S_3 & = & 145 & - & 15 & \cdot & x_1 & - & 35 & \cdot & x_2 & + & S_2 \\ S_4 & = & 145 & - & 14 & \cdot & x_1 & - & 36 & \cdot & x_2 & + & S_2 \\ \hline Z & = & 140 & - & 14 & \cdot & x_1 & - & 35 & \cdot & x_2 & + & S_2 \end{array} \tag{4.45}$$

Weil die Zielfunktion des Hilfsproblems minimiert werden soll, zeigen die negativen Koeffizienten der Variablen $x_1$ und $x_2$, dass die gegebene Lösung noch verbessert werden kann. Wenn $x_2$ in die Basis gebracht wird, wird $S_1$ ersetzt, und die entsprechende Basisdarstellung wäre die folgende:

$$B^{+2} = \{x_2, A, S_3, S_4\} \tag{4.46}$$

$$\begin{array}{rcrcccccccccc} x_2 & = & 2 & + & \frac{13}{10} & \cdot & x_1 & - & \frac{1}{20} & \cdot & S_1 & + & \frac{1}{20} & \cdot & S_2 \\ A & = & 70 & - & \frac{119}{2} & \cdot & x_1 & + & \frac{7}{4} & \cdot & S_1 & - & \frac{3}{4} & \cdot & S_2 \\ S_3 & = & 75 & - & \frac{121}{2} & \cdot & x_1 & + & \frac{7}{4} & \cdot & S_1 & - & \frac{3}{4} & \cdot & S_2 \\ S_4 & = & 73 & - & \frac{304}{5} & \cdot & x_1 & + & \frac{9}{5} & \cdot & S_1 & - & \frac{4}{5} & \cdot & S_2 \\ \hline Z & = & 70 & - & \frac{119}{2} & \cdot & x_1 & + & \frac{7}{4} & \cdot & S_1 & - & \frac{3}{4} & \cdot & S_2 \end{array} \tag{4.47}$$

Diese Lösung ist immer noch nicht optimal für das Hilfsproblem, da es dadurch verbessert werden könnte, dass entweder $x_1$ oder $S_2$ in die Basis gebracht werden. Wenn $x_1$ in die Basis gebracht würde, könnte man die künstliche Variable A ersetzen, die dann zur Nicht-Basisvariablen wird (mit einem Wert von 0). Würde hingegen $S_2$ in die Basis gebracht werden, würde $S_4$ ersetzt werden und A würde in der Basis bleiben. Da das Ziel ist, dass A aus der Basis kommt, während die Lösung zulässig bleibt, kommt $x_1$ in die Basis.

$$B^{+3} = \{x_2, x_1, S_3, S_4\} \tag{4.48}$$

$$\begin{array}{lclclclclcl}
x_2 & = & \frac{60}{17} & - & \frac{1}{85} & \cdot & S_1 & + & \frac{4}{119} & \cdot & S_2 & - & \frac{13}{595} & \cdot & A \\
x_1 & = & \frac{20}{17} & + & \frac{1}{34} & \cdot & S_1 & - & \frac{3}{238} & \cdot & S_2 & - & \frac{2}{119} & \cdot & A \\
S_3 & = & \frac{65}{17} & - & \frac{1}{34} & \cdot & S_1 & + & \frac{3}{238} & \cdot & S_2 & + & \frac{121}{119} & \cdot & A \\
S_4 & = & \frac{25}{17} & + & \frac{1}{85} & \cdot & S_1 & - & \frac{4}{119} & \cdot & S_2 & - & \frac{608}{595} & \cdot & A \\
\hline
Z & = & 0 & & & & & & & & & + & & & A
\end{array} \tag{4.49}$$

Diese Lösung ist optimal für das Hilfsproblem und gibt eine zulässige Lösung mit einer Zielfunktion von 0. Damit wurde gleichzeitig auch eine Lösung für das ursprüngliche Problem gefunden, das als Anfangspunkt für die weitere Optimierung dienen kann.

### 4.3.8 Tableau-Methode

Die Durchführung der SIMPLEX-Methode ist eine Herausforderung, weil es viele Zahlen und wechselnde Variablen gibt und es relativ leicht ist, dabei einen Fehler zu machen. Die Tableau-Methode bietet hierzu eine simplere Schreibweise, die die Schritte des SIMPLEX-Algorithmus durch den Pivotierungsprozess vereinfacht darstellt. Im Wesentlichen müssen nur die Koeffizienten dargestellt werden, nicht aber die Variablen. Ausserdem kann alles platzsparend und übersichtlich in einer Tabelle dargestellt werden.

Die Tableau-Methode besteht aus 7 Schritten, die so lange wiederholt werden, bis eine Lösung gefunden ist.

1. Schritt:

Wandle das Problem in Tableaudarstellung um und trage es in die Tabelle ein:

Die Zielfunktion aus der klassischen Schreibweise gehört umgeformt, sodass die Entscheidungsvariablen auf der einen Seite stehen, der Zielwert auf der anderen:

$$Max.\, Z = 140 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2 + 0 \Longrightarrow -140 \cdot x_1 - 160 \cdot x_2 = 0$$

Die Nebenbedingungen sind schon in der richtigen Form:

$$\begin{array}{ccccccccc}
2 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & +S_1 & & & & = & 28 \\
5 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & & +S_2 & & & = & 50 \\
x_1 & & & & & +S_3 & & = & 8 \\
 & & x_2 & & & & +S_4 & = & 6
\end{array}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | | |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | | |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | | |

Tabelle 4.2: Tableaumethode 1. Schritt

2. Schritt:

Suche jene Nicht-Basisvariablen (das sind jene in der Zeile Z), die die Zielfunktion noch optimieren können.

In diesem Fall (einem Maximierungsproblem) sind das jene, die negativ sind, bei einem Minimierungsproblem jene, die positiv sind.

| ACHTUNG!<br>Dies ist genau umgekehrt zur klassischen Schreibweise! |
|---|

In unserem Fall sind das $x_1$ und $x_2$

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | | |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | | |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 | | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | | |

Tabelle 4.3: Tableaumethode 2. Schritt

3. Schritt: Berechne zeilenweise die Verhältnisse von «Wert durch optimierfähige Variable» für alle Zeilen ausser Z.

z.B. Zeile $S_1$:

$$\text{für}\, x_1 : \frac{28}{2} = 14,\ \text{für}\, x_2 : \frac{28}{4} = 7$$

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8 | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | 6 |

Tabelle 4.4: Tableaumethode 3. Schritt

4. Schritt: Suche das geringste nicht-negative Verhältnis für jede optimierfähige Variable.

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |

Tabelle 4.5: Tableaumethode 4. Schritt

5. Schritt: Wähle jene Variable, die die Zielfunktion am schnellsten verbessert.

$$
\begin{aligned}
-1\cdot \quad (-140 \cdot 8) &= 1120 \\
-1\cdot \quad (-160 \cdot 6) &= 960
\end{aligned}
$$

Mit $x_1$ verbessert sich $Z$ schneller $\Rightarrow$ $x_1$ kommt für $S_3$ in die Basis. Somit ist das Pivotelement gefunden (Spalte $x_1$, Reihe $S_3$).

6. Schritt: Erweitere die Tabelle, beschrifte die Reihen und berechne die neue Reihe $x_1$ (an Stelle der Reihe $S_3$) mit folgender Formel:

$$
neue\,Reihe = \frac{alte\,Reihe}{Pivotelement}
$$

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8 | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | 6 |
| Z | | | | | | | | | |
| $S_1$ | | | | | | | | | |
| $S_2$ | | | | | | | | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | | |
| $S_4$ | | | | | | | | | |

Tabelle 4.6: Tableaumethode 6. Schritt

7. Schritt: Vervollständige die Basisvariablen: Schreibe eine «1» in alle Felder, in denen Zeilenname und Spaltenname übereinstimmen und fülle diese Spalten mit «0» auf.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | | 0 | 0 | | 0 | | | |
| $S_1$ | 0 | | 1 | 0 | | 0 | | | |
| $S_2$ | 0 | | 0 | 1 | | 0 | | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | | |
| $S_4$ | 0 | | 0 | 0 | | 1 | | | |

Tabelle 4.7: Tableaumethode 7. Schritt

8. Schritt: Fülle die restlichen Felder nach folgender Formel auf:

$$neues\,Element = altes\,Element - \left(\frac{Element\,in\,Piv.Reihe \cdot Element\,in\,Piv.Spalte}{Pivotelement}\right)$$

Erklärt am Beispiel für das Element in der Reihe Z und Spalte $S_3$:

$$neues\,Element = 0 - \left(\frac{1 \cdot (-140)}{1}\right) = 140$$

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | 0 | | | | |
| $S_1$ | | | | | $\Downarrow$ | | | | |
| $S_2$ | | | | | $\Downarrow$ | | | | |
| $S_3$ | 1 | | | | 1 | | | | |
| $S_4$ | | | | | | | | | |
| Z | | | | | 140 | | | | |
| $S_1$ | | | | | | | | | |
| $S_2$ | | | | | | | | | |
| $x_1$ | | | | | | | | | |
| $S_4$ | | | | | | | | | |

Tabelle 4.8: Tableaumethode 8. Schritt: Vorgehensweise

Fertig ausgefüllt:

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis 1 | Verhältnis 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | | |

Tabelle 4.9: Tableaumethode 8. Schritt

Somit ist der erste Pivotschritt abgeschlossen, und man beginnt wieder bei Schritt 2:

2. Schritt: Suche jene Nicht-Basisvariablen (das sind jene in der Zeile Z), die die Zielfunktion noch optimieren können. ($\Rightarrow x_2$)

3. Schritt: Berechne zeilenweise die Verhältnisse von «Wert durch optimierfähige Variable» für alle Zeilen ausser Z.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |

Tabelle 4.10: Tableaumethode 3. Schritt, 2. Pivotierung

4. Schritt: Suche das geringste nicht-negative Verhältnis für jede optimierfähige Variable. ($\Rightarrow x_2 \leq 2$ )

5. Schritt: Wähle jene Variable, die die Zielfunktion am schnellsten verbessert. ($\Rightarrow x_2$ )

6. Schritt: Erweitere die Tabelle, beschrifte die Reihen und berechne die neue Reihe.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |
| Z | | | | | | | | | |
| $S_1$ | | | | | | | | | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/5 | -1 | 0 | 2 | | |
| $x_1$ | | | | | | | | | |
| $S_4$ | | | | | | | | | |

Tabelle 4.11: Tableaumethode 6. Schritt, 2. Pivotierung

7. Schritt: Vervollständige die Basisvariablen.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |
| Z | 0 | 0 | 0 | | | 0 | | | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | | | 0 | | | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/5 | -1 | 0 | | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | | | 0 | | | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | | | 1 | | | |

Tabelle 4.12: Tableaumethode 7. Schritt, 2. Pivotierung

8. Schritt: Fülle die restlichen Felder auf.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |
| Z | 0 | 0 | 0 | 32 | -20 | 0 | 1440 | | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -4/5 | 2 | 0 | 4 | | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/5 | -1 | 0 | 2 | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | -1/5 | 1 | 1 | 4 | | |

Tabelle 4.13: Tableaumethode 8. Schritt, 2. Pivotierung

Weiter bei Schritt 2:

2. Schritt: Suche jene Nicht-Basisvariablen (das sind jene in der Zeile Z), die die Zielfunktion noch optimieren können. ($\Rightarrow S_3$)

3. Schritt: Berechne zeilenweise die Verhältnisse von «Wert durch optimierfähige Variable» für alle Zeilen ausser Z.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |
| Z | 0 | 0 | 0 | 32 | -20 | 0 | 1440 | $S_3$ | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -4/5 | 2 | 0 | 4 | 2 | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/5 | -1 | 0 | 2 | - | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | -1/5 | 1 | 1 | 4 | 4 | |

Tabelle 4.14: Tableaumethode 3. Schritt, 3. Pivotierung

4. Schritt: Suche das geringste nicht-negative Verhältnis für jede optimierfähige Variable. ($\Rightarrow S_3 \leq 2$ )

5. Schritt: Wähle jene Variable, die die Zielfunktion am schnellsten verbessert. ($\Rightarrow S_3$ )

6. Schritt: Erweitere die Tabelle, beschrifte die Reihen und berechne die neue Reihe.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |
| Z | 0 | 0 | 0 | 32 | -20 | 0 | 1440 | $S_3$ | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -4/5 | 2 | 0 | 4 | 2 | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/5 | -1 | 0 | 2 | - | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | -1/5 | 1 | 1 | 4 | 4 | |
| Z | | | | | | | | | |
| $S_3$ | 0 | 0 | 1/2 | -2/5 | 1 | 0 | 2 | | |
| $x_2$ | | | | | | | | | |
| $x_1$ | | | | | | | | | |
| $S_4$ | | | | | | | | | |

Tabelle 4.15: Tableaumethode 6. Schritt, 3. Pivotierung

7. Schritt: Vervollständige die Basisvariablen.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |
| Z | 0 | 0 | 0 | 32 | -20 | 0 | 1440 | $S_3$ | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -4/5 | 2 | 0 | 4 | 2 | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/5 | -1 | 0 | 2 | - | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | -1/5 | 1 | 1 | 4 | 4 | |
| Z | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | |
| $S_3$ | 0 | 0 | 1/2 | -2/5 | 1 | 0 | 2 | | |
| $x_2$ | 0 | 1 | | | 0 | 0 | | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | | | 0 | 0 | | | |
| $S_4$ | 0 | 0 | | | 0 | 1 | | | |

Tabelle 4.16: Tableaumethode 7. Schritt, 3. Pivotierung

8. Schritt: Fülle die restlichen Felder auf.

| | $\mathbf{x_1}$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -140 | -160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1$ | $x_2$ |
| $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 28 | 14 | 7 |
| $S_2$ | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 | 10 | 10 |
| $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | **8** | $\infty$ |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\infty$ | **6** |
| Z | 0 | -160 | 0 | 0 | 140 | 0 | 1120 | $x_2$ | |
| $S_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | -2 | 0 | 12 | 3 | |
| $S_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | -5 | 0 | 10 | 2 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\infty$ | |
| $S_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | |
| Z | 0 | 0 | 0 | 32 | -20 | 0 | 1440 | $S_3$ | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -4/5 | 2 | 0 | 4 | 2 | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/5 | -1 | 0 | 2 | - | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | -1/5 | 1 | 1 | 4 | 4 | |
| Z | 0 | 0 | 10 | 24 | 0 | 0 | 1480 | | |
| $S_3$ | 0 | 0 | 1/2 | -2/5 | 1 | 0 | 2 | | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/2 | -1/5 | 0 | 0 | 4 | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/2 | 2/5 | 0 | 0 | 6 | | |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/2 | 1/5 | 0 | 1 | 2 | | |

Tabelle 4.17: Tableaumethode 8. Schritt, 3. Pivotierung

Weiter bei Schritt 2:

2. Schritt: Suche jene Nicht-Basisvariablen (das sind jene in der Zeile Z), die die Zielfunktion noch optimieren können.

$\Rightarrow$ Es sind keine Variablen mehr da, die die Zielfunktion noch optimieren könnten. Somit ist die gefundene Lösung optimal.

### 4.3.9 Klassische Methode und Tableau-Methode im Vergleich

Im folgenden Kapitel wird anhand des in Kap. 4.3.7 auf Seite 84 angefangenen Minimierungsbeispiels, dessen Lösungsraum in Abb 4.6 dargestellt ist, gezeigt, wie sich die klassische und die Tableau-Methode im Vergleich verhalten.

Der in Abschnitt 4.3.5.2 beschriebene erste Schritt des SIMPLEX-Algorithmus, die Auswahl der Anfangs-Basislösung, wurde bereits durchgeführt, indem die künstliche Variable A zu einer Transformation des ursprünglichen Problems verwendet wurde. Dabei ergab sich das in den Gleichungen 4.48 und 4.49 beschriebene Endschema, welches nun als eine zulässige Anfangslösung für die Minimierung des ursprünglichen LP-Problems fungiert und mit dem SIMPLEX-Algorithmus gelöst werden kann.

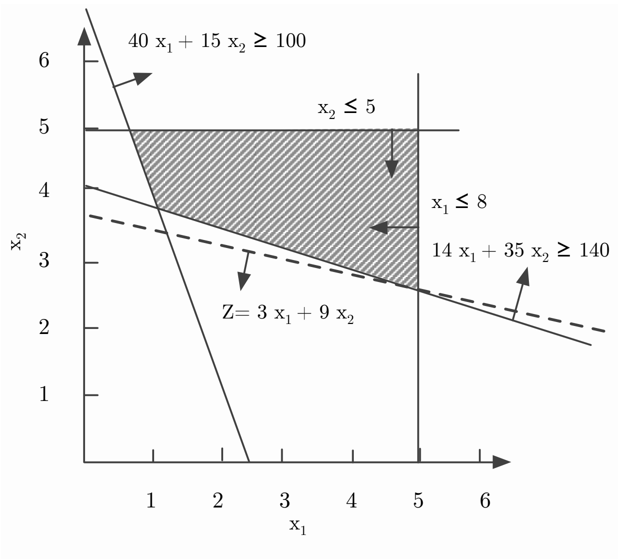



Abbildung 4.6: Zulässiger Bereich

Die Hilfsvariable A ist als Nicht-Basisvariable nun Null und kann für die weitere Optimierung des LP wieder weggelassen werden.

Somit liegt der identifizierte Anfangspunkt bei $x_1 = {}^{20}/_{17}$, $x_2 = {}^{60}/_{17}$, $S_3 = {}^{65}/_{17}$, $S_4 = {}^{25}/_{17}$ und hat einen Zielfunktionswert von $Z = 3 \cdot {}^{20}/_{17} + 9 \cdot {}^{60}/_{17} = {}^{600}/_{17}$.

### Klassische Methode

Nun kann mit dem zweiten Schritt des SIMPLEX-Algorithmus begonnen werden. Zuvor wird das LP jedoch noch in eine neu sortierte Ausgangsform gebracht:

$$B^A = \{x_1, x_2, S_3, S_4\} \tag{4.50}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & = & \frac{20}{17} & + & \frac{1}{34} & \cdot & S_1 & - & \frac{3}{238} & \cdot & S_2 \\
x_2 & = & \frac{60}{17} & - & \frac{1}{85} & \cdot & S_1 & + & \frac{4}{119} & \cdot & S_2 \\
S_3 & = & \frac{65}{17} & - & \frac{1}{34} & \cdot & S_1 & + & \frac{3}{238} & \cdot & S_2 \\
S_4 & = & \frac{25}{17} & + & \frac{1}{85} & \cdot & S_1 & - & \frac{4}{119} & \cdot & S_2 \\
\hline
Z^A & = & \frac{600}{17} & - & \frac{3}{170} & \cdot & S_1 & + & \frac{9}{34} & \cdot & S_2
\end{array} \tag{4.51}$$

### Tableau-Methode

**1.Schritt:** Wandle das Problem in Tableaudarstellung um und trage es in die Tabelle ein:
Die Zielfunktion aus der klassischen Schreibweise gehört umgeformt, sodass die Entscheidungsvariablen auf der einen Seite stehen, der Zielwert auf der anderen:

$$Min.\, Z = \frac{600}{17} - \frac{3}{170} \cdot S_1 + \frac{9}{34} \cdot S_2 \Longrightarrow \frac{3}{170} \cdot S_1 - \frac{9}{34} \cdot S_2 = \frac{600}{17}$$

Das gleiche gilt für die Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \cdot x_1 & & -\frac{1}{34} \cdot S_1 & +\frac{3}{238} \cdot S_2 & & & = & \frac{20}{17} \\
 & 1 \cdot x_2 & +\frac{1}{85} \cdot S_1 & -\frac{4}{119} \cdot S_2 & & & = & \frac{60}{17} \\
 & & \frac{1}{34} \cdot S_1 & -\frac{3}{238} \cdot S_2 & +1 \cdot S_3 & & = & \frac{65}{17} \\
 & & -\frac{1}{85} \cdot S_1 & +\frac{4}{119} \cdot S_2 & & +1 \cdot S_4 & = & \frac{25}{17}
\end{array}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | 3/170 | -9/34 | 0 | 0 | 600/17 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/34 | 3/238 | 0 | 0 | 20/17 | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/85 | -4/119 | 0 | 0 | 60/17 | |
| $S_3$ | 0 | 0 | 1/34 | -3/238 | 1 | 0 | 65/17 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/85 | 4/119 | 0 | 1 | 25/17 | |

(a) Tableaumethode, 1. Schritt

**2. Schritt:** Ist die Basislösung schon optimal? Nein, da der Koeffizient für $S_1$ in der Zielfunktion negativ ist, d.h. wenn $S_1$ in die Basis gebracht wird, kann Z noch verbessert werden (siehe Gleichung 4.51).
**3. Schritt:** Welche Nicht-Basisvariable soll in die Basis gebracht werden? Da in diesem Fall nur $S_1$ einen negativen Koeffizienten hat (nämlich $-3/170$), sollte diese Variable in die Basis gebracht werden.

**2. Schritt:** Suche jene Nicht-Basisvariablen (das sind jene in der Zeile Z), die die Zielfunktion noch optimieren können.
In diesem Fall (einem Minimierungsproblem) sind das jene, die positiv sind.

ACHTUNG!
Dies ist genau umgekehrt zur klassischen Schreibweise!

In unserem Fall ist das $S_1$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{S_1}$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | 3/170 | -9/34 | 0 | 0 | 600/17 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/34 | 3/238 | 0 | 0 | 20/17 | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/85 | -4/119 | 0 | 0 | 60/17 | |
| $S_3$ | 0 | 0 | 1/34 | -3/238 | 1 | 0 | 65/17 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/85 | 4/119 | 0 | 1 | 25/17 | |

(b) Tableaumethode, 2. Schritt

**3. Schritt:** Berechne zeilenweise die Verhältnisse von «Wert durch optimierfähige Variable» für alle Zeilen ausser Z.
z.B. Zeile $x_2$

$$\frac{60}{17} : \frac{1}{85} = 300$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{S_1}$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | 3/170 | -9/34 | 0 | 0 | 600/17 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/34 | 3/238 | 0 | 0 | 20/17 | -40 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/85 | -4/119 | 0 | 0 | 60/17 | 300 |
| $S_3$ | 0 | 0 | 1/34 | -3/238 | 1 | 0 | 65/17 | 130 |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/85 | 4/119 | 0 | 1 | 25/17 | -125 |

(c) Tableaumethode, 3. Schritt

**4. Schritt:** Wie gross sollte der Wert der Variablen sein, die in die Basis kommen soll, so dass die Lösung weiterhin zulässig bleibt? Dies ist durch Analyse der Nebenbedingungen zu überprüfen.

$$\begin{array}{llll} x_1 \geq 0 & \textit{setzt voraus,} & \textit{dass} & S_1 \leq \infty \\ & & (\textit{eigentlich} & \geq -40) \\ x_2 \geq 0 & \textit{setzt voraus,} & \textit{dass} & S_1 \leq 300 \\ S_3 \geq 0 & \textit{setzt voraus,} & \textit{dass} & S_1 \leq 130 \\ S_4 \geq 0 & \textit{setzt voraus,} & \textit{dass} & S_1 \leq \infty \\ & & (\textit{eigentlich} & \geq -125) \end{array}$$

$S_1$ darf also nicht grösser als 130 sein.

**5. Schritt:** Welche Variable sollte die Basis verlassen (d.h. auf 0 gesetzt werden)? $S_3$ ist die Basisvariable, die bei einer Vergrösserung von $S_1$ als erstes gegen 0 geht. Daher wird $S_1$ für $S_3$ in die Basis gebracht.

**4. Schritt:** Suche das geringste nicht-negative Verhältnis für jede optimierfähige Variable.

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{S_1}$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | 3/170 | -9/34 | 0 | 0 | 600/17 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/34 | 3/238 | 0 | 0 | 20/17 | -40 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/85 | -4/119 | 0 | 0 | 60/17 | 300 |
| $S_3$ | 0 | 0 | 1/34 | -3/238 | 1 | 0 | 65/17 | **130** |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/85 | 4/119 | 0 | 1 | 25/17 | -125 |

(d) Tableaumethode, 4. Schritt

**5. Schritt:** Wähle jene Variable, die die Zielfunktion am schnellsten verbessert. ($\Rightarrow S_1$ kommt für $S_3$ in die Basis)

**6. Schritt:** Erweitere die Tabelle, beschrifte die Reihen und berechne die neue Reihe $S_1$ (an Stelle der Reihe $S_3$) mit folgender Formel:

$$\textit{neue Reihe} = \frac{\textit{alte Reihe}}{\textit{Pivotelement}}$$

(Das Pivotelement befindet sich hier in Zeile $S_3$, Spalte $S_1$.)

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{S_1}$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | 3/170 | -9/34 | 0 | 0 | 600/17 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/34 | 3/238 | 0 | 0 | 20/17 | -40 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/85 | -4/119 | 0 | 0 | 60/17 | 300 |
| $S_3$ | 0 | 0 | **1/34** | -3/238 | 1 | 0 | 65/17 | **130** |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/85 | 4/119 | 0 | 1 | 25/17 | -125 |
| Z | | | | | | | | |
| $x_1$ | | | | | | | | |
| $x_2$ | | | | | | | | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -3/7 | 34 | 0 | 130 | |
| $S_4$ | | | | | | | | |

(e) Tableaumethode, 6. Schritt

**7. Schritt:** Vervollständige die Basisvariablen: Schreibe eine «1» in alle Felder, in denen Zeilenname und Spaltenname übereinstimmen und fülle diese <u>Spalten</u> mit «0» auf.

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{S_1}$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | 3/170 | -9/34 | 0 | 0 | 600/17 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/34 | 3/238 | 0 | 0 | 20/17 | -40 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/85 | -4/119 | 0 | 0 | 60/17 | 300 |
| $S_3$ | 0 | 0 | **1/34** | -3/238 | 1 | 0 | 65/17 | **130** |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/85 | 4/119 | 0 | 1 | 25/17 | -125 |
| Z | 0 | 0 | 0 | | | 0 | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | | | 0 | | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | | | 0 | | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -3/7 | 34 | 0 | 130 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | | | 1 | | |

(f) Tableaumethode, 7. Schritt

**8. Schritt:** Fülle die restlichen Felder nach folgender Formel auf:

$$\begin{aligned} neues\,Element &= altes\,Element \\ &- \left(\frac{Element\,in\,Piv.Reihe \cdot Element\,in\,Piv.Spalte}{Pivotelement}\right) \end{aligned}$$

Erklärt am Beispiel für das Element in der Reihe Z und Spalte «Wert»:

$$neues\,Element = \frac{600}{17} - \left(\frac{\frac{65}{17} \cdot \frac{3}{170}}{\frac{1}{34}}\right) = 33$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{S_1}$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | | 3/170 | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | 600/17 | |
| $x_1$ | | | | | | | $\Downarrow$ | |
| $x_2$ | | | | | | | $\Downarrow$ | |
| $S_3$ | | | 1/34 | | | | 65/17 | |
| $S_4$ | | | | | | | | |
| Z | | | | | | | 33 | |
| $x_1$ | | | | | | | | |
| $x_2$ | | | | | | | | |
| $S_1$ | | | | | | | | |
| $S_4$ | | | | | | | | |

(g) Tableaumethode, 8. Schritt: Vorgehensweise

**6. Schritt:** Was sind die neuen Werte der anderen Basisvariablen? Die dritte Nebenbedingung aus Gleichung 4.51 wird nach $S_1$ umgeformt und entsprechend in die Zielfunktion und die anderen Nebenbedingungen eingesetzt.

$$S_1 = 130 + \frac{3}{7} \cdot S_2 - 34 \cdot S_3$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
x_1 & = & \frac{20}{17} & + & \frac{1}{34} & \cdot & (130 + \frac{3}{7} \cdot S_2 - 34 \cdot S_3) & - & \frac{3}{238} \cdot S_2 \\
x_2 & = & \frac{60}{17} & - & \frac{1}{85} & \cdot & (130 + \frac{3}{7} \cdot S_2 - 34 \cdot S_3) & + & \frac{4}{119} \cdot S_2 \\
S_1 & = & 130 & - & 34 & \cdot & S_3 & + & \frac{3}{7} \cdot S_2 \\
S_4 & = & \frac{25}{17} & + & \frac{1}{85} & \cdot & (130 + \frac{3}{7} \cdot S_2 - 34 \cdot S_3) & - & \frac{4}{119} \cdot S_2 \\
\hline
Z_B & = & \frac{600}{17} & - & \frac{3}{170} & \cdot & (130 + \frac{3}{7} \cdot S_2 - 34 \cdot S_3) & + & \frac{9}{34} \cdot S_2
\end{array}$$

Daraus ergibt sich die folgende Basisdarstellung für Punkt B:

$$B^B = \{x_1, x_2, S_1, S_4\} \tag{4.52}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
x_1 & = & 5 & & & & - & 1 & \cdot S_3 \\
x_2 & = & 2 & + & \frac{1}{35} & \cdot S_2 & + & \frac{2}{5} & \cdot S_3 \\
S_1 & = & 130 & + & \frac{3}{7} & \cdot S_2 & - & 34 & \cdot S_3 \\
S_4 & = & 3 & - & \frac{1}{35} & \cdot S_2 & - & \frac{2}{5} & \cdot S_3 \\
\hline
Z_B & = & 33 & + & \frac{9}{35} & \cdot S_2 & + & \frac{3}{5} & \cdot S_3
\end{array} \tag{4.53}$$

Da jetzt alle Koeffizienten in Z positiv sind (vgl. Gleichung 4.53), kann die Zielfunktion nicht mehr weiter verbessert (minimiert) werden.
⇒ Punkt B ist die optimale Lösung des Beispiels, mit $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ und einem Zielfunktionswert von $Z = 33$.

Fertig ausgefüllt:

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{S_1}$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Wert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | 3/170 | -9/34 | 0 | 0 | 600/17 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/34 | 3/238 | 0 | 0 | 20/17 | -40 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1/85 | -4/119 | 0 | 0 | 60/17 | 300 |
| $S_3$ | 0 | 0 | **1/34** | -3/238 | 1 | 0 | 65/17 | **130** |
| $S_4$ | 0 | 0 | -1/85 | 4/119 | 0 | 1 | 25/17 | -125 |
| Z | 0 | 0 | 0 | -9/35 | -3/5 | 0 | 33 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | -1/35 | -2/5 | 0 | 2 | |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -3/7 | 34 | 0 | 130 | |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | 1/35 | 2/5 | 1 | 3 | |

(h) Tableaumethode, 8. Schritt

Somit ist der erste Pivotschritt abgeschlossen und man beginnt wieder bei Schritt 2:

**2. Schritt:** Suche jene Nicht-Basisvariablen (das sind jene in der Zeile Z), die die Zielfunktion noch optimieren können.

⇒ Es sind keine Variablen mehr da, die die Zielfunktion noch optimieren könnten. Somit ist die gefundene Lösung ($x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $Z = 33$) optimal.

## 4.4 Sensitivitätsanalyse

### 4.4.1 Allgemein

Wie schon in Kap. 4 erwähnt, haben LP-Probleme viele Vorteile.

Zum Beispiel können LP eine grosse Anzahl möglicher Varianten evaluieren und letztendlich die optimale Variante herausfinden. Eine Schwäche ist allerdings, dass oft der Problembereich abstrahiert werden muss, um die Nebenbedingungen linear halten zu können.

Um die Chancen eines guten und belastbaren Ergebnisses zu erhöhen, sollte eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt werden. Dies ist umso wichtiger, je empfindlicher das Modell auf Veränderungen der Parameter reagiert.

Es können grob zwei Arten der Sensitivitätsanalyse unterschieden werden:

- Sensitivitätsanalyse der rechten Seite
- Sensitivitätsanalyse der Zielfunktion

In beiden Fällen sind zwei Fragen interessant:

- Was passiert, wenn das ursprüngliche Modell modifiziert wird?
- Wie weit dürfen sich die Parameter verändern, ohne dass sich das ursprüngliche Ergebnis ändert?

Zum Beispiel:

Was passiert, wenn im Beispiel aus Kap. 4.2.1 auf Seite 69 statt $28\,t$ Lehm pro Woche $31\,t$ verfügbar sind? Oder wenn das Mischgerät statt $50\,h$ nur $45\,h$ pro Woche zur Verfügung steht? Ändert das die optimale Strategie? Was passiert, wenn der Gewinn für die Produkte A und B statt 140/160 CHF plötzlich 145/155 CHF beträgt? In diesem Fall ist klar, dass sich der Gesamtgewinn verändert. Aber ändert sich auch die optimale Strategie, nämlich $6\,t$ Produkt A und $4\,t$ Produkt B zu produzieren?

Es ist wichtig, sich solche Fragen zu stellen, da sowohl die Ressourcenverfügbarkeit als auch der Ertrag meist keine fest bestimmbaren Werte sind, sondern gewisse Unsicherheiten in sich tragen. Nach der Durchführung einer Sensitivitätsanalyse kann man darüber Auskunft geben, wie sensibel ein Modell auf Parameteränderungen reagiert und innerhalb welchen Bereichs die gefundene optimale Lösung gültig ist.

### 4.4.2 Sensitivitätsanalyse der rechten Seite

Die Sensitivitätsanalyse der rechten Seite wird dazu verwendet, die Auswirkungen von Veränderungen in der Ressourcenverfügbarkeit zu untersuchen.

Dies soll hier am Beispiel der Randbedingung aus Gleichung 4.7 auf Seite 71 betrachtet werden:

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 28 \tag{4.54}$$

Was passiert, wenn die rechte Seite der Randbedingung verändert wird, z.B. auf $29\,t$?

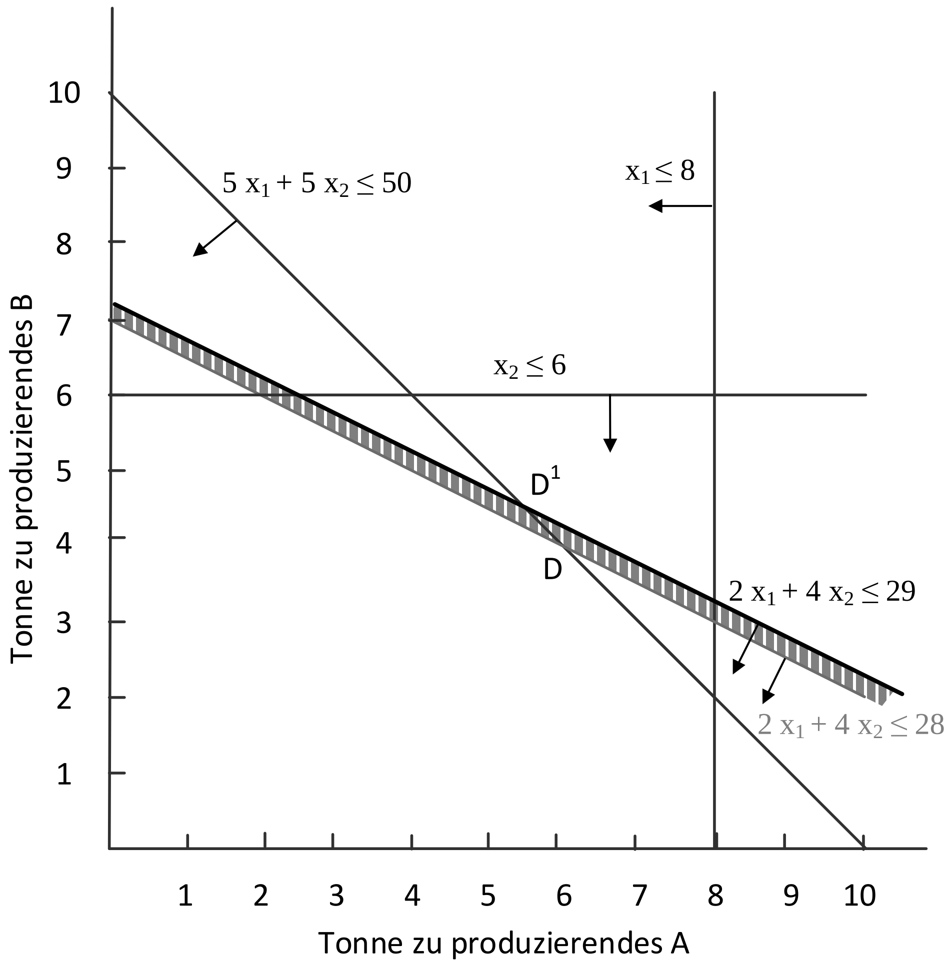



Abbildung 4.7: Veränderte Randbedingung 1

Wie man in Grafik 4.7 sieht, verschiebt sich die Gerade der entsprechenden Randbedingung parallel. Dies erweitert den Raum der zulässigen Lösungen um den dunkel schraffierten Bereich. Damit verschiebt sich auch die optimale Lösung zum Punkt $D^1(x_1 = 5.5,\ x_2 = 4.5$ und $Z^* = 1490)$. Trotzdem bleibt die optimale Basislösung (die Variablen, die sich bei der optimalen Lösung in der Basis befinden) gleich: $B^D = \{x_1, x_2, S_3, S_4\}$. Das bedeutet, dass für jede zusätzliche Tonne Lehm der Gewinn um $Z^* - Z^D = 1490 - 1480 = 10$ CHF steigt. Dieser Parameter wird *Schattenpreis* genannt.

In der Sprache der Sensitivitätsanalyse: Der *Grenznutzen* für eine zusätzliche Tonne Lehm beträgt 10 CHF. Falls der Preis für eine zusätzliche Tonne Lehm weniger als 10 CHF beträgt, wäre es sinnvoll, weiteren Lehm zu kaufen. Oder andersherum: Falls der Lieferant nicht die zugesagten 28 $t$ Lehm liefern kann, dann wären 10 CHF pro Tonne der Mindestbetrag einer Ausgleichszahlung, die die Firma akzeptieren sollte.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, wie viele zusätzliche Tonnen Lehm (zu maximal 10 CHF/t) gekauft werden könnten, um den Gewinn zu erhöhen.

Wenn man die verfügbare Menge Lehm weiter erhöht, verschiebt sich die Randbedingungsgerade noch weiter in Richtung rechts oben. Bei 32 $t$ erreicht sie Punkt I (siehe auch Abb. 4.4). Sobald sie diesen verlässt, wird eine andere Basislösung optimal, nämlich $B^I = \{x_1, x_2, S_1, S_3\}$. Diese neue

Lösung wird von zwei anderen Randbedingungen begrenzt. Genauer gesagt: $S_4$ verlässt die Basis, und $S_1$ kommt dafür herein. Es macht also keinen Sinn, mehr als $32\,t$ Lehm zu kaufen, da dessen Verfügbarkeit die optimale Lösung nicht mehr begrenzt.

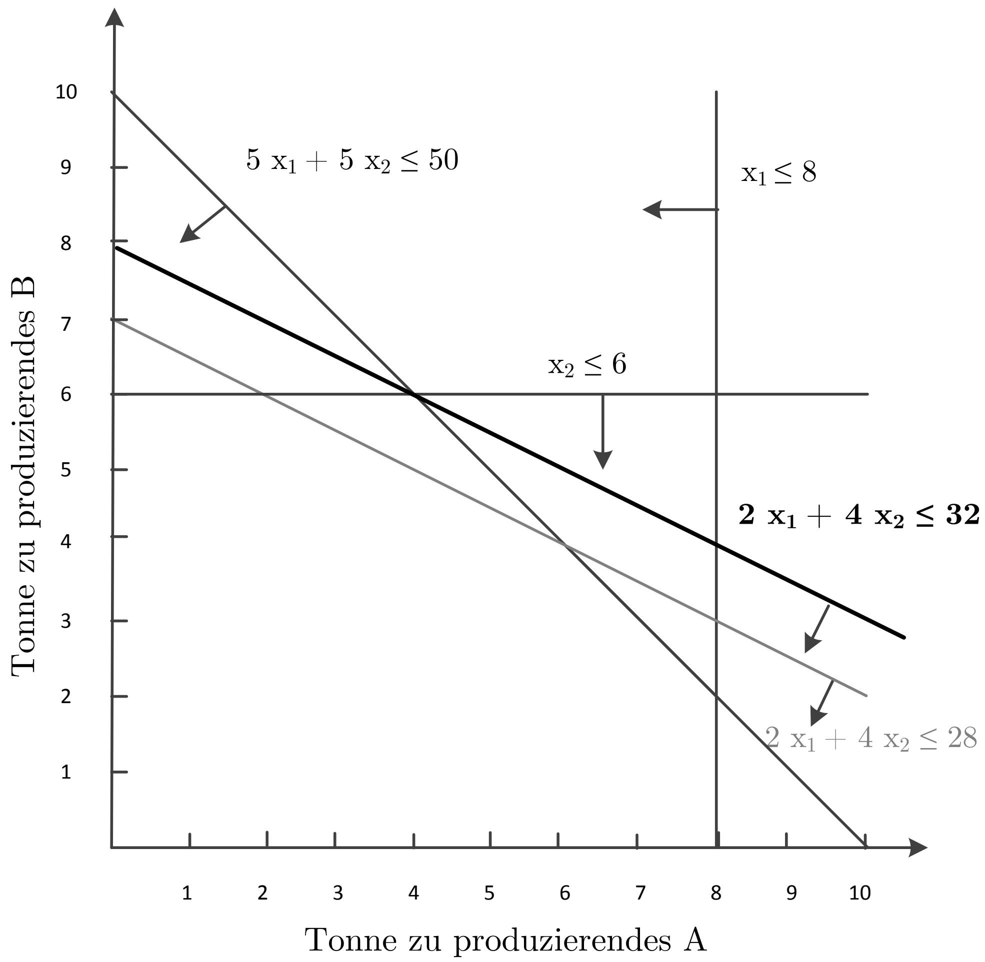



Abbildung 4.8: Veränderte Randbedingung 2

Das gleiche Vorgehen kann auch in die andere Richtung durchgeführt werden. Für dieses Beispiel ergibt sich eine untere Grenze von 24 t. Das bedeutet, dass sich innerhalb der Grenzen von 24 t bis 32 t verfügbaren Lehms die optimale Basislösung nicht ändert.

Wenn man dies für alle Variablen durchführt, erhält man folgende Tabelle:

| Randbedingung | verfügbare Menge | optimale Menge | zulässige Verringerung | zulässige Erhöhung | Schattenpreis |
|---|---|---|---|---|---|
| Lehm | 28 t | 28 t | 4 t | 4 t | 10 CHF |
| Mischzeit | 50 h | 50 h | 10 h | 5 h | 24 CHF |
| Aushärtebehälter A | 8 t | 6 t | 2 t | unbegrenzt | 0 CHF |
| Aushärtebehälter B | 6 t | 4 t | 2 t | unbegrenzt | 0 CHF |

Tabelle 4.18: Sensitivitätsanalyse der rechten Seite

Wie man sieht, beträgt der Schattenpreis für die Aushärtebehälter 0 CHF, weil diese Randbedingungen für die optimale Lösung nicht bindend sind. Daher sollte der Manager der Firma nicht in zusätzliche Aushärtebehälter investieren.

Die Einheit des Schattenpreises ist immer dieselbe wie die der Zielfunktion. In unserem Beispiel sind das Schweizer Franken, die eine direkte wirtschaftliche Bedeutung haben. In anderen Beispielen kann der Schattenpreis auch Kilowattstunden, Kubikmeter Wasser oder anderes als Einheit haben. Daraus ist der wirtschaftliche Nutzen zwar nicht direkt ablesbar, die gewonnene Information kann aber trotzdem sehr wertvoll sein.

### 4.4.3 Sensitivitätsanalyse der Zielfunktion

Die Sensitivitätsanalyse der Zielfunktion geht (genauso wie die Sensitivitätsanalyse der rechten Seite) von einer bereits gefundenen optimalen Lösung aus. Der Grund, auch die Zielfunktion einer Sensitivitätsanalyse zu unterziehen, liegt meist in der Unsicherheit der Daten. Meist sind diese von einer persönlichen Einschätzung oder einer bestimmten (Markt-)Situation abhängig und damit nicht unbedingt exakt.

Bei der Sensitivitätsanalyse der rechten Seite verschiebt sich eine Randbedingung parallel, aber die Steigung bleibt gleich. Hier ist es umgekehrt: Die Zielfunktion verschiebt sich nicht, sondern sie «dreht» sich um den optimalen Punkt.

Im Beispiel aus Kap. 4 lautete die Zielfunktion:

$$Max.\, Z = 140 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2 \tag{4.55}$$

Was wäre, wenn sich der Modellentwickler verschätzt hat, und 1 Tonne des Produkts A statt 140 CHF nur 139 CHF einbringt? Wäre die Produktionsstrategie von $6\,t$ Produkt A und 4 $t$ Produkt B immer noch optimal?

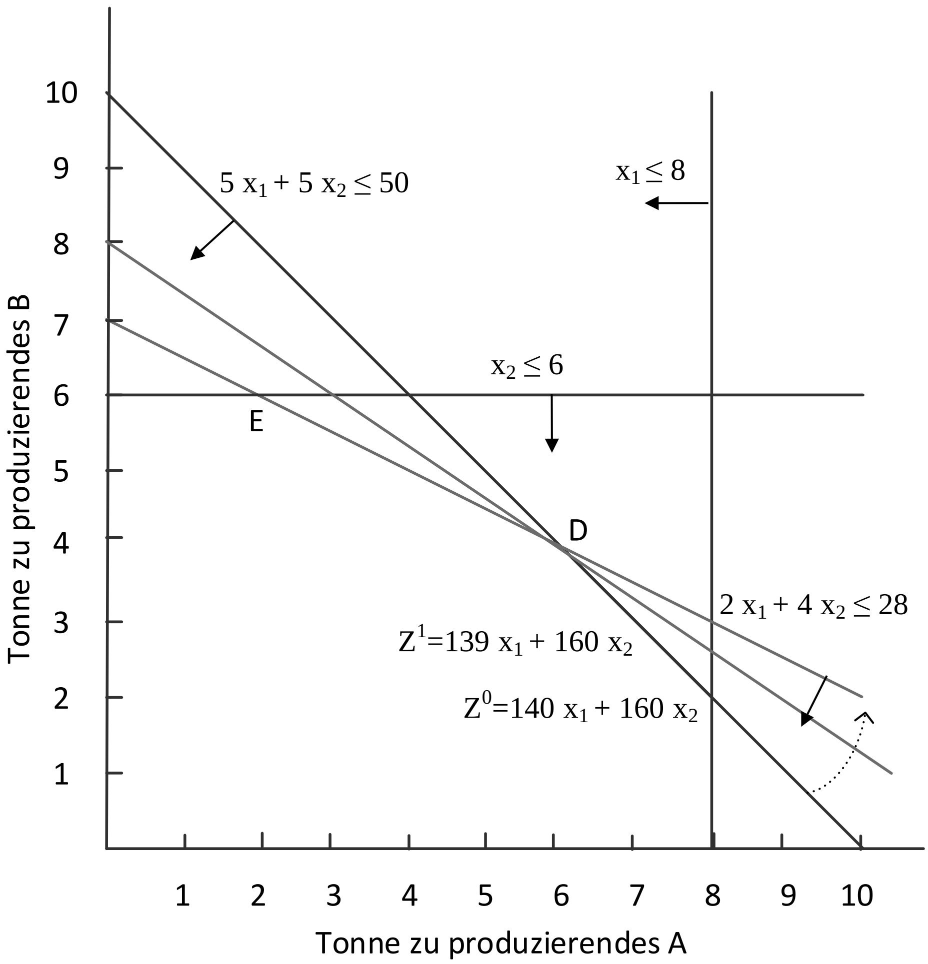



Abbildung 4.9: Veränderte Zielfunktion 1

In Abb. 4.9 sind die originale und die neue Zielfunktion eingezeichnet. Wie man sieht, ändert sich der optimale Punkt nicht, aber die Gerade «dreht» um diesen Punkt gegen den Uhrzeigersinn. Der maximale Profit ändert sich ebenfalls, in diesem Beispiel nimmt er um 6 CHF ab.

Wenn der Profit von Produkt A weiter abnimmt, dreht die Gerade weiter gegen den Uhrzeigersinn, bis sie den Punkt E berührt. An diesem Punkt herrschen alternierende Optima (d.h. sowohl Punkt D als auch Punkt E und alle dazwischenliegenden Punkte beschreiben die unendlich vielen Kombinationen von Produkt A und Produkt B, die ein optimales Ergebnis liefern). Bei einer weiteren Abnahme ist Punkt D nicht mehr optimal, sondern nur mehr Punkt E – die Produktionsstrategie müsste also geändert werden.

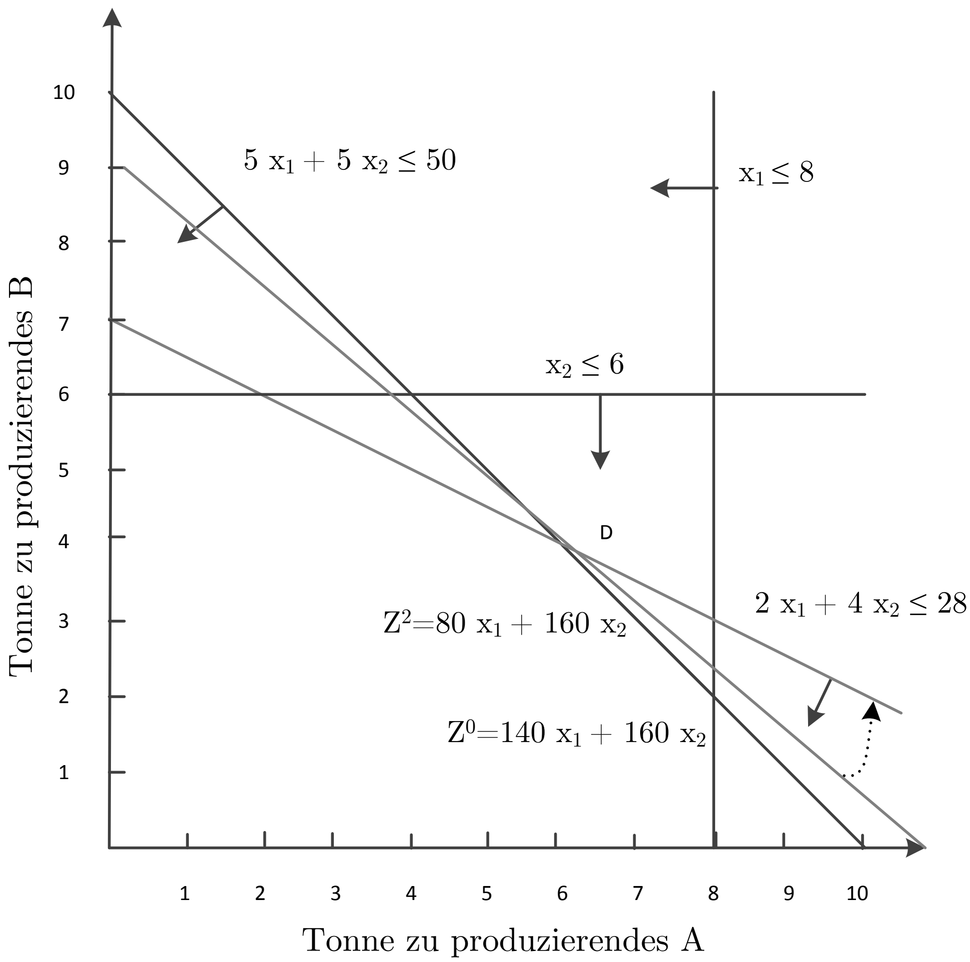



Abbildung 4.10: Veränderte Zielfunktion 2

Sinngemäss das gleiche gilt bei einer Zunahme des Profits von Produkt A, nur dreht die Gerade dann im Uhrzeigersinn. Dies kann man für beide Variablen ($x_1$ und $x_2$) bestimmen und erhält folgende Tabelle:

| Struktur-variable | optimaler Wert | aktueller Koeffizient | zulässige Verringerung | zulässige Erhöhung | Veränderung Profit |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 6 t | 140 CHF/t | 60 CHF | 20 CHF | 6 CHF |
| $x_2$ | 4 t | 160 CHF/t | 20 CHF | 120 CHF | 4 CHF |

Tabelle 4.19: Sensitivitätsanalyse der Zielfunktion

## 4.5 Mehrere Zielsetzungen

### 4.5.1 Allgemein

Es ist nicht zwingend so, dass ein Problem immer nur ein Ziel hat. Der Zielformulierungsschritt des Problemlösungsprozesses kann problemlos in der Definition von mehreren Zielen enden.

LP können dazu verwendet werden, mögliche Lösungsvarianten zu generieren und die optimalen Lösungsvarianten zu bestimmen. LP können aber auch dazu verwendet werden, den Grad des Konflikts oder des Trade-Offs zwischen verschiedenen Zielen zu quantifizieren. Die Formulierung ist die gleiche wie bei Optimierungsproblemen mit einer Zielsetzung. Der Unterschied ist nur, dass mehrere Ziele (z.B. $Z_1$ und $Z_2$) in die Zielformulierung integriert werden müssen. Wenn mehrere Ziele in der gleichen Einheit und mit dem gleichen Wert ausgedrückt werden können, verläuft die Evaluation der möglichen Varianten genau so, wie wenn nur ein einziges Ziel in einer Zielfunktion enthalten ist.

Falls dies aber nicht möglich ist, verläuft die Evaluation der möglichen Varianten insofern anders, als dass nur der Grad des Trade-Offs zwischen den Zielen quantifiziert werden kann, d.h.: Wenn der eine Wert schlechter wird, um wie viel wird dann der andere Wert besser – oder umgekehrt?

In diesem Fall wird die Zielfunktion *nicht-proportional* genannt. Die Zielfunktion ist nicht-proportional, wenn die Masseinheiten der Zielfunktionen unterschiedlich sind. Um die Lösungen des LP interpretieren zu können, wenn dieser zweite Fall existiert, ist es notwendig, das Konzept von «Nicht-Unterlegenheit» zu verstehen.

Definition:

*Eine Variante wird als nicht-unterlegen bezeichnet, wenn keine bessere Variante in Bezug auf eine der gegebenen Zielsetzungen besteht, ohne in Bezug auf mindestens ein anderes Ziel schlechter zu sein.*

Dies mag für den Anfang etwas verwirrend klingen, aber Grafik 4.11 kann dies besser erläutern:

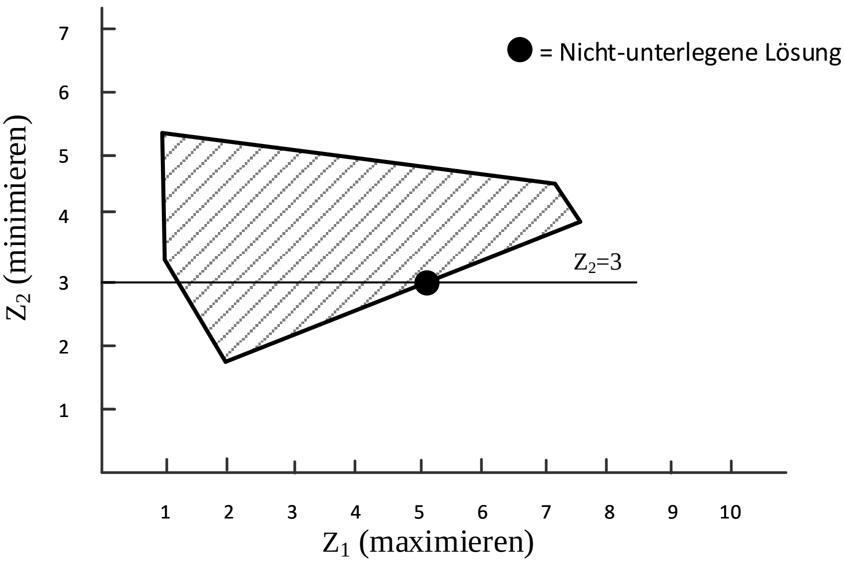



Abbildung 4.11: Nicht-unterlegene Lösung

Es handelt sich hier um eine Darstellung eines LP mit mehreren Zielsetzungen, von denen $Z_1$ maximiert und $Z_2$ minimiert werden soll; der Zielraum ist schraffiert eingezeichnet.

Wenn $Z_2$ «festgehalten wird», z.B. bei dem Wert 3, dann gibt es unendlich viele Möglichkeiten für eine Lösung von $Z_1$, wobei alle diese Lösungen zwischen $Z_1 = 1$ und $Z_1 = 5$ liegen. Da aber $Z_1$ maximiert werden soll, ist der maximal erreichbare Wert $Z_1 = 5$, und alle anderen Werte sind diesem unterlegen (d.h. sie würden einen schlechteren Wert liefern). Da es bei diesem Problem nur einen Trade-Off und keine einzigartige optimale Lösung gibt, werden Begriffe wie «beste Lösung» oder «Optimum» vermieden und stattdessen der Begriff «nicht-unterlegen» verwendet.

Angrenzende zulässige Extrempunkte im Entscheidungsraum (der von den Entscheidungsvariablen aufgespannt wird, also z.B. $x_1$ und $x_2$) bilden angrenzende Lösungen im Zielraum (der von den Zielfunktionen aufgespannt wird, also z.B. $Z_1$ und $Z_2$) ab.

Die Form des zulässigen Bereichs ist

- im Entscheidungsraum abhängig von den Nebenbedingungen für ein gegebenes Problem und
- im Zielraum abhängig von den Zielfunktionen, die als «Abbildungsfunktionen» für gegebene Zielsetzungen dienen.

Obwohl bei der Zielformulierung mit einer einzelnen Zielsetzung nur der Entscheidungsraum verwendet wurde, ist die Darstellung der möglichen Varianten im Zielraum sinnvoll, um zu sehen, wo die möglichen Varianten liegen. Bei mehreren Zielsetzungen macht diese Darstellung die Identifikation der nicht-unterlegenen Lösungen leichter. Wenn die Varianten im Zielraum dargestellt werden, gilt folgendes:

- Alle Punkte im Inneren des Zielbereichs sind unterlegen: Es wird immer möglich sein, eine bessere zulässige Lösung zu finden, die beide Zielsetzungen verbessern würde.
- Somit liegen alle nicht-unterlegenen Lösungen eines Optimierungsproblems an einem Teil des Randes des Zielbereichs. Wo genau, hängt von den Zielsetzungen ab:
  - Wenn $Z_1$ und $Z_2$ maximiert werden sollen, dann liegen sie am *nordöstlichen* Rand
  - Wenn $Z_1$ und $Z_2$ minimiert werden sollen, dann liegen sie am *südwestlichen* Rand
  - Wenn $Z_1$ maximiert und $Z_2$ minimiert werden soll, dann liegen sie am *südöstlichen* Rand
  - Wenn $Z_1$ minimiert und $Z_2$ maximiert werden soll, dann liegen sie am *nordwestlichen* Rand

### 4.5.2 Methoden zur Generierung des nicht-unterlegenen Satzes

#### 4.5.2.1 Allgemein

Methoden zur Generierung des nicht-unterlegenen Satzes (d.h. Generierung der Varianten, die akzeptabel sein könnten – abhängig von der Wichtigkeit aller Ziele) erlauben nicht, dass die Präferenzen der Entscheidungsträger bei der Suche nach den besten möglichen Varianten berücksichtigt werden. Die relative Wichtigkeit eines Ziels im Vergleich zu einem anderen wird erst später verwendet, um den Trade-Off zwischen den Zielen zu quantifizieren, was in der Bewertungsphase geschieht.

Die Auswahl einer umzusetzenden Lösung aus dem nicht-unterlegenen Satz von Lösungen liegt in der Verantwortung der Entscheidungsträger. In der Analysephase werden umfassende Informationen über die besten verfügbaren Varianten generiert, ohne Berücksichtigung der Wichtigkeit eines Ziels im Vergleich zu einem anderen. In der Bewertungsphase wird die endgültige Wahl aus den zur Verfügung stehenden Varianten getroffen. Die technischen Aspekte des Systems müssen nicht mehr beachtet werden und es muss nicht befürchtet werden, dass eventuell bessere Varianten nicht berücksichtigt werden.

**Die Gewichtungsmethode** Um die Gewichtungsmethode zu erklären, benötigt man zunächst die mathematische Formulierung des Problems mit p Zielen.

$$Optimiere\ Z\ = \begin{array}{c} Z_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ Z_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ . \\ . \\ . \\ Z_p(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccc} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) & \leq & b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) & \leq & b_2 \\ ... & & \\ ... & & \\ ... & & \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) & \leq & b_m \\ x_j \geq 0\ \forall_j & (f\ddot{u}r\ alle\ j) & \end{array}$$

1. Alle p linearen Programme werden gelöst, jedes mit einer der Zielfunktionen. Bestehen bei den Lösungen jedes LP
   - **keine alternierenden** Optima, so ist jede dieser Lösungen eine nicht-unterlegene Lösung für das Problem mit p Zielfunktionen (d.h. diese Varianten könnten optimal werden) oder
   - **alternierende** Optima, so ist mindestens eine der optimalen zulässigen Extrem-Basispunkte nicht-unterlegen.
2. Die Zielfunktionen werden in einer einzigen Zielfunktion kombiniert, indem jede Zielfunktion mit der jeweiligen Gewichtung multipliziert wird und die einzelnen Ergebnisse addiert werden. Dies wird manchmal «die grosse Zielfunktion» genannt.
3. Der nicht-unterlegene Lösungssatz wird durch das Lösen einer Reihe von LP generiert, während die Gewichtungen der individuellen Zielsetzungen systematisch variiert werden.
   - Jede dieser Lösungen wird eine nicht-unterlegene Lösung für das Problem mit mehreren Zielfunktionen sein, d.h. jede dieser Lösungen ist eine mögliche optimale Variante.
   - Die Anzahl der verschiedenen Gewichtungssätze und der LP, die gelöst werden, ist abhängig von der Komplexität der Vergleichsfläche und der verfügbaren Zeit des Analysten.

Wenn man die Gewichtungsmethode anwendet, sieht man, dass es möglich ist, alternierende Optima zu haben, wenn für p individuelle Zielfunktionen und mit der grossen Zielfunktion gerechnet wird.

Für beliebige Probleme mit p Zielfunktionen können die nicht-unterlegenen alternierenden Optima aus der Lösung eines LP mit der grossen Zielfunktion gefunden werden, die ein Gewicht von 1 auf dem $i-$ten Ziel und ein Gewicht $\varepsilon$ auf den übrigen $p-1$ Zielen hat, wenn die gefundene Lösung für die $i-$te Zielfunktion mehrere optimale Lösungen besitzt.

**Die Restriktionsmethode** Bei der Restriktionsmethode wird eine Zielfunktion willkürlich ausgewählt, um nach der Lösung von p individuellen Modellen die optimale Lösung für alle zu identifizieren. Diese ausgewählte Zielfunktion soll optimiert werden, während die anderen Zielfunktionen in den Nebenbedingungssatz (=Restriktionssatz) integriert werden, wobei die rechten Seiten als Begrenzung des Wertes derjenigen Zielfunktion dienen, die für die Optimierung ausgewählt wurde.

Die Restriktionsmethode ist eine Methode zur Bestimmung des nicht-unterlegenen Satzes, in der alle Zielfunktionen ausser einer in Restriktionen (Nebenbedingungen) umgewandelt wurden. Die optimale Lösung dieses Subproblems (neues LP) wird immer die nicht-unterlegene, optimale Lösung des Problems mit nur einer Zielfunktion sein. Wenn es mehr als zwei Zielfunktionen gibt, kann dieses Subproblem als Zielfunktion insgesamt alle $p-1$ anderen Zielfunktionen haben.

