به نام خدا

دانشگاه تهران

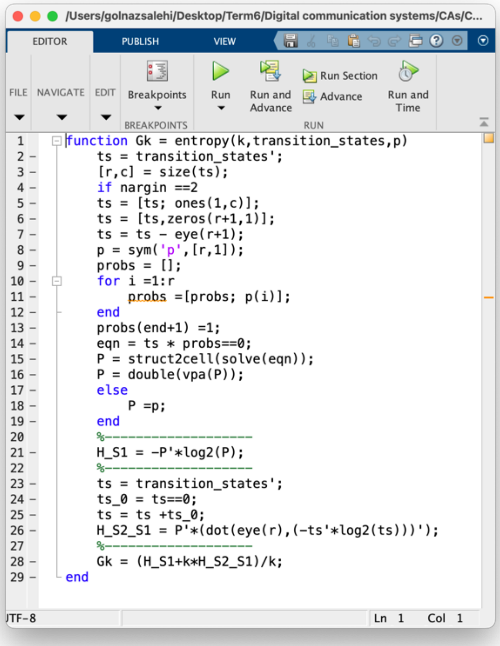
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

مخابرات دیجیتال

گزارش پروژه ۱

نام و نام خانوادگی	فاطمه صالحی
شماره دانشجویی	۸۱۰۱۹۸۴۲۳

سوال ۱۰:



```matlab
1  function Gk = entropy(k,transition_states,p)
2      ts = transition_states';
3      [r,c] = size(ts);
4      if nargin ==2
5      ts = [ts; ones(1,c)];
6      ts = [ts,zeros(r+1,1)];
7      ts = ts - eye(r+1);
8      p = sym('p',[r,1]);
9      probs = [];
10     for i =1:r
11         probs =[probs; p(i)];
12     end
13     probs(end+1) =1;
14     eqn = ts * probs==0;
15     P = struct2cell(solve(eqn));
16     P = double(vpa(P));
17     else
18         P =p;
19     end
20     %-------------------
21     H_S1 = -P'*log2(P);
22     %-------------------
23     ts = transition_states';
24     ts_0 = ts==0;
25     ts = ts +ts_0;
26     H_S2_S1 = P'*(dot(eye(r),(-ts'*log2(ts)))');
27     %-------------------
28     Gk = (H_S1+k*H_S2_S1)/k;
29 end
```

شکل ۱: تابع entropy

روند تابع : ابتدا ماتریس گذر را ترنسپوز میکنیم؛ سپس یک سطر تمام ۱ به ماتریس اضافه میکنیم(تا رابطه $\sum_i p_i = 1$ را لحاظ شود)؛ همچنین یک ستون صفر نیز اضافه میکنیم تا صرفا ماتریس مربعی باقی بماند.

$$ts = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}; \; ts \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

حال، تمام ماتریس ها را به سمت چپ میبریم؛ کد این قیمت در خط ششم زده شده است.

به تعداد حالت های ممکن(state) متغیر تعریف میکنیم و توسط آنها و تابع solve، احتمال اولیه هر state را به دست می آورده میشود(P_i را بدست می آیند).

با داشتن احتمال های اولیه و ماتریس گذر $H(S_2|S_1)$ و $H(S_1)$ را به شکل زیر بدست می آوریم:

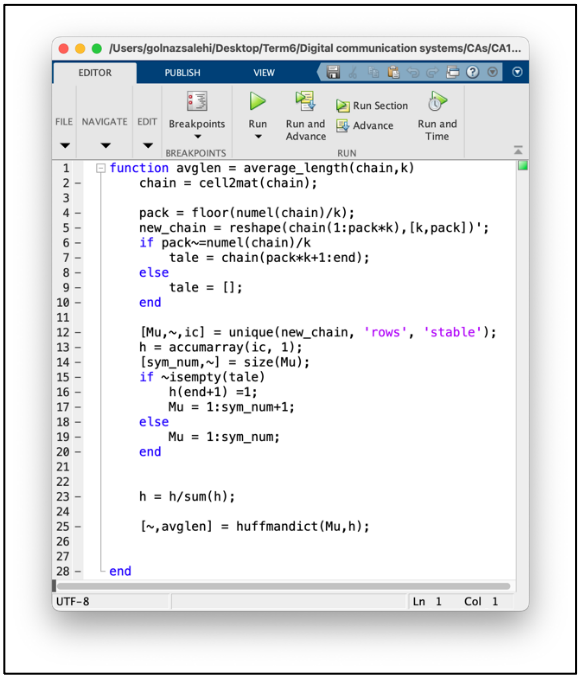
$$H(S_1) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log(P_i)$$

$$H(S_2|S_1) = \sum_{i=1}^{n} P_i \left[-\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \log(p_{ij}) \right] = \sum_{i=1}^{n} P_i \, H_i$$

و در نهایت از رابطه زیر G_k را بدست می آوریم:

$$G_k = \frac{H(S_1) + kH(S_2|S_1)}{k}$$

سوال ۱۱:



شکل ۲: تابع average_length

در ابتدا دنباله داده شده را به قسمت های k تایی تقسیم میکنیم، سپس مجموعه ای از دنباله های k تایی موجود را تشکیل میدهیم و تعداد هر یک را در دنباله داده شده بدست می آوریم. با داشتن تعداد هر یک، میتوان احتمال وجود را از رابطه زیر بدست آوریم:

$$P(a\ specific\ k - length\ chain) = \frac{\#\ the\ k - length\ chain}{length\ of\ the\ whole\ chain}$$

با داشتن احتمال هر یک از دنباله های k تایی، با کمک تابع huffmandict میتوان متوسط طول کد هافمن را بدست آورد.

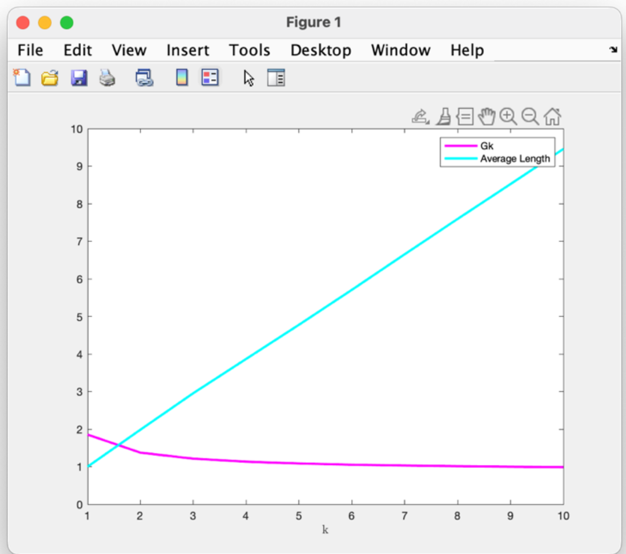
سوال ۱۲:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \phi^T \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{0.8}{1.3} = \frac{8}{13} \,, p_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{0.5}{1.3} = \frac{5}{13}$$

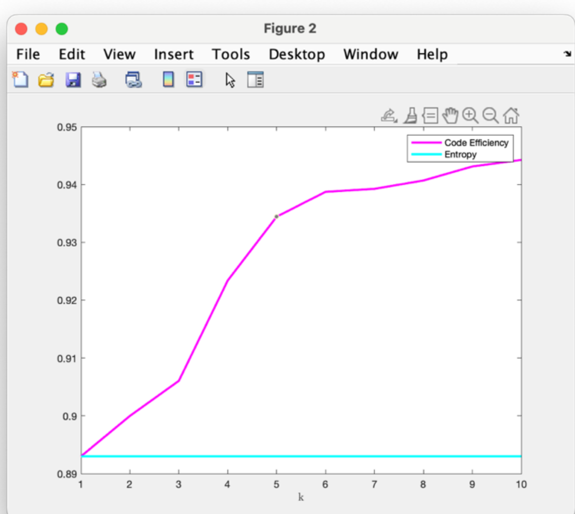
$$H_1 = -(p_{11} \log p_{11} + p_{12} \log p_{12}) = \hbar_b(0.5) = 1$$