Dieses beschränkte Problem wird wie folgt definiert:

- Eine Zielfunktion wird ausgewählt, und alle anderen $p-1$ Zielfunktionen werden in den Nebenbedingungssatz gebracht, indem auf jeder rechten Seite ein entsprechender Koeffizient eingefügt wird. Dieser Koeffizient liegt für alle Zielfunktionen zwischen $L_{max}$ und $L_{min}$.
- Die Abschätzung des nicht-unterlegenen Lösungssatzes besteht aus den Lösungen jedes beschränkten Problems.

**Auswahl der Generierungsmethode** Wenn der Konfliktgrad zwischen den Zielen hoch ist, ist die Gewichtungsmethode sehr effektiv im Auffinden der nicht-unterlegenen Lösungen. Wenn eine zu grobe Auflösung der Gewichte verwendet wird, können einige nicht-unterlegene Lösungen übersehen werden. Wenn hingegen eine zu feine Auflösung der Gewichtungen verwendet wird, kann der Rechenaufwand extrem gross werden. Es ist ausserdem auch möglich, dass nicht-unterlegene Lösungen existieren, die mit allen beliebigen Kombinationen der Gewichte nicht gefunden werden können.

## 4.6 Ganzzahlige Lineare Programme

### 4.6.1 Allgemein

Die ganzzahlige lineare Optimierung (ILO – Integer Linear Optimisation) ist eine Erweiterung der normalen linearen Optimierung, bei der nur ganze Zahlen als Lösung gültig sind. Dies ist meist der Fall, wenn es sich bei den Entscheidungsvariablen um abzählbare Einheiten handelt, also z.B. Stück. Sie ist aus der Frage entstanden, wie vorgegangen werden muss, wenn die Entscheidungsvariable ganzzahlig ist, das Ergebnis des ursprünglichen LP aber nicht. Dieses ursprüngliche Problem wird auch «relaxiertes Problem» genannt. Man ist versucht, die Lösung einfach durch Auf-/Abrunden des relaxierten Problems zu bekommen. Die folgende Grafik zeigt, warum dies zu falschen Lösungen führen kann.

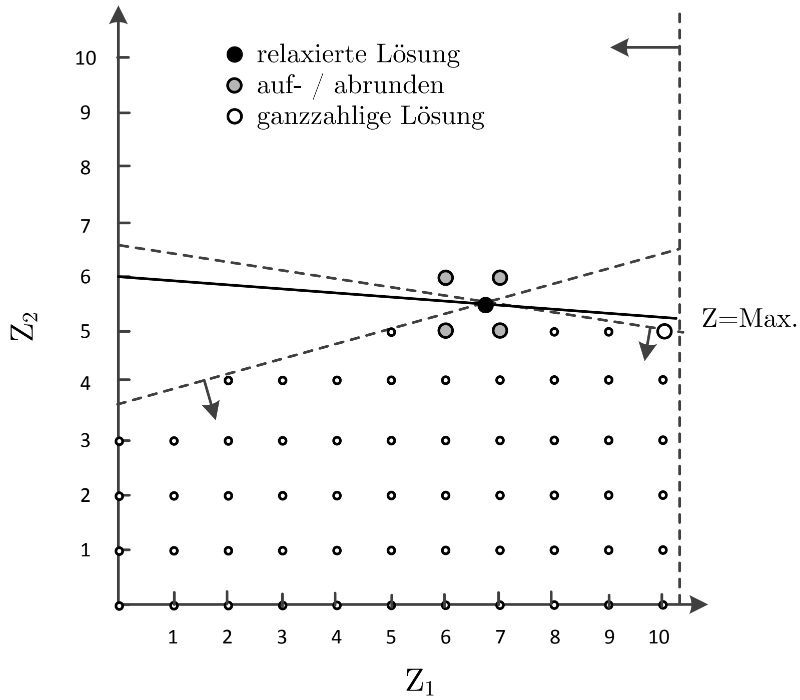



Abbildung 4.12: Ganzzahliges Lineares Programm

Man sieht, dass in diesem Fall die optimale ganzzahlige Lösung weit rechts von den auf- oder abgerundeten Lösungen liegt und sich mit $\{10; 5\}$ stark von der relaxierten Lösung $\{6.67; 5.5\}$ unterscheidet. Zusammengefasst lässt sich also festhalten, dass simples Auf- oder Abrunden nicht immer zu optimalen Lösungen führt.

### 4.6.2 Schranken

Obwohl einfaches Runden – wie gezeigt – keine Lösungsmethode ist, lässt sich vor allem aufgrund der Eigenschaft der Konvexität des Lösungsraumes die folgende Regel aufstellen:

- Der Zielfunktionswert der optimalen ganzzahligen Lösung kann niemals besser sein als der Zielfunktionswert der relaxierten Lösung des Problems.

Dies bedeutet, dass das Lösen des relaxierten Problems eine obere (Maximierung) bzw. eine untere (Minimierung) Schranke für das ganzzahlige Problem liefert. Dies ist die Grundlage für den «Branch-and-Bound» Algorithmus, der zur Lösung von ganzzahligen LP verwendet wird.

### 4.6.3 Branch-and-Bound Algorithmus

Ganzzahlige LP können mit dem Branch-and-Bound Algorithmus gelöst werden:

1. Relaxiere die Ganzzahlbedingung und löse das dazugehörige LP. Dies ergibt die Lösung $s$.
2. Wenn die Lösung $s$ ganzzahlig ist, dann ist dies auch die Lösung zum ILP. Wenn nicht, weiter bei 3.
3. Teile das Problem in 2 Subprobleme auf. Wähle dazu eine nicht ganzzahlige Entscheidungsvariable $x_i$ aus.
4. Führe jeweils eine neue Nebenbedingung ein:

   Problem 1: $x_i \leq int(s)$

   Problem 2: $x_i \geq int(s) + 1$
5. Löse die jeweiligen relaxierten Probleme und markiere die schlechtere der beiden Lösungen als «zurückgelegt». Wenn beide relaxierten Probleme keine Lösung haben, ist das Problem unlösbar.
6. Weiter bei 7. mit der besseren Lösung.
7. Wenn die Lösung $s$ ganzzahlig ist, dann markiere sie als Lösungskandidat. Wenn nicht, weiter mit der besseren Lösung bei 3.
8. Gibt es noch zurückgelegte Lösungen? Wenn nein, dann Lösungskandidat=Lösung.
9. Wenn ja, dann vergleiche Lösungskandidat mit zurückgelegten Lösungen. Gibt es eine bessere zurückgelegte Lösung als den Lösungskandidaten? Wenn nein, dann Lösungskandidat=Lösung.
10. Wenn ja, dann weiter mit der besten zurückgelegten Lösung bei 7.

Merke: Nebenbedingungen, die einmal eingeführt wurden, müssen bleiben!

**Beispiel** Die Zielfunktion für das zu optimierende ganzzahlige LP lautet

$$Max.\, Z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

Neben der Bedingung der Ganzzahligkeit müssen folgende Nebenbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{array}{rcrcr} 1 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & \leq & 8.25 \\ 2.5 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & \leq & 8.75 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Der zulässige Bereich für dieses Problem, sowie alle möglichen ganzzahligen Lösungen sind in Abb. 4.13 dargestellt – dabei ist farblich gekennzeichnet, welche Lösungen im zulässigen Bereich liegen (grau) und welche direkt aus dem Lösungssatz herausfallen (weiss).

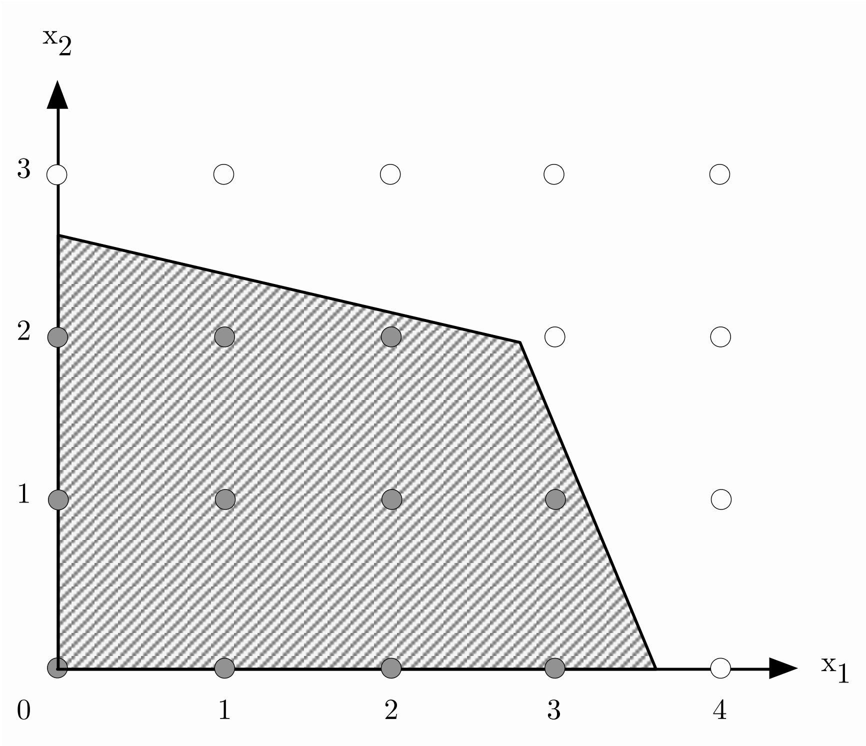



Abbildung 4.13: Zulässiger Bereich

Es wird deutlich, dass mit der Bedingung der Ganzzahligkeit nur 11 diskrete Punkte innerhalb der zulässigen Region liegen. In der zulässigen Region des relaxierten LP lägen hingegen unendlich viele Punkte. Es ist zu bemerken, dass – obgleich die relaxierte zulässige Region zusätzliche nicht-ganzzahlige Lösungen enthält – keine ganzzahligen Lösungen in ihr enthalten sind, die nicht auch im zulässigen Bereich des ursprünglichen (ganzzahligen) Problems liegen.

Dass Auf- und Abrunden für derartige Probleme nicht zwingend zu einer optimalen Lösung führt, wurde bereits anhand der Abb. 4.12 gezeigt. Stattdessen stellt der Branch-and-Bound Algorithmus eine gute Strategie dar, die optimale Lösung für ein solches LP zu finden.

*1. Schritt: Relaxiere die Ganzzahlbedingung und löse das dazugehörige LP.*

Ohne die Einschränkung der Ganzzahligkeit (relaxiertes Problem), läge die optimale Lösung bei $\{2.769; 1.826\}$ (Zielfunktionswert: 11.019) – wie in Abb. 4.14 ersichtlich.

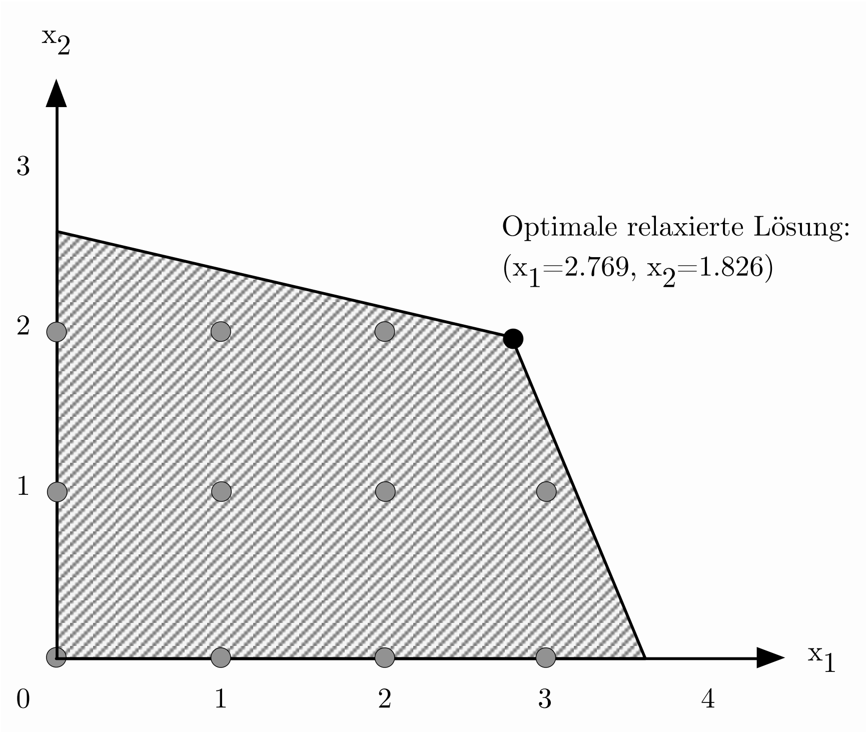



Abbildung 4.14: Optimale relaxierte Lösung

*2. Schritt: Wenn die Lösung s ganzzahlig ist, dann ist dies auch die Lösung zum ILP. Wenn nicht, weiter bei 3.*

Die relaxierte Lösung des linearen Programms ist nicht ganzzahlig, daher muss weitergesucht werden.

*3. Schritt: Teile das Problem in 2 Subprobleme auf. Wähle dazu eine nicht ganzzahlige Entscheidungsvariable $x_i$ aus.*

Es ist bekannt, dass die optimale Lösung am Rande des zulässigen Bereichs liegen muss. Da – mit Ausnahme des Ursprungs – hier am Bereichsrand nur nicht-ganzzahlige Lösungen liegen, muss der zulässige Bereich modifiziert werden, was durch das «Branchen» geschieht: Das Problem wird in 2 Subprobleme aufgeteilt, ausgehend von $x_1$. (Da in diesem Fall beide Entscheidungsvariablen nicht-ganzzahlig sind, spielt es hier jedoch an sich keine Rolle, mit welcher der beiden im folgenden Schritt begonnen wird.)

*4. Schritt: Führe jeweils eine neue Nebenbedingung ein.*

Für Problem I: $x_1 \leq int(2.769) \Rightarrow x_1 \leq 2$
Für Problem II: $x_1 \geq int(2.769) + 1 \Rightarrow x_1 \geq 3$

Diese beiden neuen LP müssen nun (z.B. mit der SIMPLEX-Methode) gelöst werden:

Subproblem I:

$$Max.\, Z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} 1 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & \leq & 8.25 \\ 2.5 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & \leq & 8.75 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

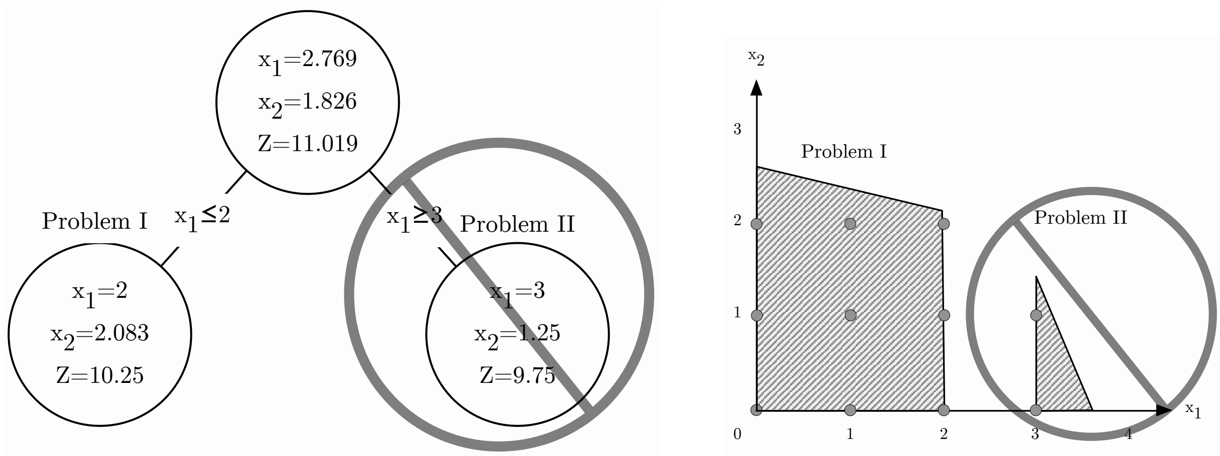
Subproblem II:

$$Max.\, Z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} 1 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & \leq & 8.25 \\ 2.5 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & \leq & 8.75 \\ x_1 & & & \geq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

*5. Schritt: Löse die jeweiligen relaxierten Probleme und markiere die schlechtere der beiden Lösungen als «zurückgelegt». Wenn beide relaxierten Probleme keine Lösung haben, ist das Problem unlösbar.*

Es ergeben sich zwei neue Werte für die Zielfunktion (10.25 und 9.75), von denen der schlechtere als zurückgelegt markiert wird. In diesem Fall, da es sich um ein Maximierungsproblem handelt, bedeutet das, dass Subproblem II als zurückgelegt markiert wird – die bessere Lösung wurde für Subproblem I gefunden.




(a) Lösung nach dem ersten Branch & Bound

(b) Modifizierter zulässiger Bereich

Abbildung 4.15: Ergebnis der ersten Iteration

*6. Schritt: Weiter bei 7. mit der besseren Lösung.*

Es muss also mit der Lösung zum Subproblem I fortgefahren werden.

*7. Schritt: Wenn die Lösung s ganzzahlig ist, dann markiere sie als Lösungskandidat. Wenn nicht, weiter mit der besseren Lösung bei 3.*

Die Lösung ist nicht ganzzahlig, also weiter mit Subproblem I bei 3.

*3. Schritt: Teile das Problem in 2 Subprobleme auf. Wähle dazu eine nicht ganzzahlige Entscheidungsvariable $x_i$ aus.*

Dieses Mal muss $x_2$ zur Aufteilung in die 2 Subprobleme verwendet werden, da $x_1$ schon ganzzahlig ist.

*4. Schritt: Führe jeweils eine neue Nebenbedingung ein.*

Für Problem III: $x_2 \leq int(2.083) \Rightarrow x_2 \leq 2$
Für Problem IV: $x_2 \geq int(2.083) + 1 \Rightarrow x_2 \geq 3$

Merke: Für $x_2$ wird nicht der Wert aus der Lösung des ursprünglichen relaxierten linearen Programms verwendet, sondern der Wert, der bei der Lösung des Subproblems I aus dem ersten Iterationsschritt herauskam. Des Weiteren ist es wichtig zu beachten, dass eine einmal eingeführte Nebenbedingung (hier: $x_1 \leq 2$) beibehalten werden muss, da sonst der Algorithmus nicht konvergiert. Die zwei neuen zu lösenden LP lauten also nun:

Subproblem III:

$$Max.\, Z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} 1 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & \leq & 8.25 \\ 2.5 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & \leq & 8.75 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

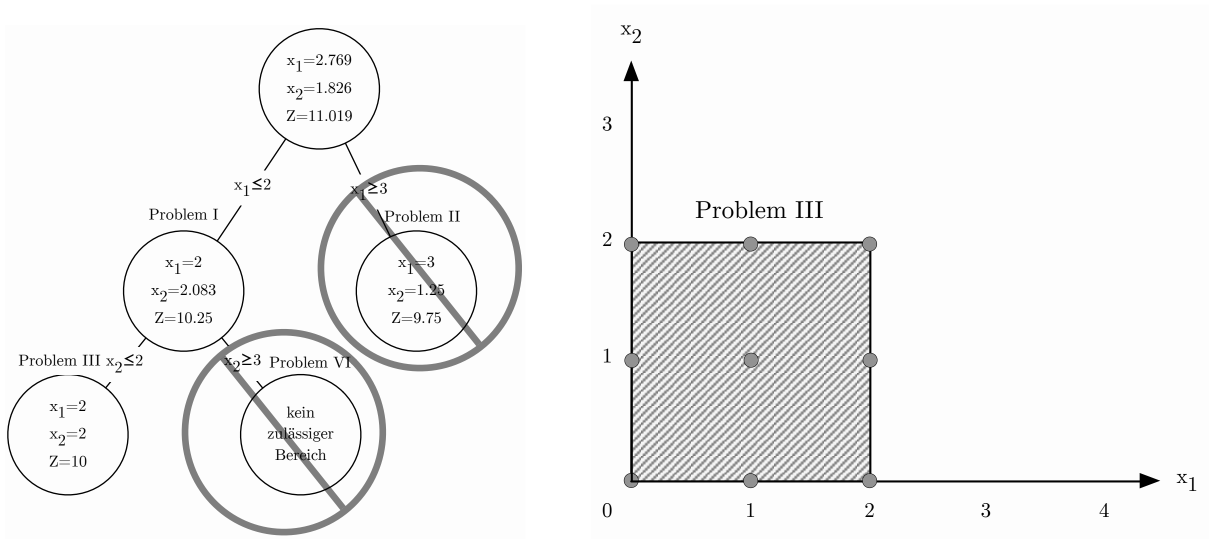
Subproblem IV:

$$Max.\, Z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} 1 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & \leq & 8.25 \\ 2.5 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & \leq & 8.75 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ & & x_2 & \geq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

*5. Schritt: Löse die jeweiligen relaxierten Probleme und markiere die schlechtere der beiden Lösungen als «zurückgelegt». Wenn beide relaxierten Probleme keine Lösung haben, ist das Problem unlösbar.*

Zu Subproblem IV gibt es keine zulässige Lösung – weder ganzzahlig noch relaxiert, da die zusätzliche Nebenbedingung nicht in Einklang mit dem zulässigen Lösungsbereich des ursprünglichen Problems zu bringen ist. Problem IV wird daher gänzlich verworfen, Problem III bleibt stehen.




(a) Lösung nach dem zweiten Branch & Bound

(b) Modifizierter zulässiger Bereich

Abbildung 4.16: Ergebnis der zweiten Iteration

*6. Weiter bei 7. mit der besseren Lösung.*

Es muss also mit der Lösung zum Subproblem III fortgefahren werden.

*7. Wenn die Lösung s ganzzahlig ist, dann markiere sie als Lösungskandidat, wenn nicht, weiter mit der besseren Lösung bei 3.*

$\{2; 2\}$ ist ganzzahlig, also wird die Lösung zu Subproblem III als Lösungskandidat markiert.

*8. Gibt es noch zurückgelegte Lösungen? Wenn nein, dann Lösungskandidat=Lösung.*

Es gibt noch eine zurückgelegte Lösung, nämlich diejenige zu Problem II.

*9. Wenn ja, dann vergleiche Lösungskandidat mit zurückgelegten Lösungen. Gibt es eine bessere zurückgelegte Lösung als den Lösungskandidaten? Wenn nein, dann Lösungskandidat=Lösung.*

Die Lösung zu Subproblem II beträgt Z=9.75; diejenige zu Subproblem III Z=10. Somit ist die Lösung zu Subproblem III auch die Lösung des ILP – sie liegt am oberen rechten Rand des modifizierten zulässigen Bereichs (vgl. Abb. 4.16 b). Der Wert der Zielfunktion beträgt 10.

Wäre die Lösung des Subproblems III kleiner als die Lösung des Subproblems II, dann könnte sich darin eventuell noch eine bessere ganzzahlige Lösung befinden.

## 4.7 Binäre LP

### 4.7.1 Allgemein

Binäre LP können als Spezialfall von ganzzahligen LP angesehen werden, bei denen die zulässigen Zahlen auf 0 und 1 beschränkt sind. Mit ihnen können z.B. Setup-Kosten oder andere einmalige Kosten sowie «Wenn»-Bedingungen abgebildet werden, zum Beispiel:

| | |
|---|---|
| $\sum_i^I x_i \leq 1$ | Nicht mehr als eine aus einem Set verschiedener Varianten, mit:<br>$x_i$ Binäre Variablen<br>*i, I* Indizes, die die einzelnen Varianten bzw. die Gesamtzahl der Varianten abzählen |
| $\sum_i^I x_i = 1$ | Genau eine aus einem Set verschiedener Varianten |
| $x_1 - x_2 = 0$ | Entweder beide Varianten können ausgewählt werden oder keine |
| $x_1 - x_2 \leq 0$ | Falls eine Variante ausgewählt wird, so wird gleichzeitig eine andere mitgewählt |

Binäre Variablen sind ausserdem nützlich, um Verknüpfungsnebenbedingungen aufzustellen, also Nebenbedingungen, die sicherstellen, dass eine Zuordnung zwischen zwei Variablentypen besteht. Verknüpfungsnebenbedingungen werden im Allgemeinen so ausgedrückt:

$x_i \leq M_i \cdot y_i$ oder $x_i \geq M_i \cdot y_i$

mit $M_i$ als obere Schranke der Werte von $x_i$. Der Wert von $M_i$ soll so klein wie möglich gewählt werden, ohne den Wert der Zielfunktion zu begrenzen.

Bei der ersten Verknüpfungsnebenbedingungen wird deutlich, dass für den Fall, dass $x_i$ einen Wert grösser als 1 hat, das gleiche auch für $y_i$ gelten muss. Falls der Wert von $x_i$ jedoch 0 ist, kann $y_i$ einen Wert von 0 oder 1 annehmen, und die Nebenbedingung wird eingehalten. Aus der zweiten Verknüpfungsnebenbedingungen wird ersichtlich, dass für den Fall, dass $y_i$ einen Wert grösser als 0 hat, $x_i$ einen Wert grösser als $M_i \cdot y_i$ haben muss – andernfalls kann $x_i$ jeden beliebigen Wert (0 oder 1) annehmen.

Eine Situation, die sich besonders für den Einsatz von binären Variablen in der Form von Verknüpfungsnebenbedingungen eignet, ist, wenn es für eine Tätigkeit Fixkosten gibt, die zusätzlich zu den variablen pro-Einheit-Kosten anfallen.

### 4.7.2 Beispiel – Optimale Strategie für die Auswahl von Produktlinien

#### Problemstellung

Ein Unternehmen, das eine neue Produktgruppe am Markt positionieren möchte, will dafür seine geplante Produktionsstrategie optimieren. Es stehen drei verschiedene Produktlinien (A, B und C) zur Auswahl, die jeweils einen unterschiedlichen Bedarf an Ressourcen haben. Die Ressourcen, die dabei wegen ihrer Begrenztheit relevant sind, sind die maschinelle Bearbeitungszeit, die benötigte Menge an Rohstoff sowie die Arbeitszeit der Personen, die für die Organisation und Überwachung der Fabrikation zuständig sind bzw. selbst einen Teil der Produktionskette ausführen.

Die benötigte Durchlaufzeit für die maschinelle Bearbeitung von Produkt A dauert ca. 15 Minuten, für Produkt B 10 Minuten und für Produkt C 30 Minuten. Da die benötigten 4 Maschinen auch noch für die Herstellung anderer Produkte des Unternehmens benötigt werden, stehen sie pro Tag nur 5 Stunden lang für diese neue Produktgruppe zur Verfügung, was einer Gesamtzeit von 20 Maschinenstunden (=1200 Minuten) entspricht. Alle Produkte basieren auf einem Rohstoff, der nur in einer begrenzten Menge von 375 kg pro Tag zur Verfügung steht. Pro Stück werden davon für Produkt A 7.5 kg, für Produkt B 3.75 kg und für Produkt C 5 kg benötigt. Inklusive aller Tätigkeiten rund um Planung, Herstellung und Transport der Produkte müssen bei Produktlinie A 7 Stunden, bei Produktlinie B 6 Stunden und bei Produktlinie C 3 Stunden pro Stück aufgewendet werden. Das Unternehmen hat 50 Angestellte, die pro Tag 8 Stunden arbeiten. Es stehen somit also täglich 400 Arbeitsstunden zur Verfügung.

Um die neue Produktgruppe so lukrativ wie möglich zu machen, möchte das Unternehmen den Gesamtnutzen maximieren. Die verschiedenen Produkte weisen dabei einen unterschiedlichen Nettonutzen (= Verkaufseinnahmen - variable Kosten) auf: 3'600 CHF pro Stück aus Produktlinie A, 3'150 CHF für jedes produzierte Stück B und 8'000 CHF für jedes Produkt C. Abschätzungen haben ergeben, dass die fixen Kosten einer Investition in die neuen Produktlinien – unabhängig von den produzierten Stückzahlen – bei 5'300 CHF für Produkt A, 6'500 CHF für Produkt B und 16'000 CHF für Produkt C liegen werden.

**Frage A:** In welche Produktlinien sollte investiert werden, und wie viele Produkte A, B, C sollten jeweils pro Tag produziert werden?

**Frage B:** Inwiefern unterscheidet sich die Antwort zu Frage A von dem Ergebnis, das erzielt wird, wenn man das lineare Programm ohne die Bedingung der Ganzzahligkeit löst?

#### Mathematische Formulierung

Die Zielfunktion lautet allgemein:

| | |
|---|---|
| Maximiere den Nutzen: | $\sum_{i=1}^{I} (x_i \cdot b_i - y_i \cdot c_i)$ |

**Nebenbedingungen:**

| | |
|---|---|
| Maximale Verfügbarkeit für jede Ressource | $\sum_{i=1}^{I} x_i \cdot r_{i,j} \leq R_j \quad \forall j$ |
| Nichtnegativitätsbedingung | $x_i \geq 0, \quad \forall i$ |
| Bedingung der Ganzzahligkeit | $x_i$ int, $\quad \forall i$ |
| Verknüpfungsnebenbedingungen | $x_i \leq M_i \cdot y_i$ |

**Parameter:**

$c_i$: Fixkosten für die Investition in die verschiedenen Produktlinien $i (i = 1, ..., I)$ [CHF]
$r_{i,j}$: Ressourcen, die für Produkt i benötigt werden [min/Stück, kg/Stück, Pers.-h/Stück]
$R_j$: Maximale Verfügbarkeit der Ressource j [h, kg, Pers.-h]
$b_i$: Nettoertrag der Produktionslinie i [CHF/Stück]

**Variablen:**

$x_i$: Ganzzahlige Variable, welche die produzierte Stückzahl in jeder Produktlinie angibt
$y_i$: Binärvariable, die jeder Produktlinie zugeordnet wird und der folgenden Bedingung unterliegt:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i > 0 \\ 0, & \text{wenn } x_i = 0 \end{cases} , \quad \forall i$$

$M_i$: Obergrenze für die Werte von $x_i$. Sie wird so festgelegt, dass die optimale Lösung durch jene Werte nicht eingeschränkt wird. In diesem Fall wird die kleinste der oberen Begrenzungen in der Verfügbarkeit der verschiedenen Ressourcen (Maschinenzeit, Rohstoffmenge, Arbeitsstunden) verwendet.

Es lässt sich somit das Problem mit den Werten der einzelnen Parameter folgendermassen aufschreiben:

$$Max: \; 3600 \cdot x_1 + 3150 \cdot x_2 + 8000 \cdot x_3 - 5300 \cdot y_1 - 6500 \cdot y_2 - 16000 \cdot y_3$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{llllllll} 15 & \cdot x_1 & + & 10 & \cdot x_2 & + & 30 & \cdot x_3 & \leq & 1200 \\ 7.5 & \cdot x_1 & + & 3.75 & \cdot x_2 & + & 5 & \cdot x_3 & \leq & 375 \\ 7 & \cdot x_1 & + & 6 & \cdot x_2 & + & 3 & \cdot x_3 & \leq & 400 \end{array}$$

Nichtnegativitätsbedingung

$x_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3$

Bedingung der Ganzzahligkeit

$x_i$ int

Verknüpfungsnebenbedingungen

$$\begin{array}{lllll} x_1 & \leq & 50 & \cdot & y_1 \\ x_2 & \leq & 66.67 & \cdot & y_2 \\ x_3 & \leq & 40 & \cdot & y_3 \end{array}$$

wobei gilt:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i > 0 \\ 0, & \text{wenn } x_i = 0 \end{cases} , \quad \forall i$$

Diese Werte wurden aus folgendem Grund so gewählt: Wenn nur Produktlinie A verfolgt werden würde, wäre die verfügbare Rohstoffmenge der limitierende Faktor für die produzierbare Stückanzahl. Wenn nur in Produktlinie B investiert würde, wäre es die Arbeitszeit der Angestellten, die eine obere Grenze für die Stückanzahl festlegen würde. Würde Produktlinie C als einziges ausgewählt, so würde die Stückanzahl von der Zeit, die die Maschinen zur Verfügung stehen, limitiert werden. Eine weitere Verringerung des Wertes von M hätte an diesem Punkt eine Einschränkung der optimalen Lösung zur Folge.

### Lösung

**Frage A:** Mithilfe eines Solver-Tools, wie z.B. in Excel, kann das so formulierte Programm leicht gelöst werden, wie in Abb. 4.17 dargestellt.

**Ergebnis:**

| Zielfunktion | verwendete Ressourcen | | |
|---|---|---|---|
| Max. Z = | Maschinen-zeit [min] | Rohstoff [kg] | Arbeitsstunden [Pers.-h] |
| **323600.00** | 1200 | 313 | 390 |
| | 100% | 83% | 98% |

| Produkt-linie | produzierte Stückzahl (x_i) | Nutzen pro Einheit (b_i) [CHF/Stück] | Binär-variable (y_i) | Fixkosten (c_i) [CHF] |
|---|---|---|---|---|
| **A** | **0** | 3600 | 0 | 5300 |
| **B** | **54** | 3150 | 1 | 6500 |
| **C** | **22** | 8000 | 1 | 16000 |

**benötigte Ressourcen (r_i,j):**

| Produkt-linie | Maschinen-zeit [min/Stück] | Rohstoff [kg/Stück] | Arbeitsstunden [Pers.-h/Stück] |
|---|---|---|---|
| A | 15 | 7.5 | 7 |
| B | 10 | 3.75 | 6 |
| C | 30 | 5 | 3 |
| maximale Verfüg-barkeit (R_j) | 1200 | 375 | 400 |

**Hilfsmatrix für Verknüpfungsnebenbedingungen (= r_i,j / R_j):**

| Produkt-linie | | | | Zeilen-minimum | M_y |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 80.0000 | **50.0000** | 57.1429 | 50.0000 | 0.0000 |
| B | 120.0000 | 100.0000 | **66.6667** | 66.6667 | 66.6667 |
| C | **40.0000** | 75.0000 | 133.3333 | 40.0000 | 40.0000 |

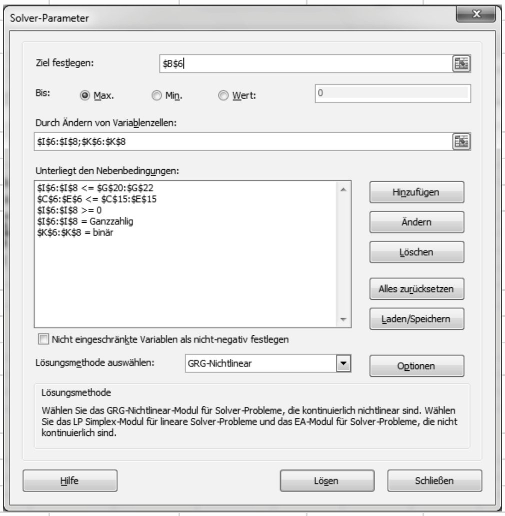



Abbildung 4.17: Produktlinien – Binäre ganzzahlige lineare Programmierung mit dem Excel-Solver

Es ergibt sich folgendes Resultat als optimale Strategie:

- Produktlinie A wird nicht ausgewählt, stattdessen wird in die Produktlinien B und C – mit einer täglich zu produzierenden Stückzahl von 54 bzw. 22 Stück – investiert.
- Hinsichtlich der vorhandenen Ressourcen wird die verfügbare Maschinenzeit voll ausgeschöpft, beim Rohstoff bleiben jedoch 17% ungenutzt und auch 2% der theoretisch verfügbaren Arbeitsstunden werden nicht eingesetzt.
- Der so erreichbare optimale Ertrag liegt bei 323′600 CHF.

**Frage B:** Wird die Bedingung der Ganzzahligkeit weggelassen, ergibt sich eine leicht veränderte Situation (vgl. Abb. 4.18).

**Ergebnis:**

| **Zielfunktion** | **verwendete Ressourcen** | | |
|---|---|---|---|
| **Max. Z =** | Maschinen-zeit [min] | Rohstoff [kg] | Arbeitsstunden [Pers.-h] |
| **324566.67** | 1200.00000140 | 316.66666684 | 400 |
| | 100% | 84% | 100% |

| Produkt-linie | **produzierte Stückzahl (x_i)** | Nutzen pro Einheit (b_i) [CHF/Stück] | Binär-variable (y_i) | Fixkosten (c_i) [CHF] |
|---|---|---|---|---|
| **A** | **0** | 3600 | 0 | 5300 |
| **B** | **56** | 3150 | 1 | 6500 |
| **C** | **21.33333339** | 8000 | 1 | 16000 |

**benötigte Ressourcen (r_i,j):**

| Produkt-linie | Maschinen-zeit [min/Stück] | Rohstoff [kg/Stück] | Arbeitsstunden [Pers.-h/Stück] |
|---|---|---|---|
| A | 15 | 7.5 | 7 |
| B | 10 | 3.75 | 6 |
| C | 30 | 5 | 3 |
| maximale Verfüg-barkeit (R_j) | 1200 | 375 | 400 |

**Hilfsmatrix für Verknüpfungsnebenbedingungen (= r_i,j / R_j):**

| Produkt-linie | | | | Zeilen-minimum | M_y |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 80.0000 | **50.0000** | 57.1429 | 50.0000 | 0.0000 |
| B | 120.0000 | 100.0000 | **66.6667** | 66.6667 | 66.6667 |
| C | **40.0000** | 75.0000 | 133.3333 | 40.0000 | 40.0000 |


Abbildung 4.18: Produktlinien – Binäre lineare Programmierung mit dem Excel-Solver

Im Vergleich zur ursprünglichen Lösung treten folgende Unterschiede zutage:

- Obwohl grundsätzlich gleich bleibt, in welche Produktlinien investiert wird, verändert sich die täglich zu produzierende Stückzahl von 54 auf 56 (für Produkt B) und von 22 auf theoretische $21\frac{1}{3}$ (für Produkt C).
- Die Ausnützung des vorhandenen Rohstoffs nimmt leicht zu (von 83% auf 84%) und die verfügbaren Arbeitsstunden werden nun komplett ausgeschöpft (100%, statt vorher 98%).
- Der theoretisch erreichbare Ertrag steigt auf 324′566.67 CHF.

Es ist aber natürlich klar, dass diese Variante keine zulässige Strategie darstellt, da die Produkte nur stückweise hergestellt werden können und die Bedingung der Ganzzahligkeit daher eine notwendige Voraussetzung für eine erfolgreiche Lösung der Problemstellung ist.

## 4.8 Goal Programming

### 4.8.1 Allgemein

Goal Programming (GP) ist eine Erweiterung der LP, damit Rahmenbedingungen und Sollziele abgebildet werden können. Bisher war es so, dass die Nebenbedingungen den Rahmenbedingungen entsprochen haben und unbedingt erfüllt werden mussten. Mit Goal Programming können nun die Rahmenbedingungen in Ziele umgewandelt werden. Das Ziel eines GP-Problems ist es, eine Lösung zu finden, die alle Ziele so weit wie möglich erfüllt. Eine ideale Lösung zeichnet sich durch die vollständige Zielerfüllung aus. Oft ist es aber nicht möglich, eine solche Lösung zu finden, weil sich einzelne Ziele widersprechen.

### 4.8.2 Abweichungsvariablen

Aus diesem Grund werden Abweichungsvariablen eingeführt. Die beste Lösung ist dann diejenige, die die Abweichungen (von den Zielen) minimiert.

$$Min.: \sum_i \left(d_i^- + d_i^+\right)$$

Das dazugehörige LP sieht dann so aus:

$$Min.\ Z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + \ldots + d_i^- + d_i^+$$

$$\begin{aligned}
a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n \boxed{+d_1^- - d_1^+} &= b_1 \\
a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n \boxed{+d_2^- - d_2^+} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n \boxed{+d_i^- - d_i^+} &= b_i
\end{aligned}$$

Wichtig sind hierbei die richtigen Vorzeichen: Die Unterschreitungsvariable $(d_i^-)$ muss sozusagen den «fehlenden Rest» auffüllen, deshalb das «+» davor. Die Überschreitungsvariable $(d_i^+)$ muss das Überschüssige abziehen, deshalb ein «-» davor, damit für die Variablen selbst gilt: $d_i^-, d_i^+ \geq 0$ (eine der Grundvoraussetzungen für LP).

### 4.8.3 Normierung

Momentan können die Abweichungsvariablen noch unterschiedliche Einheiten haben, da sie die gleichen Einheiten haben müssen wie $b_i$. Deshalb wird die Zielfunktion modifiziert, damit unterschiedliche Einheiten keinen Einfluss mehr haben. Dazu wird die Abweichungsvariable mit dem Zielwert normiert:

$$Min.: \sum_i \frac{1}{b_i} \cdot \left(d_i^- + d_i^+\right)$$

Das dazugehörige LP sieht dann so aus:

$$Min.\ Z = \frac{1}{b_1} \cdot d_1^- + \frac{1}{b_1} \cdot d_1^+ + \frac{1}{b_2} \cdot d_2^- + \frac{1}{b_2} \cdot d_2^+ + \ldots + \frac{1}{b_i} \cdot d_i^- + \frac{1}{b_i} \cdot d_i^+$$

$$\begin{aligned}
a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n + d_1^- - d_1^+ &= b_1 \\
a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n + d_2^- - d_2^+ &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n + d_i^- - d_i^+ &= b_i
\end{aligned}$$

HINWEIS: Dies ist nur möglich bei $b_i \neq 0$, es gibt also eine gewisse Einschränkung hinsichtlich der Zielwerte.

### 4.8.4 Gewichtung

Ein weiteres Problem ist, dass bis jetzt alle Abweichungen gleich wichtig sind. Da es aber von Vorteil ist, unterschiedlichen Abweichungen unterschiedliche Gewichte beizumessen, kann noch eine letzte Erweiterung hinzugefügt werden. Damit kann z.B. erfasst werden, dass in einer bestimmten Entscheidungssituation Überschreitungen mehr stören als Unterschreitungen (man denke an Kosten!) und dass Abweichungen bei Nebenbedingung 1 weniger wichtig sind als bei Nebenbedingung 2:

$$Min. : \sum_i \frac{1}{b_i} \cdot \left(\omega_i^- \cdot d_i^- + \omega_i^+ \cdot d_i^+\right)$$

Das dazugehörige LP sieht dann so aus:

$$Min.\ Z = \frac{\omega_1^-}{b_1} \cdot d_1^- + \frac{\omega_2^+}{b_1} \cdot d_1^+ + \frac{\omega_2^-}{b_2} \cdot d_2^- + \frac{\omega_2^+}{b_2} \cdot d_2^+ + \ldots + \frac{\omega_i^-}{b_i} \cdot d_i^- + \frac{\omega_i^+}{b_{1i}} \cdot d_i^+$$

$$\begin{aligned}
a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n + d_1^- - d_1^+ &= b_1 \\
a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n + d_2^- - d_2^+ &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n + d_i^- - d_i^+ &= b_i
\end{aligned}$$

### 4.8.5 Beispiel

Ein Investor möchte ein neues Konferenzzentrum errichten. Die Frage ist nun, wie viele grosse, mittlere und kleinere Konferenzräume am besten gebaut werden sollten. Nach einer Befragung von interessierten zukünftigen Nutzern nach ihren Präferenzen liessen sich folgende Anforderungen an die benötigten Räumlichkeiten festhalten. Es sollten

- mindestens 10 Seminarräume für bis zu 30 Personen (ca. 55 m$^2$),
- mindestens 8 Konferenzräume für bis zu 80 Personen (ca. 120 m$^2$), und
- mindestens 4 Räume für grössere Veranstaltungen (ca. 200 m$^2$) vorhanden sein.

Ein Kostenvoranschlag hat ergeben, dass die Kosten für den Bau der kleinen Räumen bei ca. 1600 CHF/m$^2$ liegen werden, die für die mittleren Räume bei ca. 1500 CHF/m$^2$ und die für die grossen Räume bei ca. 1400 CHF/m$^2$.

Das Gesamtbudget sollte 3 Mio. CHF nicht überschreiten. Das Grundstück, das für den Bau des Konferenzzentrums ausgewählt wurde, bietet Platz für eine Gebäudefläche von ca. 2500 m$^2$.

#### Auflistung der Entscheidungsvariablen und Ziele/Rahmenbedingungen

Entscheidungsvariablen:

- Anzahl der Räume (klein, mittel, gross)

Ziele/Rahmenbedingungen:

- Es werden ungefähr 10 kleine Räume benötigt (Kosten: ca. 88′000 CHF)

- Es werden ungefähr 8 mittelgrosse Räume benötigt (Kosten: ca. 180'000 CHF)
- Es werden ungefähr 4 grosse Räume benötigt (Kosten: ca. 280'000 CHF)
- Das gesamte Konferenzgebäude soll ca. 2500 m$^2$ gross sein
- Das Budget für dieses Projekt liegt bei ca. 3'000'000 CHF

**Abweichungsvariablen**

Die Zielwerte repräsentieren den angestrebten Wert, den der Entscheidungsträger gern für die einzelnen Variablen erreichen würde.

Die Abweichungsvariablen kennzeichnen den Betrag, um den der jeweilige erreichte Wert von den angestrebten Zielwerten abweicht.

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 \\ x_2 &= 8 \\ x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + d_1^- - d_1^+ &= 10 \\ x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 8 \\ x_3 + d_3^- - d_3^+ &= 4 \end{aligned}$$

**Weitere Nebenbedingungen:**

$55 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 + d_4^- - d_4^+ = 2500 \text{ m}^2$

$88'000 \cdot x_1 + 180'000 \cdot x_2 + 280'000 \cdot x_3 + d_5^- - d_5^+ = 3'000'000 \text{ CHF}$

Zusätzlich gilt: $d_i^-, d_i^+ \geq 0$, $x_i \geq 0$ und $x_i$ int.

**Zielfunktion:**

$Min.\ Z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + d_4^- + d_4^+ + d_5^- + d_5^+$

**Normierung mit den Zielwerten**

$$Min.\ Z = \tfrac{1}{10} \cdot d_1^- + \tfrac{1}{10} \cdot d_1^+ + \tfrac{1}{8} \cdot d_2^- + \tfrac{1}{8} \cdot d_2^+ + \tfrac{1}{4} \cdot d_3^- + \tfrac{1}{4} \cdot d_3^+ + \tfrac{1}{2500} \cdot d_4^- + \tfrac{1}{2500} \cdot d_4^+ + \tfrac{1}{3 \cdot 10^6} \cdot d_5^- + \tfrac{1}{3 \cdot 10^6} \cdot d_5^+$$

**Gewichtung**

$$Min.\ Z = \tfrac{\omega_1^-}{10} \cdot d_1^- + \tfrac{\omega_2^+}{10} \cdot d_1^+ + \tfrac{\omega_2^-}{8} \cdot d_2^- + \tfrac{\omega_2^+}{8} \cdot d_2^+ + \tfrac{\omega_3^-}{4} \cdot d_3^- + \tfrac{\omega_3^+}{4} \cdot d_3^+ + \tfrac{\omega_4^-}{2500} \cdot d_4^- + \tfrac{\omega_4^+}{2500} \cdot d_4^+ + \tfrac{\omega_5^-}{3 \cdot 10^6} \cdot d_5^- + \tfrac{\omega_5^+}{3 \cdot 10^6} \cdot d_5^+$$

Merke:
Die Gewichtungsfaktoren $\omega_i^-$, $\omega_i^+$ für die einzelnen Abweichungsvariablen sind allein von den Präferenzen des Entscheidungsträgers abhängig – sie können frei gewählt werden.

Dass alle Abweichungen für den Entscheider von gleicher Relevanz sind, wird – wie in Abschnitt 4.8.4 beschrieben – in der Realität kaum vorkommen. Daher wird für hier folgendes Szenario angenommen:

- Hinsichtlich der Anzahl an verschiedenen Räumen hat eine Überschreitung keine besonderen Auswirkungen, eine Unterschreitung sollte jedoch vermieden werden.
- Bezüglich der Gebäudefläche ist weder eine Über-, noch eine Unterschreitung erwünscht.
- Bei den Kosten wirkt sich eine Überschreitung negativ aus, eine Unterschreitung hingegen stellt kein Problem dar.

Die Gewichtungsfaktoren werden daher auf folgende Werte gesetzt:

| $\omega_1^-$ | $\omega_1^+$ | $\omega_2^-$ | $\omega_2^+$ | $\omega_3^-$ | $\omega_3^+$ | $\omega_4^-$ | $\omega_4^+$ | $\omega_5^-$ | $\omega_5^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

### Zielfunktion

Damit ergibt sich die neue Zielfunktion zu

$$Min.\ Z = \frac{1}{10} \cdot d_1^- + \frac{0}{10} \cdot d_1^+ + \frac{1}{8} \cdot d_2^- + \frac{0}{8} \cdot d_2^+ + \frac{1}{4} \cdot d_3^- + \frac{0}{4} \cdot d_3^+ + \frac{1}{2500} \cdot d_4^- + \frac{1}{2500} \cdot d_4^+ + \frac{0}{3 \cdot 10^6} \cdot d_5^- + \frac{1}{3 \cdot 10^6} \cdot d_5^+$$

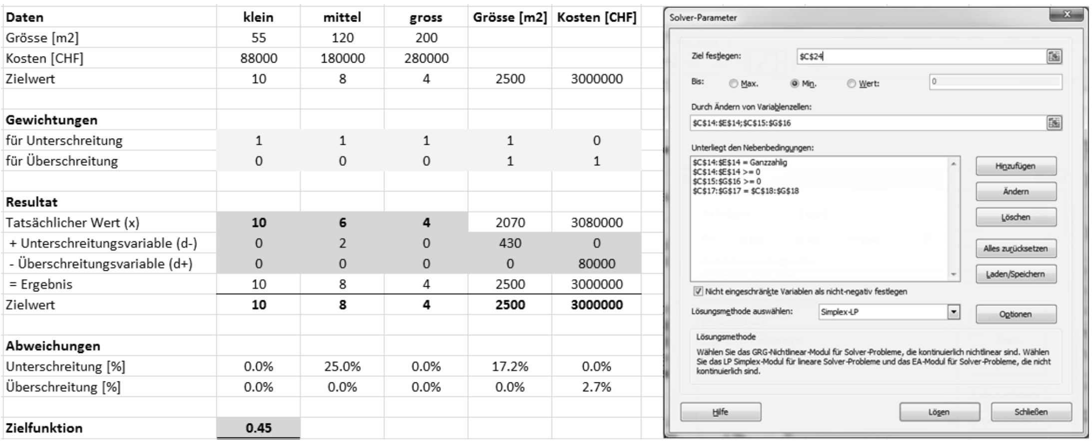
$$\Longrightarrow Min.\ Z = \frac{1}{10} \cdot d_1^- + \frac{1}{8} \cdot d_2^- + \frac{1}{4} \cdot d_3^- + \frac{1}{2500} \cdot d_4^- + \frac{1}{2500} \cdot d_4^+ + \frac{1}{3 \cdot 10^6} \cdot d_5^+$$

### Lösung

Ein solches Problem kann nicht mehr durch blosses Probieren und Einsetzen, sondern nur durch die Verwendung eines Solver-Tools (z.B. in Excel) gelöst werden.

Es ergibt sich folgendes Resultat (vgl. Abb. 4.19):

- 10 kleine, 6 mittlere und 4 grosse Räume $\rightarrow$ 2 mittlere Räume weniger als angestrebt
- Gesamtfläche: 2070 m$^2$ $\rightarrow$ 430 m$^2$ bleiben ungenutzt
- Kosten: $3'080'000$ CHF $\rightarrow$ Budgetüberschreitung um $80'000$ CHF



| Daten | klein | mittel | gross | Grösse [m2] | Kosten [CHF] |
|---|---|---|---|---|---|
| Grösse [m2] | 55 | 120 | 200 | | |
| Kosten [CHF] | 88000 | 180000 | 280000 | | |
| Zielwert | 10 | 8 | 4 | 2500 | 3000000 |
| | | | | | |
| **Gewichtungen** | | | | | |
| für Unterschreitung | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| für Überschreitung | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | | | | | |
| **Resultat** | | | | | |
| Tatsächlicher Wert (x) | **10** | **6** | **4** | 2070 | 3080000 |
| + Unterschreitungsvariable (d-) | 0 | 2 | 0 | 430 | 0 |
| - Überschreitungsvariable (d+) | 0 | 0 | 0 | 0 | 80000 |
| = Ergebnis | 10 | 8 | 4 | 2500 | 3000000 |
| Zielwert | **10** | **8** | **4** | **2500** | **3000000** |
| | | | | | |
| **Abweichungen** | | | | | |
| Unterschreitung [%] | 0.0% | 25.0% | 0.0% | 17.2% | 0.0% |
| Überschreitung [%] | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 2.7% |
| | | | | | |
| **Zielfunktion** | **0.45** | | | | |



Abbildung 4.19: Konferenzzentrum – Goal Programming mit dem Excel-Solver

Eine leichte Modifikation des obigen Beispiels zeigt, welche Bedeutung die Wahl der Gewichte für das Endresultat haben kann. Angenommen, der Bauherr ist an sehr strenge Budgetvorgaben gebunden. Dies hat zur Folge, dass eine Überschreitung bei den Kosten deutlich höher als alle anderen Abweichungen zu gewichten ist ($\omega_5^+$ wird auf 100 gesetzt – alle anderen $\omega_i$ bleiben unverändert).

Es ergibt sich die in Abb. 4.20 dargestellte Situation: Das Budget wird nun eingehalten (sogar leicht unterschritten), es muss allerdings in Kauf genommen werden, dass dadurch ein kleiner Raum weniger gebaut werden kann. Es ist zu bemerken, dass die Summe aller Abweichungen zwar von 45% auf 54% gestiegen ist, dafür aber das wichtigste Ziel des Bauherren, die Einhaltung des Kostenrahmens, erreicht wird.

| Daten | klein | mittel | gross | Grösse [m2] | Kosten [CHF] |
|---|---|---|---|---|---|
| Grösse [m2] | 55 | 120 | 200 | | |
| Kosten [CHF] | 88000 | 180000 | 280000 | | |
| Zielwert | 10 | 8 | 4 | 2500 | 3000000 |
| | | | | | |
| **Gewichtungen** | | | | | |
| für Unterschreitung | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| für Überschreitung | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| | | | | | |
| **Resultat** | | | | | |
| Tatsächlicher Wert (x) | **9** | **6** | **4** | 2015 | 2992000 |
| + Unterschreitungsvariable (d-) | 1 | 2 | 0 | 485 | 8000 |
| - Überschreitungsvariable (d+) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| = Ergebnis | 10 | 8 | 4 | 2500 | 3000000 |
| Zielwert | **10** | **8** | **4** | **2500** | **3000000** |
| | | | | | |
| **Abweichungen** | | | | | |
| Unterschreitung [%] | 10.0% | 25.0% | 0.0% | 19.4% | 0.3% |
| Überschreitung [%] | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| | | | | | |
| **Zielfunktion** | **0.54** | | | | |


Abbildung 4.20: Konferenzzentrum (begrenztes Budget)

## 4.9 Kontrollfragen

- Welche Optimierungsarten durch lineare Programmierung gibt es?
- Wann soll welche Art verwendet werden?
- Erkläre das Prinzip der Angrenzung.

# 5 Netzwerke

## 5.1 Einleitung

Dieses Kapitel soll zeigen, wie das bereits gelernte Wissen über LP in praktischen Beispielen angewendet werden kann.

## 5.2 Graphen

Um Netzwerke einfach darstellen zu können, verwendet man sogenannte Graphen. Ein Graph besteht aus zwei Grundelementen, mit denen sich jedes Netzwerk darstellen lässt:

- Knoten
- Kanten

Der einfachste Graph besteht aus zwei Knoten und einer Kante, wie in Abb. 5.1 dargestellt.

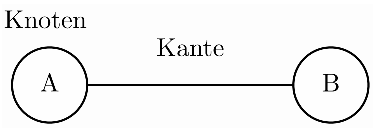



Abbildung 5.1: Ein einfacher Graph

Knoten bilden die Objekte, die man abbilden möchte, und Kanten verbinden diese. Die Kanten bilden also die Beziehungen zwischen den Objekten ab. Aus diesem Grund werden zwei Arten von Kanten unterschieden (vgl. Abb. 5.2):

- Ungerichtete Kanten: Diese können in beide Richtungen genutzt werden (z.B. eine normale Strasse)
- Gerichtete Kanten: Diese können nur in eine Richtung genutzt werden (z.B. eine Einbahnstrasse)

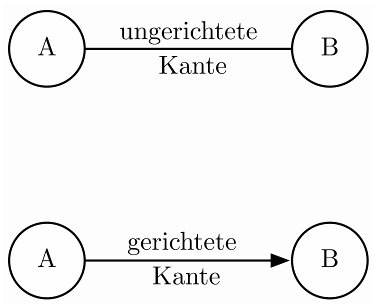



Abbildung 5.2: Gerichtete und ungerichtete Kanten

Es ist NICHT erlaubt, gerichtete und ungerichtete Kanten gemeinsam in einem Graphen zu verwenden. In diesem Fall muss die ungerichtete Kante in zwei gerichtete Kanten zerlegt werden, wie in Abb. 5.3 gezeigt.

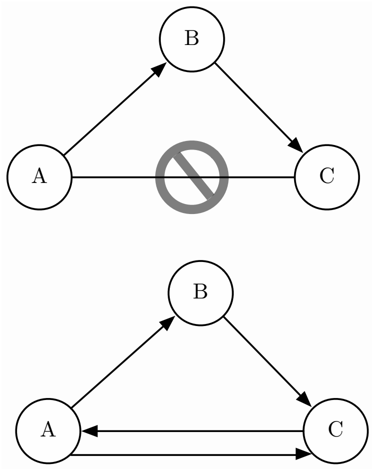



Abbildung 5.3: Nur eine Art von Kanten in einem Graphen verwenden!

Zusätzlich können die Kanten sogenannte «Gewichte» haben, also Werte, die ihnen zugeordnet sind. Diese Gewichte stehen für Werte der Beziehung zwischen den Objekten, die die betreffende Kante verbindet. Wenn man sich als Beispiel eine Strasse ansieht, könnte man die Kreuzungen als Knoten auffassen, und die Strassen zwischen den Kreuzungen als Kanten. Dementsprechend könnte z.B. das Gewicht der Kanten (=Strassenstücke zwischen den Kreuzungen) die Distanz zwischen den Kreuzungen in Metern sein oder auch die Fahrzeit in Sekunden oder Minuten. Generell unterscheidet man zwischen

- kantengewichteten Graphen (siehe Abb. 5.4) und
- ungewichteten Graphen.

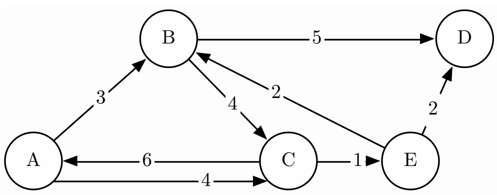



Abbildung 5.4: Kantengewichteter Graph

Eine Verbindung von zwei Knoten, die über einen oder mehrere Zwischenknoten führt, nennt man «Pfad» (siehe Abb. 5.5).

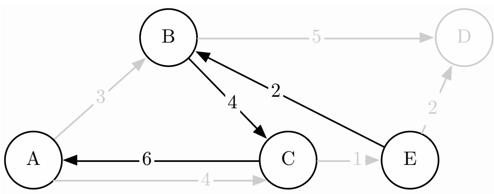



Abbildung 5.5: Pfad E $\longrightarrow$ A

Damit haben wir ein Grundgerüst, um die folgenden Probleme darstellen und lösen zu können.

## 5.3 Netzwerkoptimierungsprobleme

Grundsätzlich lassen sich Netzwerkoptimierungsprobleme in vier Gruppen einteilen:

- Kürzester-Weg-Probleme
- Logistikprobleme
- Strömungsprobleme
- Produktions- und Transportprobleme

Alle Netzwerkoptimierungsprobleme haben die folgenden Gemeinsamkeiten:

- Alle Probleme haben Startknoten (Quelle(n)), Zwischenknoten und Endknoten (Senke(n))
- Die Knoten werden durch Kanten verbunden (gerichtet/ungerichtet)
- Jeder Knoten und jede Kante hat ihre eigene Leistungsfähigkeit
- Ziel ist es, die Mengen auf dem Weg vom Startknoten zum Endknoten optimal aufzuteilen

### 5.3.1 Kürzester-Weg-Probleme

Kürzester-Weg-Probleme sind die mathematisch einfachsten Netzwerkoptimierungsprobleme:

- Vom Startknoten führen verschiedene Pfade über die Zwischenknoten zum Zielknoten
- Jede Kante hat bestimmte Kantengewichte (Streckenlänge, Fahrzeit, Kosten etc.)

Die Frage ist, welcher Pfad in der Summe die niedrigsten Kantengewichte (Streckenlänge, Fahrzeit, Kosten etc.) hat.

Beispiel:

Es ist der folgende Graph gegeben:

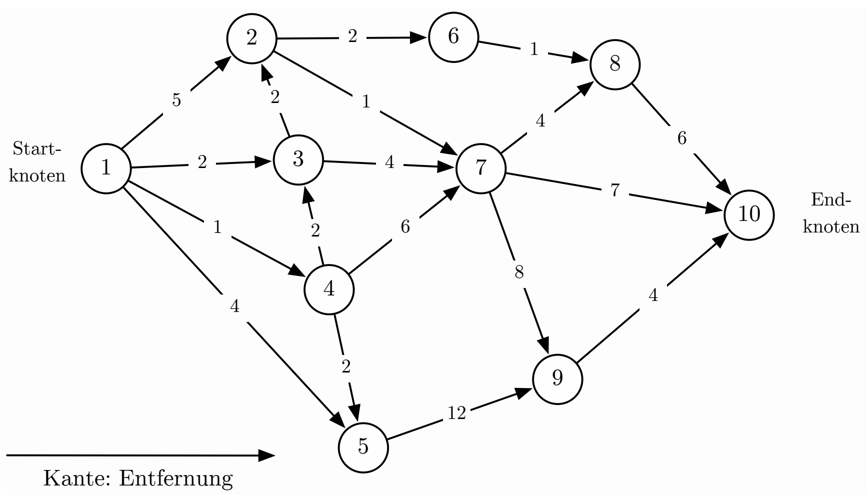



Abbildung 5.6: Aufgabenstellung Kürzester-Weg-Problem

Um den kürzesten Weg zu finden, muss die Summe der Gewichte der benutzten Kanten minimal werden. Mathematisch ausgedrückt:

$$Min.\, Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} l_{i,j} \cdot \delta_{i,j}$$

mit

$$l_{i,j} = Gewicht\, der\, Kante \;\; i \to j$$

$$\delta_{i,j} \begin{cases} 1 & wenn\, Kante \;\; i \to j \;\; benutzt \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Die folgenden Nebenbedingungen müssen gelten:

- Aus dem Startknoten $s$ muss eine benutzte Kante mehr herausgehen als hineinkommen:

$$1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{I} \delta_{i,s}}_{hinein} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \delta_{s,j}}_{heraus}$$

- In jeden Zwischenknoten $z$ müssen gleich viele benutzte Kanten hinein- wie herausgehen:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} \delta_{i,z}}_{hinein} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \delta_{z,j}}_{heraus}$$

- In den Endknoten $e$ muss eine benutzte Kante mehr hineingehen als herauskommen:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} \delta_{i,e}}_{hinein} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \delta_{e,j}}_{heraus} + 1$$

Auf das Beispiel aus Abb. 5.6 angewandt ergibt sich das folgende binäre lineare Programm

$$\begin{aligned} Min.\, Z \;\; = \;\; & 5 \cdot \delta_{1,2} + 2 \cdot \delta_{1,3} + 1 \cdot \delta_{1,4} + 4 \cdot \delta_{1,5} + 2 \cdot \delta_{2,6} + 1 \cdot \delta_{2,7} + \\ & 2 \cdot \delta_{3,2} + 4 \cdot \delta_{3,7} + 2 \cdot \delta_{4,3} + 2 \cdot \delta_{4,5} + 6 \cdot \delta_{4,7} + 12 \cdot \delta_{5,9} + \\ & 1 \cdot \delta_{6,8} + 4 \cdot \delta_{7,8} + 8 \cdot \delta_{7,9} + 7 \cdot \delta_{7,10} + 6 \cdot \delta_{8,10} + 4 \cdot \delta_{9,10} \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl rcl} 1 & = & \delta_{1,2} + \delta_{1,3} + \delta_{1,4} + \delta_{1,5} & \delta_{2,7} + \delta_{3,7} + \delta_{4,7} & = & \delta_{7,8} + \delta_{7,9} + \delta_{7,10} \\ \delta_{1,2} + \delta_{3,2} & = & \delta_{2,6} + \delta_{2,7} & \delta_{6,8} + \delta_{7,8} & = & \delta_{8,10} \\ \delta_{1,3} + \delta_{4,3} & = & \delta_{3,2} + \delta_{3,7} & \delta_{5,9} + \delta_{7,9} & = & \delta_{9,10} \\ \delta_{1,4} & = & \delta_{4,3} + \delta_{4,5} + \delta_{4,7} & \delta_{7,10} + \delta_{8,10} + \delta_{9,10} & = & 1 \\ \delta_{1,5} + \delta_{4,5} & = & \delta_{5,9} & & & \\ \delta_{2,6} & = & \delta_{6,8} & \delta_{i,j} & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Dies ist ein binäres lineares Programm mit 18 Entscheidungsvariablen und 10 Nebenbedingungen. Eingesetzt und ausgerechnet ergibt sich folgende Lösung:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\delta_{1,2} = 0 & & \delta_{2,7} = 1 & & \delta_{4,7} = 0 & & \delta_{7,10} = 1 \\
\delta_{1,3} = 1 & & \delta_{3,2} = 1 & & \delta_{5,9} = 0 & & \delta_{8,10} = 0 \\
\delta_{1,4} = 0 & & \delta_{3,7} = 0 & & \delta_{6,8} = 0 & & \delta_{9,10} = 0 \\
\delta_{1,5} = 0 & & \delta_{4,3} = 0 & & \delta_{7,8} = 0 & & \\
\delta_{2,6} = 0 & & \delta_{4,5} = 0 & & \delta_{7,9} = 0 & & Z = 12
\end{array}
$$

In Summe ergibt der Weg über die Knoten $1 \to 3 \to 2 \to 7 \to 10$ die niedrigsten Kantengewichte (12).