$$H_2 = -(p_{21} \log p_{21} + p_{22} \log p_{22}) = \hbar_b(0.8) = 0.7219$$

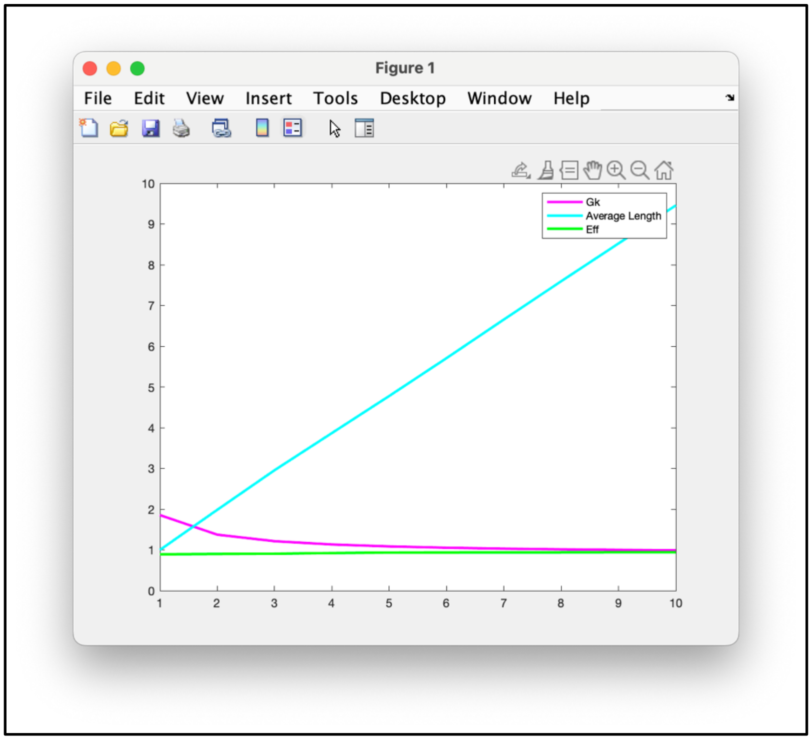
$$H(\mathcal{X}) = H_1 p_1 + H_2 p_2 = \frac{8}{13} \times 1 + \frac{5}{13} \times 0.7219 = 0.893$$



شکل ۳ : متوسط طول کد هافمن و G_k برای $k = 1, 2, \dots, 10$



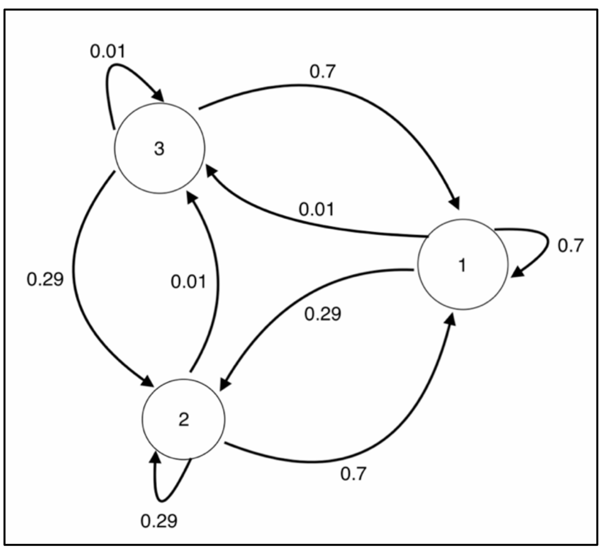
شکل ۴ : بهره کدینگ همراه با بهره آنتروپی



شکل ۵ : نمودار کدینگ، کد هافمن و G_k

سوال ۱۳:

در این سوال، X را میتوان به شکل زیر مدل کرد:



شکل ۶ : مدل منبع بی حافظه با یک منبع حافظه دار

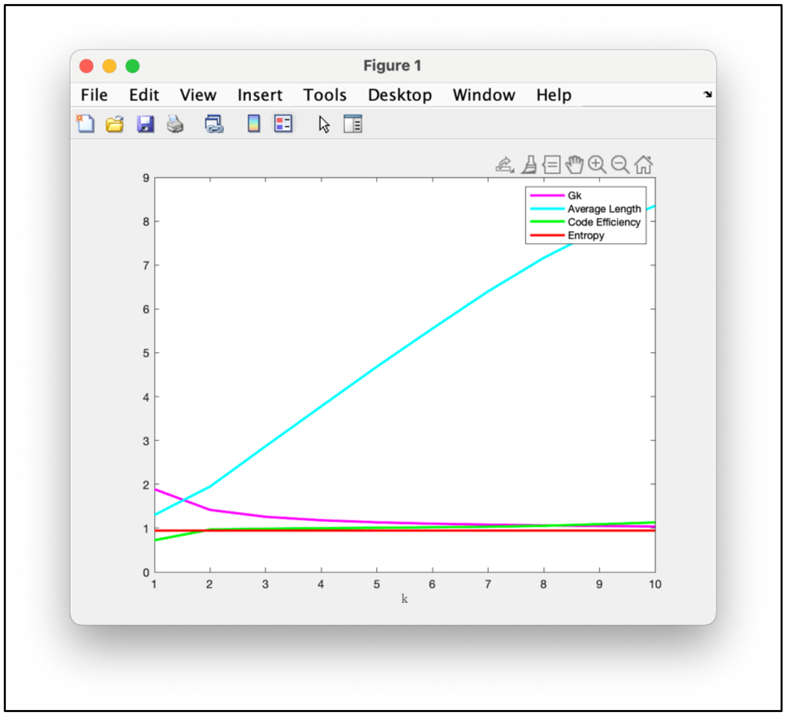
همانطور که در دیاگرام دیده میشود، در هر حالتی که قرار داشته باشیم به احتمال ۰.۷ حالت۱، به احتمال ۰.۲۹ به حالت ۲، و به احتمال ۰.۰۱ به حالت ۳ میرویم. طی گذر به حالت ۱ سمبل A ، طی گذر به حالت ۲ سمبل B ، و طی گذر به حالت ۳ سمبل C تولید میشود.

بنابراین ماتریس گذر حالت به شکل زیر میباشد:

$$transition\ matrix = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.29 & 0.01 \\ 0.7 & 0.29 & 0.01 \\ 0.7 & 0.29 & 0.01 \end{bmatrix}$$

برای این منبع آنتروپی به شکل زیر است:

$$H(X) = -0.7\log(0.7) - 0.29\log(0.29) - 0.01\log(0.01) = 0.9445$$



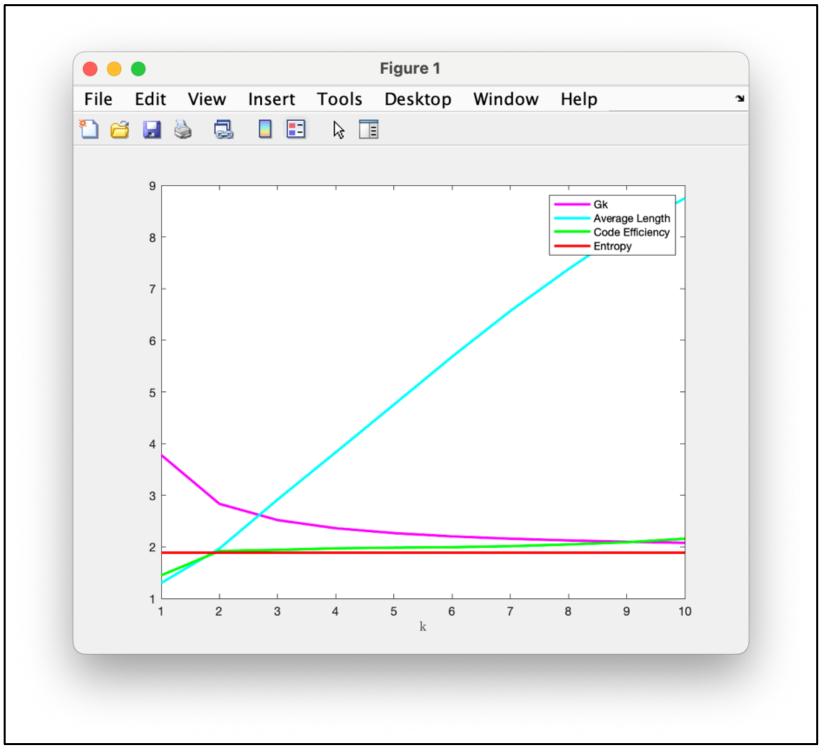
شکل ۷ : متوسط طول کد هافمن و G_kو بهره کدینگ برای $k = 1, 2, \ldots, 10$ برای X

به طریق مشابه میتوان X^2 را با یک منبع با حافظه مدل میکنیم که ماتریس گذر آن به شکل زیر خواهد بود:

```
TS = [ones(1,9)*0.49; % aa
      ones(1,9)*0.0841; %bb
      ones(1,9)*0.0001; %cc
      ones(1,9)*0.203; %ab
      ones(1,9)*0.007; %ac
      ones(1,9)*0.0029; %bc
      ones(1,9)*0.203; %ba
      ones(1,9)*0.007;%ca
      ones(1,9)*0.0029;]'; %cb
```