### 5.3.2 Logistikprobleme

Logistikprobleme haben im Allgemeinen den folgenden Aufbau:

- Im Startknoten besteht ein gewisses Angebot an Einheiten (z.B. Paletten eines Produktes, Stückanzahl, etc.)
- Im Zielknoten besteht eine gewisse Nachfrage nach diesen Einheiten (die aber nicht gleich gross wie die angebotene Menge sein muss)
- Vom Startknoten führen verschiedene Pfade über die Zwischenknoten zum Zielknoten
- Je nach gewählter Route entstehen unterschiedliche Kosten (=Kantengewichte)
- Ausserdem gibt es Beschränkungen auf jeder Kante, welche die maximal zulässige Anzahl transportierter Einheiten bestimmt (dies könnten zum Beispiel Gewichtsbeschränkungen für Brücken sein, sodass nicht jeder Lastwagen darüberfahren kann)

Die Frage ist, wie die Einheiten bei minimalen Kosten vom Startknoten zum Zielknoten transportiert werden können.

Beispiel:

Es ist der folgende Graph gegeben:

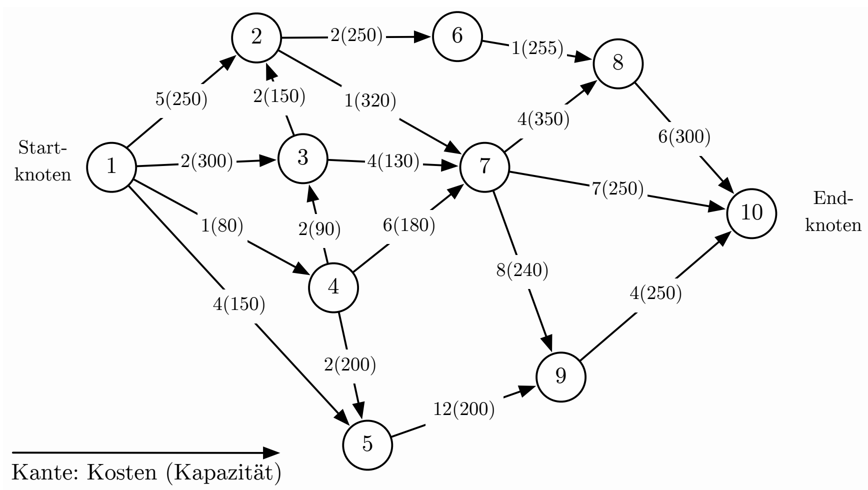



Abbildung 5.7: Aufgabenstellung Logistikproblem

Das Angebot in Knoten 1 beträgt 700 Einheiten, die Nachfrage in Knoten 10 ebenfalls 700 Einheiten.

Es sollen die Gesamtkosten minimiert werden. Mathematisch ausgedrückt:

$$Min.\, Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

mit

$$c_{i,j} = Gewicht\, der\, Kante\;\; i \rightarrow j\;\; (Kosten\, pro\, Einheit)$$
$$x_{i,j} = Fluss\, auf\, Kante\;\; i \rightarrow j\;\; (Einheiten)$$

Die folgenden Nebenbedingungen müssen gelten:

- Der Fluss in jedem Knoten $k$ muss ausgeglichen sein:

$$s_k + \underbrace{\sum_{i=1}^{I} x_{i,k}}_{hinein} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} x_{k,j}}_{heraus} + d_k$$

  mit

$$s_k = Angebot\, im\, Knoten\;\; k$$
$$d_k = Nachfrage\, im\, Knoten\;\; k$$

- Die Flüsse müssen kleiner gleich der Kapazität der Kante $i \rightarrow j$ sein:

$$x_{i,j} \leq u_{i,j}$$

  mit

$$u_{i,j} = Maximale\, Kapazität\, der\, Kante\;\; i \rightarrow j$$

- Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_{i,j} \geq 0$$

Auf das Beispiel angewandt ergibt sich die folgende Zielfunktion:

$$\begin{aligned} Min.\, Z \;\; = \;\; & 5 \cdot x_{1,2} + 2 \cdot x_{1,3} + 1 \cdot x_{1,4} + 4 \cdot x_{1,5} + 2 \cdot x_{2,6} + 1 \cdot x_{2,7} + \\ & 2 \cdot x_{3,2} + 4 \cdot x_{3,7} + 2 \cdot x_{4,3} + 2 \cdot x_{4,5} + 6 \cdot x_{4,7} + 12 \cdot x_{5,9} + \\ & 1 \cdot x_{6,8} + 4 \cdot x_{7,8} + 8 \cdot x_{7,9} + 7 \cdot x_{7,10} + 6 \cdot x_{8,10} + 4 \cdot x_{9,10} \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} 700 & = & x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} & x_{2,6} & = & x_{6,8} \\ x_{1,2} + x_{3,2} & = & x_{2,6} + x_{2,7} & x_{2,7} + x_{3,7} + x_{4,7} & = & x_{7,8} + x_{7,9} + x_{7,10} \\ x_{1,3} + x_{4,3} & = & x_{3,2} + x_{3,7} & x_{6,8} + x_{7,8} & = & x_{8,10} \\ x_{1,4} & = & x_{4,3} + x_{4,5} + x_{4,7} & x_{5,9} + x_{7,9} & = & x_{9,10} \\ x_{1,5} + x_{4,5} & = & x_{5,9} & x_{7,10} + x_{8,10} + x_{9,10} & = & 700 \end{array}$$

$$
\begin{array}{lllll}
0 & \leq & x_{1,2} & \leq & 250 \\
0 & \leq & x_{1,3} & \leq & 300 \\
0 & \leq & x_{1,4} & \leq & 80 \\
0 & \leq & x_{1,5} & \leq & 150 \\
0 & \leq & x_{2,6} & \leq & 250 \\
0 & \leq & x_{2,7} & \leq & 320
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
0 & \leq & x_{3,2} & \leq & 150 \\
0 & \leq & x_{3,7} & \leq & 130 \\
0 & \leq & x_{4,3} & \leq & 90 \\
0 & \leq & x_{4,5} & \leq & 200 \\
0 & \leq & x_{4,7} & \leq & 180 \\
0 & \leq & x_{5,9} & \leq & 200
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
0 & \leq & x_{6,8} & \leq & 255 \\
0 & \leq & x_{7,8} & \leq & 350 \\
0 & \leq & x_{7,9} & \leq & 240 \\
0 & \leq & x_{7,10} & \leq & 250 \\
0 & \leq & x_{8,10} & \leq & 300 \\
0 & \leq & x_{9,10} & \leq & 250
\end{array}
$$

Dies ist ein lineares Programm mit 18 Entscheidungsvariablen und 46 Nebenbedingungen (wenn man die Nichtnegativitätsbedingungen mitzählt), welches sich einfach mit dem SIMPLEX-Algorithmus lösen lässt. Eingesetzt und ausgerechnet ergibt sich folgende Lösung:

$$
\begin{array}{lll}
x_{1,2} & = & 250 \\
x_{1,3} & = & 280 \\
x_{1,4} & = & 80 \\
x_{1,5} & = & 90 \\
x_{2,6} & = & 250
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
x_{2,7} & = & 150 \\
x_{3,2} & = & 150 \\
x_{3,7} & = & 130 \\
x_{4,3} & = & 0 \\
x_{4,5} & = & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
x_{4,7} & = & 80 \\
x_{5,9} & = & 90 \\
x_{6,8} & = & 250 \\
x_{7,8} & = & 50 \\
x_{7,9} & = & 60
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
x_{7,10} & = & 250 \\
x_{8,10} & = & 300 \\
x_{9,10} & = & 150 \\
 & & \\
Z & = & 10\,360
\end{array}
$$

### 5.3.3 Strömungsprobleme

Strömungsprobleme ähneln den Logistikproblemen, wobei es hier keine Kantengewichte mehr gibt, sondern nur mehr die Beschränkungen auf der Route. Ausserdem gibt es weder Angebot noch Nachfrage. Somit hat ein Strömungsproblem den folgenden Aufbau:

- Vom Startknoten führen verschiedene Routen über die Zwischenknoten zum Zielknoten
- Es gibt Beschränkungen auf der Route, welche die maximal zulässige Anzahl von transportierten Einheiten bestimmen

Die Frage ist, wie viele Einheiten maximal von einem Startknoten zu einem Zielknoten transportiert werden können.

Lösung mittels LP:

Die einzelnen Flüsse sollen maximiert werden. Mathematisch ausgedrückt:

$$Max.\, Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} x_{i,j}$$

Es gelten die folgenden Nebenbedingungen:

- Die Flüsse aus dem Startknoten $s$ müssen den Flüssen in den Endknoten $e$ entsprechen:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{J} x_{s,j}}_{Startknoten} = \underbrace{\sum_{i=1}^{I} x_{i,e}}_{Endknoten}$$

- Der Fluss in jedem Knoten $k$ muss ausgeglichen sein:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} x_{i,k}}_{hinein} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} x_{k,j}}_{heraus}$$

- Die Flüsse müssen kleiner gleich der Kapazität der Kante $i \to j$ sein:

$$x_{i,j} \leq u_{i,j}$$

mit

$$u_{i,j} = Maximale\, Kapazität\, der\, Kante\;\; i \to j$$

- Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_{ij} \geq 0$$

Auf das Beispiel angewandt ergibt dies folgende Zielfunktion:

$$\begin{aligned} Max.\, Z \quad = \quad & x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{2,6} + x_{2,7} + \\ & x_{3,2} + x_{3,7} + x_{4,3} + x_{4,5} + x_{4,7} + x_{5,9} + \\ & x_{6,8} + x_{7,8} + x_{7,9} + x_{7,10} + x_{8,10} + x_{9,10} \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} &= x_{7,10} + x_{8,10} + x_{9,10} \\ x_{1,2} + x_{3,2} &= x_{2,6} + x_{2,7} \\ x_{1,3} + x_{4,3} &= x_{3,2} + x_{3,7} \\ x_{1,4} &= x_{4,3} + x_{4,5} + x_{4,7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,5} + x_{4,5} &= x_{5,9} \\ x_{2,6} &= x_{6,8} \\ x_{2,7} + x_{3,7} + x_{4,7} &= x_{7,8} + x_{7,9} + x_{7,10} \\ x_{6,8} + x_{7,8} &= x_{8,10} \\ x_{5,9} + x_{7,9} &= x_{9,10} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll} 0 \leq x_{1,2} \leq 250 & & 0 \leq x_{3,2} \leq 150 & & 0 \leq x_{6,8} \leq 255 \\ 0 \leq x_{1,3} \leq 300 & & 0 \leq x_{3,7} \leq 130 & & 0 \leq x_{7,8} \leq 350 \\ 0 \leq x_{1,4} \leq 80 & & 0 \leq x_{4,3} \leq 90 & & 0 \leq x_{7,9} \leq 240 \\ 0 \leq x_{1,5} \leq 150 & & 0 \leq x_{4,5} \leq 200 & & 0 \leq x_{7,10} \leq 250 \\ 0 \leq x_{2,6} \leq 250 & & 0 \leq x_{4,7} \leq 180 & & 0 \leq x_{8,10} \leq 300 \\ 0 \leq x_{2,7} \leq 320 & & 0 \leq x_{5,9} \leq 200 & & 0 \leq x_{9,10} \leq 250 \end{array}$$

Dies ist ein lineares Programm mit 18 Entscheidungsvariablen und 45 Nebenbedingungen (wenn man die Nichtnegativitätsbedingungen mitzählt), welches sich einfach mit dem SIMPLEX-Algorithmus lösen lässt. Eingesetzt und ausgerechnet ergibt sich folgende Lösung:

$$\begin{array}{lllllll} x_{1,2} = 250 & & x_{2,7} = 150 & & x_{4,7} = 80 & & x_{7,10} = 250 \\ x_{1,3} = 280 & & x_{3,2} = 150 & & x_{5,9} = 150 & & x_{8,10} = 260 \\ x_{1,4} = 80 & & x_{3,7} = 130 & & x_{6,8} = 250 & & x_{9,10} = 250 \\ x_{1,5} = 150 & & x_{4,3} = 0 & & x_{7,8} = 10 & & \\ x_{2,6} = 250 & & x_{4,5} = 0 & & x_{7,9} = 100 & & Z = 760 \end{array}$$

Neben der Lösung mittels LP kann ein Strömungsproblem auch mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp gelöst werden. Dies geht auch grafisch, weshalb die folgende Darstellung zur Vereinfachung eingeführt wird:

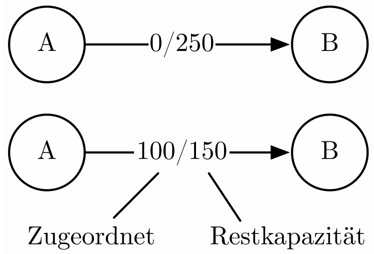



Abbildung 5.8: Zuordnung von Kapazität

Links steht der aktuelle Fluss, rechts die Restkapazität. Wenn nun ein Fluss zugeordnet wird, dann werden die entsprechenden Einheiten von rechts nach links «verschoben». Dies erlaubt es, einfacher abzulesen, wieviel Kapazität noch zur Verfügung steht.

Der Algorithmus von Edmonds und Karp funktioniert folgendermassen:

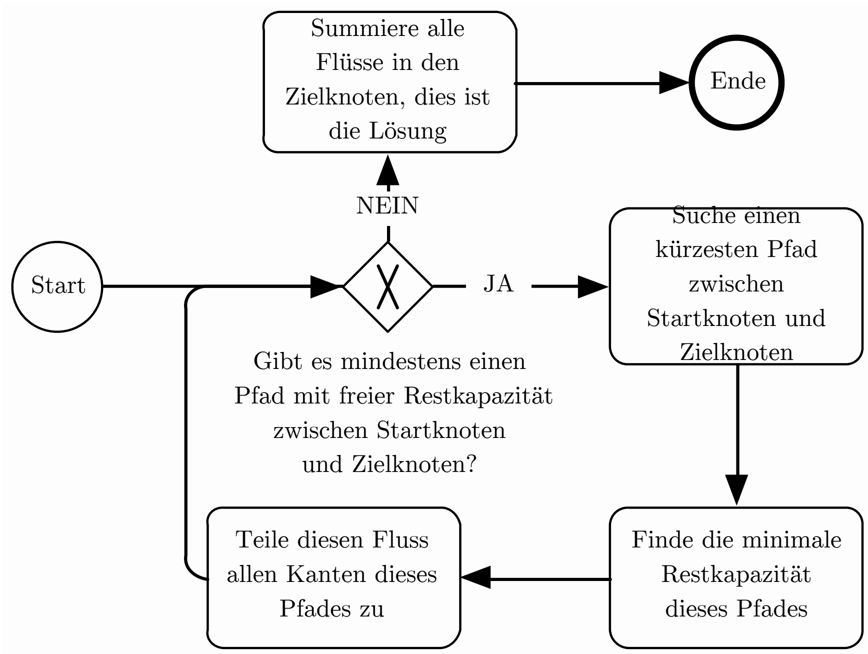
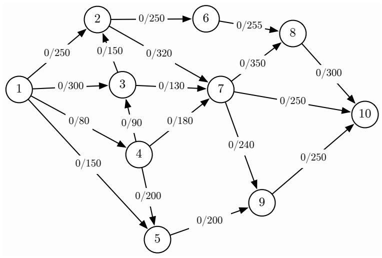


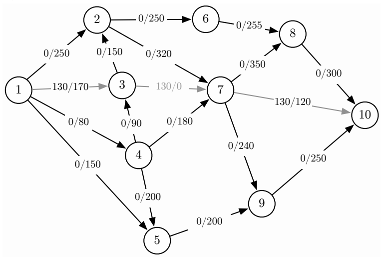

Abbildung 5.9: Algorithmus von Edmonds und Karp (in BPMN 2.0)

Angewandt auf das Beispiel:

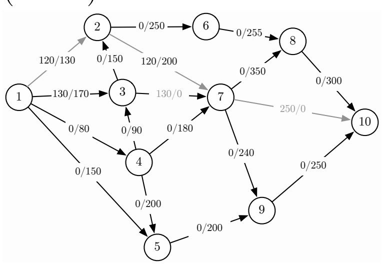
Der folgende Baum ist gegeben:



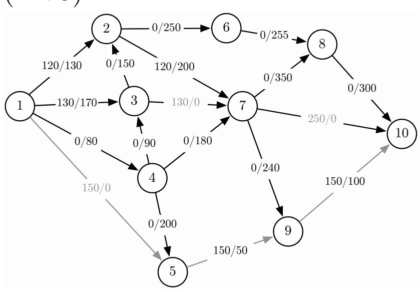

Ein kürzester Pfad ($l$=3) ist
1→3→7→10;
minimale Restkapazität ist 130
(3→7)



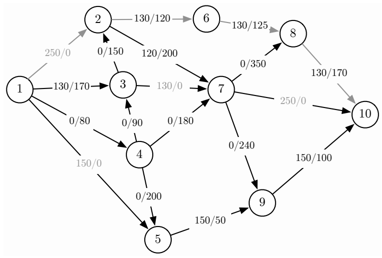

Ein kürzester Pfad ($l$=3) ist
1→2→7→10;
minimale Restkapazität ist 120
(7→10)



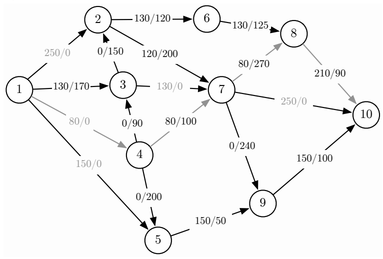

Ein kürzester Pfad ($l$=3) ist
1→5→9→10;
minimale Restkapazität ist 150
(1→5)



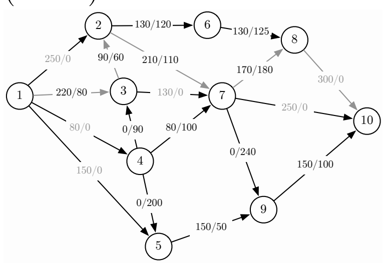

Ein kürzester Pfad ($l$=4) ist
1→2→6→8→10;
minimale Restkapazität ist 130
(1→2)



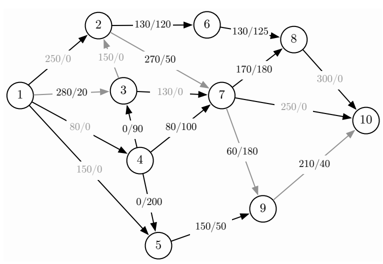

Ein kürzester Pfad ($l$=4) ist
1→4→7→8→10;
minimale Restkapazität ist 80
(1→4)




Ein kürzester Pfad ($l$=5) ist
1→3→2→7→8→10;
minimale Restkapazität ist 90
(8→10)




Ein kürzester Pfad ($l$=5) ist
1→3→2→7→9→10;
minimale Restkapazität ist 60
(3→2)




Keine Pfade mehr vorhanden,
Summe im Endknoten:
300+250+210=760

### 5.3.4 Produktions- und Transportprobleme

Produktions- und Transportprobleme haben im Allgemeinen den folgenden Aufbau:

- Es gibt mehrere Fabriken/Werke, die dieselben Produkte herstellen können – allerdings mit unterschiedlichen Produktionskapazitäten
- Es gibt mehrere Orte, an denen eine Nachfrage nach diesen Produkten besteht
- Je nach Produktions- bzw. Nachfrageort sind die Transportkosten unterschiedlich

Die Frage ist, wie viel von welchem Produkt in welcher Fabrik hergestellt und zu welchem Nachfrageort gebracht werden soll.

Beispiel:

Eine Metallverarbeitungsfirma produziert Stahl und Aluminium in drei verschiedenen Werken (A, B, C) und transportiert diese zu sechs verschiedenen Baustellen (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Für die Werke gelten folgende Produktionsdaten:

Tabelle 5.1: Produktionsdaten Metallwerke

| Werk | | | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|
| Produktionsrate | [t/h] | Alu | 130 | 160 | 170 |
| | | Stahl | 140 | 130 | 160 |
| Betriebszeit | [h] | | 20 | 15 | 20 |
| Kosten | [CHF/t] | Alu | 1050 | 1150 | 1300 |
| | | Stahl | 530 | 550 | 490 |

Die Transportkosten sind in folgender Tabelle ersichtlich:

Tabelle 5.2: Transportkosten Metallwerk → Baustelle

| Von→ | Alu [CHF/t] | | | Stahl [CHF/t] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nach↓ | A | B | C | A | B | C |
| 1 | 45 | 29 | 41 | 35 | 27 | 26 |
| 2 | 22 | 9 | 14 | 12 | 9 | 7 |
| 3 | 20 | 13 | 17 | 9 | 12 | 9 |
| 4 | 37 | 9 | 13 | 30 | 9 | 12 |
| 5 | 26 | 28 | 31 | 13 | 26 | 11 |
| 6 | 54 | 99 | 104 | 42 | 95 | 23 |

Die Nachfrage auf den Baustellen ist die folgende:

Tabelle 5.3: Materialnachfrage Baustellen

| Baustelle | Nachfrage [t] | |
|---|---|---|
| | Alu | Stahl |
| 1 | 100 | 500 |
| 2 | 100 | 720 |
| 3 | 0 | 400 |
| 4 | 50 | 250 |
| 5 | 200 | 950 |
| 6 | 100 | 850 |

Mathematisch ausgedrückt:

$$Min.\,Z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} c_{i,k} \cdot x_{i,k} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{i,j,k} \cdot v_{i,j,k}$$

mit

$$c_{i,k} = Produktionskosten\,Material\;\; k\;\; in\,Werk\;\; i\;\; (Kosten\,pro\,Einheit)$$
$$x_{i,k} = Produktion\,Material\;\; k\;\; in\,Werk\;\; i\;\; (Einheiten)$$
$$v_{i,j,k} = Transportkosten\,Material\;\; k\;\; von\,Werk\;\; i\;\; zu\,Baustelle\;\; j\;\; (Kosten\,pro\,Einheit)$$
$$y_{i,j,k} = Transportiertes\,Material\;\; k\;\; von\,Werk\;\; i\;\; zu\,Baustelle\;\; j\;\; (Einheiten)$$

Die folgenden Nebenbedingungen müssen gelten:

- Die Produktionskapazität in jedem Werk ist beschränkt:

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{r_{i,k}} \cdot x_{i,k} \leq Q_i$$

mit

$$r_{i,k} = Produktionsrate\,Material\;\; k\;\; in\,Werk\;\; i$$
$$Q_i = Verfügbare\,Produktionszeit\,in\,Werk\;\; i$$

- Das produzierte Material muss abtransportiert werden:

$$\sum_{j=1}^{J} y_{i,j,k} = x_{i,k}$$

- Die Nachfrage muss erfüllt werden:

$$\sum_{i=1}^{I} y_{i,j,k} = D_{j,k}$$

mit

$$D_{j,k} = Benötigtes\,Material\;\; k\;\; auf\,Baustelle\;\; j$$

- Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_{i,k} \geq 0$$
$$y_{i,j,k} \geq 0$$

Auf das Beispiel angewandt ergibt sich folgende Zielfunktion:

$$\begin{aligned} Min.\,Z \;=\;& 1050 \cdot x_{A,A} + 530 \cdot x_{A,S} + 1150 \cdot x_{B,A} + 550 \cdot x_{B,S} + 1300 \cdot x_{C,A} + 490 \cdot x_{C,S} + \\ & 45 \cdot y_{A,1,A} + 29 \cdot y_{B,1,A} + 41 \cdot y_{C,1,A} + 35 \cdot y_{A,1,S} + 27 \cdot y_{B,1,S} + 26 \cdot y_{C,1,S} + \\ & 22 \cdot y_{A,2,A} + 9 \cdot y_{B,2,A} + 14 \cdot y_{C,2,A} + 12 \cdot y_{A,2,S} + 9 \cdot y_{B,2,S} + 7 \cdot y_{C,2,S} + \\ & 20 \cdot y_{A,3,A} + 13 \cdot y_{B,3,A} + 17 \cdot y_{C,3,A} + 9 \cdot y_{A,3,S} + 12 \cdot y_{B,3,S} + 9 \cdot y_{C,3,S} + \\ & 37 \cdot y_{A,4,A} + 9 \cdot y_{B,4,A} + 13 \cdot y_{C,4,A} + 30 \cdot y_{A,4,S} + 9 \cdot y_{B,4,S} + 12 \cdot y_{C,4,S} + \\ & 26 \cdot y_{A,5,A} + 28 \cdot y_{B,5,A} + 31 \cdot y_{C,5,A} + 13 \cdot y_{A,5,S} + 26 \cdot y_{B,5,S} + 11 \cdot y_{C,5,S} + \\ & 54 \cdot y_{A,6,A} + 99 \cdot y_{B,6,A} + 104 \cdot y_{C,6,A} + 42 \cdot y_{A,6,S} + 95 \cdot y_{B,6,S} + 23 \cdot y_{C,6,S} \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{130} \cdot x_{A,A} + \frac{1}{140} \cdot x_{A,S} & \leq & 20 \\ \frac{1}{160} \cdot x_{B,A} + \frac{1}{130} \cdot x_{B,S} & \leq & 15 \\ \frac{1}{170} \cdot x_{C,A} + \frac{1}{160} \cdot x_{C,S} & \leq & 20 \\ y_{A,1,A} + y_{A,2,A} + y_{A,3,A} + y_{A,4,A} + y_{A,5,A} + y_{A,6,A} & = & x_{A,A} \\ y_{A,1,S} + y_{A,2,S} + y_{A,3,S} + y_{A,4,S} + y_{A,5,S} + y_{A,6,S} & = & x_{A,S} \\ y_{B,1,A} + y_{B,2,A} + y_{B,3,A} + y_{B,4,A} + y_{B,5,A} + y_{B,6,A} & = & x_{B,A} \\ y_{B,1,S} + y_{B,2,S} + y_{B,3,S} + y_{B,4,S} + y_{B,5,S} + y_{B,6,S} & = & x_{B,S} \\ y_{C,1,A} + y_{C,2,A} + y_{C,3,A} + y_{C,4,A} + y_{C,5,A} + y_{C,6,A} & = & x_{C,A} \\ y_{C,1,S} + y_{C,2,S} + y_{C,3,S} + y_{C,4,S} + y_{C,5,S} + y_{C,6,S} & = & x_{C,S} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} y_{A,1,A} + y_{B,1,A} + y_{C,1,A} & = & 100 \\ y_{A,2,A} + y_{B,2,A} + y_{C,2,A} & = & 100 \\ y_{A,3,A} + y_{B,3,A} + y_{C,3,A} & = & 0 \\ y_{A,4,A} + y_{B,4,A} + y_{C,4,A} & = & 50 \\ y_{A,5,A} + y_{B,5,A} + y_{C,5,A} & = & 200 \\ y_{A,6,A} + y_{B,6,A} + y_{C,6,A} & = & 100 \\ y_{A,1,S} + y_{B,1,S} + y_{C,1,S} & = & 500 \\ y_{A,2,S} + y_{B,2,S} + y_{C,2,S} & = & 720 \\ y_{A,3,S} + y_{B,3,S} + y_{C,3,S} & = & 400 \\ y_{A,4,S} + y_{B,4,S} + y_{C,4,S} & = & 250 \\ y_{A,5,S} + y_{B,5,S} + y_{C,5,S} & = & 950 \\ y_{A,6,S} + y_{B,6,S} + y_{C,6,S} & = & 850 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl lcl lcl} x_{A,A} & \geq & 0 & y_{A,5,A} & \geq & 0 & y_{B,6,A} & \geq & 0 \\ x_{A,S} & \geq & 0 & y_{A,5,S} & \geq & 0 & y_{B,6,S} & \geq & 0 \\ x_{B,A} & \geq & 0 & y_{A,6,A} & \geq & 0 & y_{C,1,A} & \geq & 0 \\ x_{B,S} & \geq & 0 & y_{A,6,S} & \geq & 0 & y_{C,1,S} & \geq & 0 \\ x_{C,A} & \geq & 0 & y_{B,1,A} & \geq & 0 & y_{C,2,A} & \geq & 0 \\ x_{C,S} & \geq & 0 & y_{B,1,S} & \geq & 0 & y_{C,2,S} & \geq & 0 \\ y_{A,1,A} & \geq & 0 & y_{B,2,A} & \geq & 0 & y_{C,3,A} & \geq & 0 \\ y_{A,1,S} & \geq & 0 & y_{B,2,S} & \geq & 0 & y_{C,3,S} & \geq & 0 \\ y_{A,2,A} & \geq & 0 & y_{B,3,A} & \geq & 0 & y_{C,4,A} & \geq & 0 \\ y_{A,2,S} & \geq & 0 & y_{B,3,S} & \geq & 0 & y_{C,4,S} & \geq & 0 \\ y_{A,3,A} & \geq & 0 & y_{B,4,A} & \geq & 0 & y_{C,5,A} & \geq & 0 \\ y_{A,3,S} & \geq & 0 & y_{B,4,S} & \geq & 0 & y_{C,5,S} & \geq & 0 \\ y_{A,4,A} & \geq & 0 & y_{B,5,A} & \geq & 0 & y_{C,6,A} & \geq & 0 \\ y_{A,4,S} & \geq & 0 & y_{B,5,S} & \geq & 0 & y_{C,6,S} & \geq & 0 \end{array}$$

Dies ist ein lineares Programm mit 42 Entscheidungsvariablen und 63 Nebenbedingungen (wenn man die Nichtnegativitätsbedingungen mitzählt), welches sich mit dem SIMPLEX-Algorithmus lösen lässt (in 44 Pivot-Schritten). Eingesetzt und ausgerechnet ergibt sich folgende Lösung: (Entscheidungsvariablen mit dem Wert 0 wurden ausgelassen)

$$\begin{array}{rclrcl}
x_{A,A} & = & 550 & y_{A,4,A} & = & 50 \\
x_{A,S} & = & 470 & y_{C,4,S} & = & 250 \\
x_{C,S} & = & 3200 & y_{A,5,A} & = & 200 \\
y_{A,1,A} & = & 100 & y_{A,5,S} & = & 70 \\
y_{C,1,S} & = & 500 & y_{C,5,S} & = & 880 \\
y_{A,2,A} & = & 100 & y_{A,6,A} & = & 100 \\
y_{C,2,S} & = & 720 & y_{C,6,S} & = & 850 \\
y_{A,3,S} & = & 400 & Z & = & 2'468'530
\end{array}$$

Wie man sieht, lassen sich auch kompliziertere Probleme mit der SIMPLEX-Methode lösen, die Anzahl der benötigten Variablen und Nebenbedingungen nimmt allerdings sehr rasch zu.

## 5.4 Kontrollfragen

- Was ist der Unterschied zwischen gerichteten und ungerichteten Kanten?
- Welche Grundregel gibt es betreffend der Kombination von gerichteten und ungerichteten Kanten in einem Graphen?
- Welche vier Arten von Transportproblemen gibt es?
- Nenne Beispiele für die Verwendung der verschiedenen Transportprobleme.
- Welche Transportprobleme beinhalten Gewichtungen in ihren Graphen? Welche enthalten Kapazitäten?

# 6 Das Modellieren von Entscheidungsprozessen

## 6.1 Einleitung

Jeder Mensch trifft Entscheidungen – und zwar mehrmals täglich! Einige davon sind schwierig, andere einfach. Einige sind mit wichtigen Konsequenzen verbunden, andere nicht. In dieser Vorlesung soll der Prozess der Entscheidungsfindung betrachtet werden sowie Konzepte entwickelt werden, die für die Analyse von Entscheidungssituationen nützlich sind.

Ingenieure werden nicht einfach nur nach Entscheidungen gefragt. Ihre Aufgabe wird viel schwieriger sein: *für und mit* anderen Leuten Entscheidungen zu treffen. Dies erfordert ein höheres Mass an Transparenz, denn der Grund für eine Entscheidung muss stets erklärbar und vertretbar sein – insbesondere bei Entscheidungen, die die Stimmbürger direkt betreffen (z.B. in einer Gemeinde, durch die eine neue Nationalstrasse gebaut werden soll). Es wird somit ein gründliches, überzeugendes und nachvollziehbares Verfahren für die Entscheidungsfindung benötigt. Nachvollziehbar (oder überprüfbar) bedeutet, dass eine andere Person mit identisch beschriebenem Verfahren und gleichen Eingabegrössen überprüfen kann, dass er oder sie auf dieselbe Schlussfolgerung kommen würde. Wenn der Entscheidungsprozess überprüfbar ist, wird jede Uneinigkeit über den neuen Verlauf der Nationalstrasse zugänglich für eine Diskussion und eine Übereinkunft, wie es ein nicht überprüfbarer Prozess nie sein könnte. Erst dann werden die Qualitäten des Entscheidungsfindungsprozesses relevant.

Es wird keineswegs versucht, den einzigen existierenden und besten Entscheidungsfindungsprozess zu identifizieren, welcher immer und überall angewendet werden kann. Dieser existiert nicht. Mit den vorgestellten Konzepten wird der/die Studierende besser im Stande sein, Entscheidungsprozesse auszuwählen, zu planen und zu erklären und kann argumentieren, weswegen ein gegebener Prozess die Ziele eines Entscheidungsträgers in optimaler Art und Weise erfüllt.

## 6.2 Modellieren der Entscheidungssituation

«Über Geschmack lässt sich nicht streiten», lautet ein Sprichwort. Dies bedeutet, dass es schwierig ist, die zur Anwendung kommenden Kriterien so zu quantifizieren und zu qualifizieren, dass jemand, der eine von jemand anderem getroffene Auswahl nicht mag, diese zumindest nachvollziehen kann.

Deshalb ist es wichtig, eine Entscheidungssituation in einer sachlichen Form zu beschreiben, damit der Entscheidungsprozess sinnvoll hinterfragt werden kann. Der Ausdruck *Entscheidungssituation* wird verwendet, um die Umstände, unter denen eine Entscheidung zu fällen ist sowie die Zielsetzungen, die diese zu erfüllen hat, zu beschreiben. Der Ausdruck *Entscheidungsprozess* beschreibt hingegen den Mechanismus, der in einer bestimmten Entscheidungssituation angewendet wird, um zu einer Entscheidung zu gelangen. «Ich habe die Variante ausgewählt, die mir am besten gefällt» ist ein Entscheidungsprozess, der in den meisten Entscheidungssituationen angewendet werden kann.

Es ist aber kein Prozess, der nachvollzogen und durch eine sachliche Diskussion verbessert werden kann.

### 6.2.1 Typen von Entscheidungssituationen

Unter Verwendung der Konzepte aus Abb. 6.1 kann man Entscheidungssituationen kategorisieren. Auf der höchsten Ebene kann zwischen bewussten und unbewussten Entscheidungen differenziert werden. Es ist offensichtlich, dass es bei einer unbewussten Entscheidung nicht möglich ist, die Kriterien oder den Prozess zu hinterfragen oder zu diskutieren. Eine bewusste Entscheidung muss zwar nicht unbedingt eine bessere sein, jedoch ist es einfacher, sie anderen zu erklären.

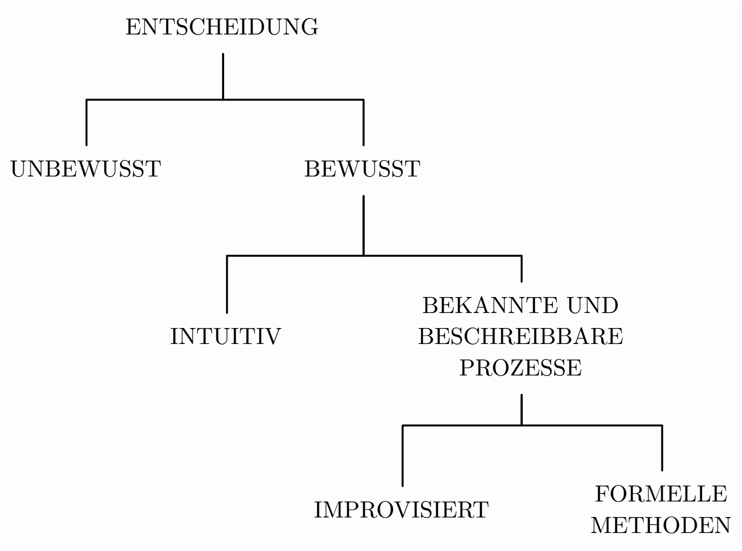



Abbildung 6.1: Typen von Entscheidungssituationen

Bewusste Entscheidungen können mit bekannten und beschreibbaren Prozessen erfolgen oder sie können lediglich eine Frage der Intuition und des Geschmacks sein. Letztere sind aus Gründen der Transparenz nicht erwünscht. Häufig kann durch eine weitere Untersuchung etwas, das zunächst intuitiv und «nach Gefühl» so zu sein scheint, in einen überprüfbaren Prozess überführt werden.

Schlussendlich kann bei Entscheidungssituationen, denen ein bekannter und beschreibbarer Prozess zugrunde liegt, zwischen denjenigen, welche improvisiert sind und diejenigen, welche eine formelle Methode verwenden, unterschieden werden. Aufgrund der Transparenz und der Überprüfbarkeit sind formelle Methoden immer vorzuziehen – obwohl es bei Zeitnot und fehlenden Ressourcen so scheinen kann, als dass improvisierte Entscheidungsmethoden der einzig machbare Weg sind. Im Folgenden werden daher nur Entscheidungsprozesse mit formellen Methoden näher betrachtet.

### 6.2.2 Entscheidungsprozesse mit formellen Methoden

Formelle Methoden können durch eine beliebige Person implementiert werden, was impliziert, dass alle dafür benötigten Elemente eindeutig zu definieren sind. Es muss definiert werden, welche die relevanten Kriterien sind, wie sie für das Erreichen der Schlussfolgerung eingesetzt werden, welche Datenquellen die Kriterien repräsentieren sollen und wie die Auswirkungen auf die verschiedenen Entscheidungsmöglichkeiten berechnet und geschätzt werden können. Solche Prozesse benötigen natürlicherweise ein grosses Wissen über die Konsequenzen der Entscheidungen. Je höher dieses Verständnis ist, desto qualitativ hochwertiger wird die Entscheidung ausfallen. Ein guter Entscheidungsprozess ist stets darauf angewiesen, dass das physikalische Problem, über das entschieden werden soll, gut verstanden wird. Normalerweise wird dieses Verständnis durch mathematische Modelle wiedergegeben. Die Entscheidungsfindung wird dann zu einem zweistufigen mathematischen Prozess. In einem ersten Schritt werden die Konsequenzen (Outputs) aller möglichen Varianten (Inputs) berechnet, sodass in einem zweiten Schritt die beste Input-Output-Kombination ausgewählt werden kann. Formelle Entscheidungsfindung benötigt oft aufwändige und anspruchsvolle Berechnungen.

Gute Modelle sind notwendig, reichen für sich genommen allerdings noch nicht aus, denn alle diese Modelle benötigen Eingabegrössen (Inputs) von grosser Qualität, damit sie qualitativ hochstehende Ergebnisse (Outputs) liefern können. Daraus folgt, dass für Entscheidungsprozesse mit formellen Methoden stets relativ grosse Datensammlungen und -ermittlungen benötigt werden. Des Öfteren werden auch Experimente oder Befragungen verwendet.

### 6.2.3 Was ist das Ziel?

Auch Entscheidungen mit nur einem Ziel können schwierig zu treffen sein, da z.B. die Konsequenzen der Entscheidung für dieses Ziel schwierig zu eruieren sind. Normalerweise besitzen Entscheidungen jedoch mehrere konkurrierende Ziele. Daher ist es wichtig, diese Ziele in verschiedene Kategorien einzuordnen (vgl. Abschnitt 2.4), um ihre jeweilige Priorität berücksichtigen zu können.

Wenn Entscheidungssituationen mehrere Ziele haben, ist es wichtig, die Beziehungen unter ihnen zu kennen. So können z.B. mehrere Ziele einer natürlichen Hierarchie unterstehen, sodass Ziele aus einer höheren Kategorie auf Subkategorien heruntergebrochen werden können und so Elemente des höheren Ziels detaillierter beschrieben werden können. Kriterien, die Rahmenbedingungen darstellen, können nicht gegeneinander abgewogen werden, weswegen es keinen Sinn macht, ihre relative Wichtigkeit abzuschätzen oder sie in eine Hierarchie einzuordnen. Wird ein Zusammenhang zwischen mehreren Zielen benötigt, müssen diese Ziele Sollziele sein.

### 6.2.4 Hierarchien von Zielfunktionen und Attributen definieren

Eine Entscheidungssituation kann unter Anwendung einer Hierarchie der Ziele und der zugehörigen Attribute analysiert werden. Dieser Ansatz erlaubt die Darstellung von zwei Beziehungstypen: Eltern-Kind und Geschwister. Eltern-Kind Beziehungen benutzt man in einer Hierarchie, um eine detailliertere Ansicht des Ziels oder Attributs zu repräsentieren. Die Kinder befinden sich eine Ebene tiefer als die Eltern. Die Geschwister eines gegebenen Knotens stellen Wahlmöglichkeiten dar. Dies sind Ziele, die für ihre Erfüllung in der Gesamtlösung gegeneinander konkurrieren.

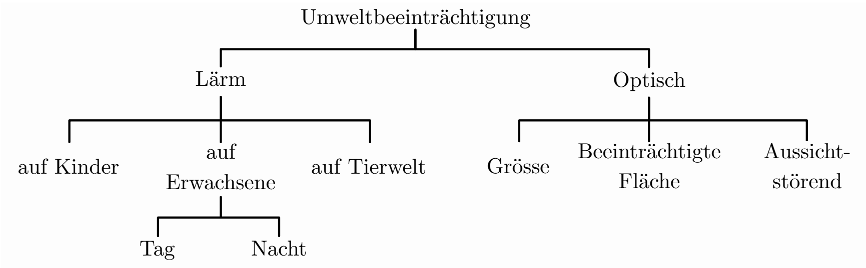



Abbildung 6.2: Zielhierarchie

Bei der Auswahl einer neuen Umfahrungsstrasse könnten die Zielfunktionen *Lärm* und *Optisch* innerhalb der übergeordneten Zielfunktion *Umweltbeeinträchtigung* konkurrieren (vgl. Abb. 6.2). Sie fungieren als Kinder des Knotens *Umweltbeeinträchtigung,* weil sie das allgemeine Ziel detaillierter ausführen. Betrachtet man die beiden Zielfunktionen *Lärm* und *Optisch,* wird klar, dass sie als Geschwister fungieren. Eine möglichst geringe negative Auswirkung ist bei beiden erwünscht, jedoch macht es Sinn, nach der für den Entscheidungsträger wichtigeren Eigenschaft zu fragen. Das Modellieren von Entscheidungssituationen benötigt eine Vielzahl an Gestaltungsentscheidungen. Zunächst wird auf die Kriterien eingegangen, nach denen diese Gestaltungsmöglichkeiten zu bestimmen sind.

### 6.2.5 Verbindung von Attributen mit Zielen

Nach der vollständigen Formulierung der Ziele muss gezeigt werden, welche Attribute die Zielerfüllung beeinflussen.

In Abb. 6.3 wird eine Entscheidungssituation für den Bau eines neuen Hochwasserschutzbauwerks dargestellt. Das Ziel der Entscheidungsträger ist das «gute Hochwasserschutzbauwerk», das mit zwei Geschwister-Unterzielen «Optik» und «Funktionalität» weiter spezifiziert wird. An diese Unterziele ist dann eine zweite Hierarchie von Attributen angehängt, welche die Zielerfüllung beeinflussen soll.

Generell ist auch hier immer eine Abwägung hinsichtlich des ***Detaillierungsgrads*** zu treffen. Auch wenn es beinahe immer möglich ist, noch detaillierter zu werden, ist dies jedoch nicht immer sinnvoll. Ein gutes Urteilsvermögen muss angewandt werden, um ein Gleichgewicht zwischen Kosten und Nutzen zu finden.

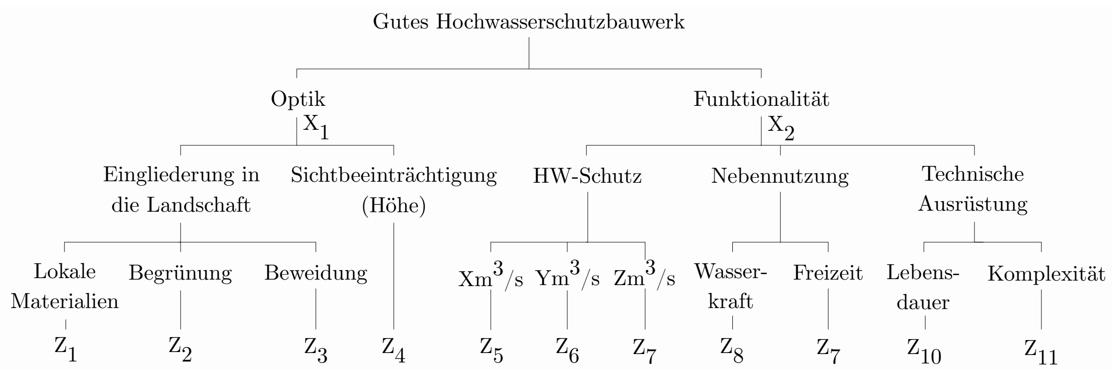



Abbildung 6.3: Eine Hierarchie von Attributen stellt die Beeinflussung der übergeordneten Ziele dar

### 6.2.6 Zusammenfassung

Das Modellieren von Entscheidungssituationen benötigt eine Vielzahl an Gestaltungsentscheidungen. Eine Übersicht kann mit einer grafischen Darstellung der Ziele und der ihnen zugeordneten Attribute erreicht werden.

## 6.3 Masseinheiten beim Alternativenvergleich

Alternativenvergleiche beruhen darauf, eine gemeinsame Skala oder Masseinheit zu finden, auf Grundlage derer der Vergleich durchgeführt werden kann. In manchen Fällen basiert dies auf einem gemeinsamen Attribut. Ein Sprichwort heisst, man könne Äpfel nicht mit Birnen vergleichen. Man kann aber z.B. durchaus ihr Gewicht vergleichen. Im Allgemeinen wird die Wahl einer Alternative nicht auf Basis eines gemeinsamen Attributs stattfinden, sondern anhand einer modellierten gemeinsamen Masseinheit der Zielbeeinflussung, zum Beispiel anhand der verursachten Kosten, gemessen in Schweizer Franken. Die am häufigsten zur Anwendung kommende Methode dafür ist die Kosten-Nutzen-Analyse, basierend auf einem Bewertungsmodell der Attribute. In einer solchen Analyse ist die gemeinsame Masseinheit eine Währung. Bevor genauer auf die Erstellung von Kosten-Nutzen-Analysen eingegangen wird, muss zunächst noch ein tieferes Verständnis für Entscheidungsprozesse entwickelt werden.

### 6.3.1 Ordinal- und Kardinalskalen

Normalerweise drücken Masseinheiten Reihenfolgen und relative Grösse aus. 4 ist grösser als 2, 2 ist grösser als 1. Beide, 4 und 2, sind doppelt so gross wie 2 resp. 1. Auf der anderen Seite ist die additive Differenz zwischen 4 und 2 doppelt so gross wie die additive Differenz zwischen 2 und 1. Es können viele weitere Aussagen mit diesen drei Werten gemacht werden, weil die Skala eine **Kardinalskala** ist und die Grösse eine Rolle spielt. Nicht alle Skalen besitzen diese Charakteristik. Ein weiterer Skalentyp ist die **Ordinalskala**. In einer Ordinalskala geben die Werte nur an, welcher Wert grösser ist. «Der Erste» ist besser als «der Zweite», und der ist wiederum besser als «der Dritte». Es kann jedoch keine Aussage darüber gemacht werden, um wie viel besser «der Erste» gegenüber «dem Zweiten» usw. ist. Kardinalskalen liefern mehr Informationen, wohingegen sich empirische Präferenzen wesentlich einfacher mit Ordinalskalen erfassen lassen. Obwohl Personen häufig beantworten können, welche Option sie bevorzugen, ist es schwierig, konsistente Angaben darüber zu erhalten, um *wie viel* sie das eine gegenüber dem anderen bevorzugen. Werden zwei Personen gebeten, drei Objekte in eine Reihenfolge zu bringen, kann es gut sein, dass sie sich über die Reihenfolge einigen können, wohingegen sie bei der Frage nach der relativen Grösse der Präferenzen weit auseinander liegen. Bei Ordinalskalen ist eine Übereinkunft einfacher zu erreichen.

***Ordinalskala***: Eine Skala, bei der die Grösse des Wertes die Reihenfolge angibt, aber nicht notwendigerweise etwas über die Grösse der Differenz zum Ursprung sagt. Als Beispiel: Fred kommt zuerst herein, John als Zweiter und Margret als Dritte. Oft werden für Ordinalskalen Worte statt Zahlen verwendet: «Ausgezeichnet», «Gut», «Genügend», «Schlecht», «Sehr Schlecht» sind ein Beispiel für eine solche Ordinalskala. Diese Technik ordnet den Kategorien – in einer eindeutigeren Art als es eine einfache «1 bis 5»-Ordinalskala tun kann – eine Bedeutung zu, jedoch löst sie nicht das grundlegende Problem der Quantifizierung des Unterschiedes zwischen den Kategorien.
***Kardinalskala***: Eine Skala, bei der die Werte die Grössenordnung der Differenz zum Ursprung beinhalten. Als Beispiel: Fred erzielte 100 Punkte bei der Prüfung, John 81 und Margret 80. Bezogen auf Margret war Fred wesentlich besser. John hingegen war nur unwesentlich besser.

### 6.3.2 Vergleiche von Präferenzen zwischen Personen

Auch dann, wenn Präferenzen mit Kardinalskalen eruiert werden können, ist es trotzdem nicht offensichtlich, wie solche Masse zwischen mehreren Individuen verglichen werden können. Wenn beispielsweise eine Person sagt, sie habe Äpfel zweimal lieber als Orangen und eine andere Person meint, sie habe sie sogar dreimal lieber, darf man daraus folgern, dass sie zusammen zweieinhalbmal glücklicher wären, wenn beide miteinander Äpfel bekämen, als wenn sie Orangen bekommen hätten (vielleicht bei einem gemeinsamen Picknick?)? Solche Fragen können vermieden werden, wenn man akzeptiert, dass Präferenzen nur ordinale und keine kardinalen Rangfolgen ausdrücken können.

## 6.4 Designattribute mit dem Ergebnis in Beziehung setzen

Das Herbeiführen einer gemeinsamen Masseinheit für den Variantenvergleich ist nicht die einzige Schwierigkeit, die bewältigt werden muss. Oft besitzt ein Attribut der Lösung keine einfache Beziehung zum Ergebnis, über welche Präferenzen festgestellt werden können. Beispielsweise könnte es nur zwei Zustände einer Brücke geben, die im Hochwasserfall wirklich von Bedeutung sind: Ist die Brücke weggespült oder nicht? Das relevante Designattribut ist die Durchlasshöhe der Brücke. Um die Präferenz für verschiedene Entwürfe der Durchlasshöhe zu ermitteln, bedarf es zunächst einer Modellierung der Beziehung zwischen dem Attribut und der Angelegenheit, hinsichtlich derer eine Präferenz besteht (hier: Potential der Wegspülung). Zwei Arten von Unsicherheiten sind relevant. Zunächst die Unsicherheit betreffend der Ursache: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für ein Hochwasser der Grösse X? Des Weiteren die Unsicherheit betreffend der Konsequenz: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Brücke weggespült wird, wenn ein Hochwasser der Grösse X auftritt? Beide Unsicherheiten müssen im Entscheidungsmodell behandelt werden.

### 6.4.1 Ursachenunsicherheit

Zunächst werden noch ein paar Begriffsdefinitionen benötigt, welche mit dem nachfolgenden Beispiel klar werden sollten. Eine Unsicherheit, die in der Modellierung für gewöhnlich als *Zufallsvariable* bezeichnet wird, besitzt mehrere *Elementarereignisse*. Jedes Elementarereignis besitzt eine spezifische Eintrittswahrscheinlichkeit. In der Praxis besteht jedoch nicht immer ein Interesse an jedem Elementarereignis einzeln, weswegen als Vereinfachung ein *Ereignis* definiert wird. Dieses ist grundsätzlich eine Sammlung von Elementarereignissen. Das Ereignis definiert einen Bereich oder eine Unterklasse der gesamten Unsicherheit. Anstatt nun mit einer grossen Anzahl von Elementarereignissen zu arbeiten, wird eine kleine Anzahl an Ereignissen, die tatsächlich von Interesse sind, verwendet. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse, welche in dem definierten Bereich liegen.

Nun zu dem erwähnten Beispiel: Wenn die Unsicherheit die Grösse des Hochwassers ist, dann kann jede in Kubikmeter pro Sekunde gemessene spezifische Hochwassergrösse als Elementarereignis in einer hydrologischen Statistik aufgeführt werden. Das gefragte Designattribut ist die Durchlasshöhe, von welcher angenommen wird, dass sie nur zwei Grössen haben kann *(a* oder $b$). Wenn die Grösse $a$ für die Brücke ausgewählt wird, besteht möglicherweise folgende Vorstellung bezüglich einer Wegspülung:

- Es besteht relativ starke Übereinkunft darüber, dass ein Hochwasser mit weniger als 200 $^{m^3}/_{s}$ der Brücke nichts anhaben würde.
- Ebenfalls wird angenommen, dass ein Hochwasser mit mehr als 300 $^{m^3}/_{s}$ die Brücke wegspülen würde.

Diese Vorstellung grenzt somit drei Ereignisse $\{$[0 - 200], (200 - 300], (300 - $\infty$]$\}$ voneinander ab. Als nächstes würde man die Hochwasserstatistik heranziehen und die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der ein Hochwasser in jedem der definierten Ereignisse stattfinden würde. Es ist hier zu beachten, dass die ausgewählten Ereignisse sowohl das Designattribut *«a»* als auch die interessierende Konsequenz (Konsequenzunsicherheit «Brücke wird weggespült») repräsentieren.

### 6.4.2 Konsequenzunsicherheit

Auch wenn genau bekannt ist, wie wahrscheinlich jede Grösse eines Hochwassers ist, besteht jedoch noch kein gesichertes Wissen darüber, ob die Brücke weggespült wird oder nicht. Wie kann man Kenntnis über eine solche Wahrscheinlichkeit erlangen? Die historischen Daten werden vermutlich nicht helfen, weil es vielleicht das erste Mal ist, dass eine Brücke an diesem Ort gebaut wird. Diese Art von Wahrscheinlichkeitsbetrachtung, bei der die Auftrittshäufigkeit nicht durch Experimente oder historische Daten verfügbar ist, muss in irgendeiner Form von einer Beurteilung abgeleitet werden. Es könnte die Einschätzung eines Experten sein oder eine Schätzung mithilfe eines formalen Modells.

### 6.4.3 Zusammenfügen der Komponenten - Beispiel

Die Verbindung zwischen dem Designattribut und den Ergebnissen, über welche Präferenzen existieren, kann Unsicherheiten oder gar mehrfache Unsicherheiten (wie im Hochwasserbeispiel beschrieben) beinhalten. Das Entscheidungsmodell muss fähig sein, solche Verbindungen zu erfassen.

Mit einem konkreten Beispiel sollen nun die Unsicherheiten der Ursache und Konsequenz und ihr Zusammenhang genauer erklärt werden. Es orientiert sich an der oben erwähnten Situation mit der Brücke über den Fluss, der Hochwasser führen kann. Folgende Angaben sind gegeben:

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für einen bestimmten Durchfluss x in $^{m^3}/_{s}$ lautet: $f(x) = 0.8 \cdot 20 \cdot (0.8 \cdot 20)^{-0.2} - e^{-(\frac{x}{20})^{0.8}}$
- Aus unseren Plänen können wir abschätzen, wie sich die Brücke bei folgenden Ereignissen verhält:

- Wasserspiegel tiefer als Brückenauflager (Durchfluss $0 \leq x < 200\, m^3/s$): Brücke hält mit 99.95% Wahrscheinlichkeit

- Wasserspiegel zwischen Auflagerunterkante und Fahrbahnunterkante (Durchfluss $200\, m^3/s \leq x < 300\, m^3/s$): Brücke hält mit 30% Wahrscheinlichkeit

- Wasserspiegel höher als Fahrbahnunterkante (Durchfluss $x \geq 300\, m^3/s$): Brücke hält mit 5% Wahrscheinlichkeit

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält die Brücke?

Zuerst muss die Dichtefunktion integriert werden, um auf die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion zu kommen. Die Variable x in der Dichtefunktion wird mit u ersetzt und von 0 bis x integriert, um am Ende wieder ein x als Variable zu haben.

$F(x) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x 0.8 \cdot 20 \cdot (0.8 \cdot 20)^{-0.2} - e^{-(\frac{u}{20})^{0.8}} du = 1 - e^{-(\frac{x}{20})^{0.8}}$

Nun werden die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse berechnet:

$P(x < 200) = F(200) = 0.998181$

$P(200 \leq x < 300) = F(300) - F(200) = 0.001657$

$P(x \geq 300) = 1 - F(300) = 0.000162$

Diese werden nun in das Bayes-Tableau eingetragen:

| Ereignisse | hält | hält nicht | P(Ereignis) | hält (Randw'keit) | hält nicht (Randw'keit) |
|---|---|---|---|---|---|
| $x < 200$ | 0.997682 | 0.000499 | 0.998181 | 0.9995 | 0.0005 |
| $200 \leq x < 300$ | 0.000497 | 0.001160 | 0.001657 | 0.3 | 0.7 |
| $x \geq 300$ | 0.000008 | 0.000154 | 0.000162 | 0.05 | 0.95 |
| Zeilensummen | 0.998187 | 0.001813 | 1 | | |

Zu bemerken ist, dass von rechts nach links gerechnet wird. Um auf die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für «hält» oder «hält nicht» in jeder Situation zu kommen, wird die jeweilige Randwahrscheinlichkeit mit P(Ereignis) multipliziert. Als Beispiel: $P(x < 200,\, \textit{hält}) = 0.9995 \cdot 0.998181 = 0.997682$. Die Zeilensummen der Spalten «hält» und «hält nicht» bezeichnen die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, dass die Brücke hält oder eben nicht hält. In der untenstehenden Abbildung wird die Berechnung grafisch gezeigt.

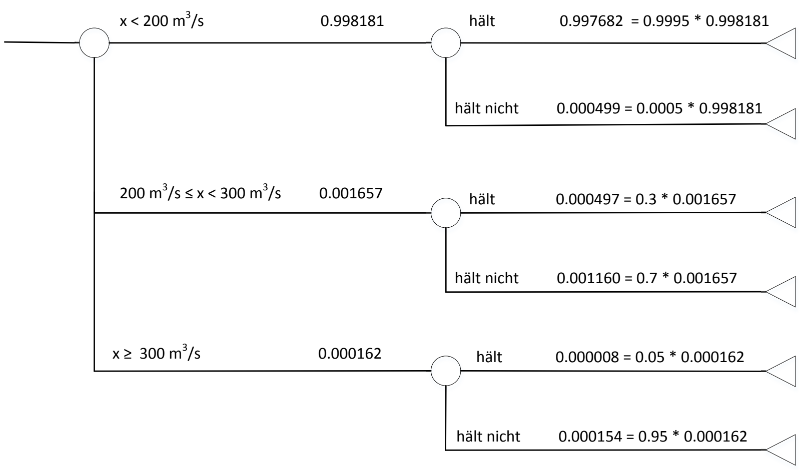



Abbildung 6.4: Entscheidungsbaum zum Beispiel Brücke mit Hochwasser

## 6.5 Vergleich von Alternativen: Der Entscheidungsprozess

Nachdem die Ziele und die verschiedenen Attribute der Lösungen dieser Ziele festgelegt wurden, ist der nächste Schritt die Auswahl einer Lösung aus den gegebenen Alternativen. Dies macht man, indem man die Alternativen anhand eines strukturierten Prozesses vergleicht. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die im Folgenden erörtert werden sollen.

### 6.5.1 Entscheidungsprozesse - Paarweiser Vergleich

Eine einfache Art, mehrere Alternativen zu vergleichen, ist der paarweise Vergleich. Ein Entscheidungsträger wird aufgefordert, seine Präferenz für jede denkbare Kombination zweier Varianten anzugeben. Aus diesen paarweisen Vergleichen kann eine Rangfolge erstellt werden. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass keine Kardinalskala benötigt wird. Es wird nur danach gefragt, ob A gegenüber B bevorzugt wird – und nicht um wie viel. Ein Nachteil ist, dass die Zahl der nötigen paarweisen Vergleiche rasch ansteigt. Die Anzahl der einzigartigen Paare $p$ für $N$ Alternativen lässt sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$p = \frac{N \cdot (N-1)}{2} \tag{6.1}$$

Um die Ergebnisse übersichtlich darzustellen, kann eine Tabelle mit Reihen und Spalten entsprechend der Anzahl an Alternativen erstellt werden. Dann wird das Ergebnis des paarweisen Vergleichs von Alternative $i$ mit Alternative $j$ in die Zelle $(i, j)$ eingetragen. Solange die Reihenfolge der Fragestellung irrelevant ist, muss nur die Hälfte oberhalb der Diagonalen der Tabelle gefüllt werden. Das Beispiel in Tab. 6.1 betrifft die Auswahl einer Route für eine neue Autobahn. Vier Routen werden verglichen, der Entscheidungsträger sagt, welche Route er im paarweisen Vergleich bevorzugt, und es lässt sich hoffentlich eine klare Rangfolge erstellen.

| | Im Vergleich mit Alt. B | | | | Wie oft |
|---|---|---|---|---|---|
| Alt. A | 1 | 2 | 3 | 4 | bevorzugt? |
| 1 | - | $<$ | $>$ | $>$ | 2 |
| 2 | $>$ | - | $>$ | $>$ | 3 |
| 3 | $<$ | $<$ | - | $>$ | 1 |
| 4 | $<$ | $<$ | $<$ | - | 0 |

Tabelle 6.1: Paarweiser Vergleich: Am häufigsten bevorzugte Alternative

Wenn sich eine klare Rangreihenfolge erstellen lässt, dann erfüllen die paarweisen Vergleiche die Regel der ***Transitivität***. Manchmal ist dies jedoch nicht der Fall. Dann spricht man von ***Intransitivität***. Ein Beispiel für Intransitivität sieht man in Tab. 6.2. Route 1 wird gegenüber Route 4 bevorzugt, Route 4 wird gegenüber Route 5 bevorzugt, dabei aber wird Route 1 gegenüber Route 5 **nicht** bevorzugt. Selbst wenn dies der Fall ist, lassen sich immer noch Entscheidungsregeln konstruieren, die eine Entscheidung erlauben. Ein Beispiel wäre, dass man die Alternative nimmt, die am häufigsten bevorzugt wird.

| | Im Vergleich mit Alt. B | | | | | Wie oft |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Alt. A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | bevorzugt? |
| 1 | - | $<$ | $>$ | $>$ | $=$ | 2 |
| 2 | $>$ | - | $>$ | $>$ | $>$ | 4 |
| 3 | $<$ | $<$ | - | $>$ | $>$ | 2 |
| 4 | $<$ | $<$ | $<$ | - | $>$ | 1 |
| 5 | $=$ | $<$ | $<$ | $<$ | - | 0 |

Tabelle 6.2: Paarweiser Vergleich: Intransitivität
1>4, 4>5, 5=1

Tab. 6.3 zeigt eine andere, aber doch ähnliche Entscheidungssituation, bei der drei Alternativen anhand von fünf Kriterien verglichen werden. Das Problem ist, eine Auswahl zu treffen, ohne festlegen zu müssen, welche Kriterien wichtiger sind und ohne voraussetzen zu müssen, dass eine transitive Rangordnung existiert. Der Eintrag in Zelle $(i, j)$ enthält die bevorzugte Alternative des $j$-ten Paares mit dem $i$-ten Kriterium. Falls ein «Unentschieden» existiert, wird die Zelle leer gelassen. Eine Entscheidungsregel, die in diesem Fall angewendet werden kann, ist die ***Regel «BMO»*** (engl. «best most often»). Man zählt einfach, wie oft eine Variante bevorzugt wird, und diejenige mit dem höchsten Wert gewinnt.

| Kriterium | Bevorzugte Variante im paarweisen Vergleich A-B | A-C | B-C | |
|---|---|---|---|---|
| Aussehen | | A | B | |
| Sicherheit | B | A | B | |
| Kosten | A | C | C | |
| Baudauer | A | A | B | |
| Komplexität | A | | C | |
| Alt. | Wie oft bevorzugt? | | | Total |
| A | 3 | 3 | 0 | 6 |
| B | 1 | 0 | 3 | 4 |
| C | 0 | 1 | 2 | 3 |

Tabelle 6.3: Paarweiser Vergleich: BMO

Damit geht man aber implizit davon aus, dass alle Kriterien dem Entscheidungsträger gleich wichtig sind. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Vielleicht gibt es eine Hierarchie bezüglich der Wichtigkeit der Kriterien. Wenn ja, dann kann man von «oben nach unten» vorgehen und die beste Alternative des wichtigsten Kriteriums auswählen. Nur wenn es ein Unentschieden gibt, wird das zweitwichtigste Kriterium zur Entscheidungsfindung herangezogen, usw. Diese ***Regel*** heisst ***«SBOMI»*** («selecting the best of the most important»). Eine Auswahl gemäss SBOMI wird in Tab. 6.4 abgebildet. Das Kriterium «Aussehen» ist das wichtigste Kriterium, es führt aber zu einem Unentschieden zwischen den Varianten A und B. Deshalb zieht man das Kriterium «Sicherheit» hinzu. Danach wird B gegenüber A bevorzugt. B ist deshalb die Auswahl gemäss SBOMI.

| Kriterium | Bevorzugte Variante im paarweisen Vergleich A-B | A-C | B-C | Wichtigkeit | Rang | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aussehen | | A | B | 1 | A=B>C | SBOMI: B |
| Sicherheit | B | A | B | 2 | B>A>C | |
| Kosten | A | C | C | 3 | C>A>B | |
| Baudauer | A | A | B | 4 | A>B>C | |
| Komplexität | A | | C | 5 | A=C>B | |

Tabelle 6.4: Paarweiser Vergleich: SBOMI

### 6.5.2 Eliminationsmethoden: Rahmenbedingungen oder Minimal-/Maximalstandards

Der paarweise Vergleich ist nur für Sollziele sinnvoll. Wenn ein Kriterium eine Rahmenbedingung ist, dann stellt sich nicht die Frage, welche Alternative bevorzugt wird. Es muss nur überprüft werden, ob die Kriterien erfüllt sind oder nicht. Dies bedeutet nicht, dass Rahmenbedingungen nicht in den Entscheidungsprozess integriert werden können. Im Gegenteil: Sie können verwendet werden, um die Anzahl der Alternativen in einem ersten Schritt zu reduzieren. Im zweiten Schritt werden die verbleibenden Alternativen dann anhand der Sollziele verglichen. Dies ist eine wirkungsvolle Methode, die verhindert, dass man Alternativen genauer untersucht, die aufgrund von Beschränkungen aus den Rahmenbedingungen gar nicht wählbar sind.

Manchmal werden Rahmenbedingungen und Sollziele kombiniert. In diesem Fall sollten zwei separate Teilprozesse definiert werden: Einer für die Sollzielkomponente und einer für die Komponente der Rahmenbedingungen. In einem ersten Schritt scheidet man die Alternativen aus, die das Maximum/Minimum der Rahmenbedingung verletzen.

Normalerweise sind die Rahmenbedingungen in den Auftragsbedingungen eines Angebots enthalten. Sie können in vielen Formen existieren. Einige Beispiele sind in Tab. 6.5 aufgeführt.

| Zielgrösse | Beschreibung |
|---|---|
| Kosten | können für einen oder mehrere Kostenträger und Kostenarten festgelegt werden |
| Zeit | bis oder ab wann eine bestimmte Tätigkeit durchgeführt werden kann oder wie lang diese dauern darf |
| Wahrscheinlichkeit | berücksichtigt gesellschaftliche Präferenzen und kann pro Systemzustand oder für mehrere Systemzustände gemeinsam festgelegt werden |
| Risiko | kann für einen oder mehrere Risikoträger und Risikoarten sowie Kombinationen davon festgelegt werden |

Tabelle 6.5: Beispiele für Rahmenbedingungen

#### 6.5.2.1 Entscheidungsprozesse, die eine Erfüllung von Standards benutzen

Bei manchen Entscheidungsprozessen wird die Elimination von Alternativen durch einen Vergleich mit einem Standard (Min/Max) bewerkstelligt. Dafür gibt es zwei unterschiedliche Prozesse, die in Tab. 6.6 gezeigt sind.

**Regel 1 «Alles oder Nichts»:** Nur die Varianten sind zu behalten, die alle Standards erfüllen. In Tab. 6.6 wird nur Variante C behalten. (Ein Beispiel für diese Regel wäre, dass ein Flugzeug nur dann starten darf, wenn *alle* Sicherheitschecks erfolgreich absolviert wurden.)

**Regel 2 «Zumindest eines»:** Alle Varianten sind zu behalten, die zumindest einen Standard erfüllen. In diesem Fall bleiben alle Varianten ausser D. (Ein Beispiel für die Anwendung dieser Regel wäre das Anstellungskriterium, dass ein Bewerber auf eine bestimmte Stelle beim Bund *mindestens eine* der Landessprachen sprechen muss.)

| Kriterium | Varianten A | B | C | D | Wunsch | Standard |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Dauerhaftigkeit | 40 | 35 | 50 | 20 | 50 | >30 |
| 2. Sicherheit | 90 | 80 | 75 | 60 | 100 | >70 |
| 3. Baudauer | 7 | 9 | 5 | 7 | 4 | <7 |
| 4. Aussehen | Gut | Schlecht | Sehr gut | Schlecht | Exzellent | Mässig |

Tabelle 6.6: Elimination durch Standards

### 6.5.3 Gewichtungen und Indizes

Vor dem Fortfahren müssen noch drei weitere Konzepte eingeführt werden: Gewichtungen, Indizes und Normalisierung. Wenn die relative Wichtigkeit von Kriterien diskutiert wird, spricht man üblicherweise von ***Gewichten*** oder ***Gewichtung***. Die Idee hierbei ist, verschiedene Kriterien in einem gewissen Verhältnis zu kombinieren. Bei $i$ Kriterien und $j$ Alternativen können die Einzelwerte als $c_{i,j}$ angeschrieben werden. Wenn man diese Werte in einem Gesamtwert zusammenfassen will, kann man eine gewichtete Summe $C_j$ berechnen, wobei $w_i$ das Gewicht für das Kriterium $i$ ist:

$$C_j = \sum_i c_{i,j} \cdot w_i \tag{6.2}$$

Dies macht aber nur Sinn, wenn die Werte $c_{i,j}$ Kardinalwerte sind.

Im Prinzip funktioniert jeder Gewichtsvektor $\vec{w}$. Es ist jedoch von Vorteil, folgende Regeln aufzustellen: $w_i \geq 0$ und $\sum w_i = 1$ . Damit ist die relative Wichtigkeit des Kriteriums durch den Wert $w_i$ leicht ersichtlich. Doch das allein reicht noch nicht. Die Verteilung der einzelnen Werte hat ebenfalls einen grossen Einfluss. Wenn z.B. Kriterium 1 einen Wertebereich von 1 bis 1'000 hat, und Kriterium 2 Werte von 1 bis 10, dann wird Kriterium 1 stärker in die Entscheidung einfliessen – selbst wenn gilt: $w_1 = 0.2$ and $w_2 = 0.8$.

Um diesem Problem entgegenzuwirken, werden ***Indizes*** verwendet. Ein Index repräsentiert den Ausgangswert auf einer anderen Skala. Eine übliche Methode, mit unterschiedlichen Werten auf unterschiedlichen Skalen umzugehen, ist die ***Normalisierung***. Den normalisierten Wert $x_{i,j}$ erhält man aus dem Originalwert $c_{i,j}$ mittels folgender Formel:

$$x_{i,j} = \frac{c_{i,j} - \mu_j}{\sigma_j} \tag{6.3}$$

Hierbei sind $\mu_j$ der Mittelwert und $\sigma_j$ die Standardbweichung der Beobachtungen des Kriteriums $j$.

Nun kann der kombinierte, normalisierte Wert $X_j$ berechnet werden, der nur mehr von der relativen Wichtigkeit abhängt und nicht mehr von der ursprünglichen Messskala.

$$X_j = \sum_i x_{i,j} \cdot w_i$$

Tab. 6.7 zeigt die Berechnung einer Gesamtbewertung mittels Gewichten, die auf drei Kriterien basiert. Sowohl die Berechnung der Gewichte als auch die Normalisierung sind dargestellt. Die Gesamtbewertung ist die Summe der individuell gewichteten Indizes.

| | Wichtigkeit der Kriterien | Gewichtung der Kriterien | Verteilungsparameter der Beobachtung | | Leistungsbewertung Variante A | | | Leistungsbewertung Variante B | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Wert | Index | | Wert | Index | |
| Kriterium | | $w$ | $\mu$ | $\sigma$ | $c$ | $x = \frac{c-\mu}{\sigma}$ | $w \cdot x$ | $c$ | $x = \frac{c-\mu}{\sigma}$ | $w \cdot x$ |
| Dauerhaftigkeit | 7 | $\frac{7}{20} = 0.35$ | 3 | 2 | 7 | 2 | 0.70 | 7 | 2 | 0.70 |
| Nutzen | 9 | $\frac{9}{20} = 0.45$ | 10 | 10 | 11 | 0.1 | 0.045 | 6 | -0.4 | -0.18 |
| Geschwindigkeit | 4 | $\frac{4}{20} = 0.20$ | 5 | 5 | 4 | -0.2 | -0.40 | 3 | -0.4 | -0.08 |
| Gesamtwert ($X$) | 20 | 1 | | | | | 0.705 | | | 0.44 |

Tabelle 6.7: Gesamtbewertung mittels normalisierter Gewichtung

### 6.5.4 Entscheidungsprozesse mit Kardinal- oder Ordinalskala, aber ohne gewichtete Kriterien

Bis jetzt wurden noch keine Entscheidungsprozesse gezeigt, die Präferenzen auf einer Kardinal- oder Ordinalskala benötigen. Wir haben nur Prozesse basierend auf paarweisen Vergleichen oder Ausscheidungsverfahren diskutiert. Selbst wenn die Bewertung der Alternativen mehrere Kriterien umfasst, diese aber ungewichtet bleiben, gibt es noch Möglichkeiten für Entscheidungsregeln.

#### 6.5.4.1 Dominanz

Für den Fall, dass eine Ordinalreihenfolge innerhalb der Attribute jedes Kriteriums existiert, aber keine Information darüber besteht, welches Kriterium wichtiger ist, gibt es keine Möglichkeit, zwischen zwei Alternativen zu entscheiden, bei denen eine in einem Kriterium besser und in dem anderen Kriterium schlechter ist. Es kann aber vorkommen, dass Alternative A *in einem Kriterium besser und in allen anderen Kriterien zumindest gleich gut* ist wie B. In diesem Fall spricht man von ***Dominanz***. Mathematisch gesprochen gilt bei Dominanz von A gegenüber B, dass für alle Gewichtungsvektoren $\vec{w}$ mit $w_i \geq 0$ und $\sum w_i = 1$ folgende Beziehung wahr ist:

$$X^A = \sum_i x_i^A w_i > \sum_i x_i^B w_i = X^B \tag{6.4}$$

Somit bedeutet Dominanz von A gegenüber B, dass die Gewichtung der Kriterien ignoriert werden kann, weil A überall gleich gut oder besser als B ist. In Tab. 6.7 dominiert Variante A über Variante B.

Dominanz kann auch angewendet werden, wenn nur einzelne Kriterien mit einer Kardinalskala gemessen werden. Tab. 6.8 zeigt eine Entscheidungssituation mit drei Kardinalkriterien und einem Ordinalkriterium. Alternativen B und D können ausgeschieden werden, weil A in allen Kriterien besser ist als B und D. Solange A vorhanden ist, kann weder B noch D ausgewählt werden. Dominanz ist deshalb ein sehr starkes Entscheidungskriterium, weil die Entscheidung nicht von der Gewichtung der Kriterien abhängt.

| Kriterien | Varianten | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| 1. Dauerhaftigkeit | 40 | 35 | 50 | 20 |
| 2. Nutzen | 90 | 80 | 75 | 60 |
| 3. Geschwindigkeit | 6 | 5 | 8 | 6 |
| 4. Aussehen | Gut | Schlecht | Sehr gut | Schlecht |

Tabelle 6.8: Dominanz bei Ordinalkriterien

#### Ordinale Wichtigkeit von Kriterien

Bei Dominanz ist es belanglos, wie der Entscheidungsträger die Kriterien bewertet. Falls der Entscheidungsträger (z.B. ein Komitee) sich zwar auf eine Rangfolge der Kriterien, aber auf keine Gewichtung einigen kann, ist ein Entscheidungsprozess immer noch möglich, z.B. mit SBOMI.

### 6.5.5 Entscheidungsprozesse mit Gewichtung

Der Zweck von Gewichten ist es, die mathematische Kombination von Einzelwerten entsprechend ihrer relativen Wichtigkeit zu ermöglichen. Dies setzt voraus, dass die Kriterien selbst auf einer Kardinalskala gemessen werden. Tab. 6.7 (auf Seite 157) gibt ein Beispiel für die Berechnung eines gewichteten Index, um einen einzigen Wert als Entscheidungsgrundlage zu bekommen. Der Entscheidungsprozess selbst ist das Auswählen der grössten gewichteten Summe.

Ein grosser Vorteil eines gewichteten Entscheidungsprozesses ist, dass Schwächen in einem Kriterium durch Stärken in einem anderen Kriterium «ausgeglichen» werden können. Dafür ist es meist schwierig, sich auf eine Gewichtung zu einigen.

### 6.5.6 Entscheidungsprozesse, die nur relative Unterschiede berücksichtigen

Wenn eine Entscheidungssituation so definiert ist, dass nur die Differenz zwischen den Alternativen wichtig ist, kann man sehr viel Zeit sparen, indem man nur die sich unterscheidenden Elemente betrachtet. Abb. 6.5 zeigt eine Situation, in der zwei Unterhaltsstrategien für Strassen über die Zeit verglichen werden. In diesem Beispiel ist der Entscheidungsträger nur am Strassenzustand interessiert. Indem man die Differenzen beider Strategien berechnet, muss eine geringere Anzahl von Instanzen berechnet werden. Man kann sich das Ganze auch als Prozess vorstellen, bei dem alle Kriterien weggelassen werden, die in beiden Alternativen gleich sind. Es muss aber nicht zwingend der Fall sein, dass nur Differenzen gemäss einzelner Kriterien wichtig sind. Manchmal entfaltet sich beispielsweise eine positive Wirkung nur dann, wenn mehrere Kriterien **gleichzeitig** erfüllt sind, wie z.B. in der Gebäudetechnik beim Zusammenspiel von gedämmten Fenstern und einem guten Lüftungssystem.

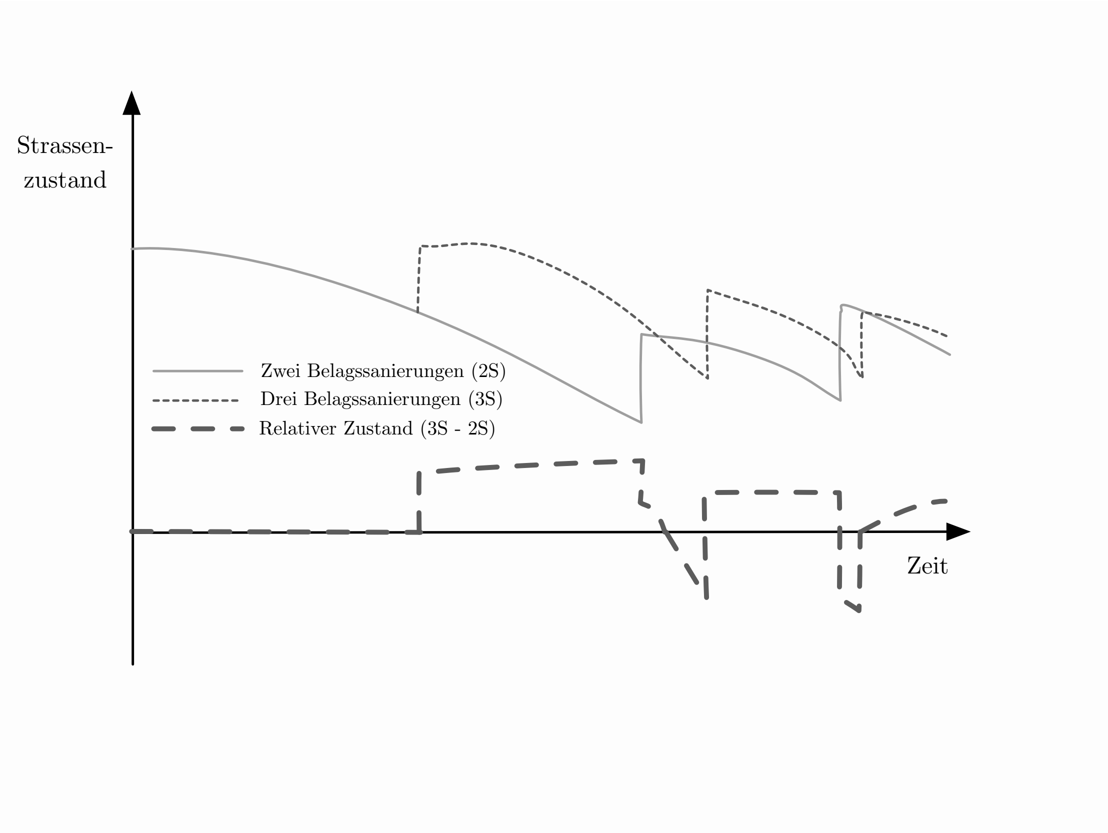



Abbildung 6.5: Entscheidungsprozess, der nur auf relativen Unterschieden beruht

### 6.5.7 Grafische Darstellung eines ungewichteten Entscheidungsprozesses mit mehreren Kardinalkriterien

Eine übersichtliche Darstellung eines ungewichteten Entscheidungsprozesses mit mehreren Kardinalkriterien und einzelnen Rahmenbedingungen ist in Abb. 6.6 gegeben. Jede Variante ist durch eine vertikale Linie, beschriftet mit A, B oder C, dargestellt. Die Gesamtkosten sind relativ auf der x-Achse dargestellt. Die Stärke jeder Variante hinsichtlich der Kriterien X, Y und Z ist durch beschriftete Kreise gezeigt. «Stärke» kann entweder gegenüber einem Mittelwert oder einer Rahmenbedingung dargestellt werden. Solche sind mit gepunkteten Linien dargestellt. Ob ein Minimum oder Maximum relevant ist, wird durch einen Pfeil rechts des Diagramms dargestellt.

Die Grafik kann so gezeichnet werden, dass die x-Achse entweder die Kosten oder den Nettonutzen darstellt. In letzterem Fall kann man somit zwischen Kriterien unterscheiden, die eine gemeinsame Masseinheit haben (oft Kosten) und solchen, die keine gemeinsame Einheit haben (z.B. weil sich die Entscheidungsträger nicht auf eine Gewichtung einigen konnten). Letztere werden dann separat als X, Y, Z dargestellt. Der Entscheidungsprozess besteht somit aus zwei Teilen. Im ersten Teil herrscht Einigkeit über die Werte und die Gewichtungen, im zweiten Teil (X, Y, Z) müssen die beiden zu debattierenden Teile «Äquivalente Kosten oder Gewinn» unter den Entscheidungsträgern ausdiskutiert werden.

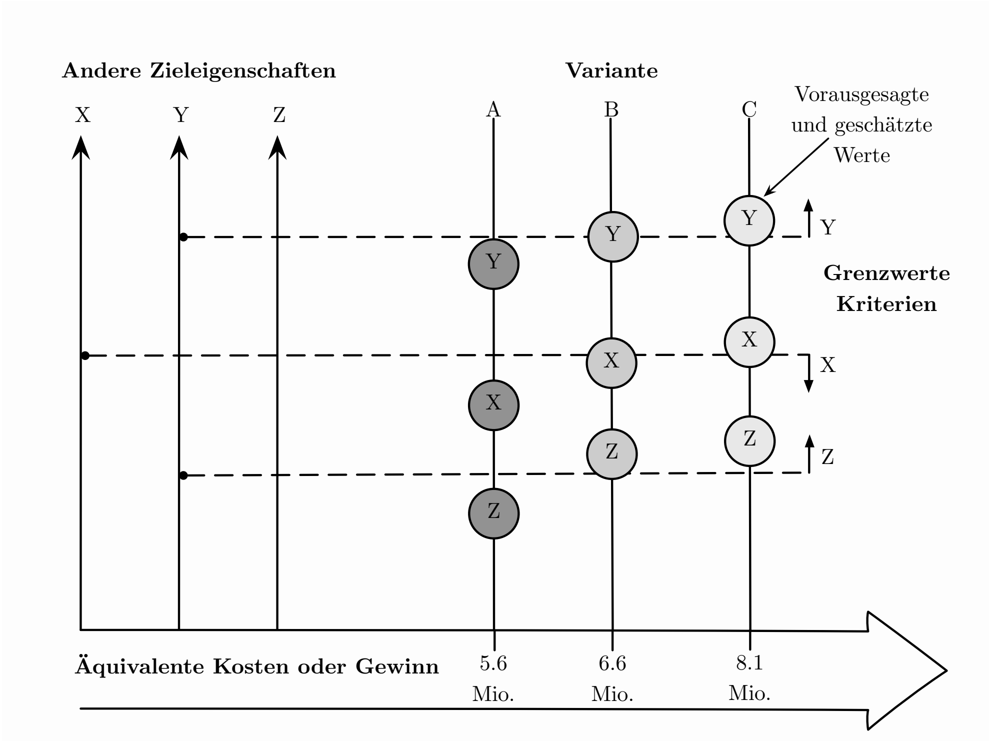



Abbildung 6.6: Grafische Darstellung eines gewichteten Entscheidungsprozesses mit mehreren Kardinalkriterien (Systems Engineering and Analysis, Blanchard & Fabricky, 2011)

## 6.6 Entscheidungsprozesse mit alternativer Zukunft und bekannten (geschätzten) Wahrscheinlichkeiten

Bis jetzt wurden nur Entscheidungssituationen betrachtet, bei denen der Wert eines Attributs immer derselbe war. Dass eine Brücke bei Hochwasser nicht weggespült wird, ist immer positiv. In anderen Entscheidungssituationen ist es jedoch wichtig, wie sich die Entwicklung der Zukunft auf den Wert der Lösung auswirkt. Eine breitere Strasse ist besser, falls der Verkehr zunimmt, aber teurer, falls der Verkehr gleich bleibt. Für einen Strassenplaner kann es wichtig sein, die Vor- und Nachteile verschiedener Zukunftsszenarien gegeneinander abzuwägen. Mit den bisherig vorgestellten Konzepten kann man dafür leicht einen Entscheidungsprozess entwickeln.

- Zuerst werden die relevanten Szenarien auf die gleiche Art und Weise definiert, wie vorher *Ereignisse* genutzt wurden, um eine Unsicherheit vereinfacht zu repräsentieren. Diese Szenarien werden $F_j$ genannt, wobei $j$ für die unterschiedlichen Szenarien steht.

- Dann werden die Eintrittswahrscheinlichkeiten $P_j$ für jedes Szenario definiert.

- Als letztes müssen dann noch die Bewertungen der Varianten unter jedem Szenario vom Entscheidungsträger definiert werden, am besten auf einer Kardinalskala. Dies macht man oft durch die Berechnung des Nettonutzens für jedes Szenario und jede Variante. Diese Werte werden mit $e_{i,j}$ bezeichnet. Die Indizes $i$ und $j$ bezeichnen den Nutzen der Variante $i$ in der Zukunft $j$. Die gesamte Situation kann durch eine Matrix (wie in Tab. 6.9) dargestellt werden.

| Zukunft ($F_j$) | | $F_1$ | $F_2$ | $\dots$ | $F_n$ | Erwartungs-wert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wahrschein-lichkeiten ($P_j$) | | $P_1$ | $P_2$ | $\dots$ | $P_n$ | $\sum P_j \cdot e_{ij}$ |
| Varianten ($V_i$) | $V_1$ | $e_{11}$ | $e_{12}$ | $\dots$ | $e_{1n}$ | $E_1$ |
| | $V_2$ | $e_{21}$ | $e_{22}$ | $\dots$ | $e_{2n}$ | $E_2$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $V_m$ | $e_{m1}$ | $e_{m2}$ | $\dots$ | $e_{mn}$ | $E_m$ |

Tabelle 6.9: Zukunftsabhängiger Nutzen

### 6.6.1 Entscheidungsprozesse bei Szenarien mit bekannten Wahrscheinlichkeiten

In Tab. 6.10 findet sich ein Beispiel, in dem aus drei Varianten die beste Strategie für den Hochwasserschutz gewählt werden muss, wobei es drei verschiedene Zukunftsszenarien gibt. Der Nettonutzen ist angegeben, genau wie die Wahrscheinlichkeiten. Im Folgenden werden drei mögliche Entscheidungsprozesse für diese Entscheidungssituation vorgestellt.

#### 6.6.1.1 BIM (Best value in most likely scenario - Bester Wert im wahrscheinlichsten Szenario)

Wie der Name dieser Methode bereits sagt, wird bei dieser Methode zunächst bestimmt, welches Zukunftsszenario die höchste angenommene Eintrittswahrscheinlichkeit aufweist. Es wird nun jene Variante ausgewählt, die bei Eintreten dieses Szenarios am besten abschneidet. Problematisch ist, dass diese Methode den grössten Teil der vorhandenen Informationen ignoriert und somit in einer Entscheidungssituation schwer zu verteidigen ist. Trotzdem ist dies ein nachvollziehbarer Prozess, der leider in der Praxis auch des Öfteren angewendet wird.

Im Fall des Hochwasserschutzbeispiels ist Szenario 3 am wahrscheinlichsten (60%). Falls also angenommen wird, dass dieses Szenario tatsächlich eintritt, dann wäre es am besten, nur einen kleinen Begleitdamm zu bauen.

#### 6.6.1.2 HILL (Highest likelihood of achieving a level - Höchste Eintrittswahrscheinlichkeit für das Erreichen eines bestimmten Niveaus)

Falls die Entscheidungssituation verlangt, dass ein bestimmtes Ergebnis der Schlüssel zum Erfolg ist (z.B. ein bestimmter Schaden, der die Versicherungsdeckung nicht übersteigt), dann könnte man die Variante wählen, die die Wahrscheinlichkeit maximiert, dieses Ergebnis zu erreichen. Für jede Strategie summiert man die Wahrscheinlichkeiten, die oberhalb eines bestimmten Levels liegen. In unserem Beispiel ist das Level -200. Der Bau eines grossen Damms (Variante 2) führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% zu einem Ergebnis von -200 oder mehr – alle anderen Strategien erreichen das gleiche Ergebnis nur mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit (Variante 1) oder gar nicht (Variante 3).

Aber auch in dieser Methode werden noch nicht sämtliche Kosten aller möglichen Zukunftsszenarien einberechnet. Daher sollte stattdessen – wenn möglich – vorzugsweise die Methode «Erwartungswert» verwendet werden.

#### 6.6.1.3 Erwartungswert

Die häufigste Methode ist der Erwartungswert-Prozess. Man berechnet den ***Erwartungswert der Alternative i*** mit der folgenden Formel:

$$E_i = \sum_j e_{i,j} \cdot P_j$$

Der Entscheidungsprozess beinhaltet dann, den grössten Wert auszuwählen, was in diesem Fall die Variante «Ausgleichsfläche» wäre.

| Zukunft ($F_j$) | | $F_1$ 300 $m^3/s$ | $F_2$ 200 $m^3/s$ | $F_3$ 100 $m^3/s$ | BIM | HILL | Erwartungs-wert |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wahrschein-lichkeiten ($P_j$) | | 0.1 | 0.3 | 0.6 | Falls $F_3$ passiert | Summe $P_j$ wenn $\geq -200$ | $\sum P_j \cdot e_{ij}$ |
| Varianten ($V_i$) | Kleiner Begleitdamm | -1800 | -600 | -100 | $\boxed{-100}$ | 0.6 | -420 |
| | Grosser Damm | -1500 | -200 | -200 | -200 | $\boxed{0.9}$ | -330 |
| | Ausgleichsfläche | -300 | -300 | -300 | -300 | 0.0 | $\boxed{-300}$ |

Tabelle 6.10: Entscheidungsprozesse bei Szenarien mit bekannten Wahrscheinlichkeiten

## 6.7 Entscheidungsprozesse mit alternativer Zukunft und unbekannten Wahrscheinlichkeiten

Manchmal gibt es Entscheidungssituationen, in denen man sich nicht auf Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Szenarien einigen kann. Auch für diese Situationen gibt es Entscheidungsprozesse. Um diese zu erklären, wird das Beispiel des Hochwasserschutzes in leicht variierter Form verwendet (Details in Tab. 6.11):

*Ein neues Hochwasserschutzbauwerk soll geplant werden. Drei potenzielle Varianten sind in einer Vorstudie ausgewählt worden. Die Planungskommission soll die kostengünstigste Variante für eine Detailstudie auswählen. Allerdings gibt es innerhalb des Planungsgebiets eine Volksinitiative über eine Umwidmung einzelner Parzellen im Planungsgebiet von Landwirtschaft in Bauland, über die in 2 Jahren abgestimmt wird. Diese kann die Kosten der Varianten entscheidend beeinflussen. Die Kommission ist sich über den Ausgang der Abstimmung nicht einig, weshalb ein Entscheidungsprozess verwendet werden soll, der keine Wahrscheinlichkeiten benötigt. Um die Sache noch schwieriger zu machen, schlägt die Regierung einen Gegenvorschlag zur Initiative vor, über den zum selben Zeitpunkt abgestimmt wird.*

| Kosten der Varianten je nach Ausgang der Abstimmung | | Angenommen wird: Gegen-vorschlag | Initiative | keine | Maximin | Laplace | Maximax |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Umfahrung | Staudamm | -1.5 Mio. | -2.0 Mio. | -1.0 Mio. | -2.0 Mio. | -1.5 Mio. | -1.0 Mio. |
| | Begleitdamm | -1.6 Mio. | -1.7 Mio. | -1.5 Mio. | -1.7 Mio. | -1.6 Mio. | -1.5 Mio. |
| | Ausgleichsfläche | -1.3 Mio. | -1.8 Mio. | -1.1 Mio. | -1.8 Mio. | -1.4 Mio. | -1.1 Mio. |

Tabelle 6.11: Alternative Zukunft mit unbekannten Wahrscheinlichkeiten

### 6.7.1 Dominanz-Regel

Die erste Entscheidungsregel, die angewandt werden kann, ist die Dominanz-Regel. Falls eine der Varianten in allen Fällen besser ist als alle anderen Varianten, dann sollte sie ausgewählt werden. Man spricht davon, dass eine Variante die anderen dominiert. Das wäre aber ein Glücksfall und kommt selten vor. Auch in diesem Fall ist jede Variante in einem der drei Szenarien die kostengünstigste.

### 6.7.2 Die Laplace-Regel

Diese Regel ist nach dem französischen Mathematiker Pierre Simon Laplace benannt und sagt aus, dass – falls die Wahrscheinlichkeiten unbekannt sind – jeder Variante dieselbe Wahrscheinlichkeit zugewiesen wird. Man kann leicht sehen, dass der Erwartungswert der einzelnen Varianten genau dem Mittelwert des Nettonutzens aller Szenarien entspricht. Nach der Laplace-Regel sollte im Beispiel die Variante «Ausgleichsfläche» ausgewählt werden, da sie den besten Mittelwert (d.h. die geringsten Kosten) aufweist.

### 6.7.3 Maximin-Regel und Maximax-Regel

Diese beiden Regeln entstammen der Spieltheorie und gehen davon aus, dass zwei Spieler gegeneinander spielen. Bei den meisten technischen Aufgabenstellungen ist dies aber eine ungewöhnliche Annahme. Die Zukunft mag zwar ungewiss sein, aber sie «spielt» nicht für oder gegen uns. Trotzdem kann diese Methode annäherungsweise dafür verwendet werden, eine hohe Angst vor Verlusten oder aber ein überaus risikofreudiges Streben nach Gewinnmaximierung abzubilden.

Die Maximin-Regel in der Spieltheorie geht davon aus, dass Spieler 2 (der Gegenspieler) immer so spielt, dass Spieler 1 stets das schlechtestmögliche Ergebnis seiner gewählten Strategie bekommt. Daher sollte Spieler 1 die Strategie auswählen, die den geringstmöglichen Nettonutzen maximiert. Dies wird **Maximin-Strategie** genannt. Die Maximin-Strategie repräsentiert gewissermassen eine pessimistische Einstellung.

Die **Maximax-Strategie** ist das Gegenteil der Maximin-Strategie. Hier nimmt man an, dass Spieler 2 immer so spielt, dass Spieler 1 das bestmögliche Ergebnis bekommt. Deshalb sollte Spieler 1 die Strategie auswählen, die seinen Nettonutzen maximiert. Im Entscheidungsprozess berechnet man zuerst den maximalen Nettonutzen für jede Alternative. Dann wählt man die Alternative mit dem grössten maximalen Nettonutzen. Diese Strategie macht dann Sinn, wenn ein so starker Wunsch nach Gewinnmaximierung besteht, dass der Fokus nur auf den bestmöglichen Fall gelegt wird. Die Maximax-Strategie repräsentiert eine eher optimistische Einstellung zur Zukunft.

In Tab. 6.11 sieht man, dass die Maximin-Strategie die Variante «Begleitdamm» wählt, da hier die Kosten im schlechtesten Szenario am geringsten sind. Die Maximax-Strategie wählt hingegen die Variante «Staudamm», da diese im besten Fall die geringsten Kosten hat.

## 6.8 Zusammenfassung

Als generelle Regel im Ingenieurwesen gilt, dass Entscheidungen nachvollziehbar und überprüfbar sein müssen. Dafür muss die Entscheidungssituation modelliert werden und es muss gezeigt werden, welche Elemente in die Entscheidung miteinfliessen sowie nach welchen Kriterien die Entscheidung getroffen wird. Dies beginnt mit einem Verständnis der Ziele und davon, ob diese Rahmenbedingungen oder Sollziele darstellen. Wo Ziele in Unterziele aufgebrochen werden können, kann mithilfe von Hierarchien die Beziehung unter ihnen erfasst werden.

Dann können Alternativen entwickelt werden, mit denen diese Ziele erfüllt werden können. Diese Alternativen haben normalerweise viele Attribute, welche zur Hierarchie hinzugefügt werden können, um zu zeigen, wie diese Attribute die Ziele erfüllen.

Bei der Modellierung eines Entscheidungsprozesses muss darauf geachtet werden, dass dieser überhaupt durchführbar ist. Wie können Attribute und Präferenzen gemessen werden? Sind Kardinalskalen vorhanden, die die Trade-Offs zwischen Stärken und Schwächen quantifizieren, oder gibt es nur Ordinalskalen? Ist es möglich, direkte Ranglisten zu erstellen, oder bleibt nur der paarweise Vergleich? Alle diese Eigenschaften bestimmen, welcher Entscheidungsprozess gewählt werden muss.

Das Verhältnis zwischen Attributen und Zielen ist nicht immer eindeutig. Manchmal sind Wahrscheinlichkeitsschätzungen notwendig, und diese können sehr komplex sein. Oft besteht die Unsicherheit auf beiden Seiten: Beim Risiko, dass ein Ereignis eintritt und beim dadurch entstehenden Schaden. Falls Wahrscheinlichkeiten beteiligt sind, ist es notwendig, diese zu bestimmen. Dies kann durch historische Daten, Experimente oder Expertenbefragungen geschehen.

Sobald die Elemente einer Entscheidungssituation bestimmt sind, muss ein Entscheidungsprozess definiert werden, der eine Alternative aus allen auswählt. Es existieren viele verschiedene Möglichkeiten, abhängig von der Art der Entscheidungssituation. Nachvollziehbare Prozesse können selbst auf paarweisen Vergleichen basieren, und dies, obwohl keine Einigkeit über die Wichtigkeit der Kriterien herrschen muss. Andere Prozesse bedienen sich einer Ordinalskala. Falls jedoch der Prozess Stärken und Schwächen sowie deren Trade-Offs in verschiedenen Kriterien berücksichtigen soll, müssen die Kriterien kardinal gewichtet werden. Wenn Attribute als normalisierte Indizes reformuliert werden, dann drücken die Gewichte die Wichtigkeit des entsprechenden Kriteriums direkt aus.

In manchen Entscheidungssituationen hängen die Attribute einer Lösung von der zukünftigen Entwicklung ab. Diese Situationen können mittels Wahrscheinlichkeiten für Zukunftsszenarien modelliert werden, wodurch die Alternative mit dem höchsten Erwartungswert ausgewählt werden kann. Selbst wenn der Entscheidungsträger die Wahrscheinlichkeiten nicht bestimmen kann, gibt es immer noch nachvollziehbare Entscheidungsprozesse wie Dominanz, Maximin oder Maximax.

Eine Übersicht der vorgestellten Entscheidungsprozesse ist in Abb. 6.7 dargestellt. Dies sind jedoch nur Beispiele und bleiben ohne Anspruch auf Vollständigkeit.

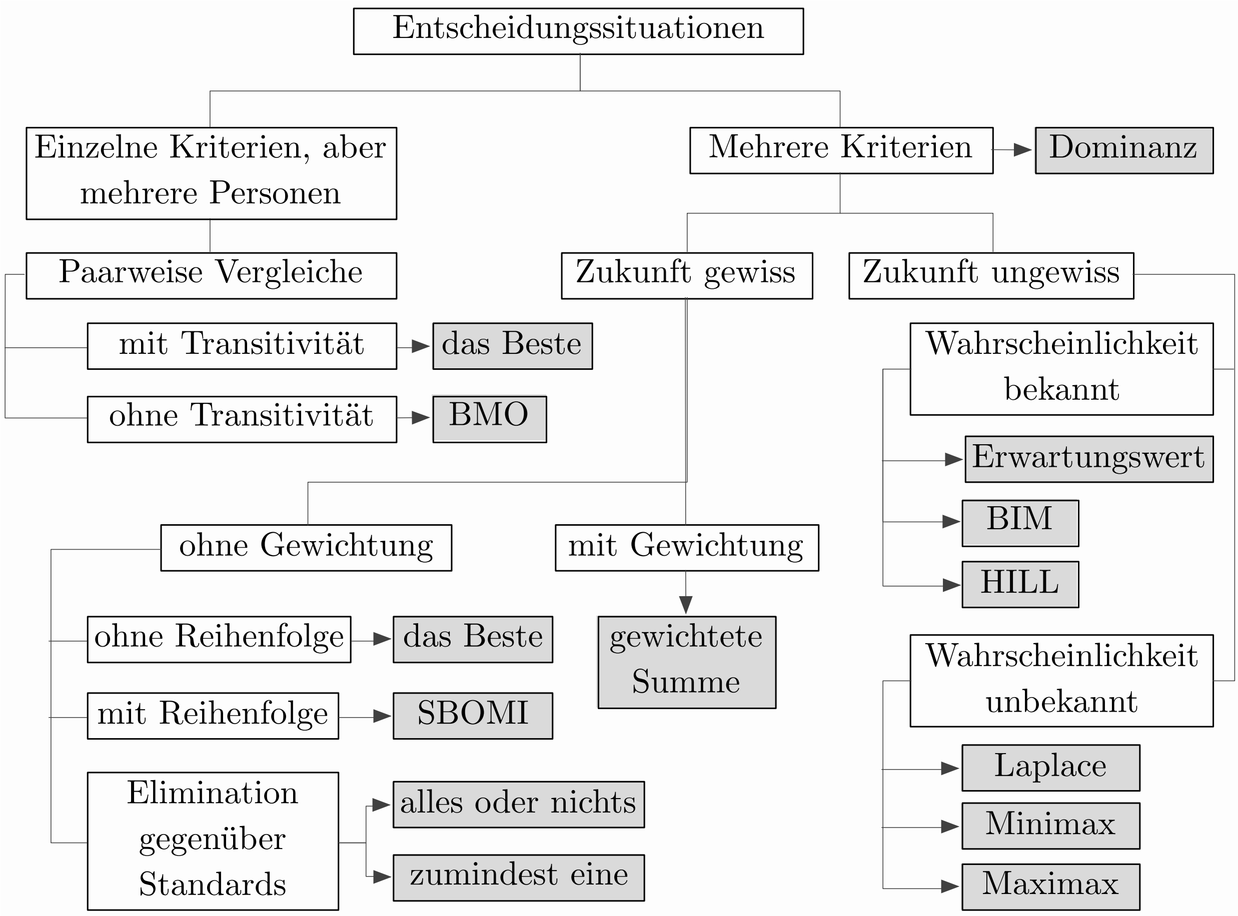



Abbildung 6.7: Übersicht der vorgestellten Beispiele von Entscheidungsprozessen

## 6.9 Kontrollfragen

- Was bedeutet «nachvollziehbar» in Bezug auf Entscheidungsfindung?
- Worin besteht der Unterschied zwischen einer Entscheidungssituation und einem Entscheidungsprozess?
- Sind bewusste Entscheidungen immer besser als unbewusste?
- Können zwei Personen mit der gleichen formellen Methode zu unterschiedlichen Resultaten kommen, wenn sie diese auf das gleiche Problem anwenden?
- Ist es besser, eine Rahmenbedingung zu 75% anstatt zu 60% zu erfüllen?
- Können in einer Zielhierarchie wie in Abb. 6.2 dargestellt, «Eltern»-Ziele gegen «Kinder»-Ziele ausgespielt werden?
- Können Attribute mehr als ein Ziel beeinflussen?
- Welche Attribute werden zur gemeinsamen Masseinheit in einer Kosten-Nutzen-Analyse?
- Wenn jemand behauptet, Spaghetti doppelt so gern zu haben wie Lasagne, bedeutet das, dass diese Person auch bereit wäre, das Doppelte dafür zu bezahlen?

- Drücken Mehrheitsentscheide Ordinal- oder Kardinalpräferenzen aus?
- Welche der beiden Unsicherheiten ist grösser – die der Ursache oder die der Konsequenz?
- Wenn man alle Elementarereignisse in einem Gesamtereignis zusammenfasst, mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dieses Gesamtereignis eintreten?
- Woher kann man Angaben zu Wahrscheinlichkeiten erhalten, abgesehen von Experimenten oder historischen Daten?
- Drückt die Methode des paarweisen Vergleichs kardinale oder ordinale Präferenzen aus?
- Welche Schweizer Abstimmungssituation wird mit paarweisen Vergleichen gelöst?
- Wird bei der BMO-Regel die Wichtigkeit der Kriterien berücksichtigt?
- Können Entscheidungsprozesse nach BMO auch zu einem «Unentschieden» führen?
- Kann SBOMI zu einem «Unentschieden» führen – und wenn ja, wie?
- Ist es möglich, dass für ein einziges Kriterium sowohl Soll- als auch Mussziele definiert sind?
- In Tab. 6.7 (Seite 157): Zu welchem Ergebnis kommt man, wenn anstatt der normierten Indizes die ursprünglichen Werte verwendet würden? Spielt es eine Rolle, ob man die Werte normiert?
- Welcher Entscheidungsprozess ist im Durchschnitt schneller – «Alles oder Nichts» oder «Zumindest eines»?
- Was ist der Durchschnittswert einer normalisierten Zahlenreihe?
- Damit eine Lösungsvariante die anderen dominiert, muss sie in allen Kriterien besser als die anderen sein?
- Welcher Entscheidungsprozess kann angewendet werden, wenn sich eine gewichtete Bewertung errechnen lässt?
- Kann eine Differenzbetrachtung beim Vergleich von drei Varianten ebenfalls angewendet werden – und falls ja, wie?
- Sofern in Abb. 6.6 Z eine Rahmenbedingung darstellt, welche der Varianten kommt in Frage?
- Bezogen auf das Beispiel in Abb. 6.4, welche dieser Aussagen ist ein Beispiel für eine mögliche «Zukunft» – «ein Hochwasser zwischen 200 und 300 $m^3/s$ » oder «ein Hochwasser zwischen 200 und 300 $m^3/s$ und die Brücke hält»?
- Nach Laplace, wie wahrscheinlich ist es, dass am 13.11.2020 die Sonne scheint?
- Welches Szenario ist nach Maximax zu wählen?
- Welches Szenario ist nach Maximin zu wählen?

# 7 Entscheidungsbäume

Entscheidungsbäume sind eine Form von Entscheidungsprozessen, die in vielen unterschiedlichen Ingenieursaufgaben verwendet werden können. Der grösste Vorteil eines Entscheidungsbaums ist die Möglichkeit, die Entscheidung transparent darzustellen. Alle Elemente, die in der Entscheidung verwendet wurden, werden vollständig in einer grafischen Form dargestellt. Zusätzlich sind auch alle berücksichtigten Alternativen zu sehen, und man kann leicht nachvollziehen, weshalb die Entscheidung so ausgefallen ist. Deshalb ist ein Entscheidungsbaum ein nachvollziehbarer Prozess. Was die verschiedenen Kategorien betrifft, muss gesagt werden, dass ein Entscheidungsbaum nur verwendet werden kann, wenn die relative Wichtigkeit der Kriterien und die Bewertung von Attributen in einer gemeinsamen Kardinalskala dargestellt werden kann und wenn alle Wahrscheinlichkeiten der Unsicherheiten bekannt sind. Der Grund dafür ist, dass alle Ergebnisse quer über den Entscheidungsbaum miteinander vergleichbar sein müssen. Am Ende wird der Entscheidungsbaum dazu verwendet, die Erwartungswerte aller potenziellen Alternativen für alle relevanten Zukunftsszenarien zu berechnen. Ein Nachteil des Entscheidungsbaums ist, dass er sehr rasch sehr gross und komplex werden kann – selbst bei relativ kleinen Problemen. Deshalb ist es besonders wichtig, eine übersichtliche grafische Darstellung zu verwenden, wenn Entscheidungsbäume gezeichnet werden.

## 7.1 Grundelemente

In Anlehnung an die Struktur des Beispiels aus dem letzten Kapitel wird nun ein neues Beispiel für eine solche Entscheidungssituation eingeführt: Eine Umfahrungsstrasse muss gebaut werden, wobei drei potenzielle Routen möglich sind. Ein neues Gesetz könnte in Kraft treten, das den Preis von zwei dieser Routen erheblich beeinflusst. Im Gegensatz zur vorherigen Annahme kann sich die Kommission diesmal auf Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Gesetze einigen. Die Frage ist nun, welche der drei Varianten die niedrigsten *erwarteten* Kosten liefert. Das Problem ist einfach genug, um in einer Matrixform wie in Tab. 7.1 dargestellt zu werden.

| | | Kosten | | | wahrscheinlichkeitsgewichtete Kosten | | | Erwartungswert |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Wahrscheinlichkeit | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | |
| | Szenario | F1 | F2 | F3 | F1 | F2 | F3 | |
| Route | nah | 2.0 | 1.5 | 1 | 0.5·2.0=1 | 0.2·1.5=0.3 | 0.3·1=0.3 | 1+0.3+0.3=1.6 |
| | mittel | 1.9 | 1.5 | 1.1 | 0.5·1.9=0.95 | 0.2·1.5= 0.3 | 0.3·1.1=0.33 | 0.95+0.3+0.33=1.58 |
| | weit | 1.7 | 1.6 | 1.5 | 0.5· 1.7=0.85 | 0.2·1.6=0.32 | 0.3·1.5=0.45 | 0.85+0.32+0.45=1.62 |

Tabelle 7.1: Szenarien:
F1: Initiative wird angenommen
F2: Gegenvorschlag wird angenommen
F3: kein Vorschlag wird angenommen
Ergebnis: Die Route «mittel» hat den niedrigsten Erwartungswert hinsichtlich der Kosten

Ein Entscheidungsbaum besteht aus fünf Komponenten, die im Folgenden erläutert werden:

**Kosten bzw. Nutzen** sind Werte, die für den Entscheidungsträger in einem Entscheidungsprozess interessant sind. Damit ein Erwartungswert berechnet werden kann, müssen alle Werte dieselbe Masseinheit haben. Dies erfordert manchmal die Umwandlung von Nominalwerten in diskontierte oder risikoangepasste Äquivalente. Oft sind die einzelnen Auswahlmöglichkeiten mit Zusatzkosten oder -nutzen verbunden. Diese können als Nettonutzen miteinander verrechnet werden.

**Wahrscheinlichkeiten** tauchen nur an Möglichkeitsknoten auf und repräsentieren die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Möglichkeit eintritt. Wahrscheinlichkeiten interagieren multiplikativ mit dem Ergebnis und formen einen wahrscheinlichkeitsgewichteten Wert.

Da Wahrscheinlichkeiten immer zwischen 0 und 1 liegen, ist der wahrscheinlichkeitsgewichtete Wert immer geringer oder gleich dem Originalwert.

**Entscheidungsknoten** sind Verzweigungen eines Problems, bei denen *der Entscheidungsträger das Ergebnis bestimmt.* In diesem Beispiel muss der Entscheidungsträger zwischen den Varianten «nah», «mittel» und «weit» auswählen. Entscheidungsknoten sind durch einen quadratischen Knoten gekennzeichnet (siehe Abb. 7.1). Jede mögliche Entscheidung ist durch eine von diesem Quadrat ausgehende Linie dargestellt. Bei der Berechnung eines Entscheidungsknotens werden alle Werte, die von nachgeordneten Zweigen kommen, mit den Kosten, die bei der Wahl des jeweiligen Zweigs entstehen, addiert. Dies könnten zum Beispiel Kosten (oder Nutzen) sein, die direkt mit der Wahl zusammenhängen, wie z.B. Kosten für eine Studie, die bei einer bestimmten Wahl gemacht werden muss. Diese Kosten werden in dem Feld «Kosten der Auswahl» erfasst.

**Möglichkeitsknoten** sind Verzweigungen eines Problems, bei denen *der Entscheidungsträger den Ausgang nicht beeinflussen kann.* Weshalb der Ausgang nicht beeinflussbar ist, macht für diese Darstellung keinen Unterschied. Es zählt nur, dass das Ergebnis, welches sich ergibt, unsicher ist. Solche Knoten werden durch einen Kreis dargestellt. Jede mögliche Entscheidung ist durch eine von diesem Kreis ausgehende Linie gekennzeichnet. Ein Möglichkeitsknoten wird in zwei Schritten berechnet: Zuerst werden die wahrscheinlichkeitsgewichteten Werte für jedes mögliche Ergebnis gebildet. Dann werden diese addiert und vor dem Möglichkeitsknoten in das Feld «Erwartungswert» eingetragen.

**Blätter** signalisieren das Ende eines Pfades, sie werden durch ein nach links gekipptes gleichseitiges Dreieck dargestellt. Sie können auch verwendet werden, um auszudrücken, dass ein Ast gekürzt wurde.

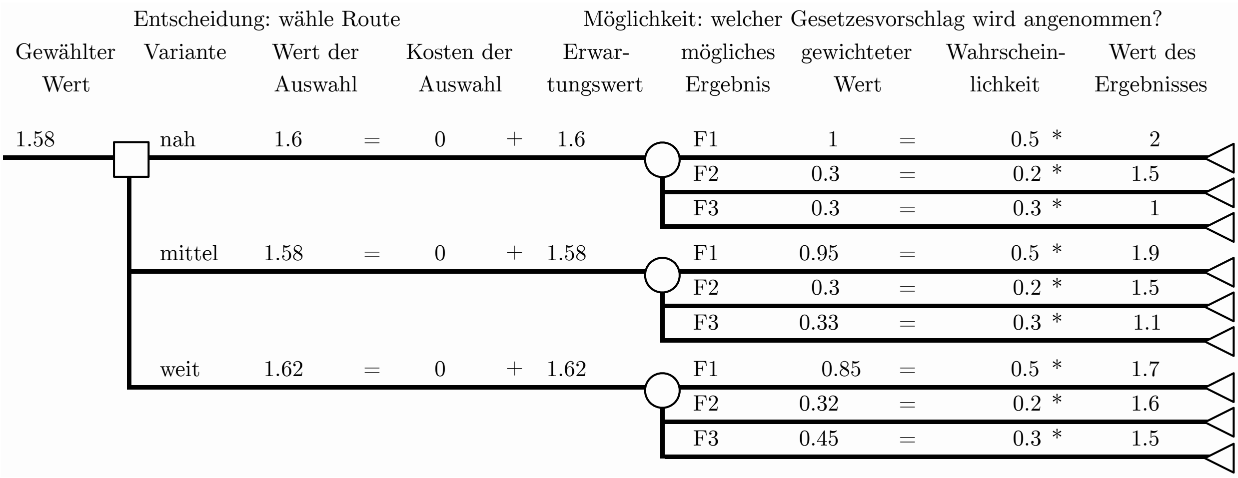



Abbildung 7.1: Entscheidungsbaum Umfahrungsstrasse

## 7.2 Struktur eines Entscheidungsbaums und Vorbereitungen fürs Zeichnen

Die Struktur eines Entscheidungsbaums kann auf zwei Ebenen betrachtet werden. Auf der generellen Ebene gibt es zwei Knotentypen. Diese können durch die Form und die unterschiedlichen Felder unterschieden werden. Der zeitliche Verlauf der Entscheidungssituation ist von links nach rechts abgebildet. Man kann sich dies auch als ***Züge eines Spiels*** vorstellen. Sind wir am Zug (Entscheidungsknoten) oder ist die Natur/der Zufall am Zug (Möglichkeitsknoten)? Wenn wir am Zug sind, müssen wir entscheiden, was passiert, andernfalls müssen die Erwartungswerte entsprechend der Wahrscheinlichkeiten ausgewertet werden.

Auf der zweiten, detaillierteren Ebene, hat jeder «Spielzug» eine bestimmte Anzahl an potenziellen Möglichkeiten oder Varianten. Diese werden durch Linien dargestellt, die aus dem entsprechenden Knoten herausführen. Oft - aber nicht immer - wiederholen sich Blöcke in Strukturen (aber nicht in den Werten). Die sich wiederholende Blockstruktur kann bei den Möglichkeitsknoten in Abb. 7.1 beobachtet werden.

Der folgende Ablauf schlägt eine übersichtliche Art und Weise vor, mit der ein Entscheidungsbaum gezeichnet werden kann. Er funktioniert immer und hilft dabei, nichts zu übersehen. Die Vorgehensweise ist wie folgt:

1. Das Problem analysieren und die Anzahl der «Spielzüge» feststellen – dies wird, wie in den nachfolgenden Schritten beschrieben, mittels einer Tabelle dargestellt (vgl. Tabellen auf Seite 170).
2. Notieren, welcher Art der Spielzug ist (Entscheidung oder Möglichkeit).
3. Notieren, wie viele Varianten oder Möglichkeiten bei jedem Spielzug existieren. Manchmal hängt diese Anzahl vom vorhergehenden Knoten ab. Fürs Erste wird aber die maximale Zahl, die in diesem Spielzug auftreten kann, verwendet.
4. Die Anzahl der benötigten Spalten berechnen: $(4 \cdot \textit{Anzahl der Spielzüge}) + 1$. In diesem Beispiel wären das 9.

5. Die maximale Anzahl der Reihen ist das Produkt der Varianten oder Möglichkeiten bei jedem Spielzug. In diesem Beispiel sind das $3 \cdot 3 = 9$ (+2 für die Überschriften).

| Spielzüge | Entsch. / Mögl. | Mögliche Ergebnisse |
|---|---|---|
| 1) Route? | E | 3 |
| 2) Gesetzesvorschlag? | M | 3 |
| Spalten | | $(4 \cdot 2) + 1 = 9$ |
| Reihen | | $3 \cdot 3 = 9$ |

Tabelle 7.2: Analyse der Entscheidungssituation

6. Eine Tabelle erstellen – z.B. in Excel oder von Hand – mit der berechneten Anzahl an Reihen und Spalten und sie in die Spielzüge aufteilen (1. Überschriftszeile). Die Felder der jeweiligen Spielzüge korrekt beschriften (2. Überschriftszeile).
7. Blöcke zeichnen, die jeden Knoten repräsentieren. Begonnen wird dabei in der ersten Reihe und der letzten Spalte. In anderen Worten: der Baum wird von hinten aufgebaut. Dies stellt sicher, dass immer genügend Platz für alle Zweige da ist. Wenn die erste Reihe fertig ist, sollte man in der Lage sein, den Erwartungswert von genau einer Entscheidungssequenz zu berechnen.
8. Fortfahren, bis der gesamte Baum aufgebaut ist.

### 7.2.1 Handhabung von «toten Zweigen»

Bei manchen Problemen führen bestimmte Entscheidungen oder Möglichkeiten zu einer verringerten Anzahl darauffolgender Ergebnisse. Diese Zweige werden «tote Zweige» genannt und können vom Entscheidungsbaum entfernt (gekürzt) werden. Wenn in diesem Beispiel an den Entscheidungsbaum die Entscheidung angefügt wird, ob die Umfahrung überhaupt gebaut werden soll, entsteht eine Situation, die «tote Zweige» enthält, welche gekürzt werden können. Es ist klar, dass es egal ist, wie der Volksentscheid ausfällt, wenn gar nicht gebaut wird. Deshalb kann dieser Teil gekürzt werden. Trotzdem können dabei Kosten entstehen. Nehmen wir an, dass ein Consultingbüro herausgefunden hat, dass die Umfahrung der Stadt den Tourismus erhöht (weil es dann in der Stadt ruhiger ist) und der Mehrwert etwa 1.7 Mio. CHF beträgt. Diese Kosten können der Entscheidung «kein Bau» zugeordnet werden, da diese Einnahmen in diesem Fall fehlen würden.

| Spielzüge | Entsch. / Mögl. | Mögliche Ergebnisse |
|---|---|---|
| 1) Umfahrung bauen? | E | 2 |
| 2) Route? | E | 3 |
| 3) Gesetzesvorschlag? | M | 3 |
| Spalten | | 13 |
| Reihen | | 18 |

Tabelle 7.3: Analyse der Entscheidungssituation, komplett

Die Analyse des Problems in Tab. 7.3 zeigt, dass maximal 18 Reihen benötigt werden. Wenn der Baum wie vorher gezeichnet wird, dann sieht er wie in Abb. 7.2 aus. Es ist aber sofort klar, dass acht der hinzugefügten Reihen nicht benötigt werden, da nach der Entscheidung «kein Bau» nichts mehr folgt. Einzig die Kosten für die Entscheidung bleiben noch. Alle Zweige, die aus dem

Knotenast «kein Bau» entspringen, sind «tot» und können daher gekürzt werden. Der gekürzte Entscheidungsbaum ist in Abb. 7.3 dargestellt.