برای این منبع آنتروپی به شکل زیر است:

$$H(X) = -0.49\log(0.49) - 0.0841\log(0.0841) - \cdots - 0.0029\log(0.0029) = 1.8891$$



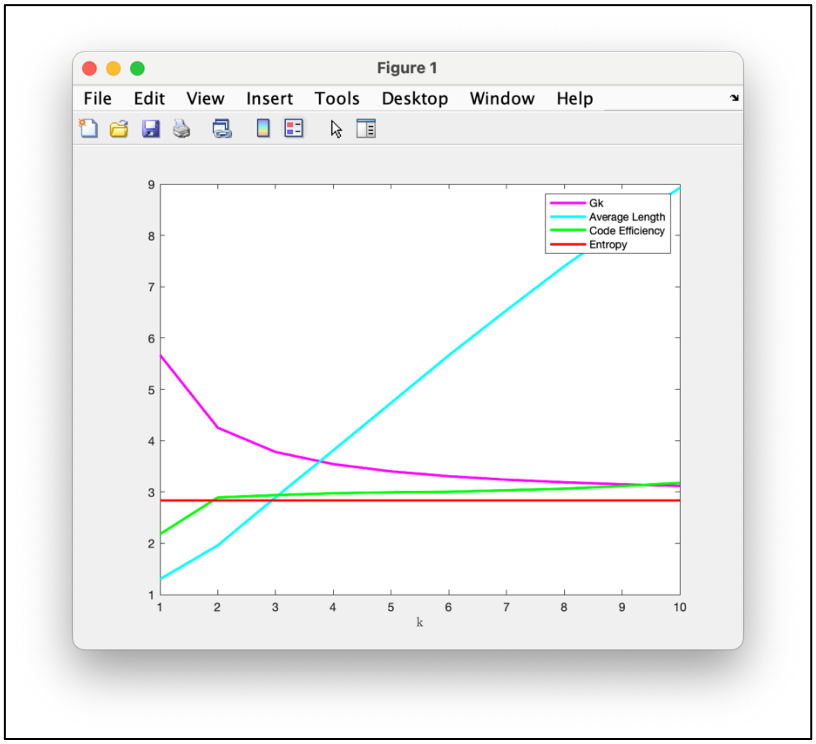
شکل ۸ : متوسط طول کد هافمن و G_kو بهره کدینگ برای $k = 1, 2, \dots, 10$ برای X^2

به طریق مشابه میتوان X^3 را با یک منبع با حافظه مدل میکنیم که ماتریس گذر آن به شکل زیر خواهد بود:

```
S = [ones(1,27)*0.343; %aaa
      ones(1,27)*0.024389; %bbb
      ones(1,27)*1.0000e-06; %ccc
      ones(3,27)* 0.1421; %aab,aba,baa
      ones(3,27)* 0.0049; %aac,aca,caa
      ones(3,27)* 0.05887; %bba,bab,abb
      ones(3,27)* 8.4100e-04; %bbc,bcb,cbb
      ones(3,27)* 7.0000e-05; %cca,cac,acc
      ones(3,27)* 2.9000e-05; %ccb,cbc,bcc
      ones(6,27)*0.00203]';% abc and its permutation
```

برای این منبع آنتروپی به شکل زیر است:

$$H(X) = -0.343\log(0.343) - 0.024389\log(0.024389) - \cdots - 0.00203\log(0.00203) = 2.8336$$



شکل ۸ : متوسط طول کد هافمن و G_kو بهره کدینگ برای $k = 1, 2, \dots, 10$ برای X^3

سوال ۱۴ : با توجه به شکل ۵ و ۷ نتیجه میگیریم که با افزایش k ، متوسط طول کد هافمن و بهره کد افزایش میابند ولی G_k کاهش پیدا میکند.

لازم به ذکر است که فرمول اصلی G_k به شکل زیر است:

$$G_k = \frac{H(S_1) + k \times H(S_2|S_1) - H(S_1|X_1, X_2, \dots, X_k)}{k}$$

در تابع $entropy.m$ جمله $H(S_1|X_1, X_2, \dots, X_k)$ درنظر گرفته نشده است؛ اگر لحاظ میشد، برای منابع بدون حافظه G_k عددی ثابت و برابر آنتروپی منبع میشد. همچنین در سوال ۱۲ مقادیر دقیق تری برای G_k بدست می آمد.