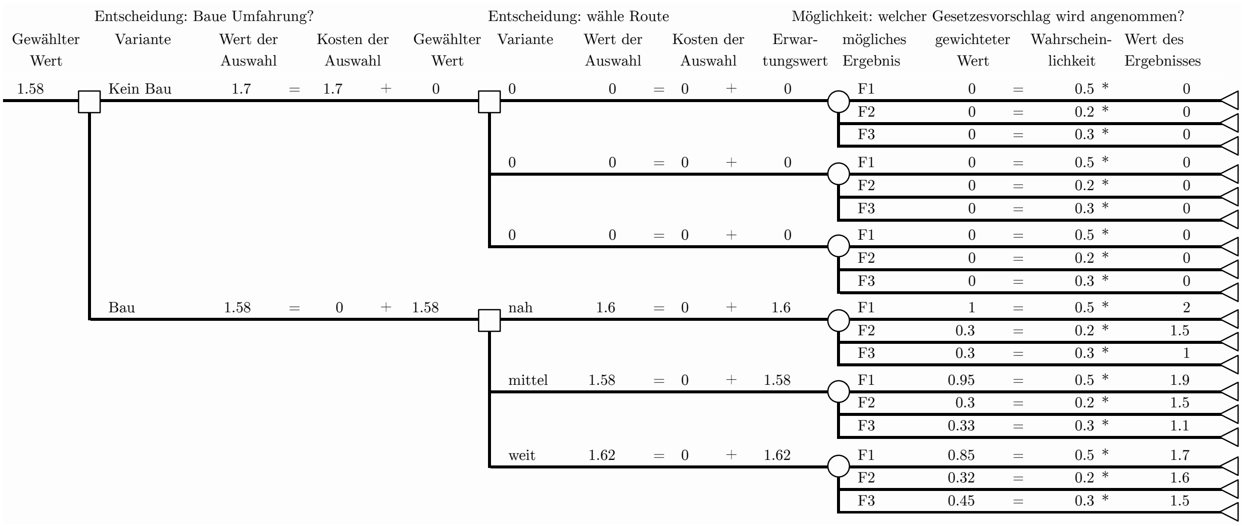



Abbildung 7.2: Ungekürzter Entscheidungsbaum

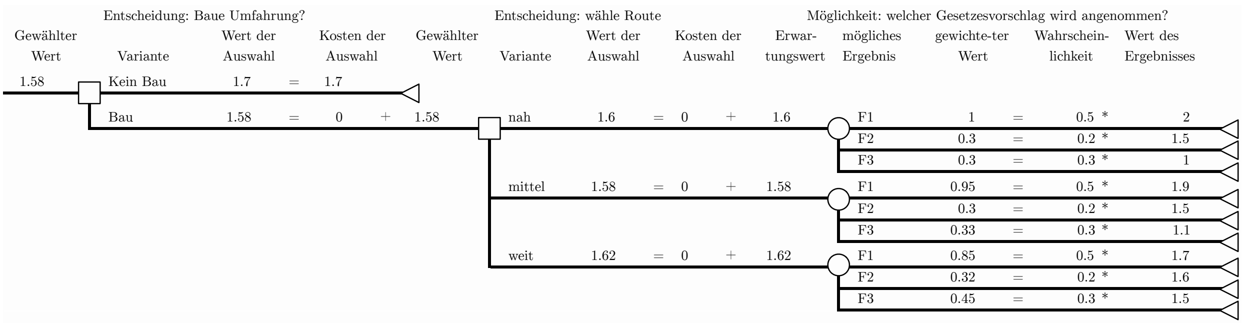



Abbildung 7.3: Gekürzter Entscheidungsbaum

## 7.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es gibt Fälle, in denen zwei Möglichkeitsknoten aufeinander folgen. Dies kommt oft vor, wenn Experimente gemacht werden, um die Unsicherheit eines Risikos zu reduzieren. Zwei Möglichkeitsknoten folgen aus dem Grund aufeinander, dass das Experiment nicht immer das tatsächliche Ergebnis vorhersagen kann. Zum Beispiel soll ein Gebäude in einer Gegend gebaut werden, in der der Untergrund nicht immer sehr tragfähig ist. Deshalb werden Probebohrungen gemacht, um diese Unsicherheit zu reduzieren. Es kann aber auch vorkommen, dass der Bohrkern ein falsches Ergebnis liefert.

Für dieses Beispiel wird angenommen, dass es nur zwei Untergrundarten gibt: guten und schlechten Untergrund. Aus anderen Bauprojekten ist bekannt, dass es in etwa 20% der Gegend schlechten Untergrund gibt. Ausserdem kann eine Probebohrung einen guten oder schlechten Untergrund mit den in Tab. 7.4 gezeigten Wahrscheinlichkeiten vorhersagen.

| Wahrscheinlichkeiten | Experiment zeigt «gut» | Experiment zeigt «schlecht» |
|---|---|---|
| Untergrund ist gut | 0.9 | 0.1 |
| Untergrund ist schlecht | 0.2 | 0.8 |

Tabelle 7.4: Wahrscheinlichkeiten, dass das Experiment den Untergrund richtig vorhersagt

Mit diesen Werten wird nun folgende Situation angenommen: Es soll entschieden werden, ob Probebohrungen gemacht werden sollen, um die Dicke der Fundamentplatte zu bestimmen, oder ob die Fundamentplatte ohne Bodentest direkt in der dicken Ausführung gebaut werden soll. Die Probebohrungen kosten zusätzliche 0.5 Mio. CHF. Die Kosten für die verschiedenen Bauweisen sind in Tab. 7.5 aufgelistet.

| Kosten in Mio. CHF | Untergrund schwach | Untergrund stark |
|---|---|---|
| dünne Fundamentplatte | 0.50 | 0.10 |
| dicke Fundamentplatte | 0.16 | 0.15 |

Tabelle 7.5: Kosten für verschiedene Untergrundstärken und Fundamentplatten

Zuerst wird die Entscheidungssituation analysiert, wie in Tab. 7.6 gezeigt.

| Spielzüge | Entsch. / Mögl. | Mögliche Ergebnisse |
|---|---|---|
| 1) Test: Ja / Nein? | E | 2 |
| 2) Testergebnis | M | 2 |
| 3) Tatsächlicher Untergrund | M | 2 |
| Spalten | | 13 |
| Reihen | | 8 |

Tabelle 7.6: Analyse der Entscheidungssituation

Dann wird ein Entscheidungsbaum erstellt, wie in Abb. 7.4 zu sehen.

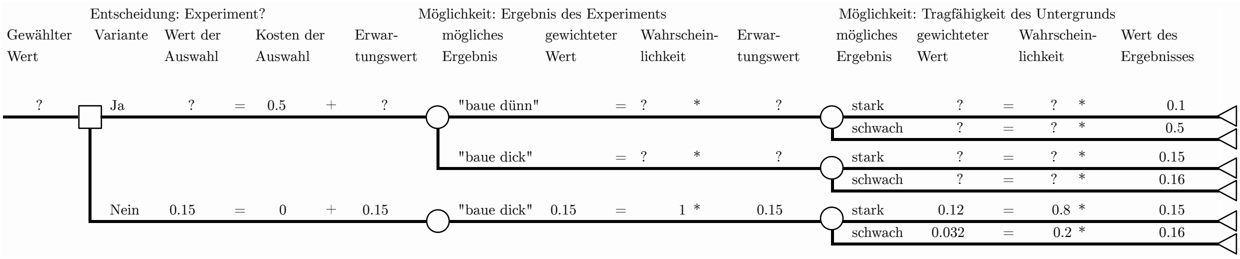



Abbildung 7.4: Entscheidungsbaum für die Bodenuntersuchung

Das Problem ist, dass noch nicht bekannt ist, welche Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste des Entscheidungsbaums einzutragen sind. Hier muss man besonders gut aufpassen!

Bisher herrscht Kenntnis über folgende Punkte:

1. Die Wahrscheinlichkeit, einen schlechten Untergrund anzutreffen, liegt bei 20% (respektive 80% für einen guten Untergrund).
2. Wenn ein Test auf gutem Untergrund durchgeführt wird, dann gibt es eine 10%-ige Wahrscheinlichkeit, dass der Test einen schwachen Untergrund voraussagt. Ähnliches gilt, wenn der Test auf schlechtem Untergrund gemacht wird: Dann sagt der Test mit 20%-iger Wahrscheinlichkeit (fälschlicherweise) einen guten Untergrund voraus.

Was noch bestimmt werden muss:

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $p$, dass der Test einen guten Untergrund voraussagt und deshalb dünn gebaut werden sollte (oder eben mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ dick)?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Untergrund dann auch tatsächlich stark oder schwach ist?

**Es ist sehr wichtig, sicherzugehen, dass die verwendeten Wahrscheinlichkeiten genau die sind, die benötigt werden!** Wie geht man nun vor? Man benutzt die Zusammenhänge zwischen Randwahrscheinlichkeit, Verbundwahrscheinlichkeit und bedingter Wahrscheinlichkeit.

Sobald ein Problem mehr als eine Unsicherheit hat, die das Ergebnis beeinflusst, spricht man von einer ***Verbundwahrscheinlichkeit*** (weil die verbundenen Wahrscheinlichkeiten das Ergebnis beeinflussen). Im Folgenden soll als Beispiel der Kauf einer Solar-Warmwasserheizung dienen. Dafür wird Kenntnis darüber benötigt, wie viele kalte, aber sonnige Tage es gibt. In einer Wetterstatistik finden sich die folgenden Werte: «60% der Tage sind sonnig, 40% nicht» sowie «20% der Tage sind sonnig und kalt, 30% der Tage sind bewölkt und warm». Die bisher vorhandenen Informationen sind in Tab. 7.7 geordnet und strukturiert aufgeführt.

| | | Temperatur | | Randwahrscheinlichkeit Himmel |
|---|---|---|---|---|
| | | kalt | warm | |
| Himmel | sonnig | 20% | $\alpha \cdot 50\%$ | 60% |
| | bewölkt | $(1-\alpha) \cdot 50\%$ | 30% | 40% |
| Randwahrscheinlichkeit Temperatur | | ? | ? | |

Tabelle 7.7: Verbund- und Randwahrscheinlichkeiten

Es ist leicht, die fehlenden Zahlen auszurechnen. Wenn es 20% der Zeit sonnig und kalt ist, dann muss es 40% der Zeit sonnig und warm sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Unsicherheiten in einem Verbundversuch einen Wert annimmt, heisst ***Randwahrscheinlichkeit***. In diesem Beispiel ist die Randwahrscheinlichkeit, dass es sonnig ist, 60%. Um das Beispiel abzuschliessen: $\alpha = 0.8$ und die Verbundwahrscheinlichkeit für «kalt» und «bewölkt» liegt bei 10%. Die Randwahrscheinlichkeit für einen kalten Tag liegt somit bei 30%, die für einen warmen Tag bei 70%.

Wenn nun noch die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden soll, mit der ein sonniger Tag auch warm ist, wird die ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** benötigt. Diese ist es auch, die in Entscheidungsbäumen verwendet wird, wenn mehrere Möglichkeitsknoten aufeinander folgen. Zuerst einmal ist die Frage, ob es sonnig ist. Dann geht es darum, zu wissen, wie oft es – unter der Voraussetzung, dass es sonnig ist – kalt ist. Die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit aus Randwahrscheinlichkeit und Verbundwahrscheinlichkeit ist einfach: Man dividiert die Verbundwahrscheinlichkeit durch die Randwahrscheinlichkeit. Tab. 7.8 zeigt die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das Solarbeispiel.

| | | Temperatur | | Randw'keit Sonne | Bedingte W'keit: wenn Himmel ..., wie oft ... | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | kalt | warm | | kalt | warm |
| Himmel | sonnig | 20% | 40% | 60% | 33% | 66% |
| | bewölkt | 10% | 30% | 40% | 25% | 75% |
| Randwahrscheinlichkeit Temperatur | | 30% | 70% | | | |
| Bedingte W'keit: wenn Temp. .., wie oft ... | sonnig | 67% | 55% | | | |
| | bewölkt | 33% | 45% | | | |

Tabelle 7.8: Bedingte Wahrscheinlichkeiten Solarbeispiel

Nun kann das gewonnene Wissen auf das ursprüngliche Beispiel mit dem Untergrund angewendet werden, um die benötigten Wahrscheinlichkeiten zu erhalten. Tab. 7.9 zeigt die Berechnung, Abb. 7.5 zeigt, welche Wahrscheinlichkeiten wo in den Entscheidungsbaum eingetragen werden.

| | | Experiment sagt | | Randw'keit: Boden | Bedingte W'keit: wenn Boden bekannt, Experiment sagt ... | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | stark | schwach | | stark | schwach |
| Boden ist wirklich | stark | 72% | 8% | 80% | 90% | 10% |
| | schwach | 4% | 16% | 20% | 20% | 80% |
| Randw'keit: Experiment | | 76% | 24% | | | |
| Bedingte W'keit: wenn Experiment gemacht, Boden ist tatsächlich ... | stark | 95% | 33% | | | |
| | schwach | 5% | 67% | | | |

Tabelle 7.9: Bedingte Wahrscheinlichkeiten Untergrundbeispiel

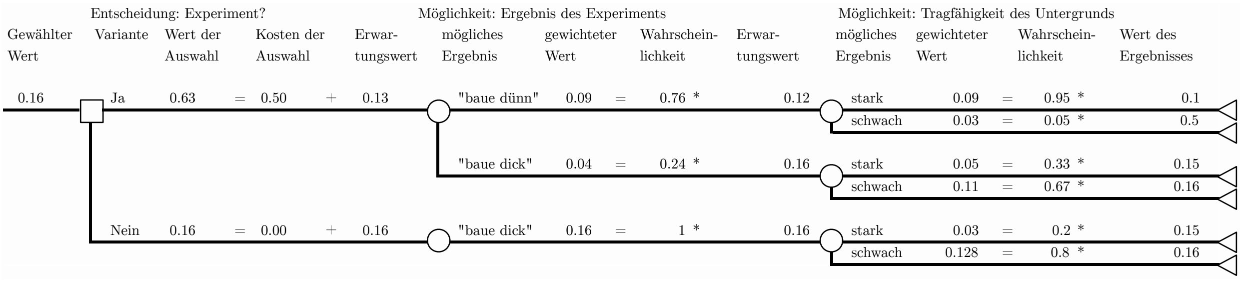



Abbildung 7.5: Entscheidungsbaum Untergrundbeispiel

Es ist zu beachten, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten nach den Randwahrscheinlichkeiten auftreten. Das ist logisch, da der einzige Weg, zum dritten Spielzug zu kommen, über ein Ergebnis des zweiten Spielzugs führt.

### 7.3.1 Satz von Bayes

Die Beziehung zwischen Rand-, Verbund- und bedingter Wahrscheinlichkeit kann als eine Ausprägung des Satzes von Bayes erkannt werden. Wenn $P\{x,y\}$ die Wahrscheinlichkeit der verbundenen Zufallsvariablen x und y ist, dann kann die bedingte Wahrscheinlichkeit als $P\{x \mid y\}$ beschrieben werden und die Randwahrscheinlichkeiten als $P\{x\}$ bzw. $P\{y\}$. Damit lautet der Satz von Bayes:

$$P\{x \mid y\} = \frac{P\{x,y\}}{P\{y\}}$$

In anderen Worten: Wenn man die Verbundwahrscheinlichkeiten durch die Randwahrscheinlichkeiten dividiert, erhält man die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Bei Experimenten, wie sie für Entscheidungsbäume üblich sind, herrscht Kenntnis über die Genauigkeit, mit der der Test die tatsächlichen Verhältnisse vorhersagt. Es ist also eine bedingte Wahrscheinlichkeit bekannt, allerdings ist das nicht diejenige, die für den Entscheidungsbaum benötigt wird: $P\{y \mid x\}$ ist bekannt, gesucht ist allerdings $P\{x \mid y\}$. Gleichermassen ist üblicherweise die Verteilung von $P\{x\}$ bekannt, von Interesse ist jedoch $P\{y\}$. Genau dies ist im Untergrundbeispiel der Fall. Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit der tatsächlichen Untergrundverhältnisse unter der Bedingung, dass das Testergebnis bekannt ist. Es herrscht allerdings nur Kenntnis über die Wahrscheinlichkeit des Testergebnisses unter der Bedingung, dass die Untergrundverhältnisse bekannt sind. Ausserdem wird die Randverteilung des Testergebnisses benötigt, bekannt ist aber nur die Randverteilung der Untergrundverhältnisse. Deshalb ist es immer wichtig zu wissen, ***welche Wahrscheinlichkeiten man vor sich hat und welche man benötigt.***

## 7.4 Herleitung des Informationswerts

Eine nützliche Anwendung dieser Arbeitshilfe ist die Herleitung des Informationswerts. Der Informationswert bezeichnet den Wert, der der Kenntnis einer bestimmten Information zugemessen wird. Im Zusammenhang mit einem Entscheidungsbaum ist der Informationswert gleichwertig mit der Frage nach der maximalen Summe der Experimentkosten, bei denen es dem Entscheidungsträger gleichgültig ist, ob er das Experiment durchführt oder nicht. Denn: Warum sollte jemand mehr für eine Information bezahlen, als diese maximal an Wertschöpfung generieren würde, wenn man die Information hätte?

Um nochmal auf das Beispiel mit dem Untergrund zurückzukommen: Es wird deutlich, dass die optimale Entscheidung nicht in der Durchführung des Experiments, sondern im Bau einer dickeren Fundamentplatte besteht. Wie kann nun der Entscheidungsbaum verwendet werden, um den Wert der perfekten Information über die Baugrundtragfähigkeit herauszufinden?

In Abb. 7.5 wird gezeigt, wie dies gemacht werden kann. Perfekte Information heisst hierbei, dass das Experiment immer den richtigen Wert ergibt. Deswegen wird die Randverteilung der Experimentdaten dieselbe wie die Randverteilung der Daten der Untergrundverhältnisse sein. Ab der zweiten Stufe des Astes, der im Entscheidungsbaum das Experiment repräsentiert, werden diese Wahrscheinlichkeiten verwendet. Auf der dritten Stufe, welche die Konsequenz des Baus gemäss dem Ergebnis des Experiments darstellt, geben die Wahrscheinlichkeiten den Fakt wieder, dass das Experiment immer richtig ist. Wird die Berechnung wie gewöhnlich ausgeführt, so resultiert daraus der Erwartungswert unter der Annahme der perfekten Prognose. Im abschliessenden Schritt wird der Erwartungswert mit der Verwendung des Experiments von dem Erwartungswert, der sich ohne das Experiment ergibt, abgezogen. Der berechnete Wert stellt den Maximalwert dar, der in dieser Entscheidungssituation für das Experiment unter Annahme der perfekten Information bezahlt werden sollte. In dem hier untersuchten Fall beträgt dieser Wert 0.05 Mio. CHF.

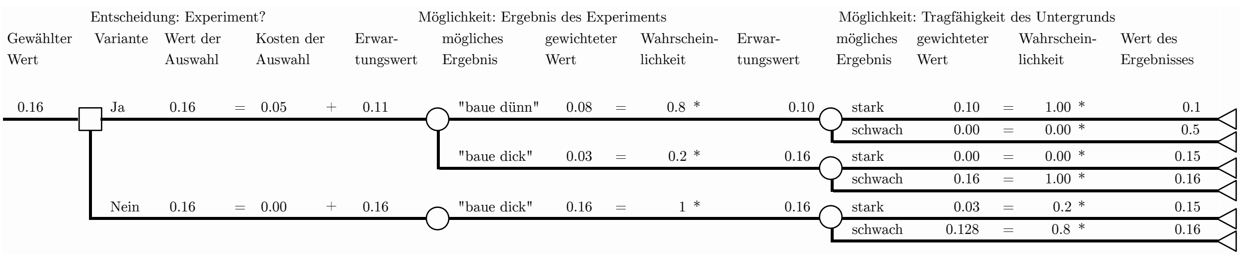



Abbildung 7.6: Herleitung des Informationswerts

## 7.5 Zusammenfassung

Entscheidungsbäume werden in Entscheidungsprozessen verwendet, bei denen jene Variante ausgewählt wird, die den Erwartungswert des zu optimierenden Parameters maximiert bzw. minimiert. Normalerweise ist ein Entscheidungsprozess fortlaufend, sodass entweder unsichere Ereignisse passieren oder Entscheidungen gefällt werden. Diese Ereignisse stellen Knoten im Entscheidungsbaum dar, bei denen eine Verzweigung stattfindet. Es sind zwei Typen von Knoten identifizierbar, die als Spielzüge im Spiel zwischen dem Entscheidungsträger und der Natur angesehen werden können. Ist der Entscheidungsträger am Zug, wird der Entscheidungsknoten berechnet, indem der von diesem Knoten weiterführende Ast mit dem maximalen oder minimalen Wert ausgewählt wird. Ist die Natur an der Reihe, so wird der Erwartungswert der auf diesen Möglichkeitsknoten folgenden Äste berechnet.

Entscheidungsbäume werden auch bereits in einfacheren Entscheidungssituationen gross und komplex, weswegen ein systematisches Vorgehen für das Aufzeichnen eines Entscheidungsbaums empfohlen wird. Die maximale Grösse des Baums wird aus der Anzahl der Spielzüge des Spiels berechnet. Eine Kürzung ist möglich, wenn gewisse Entscheidungen oder Unsicherheiten nicht für alle Entscheidungspfade relevant sind. Diese gekürzten Äste werden durch Blätter gekennzeichnet.

Generell wird die Darstellung von «hinten nach vorne» erstellt, um sicherzugehen, dass genügend Platz für alle benötigten Äste vorhanden ist.

Bei jedem Knoten, bei dem die Natur eine Rolle spielt, werden Wahrscheinlichkeiten benötigt. Folgen mehrere Knoten aufeinander, dann ist das Endergebnis eine Funktion einer gemeinsam verteilten Zufallsvariable. Dabei muss aufgepasst werden, dass die richtigen Wahrscheinlichkeiten in den Entscheidungsbaum eingetragen werden. Normalerweise wird für die erste Unsicherheit eine Randwahrscheinlichkeit und für die zweite Unsicherheit eine bedingte Wahrscheinlichkeit benötigt, da letztere auf erstere sequenziell folgt. Typische Beispiele für einen solchen Anwendungsfall in den Ingenieurwissenschaften sind Experimente.

Der Satz von Bayes definiert die Beziehung zwischen Verbund-, Rand- und bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Kontext einer gemeinsam verteilten Zufallsvariable. Ebenso kann eine Tabelle verwendet werden, um diese Beziehungen zu zeigen oder abzuleiten. Durch Vergleichen der Erwartungswerte in einem Entscheidungsbaum, bei dem ein Ast ein Experiment mit der perfekten Prognose einer Unsicherheit beinhaltet und ein anderer Ast kein Experiment aufweist, kann der Wert der perfekten Information abgeleitet werden. Dieser Wert entspricht dem Maximum, welches man bereit sein sollte für dieses Experiment an dem betreffenden Knoten zu bezahlen.

Damit ein Entscheidungsbaum richtige Resultate liefert, müssen alle Werte in denselben Masseinheiten angegeben sein. Normalerweise werden Geldeinheiten für die Ergebnisse verwendet, die durch den Entscheidungsträger bewertet werden. Das nächste Kapitel widmet sich daher der Berechnung von vergleichbaren Werten, falls die Geldmittel zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallen.

## 7.6 Kontrollfragen

- Zu welchem Ausgang führt ein Entscheidungsbaum? Er selektioniert die Variante mit ...
- Welche zwei Typen von «Entscheidungen» / Verzweigungen werden innerhalb eines Entscheidungsbaums dargestellt?
- Welche Anzahl wächst bei der tabellarischen Analyse der Entscheidungssituation schneller an, die der Spalten oder die der Reihen?
- Was hat ein Ingenieur bei einem Möglichkeitsknoten zu entscheiden?
- Wie kann man wissen, ob ein Ast im Entscheidungsbaum gekürzt werden kann?
- Wenn man an einem Möglichkeitsknoten die Wahrscheinlichkeiten über alle Möglichkeiten zusammenzählt – was bekommt man dann?
- Wenn man die Verbundwahrscheinlichkeiten, bei denen ein bestimmtes Ausgangsmerkmal zutrifft, summiert – was kann man über diese Summe sagen?
- Betrachtet man einen Entscheidungsbaum von links nach rechts, was kommt zuerst: Rand-, bedingte oder Verbundwahrscheinlichkeiten?
- Wenn sämtliche Möglichkeitsknoten immer genau eine Unsicherheit darstellen, wo werden dann die Verbundwahrscheinlichkeiten im Entscheidungsbaum verwendet?
- Was ist beim Satz von Bayes grösser – $P\{x, y\}$ oder $P\{x \mid y\}$? Beweise!
- Wenn man von «perfekter Information» ausgeht, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann mit Hilfe eines Experiments der tatsächliche Zustand erkannt werden?

# 8 Wirtschaftlichkeitsrechnung

## 8.1 Diskontierung

### 8.1.1 Einleitung

Manche Entscheidungsprozesse benötigen eine gemeinsame Masseinheit für alle Attribute. Dies gilt umso mehr für Entscheidungsbäume, weil diese eine Summenvariable für alle möglichen Zukunftsszenarien berechnen. Üblicherweise wird diese Summenvariable in Geldeinheiten ausgedrückt – entweder Nutzen oder Kosten. Dadurch erhofft man sich, dass die Bedingung für eine gemeinsame Masseinheit erfüllt wird. Aber stimmt das?

Besondere Bedeutung haben Entscheidungssituationen, die sich über einen längeren Zeitraum erstrecken – z.B. die Planung von Erhaltungsmassnahmen an einer Brücke. Innerhalb der Lebensdauer der Brücke wird sie mehrfach instand gesetzt, bevor sie abgerissen und neugebaut wird. Der zuständige Entscheidungsträger wird wahrscheinlich irgendwann vor der Frage stehen, ob es besser ist, die Brücke neu zu bauen oder noch eine Instandsetzung zu machen, damit die Brücke weitere 10 Jahre hält. Für das folgende Beispiel wird angenommen, dass der Nettonutzen (= Nutzen minus Kosten) über 10 Jahre 1 Mio. CHF beträgt. Des Weiteren wird der Nettonutzen über die gesamte Lebenszeit (abzüglich der Kosten für den Abriss) auf 15 Mio. CHF angesetzt. Darüber hinaus gibt es noch einen «werterhaltenden Anstrich», der der erneuerten Brücke eine zusätzliche Lebensdauer von 10 Jahren mit einem Nettonutzen von 1 Mio. CHF bringt. Der Entscheidungsbaum ist in Abb. 8.1 dargestellt.

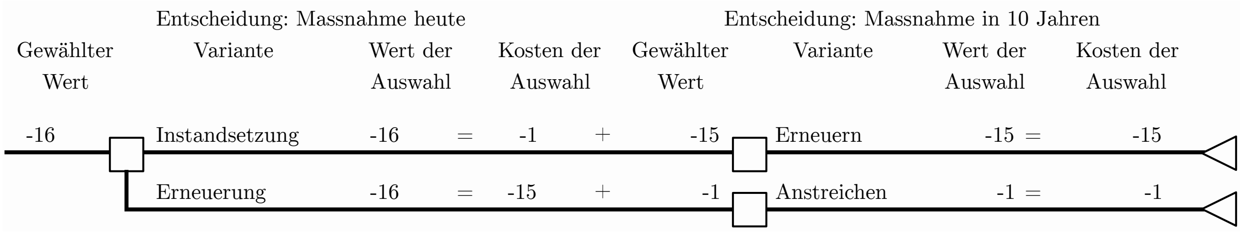



Abbildung 8.1: Entscheidungsbaum mit Nominalwerten

Im nominellen Wert – d.h. vor der Anpassung an die Effekte der Zeit – haben beide Äste denselben Nettonutzen. Wenn jedoch angenommen wird, dass der Entscheidungsträger die Differenz der beiden Strategien während der 10 Jahre in Staatsanleihen investieren könnte, macht das dann einen Unterschied? Ja, das sollte es! Daher wird in diesem Kapitel gezeigt, wie der Gegenwartswert für nominelle Werte zu berechnen ist, die zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten. Darüber hinaus werden Formeln eingeführt, die mehrere regelmässige Zahlungen einfach zusammenfassen.

Abb. 8.2 zeigt denselben Entscheidungsbaum wie oben, diesmal aber mit dem Gegenwartswert der einzelnen Nominalbeträge. Es ist wichtig zu wissen, dass die Gegenwartswerte eines zukünftigen Werts betragsmässig kleiner sind.

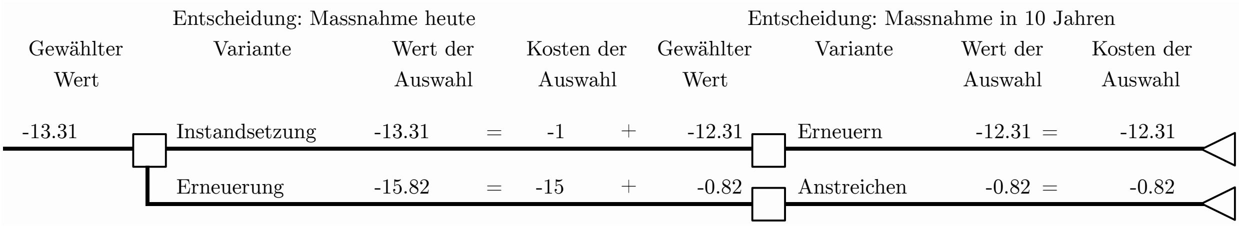



Abbildung 8.2: Entscheidungsbaum mit Gegenwartswerten

## 8.1.2 Grafische Darstellung von Werten über einen Zeitraum: Cash-Flow-Diagramm

Der erste Schritt in Richtung Berechnung des Gegenwartswerts einer Variante, die mehrere Zahlungen über einen Zeitraum einschliesst, ist das Zeichnen eines Cash-Flow-Diagramms. Dabei ist es nicht wichtig, ob die darzustellenden Werte in Wirklichkeit Geld sind oder ob es sich um eine andere Sache handelt, die in einen entsprechenden Geldwert umgerechnet wurde.

### 8.1.2.1 Elemente eines Cash-Flow-Diagramms

Cash-Flow-Diagramme bestehen aus drei Grundkomponenten:

1. Zeitachse
2. Wertachse
3. Pfeile, die Zahlungen repräsentieren

Abb. 8.3 zeigt diese Elemente für das Erneuerungsbeispiel.

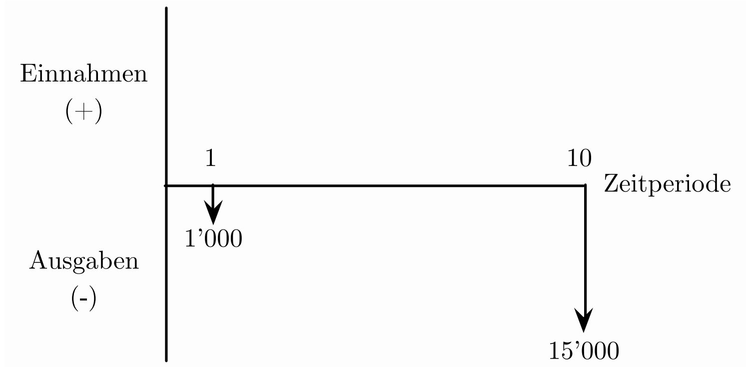


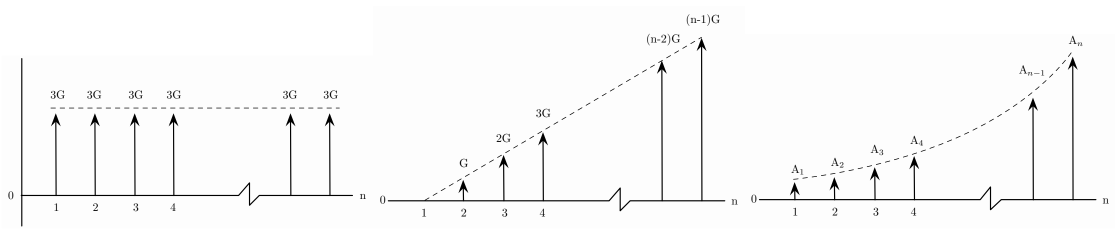

Abbildung 8.3: Cash-Flow-Diagramm für die Variante «zuerst instand setzen, dann erneuern»

Es ist hervozuheben, dass die Pfeile *Nominalwerte* darstellen und *nicht Gegenwartswerte*.

### 8.1.2.2 Was ist wichtig?

Ein Cash-Flow-Diagramm ist eine symbolische Darstellung einer Serie von Zahlungen. Es muss so genau und detailliert sein, dass es die Elemente des Problems eindeutig darstellt, insbesondere die Wachstumsart von sich wiederholenden Zahlungskomponenten. Deshalb:

1. Die relative Grösse ist insofern wichtig, als dass sie die Struktur des Problems darstellt. Absolute Grösse muss nicht zwingend dargestellt werden. Es ist wichtiger, alle Elemente darzustellen und ersichtlich zu machen, wie sie wachsen.
2. Wenn nötig darf die Skala unterbrochen werden, um sich wiederholende Elemente auszulassen. So können wichtige Elemente besser erkannt werden.
3. Bei sich wiederholenden Zahlungen, deren Grösse durch eine bestimmte Regel dargestellt werden kann, sollte die Eigenschaft dieser Regel klar ersichtlich sein. Konstante Zahlungen sollen konstant aussehen, und linear ansteigende Zahlungen sollen klar von geometrisch ansteigenden Zahlungen unterschieden werden können. Eine Periodizität sollte ebenfalls klar ersichtlich sein. Zahlungen, die alle 10 Jahre auftreten, sollen identifiziert und von jährlichen Zahlungen unterschieden werden können. Die Beispiele in den Abb. 8.4a bis 8.4c zeigen verschiedene Typen von Zahlungsreihen.




(a) Konstant (b) Linear ansteigend (c) Geometrisch ansteigend

Abbildung 8.4: Grundtypen von sich wiederholenden Zahlungen

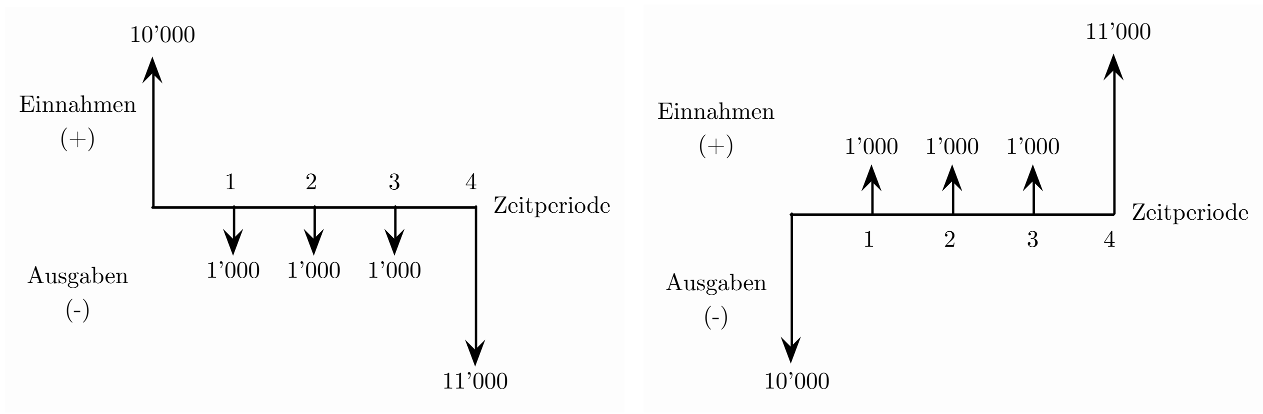
4. Es muss sichergestellt sein, dass die Richtung des Zahlungsflusses mit der Sicht des Problems übereinstimmt. Die Abb. 8.5a und 8.5b zeigen dieselbe Transaktion – einmal aus der Sicht der Bank, einmal aus der Sicht des Kunden. Die Bank zahlt einen Kredit (Ausgabe) und erhält jährliche Zinszahlungen. Die verliehene Summe wird dann am Ende des Zeitraums zurückgezahlt. Für den Kunden sind die Vorzeichen der Zahlungen genau umgekehrt!

### 8.1.3 Grundkonzepte für Diskontierung und Zinssätze

Obwohl Zinssätze in den folgenden Kapiteln oft erwähnt werden, besteht per se kein Interesse an den *Zinssätzen selbst*. Vielmehr geht es um die Frage, wie Masseinheiten auf eine gemeinsame Basis gebracht werden können.

Die Umrechnung zwischen Nominalwert und Gegenwartswert ist jedoch – anders als die Umrechnung zwischen Masseinheiten wie cm und Zoll – nicht linear, sondern geometrisch:

$$Gegenwartswert = \frac{Nominalwert\, nach\, t\, Jahren}{(1+i)^t}$$




(a) Kunde (b) Bank

Abbildung 8.5: Cash-Flows aus unterschiedlicher Sicht

Diese Umrechnung trägt den Namen: ***Diskontierung***. Dieses Kapitel beschäftigt sich hauptsächlich damit, wie diese Formel in den verschiedensten Situationen angewendet werden kann, die in Cash-Flow-Berechnungen auftreten. Es ist wichtig, sich zu erinnern, dass Diskontierung dazu verwendet wird, ***Nominalwerte*** zu einem beliebigen Zeitpunkt in ***Gegenwartswerte*** umzurechnen, die verglichen werden können. Genauso wie niemand Zoll und cm ohne Umrechnung zusammenzählen sollte, sollte auch niemand Nominalwerte zusammenrechnen, die nicht auf denselben Zeitpunkt bezogen sind.

Damit ist ein ***Diskontsatz*** ein Zinssatz, der dafür verwendet wird, diese Umrechnung durchzuführen.

#### 8.1.3.1 Die Verbindung zu Zinssätzen

Wer einem Freund 20 Franken borgt, wird auch 20 Franken zurück erwarten. Das ist gut für die Freundschaft, aber nicht gut fürs Geschäft. Für einen Freund zieht man die spätere Zahlung vom geschuldeten Betrag ab und schliesst daraus, dass dieser seine Schulden bezahlt hat. Wenn man nun aber sein Geld an eine Bank verleiht (indem man es auf sein Konto einzahlt), wird diese nicht nur die 20 Franken (das ***Kapital***) zurückzahlen, sondern auch Zinsen. Das bedeutet, dass Banken (und andere Geldverleiher) Geld zum heutigen Zeitpunkt anders bewerten als zu einem zukünftigen Zeitpunkt. Erst das Hinzufügen von Zinsen macht diese äquivalent:

$$Wert\,nächstes\,Jahr = Gegenwartswert \cdot (1+i)$$

Die Multiplikation mit $(1+i)$ ist äquivalent zu einer Addition von i% Zinsen zum ursprünglichen Nominalwert. Wenn man dies über zwei Jahre hintereinander macht, dann erhält man:

$$Wert\,in\,zwei\,Jahren = [Gegenwartswert \cdot (1+i)] \cdot (1+i) = Gegenwartswert \cdot (1+i)^2$$

Wenn man dies über $t$ Jahre in einer Reihe wiederholt, dann ergibt sich die Formel, die zur Berechnung des Wertes verwendet wird, der in $t$ Jahren zurückzuzahlen ist:

$$Wert\,in\,t\,Jahren = Gegenwartswert \cdot (1+i)^t$$

Dies zeigt auf, weshalb Diskontierung auf Geldverleih aufbaut:

Angenommen, eine Bank zahlt i% Zinsen für das ihr geliehene (und damit zur Verfügung gestellte) Kapital, damit sie es für ein Jahr benutzen kann. Dies erlaubt die Frage: «Wieviel sind 20 Franken *im nächsten Jahr* zum heutigen Zeitpunkt wert?» Es ist der Wert, den man heute der Bank geben müsste, um nächstes Jahr von der Bank 20 Franken zu bekommen. Er kann so berechnet werden:

$$\frac{20}{(1+i)}$$

Die Transformation von Werten über die Zeit folgt genau derselben Idee: «Wie viel Y müssen wir einer Bank – die i% Zinsen zahlt – heute geben, damit wir später X zurückbekommen?» Dies beschreibt die Umrechnung zwischen X und Y, um sagen zu können: «Y ist der Gegenwartswert von X».

Diskontierung ist eine natürliche Folge des Willens, Zinsen zu zahlen.

#### 8.1.3.2 Zinseszins

Bei einem Zinssatz von 10% erhält man Zinsen von 10 Franken, wenn man 100 Franken verleiht. Wer 100 Franken zweimal hintereinander verleiht – ohne die Zinsen mit zu verleihen – bekommt in Summe 20 Franken an Zinsen (10 für das erste Jahr, 10 für das zweite). In t Jahren würde man $t \cdot i \cdot 100$ an Zinsen erhalten, würde man dasselbe Schema weiter betreiben. Man kann jetzt die Frage stellen, wieso man die erhaltenen Zinsen aus dem ersten Jahr nicht ebenfalls verleihen sollte. In anderen Worten: Wieso verleiht man nicht 110 anstatt 100 Franken im zweiten Jahr? Wer dies täte, bekäme für das zweite Jahr folgende Zinsen: $10\% \cdot 100 + 10\% \cdot 10 = 11$.

Der zweite Term wird ***Zinseszins*** genannt: Zinsen auf Zinsen. Wenn man 100 Franken für 2 Jahre verleiht, dann erwartet man nicht nur die Zinsen auf das Kapital, sondern auch die Zinseszinsen. Dies ergibt in Summe 21 Franken an Zinsen. Zusammen mit dem zurückgezahlten Kapital ergibt das 121 Franken, die zurückzuzahlen sind: $100 \cdot (1+i)^2 = 100 \cdot 1.1^2 = 121$ – genauso wie in der Formel. Zinseszinsen spiegeln die Tatsache wider, dass man nicht nur Zinsen für das Kapital, sondern auch für die angefallenen Zinsen schuldig ist, wenn das Kapital über mehrere Jahre verliehen wird.


(a) Unglücklicher Banker – ohne Zinseszins

(b) Glücklicher Banker – mit Zinseszins

Abbildung 8.6: Über die Zeit spielt Zinseszins eine grosse Rolle

#### 8.1.3.3 Formelzeichen

**i:** Zinsen (engl.: interest)

**n:** Anzahl der Perioden (engl.: number)

**P:** Gegenwartswert (engl.: present)

**F:** zukünftiger Wert (engl.: future)

#### 8.1.3.4 Faktoren, die den Zinssatz (und damit den Diskontsatz) beeinflussen

Zinsen sind meist nicht gleich hoch – weder zu verschiedenen Zeitpunkten, noch in verschiedenen Ländern oder bei verschiedenen Währungen. Sie sind auch abhängig davon, wer sich Geld ausborgt. Man sieht das z.B. an den unterschiedlichen Zinsen für Griechenland oder Spanien gegenüber Deutschland oder auch bei den unterschiedlichen Zinsen im EU-Raum und in der Schweiz. Inflation und Risikoaufschläge sind die Hauptursachen dafür. Bis jetzt wurde bereits festgestellt, dass – wenn man Kapital ausborgt – Zinsen fällig werden. Aus diesem Grund können Zinsen auch als «Miete» angesehen werden, genauso wie die Miete für ein Leihauto. Und genauso wie die Miete für ein Leihauto in verschiedene Teile aufgespalten werden kann, kann das für «Geldmiete» (=Zinsen) ebenfalls gemacht werden.

Die Miete für ein Auto (bei einem «all-in»-Vertrag, der auch die Versicherung miteinschliesst) besteht aus drei Teilen:

1. Dem Anteil für das Privileg, das Auto exklusiv für einen Zeitraum benutzen zu dürfen (dieser Anteil ist zu bezahlen, unabhängig davon, ob man das Auto dann tatsächlich benutzt oder nicht),

2. dem Anteil für den Wertverlust, der allein durch das Altern des Autos entsteht sowie

3. dem Anteil für den erwarteten Schaden, der an dem Auto von dem betreffenden Fahrer verursacht wird. Dies beinhaltet sowohl die Abnützung durch das Fahren selbst, als auch den erwarteten Schaden, der durch die Fahrweise etc. entsteht. Dieser Anteil ist der Grund dafür, dass verschiedene Fahrer oft verschieden hohe Mieten bezahlen müssen.

Abb. 8.7 zeigt einen ungefähren Vergleich zwischen «Automiete» und «Geldmiete».

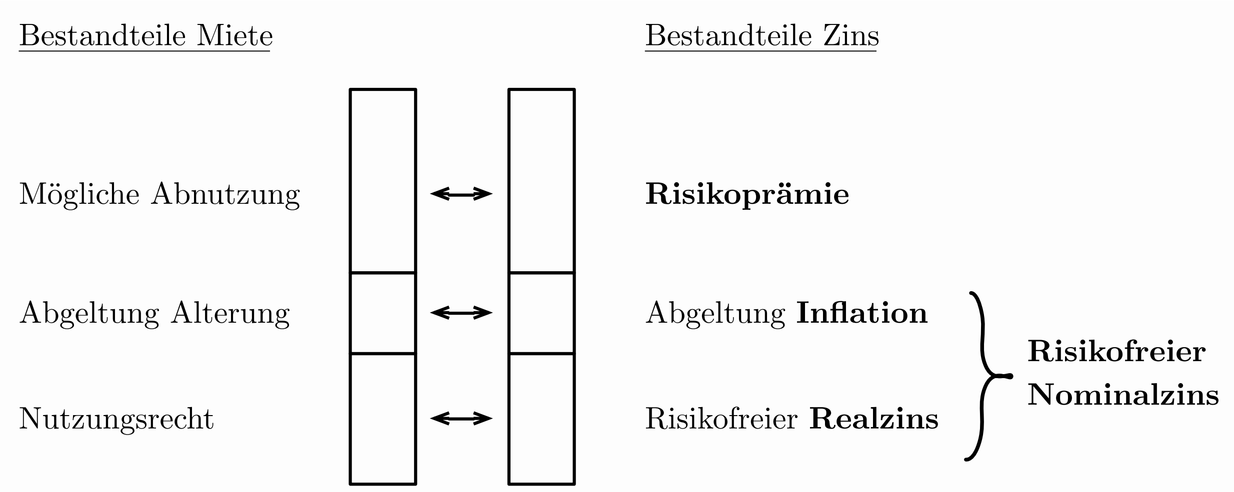



Abbildung 8.7: Die komplette Zinsrate beinhaltet Komponenten, die sich mit einer Automiete (mit eingeschlossener Versicherung) vergleichen lassen

Der Zinssatz wird dadurch zerlegt, dass zuerst der Risikozuschlag abgezogen wird. Diese Komponente hängt von dem Risiko des Projekts oder der Zahlungsmoral des Schuldners ab. Was übrig bleibt, ist der ***risikofreie Nominalzinssatz***. Dies ist der Zinssatz, der risikofreien Schuldnern tatsächlich in Rechnung gestellt wird. Der Nominalzinssatz enthält eine Komponente, die die Effekte der Inflation berücksichtigt. Inflation bezeichnet den langsamen Wertverlust von Geld, der in der heutigen Wirtschaft die Norm ist. Wenn man die Inflationskomponente abzieht, erhält man den ***Realzinssatz***.

Es könnte noch viel mehr über Zinssätze gesagt werden, aber das würde in eine andere Vorlesung gehören. Man sollte sich aber merken, dass sich Diskontsätze über die Zeit und den Ort sowie mit der Währung und dem Schuldner ändern. Risikozuschläge hängen stark vom Schuldner und von dem Projekt ab. Inflationsraten sind von Land zu Land und von Währung zu Währung unterschiedlich. Sogar Realzinssätze sind nicht über die Zeit konstant. Man sollte also sichergehen, dass man den Diskontzinssatz verwendet, der der Entscheidungssituation angepasst ist. Für staatliche Projekte ist dieser Zinssatz meistens vom Gesetz vorgegeben; genauso wie in dieser Vorlesung die Zinssätze immer vorgegeben sein werden.

### 8.1.4 Verschiedene Arten, Zinssätze auszudrücken

Zinssätze und die entsprechenden Diskontsätze können auf drei verschiedene Weisen ausgedrückt werden. Dies ändert nichts ausser der Art und Weise, wie Berechnungen durchgeführt werden müssen. Man kann immer von einer Form in die andere umrechnen, allerdings ändern sich dabei die *Zahlenwerte*.

Die drei verschiedenen Diskontsätze sind der jährliche, der unterjährige und der kontinuierliche Zinssatz; letzterer ist in der Regel der Normalfall.

#### 8.1.4.1 Jährlicher Zinssatz

In der Standardform ist i so angegeben, dass

$$F_{ein\,Jahr\,später} = P_{heute} \cdot (1+i)$$

Erweitert auf mehrere Jahre mit Zinseszins:

$$F(t) = P \cdot (1+i)^t$$

Für Diskontierung:

$$P = \frac{F(t)}{(1+i)^t}$$

Manchmal wird das Problem auch in Form des Aufzinsungsfaktors R dargestellt:

$$R^t = (1+i)^t \text{ , } also\ F(t) = R^t \cdot P$$

Ebenfalls kann man den Abzinsungsfaktor d definieren:

$$d^t = \frac{1}{(1+i)^t} \text{ , } also\ P = F(t) \cdot d^t$$

#### 8.1.4.2 Unterjähriger Zinssatz

Wenn die unterjährige Zinseszinsform benutzt wird, dann stimmen Zinssatzperiode und Verzinsungsperiode nicht überein. Deshalb muss – zusätzlich zum jährlichen Zinssatz – auch die Verzinsungsperiode angegeben werden: «10%, vierteljährlich verzinst». Diese Art, Zinsen anzugeben, ist nicht sehr intuitiv! Um genau zu sein, ist der ***Effektivzinssatz*** (falls man diesen in der Standardform ausdrückt) verschieden vom angegebenen Zinssatz. Die Berechnung erfolgt in zwei Schritten: Zuerst wird der angegebene Zinssatz durch die Anzahl der Perioden dividiert. Dies ergibt beispielsweise $\frac{10\%}{4} = 2.5\%$ pro Vierteljahr. Dann wird der Effektivzinssatz durch Bildung des Aufzinsungsfaktors bestimmt. Mit der Periodenanzahl n erhält man

$$(1 + i_{effektiv}) = \left(1 + \frac{i_{angegeben}}{n}\right)^n$$

Im Beispiel wäre das:

$$(1 + 10.38\%) = \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^4$$

Es ist wichtig, festzuhalten, dass Effektivzinssätze immer grösser sind als die angegebenen Zinssätze (hier: 10.38% statt 10%), da das Dividieren ein linearer, das Potenzieren aber ein geometrischer Prozess ist.

Später – bei den Cash-Flows – wird deutlich werden, dass die Zeit zwischen verschiedenen Zahlungen häufig nicht ein Jahr beträgt. So kann es beispielsweise sein, dass Wartungsmassnahmen nur alle 10 Jahre durchgeführt werden. Deshalb muss man die korrekte Formel für den Effektivzinssatz beherrschen, um verschiedene Zeitintervalle miteinander vergleichen zu können.

Merke: Der angegebene Zinssatz, manchmal auch als Nominalzinssatz bezeichnet, wird immer in Form eines jährlichen Zinssatzes angegeben.

#### 8.1.4.3 Kontinuierlicher Zinssatz

Der kontinuierliche Zinssatz ist der Grenzwert für den unterjährigen Zinssatz, wenn die Anzahl der Subperioden gegen Unendlich geht. Der kontinuierliche Zinssatz ist eine derart wichtige Form der Darstellung von Verzinsung, dass er mit einem Extrabuchstaben, nämlich «r» anstatt «i» dargestellt wird. Der Zusammenhang zwischen Gegenwartswert und zukünftigem Wert ist hier wie folgt definiert:

$$F\left(t\right) = P \cdot e^{r \cdot t}$$

Um den entsprechenden jährlichen Zinssatz zu finden, muss der Ausdruck $e^{r \cdot t}$ nur für $t = 1$ ausgewertet und nach $r$ aufgelöst werden.

Tab. 8.1 zeigt Effektivzinssätze für einen angegebenen Zinssatz von 12% und unterschiedliche Verzinsungsperioden. Es ist wichtig festzuhalten, dass die kontinuierliche Verzinsung den höchsten Effektivzinssatz ergibt.

| $1 + i_{angegeben}$ | $n$ | Funktion | | | $1 + i_{effektiv}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.12 | 1 | $\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^1$ | $=$ | $(1.12)^1$ | 1.1200 |
| 1.12 | 4 | $\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^4$ | $=$ | $(1.03)^4$ | 1.1255 |
| 1.12 | 12 | $\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12}$ | $=$ | $(1.01)^{12}$ | 1.1268 |
| 1.12 | $\infty$ | $\left(1 + \frac{0.12}{\infty}\right)^{\infty}$ | $=$ | $e^{0.12}$ | 1.1275 |

Tabelle 8.1: Angegebener Zinssatz und Effektivzinssatz im Vergleich

**Verdopplungsregel** Eine nützliche Anwendung der kontinuierlichen Verzinsung ist die sogenannte «Regel 69». Um diese Regel zu verwenden, muss zuerst verstanden werden, dass kleine Werte von i und r nahe beieinander liegen. Die Regel 69 macht eine Aussage darüber, wie schnell sich das Kapital abhängig vom Zinssatz verdoppelt. Dies soll mithilfe der vorgängig vorgestellten Formel an einem Beispiel verdeutlich werden.

$$F\left(t\right) = P \cdot e^{r \cdot t}$$

Ziel ist, das Kapital zu verdoppeln, also:

$$F\left(t\right) = 2P$$

Gesucht ist somit das $t$, bei dem $e^{rt} = 2$ gilt. Logarithmieren beider Seiten ergibt $ln\left(2\right) = r \cdot t$. Wenn nach t aufgelöst und der numerische Wert von $ln(2)$ eingesetzt wird, ergibt sich $t = \frac{0.693}{r}$ . Erweitert um 100 und unter der Annahme $r \approx i$, folgt daraus die Regel 69: $t \approx \frac{69}{i*100}$. Setzt man für die Approximation 72 statt 69 im Nenner ein, ergeben sich für die ermittelte Anzahl Jahre (t) deutlich angenehmere Werte. Daher wird in der Praxis oft die Regel 72 bevorzugt. Tab. 8.2 zeigt einige Beispiele für die Anwendung der beiden Regeln.

| Zinsrate | | Verdoppelungszeit | | Daumenregel | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Äquiv. | echt | ungefähr | Regel 69 | Regel 72 |
| i | r | $\frac{ln(2)}{r}$ | $\frac{ln(2)}{i}$ | $\frac{69}{i \cdot 100}$ | $\frac{72}{i \cdot 100}$ |
| 2.00% | 1.98% | 35.00 | 34.66 | 34.5 | 36.00 |
| 4.00% | 3.92% | 17.67 | 17.33 | 17.25 | 18.00 |
| 6.00% | 5.83% | 11.90 | 11.55 | 11.5 | 12.00 |
| 8.00% | 7.70% | 9.01 | 8.66 | 8.63 | 9.00 |
| 10.00% | 9.53% | 7.27 | 6.93 | 6.90 | 7.20 |
| 12.00% | 11.33% | 6.12 | 5.78 | 5.75 | 6.00 |

Tabelle 8.2: Beispiele für die Verdopplungsregeln

### 8.1.5 Zusammenfassung

1. Diskontierung wird bei Zahlungsflüssen verwendet, um ein einheitliches, vergleichbares Mass zu erhalten. Mathematische Operationen mit Werten, die nicht in derselben Einheit gemessen werden, sind immer ungültig. Entscheidungsbäume benötigen eine gemeinsame Masseinheit, wenn Stärken in einem Gebiet Schwächen in einem anderen Gebiet ausgleichen sollen.
2. Diskontierung ist ein nichtlinearer Prozess, da auch die Zinseszinsen mit einbezogen werden müssen.
3. Der *Gegenwartswert* ist der äquivalente Wert eines *Nominalwerts in der Zukunft.*
4. Umgekehrt ist der *zukünftige Wert* äquivalent zum Wert eines *Nominalwerts jetzt.*
5. Man kann Werte beliebig in die Zukunft oder in die Vergangenheit transformieren, egal ob in einem Schritt von 10 Jahren oder in 10 Schritten von je einem Jahr. Das Ergebnis ist das gleiche.
6. Es gibt drei übliche Formen, um Zinssätze auszudrücken:
   a) Der jährliche (oder Nominal-) Zinssatz, bei dem der Zinssatz in derselben Zeiteinheit ausgedrückt wird wie die Verzinsungsperiode
   b) Der unterjährige Zinssatz, bei dem der Zinssatz in einer Zeiteinheit ausgedrückt wird, die grösser ist als die Verzinsungsperiode
   c) Der kontinuierliche Zinssatz, bei dem der Zinssatz als natürlicher Logarithmus von (1+i) ausgedrückt wird
7. Das Konzept von Zinsen bleibt bei allen drei Formen dasselbe: Eine Kapitalmenge P wächst um einen gegebenen Prozentsatz $i$ pro Periode über insgesamt $t$ Perioden und ergibt den Endwert $F$. Dieser wird durch die folgende Formel ausgedrückt:

   $$F(t) = P \cdot (1+i)^t$$

   oder

   $$F(t) = P \cdot e^{rt}$$

   mit

   $$r = ln(1+i)$$

## 8.2 Formeln zur Berechnung der ökonomischen Äquivalente einer Reihe von Cash-Flows

### 8.2.1 Einleitung

Angenommen, es soll der Gegenwartswert der Kosten jährlicher Inspektionen und örtlicher Übermalungen einer Brücke über den Zeitraum von 30 Jahren berechnet werden, um dies mit den Kosten einer einzelnen grösseren Erneuerung, bei der sämtliche beschädigte Komponenten ersetzt werden, vergleichen zu können. Abb. 8.8 zeigt die nominellen und diskontierten Werte aller Interventionen. Aus dem vorangegangenen Kapitel ist bekannt, wie dies gemacht wird. Man erstellt eine tabellarische Liste und berechnet den gegenwärtigen Wert jedes einzelnen Cash-Flows. Danach berechnet man die Summe aller Cash-Flows. Für kurze Reihen ist dies ein äusserst sinnvoller Ansatz. Für längere Reihen ist dies jedoch schwierig, für unendliche Reihen sogar unmöglich. Glücklicherweise gibt es Formeln, die auf einige typische Reihen angewendet werden können, um die Berechnung zu erleichtern. In dieser Vorlesung wird es darum gehen, wie diese Formeln auf Reihen von Cash-Flows angewendet werden können und wie der Gegenwartswert eines Zahlungsstroms zu berechnen ist.

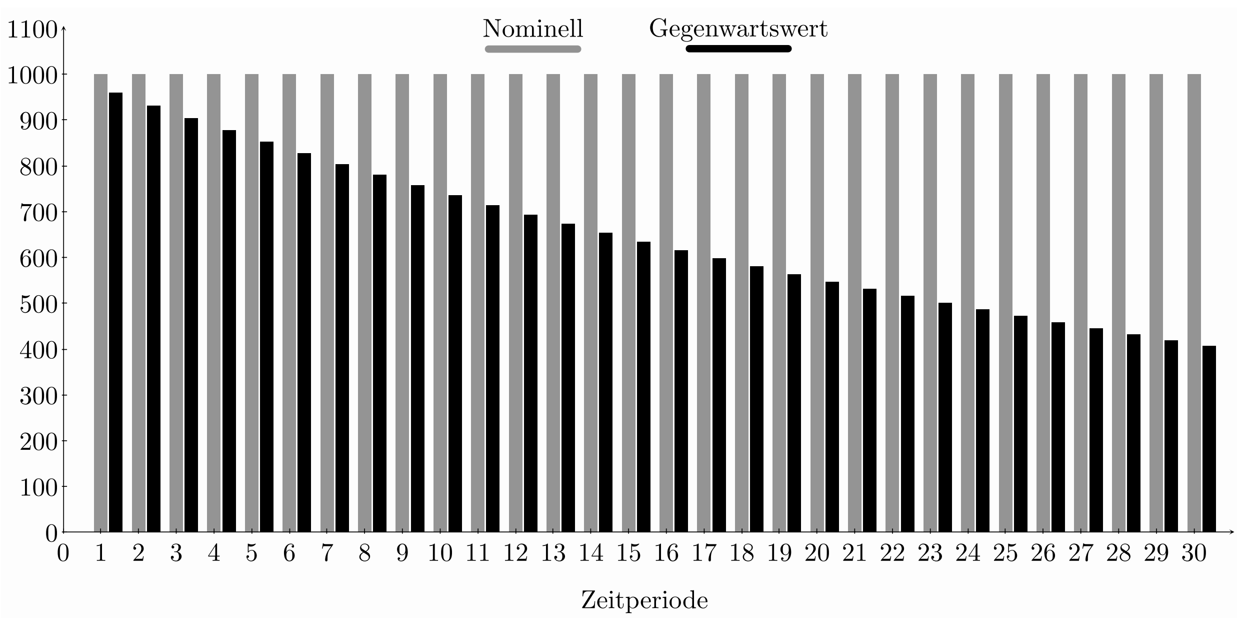



Abbildung 8.8: Werte einer Reihe von gleichen jährlichen Zahlungen – aus nomineller und gegenwärtiger Sichtweise

| i=5% | | | |
|---|---|---|---|
| t | N | d | P |
| 1 | 1000 | 95% | 952.4 |
| 2 | 1000 | 91% | 907.0 |
| 3 | 1000 | 86% | 863.8 |
| 4 | 1000 | 82% | 822.7 |
| 5 | 1000 | 78% | 783.5 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 27 | 1000 | 27% | 267.8 |
| 28 | 1000 | 26% | 255.1 |
| 29 | 1000 | 24% | 242.9 |
| 30 | 1000 | 23% | 231.4 |
| Summe | 30000 | | 15372.5 |

Tabelle 8.3: Berechnung des Gegenwartswerts jeder einzelnen Zahlung und Aufsummierung der Resultate

## 8.2.2 Annuität

Eine Annuität ist eine Folge von gleichen Zahlungen (üblicherweise eine pro Jahr) über eine bestimmte Zeitperiode. Bei einer Reihe von fünf jährlichen Zahlungen wird $A_i$ verwendet, um die i-te Zahlung in der Reihe A zu benennen.

Von Annuitäten ist typischerweise im Kontext einer Reihe von Geldzahlungen die Rede, und es stellt sich die Frage, was ein fairer Preis für die Folge von Zahlungen ist. Daher stellt man diese im Cash-Flow-Diagramm als eine einzige zukünftige Zahlung dar, die in ihrer Grösse den Wert der Zahlungsreihe ausgleicht. Dieser Konvention soll im Rahmen dieser Vorlesung gefolgt werden. Dementsprechend zeigt Abb. 8.9 die fünf Zahlungen $A_i$ als Einnahmestrom und die einzelne Zahlung P als Ausgangssumme, die den gleichen Gegenwartswert hat wie die jährlichen Zahlungen.

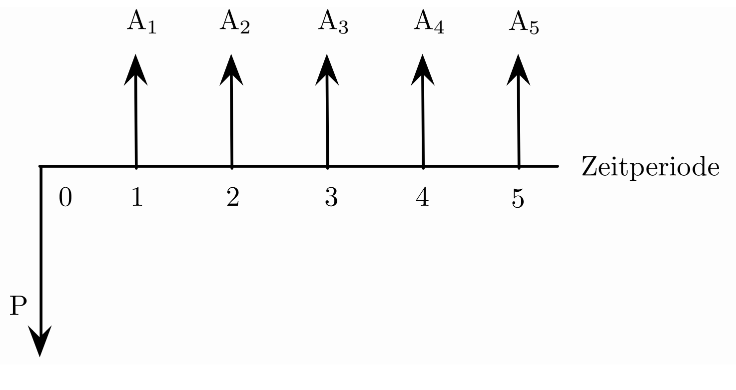



Abbildung 8.9: Cash-Flow-Diagramm des Bezugs von fünf gleichen jährlichen Zahlungen

### 8.2.2.1 Herleitung der Annuitätenformel

Aus den bisherigen Erläuterungen ist bekannt, dass die Gegenwartswerte für diese Zahlungsreihe wie folgt berechnet werden:

$$P(A) = \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \frac{A_4}{(1+i)^4} + \frac{A_5}{(1+i)^5} = \sum_{t=1}^{5} \frac{A_t}{(1+i)^t} \tag{8.1}$$

Um die Notation ein wenig zu vereinfachen, wird der Buchstabe d verwendet, um den Abzinsungssatz zu repräsentieren, der als $d = \frac{1}{(1+i)}$ definiert ist. Wenn man bedenkt, dass alle $A_i$ den gleichen Wert wie $A_1$ haben, kann 8.1 umgeschrieben werden zu

$$P(A) = A_1 d^1 + A_1 d^2 + A_1 d^3 + A_1 d^4 + A_1 d^5 \tag{8.2}$$

Dieses kann umgestellt werden zu

$$\frac{P(A)}{A_1} = d^1 + d^2 + d^3 + d^4 + d^5 = X \tag{8.3}$$

Nun folgt ein praktischer Trick:

Man nenne die Summe auf der rechten Seite $X$ und beachte, dass $d \cdot X$ gegeben ist durch

$$d \cdot X = d^2 + d^3 + d^4 + d^5 + d^6 \tag{8.4}$$

Man subtrahiere $d \cdot X$ von $X$ um Folgendes zu erhalten

$$(1-d)\, X = d^1 - d^6 \tag{8.5}$$

Dies kann nach X aufgelöst werden.

$$X = \frac{d\left(1 - d^5\right)}{(1-d)} \tag{8.6}$$

Ersetzt man $d$ mit $\frac{1}{(1+i)}$ und ordnet den Ausdruck neu, so erhält man die Formel für den Gegenwartswert einer Reihe von 5 gleichen Zahlungen.

$$X = \frac{\left(\frac{1}{(1+i)}\right)\left(\frac{(1+i)^5-1}{(1+i)^5}\right)}{\left(\frac{(1+i)-1}{(1+i)}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{(1+i)}\right)\left(\frac{(1+i)^5-1}{(1+i)^5}\right)}{\left(\frac{i}{(1+i)}\right)} = \frac{(1+i)^5 - 1}{i \cdot (1+i)^5} \tag{8.7}$$

Daher ist der gegenwärtige Wert einer Reihe von 5 jährlichen Zahlungen der Höhe A gegeben durch

$$P(A) = A \cdot \left(\frac{(1+i)^5 - 1}{i \cdot (1+i)^5}\right) \tag{8.8}$$

Klarerweise kann die gleiche Argumentation für eine Reihe von n jährlichen Zahlungen gemacht werden. Die Formel ergibt sich dann zu

$$P(A) = A \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}\right) \tag{8.9}$$

Ersetzt man $(1+i)$ durch $e^r$, kann die Gleichung ebenfalls in der kontinuierlichen Formulierung geschrieben werden:

$$P(A) = A \cdot \left( \frac{e^{rn} - 1}{(e^r - 1) \cdot e^{rn}} \right) \tag{8.10}$$

Der Beweis zeigt deutlich die Verknüpfung zwischen dem Gegenwartswert einer Reihe als Ganzes und dem gegenwärtigen Wert jeder einzelnen Komponente. Prinzipiell kann man entweder jeden einzelnen Zahlungsfluss separat diskontieren und die Resultate aufaddieren, oder man kann direkt die Formel für die gesamte Reihe verwenden. In Anbetracht dessen, wie schnell man ein solches Problem in Excel aufsetzen und die Werte der einzelnen Zahlungen berechnen kann, ist es in der Praxis nicht ganz eindeutig, welche Methode besser ist. Es ist jedoch wichtig, Problemstellungen mit beiden Methoden lösen zu können.

#### 8.2.2.2 Wichtige Anmerkungen

Die Anwendung der Formeln für die Annuitäten sowie aller anderen Formeln für eine Reihe von Zahlungen ist nicht sonderlich schwierig. Fehler ereignen sich vor allem dann, wenn vergessen wird, dass sich die «Gegenwart» im Gegenwartswert auf den Zeitpunkt 0 bezieht, wohingegen die erste Zahlung zum Zeitpunkt 1 passiert (siehe Cash-Flow-Diagramm). Das heisst, dass zu jeder Formel ein ganz spezifisches Cash-Flow-Diagramm gehört. Falls die Problemstellung darin besteht, den gegenwärtigen Wert von fünf gleichen jährlichen Zahlungen zu berechnen, die im 3. Jahr starten, dann muss die Berechnung in zwei Schritten durchgeführt werden. Zunächst ist der Gegenwartswert zum Zeitpunkt 2 zu berechnen (die erste Zahlung kommt zum Zeitpunkt 3), danach muss dieser Wert um zwei weitere Zeitperioden nach hinten diskontiert werden.

Ausgehend von dieser Beschreibung sollte die Uneindeutigkeit der Formulierung »in Jahr 1» oder »in Jahr 2» deutlich geworden sein. Bedeutet 1 am Anfang oder Ende dieses Jahres? Es sollte immer genau ausgedrückt werden, was gemeint ist. Das Cash-Flow-Diagramm macht die Situation vollkommen klar. Abb. 8.10 verdeutlicht diese Ambiguität.

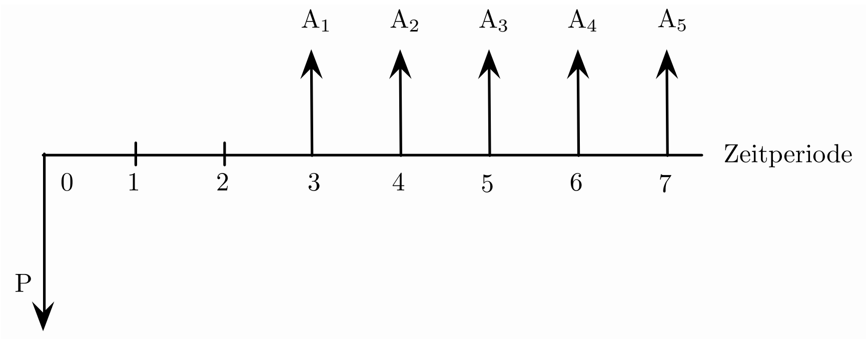



Abbildung 8.10: Das Cash-Flow-Diagramm schafft Klarheit über die zeitliche Zuordnung von Zahlungen

Auflösen nach P bedeutet in diesem Fall, dass der von der Formel gegebene Wert für die Annuität um zwei zusätzliche Jahre diskontiert werden muss.

### 8.2.3 Zukünftiger Wert einer Annuität

Der zukünftige Wert einer Annuität ist in Abb. 8.11 dargestellt.

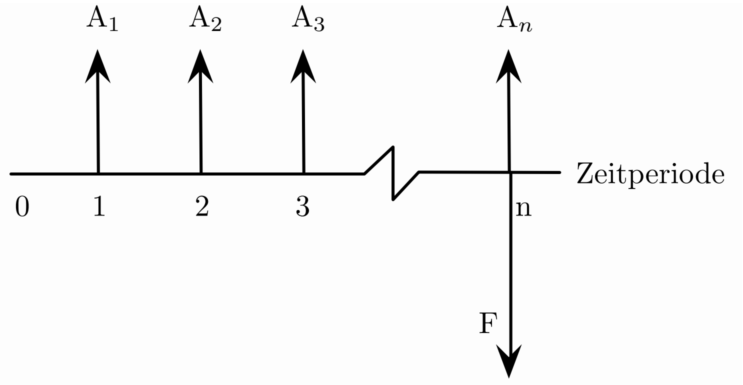



Abbildung 8.11: Zukünftiger Wert einer Annuität F

Den zukünftigen Wert einer Annuität bezüglich Periode n zu berechnen, ist nichts anderes, als den Gegenwartswert um n Perioden aufzuzinsen.

$$F(A) = P(A) \cdot (1+i)^n = A \cdot \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \right) (1+i)^n = A \cdot \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) \tag{8.11}$$

#### 8.2.3.1 Konstante jährliche Zahlung, um eine Kapitalinvestition zu finanzieren

Falls die Investition zu Beginn erfolgt, kann sie als grosser Zahlungszufluss betrachtet werden. Es mag jedoch die Frage aufkommen, was für eine konstante jährliche Zahlung benötigt wird, um für die Investition bei einem Zinssatz von i zahlen zu können. Die Grösse der Zahlung ist A und kann bestimmt werden, indem die Formel zur Berechnung des Gegenwartswerts P einer Annuität nach A aufgelöst wird:

$$A(P) = P \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \tag{8.12}$$

oder

$$A(P) = P \cdot \left( \frac{(e^r - i) \cdot e^{rn}}{e^{rn} - 1} \right) \tag{8.13}$$

Manchmal ist die Problemstellung die, dass für eine spätere Investition gespart werden soll. In diesem Fall ist die jährliche Zahlung gegeben durch

$$A(F) = F \cdot \left( \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right) \tag{8.14}$$

oder

$$A(F) = F \cdot \left( \frac{(e^r - 1)}{e^{rn} - 1} \right) \tag{8.15}$$

### 8.2.4 Linear ansteigende Reihen

Bei manchen Problemen nehmen die Zahlungen jedes Jahr um einen konstanten Betrag zu. Für diesen Fall sehen die Zahlungen wie in Abb. 8.12 aus und können mit Formel 8.16 einfach berechnet werden.

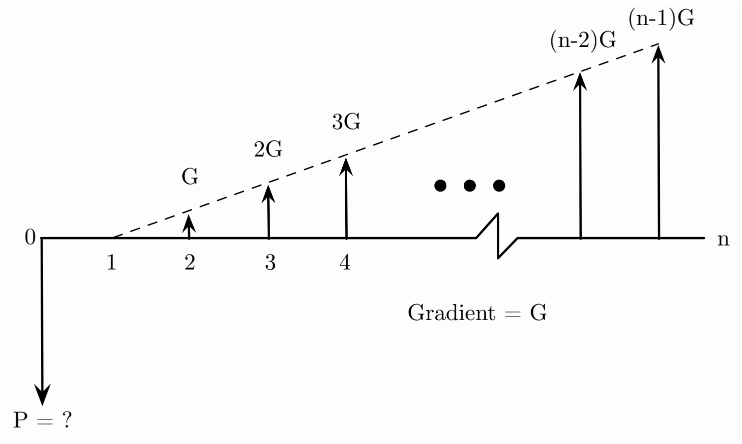



Abbildung 8.12: Um den Faktor G linear ansteigende Zahlungen

Die Formel für den Gegenwartswert lautet:

$$P(G) = G \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - i \cdot n - 1}{i^2 \cdot (1+i)^n} \right] \tag{8.16}$$

Der wichtigste Punkt bei der Verwendung dieser Formel ist, dass die erste Zahlung im Jahr 2 auftritt. Falls die erste Zahlung im Jahr 1 stattfindet, lautet die Formel wie folgt:

$$P_1(G) = G \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - i \cdot n - 1}{i^2 \cdot (1+i)^n} \right] \cdot (1+i) = G \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - i \cdot n - 1}{i^2 \cdot (1+i)^{n-1}} \right] \tag{8.17}$$

Da das Verhältnis zwischen Zahlungszeitpunkt und Gegenwartszeitpunkt nicht immer wie in den aufgeführten Formeln sein wird, ist es wichtig zu wissen, wie man das Ergebnis der Formel weiter vorwärts oder rückwärts in der Zeit transformiert. *Hier ist sorgfältiges Arbeiten vonnöten.*

### 8.2.5 Geometrisch ansteigende Reihen

Reale Anwendungen von linear ansteigenden Reihen sind eher selten. Dies ist deshalb der Fall, weil viele Zahlungen selbst von einem Wachstumsprozess abhängen. Unter der Annahme, dass der Verkehr um 2% pro Jahr wächst, werden auch die verkehrsbezogenen Einnahmen (z.B. aus dem Benzinverkauf) um 2% pro Jahr steigen. Ein anderes Beispiel: Die Inflation ist selten 0, also wird bei einem Produkt, welches jedes Jahr gekauft werden soll, der Nominalpreis auch um die Inflationsrate ansteigen. Ausserdem könnten z.B. technische Fortschritte den Preis eines Produkts um einen gewissen Prozentsatz pro Jahr senken. Deshalb ist es wertvoll, eine Formel für diese Fälle zu haben.

#### 8.2.5.1 Herleitung der Formel

Die Formel für geometrische Reihen lässt sich relativ simpel aus der Formel für konstante Zahlungen herleiten. Als erstes wird die Formel für die $n-$te Zahlung umformuliert, mit $A_1$ als erster Zahlung und $g$ als Wachstumsrate der Zahlungen:

$$A_n = A_1\,(1+g)^{(n-1)} = \frac{A_1}{(1+g)}\,(1+g)^{(n)} = A_0\,(1+g)^{(n)} \tag{8.18}$$

Setzt man nun $d{=}\frac{(1+g)}{(1+i)}$, ergibt sich die Formel für die konstante Zahlung:

$$P(A) = A_0 d^1 + A_0 d^2 + A_0 d^3 + A_0 d^4 + A_0 d^5 + \cdots + A_0 d^n \tag{8.19}$$

Auflösen und vereinfachen ergibt

$$P(A) = A_1 \cdot \left( \frac{1-(1+g)^n \cdot (1+i)^{-n}}{i-g} \right) \tag{8.20}$$

Das dazugehörige Diagramm ist in Abb. 8.13 dargestellt.

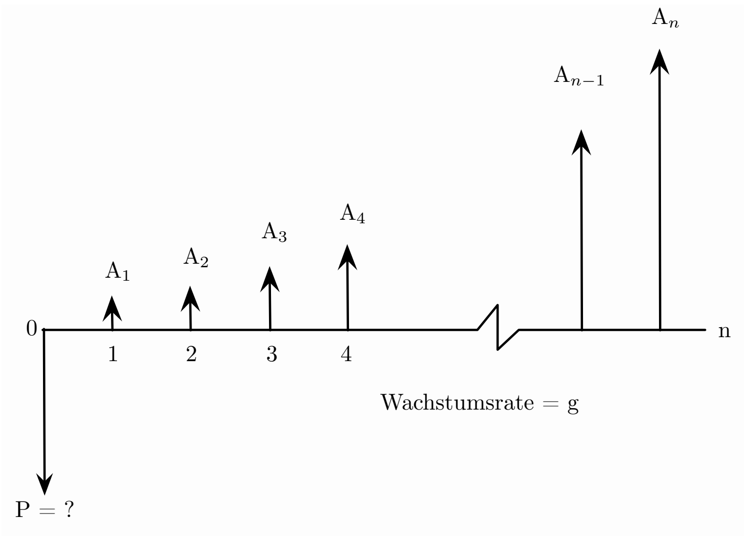



Abbildung 8.13: Geometrisch ansteigende Zahlungen

### 8.2.6 Unendliche Reihe von Zahlungen

Manche Entscheidungssituationen erfordern, dass unendliche (oder sehr lange) Reihen von Zahlungen miteinander verglichen werden. In der Praxis macht diese Diskontierung die zwei Situationen ungefähr äquivalent. Dies kommt daher, dass die Summe einer diskontierten Reihe einen limitierten Grenzwert hat und sich deshalb bei einer genügend grossen Anzahl von Perioden nicht mehr von der unendlichen Reihe unterscheidet. Ein Beispiel wären die jährlichen Erhaltungskosten für langlebige Infrastrukturobjekte wie Dämme, Kanäle oder ähnliches.

#### 8.2.6.1 Formel für eine unendliche Reihe von gleichen Zahlungen

Die Herleitung der Formel ist die einfachste für alle Zahlungsserien. Wenn eine unendliche Anzahl von Zahlungen existiert, lässt sich Gl. 8.5 schreiben als

$$P(A) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A_1}{(1+i)^t} = A_1 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^t \tag{8.21}$$

Ausserdem gilt

$$(1-d)\,X = d - d^{\infty} = d \tag{8.22}$$

weil $d^{\infty} \to 0$ für $d < 1$, was wiederum stimmt, weil $i > 0$.

Auflösen nach $X$ und vereinfachen ergibt

$$X = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1}{i} \tag{8.23}$$

Für eine konstante Zahlung $A$ ergibt sich somit die wichtige Formel

$$P(A) = \frac{A_1}{i} \tag{8.24}$$

#### 8.2.6.2 Formel für eine unendliche Reihe von geometrisch ansteigenden Zahlungen

Eine solche Reihe schreibt man folgendermassen:

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A_1 \cdot (1+g)^{t-1}}{(1+i)^t} = \frac{A_1}{1+g} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^t = \frac{A_1}{1+g} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+k)^t}\right)^t \tag{8.25}$$

Man sieht hier die gleiche Form wie in Gl. 8.21 – nur mit $\frac{1}{1+k}$ anstatt $\frac{1}{1+i}$ und mit $\frac{A_1}{1+g}$ anstatt $A_1$.

Zuerst wird nach k aufgelöst:

$$\frac{1}{(1+k)} = \frac{(1+g)}{(1+i)} \Rightarrow (1+k) = \frac{(1+i)}{(1+g)} \Rightarrow k = \frac{(1+i)}{(1+g)} - 1 \Rightarrow k = \frac{(1+i)-(1+g)}{(1+g)} \tag{8.26}$$

$$\Rightarrow k = \frac{(i-g)}{(1+g)} \tag{8.27}$$

Mit $k > 0$ hat der Gegenwartswert einen beschränkten Wert, was zutrifft wenn $g > 0$ und $i > g$.

Mit zwei Substitutionen in Gl. 8.24 lässt sich die Formel für eine unendliche Reihe von geometrisch ansteigenden Zahlungen entwickeln:

$$P(A) = \frac{A_1}{1+g} \cdot \frac{1}{k} = \frac{A_1}{(1+g)\cdot\frac{(i-g)}{(1+g)}} = \frac{A_1}{i-g} \tag{8.28}$$

### 8.2.7 Berechnung des Gegenwartswerts in komplizierten Fällen

Normalerweise entsprechen echte Entscheidungssituationen nicht den gegebenen Formeln. Sie können aber durch eine Kombination der Formeln beschrieben und berechnet werden.

**Beispiel – Gegenwartswert eines Solarkollektors:** Ein Projekt, das bei der diesjährigen Sitzung eines Unternehmens angenommen oder abgelehnt werden soll, betrifft den Einbau einer Solarheizung. Die Frage ist, ob die Investition die Kosten wert ist. Weil das Komitee auch noch andere Projekte ins Auge fasst, muss der Gegenwartswert zum heutigen Tag berechnet werden. Nach der Beschlussfassung braucht es ein Jahr, um den Kollektor zu planen und zu installieren. Das vorgesehene Solarelement kostet 100'000 CHF, zu zahlen im Jahr 1. Im darauffolgenden Jahr beginnt der Wartungszyklus, der jährlich von derselben Firma für den Preis von 1'000 CHF durchgeführt wird. Die erwartete Lebensdauer beträgt 30 Jahre. Grössere Wartungsarbeiten beginnen im 10. Jahr nach der Installation und wiederholen sich alle 5 Jahre. Es wurde im Wartungsvertrag vereinbart, dass die erste dieser Wartungen 5'000 CHF kosten wird und jede weitere jeweils 1'000 CHF mehr. Am Ende des Lebenszyklus – d.h. im Jahr 31 – findet keine Wartung mehr statt, sondern die Anlage wird abgebaut. Dies kostet einmalig 10'000 CHF.

Auf der Nutzenseite stehen die Einsparungen von Heizöl. Die Anlage spart jährlich 4'000 Liter Heizöl ein. Es wird angenommen, dass der Preis für einen Liter im Jahr 1 1.50 CHF beträgt und dann mit einer Rate von 2% pro Jahr zunimmt.

Alle Kosten und Nutzen fallen am Ende des jeweiligen Jahres an. Der vorgeschriebene Diskontsatz beträgt 3%.

Wie geht man nun so ein Problem an? Begonnen wird mit einer Tabelle, in der man die Zahlungen auflistet:

| Cash-Flow Element | Cash-Flow Name | Erste Periode | Letzte Periode | Intervall | Wert $A_1$ | Diskontrate | Wachstumsrate | Wachstumsmenge |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Installationskosten | 1 | 1 | - | -100 | 3 % | - | - |
| 2 | Jährliche Wartungskosten | 2 | 30 | 1 | -1 | 3 % | - | - |
| 3 | Periodische Wartungskosten | 11 | 26 | 5 | -5 | 3 % | - | -1 |
| 4 | Entsorgung | 31 | 31 | - | -10 | 3 % | - | - |
| 5 | Jährliche Einsparungen | 2 | 31 | 1 | 6 | 3 % | 2 % | - |

Tabelle 8.4: Schritt 1 – Analyse

Es gibt vier Kostenströme und einen Nutzenstrom.

1. Die Installations- und Planungskosten fallen nur einmal an, nämlich am Ende des Jahres 1.
2. Die jährlichen Wartungskosten haben einen konstanten Nominalwert, beginnen in Jahr 2 und enden ein Jahr vor dem Abbau der Anlage.

3. Die periodischen Wartungskosten haben eine linear ansteigende Struktur und finden alle fünf Jahre statt. Die erste Zahlung findet im Jahr 11 statt, die letzte in Jahr 26. Die erste Zahlung beträgt 5'000 CHF, die nächste 6'000, die dritte 7'000 usw.
4. Der Abbau des Solarkollektors erfolgt 30 Jahre nach der Installation, also im Jahr 31.
5. Es ergeben sich jährliche Ersparnisse aus dem eingesparten Heizöl. Obwohl die eingesparte Menge bei konstanten 4'000 L pro Jahr liegt, steigt der Wert in CHF, da der Heizölpreis steigt. Die ersten Einsparungen werden im zweiten Jahr auftreten und $4'000\,L{\cdot}1.50\,CHF/L = 6'000\,CHF$ ausmachen. Danach steigt der Wert um 2% pro Jahr.

Der nächste Schritt ist, die Zahlungsströme in ein Cash-Flow-Diagramm einzutragen. Dieser Schritt hilft dabei, das Timing und die Elemente der Zahlungsströme sauber zu beschreiben. Es ist sehr wichtig, diesen Schritt richtig zu machen, damit die Formeln anschliessend korrekt benutzt werden können. Abb. 8.14 zeigt das fertige Cash-Flow-Diagramm.

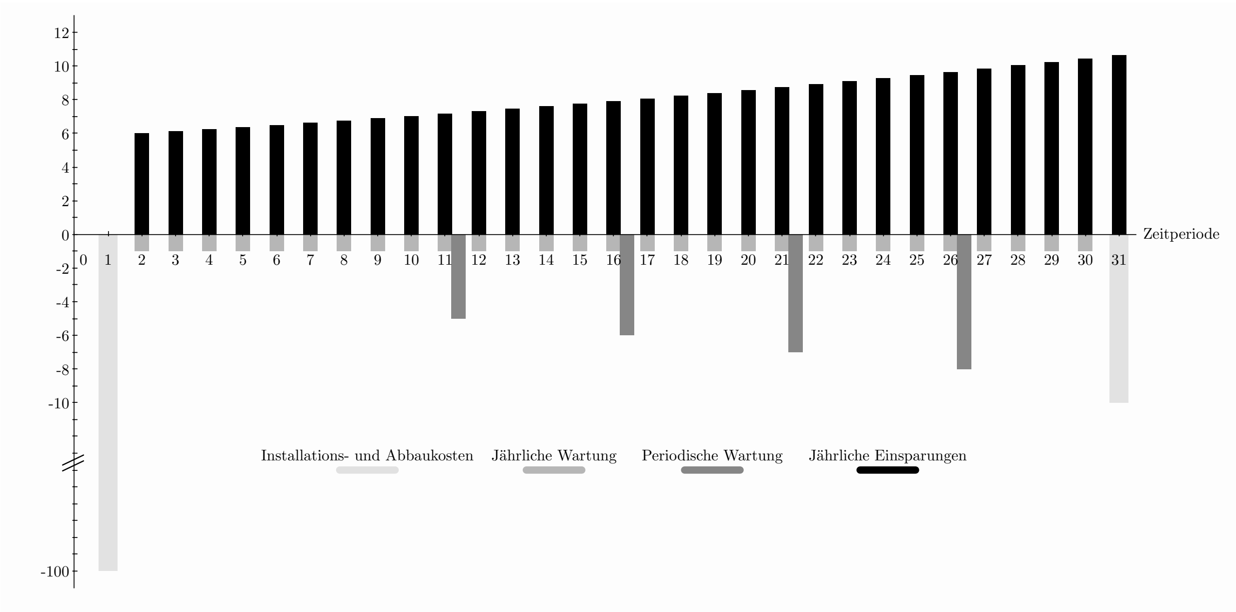



Abbildung 8.14: Schritt 2 – Cash-Flow-Diagramm

Schritt 3 ist die Berechnung selbst. Es gibt dafür zwei Wege. Der erste Weg ist, jede einzelne Zahlung zum Gegenwartszeitpunkt zu diskontieren. Excel erlaubt dies auf eine einfache Art und Weise. Der Vorteil hierbei ist, dass die Lösung sehr transparent ist und leicht auf etwaige Fehler überprüft werden kann.

Der zweite Weg ist die Berechnung mithilfe der Formeln. Formeln sind viel schneller und effizienter bei der Diskontierung von Zahlungsreihen und können auch in einer analytischen Funktion angewendet werden, z.B.: Wie empfindlich ist die gefundene Lösung auf Änderungen des Zinssatzes? Die erste Ableitung der Formel würde hierüber Auskunft geben.

### Verwendung von Excel um jede Zahlung einzeln zu erfassen

Tab. 8.15 zeigt die Excel-basierte Berechnung.

1. Man beginnt mit einer Tabelle, in der die Perioden in die eine Richtung gehen und die Zahlungen in die andere Richtung.
2. Die Nominalzahlungen eintragen und dafür die Formeln benutzen, die auf die Analysetabelle verweisen. Damit kann rasch überprüft werden, ob der Wert mit der Problembeschreibung übereinstimmt.
3. Eine Spalte erstellen, die den Diskontsatz als Funktion der Periode angibt.
4. Eine zweite Tabelle für die diskontierten Werte jeder nominellen Zahlung erstellen. Dies ist einfach das Produkt von Nominalwert und Diskontsatz
5. Zwischensummen für jede Spalte erstellen, um den Einfluss jeder Zahlung auf das Gesamtproblem sehen zu können.
6. Die Zwischensummen addieren, um den endgültigen Gegenwartswert zu erhalten.

Ein nützliches Feature von Excel ist, dass das Cash-Flow-Diagramm direkt von der Nominalwerttabelle ausgehend gezeichnet werden kann. Eine visuelle Überprüfung des Diagramms erlaubt es somit, Fehler rascher zu entdecken.

| | Nominalwerte | | | | | | Gegenwartswerte | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zeitperiode | Installationskosten | Jährliche Wartung | Periodische Wartung | Abbau | Jährliche Einsparungen | Diskontierungsfaktor | Installationskosten | Jährliche Wartung | Periodische Wartung | Abbau | Jährliche Einsparungen |
| 0 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1 | -100.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.97 | -97.09 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.00 | 0.94 | 0.00 | -0.94 | 0.00 | 0.00 | 5.66 |
| 3 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.12 | 0.92 | 0.00 | -0.92 | 0.00 | 0.00 | 5.60 |
| 4 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.24 | 0.89 | 0.00 | -0.89 | 0.00 | 0.00 | 5.55 |
| 5 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.37 | 0.86 | 0.00 | -0.86 | 0.00 | 0.00 | 5.49 |
| 6 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.49 | 0.84 | 0.00 | -0.84 | 0.00 | 0.00 | 5.44 |
| 7 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.62 | 0.81 | 0.00 | -0.81 | 0.00 | 0.00 | 5.39 |
| 8 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.76 | 0.79 | 0.00 | -0.79 | 0.00 | 0.00 | 5.33 |
| 9 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 6.89 | 0.77 | 0.00 | -0.77 | 0.00 | 0.00 | 5.28 |
| 10 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 7.03 | 0.74 | 0.00 | -0.74 | 0.00 | 0.00 | 5.23 |
| 11 | 0.00 | -1.00 | -5.00 | 0.00 | 7.17 | 0.72 | 0.00 | -0.72 | -3.61 | 0.00 | 5.18 |
| 12 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 7.31 | 0.70 | 0.00 | -0.70 | 0.00 | 0.00 | 5.13 |
| ⋮ | | | | | | ⋮ | | | | | ⋮ |
| 26 | 0.00 | -1.00 | -8.00 | 0.00 | 9.65 | 0.46 | 0.00 | -0.46 | -3.71 | 0.00 | 4.47 |
| 27 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 9.84 | 0.45 | 0.00 | -0.45 | 0.00 | 0.00 | 4.43 |
| 28 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 10.04 | 0.44 | 0.00 | -0.44 | 0.00 | 0.00 | 4.39 |
| 29 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 10.24 | 0.42 | 0.00 | -0.42 | 0.00 | 0.00 | 4.35 |
| 30 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 10.45 | 0.41 | 0.00 | -0.41 | 0.00 | 0.00 | 4.30 |
| 31 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -10.00 | 10.66 | 0.40 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -4.00 | 4.26 |
| | | | | | | Gesamt | -97.09 | -18.63 | -14.82 | -4.00 | 147.81 |
| | | | | | | Gesamte diskontierte Kosten | -134.54 | | | | |
| | | | | | | Gesamte diskontierte Einnahmen | 147.81 | | | | |
| | | | | | | Netto-Gegenwartswert | 13.27 | | | | |

Abbildung 8.15: Gegenwartswertberechnung mit Excel

#### Verwendung der Formeln

In diesem Fall **MUSS** das Cash-Flow-Diagramm zuerst – und zwar sehr, sehr präzise – gezeichnet werden, damit die Formeln richtig angewendet werden können.

1. Den Reihen aus dem Diagramm ist ein Formeltyp zugeordnet. Im Solarbeispiel geht dies recht einfach – bis auf die periodischen Zahlungen. Diese sind zwar klar linear ansteigend, aber die Reihe beginnt bei 5'000 und nimmt jährlich um 1'000 zu – in der Formel beginnt sie bei 0 und nimmt um G zu. Dieses Problem kann dadurch gelöst werden, dass man die Reihe in zwei Teile aufspaltet: Eine konstante Zahlung von 5'000 und eine linear ansteigende Komponente, die mit 0 im Jahr 11 beginnt.

2. Aus dem Diagramm sind die benötigten Werte für die Formeln zu bestimmen. Welches $n$

wird gebraucht? Was ist der richtige Wert für $A_1$? Der wahrscheinlich schwierigste Teil ist, mit Wiederholungsperioden zu arbeiten, die nicht mit dem Grundintervall übereinstimmen. Um die Problematik der unterschiedlichen Wiederholungsintervalle zu verdeutlichen, soll im Folgenden die fiktive Situation analysiert werden, dass *Mouse Engineering Inc.* eine Erdnussmühle an *Café Elefant* liefert.

**Einschub: verschiedene Wiederholungsintervalle**

Mäuse leben nicht so lange wie Elefanten, und deshalb ist es klar, dass sie in kürzeren Intervallen rechnen. Tatsächlich ist die Lebensdauer eines Elefanten etwa 20-mal so lang wie die einer Maus. Das Verhältnis beträgt also 20:1. Deshalb ist es nicht verwunderlich, dass auch *Mouse Engineering Inc.* in kürzeren Intervallen rechnet als *Café Elefant.* Normalerweise würde *Mouse Engineering Inc.* einen Zinssatz von 2% pro Periode verrechnen. Aber wenn für *Café Elefant* gearbeitet wird, werden Elefantenperioden verwendet, die 20-mal so lang sind. Im Übrigen bleiben die Zahlungen unverändert. Dies verursacht keine zusätzlichen Schwierigkeiten, falls nur lineare Zunahmen G vorkommen. Die Zunahme ist dann pro Periode einfach 20-mal so gross. Die Anzahl der Perioden ist auch leicht zu berechnen: Es sind 1/20-mal so viele. Die einzige Schwierigkeit sind Wachstumsraten $g$ und Diskontierungsraten $\frac{1}{(1+i)}$.

In der Diskussion über unterjährige Verzinsung wurde bereits gezeigt, dass die Umrechnung der verschiedenen Wachstums- und Diskontierungsraten genau dieselbe ist wie die Berechnung des Effektivzinssatzes aus der unterjährigen Darstellungsform. Bei dem aktuellen Problem muss nun der Effektivzinssatz für eine Periodenlänge A in einen Effektivzinssatz für eine Periodenlänge B umgerechnet werden. Abb. 8.16 zeigt, wie dies von *Mouse Engineering Inc.* gemacht wird. Mit $m$ als Anzahl der kurzen Perioden innerhalb einer langen Periode ergibt sich die Formel für den neuen Effektivzinssatz $\hat{i}$ zu:

$$\hat{i} = (1+i)^m - 1 \tag{8.29}$$

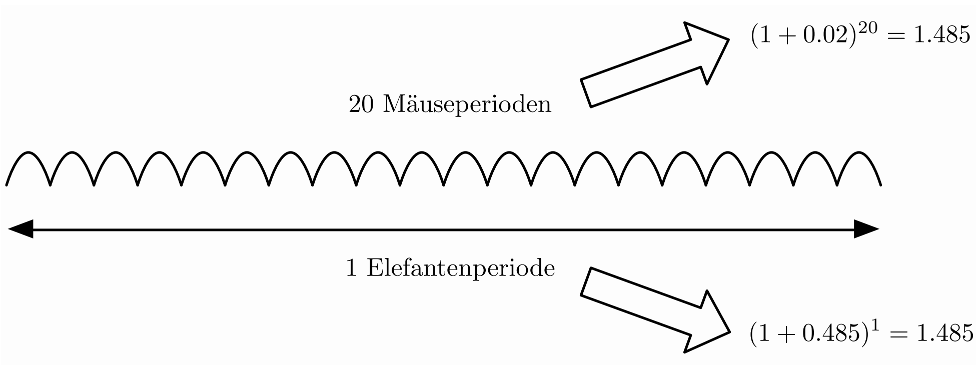



Abbildung 8.16: Umrechnen von Diskontsätzen zwischen verschiedenen Periodendauern

3. Die Formeln sind für jede Reihe anzuwenden, wie in Tab. 8.5 gezeigt.

4. Oftmals diskontieren die Formeln die Reihen nicht auf den korrekten (d.h. den gewünschten) Punkt zurück. Im konkreten Beispiel wiederholen sich die Zahlungen alle 5 Jahre, aber beginnen erst in Jahr 11. Deshalb liefert die Formel den Gegenwartswert für das Jahr 6 (= Zeitpunkt von $A_1$ minus einer 5-Jahresperiode). Deshalb muss der Gegenwartswert für das Jahr 6 noch in das Jahr 0 transformiert werden – genauso wie bei einer Einmalzahlung. Dieser Schritt ist in der letzten Spalte der Tab. 8.5 abgebildet.

| Cash-Flow # | Cash-Flow Name | Typ der Formel | Startpunkt der Diskontierung | n | Länge der Periode | Wert $A_1$ | i | g | G | Formelergebnis bis Start t | Gegenwartswert der Serie |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Installations-kosten | einfach | 0 | 1 | 1 | -100 | 3.0 % | - | - | -97.09 | -97.09 |
| 2 | Jährliche War-tungskosten | konstant | 1 | 29 | 1 | -1 | 3.0 % | - | - | -19.19 | -18.63 |
| 3a | Periodische Wartungskos-ten | linear | 6 | 4 | 5 | -1 | 15.9 % | - | 1 | -3.69 | -3.09 |
| 3b | Periodische Wartungskos-ten | konstant | 6 | 4 | 5 | -5 | 15.9 % | | | -14.01 | -11.73 |
| 4 | Entsorgung | einfach | 0 | 31 | 1 | -10 | 3.0 % | - | - | -4.00 | -4.00 |
| 5 | Jährliche Einsparungen | geometrisch | 1 | 30 | 1 | 6 | 3.0 % | 2% | | 152.25 | 147.81 |

Tabelle 8.5: Die benötigten Variablen berechnen und sie in die richtige Formel einsetzen

Die Excel-Methode sollte natürlich das identische Ergebnis liefern.

### 8.2.8 Zusammenfassung

Grundsätzlich spielt es keine Rolle, ob jede Zahlung einzeln diskontiert wird oder ob die Formeln verwendet werden. Mit der Einfachheit, mit der eine Reihe von Zahlungen in Excel modelliert werden kann, werden die Formeln heute kaum noch verwendet. Auch mit unendlichen Reihen ist die Modellierung in Excel kein Problem, da leicht 1000 Perioden erstellt werden können. Der damit errechnete Wert wird sich nicht signifikant von der tatsächlichen Lösung unterscheiden. Ausserdem bietet Excel den Vorteil der einfachen Erstellung eines Cash-Flow-Diagramms. Damit kann die Berechnung leicht auf Fehler überprüft werden.

Bevor es Tabellenkalkulationsprogramme gab, waren die Formeln sehr wichtig. Leider sind sie aber – bis auf einen Fall – schwer zu merken. Abhängig von der Quelle sehen die Formeln auch unterschiedlich aus – sei es, weil der Startpunkt anders definiert ist oder weil Brüche anders ausmultipliziert werden. Deshalb muss bei der Verwendung von Formeln mit grosser Sorgfalt gearbeitet werden, damit die richtigen Werte aus dem Cash-Flow-Diagramm in die Formeln übernommen werden.

Eine grosse Ausnahme ist die Formel für eine unendliche Reihe konstanter Zahlungen. Die Zahlung geteilt durch den Zinssatz ergibt den Gegenwartswert. Dies kann recht schnell berechnet werden und liefert eine Obergrenze für eine endliche Reihe von Zahlungen – vorausgesetzt, der Zinssatz ist hoch genug und die Anzahl der Jahre gross genug. Wie wertvoll sind 50 Jahre von 6'000 CHF mit 5%? – maximal 120'000 CHF (= $^{6'000}/_{0.05}$). Der genaue Wert wäre 115'651.81 CHF.

In der Realität wird man für die Berechnung des Gegenwartswerts viele verschiedene Reihentypen kombinieren müssen. Man muss hier sehr vorsichtig arbeiten, um die richtigen Formeln zu verwenden. Zwei Probleme sind häufig anzutreffen: Zum einen stimmen die Anzahl der Perioden und deren Dauer nicht bei allen Zahlungsflüssen miteinander überein. Zum anderen sind die Formeln meist noch nicht für den gewünschten Zeitpunkt des Gegenwartswerts angeben. Deshalb muss dieser oft noch transformiert werden.

## 8.3 Kontrollfragen

- Warum nimmt man im Allgemeinen an, dass 1000 CHF heute mehr wert sind als 1000 CHF in zwei Jahren?
- Beschreibt man in Cash-Flow-Diagrammen die gleichen Werte wie in einem Entscheidungsbaum?
- Wie genau müssen Cash-Flow-Diagramme die exakten Proportionen darstellen?
- Nach der Diskontierung sieht eine ursprünglich linear ansteigende Zahlungsreihe gekrümmt aus. Wie sieht diese Reihe bei einem Cash-Flow-Diagramm aus?
- Geht es bei der Diskontierung um das Vermehren von Geld via Zinsen oder um eine Methode, wie man Zukunftswerte in Gegenwartswerte umrechnet?
- Wenn jemand behauptet, der Wert einer Anlage wird «exponentiell» ansteigen, worauf ist diese Behauptung zurückzuführen?
- Was müsste wahr sein, damit die Realzinssätze höher wären als die risikofreien Nominalzinssätze?
- Bei Fragestellungen mit einem unterjährigen Zinssatz, was ist grösser – der effektive oder der angegebene Zinssatz?
- Nach dem Studium haben Sie ca. 40 Jahre bis zur Pension. Wenn Sie im ersten Arbeitsjahr 10'000 CHF sparen und diese mit 4% anlegen, wie viel werden diese Ersparnisse in etwa zum Zeitpunkt der Pensionierung wert sein?
- Welche Bank bezahlt mehr Zinsen – Bank A (r=2%) oder Bank B (i=2%)?
- Sofern man r mit der Formel $ln(1+i) = r$ berechnet, welche Formel führt zu einem grösseren Gegenwartswert – Formel 8.9 oder Formel 8.10?
- Bei gleich grossen jährlichen Zahlungen, welche Situation aus den Abb. 8.9 und 8.10 ergibt den grösseren Gegenwartswert?
- Für eine bestimmte Reihe von jährlichen Zahlungen $A_i$, was ist grösser – F oder P?
- Welche der Formeln 8.16 oder 8.17 passt zu einer Zahlungsreihe mit «Zahnlücke»?
- Was passiert, wenn bei einer geometrischen Reihe gilt: $g = i$?
- Wie lautet Formel 8.28, wenn die erste Zahlung bereits heute erfolgen würde?

# 9 Vergleich von Varianten

## 9.1 Einleitung

Zu Beginn dieser Lehrveranstaltung wurden Entscheidungssituationen und prüfbare Entscheidungsprozesse, die auf solche Situationen angewendet werden können, diskutiert. Für Situationen, in denen alle zu vergleichenden Kardinalwerte die gleiche Einheit haben und der Entscheidungsträger den verschiedenen potenziellen Entwicklungen Wahrscheinlichkeiten zuweisen kann (sofern Unsicherheiten bestehen), wurden Entscheidungsbäume als ein möglicher Entscheidungsprozess eingeführt. Die nachfolgenden Vorlesungen haben dann die reine Frage der Entscheidungsfindung verlassen, um Werkzeuge vorzustellen, wie man Werte von einer Zeitperiode in eine andere übersetzt, sodass sie in den gleichen Masseinheiten ausgedrückt werden und somit in einem Entscheidungsbaum verwendet werden können. Ein implizites Entscheidungskriterium in einem Entscheidungsbaum ist, dass sämtliche Varianten, die für die betreffende Entscheidung relevant sind, in einem der Pfade des Baums auftauchen. Eine zweite implizite Annahme ist, dass das Entscheidungskriterium ein konkreter Geldbetrag ist, z.B. CHF 2'500'499. Die Variante, deren erwarteter Betrag am höchsten (oder niedrigsten) ist, wird ausgewählt. In diesem Kapitel soll auf andere Entscheidungsprozesse eingegangen werden, die herangezogen werden können, wenn alle Werte Kardinalwerte sind, einheitliche Bemessungseinheiten existieren und Übereinkunft über die Wahrscheinlichkeiten besteht. Für diese Prozesse ist es nun nicht mehr notwendig, dass der Wert einer Variante in einem konkreten Betrag ausgedrückt werden kann oder dass alle in Frage kommenden Varianten bereits bekannt sind.

Bislang wurde stets der *Nettonutzen* maximiert, nicht die *Rendite*. Es ist allerdings gang und gäbe, dass man hört, wie Projekte hochgelobt werden, weil sie eine hohe Rendite aufweisen. Die Rendite ist eine Durchsatzrate (=Fluss), wohingegen der Nettonutzen eine Menge (=Volumen) ist. Der Nettonutzen gibt nicht direkt Auskunft darüber, wie schnell Gewinn aus einer bestimmten Investition erzielt wird, er sagt nur aus, wie hoch der gesamte Nettonutzen am Ende in Summe sein wird. Daran ändert sich fundamental nichts, wenn durch die Diskontierung eine zeitliche Modifikation der einzelne Werte eingeführt wird. Die Masseinheiten sind Franken, nicht Franken pro Zeiteinheit. Es handelt sich um einen »Nettonutzen von 3 Millionen», nicht um einen »Anstieg um 3% pro Jahr». Wenn Entscheidungen aufgrund von Wachstumsraten wie der Rendite gefällt werden sollen, geht die Eindeutigkeit, welche Variante den grössten Nettonutzen bietet, aber teilweise verloren.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, vier eng miteinander verbundene Konzepte, von denen drei die Form von Wachstumsraten annehmen, zu verdeutlichen und zu zeigen, wie diese in Entscheidungsprozessen korrekt verwendet werden sollten. Diese Konzepte sind:

- Nettonutzen,
- Nutzen-Kosten-Verhältnis,
- Minimum Acceptable Rate of Return MARR (oder auch »Kapitalkosten» in der Finanzliteratur) sowie
- Internal Rate of Return IRR.

Dabei sollen Methoden vorgestellt werden, in denen diese Konzepte auftauchen, und es soll vor einigen häufigen Fehlern gewarnt werden, die leicht gemacht werden.

## 9.2 Konzepte, die für die ökonomische Evaluierung von Alternativen benötigt werden

### 9.2.1 Opportunitätskosten

Opportunitätskosten sind ein fundamentales Konzept im Bereich der Entscheidungsfindung. Dieses Konzept wird im Wesentlichen aus zwei Gründen benötigt. Der erste Grund ist, dass die monetären Kosten nicht sämtliche Kosten ausmachen. Wie merkwürdig das auch erscheinen mag, so gibt es doch einige Dinge im Leben, die kostenlos oder zumindest kostentechnisch unterrepräsentiert sind. Wenn man z.B. in der Schweiz eine Strasse benutzen möchte, zahlt man normalerweise nicht *mehr* Geld, als wenn man sie nicht benutzt. Momentan gibt es auch keine Nutzungsgebühren dafür, der Erde Wärme zu entziehen – trotz der Tatsache, dass man damit ja auch Wärme aus dem Boden unterhalb des Nachbarhauses entzieht. Opportunitätskosten sind ein Konzept, das dafür gedacht ist, sämtliche relevanten Kosten zu berücksichtigen, unabhängig davon, ob diese eine monetäre Zahlung darstellen oder nicht.

Der zweite Grund ist, dass monetäre Kosten nicht immer alle Rahmenbedingungen eines Entscheidungsprozesses widerspiegeln. Es kann sein, dass es zeitliche Fristen gibt oder das Budget eine Obergrenze aufweist. Diese beiden Einschränkungen können dazu führen, dass auch Varianten, bei denen der Nutzen grösser ist als die Kosten, unter Umständen nicht gewählt werden (können). Möchte man zum Beispiel in eine Bäckerei gehen, wobei man hungrig ist, aber nur zwei Franken hat, dann wird man eine Menge Dinge sehen, die man normalerweise kaufen würde, aber nicht zu diesem Zeitpunkt, weil das Geld fehlt. Die Budgeteinschränkung von 2 CHF begrenzt die momentane Auswahl auf eine kleine Teilmenge des gesamten Angebots. Die wesentliche Frage ist nicht, welches Gebäck seinen Preis wert ist – die Frage ist vielmehr, welches Gebäck *mehr wert ist als alle möglichen Alternativen innerhalb dieser begrenzten Budget-Situation.* Die Opportunitätskosten davon, eine Studentenschnitte auszuwählen, sind, dass man sich nun nicht mehr für eine Rosinenschnecke entscheiden kann.

Die Opportunitätskosten einer bestimmten Variante sind der Wert der nächstbesten Variante, die man mit den Ressourcen, die erstere Variante beansprucht, stattdessen hätte wählen können. Ein neuer Damm kann die Möglichkeit eliminieren, eine Alpenwanderung zu geniessen. Ruhige Plätze für Bergwanderungen zu konservieren, kann dazu führen, dass die Möglichkeit nicht mehr vorhanden ist, durch verstärktes Bauen von Windrädern $CO_2$-Emissionen zu reduzieren. Ohne Frage wird der Entscheidungsträger nicht unbedingt alle diese Kosten in seiner Entscheidung berücksichtigen wollen. Es kommt häufig vor, dass der Entscheidungsträger es vorzieht, Kosten, die von jemand anderem «bezahlt» werden müssen, nicht in seiner Entscheidung zu berücksichtigen. In vielen Fällen führt eben dieses Verhalten leider zu ungünstigen Ergebnissen. Zwei bekannte Beispiele davon sind Stau auf der Strasse und überfischte Meere.

### 9.2.2 Versunkene Kosten

Im Gegensatz zu Opportunitätskosten sollten versunkene Kosten nicht in die Berechnung des Nettonutzens einer Variante miteinbezogen werden. Versunkene Kosten sind Entscheidungen, die bereits getroffen wurden und *nicht mehr rückgängig gemacht* werden können. Die Tatsache, dass man eine beträchtliche Summe für ein Konzertticket ausgegeben hat, sollte keinen Unterschied machen, ob man dieses Konzert schlussendlich besucht oder nicht – wenn man in Erwägung zieht, zu Hause zu bleiben, weil es regnet. Für gewöhnlich spielt es aber eine Rolle, das ist ganz menschlich. In der Auswertung von Projekten fallen gewisse Kosten häufig in den Vorstudien an. Wenn diese abgeschlossen wurden und eine Entscheidung gefällt werden muss, ob das Projekt weitergeführt werden soll oder nicht, sollte die Kosten-Nutzen Analyse, welche nach Beendigung der Vorstudie erstellt wurde, nicht die Kosten der Vorstudie enthalten.

### 9.2.3 Die Zielfunktion

Um auszuwerten, welche Variante innerhalb einer Menge von Alternativen die beste ist, bedarf es einer Definition dessen, was eigentlich als »am besten» angesehen wird. In formellen Entscheidungsprozessen, die numerisch ausgewertet werden, wird *was am besten ist* durch die Zielfunktion ausgedrückt. Typischerweise lautet der Auftrag, den Gewinn oder den Nettonutzen zu maximieren – für diese Diskussion sollen die beiden Begriffe einfachheitshalber als Synonyme verstanden werden. Der Wert der Nettonutzen-Funktion (net benefit: NB) wird von der Auswahl von Parametern wie Grösse, Qualität, Lieferzeit oder Lebenserwartung abhängen. Diese sind dann die Entscheidungsvariablen in dem Maximierungsproblem.

Gewinn bzw. Nettonutzen können in zwei Komponenten unterteilt werden: Kosten und Nutzen. Dies erlaubt dem Entscheidungsträger zu verstehen, warum bestimmte Variablen das Ergebnis der Maximierung so beeinflussen, wie sie es tun. Die Aufteilung in Kosten und Nutzen ist ein intuitiver Ansatz, da ein Nutzen eine positive Wirkung auf den Gewinn hat, wohingegen Kosten dies nicht haben. Angenommen, das Optimierungsproblem lautet, die optimale Grösse Q für eine Variante zu finden, so schreibt man

$$Max.\,(NB) = TB\,(Q) - TC\,(Q)$$

wobei $TB()$ die Funktion des gesamten Nutzens und $TC()$ die Funktion der gesamten Kosten ist. Unter der Annahme, dass beide Funktionen stetig sind und den erwarteten Steigungen und Krümmungen folgen, kann die Maximierung mit Hilfe von Analysis durchgeführt werden. Es ist zu erwarten, dass beide Funktionen mit Q ansteigen. Ebenfalls wird meistens angenommen, dass am Anfang der Gesamtnutzen schneller ansteigt als die Gesamtkosten, aber ab einem bestimmten Punkt die Gesamtkosten dann schneller wachsen als der Gesamtnutzen. Dies kann Abb. 9.1 entnommen werden.

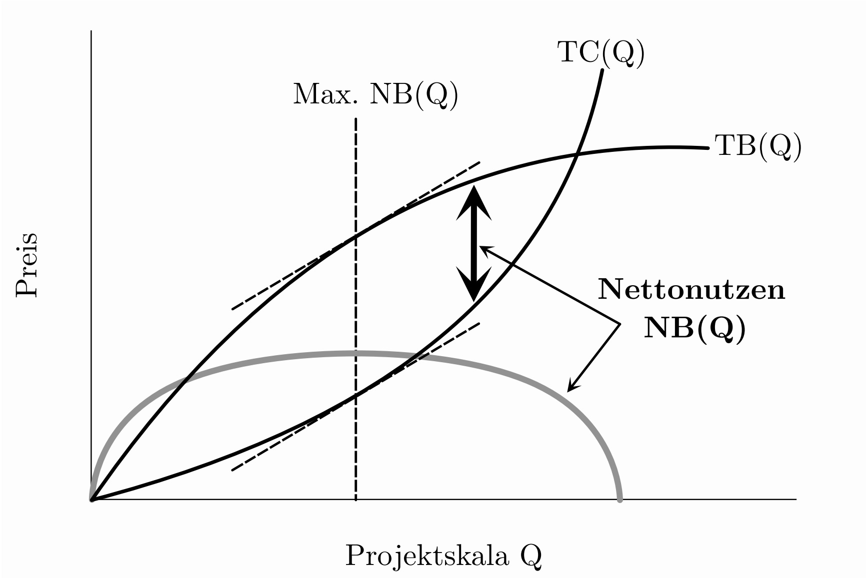



Abbildung 9.1: Schematische Darstellung der Maximierung des Nettonutzens

Unter der Voraussetzung, dass beide Funktionen keine Abnormitäten aufweisen, ist aus der Analysis bekannt, dass die folgende Bedingung gelten muss:

$$\frac{dNB(Q)}{dQ} = \frac{dTB(Q)}{dQ} - \frac{dTC\,(Q)}{dQ} = 0 \tag{9.1}$$

Daraus folgt natürlich:

$$Grenznutzen = \frac{dTB(Q)}{dQ} = \frac{dTC\,(Q)}{dQ} = Grenzkosten \tag{9.2}$$

Aus diesem Grund ist es sinnvoll, in der Diskussion darüber, wie eine bestimmte Variable den Nettonutzen beeinflusst, über die Grenzkosten bzw. über den Grenznutzen dieses Faktors zu sprechen. Unter Ökonomen wird die erste Ableitung als «Grenzfunktion» bezeichnet. Am lokalen Maximum sollten diese beiden Werte – bei einer Variable mit kontinuierlichen Eigenschaften – gleich sein.

## 9.3 Varianten aus einer abgeschlossenen Liste auswählen

Normalerweise ist es nicht möglich, bei der Auswahl zwischen verschiedenen Varianten Grenzbedingungen zu verwenden. Viel eher wird ein diskreter Auswahlprozess benötigt, um zwischen diskreten Varianten eine Wahl zu treffen, weil die Grösse sowie die Einzelelemente von Varianten nur selten kontinuierlich veränderbar sind.

Grundsätzlich sollte immer die Variante ausgewählt werden, welche den grössten Nettonutzen gibt, wenn sie mit allen denkbaren Entwicklungen kombiniert wird, die sich innerhalb der betrachteten Entscheidungsperiode ereignen könnten. Daher soll nun auf einige Wege eingegangen werden, wie die Auswahl von Varianten durchgeführt werden kann.

### 9.3.1 Basisfall: Kapitalwertmethode

Die einfachste Situation (Basisfall) tritt dann auf, wenn es eine begrenzte Anzahl von Varianten gibt und die Zielfunktion «Maximiere den Nettonutzen» lautet. Diese Auswahlmethode heisst Kapitalwertmethode. Sofern es kein Budgetbeschränkung gibt, heisst die Entscheidungsregel: Akzeptiere sämtliche Projekte, deren Nettonutzen (auch Nettogegenwartswert genannt) grösser als Null ist. Sofern es eine Budgetbeschränkung gibt und die aufgelisteten Projekte die einzigen verfügbaren Varianten innerhalb der relevanten Zeit- und Budgeteinschränkungen darstellen, heisst die Regel: Wähle die Variante (oder Kombination von Varianten – falls dies zulässig ist), die den Nettonutzen maximiert. Tab. 9.1 gibt mit sechs Projekten und einer Budgetbeschränkung von 20 Mio. CHF ein Beispiel für eine solche Entscheidungssituation. Projekt F liegt nicht innerhalb dieser Budgetbeschränkung. Unter der Annahme, dass nur ein einziges Projekt ausgewählt werden kann, sollte hier Projekt D ausgewählt werden, da es den grössten Nettonutzen einbringt. Wären Kombinationen von Projekten zulässig, dann würde die Kombination von den Projekten B und D den Nettonutzen maximieren.

| **Nutzen oder** | **Projekte** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kosten (x $10^6$ CHF)** | A | B | C | D | E | F |
| Kosten | 5.0 | 7.0 | 10.0 | 12.0 | 16.0 | 22.0 |
| Nutzen | 3.0 | 11.0 | 12.0 | 17.0 | 19.0 | 23.0 |
| Nettonutzen | -2.0 | 4.0 | 2.0 | 5.0 | 3.0 | 1.0 |

Tabelle 9.1: Bei einem Budget von 20 Mio. CHF ist das Projekt mit dem grössten Nettonutzen auszuwählen

Bevor im Folgenden weitere Methoden vorgestellt werden, ist die Überlegung ratsam, wie eines von diesen Projekten als Cash-Flow-Diagramm aussehen würde. Entstehen Kosten und Nutzen gleichzeitig oder sind sie über die Zeit irgendwie verteilt? Und wie sieht es mit dem Nettonutzen aus? Dieser wird natürlich nur zu einem Zeitpunkt notiert sein / stattfinden, da es nur ein einziger Cash-Flow ist. Selbstverständlich macht es nur dann Sinn, Quantitäten miteinander zu vergleichen, wenn diese in den gleichen Einheiten gemessen werden. Demzufolge müssen alle in der Tabelle aufgeführten Quantitäten auf den gleichen Zeitpunkt diskontiert werden, egal wann sie in Wirklichkeit anfallen, da ansonsten die Vergleiche irreführend sind.

### 9.3.2 Wenn die Zeitfenster nicht übereinstimmen

Im Basisfall wurde implizit angenommen, dass die Entscheidungssituation unabhängig und ohne Konsequenzen für andere Entscheidungen bleibt. Eine Situation, in der dies nicht unbedingt so ist, tritt auf, wenn die Zeitfenster verschiedener Varianten nicht übereinstimmen. Wenn eine der Varianten vor einer anderen zu Ende ist, stellt sich die Frage, ob mit den Ressourcen, die dadurch frei werden, nicht etwas anderes getan werden könnte, bis die andere Variante beendet ist. Alternativ kann die Situation eintreten, dass eine bestimmte Dienstleistung angeboten werden muss und die alternativen Strategien, diese Dienstleistung bereitzustellen, unterschiedliche Lebenszeiten aufweisen. Wenn dazu die Varianten noch Kosten haben, die nicht in Einheiten pro Zeit bemessen sind, so wird eine Anpassung nötig, um die unterschiedlichen Zeitdauern der Dienstleistung auszugleichen, ehe ein Vergleich gezogen werden kann. Wenn Maschinen, die sowohl Installations- als auch Laufzeitkosten haben, verglichen werden sollen, muss vor einem Vergleich eine Anpassung bezüglich der

Zeit vorgenommen werden, über die die Dienstleistung erbracht werden kann. Für diese Anpassung gibt es verschiedene Ansätze, die nachfolgend vorgestellt werden.

#### 9.3.2.1 Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zeitfenster

Eine einfache Methode wäre die Berechnung des kleinsten Wertes, der sich ohne Rest durch die beiden Zeitfenster teilen lässt. Danach ist der Gegenwartswert von beiden Varianten über die gesamte Zeitperiode zu berechnen. Im Beispiel wird zwischen zwei Anlagentypen entschieden, von denen einer gekauft werden muss. Man wählt die Variante aus, die den kleinsten Gegenwartswert hat, weil es hier um eine Kostenminimierung geht. In Abb. 9.2 sollen ein 4 und ein 6 Jahre langes Zeitfenster miteinander verglichen werden, wozu eine gesamte Zeitperiode von 12 Jahren verwendet wird. Die Kosten für die Installation und die Altmaterialverwertung der Maschinen sind inbegriffen.

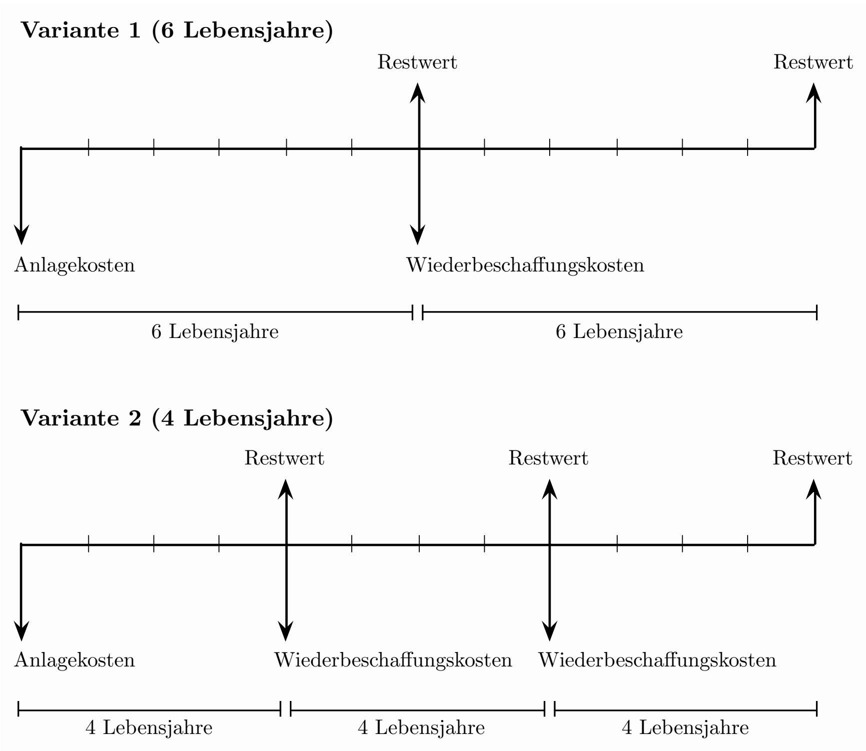



Abbildung 9.2: Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zeitfenster sollte gesucht werden

#### 9.3.2.2 Ein Marktwert für die zeitliche Differenz

Eine andere Möglichkeit ist, eine Gesamtzeitdauer für die Analyse festzusetzen und danach anzunehmen, dass der Wert, der nach dieser Zeit in der Leistungserbringung verbleibt (einschliesslich aller verbleibenden Kosten und Nutzen), auf dem Markt verkauft werden kann (vgl. Abb. 9.3). Dieser Wert – auf den Zeitpunkt der Entscheidung zurückdiskontiert – wird zu der Summe der diskontierten Nutzen- und Kostenwerte an diesem Zeitpunkt hinzuaddiert. Wenn Marktwerte vorhanden sind, die angemessene Annäherungen an die verbleibenden Werte in der Maschinenanlage darstellen, ist dies eine sinnvolle Vorgehensweise.

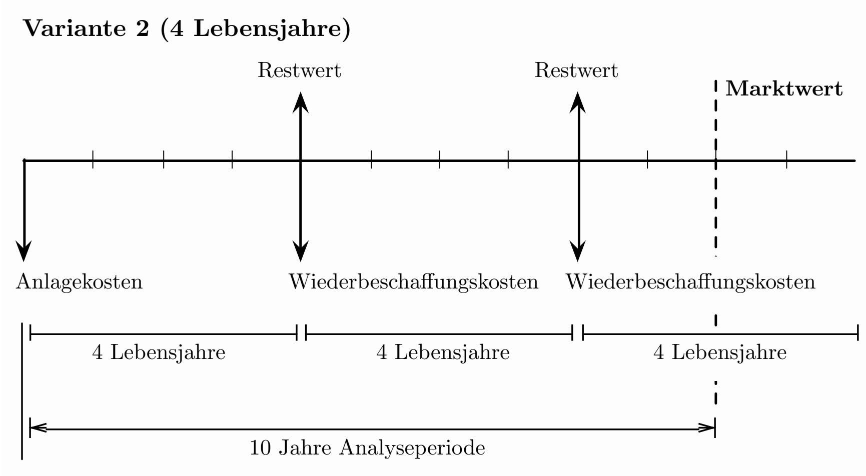



Abbildung 9.3: Abbruch nach einer festgelegten Zeitperiode, unter Verwendung des Marktwerts

#### 9.3.2.3 Annahme eines langen Zeitintervalls

Wenn das gemeinsame Vielfache zu weit in der Zukunft liegen sollte, kann man die Berechnung auch nach einer ausreichend langen Zeitperiode abbrechen, z.B. nach 100 Jahren – wie in Abb. 9.4 dargestellt. Kosten und Nutzen der Varianten, die nach diesem Zeitpunkt entstehen, werden schlichtweg weggelassen. Eine Rechtfertigung für diese Annäherung kann aus dem Effekt der Diskontierung gezogen werden. Selbst bei verhältnismässig kleinen Zinsraten wie 2% werden (z.B. nach der Regel 72 aus Kap. 8.1.4.3 geschätzt) jegliche Kosten nach 100 Jahren kleiner sein, als 1/4 dessen, was sie in Jahr 1 betragen würden. Tatsächlich sind sie sogar nur 13.8% so gross.

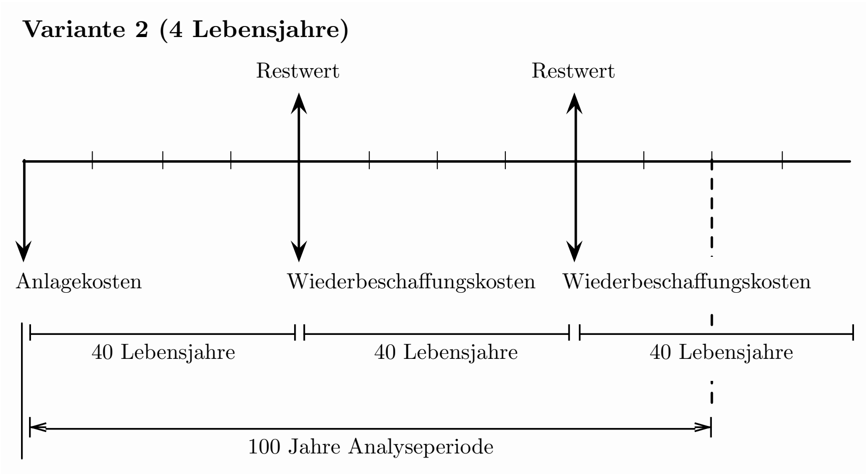



Abbildung 9.4: Abbruch nach einer langen Zeitperiode, weil das, was übrig bleibt, unwichtig ist

#### 9.3.2.4 Unendlicher Zeithorizont

Zahlungsströme können auch als eine ewige Rente modelliert werden. Auf diese Werte wird kein künstliches Enddatum benötigt.

### 9.3.3 Annuitätenmethode

In manchen Entscheidungssituationen wird es vorgezogen, Kosten und Nutzen nicht in Form eines einzigen Gegenwartswerts zu betrachten, sondern in Form von äquivalenten durchschnittlichen jährlichen Zahlungen. Unter Verwendung der Formel für Annuitäten kann dies leicht erreicht werden. Allerdings wird das Problem der Unterschiede in den Zeitfenstern der Varianten nicht gelöst, wenn man den Nettonutzen als konstante jährliche Zahlungen ausdrückt. Es ist bloss eine andere Methode, den gleichen Gegenwartswert darzustellen.

### 9.3.4 Auswahl, wenn entweder Kosten oder Nutzen der Varianten gleich sind

Wenn entweder die Kosten oder der Nutzen bei verschiedenen Varianten übereinstimmen, ist es offensichtlich, dass die Auswahl des grössten Nettonutzens bedeutet, jene Variante auszuwählen, welche den grössten Nutzen bzw. die geringsten Kosten aufweist.

### 9.3.5 Inkrementelle Kosten-Nutzen-Analyse ohne MARR

In dem vorher betrachteten Basisfall wurde der Nettonutzen für alle sich gegenseitig ausschliessenden Varianten berechnet und die Variante ausgewählt, die den grössten Nettonutzen aufweist. Ein zweiter, aber gleich funktionierender Weg, um die Variante zu finden, welche den grössten Nettonutzen generiert, ist die inkrementelle Kosten-Nutzen-Analyse. Diese Entscheidungssituation steht immer noch unter der Annahme, dass innerhalb der betrachteten Zeitperiode keine anderen Investitionsmöglichkeiten auftauchen werden als jene, die für die Entscheidung aufgelistet werden. Diese Methode geht von der folgenden Beziehung aus: Wenn Variante 2 einen grösseren Nettonutzen hat als Variante 1, dann ist per Definition wahr, dass

$$PWB_2 - PWC_2 > PWB_1 - PWC_1 \tag{9.3}$$

Daher ist ebenfalls wahr, dass

$$PWB_2 - PWB_1 > PWC_2 - PWC_1 \tag{9.4}$$

und unter der Voraussetzung, dass die rechte Seite grösser als Null ist, gilt

$$\frac{PWB_2 - PWB_1}{PWC_2 - PWC_1} > 1 \tag{9.5}$$

Die inkrementelle Kosten-Nutzen-Analyse geht sequentiell durch eine Liste von potenziellen Varianten, wobei an jedem Schritt gefragt wird, ob durch die neue Variante inkrementell mehr Nutzen als Kosten zu der vorherigen Variante hinzukommen. Diese Festlegung erfolgt auf Basis des Verhältnisses in Gl. 9.5. Falls dieses Verhältnis grösser als 1 ist, dann ersetzt die neue Variante die vorherige als Favorit, andernfalls nicht. Falls das Verhältnis gleich 1 ist, dann gibt es keinen Gewinn davon, zusätzliche Kosten hinzuzufügen. Daher wird in diesem Fall das neue Projekt abgelehnt. Ganz offensichtlich ist der Bruch undefiniert, falls es keine Veränderung in den Kosten gibt. In diesem Fall wird die neue Variante nur dann bevorzugt, wenn sie bei gleichen Kosten einen höheren Nutzen einträgt.

Es wurde bereits bemerkt, dass der Nenner in Gl. 9.5 positiv sein muss, damit diese Regel gilt. Andernfalls würde die Richtung der Ungleichung umgedreht werden. Um sicherzustellen, dass jede neue Variante, die verglichen wird, höhere Kosten als die vorhergehende hat, wird die Analyse in einer Anordnung nach den Kosten durchgeführt. Man beginnt mit den zwei kostengünstigsten Varianten und nimmt dann schrittweise die nächstfolgende Variante dazu, in der Reihenfolge aufsteigender Kosten. Wenn alle Varianten berücksichtigt worden sind, ist die übrig gebliebene Variante auszuwählen. Diese wird ausserdem die Variante mit dem höchsten Nettonutzen sein.

Tab. 9.2 zeigt ein Beispiel dafür. Sechs Projekte wurden in der Reihenfolge aufsteigender Kosten angeordnet. Man nehme an, dass die Budgetobergrenze bei 17 Mio. CHF liegt und Kombinationen von Projekten zulässig sind. Von links nach rechts vorzugehen stellt sicher, dass die inkrementelle Zunahme in den Kosten (der Nenner) immer positiv sein wird. Es werden viele Spezialfälle, die vorkommen können, gezeigt.

- Projekt E kann direkt ausgeschlossen werden, da es keinen positiven Nettonutzen aufweist.
- Projekt D könnte weggelassen werden, weil es einen geringeren Nutzen, aber die gleichen Kosten hat wie Projekt F – in diesem Fall wird es allerdings vorerst noch stehengelassen, um zu zeigen, was dann passiert.
- Projekt B kann ausgeschlossen werden, weil seine Kosten die Budgetgrenze überschreiten.
- Schlussendlich muss auch die Kombination von C + A untersucht werden, da diese Kombination innerhalb der Budgeteinschränkung von 17 Mio. CHF liegt

| Projekt | E | C | A | D | F | A+C | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kosten (Mio. CHF) | 5.0 | 7.0 | 10.0 | 12.0 | 12.0 | 17.0 | 18.0 |
| Nutzen (Mio. CHF) | 3.0 | 11.0 | 12.0 | 17.0 | 18.0 | 23.0 | 25.0 |
| B/C | 0.60 | 1.57 | 1.20 | 1.42 | 1.50 | 1.35 | 1.39 |
| B/C-1 | -40% | 57% | 20% | 42% | 50% | 35% | 39% |
| B-C (Mio. CHF) | -2.0 | 4.0 | 2.0 | 5.0 | 6.0 | 6.0 | 7.0 |

Tabelle 9.2: Inkrementelle Kosten-Nutzen-Analyse; Budget = 17 Mio. CHF; Kombinationen sind zulässig

Abb. 9.5 stellt die inkrementelle Kosten-Nutzen-Analyse grafisch dar. Projekt C hat einen positiven Nettonutzen. Daher hat es auch ein Verhältnis von Nutzen zu Kosten, das grösser als 1 ist. Aus diesem Grund liegt es in dem Diagramm, welches die Kosten auf der X-Achse und den Nutzen auf der Y-Achse zeigt, oberhalb der 45°-Linie. Die Überlegung, ob Projekt A einen grösseren Nettonutzen hat als Projekt C, kommt der Frage gleich, ob die inkrementelle Linie, die C und A verbindet, eine Steigung grösser als 1 hat. Das trifft nicht zu. Aus diesem Grund sollte Projekt A verworfen werden.

Mathematisch sieht dies wie folgt aus:

$$\frac{PWB_A - PWB_C}{PWC_A - PWC_C} = \frac{12 - 11}{10 - 7} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow C \tag{9.6}$$

Wenn man im gleichen Stil fortfährt, fügt Projekt D 6 Mio. CHF zusätzlichen Nutzen hinzu, aber nur 5 Mio. CHF an Kosten. Daher ist das Verhältnis des inkrementellen Nutzens zu den inkrementellen Kosten grösser als 1. Projekt D ersetzt daher Projekt C als Favorit. Es sollte beachtet werden, dass das Kosten-Nutzen-Verhältnis von C zu D von 1.57 zu 1.42 abfällt. Das zeigt, dass eine Entscheidung basierend auf dem Kosten-Nutzen-Verhältnis falsch gewesen wäre.

$$\frac{PWB_D - PWB_C}{PWC_D - PWC_C} = \frac{17-11}{12-7} = \frac{6}{5} > 1 \Rightarrow D \tag{9.7}$$

Vergleicht man nun Projekt D mit Projekt F, sieht man, dass die Rechnung nicht ausgeführt werden kann, da der Nenner gleich Null ist. Aber da mehr Nutzen bei gleichen Kosten möglich ist, wird F behalten.

$$\frac{PWB_F - PWB_D}{PWC_F - PWC_D} = \frac{18-17}{12-12} = \frac{1}{0} =? \Rightarrow \text{trotzdem } F \tag{9.8}$$

Wenn C und A gemeinsam als Projekt betrachtet werden, da diese Kombination innerhalb der Budgetgrenzen liegt, würde der Nutzen um 5 Mio. CHF (=23-18) steigen. Der Anstieg in den Kosten würde ebenfalls 5 Mio. betragen. Daher führen die zusätzlichen Kosten zu keiner Steigerung im Nettonutzen und das kombinierte Projekt sollte als Variante abgelehnt werden. Projekt F ist somit die Variante, die den Nettonutzen maximiert.

$$\frac{PWB_{AC} - PWB_F}{PWC_{AC} - PWC_F} = \frac{23-18}{17-12} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow F \tag{9.9}$$

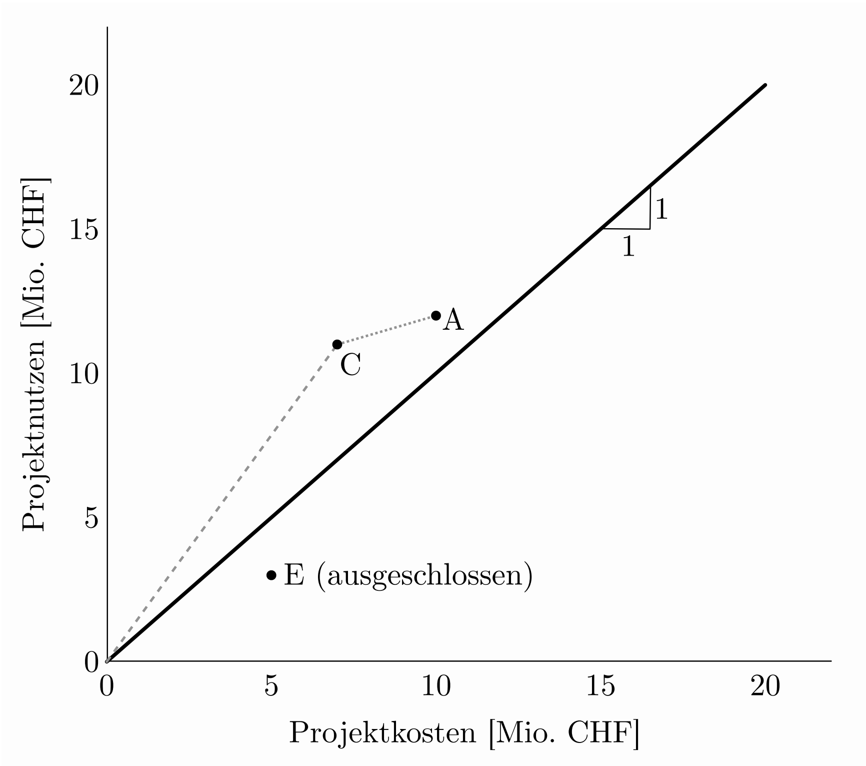



Abbildung 9.5: Grafische Darstellung der inkrementellen Kosten-Nutzen Analyse

Man mag sich nun fragen, warum die inkrementelle Analyse des Nettonutzens überhaupt benötigt wird, wenn man doch am Ende bei dem gleichen Ergebnis landet wie mit dem direkten Vergleich der Nettonutzenwerte. In der Tat – man benötigt sie nicht zwingenderweise. Allerdings erleichtert die Analyse der inkrementellen Veränderungen in Kosten und Nutzen zwischen zwei Varianten dem Entscheidungsträger, zu sehen, warum eine Variante besser ist als andere. Liegt es an den Kosten oder dem Nutzen? Die gesamten Kosten und den gesamten Nutzen in weitere Unterkategorien herunterzubrechen erlaubt eine noch detailliertere Analyse der Faktoren, die festlegen, welches die bessere Variante ist.

Das Kosten-Nutzen-Verhältnis des Projekts wird in Abb. 9.5 durch die Steigung der Linie repräsentiert, die den Projektpunkt mit dem Ursprung verbindet. Falls diese Steigung grösser als 1 ist, hat das Projekt einen positiven Gegenwartswert. Dies ist eine gute Analyse, aber für sich genommen noch kein ausreichender Grund, das Projekt einem anderen vorzuziehen. Wichtig zu bemerken ist, dass dieses Verhältnis nichts über die gesamte Menge des Nettogewinns aussagt, den das Projekt bietet. Nichtsdestotrotz stellt es einen Indikator für einen guten Projektkandidaten dar, der mit anderen Projekten verbunden werden kann, falls dies von den Einschränkungen her erlaubt ist.

### 9.3.6 Varianten aus einer Liste auswählen, wenn es nicht weiter definierte Alternativen gibt, die ebenfalls in Betracht gezogen werden müssen

Man weiss im Leben nie mit Sicherheit, was sich in der Zukunft ereignen wird, aber oft meinen wir zu glauben, etwas über die Wahrscheinlichkeit potenzieller Ereignisse zu wissen. In manchen Städten trifft dies z.B. auf Busfahren zu, allerdings nicht in der Schweiz! Man stelle sich z.B. folgendes Beispiel aus einer ländlichen Region vor: Es gibt Expressbusse und langsamere Regionalbusse. Es gibt sogar mehrere langsame Regionalbusse, die unterschiedlich detaillierte Routen nehmen, um am Ende die Haltestelle zu erreichen, von der man selbst abfahren möchte. Keiner der Busse folgt einem strikten Fahrplan, sodass die Ankunftszeit immer unsicher ist – selbst wenn die ungefähre Verteilung der Busse bekannt ist, abgesehen natürlich von unerwarteten Systemausfällen. Wenn man nun beispielsweise an der Bushaltestelle steht und beide Regionalbusse kommen sieht, aber keinen Expressbus, stellt sich – je nach Tageszeit und dem erwarteten Verkehrsaufkommen – die folgende Frage: Wäre es besser,

1. den Regionalbus 1 zu nehmen,
2. den Regionalbus 2 zu nehmen oder
3. auf den Expressbus zu warten?

Da die ersten zwei Busse nahezu gleichzeitig ankommen, ist die Wahl zwischen Eins und Zwei schlichtweg abhängig davon, welche der beiden Alternativen den grössten Nettonutzen bietet (wie z.B. mit der kürzesten Reisezeit nach Hause zu kommen). Diese Fragestellung lässt sich mit den bisher bekannten Entscheidungsmethoden lösen. Aber es wäre albern, nicht auch in Erwägung zu ziehen, auf die momentan noch nicht vorhandene Alternative des Expressbusses zu warten. In der konkreten Situation könnte man z.B. jemanden an der Bushaltestelle fragen, wie lang er schon dort gestanden hätte, ohne den Expressbus gesehen zu haben. Danach könnte man die Wahrscheinlichkeit schätzen, die man für die vermutete Wartezeit annimmt und sich dann darauf basierend entscheiden, welche Option man für den Heimweg wählen möchte.

Es ist nun so, dass der Expressbus ein *«bekanntes Anderes»* darstellt, das nur mit einem Unsicherheitsfaktor verknüpft ist. So eine Situation lässt sich mit den bisherigen Methoden lösen, nachdem der Nettonutzen in passender Weise nach unten angepasst wurde – aufgrund der Unsicherheit, dass der erwartete Nettonutzen tatsächlich eintrifft. Es gibt aber auch Entscheidungssituationen, in denen es auf ein *«unbekanntes Anderes»* Rücksicht zu nehmen gilt. Im Folgenden soll auf Methoden eingegangen werden, die das »unbekannte Andere» in den Prozess der Variantenauswahl miteinbeziehen. Allerdings muss vorgängig zunächst noch ein weiteres Konzept eingeführt werden: der MARR.

#### 9.3.6.1 *Der MARR: Eine erwartete Rendite aus einer nicht näher bezeichneten alternativen Variante*

Für manche Firmen (z.B. Venture Capital Unternehmen) oder auch für einige Departemente der Regierung ist das Auswählen von Projekten, die umgesetzt werden sollen, eine tägliche Aufgabe. Für diese kann angenommen werden, dass – falls die aktuelle Variante nicht akzeptiert wird – innerhalb kurzer Zeit eine neue Variante auftauchen wird, bei der möglicherweise das vorhandene Budget besser genutzt werden kann. Falls aber das Budget schon auf die bereits bekannten Varianten verteilt wurde, wird es nicht möglich sein, neue Varianten zu verfolgen, die sich später eröffnen könnten und möglicherweise besser wären. Dies ist der typische Fall, in dem Varianten berücksichtigt werden müssen, bevor man überhaupt weiss, was genau sie mitbringen. Solche Varianten können passenderweise als das *«unbekannte Andere»* bezeichnet werden. Nun stellt sich die Frage, wie man die Grösse des Nettonutzens, den eine solche nicht näher definierte Variante bietet, formuliert. Die Antwort auf diese Frage ist: So viel Nettonutzen (Profit), wie aus einer Variante entstehen würde, die eine Rendite = MARR abwirft und die gleichen Kosten (Ressourcen) bindet wie die aktuelle Variante.

Darauf, wie über den MARR bestimmt wird, wird hier nicht eingegangen. Es ist eine Vorgabe von Seiten des Auftraggebers und stellt dessen Vorstellungen über Renditemöglichkeiten von alternativen Varianten dar. Es beinhaltet nicht nur die erwartete durchschnittliche Rendite von unbekannten Varianten, sondern auch eine Kompensation für die fehlende Rendite während der Suche nach einer neue Variante. Ein Beispiel eines MARR könnte «5% pro Jahr» sein. Gewöhnlicherweise drückt die numerische Quantität des MARR eine Wachstumsrate über ein Jahr aus. Das heisst, bei Kosten in Höhe von CHF 100 heute wird ein MARR von 5% nur dann erreicht, wenn innerhalb eines Jahres ein Nutzen anfällt, der einem nominalen Jahreswert von CHF 105 entspricht. Würde man diesen Wert in heutigen Franken ausdrücken, wäre er betragsmässig kleiner, z.B. wären es bei einer Diskontrate von 3% nur noch CHF 101.94 (=105/1.03). Der Auftraggeber könnte genauso gut einen «zeitgleichen» MARR angeben, der hier mit MARR* bezeichnet wird. Der MARR* wird folgendermassen definiert.

$$1 + MARR^{*} = \frac{1 + MARR}{1 + i} \tag{9.10}$$

Mit dem MARR* können konsistenterweise Vergleiche von Kosten und Nutzen aus der gleichen Zeitperiode angestellt werden.

In Tab. 9.3 wird die gemäss eines MARR* von 50% erwartete Menge an Nutzen (B) und Nettonutzen (B-C) gezeigt, die für die drei erfolgreichen Projekte aus Tab. 9.2 als Vergleichswerte aufzustellen wäre. Neu dazu werden die zwei «inkrementellen Projekte» A-C und F-C gezeigt. Um den Vergleich mit dem *«unbekannten Anderen»* zu verdeutlichen, werden ebenfalls zwei «MARR ergänzte Projekte» aufgelistet. Diese sind in der Tabelle so bezeichnet: «C+MARR*(D,C)». Sie repräsentieren eine Kombination aus einem vorgegebenen Projekt und einem unbekannten anderen Projekt, die Nutzen mit einer Rate von MARR* generiert – bezogen auf das zusätzlich zu bindende Budget. Für das inkrementelle Projekt D-C ist das zusätzlich zu bindende Budget 12-7=5. Bei einem MARR* von 50% generiert dieses einen *diskontierten* Nutzen von 7.5. Somit würde ein MARR* ergänztes Projekt C+MARR*(D,C) einen erwarteten Nutzen in Höhe von 11 + 7.5 = 18.5 generieren.

| Projekt | C | D | D-C | C+MARR*(D,C) | F | F-C | C+MARR*(F,C) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kosten (Mio. CHF) | 7.0 | 12.0 | 5 | 12 | 12.0 | 5 | 12 |
| Nutzen (Mio. CHF) | 11.0 | 17.0 | 6 | 18.5 | 18.0 | 7 | 18.5 |
| Nutzen bei einem MARR*=50% (Mio. CHF) | 10.5 | 18 | 7.5 | 18 | 18 | 7.5 | 18 |
| B/C | 1.57 | 1.42 | 1.2 | 1.54 | 1.5 | 1.4 | 1.54 |
| B/C - 1 | 57% | 42% | 20% | 54% | 50% | 40% | 54% |
| B-C (Mio. CHF) | 4.0 | 5.0 | 1.0 | 6.5 | 6.0 | 2 | 6.5 |

Tabelle 9.3: Inkrementelle Kosten-Nutzen-Analyse mit MARR

Im Abschnitt 9.3.5 ergab die Analyse die folgende Reihenfolge für die Auswahl: F ist besser als D und D ist besser als C. Geprüft wurde, ob das inkrementelle Projekt mindestens ein Kosten-Nutzen-Verhältnis von 1 einträgt. Bei einer Analyse mit MARR wird lediglich das Prüfkriterium strenger gemacht – nämlich, ob das inkrementelle Projekt mindestens ein Kosten-Nutzen-Verhältnis von 1+MARR* einträgt. Es ist leicht zu sehen, dass ein Kosten-Nutzen-Verhältnis dasselbe wie eine Wachstumsrate ist, ausser dass letztere die «Eins» weglässt und Kosten und Nutzen auf den gleichen Zeitpunkt diskontiert werden.

Prüft man nun das Projekt C als Ganzes gegenüber dem MARR*, so sieht man, dass Projekt C angenommen werden sollte. Das Kosten-Nutzen-Verhältnis von 1.57 ist grösser als 1+MARR*, aber streng genommen ist diese Tatsache lediglich ein Indikator. Die wirkliche Begründung, warum Projekt C anzunehmen ist, liegt darin, dass es eine grössere *Menge* Nutzen einträgt als ein noch nicht definiertes, aber dennoch erwartetes Projekt eintragen würde, das mit der gleichen Ressourcenbindung (Kosten = 7.0) den MARR* einträgt. Dies sieht man in der Tab. 9.3, da 11 Mio. CHF mehr ist als 10.5 Mio. CHF.

Danach prüft man das Projekt D oder genauer gesagt, man prüft das inkrementelle Projekt D-C. Es ist bereits bekannt, dass D-C ein Kosten-Nutzen-Verhältnis grösser als 1 hat. Dieses beträgt sogar 1.2. Es ist jedoch geringer als 1.5, was mit einem Projekt mit MARR* erreicht werden würde. In «Menge Nutzen» ausgedrückt, sollten die zusätzlichen Kosten mindestens 7.5 Mio. CHF zusätzlichen Nutzen generieren. Weil das inkrementelle Projekt aber nur 6 Mio. CHF generiert, wird D-C *und damit auch D insgesamt verworfen.* Durch diese Art von inkrementeller Prüfung wird eine zusätzliche Ressourcenbindung auf ihre Ertragsfähigkeit gegenüber anderen möglichen Varianten getestet. Sofern der Projektkandidat durchfällt, bedeutet das, dass der Auftraggeber lieber das zusätzliche Budget ungebunden behalten sollte.

Danach prüft man das Projekt F. Hier sieht man schnell, dass das inkrementelle Projekt F-C nicht so viel Nutzen generiert, wie ein Projekt mit der gleichen Ressourcenbindung und einem Kosten-Nutzen-Verhältnis von 1+MARR* generieren würde: 7 Mio. CHF sind weniger als 7.5 Mio. CHF. Also wird bei einem MARR* von 50% auch das inkrementelle Projekt F-C und damit auch F insgesamt verworfen.

Zusammenfassend wird – obwohl ein Budget von 17 Mio. CHF besteht – in diesem Beispiel ein Projekt ausgewählt, welches nur gerade 7 Mio. CHF des Budgets bindet und damit einen Nettonutzen von nur 4 Mio. CHF generiert. Dies bleibt so, obwohl bekannte und annehmbare Projekte existieren, die eine grössere Menge an Nettonutzen generieren, z.B. 6 Mio. CHF, und obwohl die Zielfunktion «maximiere den Nettonutzen» heisst. Der Widerspruch lässt sich nur damit erklären, dass im Hintergrund die Annahme besteht, dass sich andere, noch nicht bekannte Projekte ergeben werden, die ihrerseits mit den noch nicht gebundenen Ressourcen eine Rendite von MARR* generieren werden. Tab. 9.4 zeigt nun den gesamten Nettonutzen aus den bekannten und unbekannten Projekten. Hier sieht man eindeutig, dass Projekt C kombiniert mit dem unbekannten Projekt *in der Erwartung* den grössten Nettonutzen generiert.

| Projekt | C | D | F |
|---|---|---|---|
| Kosten (Mio. CHF) | 7.0 | 12.0 | 12.0 |
| Nutzen (Mio. CHF) | 11.0 | 17.0 | 18.0 |
| Nettonutzen des bekannten Projekts | 4.0 | 5.0 | 6.0 |
| Ungenutztes Budget als Kapital für unbekannte Projekte | 10.0 | 5.0 | 5.0 |
| Nutzen bei einem MARR*=50% (Mio. CHF), bezogen auf die unbekannten Projekte | 15.0 | 7.5 | 7.5 |
| Nettonutzen des unbekannten Projekts | 5.0 | 2.5 | 2.5 |
| Totaler erwarteter Nettonutzen | 9.0 | 7.5 | 8.5 |

Tabelle 9.4: Totaler erwarteter Nettonutzen mit MARR

Auch wenn Menschen es selten mit einem MARR ausdrücken würden, sind Entscheidungsfindungen unter Berücksichtigung von Varianten, die zwar vermutet werden können, aber noch nicht da sind, keine Seltenheit. Beim Autostopp z.B. ist es sogar die Kernstrategie – zu Fuss zu gehen ist ja schliesslich immer bekannt und möglich. Die Entscheidung einer Firma, ein im Prinzip rentables Projekt nicht anzunehmen, weil sie sich für ein noch besseres Projekt bereit halten will, folgt der gleichen Logik. Zurückbesinnend auf das Konzept der Opportunitätskosten kann man sagen, dass der MARR eine Art allgemeiner Opportunitätskosten für das Binden von Ressourcen darstellt. Und nur solche Projekte, die ihre Opportunitätskosten übersteigen, werden nicht ausgeschlossen.

#### 9.3.6.2 Entscheidungsprozess nach inkrementellem Nettonutzen und MARR

1. Stelle sicher, dass sämtliche Werte zu dem gleichen Zeitpunkt ausgedrückt werden (d.h. richtig diskontiert wurden).
2. Verwirf Varianten, die aus folgenden Gründen offensichtlich nicht in Frage kommen:
   a) Die Kosten übersteigen das Budget
   b) Weniger Nutzen als eine andere Variante bei gleichen Kosten
   c) Mehr Kosten als eine andere Variante bei gleichem Nutzen
   d) Die Kosten sind höher als der Nutzen
3. Addiere dazu Kombinationen der verbleibenden Varianten, die gemäss Rahmenbedingungen zulässig sind.
4. Ordne die resultierende Liste an Varianten nach ihren Kosten (von klein nach gross).
5. Errechne für jede Variante das Kosten-Nutzen-Verhältnis (B/C) und verwirf jede Variante, für die dieses nicht grösser oder mindestens so gross wie 1+ MARR* ist.

   Bemerkung: MARR* ist genau wie MARR, nur um eine Zeitperiode diskontiert

6. Berechne mit der inkrementellen Variante das Kosten-Nutzen-Verhältnis der kleinsten zwei verbleibenden Varianten.

   Bemerkung: Die inkrementelle Variante wird immer so formuliert: die Grössere - die Kleinere
7. Falls das Kosten-Nutzen-Verhältnis $\geq 1+$ MARR* ist, behalte die grössere Variante, ansonsten fahre mit der kleineren Variante fort.
8. Wenn alle möglichen Varianten beurteilt sind, ist die verbleibende Variante diejenige, die den erwarteten Nettonutzen maximiert.

## 9.4 Vergleich von Varianten über die Zeit

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie das Timing von Cash-Flows mit den Diskontierungsraten bei einer Auswahl von Varianten interagiert. Um dies tun zu können, müssen Kosten und Nutzen jeweils von einer oder mehreren Cash-Flow-Reihen repräsentiert werden. Das Ziel bleibt die Maximierung einer Grösse. Die Herausforderung liegt hierbei darin, klar zwischen den drei relevanten Raten zu unterscheiden: der Minimum Acceptable Rate of Return (MARR), der Diskontierungsrate ($i$) und der Internal Rate of Return (IRR).

### 9.4.1 Die Rolle der Diskontierungsrate für die Auswahl zwischen Optionen

Falls Kosten und Nutzen als Cash-Flows dargestellt sind, die zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten, ist aus Kap. 8 bereits bekannt, dass diese – bevor man sie miteinander vergleichen kann – zunächst mittels der Diskontierung in die gleichen «Masseinheiten» konvertiert werden müssen. Erst nachdem alle Cash-Flows in eine standardisierte Masseinheit umgewandelt wurden, können sie gültig aufaddiert werden. Daher kann die Auswahl der Variante, die den höchsten (erwarteten) Nettonutzen bietet, erst durchgeführt werden, nachdem alle Cash-Flows korrekt diskontiert wurden. Was in diesem Kapitel gezeigt werden soll, ist, dass sich – in Abhängigkeit der Diskontierungsrate – ändern kann, welche Variante den grössten Nettonutzen mit sich bringt. In der Praxis wird der Begriff «Zinssatz» als Synonym für die Diskontierungsrate verwendet, da in der Realität ein Zinssatz gewählt wird, mit dem dann diskontiert wird. Deshalb hört man auch oft «wir diskontieren mit einem Zinssatz von 3%». Dementsprechend wird als Symbol für die Diskontierungsrate hier ebenfalls $i$ verwendet.

In Abschnitt 8.1.3.4 wurde erklärt, dass eine Diskontierungsrate unterschiedliche Bestandteile enthalten kann – die Inflation, um eine Korrektur für den sich verändernden Wert einer nominalen Währungseinheit anzubringen, die risikofreie reale Rate of Return, um die risikofreien Opportunitätskosten des Leihens von Geld zu repräsentieren und eine Risikoprämie, um die Besorgnis des Verleihers widerzuspiegeln, dass der Leiher möglicherweise nicht in der Lage sein wird, den Kredit zurückzuzahlen. Die Inflationsrate muss mit Sicherheit in die Diskontierungsrate eingehen, da dies definitiv eine Frage der Umrechnung von Einheiten ist. Die risikofreie Rate sollte bei der Diskontierung von Varianten normalerweise auch enthalten sein, da es realistisch ist, sich vorzustellen, heute Gelder bei diesem Zinssatz anzulegen, um somit am Ende die zukünftigen Kosten bezahlen zu können. In der Realität handelt es sich bei der Diskontierungsrate, die für Bauingenieurprojekte normalerweise gesetzlich vorgeschrieben ist, um die Verleihrate der Regierung (des Staats), die oft als risikofrei angenommen wird.

Einige Unternehmen bevorzugen es, für die Diskontierung von geplanten Projekten höhere Zinssätze zu benutzen. Sie rechtfertigen dies entweder mit dem Risiko des Projekts selbst oder mit dem

Risiko des Projektsponsors. Beides kann in gewissen Situationen vernünftig sein. Im Bauingenieurwesen und bei anderen Projekten mit grösserem Zeithorizont (sodass eine grosse Wahrscheinlichkeit besteht, dass mit hohen hinausgeschobenen Kosten für regelmässigen Unterhalt oder für Rückbau und Beseitigung zu rechnen ist), kann Diskontierung dazu führen, dass die zukünftigen Kosten im Entscheidungsprozess extrem unterbewertet werden. Daher wird hier empfohlen, einen Diskontierungsfaktor zu verwenden, der nicht höher ist als die Rate für eine sichere Staatsanleihe, die genutzt werden könnte, um die erwarteten zukünftigen Kosten schon vom heutigen Zeitpunkt aus zu finanzieren. Diese Thematik wird weiter unten noch vertieft.

*Wichtig: Die Diskontierungsrate sollte verwendet werden, um zukünftige Werte in äquivalente Gegenwartswert umzuwandeln.*

### 9.4.2 Die Rolle des MARR in der Entscheidung zwischen Varianten

Wie im vorangehenden Abschnitt bereits eingeführt, drückt die Minimum Acceptable Rate of Return (MARR) die Opportunitätskosten der Bindung von Ressourcen aus Sichtweise des Auftraggebers aus. Sie wird normalerweise als Rate of Return pro Jahr ausgedrückt und sollte – falls es in der Praxis in einer Situation nicht explizit angegeben ist – als solche angenommen werden. Eine Variante, die Nutzen mit einer langsameren Rate generiert als der MARR, sollte abgelehnt werden, weil angenommen wird, dass ein anderes Projekt auftauchen wird, das einen *grösseren* Nutzen bringt, während die gleiche Menge an Ressourcen verbraucht wird. Falls diese Variante noch zu finden und zu definieren ist, muss die Rate, mit der Nutzen erwirtschaftet wird, natürlicherweise grösser sein als der MARR, damit die durchschnittliche Rate der Nutzenerwirtschaftung über die gesamte Zeitperiode – inklusive der Zeit, die für das Finden einer neuen Möglichkeit benötigt wird, ohne dass in dieser Zeit Nutzen generiert wird – grösser als der MARR ist.

Die numerische Grösse eines MARR kann angepasst werden, um Vergleiche mit Kosten-Nutzen-Verhältnissen zu ermöglichen. Dies wird mittels Gl. 9.10 erreicht. In dieser Darstellung wird dieses Verhältnis der aktuellen Zeitperiode als MARR* bezeichnet.

*Wichtig: Der MARR drückt die Opportunitätskosten für die Bindung begrenzter Ressourcen aus.*

### 9.4.3 Umkehrung der Bewertung von Varianten bei Verwendung unterschiedlicher Diskontierungsraten

Man kann leicht zwei Zahlungsserien finden, bei denen sich die Reihenfolge des NPV ändert, wenn man von einer kleinen zu einer grossen Zinsrate wechselt. Ein Beispiel dafür ist in Tab. 9.5 gezeigt. Wenn man annimmt, dass $i_1 = 5\%$ und $i_2 = 15\%$ sind, dann sind beide Projekte NPV-positiv bei beiden Diskontraten. Bei niedrigen Diskontraten wird B bevorzugt, bei höheren A.

| | **Geldflüsse** | | | | | | **Netto Gegenwartswert** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **NPV (5%)** | **NPV (15%)** |
| **A** | -1000 | 1500 | 1500 | 0 | 0 | 0 | 1789 | 1439 |
| **B** | -1000 | 700 | 700 | 700 | 700 | 700 | 2031 | 1347 |

Tabelle 9.5: NPV-Reihenfolge in Abhängigkeit von der Grösse von $i$

An diesem Beispiel wird deutlich, dass der Diskontsatz eine *Zeitpräferenz* ausdrückt, die bestimmt, wie sehr weit entfernte Ereignisse den Entscheidungsprozess beeinflussen sollen. Abb. 9.6 zeigt, wie sich der NPV für verschiedene Zinssätze für die Projekte in Tab. 9.6 entwickelt. Obwohl Projekt A bei einem Diskontsatz von 0, also mit den absoluten Zahlen gerechnet, eigentlich einen negativen Gesamtbeitrag hätte, erzeugt es immer noch einen hohen NPV bei genügend grossem Zinssatz.

Besonders heikel wird es dann, wenn es nicht nur frühe Investitionskosten gibt, sondern auch bedeutsame verzögerte Kosten, wie z.B. für den Rückbau von Anlagen. Deshalb sollten zukünftige Kosten nie mit einer höheren Diskontierungsrate diskontiert werden, als heute bei einem sicheren Schuldner Geld für die Finanzierung dieser Kosten angelegt werden könnte. Es ist natürlich möglich, einzelne Zahlungen mit speziellen Diskontierungsraten zu diskontieren.

| | **Geldflüsse** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **NPV (5%)** | **NPV (15%)** |
| **A** | -1000 | 1050 | 1050 | 0 | 0 | -1150 | 51.33 | 135.24 |
| **B** | -1000 | 500 | 500 | 500 | 500 | -700 | 224.51 | 79.47 |

Tabelle 9.6: Späte Kosten und Projektgegenwartswerte

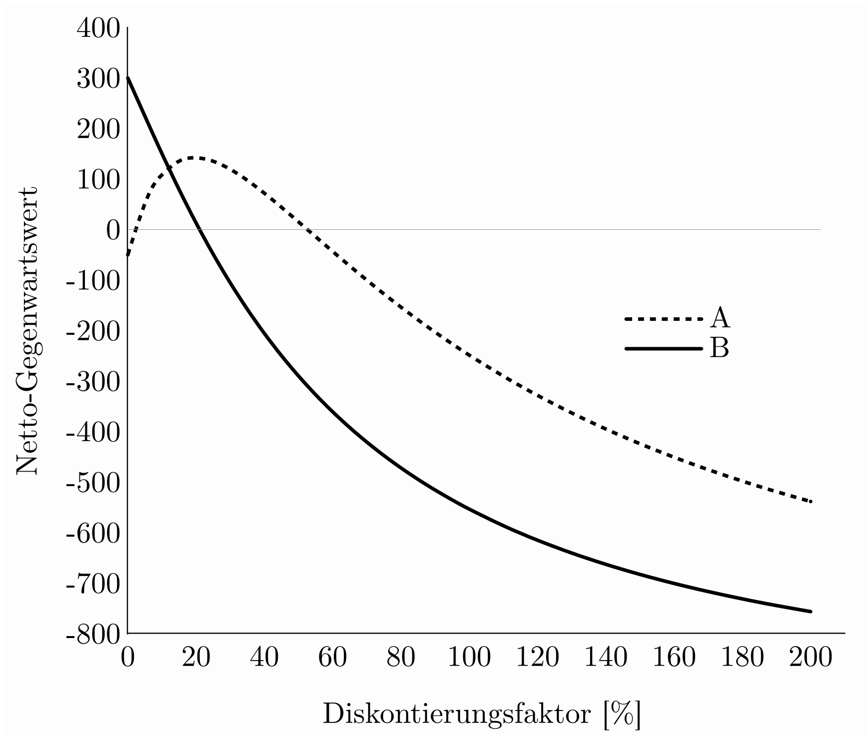



Abbildung 9.6: Späte Kosten und Projektgegenwartswerte

### 9.4.4 Der interne Zinsfuss (Internal Rate of Return, IRR)

Bis jetzt sind die Diskontraten als gegeben angenommen worden und entweder die Zahlungen oder der Gegenwartswert wurden als unabhängige Variablen gesucht. Es wurde z.B. danach gefragt, welche ewige Rente gleichbedeutend mit einem Gegenwartswert von 1'000 CHF bei 2% Zinsen ist (Lösung: 50 CHF). Man könnte aber auch fragen, ab welchem Zinssatz ein Projekt einen Nettonutzen von 0 hat, wenn es 1'000 CHF kostet und eine ewige Rente von 50 CHF liefert. Die Antwort wäre 2% und dies ist gleichbedeutend mit dem IRR der beschriebenen Zahlungsserie. **Der IRR**

**ist als Diskontierungsrate definiert, die für eine gegebene Reihe von Zahlungen einen Gegenwartswert von 0 liefert.** In der Praxis ist er oft ein Kandidat für Entscheidungsregeln.

| Geldfluss-reihe | Zahlungen 1 | 2 | 3 | 4 | IRR |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | -100 | 0 | 0 | 300 | 44 % |
| **B** | -100 | 0 | 300 | 0 | 73 % |
| **C** | -100 | 300 | 0 | 0 | 200 % |
| **D** | -100 | 100 | 100 | 100 | 84 % |

Tabelle 9.7: Der IRR beschreibt das Verhältnis von Zahlungen und Zeitpunkten

Eine Möglichkeit, sich den IRR vorzustellen, ist als Statistik von Zeitpunkt und Grösse von Zahlungen. In Tab. 9.7 sind 4 Zahlungen mit demselben Gesamtnutzen sowie ihrem IRR aufgelistet. Die ersten 3 zeigen, dass ein «zum Jetzt herbewegen» einer Zahlung deren IRR erhöht. Beim Vergleich der Reihen B und D wird deutlich, dass ein gleichmässig zeitlich gewichteter Durchschnitt nicht auch einen gleichen IRR bedeutet. Eine grosse Zahlung in den mittleren Jahren liefert einen niedrigeren IRR als ein Aufteilen derselben Zahlung über einen längeren Zeitraum. Dies resultiert aus der Krümmung der Diskontierungsfunktion $D(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$ über die Zeit. Mit $1 + i > 1$ nimmt die Funktion über t immer langsamer ab. Deshalb ist der Einfluss grösser, wenn eine Zahlung in Richtung «Jetzt», als wenn sie in Richtung «Zukunft» verschoben wird. Ein gleichmässiges Verteilen von Zahlungen über die Zeit liefert einen höheren IRR als eine einzelne Zahlung in der Mitte.

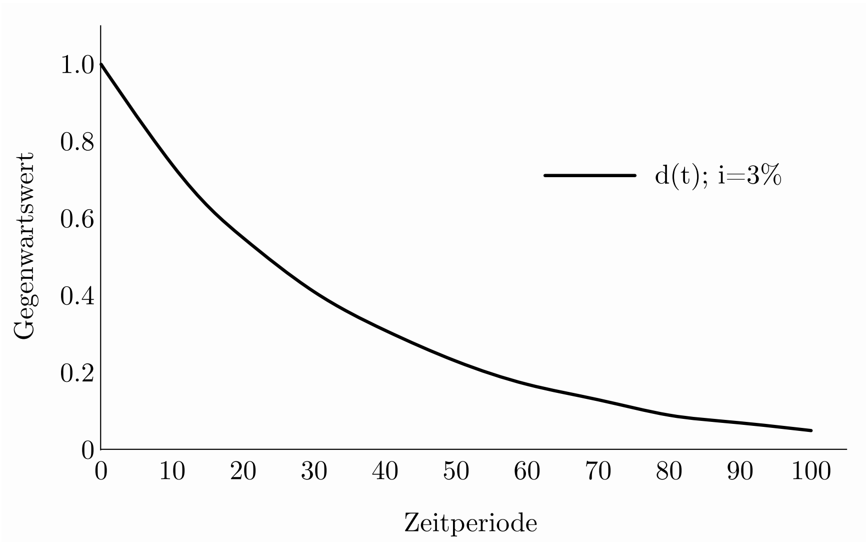



Abbildung 9.7: Diskontierungsfunktion für d $\leq 1$

Der IRR ist eine Statistik und enthält deshalb weniger Information als die Daten, aus denen er gebildet wurde. Genauso wie andere Statistiken, wie «Median» oder «Mittelwert», kann der IRR in die «IRRe» führen. Aus vorhergehendem Absatz kann man herauslesen, dass es vermutlich vorteilhaft ist, Einnahmen zum Jetzt und Ausgaben in die Zukunft zu verschieben, sofern man einen hohen IRR generieren will. Dies ist aber nicht immer der Fall, wie in Tab. 9.8 ersichtlich wird. Reihe B hat einen grösseren IRR als Reihe A, aber dies trifft nicht für Reihe C gegenüber A oder B zu, obwohl die Einnahmen zum Jetzt und die Ausgaben in die Zukunft gewandert sind.

| Geldfluss-reihe | Zahlungen 1 | 2 | 3 | 4 | IRR |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | -100 | -100 | 200 | 200 | 41.42 % |
| **B** | -100 | 200 | 200 | -100 | 162.80 % |
| **C** | 200 | 200 | -100 | -100 | -29.29 % |

Tabelle 9.8: Der IRR kann überraschende Werte liefern

Um zu verstehen, was hier vorgeht, ist es sinnvoll, sich Abb. 9.8 anzusehen, welche zeigt, wie sich der Gegenwartswert einer Reihe von Zahlungen mit dem Zinssatz ändert. Auf der linken Seite, wo der Zinssatz gegen Null geht, ist der Gegenwartswert einfach die Summe der Zahlungen. Deshalb spielen Timing und Reihenfolge keine Rolle. Generell gilt, dass der Faktor Zeit weniger wichtig für den Nettonutzen wird, je niedriger der Zinssatz in absolutem Wert ist. Je höher der Zinssatz, desto unwichtiger werden weit entfernte Zahlungen. Weil bei B die Einnahmen früher kommen, ist B weniger von einem steigenden Zinssatz betroffen als A.

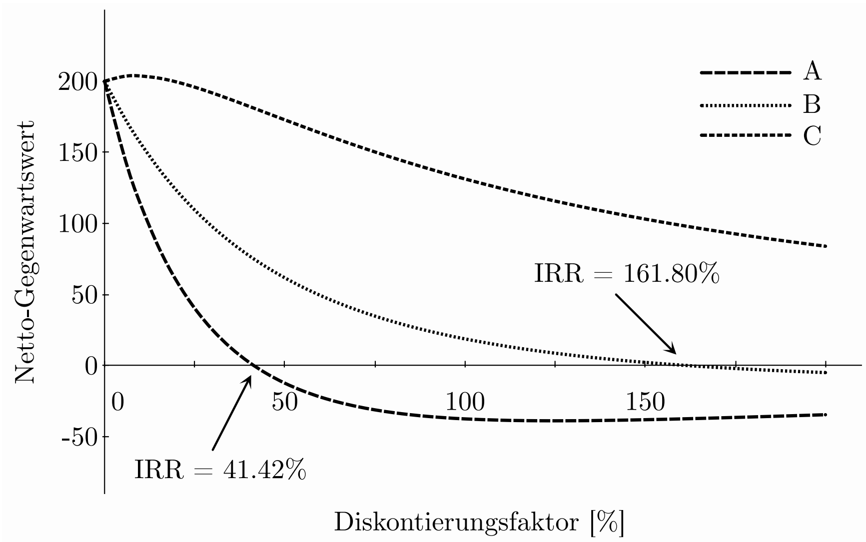



Abbildung 9.8: Gegenwartswert als Funktion des Zinssatzes

Es wurde bereits auf die Komponenten des Zinssatzes eingegangen. Eine davon war eine Risikoprämie. Je riskanter die Situation, desto höher der Zinssatz. So sollte Abb. 9.8 interpretiert werden. Weil unter B die Einnahmen früher kommen als unter A, ist der Gegenwartswert von B in einer riskanten Situation höher. Dies ist eine bedeutende Einsicht für den IRR als Entscheidungskriterium. Es wird gleich demonstriert, dass dies aber auch nicht immer ganz richtig ist. Unter normalen Umständen ist B – mit einem höheren IRR als A – robuster gegenüber höheren Zinssätzen. Doch bedeutet das, dass B in der *jetzigen Situation* besser ist als A? Dies ist die entscheidende Frage.

Tab. 9.9 und Abb. 9.9 zeigen eine typische Situation, bei der zwei verglichene Projekte nicht klar bewertbar sind. Wenn ein Projekt frühere und grössere Zahlungen hat, dann wäre die Entscheidung klar. Hier aber sind die undiskontierten Summen der Zahlungen nicht gleich. Ausserdem ist die undiskontierte Summe der Zahlungen kleiner für das Projekt, bei dem die guten Zahlungen früh kommen. Deshalb gibt es einen Wechsel und kein Projekt hat einen besseren NPV für alle Zinssätze – der Punkt, an dem beide Projekte den gleichen Netto-Gegenwartswert haben (Break-even), liegt bei $i = 17.87\%$. Welches sollte also bevorzugt werden? Projekt A hat einen höheren

IRR, aber Projekt B hat einen höheren NPV bei Zinssätzen von weniger als rund 18%. Die Antwort, welches Projekt also bevorzugt werden sollte, hängt natürlich von dem Zinssatz ab, den der Entscheidungsträger für die Berechnung erwartet. Ein höherer IRR ist daher nicht immer besser.

| | **Geldflüsse** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **A** | -1000 | 1500 | 1500 | 0 | 0 | 0 |
| **B** | -1000 | 750 | 750 | 750 | 750 | 750 |

Tabelle 9.9: Geldflüsse

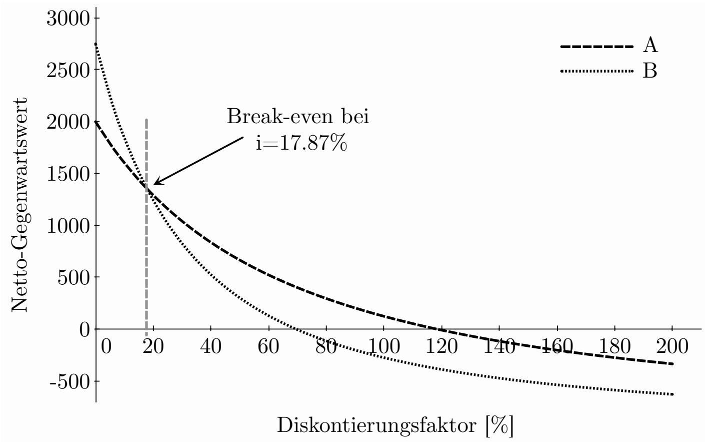



Abbildung 9.9: NPV in Abh. der Zinsrate

#### 9.4.4.1 Verhältnis von IRR und Zinssatz

Mit dem erlangten Verständnis über die Bedeutung des IRR und die Verwendung dieser Informationen in einem Entscheidungsprozess kann nun in Abb. 9.8 erkannt werden, dass der IRR derjenige Zinssatz ist, bei dem der NPV einer Serie von Zahlungen exakt 0 ist. Weshalb ist dies wichtig?

Zuerst zeigt sich, dass der IRR eine Aussage darüber macht, wie robust ein Projekt gegenüber einem Anstieg des Zinssatzes ist. Je höher der IRR, desto risikoreicher kann eine Umgebung sein, ohne dass das Projekt einen negativen NPV bekommt. Ausserdem zeigt sich, dass die Reihenfolge, die der IRR liefert, nicht unbedingt mit der Reihenfolge des NPV übereinstimmt. Aus der Diskussion über den MARR sollte klar sein, dass man die Rate of Return nicht mit der Bewertung der Zukunft gleichsetzen darf. Ein Projekt wird anhand des NPV mit einem Zinssatz bewertet, der an das Problem des Entscheidungsträgers angepasst ist – und nicht mit dem Zinssatz, bei dem ein gegebenes Projekt einen positiven NPV hat.

Generell (aber nicht immer) gilt: Der IRR drückt die Robustheit einer Variante gegenüber dem Risiko von höheren Diskontierungsfaktoren aus.

#### 9.4.4.2 Der IRR kann sich ungewohnt verhalten.

In Abb. 9.6 wird deutlich, dass es zwei unterschiedliche IRR für Projekt A gibt. Welcher ist aber für eine Entscheidung der richtige? Abb. 9.10 verlängert die x-Achse in die negative Richtung, zeigt aber sonst das gleiche wie Abb. 9.8. Die Zahlungsreihen wurden durch Vertauschen der Reihenfolge von Einnahmen und Ausgaben erstellt. Es ist zu beachten, dass bei einem Zinssatz von 2% (welcher häufig in der Schweiz für Regierungsprojekte verwendet wird) alle 3 Projekte einen positiven NPV haben. Bei dem NPV (mit 2%) als Entscheidungskriterium sollte Projekt C gewählt werden. Bei der Verwendung des IRR als *Entscheidungskriterium* sollte hingegen Projekt B gewählt werden. **Der NPV ist jedoch das richtige Entscheidungskriterium!**

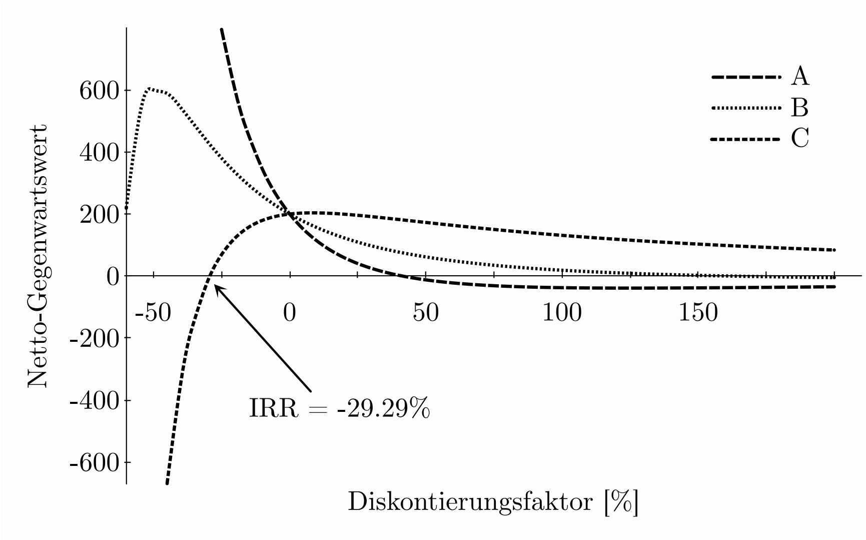



Abbildung 9.10: Die Reihenfolge der Zahlungen kann zu einem ungewohnten Verhalten des IRR führen

Der IRR ist die Lösung folgender Gleichung:

$$x_0 + x_1 d + x_2 d^2 + x_3 d^3 + \ldots + x_n d^n = 0$$

mit $d = \frac{1}{1+i}$.

Dies ist ein Polynom höherer Ordnung und kann für d mehrere Wurzeln oder gar keine reellen Wurzeln haben. Aus diesem Grund verhält sich der IRR manchmal ungewöhnlich und er kann zu Fehlinterpretationen führen. Die generelle Regel ist: Bei mehreren reellen Wurzeln ist die *kleinste positive Wurzel* diejenige, welche als IRR verwendet werden sollte.

Trotzdem kann ein Projekt einen positiven NPV haben, obwohl der IRR negativ ist. Insbesondere wenn numerische Methoden wie Excel verwendet werden, sollte einem bewusst sein, dass diese nicht immer die richtige Wurzel ausgeben. Der IRR ist ein statistischer Wert, der mit Vorsicht zu verwenden ist. Es stimmt ausserdem nicht, dass – wie manchmal behauptet wird – ein hoher IRR besagt, dass investiertes Kapital früher frei wird und in andere Projekte investiert werden kann. Ein Beispiel dafür ist eine chemische Fabrik. Das Kapital könnte so lange gebunden bleiben, bis eine Kontamination des Bodens nicht ausgeschlossen werden kann. Dies ist aber erst dann der Fall, wenn die Fabrik abgerissen wird und der anstehende Boden untersucht werden kann. Daraus folgt, dass sich die Frage, ob das Kapital gebunden bleibt oder nicht, nicht unbedingt vom IRR ableiten lässt.

Nur wenn $x_0$ negativ ist und alle anderen $x_i$ positiv sind, verhält sich der NPV als Funktion von $i$ wie in Abb. 9.11. Dies nennt man einen *regulären* Verlauf. Dann gilt: Wenn die Projekte einen grösseren IRR als MARR haben, ist $NPV_M\left(\right) > 0$ – ansonsten nicht. Für diesen Fall bedeutet der IRR tatsächlich den grössten Zinssatz, für den das Projekt einen nicht-negativen NPV hat und nicht nur, dass das Polynom auch an dieser Stelle eine Nullwert annimmt.

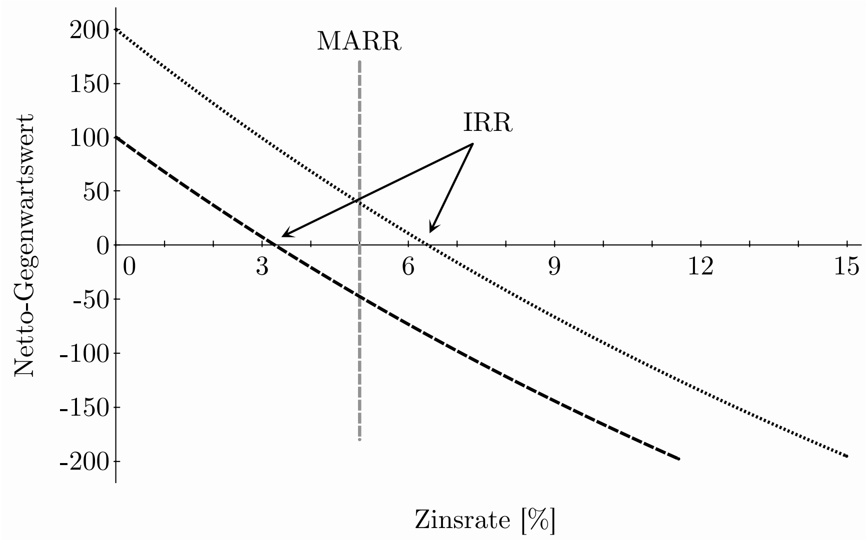



Abbildung 9.11: MARR und IRR im Standardfall

Fundamental ist: Der IRR ist eine komplexe Statistik über die Grössen und Zeitpunkte von Zahlungen einer Variante. Davon, ihn als Entscheidungskriterium für Bauingenieurprojekte zu verwenden, ist abzuraten, da diese meistens komplexe und langjährige Zahlungsstrukturen aufweisen. Ein besserer Ansatz verläuft über den NPV – bei einer passenden Diskontierungsrate und allfälliger Prüfung gegenüber einem vorgegebenen MARR.

### 9.4.5 Payback-Methode: interessant, aber nicht wirklich nützlich

Die Payback-Methode ist eine weitere Summenstatistik von Zahlungsgrösse und -zeitpunkt, die man manchmal in der Praxis hört. Sie ist für eine Serie von Zahlungen $x_i$ als T so definiert:

$$Min\,\{T\} \text{ so dass } \sum_{i=0}^{T} x_i \geq 0$$

Wie der Name sagt, ist T die Zeit, die es braucht, damit die positiven Einkünfte gerade die negativen Kosten ausgleichen. Dies ist eine grobe Abschätzung der Machbarkeit eines Projekts. Die Schwächen sind:

- Alle Informationen nach T werden ignoriert.
- Es gibt keine Diskontierung; alle Werte werden als gleich angesehen.

Falls es sowohl negative als auch positive Zahlungen während der Lebensdauer des Projekts gibt, kann es mehr als ein T geben. In diesem Fall sollte das grösste T gewählt werden, wenn danach gefragt wird, was die Payback-Periode ist.

## 9.5 Zusammenfassung

Es wurden Entscheidungssituationen betrachtet, die eine Auswahl aus einer Liste von Projekten erfordern. Diese Auswahl kann entweder unbeschränkt sein – dann würde man alle Projekte wählen, die die Kriterien erfüllen – oder sie kann beschränkt sein. Dann kann aus den sich gegenseitig ausschliessenden Projekten nur eines gewählt werden. Das Auswahlkriterium wird gegenüber einer Zielfunktion ausgedrückt, z.B.: «Wähle das Projekt, das den Wert der Zielfunktion maximiert». Bei der Analyse einer Entscheidungssituation ist es wichtig, zuerst zu verstehen, was genau das Ziel ist.

Die Auswahl des Projekts wird normalerweise über den Nettonutzen getroffen, bei dem alle Kosten und Nutzen in Geldeinheiten ausgedrückt werden. Abhängig von der Zielfunktion sind verschiedene Kosten relevant. Versunkene Kosten wären wichtig, wenn sie nicht schon angefallen wären. Deshalb sollten sie nie in den Entscheidungsprozess integriert werden. Opportunitätskosten sind eine Verallgemeinerung von Kosten, die über normale monetäre Kosten hinausgehen. Opportunitätskosten anstatt der reinen monetären Kosten sind für den Entscheidungsträger relevant, wenn es Budgetbeschränkungen gibt. Sie repräsentieren den Wert, den man aufgibt, sobald die Entscheidung für eine bestimmte Variante getroffen wird. Wenn zwischen Projekten entschieden werden soll, die unterschiedliche Auswirkungen auf das Budget haben, dann müssen diese nicht nur die Kriterien an sich erfüllen, sondern auch die inkrementellen Kriterien. Der inkrementelle Test wird immer gegenüber den Opportunitätskosten der Verwendung einer Ressource durchgeführt.

Eine Alternative dazu ist es, den Verbrauch einer beschränkten Ressource zwischen den Projekten vergleichbar zu machen. Entweder findet man ein gemeinsames Vielfaches der Lebensdauern oder man schneidet ein Intervall ab und ersetzt es durch einen Restwert. Ausserdem kann man die Projekte so oft wiederholen, bis der Unterschied in der Projektlänge vernachlässigbar klein ist, oder man kann direkt eine unendliche Dauer annehmen.

Grundsätzlich ist jenes Projekt auszuwählen, das den Nettonutzen maximiert. Dies ist ein Wert und keine Rate. Es macht aber keinen Unterschied, ob der Nettonutzen als Einzelwert oder als eine ewige Rente angegeben wird. Es ist nützlich, wenn alle Projekte dieselben Nutzen oder Kosten haben, weil man dann nur auf den anderen Wert achten muss (Kosten oder Nutzen). Wenn sie aber nicht gleich sind, muss ein Differenzprojekt gebildet werden, das dann mit den Opportunitätskosten verglichen wird. Der schwierigste Punkt beim Erlernen von inkrementellen Entscheidungsprozessen ist, dass man in der Reihenfolge der aufsteigenden Kosten vorgeht.

In einfachen Situationen werden die Opportunitätskosten für die Bindung von Budgetressourcen durch den Diskontsatz abgebildet. Es ist jedoch leicht vorstellbar, dass es Projekte gibt, bei denen der MARR höher ist als der bestimmte Diskontsatz. In dieser Situation wird der MARR zu einer neuen Beschränkung. Um zu überprüfen, ob das Projekt die Beschränkungen erfüllt, muss das Kosten-Nutzen-Verhältnis mit einem zeitgleichen MARR (d.h. MARR*) verglichen werden.

Manchmal werden Projekte hoch gelobt, weil sie einen hohen IRR aufweisen. Es ist wichtig zu wissen, dass der IRR eine Statistik ist, die ihre Tücken hat und deswegen vorsichtig angewendet werden muss. Überdies bedeutet ein grösserer IRR nicht gleich ein besseres Projekt. Weil der IRR eine höhergradige Polynomialfunktion ist, sagt er nichts über Zeitpunkt und Grösse von Zahlungen aus. Er sagt auch nichts über die Präferenzen des Entscheidungsträgers bezüglich Timing aus – dies macht nur der NPV bei einem passenden Diskontsatz.

## 9.6 Kontrollfragen

- Überspitzt gefragt: Was kann man «essen» – den Nettonutzen oder die Rate der Rendite?
- Wird, gemäss dem Konzept der Opportunitätskosten, ein Angestellter für das bezahlt, was er macht – oder für das, was er nicht macht?
- Welche Prozentzahl an Studenten vergessen an der Prüfung – trotz eindeutigem Hinweis in der Vorlesung – dass die bereits abgeschlossene Vorstudie nicht in die Kosten-Nutzen-Analyse mit einbezogen werden soll?
- Muss der Nutzen beim Maximum der Nettonutzenfunktion grösser sein als die Kosten?
- Fallen bei den meisten Bauingenieurprojekten die Kosten und der Nutzen gleichzeitig an? Was ist ein typischer Zeitverlauf bei solchen Projekten?
- Wann können zwei Entscheidungssituationen nicht als voneinander unabhängig betrachtet werden?
- Wenn eine Anlage 14 Jahre und die andere 15 Jahre hält, wie würden die zwei Formeln aussehen, mit denen die Varianten verglichen werden könnten?
- Wenn nach Ende der Lebenszeit Deinstallationskosten anfallen, sollten diese noch einkalkuliert werden, wenn die Marktwertmethode benutzt wird?
- Wenn man mit der gleichen Rate diskontiert wie die, die man für den Anstieg der einzelnen Kosten erwartet – um wie viel kleiner werden die letzten Wiederbeschaffungskosten sein als die ersten?
- Was ist leichter zu berechnen, 100 Wiederholungen einer Zahlung oder eine unendliche Wiederholung?
- Gibt es für jeden Gegenwartswert eine äquivalente konstante Zahlungsreihe?
- Wenn es keine Budgetbeschränkung gibt, welche Regel führt zum grössten Nettonutzen?
- Wenn Sie sich überlegen, einen neuen Laptop zu kaufen, denken Sie dann an das «unbekannte Andere»? Falls ja, wie wird davon Ihre Entscheidung beeinflusst?
- Wie gross ist der MARR*, wenn gilt: $i = 3\%$ und MARR=9%?
- Was drückt das Konzept des MARR aus?
- In Abb. 9.11 hat das Projekt A einen höheren IRR als Projekt B. Der Staat schreibt eine Diskontierungsrate von 2% vor. Welches Projekt sollte gewählt werden?
- Wenn der IRR so oft in die Irre führt, warum wird er dann überhaupt gelehrt?
- Was bestimmt die höchstmögliche Anzahl Lösungen einer IRR-Gleichung?

# 10 Kosten-Nutzen-Untersuchungen

Im letzten Abschnitt wurde diskutiert, wie der Nettonutzen eines Projekts berechnet werden kann, wenn bekannt ist, welche Kosten oder Nutzen relevant sind, wann beide jeweils anfallen und wie gross die Werte sind. Wenn man die Kosten eines Projekts berechnet, muss zuerst festgelegt werden, *was* und mit *welchem Wert* inkludiert wird. Beide Entscheidungen können (und werden oft) von interessierten Bürgern beeinsprucht werden. Aus diesem Grund muss der zuständige Ingenieur diese Werte sorgfältig und nachvollziehbar bestimmen. Dieses Kapitel beschäftigt sich zuerst mit dem *«Was»* und dann mit konkreten Methoden, diese Werte zu bestimmen.

## 10.1 Kosten und Nutzen: Welche und für wen?

### 10.1.1 Abgrenzung der Kosten und Nutzen

Aus der Analyse von Entscheidungssituationen ist bereits bekannt, dass Projekte Ziele haben. Damit diese Ziele erfüllt werden können, werden Varianten entwickelt. Jede Variante hat Attribute (Zieleigenschaften). Die Ziele und Attribute können in einer Hierarchie dargestellt werden. Der nächste Schritt besteht darin, diese Attribute mit einem Wert zu versehen oder besser gesagt, die Auswirkung dieser Attribute auf die Lösung zu bewerten.

Im Bauingenieurwesen haben Projekte meist Auswirkungen auf verschiedene Personengruppen. Deshalb ist es wichtig zu verstehen, dass eine Kosten-Nutzen-Analyse nur einen begrenzten Analysebereich haben kann. Es ist ausserdem nicht immer der Fall, dass alle potenziellen Kosten und Nutzen zu inkludieren sind. Die Bewertung eines vorgeschlagenen Projekts kann ganz verschieden aussehen, wenn sich der Analysebereich entweder nur über einen Kanton oder über die gesamte Schweiz mit allen möglichen Kosten und Nutzen für alle möglicherweise betroffenen Personen erstreckt.

Und wieso nur Personen? Ist es nicht auch wichtig, die Auswirkungen auf Pflanzen und Tiere zu untersuchen? Natürlich ist es wichtig, Umwelteinflüsse des Projekts ebenfalls zu berücksichtigen. Es ist aber wesentlich schwieriger, die Werte, die von den Tieren diesen Auswirkungen beigemessen werden, zu ermitteln. Um dies zu umgehen, werden meist zwei verschiedene Methoden angewendet. Die erste Methode ist, die Umwelteinflüsse in Form von Rahmenbedingungen in das Projekt zu integrieren. Die zweite Methode versucht, die Auswirkungen auf Pflanzen und Tiere durch den Wert abzubilden, den Menschen bereit sind, für eine intakte Umwelt zu zahlen.

Es ist oft umstritten, welche Werte in eine Kosten-Nutzen-Analyse integriert werden und wie hoch diese Werte sein sollen. Manchmal wird dies erst durch ein Gericht endgültig entschieden.

### 10.1.2 Schritte

1. Begonnen wird mit einer möglichst kompletten Liste aller möglichen Auswirkungen. Gegner eines Projekts werden angestrengt nach Auswirkungen suchen, die übersehen worden sind. Es ist besser, etwas zuerst als relevant anzusehen und dann im Nachgang zu zeigen, dass diese Annahme falsch war, als etwas zu übersehen, das dann später zu überraschend grossen Kosten führt. Je später Anpassungen an einem Projekt vorgenommen werden, desto höher sind meist die Kosten, die durch diese erzwungenen Anpassungen entstehen.
2. Der physikalische Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung sowie die Interaktion von verschiedenen Attributen ist zu bestimmen. Diese sind oft genauso umstritten wie die Bewertung von Einflüssen.
3. Für jeden Einfluss muss ein numerischer Indikator für die Auswirkungen gefunden werden:
   a) Mit bestimmten Indikatoren sind gewisse Schwierigkeiten verbunden. Meist muss eine Balance zwischen Spezifikationsfehler und Messfehler gefunden werden.
   Manchmal spezifiziert ein Indikator genau das, was gesucht wird, aber der Messfehler ist sehr gross: Ein Wert für die eingesparten Tonnen $CO_2$ pro Person ist vielleicht genau das, was für ein Windkraftprojekt benötigt wird. Falls aber dieser Wert dadurch ermittelt wird, dass man verschiedene Personen befragt, wie viel sie für eine Tonne eingespartes $CO_2$ bezahlen würden, dann wäre der Messfehler wahrscheinlich sehr gross.
   Auf der anderen Seite lassen sich Indikatoren finden, die zwar sehr genau gemessen werden können, aber dafür nicht genau das sind, was benötigt wird: Der Preisunterschied zwischen Erdgas und Heizöl lässt sich z.B. sehr gut bestimmen, aber der Unterschied spiegelt nicht nur den Unterschied im $CO_2$-Ausstoss wider, sondern auch andere Umstände. Man misst also nicht nur das, was man eigentlich messen will. Man ist immer gezwungen, die Indikatoren so gut wie möglich zu wählen, ohne dabei deren Schwachstellen zu vergessen.
   b) Einflüsse müssen sowohl aufgrund ihrer Eintrittswahrscheinlichkeit als auch aufgrund des Eintrittszeitpunkts modifiziert werden (Diskontierung und Erwartungswert!).
   c) Einflüsse sind manchmal nicht klar bestimmbar, sondern müssen mit Modellen berechnet werden, über die sich Experten uneinig sein können. Falls Berechnungen auf einem sehr optimistischen Modell beruhen, kann ein Gerichtsentscheid für ein weniger optimistisches Modell zu hohen nachträglichen Kosten führen.
   d) Es darf nicht vergessen werden, dass Menschen sich ihrer Umgebung anpassen. So reduziert z.B. eine neue Spur auf der Autobahn kurzfristig die Anzahl der Staus. Da sich die Leute aber daran gewöhnen, dass diese Autobahn meist staufrei ist, wird sie öfter benutzt, was auf lange Sicht wieder zu mehr Staus auf dieser Autobahn führen kann.
   e) Generell gesagt führen konservative Annahmen dazu, dass Schwächen eines Projekts früher erkannt werden können, was die Behebungskosten deutlich reduziert.
4. Für jeden physischen Indikator muss eine Transformation in Geldeinheiten stattfinden. Dies ist der Voraussetzung einer gemeinsamen Masseinheit geschuldet. Es darf nicht vergessen werden, dass unsichere Ereignisse wahrscheinlichkeitsgewichtet und richtig diskontiert werden müssen.
5. Eine Sensitivitätsanalyse zeigt jene Punkte auf, bei denen eine Variante am empfindlichsten gegenüber Kritik und Veränderungen ist. Falls eine analytische Sensitivitätsanalyse (wie bei

einem LP) nicht durchgeführt werden kann, dann können immer noch Werte (z.B. in einer Excel-Datei) zufällig verändert und die Auswirkungen auf das Ergebnis beobachtet werden. Wenn dies mit einer grossen Anzahl von Versuchen gemacht wird, nennt man dies «Monte-Carlo-Simulation».

## 10.2 Voraussetzungen für ein gutes Projekt

Bei einem privaten Projekt beschränken sich Kosten und Nutzen meist auf die private Partei selbst. Wenn Einflüsse auf andere Personen berücksichtigt werden, geschieht dies meist nur aus rechtlichen Gründen wie der Möglichkeit einer Verzeigung. Aus der engen Sicht der Maximierung der Zielfunktion sollten Kosten, die die Zielfunktion nicht verändern, aus der Analyse ausgeschlossen werden.

Für öffentliche Projekte sieht dies ganz anders aus, weil die Zielfunktion oft (am besten: immer) den sozialen Nutzen miteinbezieht. Wie dieser gemessen werden kann und was das für verschiedene Personengruppen sowie für das Projekt bedeutet, soll im Folgenden erörtert werden. Für manche Personen (oder Personengruppen) kann ein Projekt zusätzliche Mehrkosten erzeugen, die über dem Mehrnutzen liegen. Leider passiert dies manchmal.

### 10.2.1 Produzentenrente

Ein guter Anfang ist die in Abb. 10.1 dargestellte Produzentenrente. Diese Grafik ist sehr vereinfacht und sie wird weiter unten noch ergänzt werden, aber die Schlüsse, die daraus gezogen werden können, hängen nicht von der Form der Kurve ab. Wenn es darum geht, den Wert einer produzierten Menge $x$ eines Guts $E$ zu berechnen (wobei kein Zwang besteht, dass das Gut physischer Natur sein muss, solange jemand bereit ist, einen positiven Preis $p$ dafür zu zahlen), schaut man zuerst, für welchen Preis das Gut $E$ verkauft wird. Dann multipliziert man $x$ mit $p$, um den Gesamtwert zu erhalten. Aber ist dies der Wert, den die Gesellschaft erhält, wenn $x$ Einheiten von $E$ produziert werden? Normalerweise nicht, aus demselben Grund, warum $p \cdot x$ nicht gleich den Gesamtproduktionskosten ist.

Die Funktion, die durch die Kurve A dargestellt wird, heisst Angebotskurve und repräsentiert die Menge $x(p)$, die Hersteller beim Preislevel $p$ bereit sind, herzustellen. Bei einem Preislevel unter $b$ wird niemand das Produkt herstellen. Steigt der Preis über $b$, werden einige wenige Produzenten anfangen, $E$ zu produzieren. Wenn der Preis weiter steigt, werden immer mehr Produzenten mehr von $E$ produzieren, was der Funktion ihr typisches Aussehen beschert. Die Grundidee dabei ist, dass die Produktionskosten pro zusätzliche Einheit irgendwann auf jeden Fall steigen. Dies trifft selbst dann zu, wenn die Produktionskosten mit steigender Stückzahl zuerst einmal sinken (meist durch Automation in der Herstellung). Zum Schluss werden die Kosten auf jeden Fall steigen, weil wir in einer begrenzten Welt leben und jede Ressource nur in einer bestimmten Menge zur Verfügung steht. Es ist wichtig zu wissen, dass die Preise pro Produktionseinheit zuerst einmal sinken können (auch während des gesamten Projekts!), aber schlussendlich irgendwann einmal steigen.

Wenn Kurve A die Kosten für die Herstellung von Elektrizität aus Wasserkraft im Kanton Zürich darstellt, wobei jeder Herstellungsort separat gezählt wird, ist klar, dass eine höhere Produktion zu höheren Preisen führt, weil mehr Kraftwerke an zusehends weniger optimalen Orten gebaut werden müssen. Wenn die Preise für Elektrizität so hoch steigen würden, dass sich der Bau eines Kraftwerks an der Glatt direkt in Dübendorf lohnen würde, würde das bereits bestehende Kraftwerk am Sihlsee – dessen Produktion ja nicht auf einmal mehr kostet – zusätzliche Einnahmen aus dem gestiegenen Elektrizitätspreis machen. Dieser Unterschied wird *Produzentenrente* genannt und ist als «Einnahmen über den Gesamtproduktionskosten» definiert. Es ist wichtig anzumerken, dass in dieser Analyse die Kosten für das Kapital und das Risiko des Unternehmers bereits in der Funktion A integriert sind (zu Deutsch: eine Firma, in der die Einnahmen nur knapp die Ausgaben decken, ist sowohl normal wie auch gut geführt und langfristig lebensfähig, weil das Konzept «Ausgaben» sehr weit gefasst ist). Die zusätzlichen Einnahmen für den Betreiber des Sihlsee-Kraftwerks entstehen für ihn ohne zusätzlichen Aufwand und ohne zusätzliche Tätigkeit. Deshalb werden diese Einnahmen von Ökonomen auch *Rente* genannt (die Einnahmen übersteigen das, was ein Unternehmer für ein lebensfähiges Unternehmen braucht). Doch was ist nun die gesamte Rente für die Gesellschaft, die durch diese Aktivität produziert wird? Fürs Erste ist da die Menge $p \cdot x$, welche zu den Produzenten geht. Ein Teil davon deckt die Herstellungskosten (was nicht zur Rente zählt) und ein Teil davon geht als *Produzentenrente* an die Produzenten. Dieser Teil, dargestellt in Abb. 10.1, soll gezählt werden.

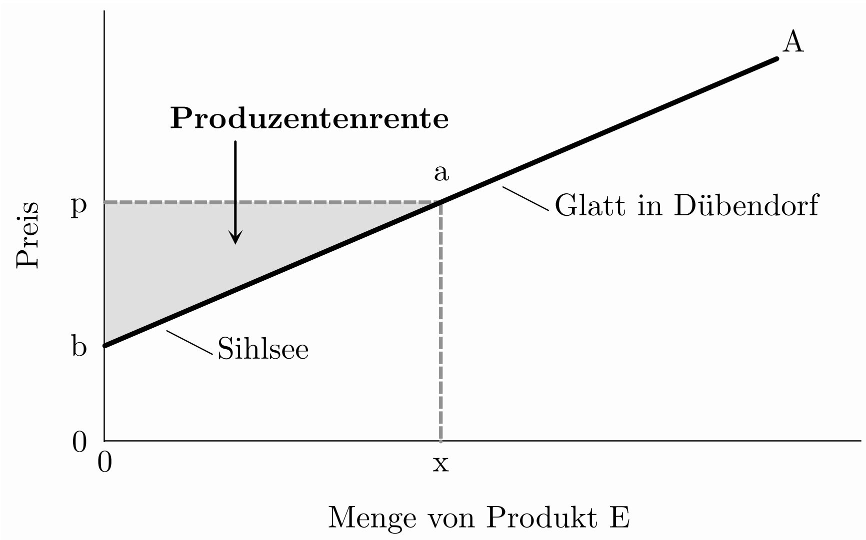



Abbildung 10.1: Die Produzentenrente ist die Fläche zwischen Preisniveau und Angebotskurve

### 10.2.2 Konsumentenrente

Wenn es so ist, dass nicht jeder Produzent dieselben Kosten pro Einheit hat, obwohl er zum selben Marktpreis verkaufen kann, dann kann dasselbe über die Konsumenten – und darüber, wie diese ihre konsumierten Güter bewerten – gesagt werden. Abb. 10.2 zeigt denselben Markt für Wasserkraft im Kanton Zürich, diesmal aber aus Sicht des Konsumenten und seiner Bereitschaft, einen höheren Preis für die gleiche Menge an Strom aus Wasserkraft zu bezahlen. Die Öko-Aktivistin ist bereit, einen sehr viel höheren Preis für ihren Strom aus Wasserkraft zu bezahlen als Herr Rappenspalter, der nur dann Strom aus Wasserkraft kauft, wenn dieser billig ist. Wenn man diese beiden mit allen anderen Konsumenten zusammenführt, erhält man den in der Grafik gezeigten Zusammenhang zwischen der konsumierten Menge und dem Preis, den alle dafür bezahlen. Diese Kurve wird Nachfragekurve genannt. Die Öko-Aktivistin würde auch mehr für ihre Menge an Strom bezahlen, muss es aber nicht, da der Preis tiefer liegt. Dieser Preisunterschied wird *Konsumentenrente* genannt.

In anderen Worten ausgedrückt: Der Preis, den man bezahlen muss, ist nicht unbedingt identisch mit dem Preis, den man bezahlen würde, um das gewünschte Gut zu bekommen. Dieser höhere

Preis misst den Wert, den eine bestimmte Menge an Strom für die Öko-Aktivistin hat. Er muss ebenfalls in ein Mass für den Wert für die Gesellschaft integriert werden.

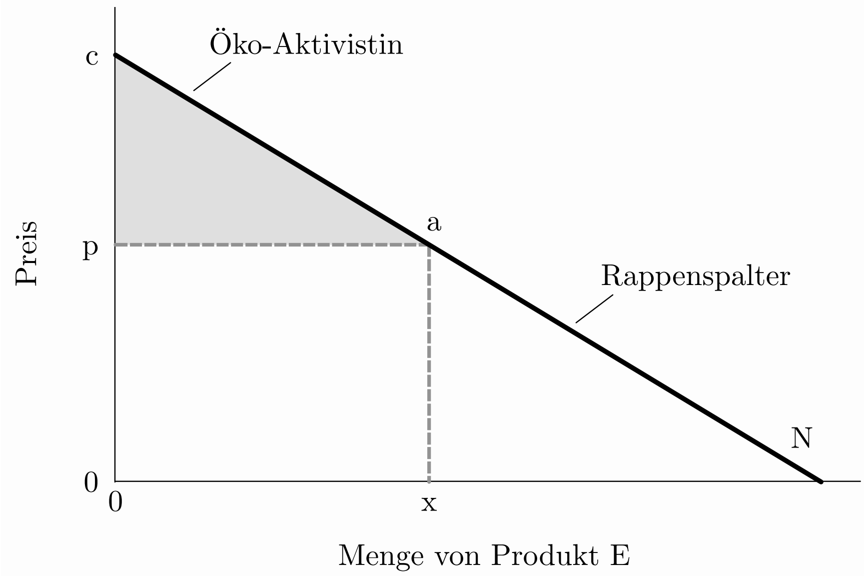



Abbildung 10.2: Die Konsumentenrente ist die Fläche zwischen Preisniveau und Nachfragekurve

### 10.2.3 Ökonomische Wohlfahrt

Abb. 10.3 zeigt das Standardmodell eines Marktpreises in einem kompetitiven Markt. Die Idee ist, dass ein einziger Preis $p$ existiert, bei dem die Produzenten genau so viel produzieren wie die Konsumenten konsumieren. Dieser Preis wird Gleichgewichtspreis genannt. Dies ist jedoch hier nicht das Thema. Das Thema ist vielmehr der gesellschaftliche Nutzen. Gesellschaftlicher Nutzen misst auf die eine oder andere Weise Nützlichkeit oder Freude, was jeweils nochmals Themen für sich sind. Wie können wir deine Freude mit meiner Freude addieren? Was wäre eine geeignete Masseinheit? Gibt es einen Weg, diese Freuden ineinander umzurechnen? Trotz aller Schwierigkeiten gibt es eine praktische Methode, den gesamten gesellschaftlichen Nutzen eines Projekts zu berechnen. Man benötigt nur die Angebotskurve und die Nachfragekurve. Dann kann man ganz einfach die Fläche zwischen diesen Kurven berechnen.

Die Konsumentenzufriedenheit – gemessen in der Bereitschaft, einen gewissen Preis zu bezahlen – ist die Fläche unter der Nachfragekurve. Davon müssen die Produktionskosten abgezogen werden (die Fläche unter der Angebotskurve). Der übriggebliebene Teil (das graue Dreieck) wird *Ökonomische Wohlfahrt* genannt und bemisst die Grösse des gesellschaftlichen Nutzens. In Abb. 10.3 ist zusätzlich noch eine zweite, verschobene Angebotskurve A' dargestellt. Diese symbolisiert beispielsweise die Auswirkungen eines öffentlichen Projekts, wie z.B. einer Erweiterung des Stromnetzes, welches eine Senkung der Produktionskosten für alle Produzenten bewirkt – sofern die Kosten für die Verteilung des Stroms über das Stromnetz in den Produktionskosten enthalten sind. Es gibt einen neuen Gleichgewichtspreis und eine neue Gleichgewichtsmenge. Der zusätzliche gesellschaftliche Nutzen dieses Projekts ist durch die Grössenzunahme des grauen Dreiecks (hellgrau) dargestellt. Aber merke: Nur, weil in Summe die Gesellschaft mehr Nutzen hat, bedeutet dies nicht einen Nutzen für jeden Einzelnen. Es kann Gewinner und Verlierer geben.

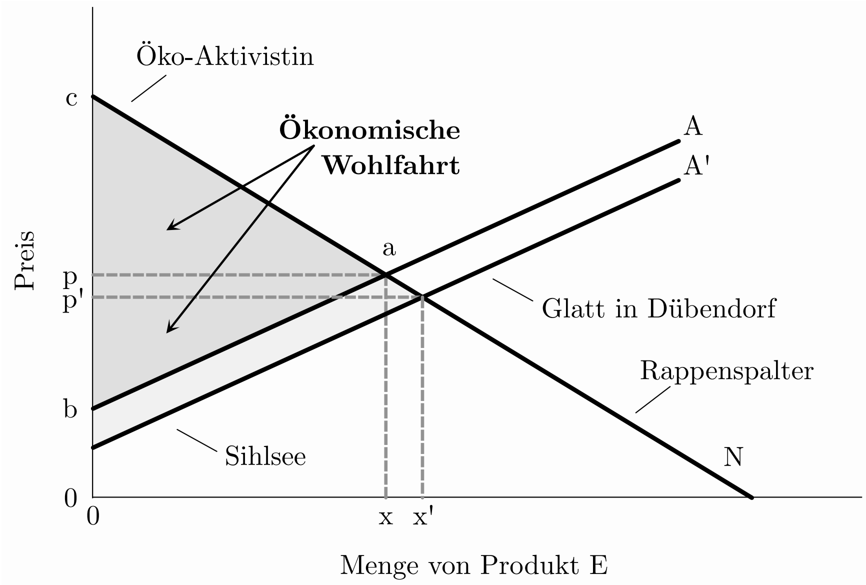



Abbildung 10.3: Ökonomische Wohlfahrt im Zusammenhang mit einem öffentlichen Projekt, das die Produktionskosten senkt

### 10.2.4 Pareto-Optimalität

Vilfredo Federico Damaso Pareto war ein italienischer Ingenieur, der an der Universität von Lausanne Ende des 19. Jahrhunderts gelehrt hat. Er hat einen Minimalstandard für die «Effizienz» einer Strategie vorgeschlagen, die heisst: Die Strategie ist genau dann «effizient», wenn keine andere Strategie existiert, die mindestens einen Beteiligten besser stellt, ohne jemand anderen schlechter zu stellen. Eine Vorbedingung dafür ist, dass ein Pareto-optimales Projekt eine positive ökonomische Wohlfahrt hat und dass der Nutzen von Gewinnern in irgendeiner Form zu den Verlierern transferiert werden kann, damit diese in Summe nicht schlechter dastehen. Bei der Suche nach Projekten, die den Nettonutzen maximieren, sucht man auch nach Pareto-optimalen Lösungen – unter der Annahme, dass eine Umverteilung von Gewinnern an Verlierer möglich ist.

### 10.2.5 Verhältnis zwischen Durchschnitts- und Grenzkosten

Das vorhergehende Beispiel der Produzentenrente war auf einer linearen Angebotskurve aufgebaut. Normalerweise sehen Angebotskurven anders aus, um den Effekt von grossen Anfangskosten abzubilden, die über einen Bereich der Produktionsmenge konstant bleiben. Baumaschinen sind ein gutes Beispiel dafür. Es gibt die sogenannten *Fixkosten* (mengenunabhängig) und die *variablen Kosten*, welche von der produzierten Menge abhängen. Kosten für ein Ausgangsmaterial sind ein gutes Beispiel dafür. Die Tatsache, dass Fixkosten über eine gewisse Anzahl von Produktionseinheiten konstant sind, führt dazu, dass die Kosten pro Einheit sinken, weil diese auf eine grösser werdende Anzahl von Produktionseinheiten aufgeteilt werden können. Eine Firma, die ihre Produkte für einen Preis unterhalb des Durchschnittspreises verkauft, wird sicherlich Bankrott gehen. Deshalb ist eine Grundeigenschaft der Angebotskurve, dass diese über der Durchschnittskostenkurve liegt.

Eine zweite Bedingung ist, dass die Angebotskurve profit-maximierendes Verhalten darstellt. Aus dem Ausdruck für Profit

$$Profit = Gesamte\,Einnahmen - Gesamte\,Kosten = p \cdot x - C(x)$$

mit $C(x)$ als Gesamtkosten, abhängig von den produzierten Einheiten, erhält man die Maximierungsbedingung

$$\frac{dProfit}{dx} = p - \frac{dC(x)}{dx} = 0 \tag{10.1}$$

für eine geschlossene Lösung. Dies setzt voraus, dass

$$p = \frac{d(C(x))}{dx} \tag{10.2}$$

was Ökonomen als «Eine Firma, die ihren Profit maximieren will, setzt ihren Preis derart, dass der Preis den Grenzkosten entspricht» interpretieren.

Wenn man diese beiden Bedingungen kombiniert, könnte man schliessen, dass die Angebotskurve gleich mit jenem Abschnitt der Grenzkostenkurve sein muss, der über der Durchschnittskostenkurve liegt. Abb. 10.4 stellt dies grafisch dar.

Die Tatsache, dass die Grenzkostenkurve die Durchschnittskostenkurve an ihrem Tiefpunkt schneidet, ist kein Zufall. Wenn die Grenzkosten unter den Durchschnittskosten liegen, ziehen sie die Durchschnittskosten in der gleichen Art und Weise hinunter, wie eine junge Person das Durchschnittsalter einer Gruppe von Senioren senkt, wenn sie sich neu zu der Gruppe gesellt (neue Einheit = Grenzeinheit). Genau das Gegenteil passiert, wenn die Grenzkosten über den Durchschnittskosten liegen, dann gesellt sich eine neue ältere Person zu einer jüngeren Gruppe und erhöht damit das Durchschnittsalter. Grenzkosten bedeuten immer die Veränderung der Gesamtkosten, wenn eine weitere Einheit produziert wird.

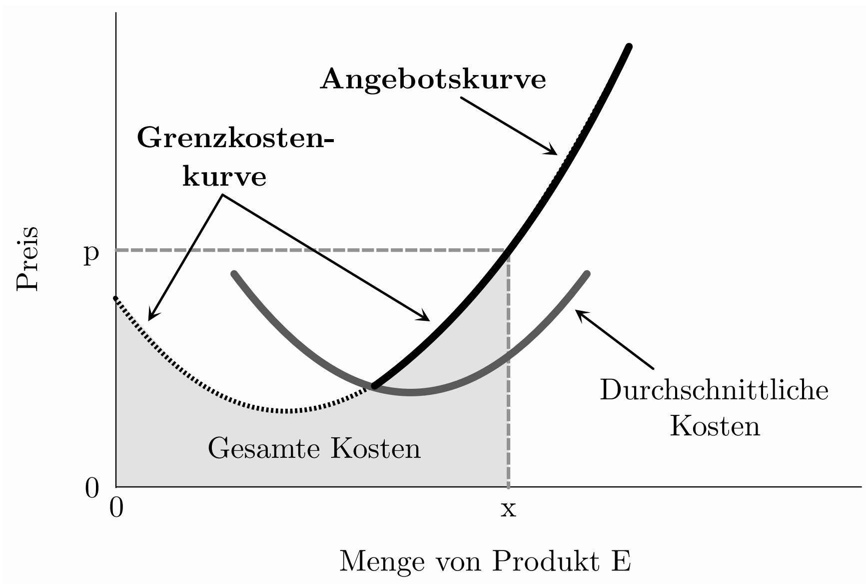



Abbildung 10.4: Die Angebotskurve ist die Grenzkostenkurve oberhalb der Durchschnittskosten

## 10.3 Wie wird einer physischen Auswirkung ein Geldwert beigemessen?

Man kann die Bewertung eines Objekts oder einer Dienstleistung direkt oder indirekt angehen. Direkt bedeutet, dass man nach Informationen sucht, wie Personen ein Objekt oder eine Dienstleistung (an der Interesse besteht) tatsächlich bewerten. Indirekt bedeutet, dass man nach Informationen sucht, aus denen abgeleitet werden kann, wie Personen ein Objekt oder eine Dienstleistung bewerten würden, wenn das Objekt oder die Dienstleistung zur Auswahl stünde.

Es ist wichtig, festzuhalten, dass *Bewertung* nicht als einzelne Zahl zu verstehen ist (wie es z.B. der Preis eines Hauses ist, das am 12. Dezember 2012 verkauft wurde), sondern als Funktion, die den Preis in Abhängigkeit von der Verfügbarkeit beschreibt. Der einzelne Preis ist eine statische Angabe und beantwortet nur die Frage «Wie viel ist das Haus jetzt wert?». In Bauingenieurprojekten geht es aber darum, die Welt zu verändern und des Öfteren in signifikanter Art und Weise. Deshalb ist die Frage wichtig, wie sich der Preis eines Objekts oder einer Dienstleistung entwickelt, nachdem sich das Angebot als Folge des Projekts deutlich verändert hat. Wenn ein Tunnel gebaut wird, sinken die Kosten für den Weg von der einen Seite des Berges auf die andere Seite. Dies bringt einen Zusatznutzen für diejenigen, die den Berg vorher über die Passstrasse oder über einen langen Umweg überwunden haben. Zusätzlich zum fallenden Preis wird sich das Nutzerverhalten ändern. Weil die Preise jetzt tiefer sind, werden mehr Leute von der einen Seite des Berges auf die andere Seite wollen. Dies hat auch einen Wert, wenngleich dieser geringer ist als der vorherige. Dies wurde bereits in der Diskussion über die Konsumentenrente erwähnt. Es wird daher nach Möglichkeiten gesucht, die Nachfragekurve zu bestimmen – und nicht nur den aktuellen Preis. Nur so lässt sich der neue Gleichgewichtspreis oder die ökonomische Wohlfahrt schätzen.

### 10.3.1 Direkte Bewertungsmethoden

Damit man den Wert eines Objektes oder einer Dienstleistung direkt bewerten kann, muss diese bereits existieren. Dies ist ein grosser Nachteil, wenn man versucht, etwas zu bewerten, das noch nicht existiert. Manchmal existiert etwas Ähnliches an einem anderen Ort. Dann ist es möglich, die Nachfragefunktion mittels Regressionsanalyse zu schätzen. Manchmal kann ein Vorprojekt in einem kleineren Massstab gemacht werden, das den vollen Massstab möglichst gut abbilden soll.

#### 10.3.1.1 Vorprojekte

Ein Vorprojekt ist eine begrenzte Version des realen Projekts. Ein Beispiel für ein Verkehrsnetzwerk wäre das Hinzufügen einer einzelnen Buslinie, die nur in einer bestimmten Region getestet wird. Etwas komplexer wäre eine Testphase in mehreren Regionen, bei denen der Preis für die Dienstleistung variiert wird, um den Effekt der Nachfrageentwicklung abbilden zu können. Aus den gewonnenen Daten kann mittels Regressionsanalyse die Nachfragefunktion geschätzt werden.

Der Nachteil von Vorprojekten ist, dass sie nicht ganz der Realität entsprechen. Die Ergebnisse können sowohl positiv verzerrt werden (die neue Buslinie ist eine Attraktion und wird von mehr Personen benutzt als es im Normalbetrieb der Fall wäre), als auch negativ verzerrt (es kann einige Zeit dauern, bis die Buslinie von der Bevölkerung wahrgenommen und benutzt wird – nach einiger Zeit aber könnte es sein, dass die Personen in der Gegend abends vermehrt in den Ausgang gehen, weil dann ein Bus zur Heimfahrt billiger als ein Taxi ist). Vorprojekte sind nur eine vereinfachte Abbildung der Realität, weshalb man sich der möglichen Anpassung des menschlichen Verhaltens an vorhandene Dienstleistungen immer bewusst sein sollte.

#### 10.3.1.2 Schätzung von Angebots- und Nachfragekurve

Die Schätzung von Angebots- und Nachfragekurve verlangt, dass bereits Daten existieren, d.h. dass das in Frage kommende Objekt oder die Dienstleistungen bereits existieren. In diesem Fall kann mittels Regressionsanalyse eine Kurve erstellt werden. In jedem Fall muss aber eine allgemeine mathematische Formulierung der Kurve *angenommen werden*, anhand derer dann die Regressionsanalyse jene Parameter findet, die die «beste Übereinstimmung» liefern. Eine Methode ist die «Maximum-Likelihood-Methode», die die *wahrscheinlichsten* Parameter ermittelt, die bei einem gegebenen Modell die vorhandenen Daten liefern. Generell sollte man sich folgender möglicher Probleme bei einer Regressionsanalyse bewusst sein:

**Spezifikationsfehler und Messfehler** Es existieren zwei unterschiedliche Typen von Fehlern bei der Schätzung einer Funktion: Spezifikationsfehler sind solche, die dadurch entstehen, dass die Annahmen des Modells nicht genau der Wirklichkeit entsprechen. Die gewählte mathematische Funktion könnte nicht die richtige sein oder die Datenreihen können etwas anderes messen als eigentlich verlangt wird. Wenn ein geometrisches Modell benutzt wird, um eine lineare Wirklichkeit abzubilden, besteht ein Spezifikationsfehler beim Modell. Wenn z.B. die Löhne von Leuten, die mit dem Zug zur Arbeit fahren, benötigt werden, aber nur das allgemeine Lohnniveau für alle Arbeitenden vorhanden ist, ist das ein Beispiel eines Spezifikationsfehlers bei den Daten.

Messfehler sind Fehler, die entstehen, wenn das Modell und die Datenspezifikation richtig sind, aber die Daten aus irgendeinem Grund nicht genau gemessen worden sind. Falls beispielsweise die Nachfragefunktion für ein Tunnelprojekt bestimmt werden soll, wäre es richtig spezifiziert, wenn verschiedene Personen direkt befragt würden, wie viel sie bereit wären, für einen neuen Tunnel zu zahlen. Die Qualität der Antworten wäre allerdings nicht unbedingt gut. Dies wäre dann ein Messfehler.

Für gewöhnlich treten alle Typen von Fehlern in unterschiedlichem Grad auf. Die Kunst der empirischen Schätzung ist es, Methoden zu finden, die eine Balance zwischen Spezifikationsfehler und Messfehler liefern. Es ist wichtig, sich bei jedem Regressionsmodell bewusst zu sein, dass diese Fehler existieren. Noch wichtiger aber ist es, zu wissen, wie sich diese Fehler vermutlich auf die Resultate auswirken werden.

**Elastizität** Elastizität meint die prozentuale Veränderung einer abhängigen Variable als Funktion der prozentualen Veränderung einer unabhängigen Variable. Diese etwas umständliche Formulierung taucht oft bei der Bestimmung von Nachfragefunktionen auf. Die Preiselastizität der Nachfrage meint «die prozentuelle Veränderung der Nachfrage bei der Veränderung des Preises um ein Prozent». Als Formel sieht dies folgendermassen aus:

$$\beta = \frac{\frac{dN(p)}{N(p)}}{\frac{dp}{p}} \tag{10.3}$$

Diese Masseinheit ist sinnvoll, weil sie einheitslos ist und deshalb in vielen Situationen angewendet werden kann, z.B. wenn die Grössenordnung stark variiert. Ausserdem haben einige der oft verwendeten mathematischen Formulierungen der Nachfragefunktion eine konstante Elastizität. Deshalb ist die Elastizität ein praktisches Mass, das Verhalten solcher Nachfragefunktionen über den gesamten Wertebereich auszudrücken.

Wenn die mathematische Formulierung keine konstante Elastizität hat – was bei linearen Nachfragefunktionen der Fall ist – verändert sich die Elastizität mit dem Preisniveau. Dies kann zu

Fehleinschätzungen führen, wenn man die Elastizität eines Wertes bei hohen Preisen als Ausgangswert nimmt und dann auf niedrige Preise anwendet.

**Steigung** Die Steigung ist ein einfaches und intuitives Mass, hat aber die genau gegenteiligen Vor- und Nachteile der Elastizität als Masseinheit. Die Steigung einer linearen Funktion ist überall konstant, weshalb diese für lineare Funktionen ein praktikables Mass ist. Wenn hingegen die zu bestimmende Funktion z.B. exponentiell ist, dann ist deren Steigung (die erste Ableitung nach x) ebenfalls exponentiell – also ändert sich die Steigung mit dem Wert von x.

#### 10.3.1.3 Zusammenfassung

Direkte Methoden sind auf jeden Fall zu bevorzugen, falls Daten vorhanden sind oder das Vorprojekt realistisch genug ist. Leider trifft dies nicht immer zu. Deshalb muss man oft auf indirekte Methoden zurückgreifen.

### 10.3.2 Indirekte Bewertungsmethoden

Indirekte Methoden sind eine Form von «Reverse Engineering». Man verfolgt Ergebnisse so lange zurück, bis man auf einen Mechanismus stösst, der diese erzeugt haben könnte. Hierfür gibt es eine Vielzahl von Techniken, die verwendet werden können. Diese lassen sich in zwei Gruppen aufteilen: *Revealed Preference* und *Stated Preference.*

#### 10.3.2.1 Revealed Preference

Unter Revealed Preference versteht man Techniken, die die Nachfragefunktion aus beobachteten Entscheidungen ableiten. Beispiele dafür sind:

**Analoggüter (z.B. Gehälter für Reisezeit)** Die Zeit, die wir im Auto verbringen, ist nicht die Zeit, die wir in den Bergen verbringen. Die Zeit, die wir beim Arbeiten verbringen, ist ebenfalls nicht die, die wir in den Bergen verbringen. Aus dem Argument der Opportunitätskosten könnte man ableiten, dass der Wert der Zeit, die wir im Auto verbringen (etwas negatives) denselben Wert hat wie die Zeit, die wir beim Arbeiten verbringen (wir werden für die Arbeit bezahlt, also muss es etwas negatives sein). Das Ableiten von Werten aus Analoggütern funktioniert genau so. Die Stärken und Schwächen dieser Methode sind offensichtlich. Alle Vergleiche «hinken» – manche mehr, manche weniger. Manche Autos sind sehr bequem, andere wieder nicht. Die eine Arbeit macht uns weniger Mühe als die andere. Trotzdem ist der Vergleich nicht ganz von der Hand zu weisen. Um den Wert einer verkürzten Reisezeit zu bekommen, ist der durchschnittliche Stundenlohn mal die eingesparte Zeit sicher ein vernünftiger oberer Grenzwert für den wirklichen Wert.

**Trade-Off (Beobachten von existierenden Präferenzen mit Extrapolation)** Die Trade-Off-Methode ist ähnlich zur Analogiemethode, allerdings sucht man nach Gütern, die von Personen gegen das gesuchte Gut eingetauscht werden. Personen ziehen näher zur Stadt, wenn ihnen die Reisezeit zu viel wird, zahlen dafür aber eine höhere Miete. Diese Personen tauschen also Miete gegen Reisezeit ein. Man kann also die Mietdifferenz mit der Differenz der Reisezeit in Beziehung setzen, um einen geschätzten Wert für die Verkürzung der Reisezeit zu bekommen.

Eine oft angewendete Art der Trade-Off-Methode ist es, den Personen Versicherungen für bestimmte Risiken anzubieten, um zu sehen, ab welchem Preis sie statt des Risikos die Versicherung wählen. Diese Versicherung muss nicht immer ein Versicherungsvertrag sein. Wenn es eine Fussgängerbrücke über eine gefährliche Strasse gibt, dann ist die Versicherung das Verwenden der Fussgängerbrücke, die für den Preis des Treppensteigens erkauft wird. Ein Experiment wäre z.B. die Veränderung der Höhe der Fussgängerbrücke, um zu sehen, bei welchem Preis (Höhe der Brücke) ein gewisser Prozentsatz der Personen das riskante, direkte Überqueren der Strasse bevorzugt. Aus diesem Wert sowie aus dem generellen Risiko dieses Strassenabschnitts lässt sich der Wert eines Unfallverringerungsprojekts für die Bevölkerung bestimmen.

**Wert von Zwischenprodukten** Manche Projekte – z.B. Bewässerungsprojekte – erzeugen Zwischenprodukte für die Produktion von anderen Gütern. Eine Möglichkeit, den Wert eines Bewässerungsprojekts zu bestimmen, ist es, sich die verschiedenen Zwischenprodukte anzusehen und zu versuchen, diese zu bewerten. Man müsste herausfinden, wofür das Bewässerungswasser verwendet wird und dann die Nachfragefunktionen für alle Verwendungen bestimmen. Diese Subfunktionen müssten dann in einer Gesamtfunktion vereinigt werden, um die Nachfragefunktion für dieses Projekt zu bestimmen.

**Bestandsbewertung** Diese Methode ist weniger offensichtlich als die vorhergehenden. Sie funktioniert, weil in einem kompetitiven Markt die Auswirkungen immer an dem unflexibelsten Faktor der Produktion *hängen bleiben.* Als aktuelles Beispiel kann z.B. die Fluglärmdiskussion im Kanton Zürich herangezogen werden. Man kann sich fragen, wer vom Mietmarkt am Ende die Auswirkungen einer neuen Flugroute tragen muss. Zuerst werden die Mieter mit bestehenden Mietverträgen die Auswirkungen tragen, weil sie für dieselbe Miethöhe nun Flugzeuglärm ertragen müssen, welcher vorher nicht da war. Nach Ablauf ihres Mietvertrags werden sie jedoch woanders hin ziehen, wo sie mehr Freude pro ausgegebenem Franken haben. Der Vermieter allerdings muss nun die Miete senken, damit er einen Nachmieter findet. Er muss also seinen Preis wegen der Unannehmlichkeit «Flugzeuglärm» senken. Selbst wenn der Eigentümer selbst woanders wohnt, wo es keinen Fluglärm gibt, «fühlt» er den Fluglärm, weil er seinem Mietshaus zugeordnet ist, welches sich – im Gegensatz zu den Mietern – nicht wegbewegen lässt.

Diese Tatsache kann zur Berechnung des Wertes von Änderungen in der Infrastruktur verwendet werden. Diese Änderungen müssen keineswegs nur negativ sein. Man kann z.B. auch den Wert einer neuen Tramlinie für die Grundstücke in deren Nähe berechnen. Genauer gesagt kann so der Wert der neuen Tramlinie auf Basis bereits umgesetzter Erweiterungen und deren Auswirkungen auf andere Grundstücke geschätzt werden.

**Hedonische Regression** Das Problem mit der Methode der Bestandsbewertung ist, dass viele Dinge gleichzeitig ablaufen und es fast unmöglich ist, aktuelle Daten zu finden, die die Veränderung der Tramlinie repräsentieren – *und nichts anderes.* Die hedonische Regression bietet eine Lösung für dieses Problem. Anstatt einen Datensatz zu finden, bei dem sich nur ein Faktor ändert und alle anderen Faktoren gleich bleiben, betrachtet man einen sehr grossen Datensatz und versucht, den Wert einer langen Liste von Dingen zu finden, die eventuell relevant sein können. Der Wert des Grundstücks wird dann mittels Regression aus einer langen Liste von potenziellen Faktoren abgeleitet. Die gewünschte Nachfragekurve kann erhalten werden, indem man alle anderen Faktoren dieser Gleichung konstant hält.

Die Nachteile dieser Methode sind dieselben wie bei allen Regressionsmodellen. Die Reisezeit zu einer Tramhaltestelle (die gewünschte Variable) kann durch die lineare Distanz zu dieser *angenähert* werden, aber diese Annäherung missachtet eventuell Gebäude, Strassen oder Flüsse, die den direkten Weg versperren. Es wird also immer Spezifikations- und Messfehler geben. Ein weiteres Problem dabei ist, dass einige unabhängige Variablen korrelieren. Es kann vorkommen, dass Abfallsammelstellen in der Nähe von alten Tramhaltestellen liegen. Wenn das Regressionsmodell diesen Unterschied nicht erfassen kann, dann kann der Nähe eines Grundstücks zu einer Abfallsammelstelle (nicht unbedingt positiv) unabsichtlich derselbe positive Wert zugewiesen werden wie der Nähe zu einer Tramhaltestelle.

Die Regression wird oft mit einer funktionellen Form wie folgt geschätzt, wobei P für den Wert des Grundstücks steht:

$$P = \beta_0 \cdot \textit{Nähe zum Zentrum}^{\beta_1} \cdot \textit{Aussicht}^{\beta_2} \cdot \textit{Nähe zum Tram}^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot \textit{Fluglärm}^{\beta_n} \cdot e^{\varepsilon}$$

Die Preisbewertung der Aussicht unter Annahme von Durchschnittswerten bei den anderen Variablen ist dann die erste Ableitung dieser Funktion in Bezug auf die Aussicht.

Es gäbe noch viel mehr zu dieser Technik zu sagen, hier soll jedoch nur allgemein auf diese Methode hingewiesen werden.

**Reisezeit** Die Reisezeit ist eine interessante Methode, die ebenfalls Regression benutzt. Hier verwendet man die Reisezeit als eine Annäherung für Kosten und beobachtet den Anteil der Bevölkerung, der bereit ist, für ein bestimmtes Gut eine bestimmte Reisezeit (und damit Kosten) auf sich zu nehmen. In diesem Modell muss das Gut etwas sein, das einzigartig innerhalb einer grossen Fläche ist, wie zum Beispiel ein Freizeitpark. Das Konsumentenverhalten wird dann aus den Daten über Reisezeit und Bevölkerungsanteil errechnet. Eigentlich werden zwei Substitutionen gemacht. Der Preis für die Regression ist die Summe aus Eintrittspreis und Reisezeitkosten. Die Quantität für die Regression ist der Anteil der Bevölkerung, der eine bestimmte Reisezeit bis zur Anlage hat.

Ein Beispiel macht dies vielleicht klarer: Wenn der Eintrittspreis 50 CHF ist und man für eine Stunde Reise 100 CHF hinzuaddiert, beträgt der Gesamtpreis für eine potenzielle Gruppe von Kunden 150 CHF. Wenn 10'000 Personen eine Stunde von der Anlage entfernt wohnen und 100 aus dieser Gruppe die Anlage innerhalb eines Jahres besucht haben, ist das Mass der Nachfrage bei diesem Preis 1%. Für die Regression würde dies eine Beobachtung von (p=150 CHF; q=1%) liefern.

Das Einkaufsverhalten einer Person steht immer in Abhängigkeit zu ihrem Gesamteinkommen $Y$, dem Preis $p$ selbst, den Preisen für andere Güter $p_s$ und meistens einer Reihe sonstiger Parameter $Z$. Rein formell kann man die Nachfragefunktion so ausdrücken:

$$q = f(p, p_s, Y, Z) \tag{10.4}$$

Nun müsste man einen Fragebogen von den Kunden ausfüllen lassen (vielleicht in Verbindung mit einem Geschenk), um $p$, $p_s$, $Y$ und $Z$ zu erfahren. Dann muss man nur die Regression durchführen.

**Defensivausgaben** Die letzte Revealed-Preference-Methode, die hier gezeigt wird, ist die Methode der Defensivausgaben. Um den Wert eines Projekts zu bestimmen – wie z.B. ein Projekt zur Verringerung der Luftverschmutzung – betrachtet man, wie viel heute schon ausgegeben wird, um die Effekte der Luftverschmutzung zu bekämpfen. Dies könnten Ausgaben für Luftfilter, Fassadenreinigung oder verlängerte Reisezeiten sein, die speziell in Kauf genommen werden, um den Unannehmlichkeiten aus dem Wege zu gehen. Diese Methode kann aber nur eine untere Schranke für den Wert liefern, da man nur diejenigen Konsequenzen bewerten kann, deren Beseitigung einen solch geringen Preis haben, dass die Massnahmen mit dem Budget der Betroffenen bezahlt werden können.

#### 10.3.2.2 Stated Preference

Stated Preference ist eine indirekte Methode, die nicht auf realen Entscheidungen beruht. Die Entscheidungen werden simuliert, indem Personen in einer mehr oder weniger direkten Art gefragt werden, wie sie ein bestimmtes Gut bewerten würden.

**Kontingente Bewertung** In der Literatur wird diese Methode «kontingente Bewertung» genannt, obwohl der Name nicht sehr selbsterklärend ist. Kontingente Bewertung bezieht sich auf Bewertungen, die aus Studien stammen, bei denen die Beteiligten über ihren Willen, etwas für die Abwehr einer Konsequenz zu zahlen, befragt wurden – wie z.B. Luftverschmutzung. Befragungen dieser Art können einen deutlichen Fehler aufweisen, da die Befragten nicht unbedingt denken, dass sie tatsächlich den genannten Betrag zahlen müssen und deshalb nicht ihre wahre Präferenz preisgeben. Gute kontingente Bewertungen vermeiden diese Probleme, indem die Frage z.B. lautet: «Würden Sie eine Initiative für eine neue Steuer unterstützen, damit unsere Seen gereinigt werden können?». Der Befragte würde dann annehmen, dass ein «Ja» sowohl zu der neuen Steuer sowie auch zu sauberen Seen führen würde.

Im Allgemeinen sind Revealed-Preference-Methoden besser als Stated-Preference-Methoden, aber in manchen Situationen gibt es keine Alternativen dazu, letztere zu verwenden.

## 10.4 Sensitivitätsanalyse

Es sollte deutlich geworden sein, dass eine Kosten-Nutzen-Analyse einige Annahmen erfordert, die diskutiert werden können. Es ist wichtig zu zeigen, wie robust die Analyse gegenüber den getroffenen Entscheidungen ist. Normalerweise geschieht dies in zwei Schritten. Zuerst wird der diskutable Bereich festgelegt – meist mit Hilfe von Expertenwissen. Dieser Bereich drückt eine eher konservative bis optimistische Sicht aus. Der zweite Schritt besteht in der Berechnung des Nettonutzens mit den alternativen Annahmen, die diesen Bereich abdecken. Dies wird Sensitivitätsanalyse genannt und zeigt, wie sehr die Ergebnisse von den getroffenen Annahmen abhängen. Dies ist ein wichtiger Bestandteil von Kosten-Nutzen-Analysen.

Da die meisten Kosten-Nutzen-Analysen in einer Tabellenkalkulationssoftware gemacht werden, ist die Berechnung des Nettonutzens unter alternativen Annahmen eine relativ unaufwendige Sache. Indem man eine Zufallsvariable einbaut und das Programm in einer Schleife ablaufen lässt, kann die Sensitivitätsanalyse in eine Monte-Carlo-Simulation verwandelt werden. Es ist leicht ersichtlich, dass die Anzahl der Variationen exponentiell mit der Anzahl der zu variierenden Parameter wächst, von denen es üblicherweise sehr viele gibt. Am Ende muss eine beschränkte Auswahl getroffen werden, damit der Entscheidungsträger nicht überfordert wird und trotzdem verstehen kann, wie robust die Lösung tatsächlich ist.

## 10.5 Zusammenfassung

Kosten-Nutzen-Analysen sind ein Schlüsselbestandteil der Entscheidungsfindung. Sie müssen unter Berücksichtigung aller relevanten Kosten und Nutzen durchgeführt werden. Im Unterschied zu privaten Projekten werden öffentliche Projekte anhand ihrer ökonomischen Wohlfahrt bewertet. Diese ist die Summe aus Produzenten- und Konsumentenrente. Kosten-Nutzen-Modelle beginnen bei den Attributen der Lösung und ihren Auswirkungen, differenziert nach den betroffenen Gruppen. Welche dieser Attribute in die Analyse aufgenommen werden, hängt vom Entscheidungsträger ab und spiegelt nicht immer alle Auswirkungen auf alle Gruppen wider. Der Nettonutzen ist ebenfalls vom Entscheidungsträger abhängig. Selbstverständlich sollten aus Sicht des sozialen Nutzens möglichst sämtliche Kosten und Nutzen für alle betroffenen Personen berücksichtigt werden.

Werte für physische Auswirkungen zu finden, ist oft schwierig. Grundsätzlich ist dieser Wert nicht statisch, sondern hängt von der verfügbaren Menge ab. Diese Angebot-Nachfrage-Beziehungen können durch viele Methoden bestimmt werden. Direkte Methoden verwenden ein Vorprojekt oder einen ähnlich gelagerten Fall, für den bereits Daten existieren. Indirekte Methoden beobachten ein anderes Verhalten, aus dem dann die Nachfragefunktion abgeleitet werden kann. Falls keine vernünftige Methode existiert, die beobachtbare Verhaltensweisen benützt, können die Personen immer noch direkt über ihre Präferenzen befragt werden.

Da alle der vielen Annahmen und Methoden diskutiert werden können – und dies bei öffentlichen Projekten im Rahmen einer Anhörung meist auch geschieht – ist es notwendig, eine Sensitivitätsanalyse hinsichtlich der Schlüsselannahmen zu machen, um zu zeigen, wie robust das Ergebnis bei Veränderung der unsicheren, aber zumindest denkbaren Annahmen ist.

## 10.6 Nutzentheorie

Die Nutzentheorie ist eine wichtige Theorie, die dabei hilft, eine bedeutende Schwäche des Erwartungswerts als Entscheidungskriterium zu korrigieren. Generell arbeiten Ökonomen unter der Annahme, dass alle Menschen ihren Nutzen maximieren – und nicht den Erwartungswert, und dafür gibt es einen guten Grund. Zwischen diesen beiden Konzepten kann mittels folgender Formel unterschieden werden.

Erwartungswert:

$$E\left[\mathbf{x}\right] = \sum prob_i \cdot x_i \tag{10.5}$$

Erwarteter Nutzen:

$$E\left[U\left(\mathbf{x}\right)\right] = \sum prob_i \cdot U\left(x_i\right) \tag{10.6}$$

Das bedeutet, dass die Nutzenfunktion eine Transformation von Nominalwerten ist, genauso wie eine logarithmische Skala den Graphen anders aussehen lässt. Die grundsätzliche Idee ist, dass doppelt so viel von etwas nicht unbedingt doppelt so viel wert sein muss.

Die Nutzentheorie, so wie sie heute in der Wirtschaftswissenschaft verwendet wird, ist keine Theorie im eigentlichen Sinne – sie ist eher ein Modellierungsansatz, in dem menschliche Entscheidungen als Ergebnis eines Maximierungsprozesses dargestellt werden. Die zu maximierende Funktion (Nutzenfunktion) muss bestimmte Annahmen erfüllen. Die wichtigste davon ist die Transitivität der Präferenzen.

Ein gutes Beispiel, das zeigt, warum der Erwartungswert allein zu Problemen führt, ist das Sankt-Petersburg-Paradoxon:

> Wie viel ist eine Wette um X wert, wenn n gleich der Anzahl Kopf ist, die hintereinander bei einem fairen Münzwurf geworfen wird und die Bezahlung X so definiert ist:
> $$X = 2^{n-1}$$

Der Erwartungswert beträgt:

$$E\left[X\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty \tag{10.7}$$

Die Wette hat also einen unendlichen Wert. Dementsprechend sollte man theoretisch bereit sein, unendlich viel dafür zu bezahlen, an dieser Wette teilnehmen zu dürfen – was aber nur sehr wenige tatsächlich tun würden. Die Nutzentheorie löst dieses Problem dadurch, dass sie erlaubt, Nominalwerte anders zu bewerten, als es der reine Barwert tun würde.

Insbesondere lassen sich die Präferenzen bezüglich des Risikos wie folgt darstellen: Konkave Nutzenfunktionen drücken risikoscheues Verhalten aus, konvexe Nutzenfunktionen drücken risikofreudiges Verhalten aus. Lineare Nutzenfunktionen (d.h. der Erwartungswert der «Pay-Offs») drücken risikoneutrales Verhalten aus. Man kann eine Lotterie (etwas Risikobehaftetes) aus den Ereignissen A und B mit der Wahrscheinlichkeiten $\alpha$ und $1-\alpha$ konstruieren und das Ergebnis (den Erwartungswert) dann mit einer sicheren Zahlung derselben Grösse vergleichen. Somit kann die Versuchsperson sagen, ob sie lieber die Wette oder die sichere Zahlung hat.

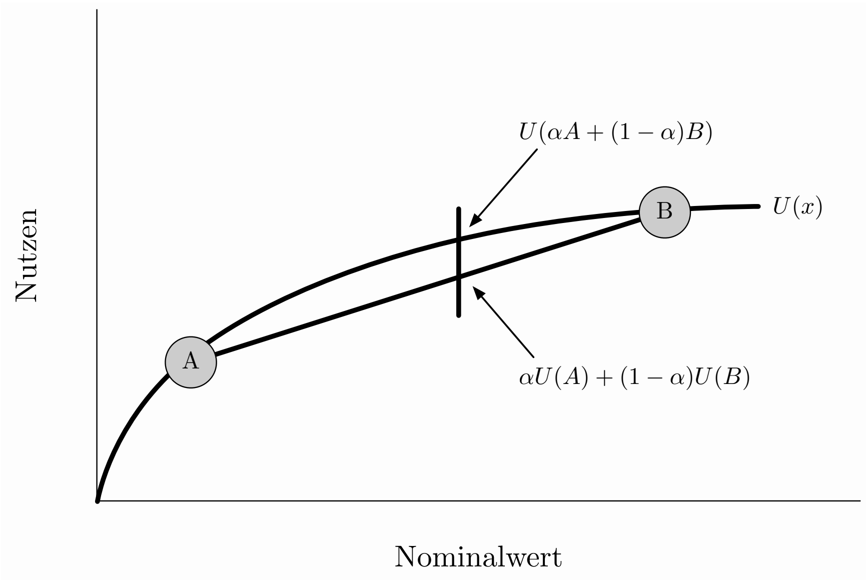



Abbildung 10.5: Eine Nutzenfunktion kann nominelle Werte transformieren, damit Präferenzen besser dargestellt werden können.

Wenn der Nutzen der sicheren Zahlung $U(\alpha A + (1-\alpha)B)$ gegenüber dem Erwartungswert der Lotterie $\alpha U(A) + (1-\alpha)U(B)$ bevorzugt wird, ist der Entscheidungsträger eher risikoavers.

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Nutzenfunktion sagt: «Menschen schätzen in der Regel alles geringer, je mehr sie davon haben.»

Operativ nützlich für die Formalisierung von Entscheidungsfindungsprozessen bleibt vor allem die Charakteristik, dass jede zusätzliche oder verlorengegangene Million für den Entscheidungsträger nicht zwingend gleich viel bedeuten muss. Die Bedeutung kann zu- oder abnehmen – je nachdem, was zu dem jeweiligen Entscheidungsträger passt.

Als ausführender Analyst ist darauf zu achten, dass die Annahme der Linearität der Bewertung zu hinterfragen ist, wenn die einzelnen Werte eines zu kalkulierenden Erwartungswerts sehr weit auseinanderliegen.

Falls einzelne Werte den Entscheidungsträger nahe an unangenehme Ergebnisse (wie z.B. die komplette Pleite) bringen, dann ist eine Million mehr vermutlich nicht gleich zu bewerten wie eine Million weniger. Dann sollte man lieber den Erwartungsnutzen anstatt den Erwartungswert als Mass nehmen.

## 10.7 Kontrollfragen

- Bezogen auf Projekte, was könnte mit der Unterscheidung zwischen «internen» gegenüber «externen» Kosten gemeint sein?
- Wie nennt man die Menge $p \cdot x$ in Abb. 10.2?
- Ist die Konsumentenrente auf einem Basar, wo einzeln über die Preise verhandelt wird, grösser oder kleiner als in einem «normalen» Marktgeschehen?
- Wenn es etwas gäbe, das kostenlos vorhanden ist (z.B. ein Aussichtspunkt), für das es aber trotzdem einen Preis gibt – welche geometrische Form würde die ökonomische Wohlfahrt dann annehmen?
- Muss ein Projekt eine positive ökonomische Wohlfahrt abwerfen, damit es Pareto-optimal sein kann?
- Was bedeutet «indirekt» bei der Bewertung eines Objekts oder einer Dienstleistung?
- Wie können Vorprojekte helfen, Varianten zu bewerten?
- Angenommen, Sie würden wie Galileo die Erdanziehungskraft experimentell schätzen wollen, indem Sie eine Kugel vom Schiefen Turm von Pisa fallen lassen und die Zeit bis zur Ankunft messen. Erklären Sie anhand dieses Experiments den Unterschied zwischen Mess- und Spezifikationsfehler.
- Warum kann Elastizität eine sinnvolle Masseinheit sein?
- Kann man mit der Reisezeitmethode z.B. argumentieren, dass die ökonomische Wohlfahrt erhöht werden könnte, wenn man auf einzelnen Strassen separate Spuren für hochbezahlte Personen bauen würde?
- Kennen Sie Kreuzungen, wo genau das in Abschnitt 10.3.2.1 unter «Trade-Offs» beschriebene Verhalten beobachtet werden kann? Was könnte ein Strassenbauer unternehmen, damit weniger Menschen den riskanten Weg nehmen anstatt den vorgesehenen? Könnte man dies als Veränderung der Preise der verschiedenen Varianten ansehen?
- Sind Sie bereit, mehr für eine Wohnung zu bezahlen, die eine gute Anbindung an den öffentlichen Verkehr hat?
- Wie viele verschiedene Preiseffekte können abgeschätzt werden, wenn genügend Datensätze vorhanden sind?

- Kann die Defensivmethode den Wert einer Verbesserung auch für Personen, die bereits von einem Standort weggezogen sind, messen?
- Was ist die zentrale Vorgehensweise bei Stated-Preference-Methoden?
- Inwiefern könnte man den IRR als Sensitivitätsanalyse betrachten?
- Zeichnen Sie Ihre persönliche Nutzenfunktion in das leere Diagramm in Abb. 10.6 ein. Ist sie linear oder gekrümmt, stetig steigend oder veränderlich? Wie erhält man daraus eine Nachfragekurve?

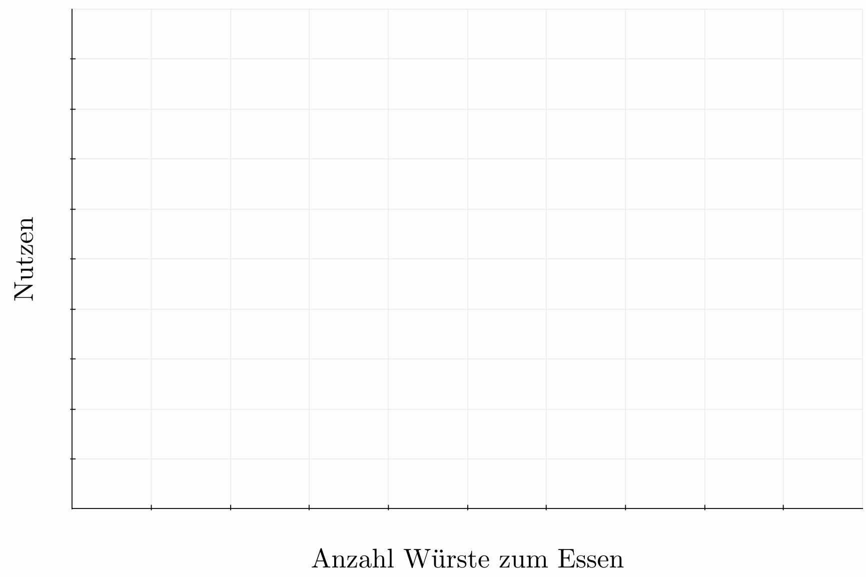



Abbildung 10.6: Persönliche Nutzenfunktion