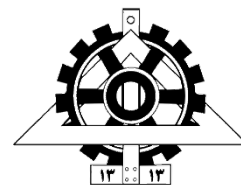




پروژه دوم درس مخابرات بی سیم
فاطمه صالحی- ۸۱۰۱۹۸۴۲۳



روند کلی کد های بخش اول:

تمام شبیه سازی های این بخش در فایل Section1_810198423 در پوشه آپلود شده وجود دارند. کد سوال i در قسمت Qi یافت میشود؛ اگر یک سوال شامل چند بخش باشد با کامنت **section x %** از یکدیگر جدا شده اند.

روند کلی کد های بخش دوم:

برای هر شبیه سازی از این بخش فایلی جدا در پوشه آپلود شده وجود دارد. توضیحات مربوط به کد در گزارش این بخش آورده شده است.

بخش اول: کانال باند باریک

سوال (۱)

الف)

فرضیات مسئله:

$$h[m] = h_r + jh_i$$

$$w[m] = w_r + jw_i$$

$$h_r \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right); \quad w_r \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

سیگنال دریافتی:

$$y[m] = (h_r + jh_i)x[m] + w_r + jw_i = (h_r x[m] + w_r) + j(h_i x[m] + w_i) = y_r + jy_i$$

چون مدولاسیون ارسالی BPSK است، برای تصمیم گیری بهینه فقط قسمت حقیقی سیگنال دریافتی اهمیت دارد؛ بنابراین احتمال خطا به شرح زیر خواهد بود:

$$P_e = P_r\{y_r > 0 | x[m] = -a\} \times P_r\{x[m] = -a\} + P_r\{y_r < 0 | x[m] = a\} \times P_r\{x[m] = a\}$$

$$\underbrace{P_r\{x[m] = -a\} = P_r\{x[m] = a\} = \frac{1}{2}}_{\text{برای ادامه محاسبه فرض میکنیم که قسمت حقیقی بهره کانال در گیرنده معلوم است:}} = \frac{1}{2} [P_r\{y_r > 0 | x[m] = -a\} + P_r\{y_r < 0 | x[m] = a\}]$$

برای ادامه محاسبه فرض میکنیم که قسمت حقیقی بهره کانال در گیرنده معلوم است:

$$P_{e|h_r \text{ is known}} = \frac{1}{2} [P_r\{h_r x[m] + w_r > 0 | x[m] = -a\} + P_r\{h_r x[m] + w_r < 0 | x[m] = a\}] =$$

$$\frac{1}{2} [P_r\{h_r(-a) + w_r > 0\} + P_r\{h_r(a) + w_r < 0\}] =$$

$$\frac{1}{2} [P_r\{w_r > h_r a\} + P_r\{w_r < -h_r a\}] = \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) + Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \right] = Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} P_{e|h_r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(h_r^2)} d(h_r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) e^{-(h_r^2)} d(h_r)$$

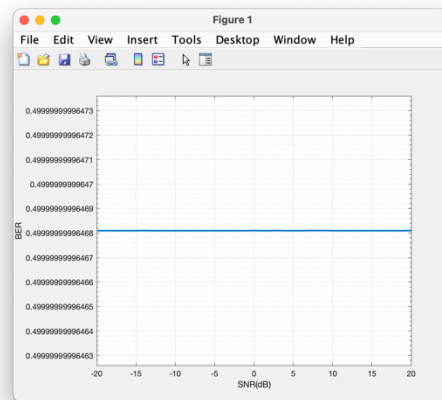
حال باید عبارت بدست آمده بر حسب SNR نوشته شود:

$$SNR = \frac{E_s}{\frac{N_0}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{N_0}{2}} = \frac{a^2}{N_0} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{N_0}} = \sqrt{SNR} \Rightarrow P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sqrt{2SNR} h_r) e^{-(h_r^2)} d(h_r)$$

با توجه به اینکه Q-function برای توزیع استاندارد در بازه $[-3,3]$ مقدار دارد و عبارت $\sqrt{2SNR} h_r$ برای یک SNR مشخص، به ازای اکثر مقادیر خارج از این بازه قرار دارد، پس انتظار داریم که Q-function در نصف بازه صفر و در نصفه دیگر یک باشد که نتیجتاً احتمال به صورت زیر (تقریبی) نوشت:

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(h_r^2)} d(h_r) = \frac{1}{2}$$

به ازای مقادیر مختلف SNR، احتمال خطا به کمک متلب محاسبه میشود:



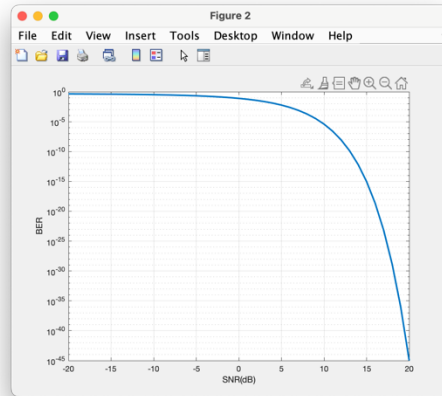
تصویر ۱: احتمال خطا با وجود اثر fading در بازه $[-20dB, 20dB]$

با توجه به تصویر ۱ میتوان نتیجه گرفت که در حضور اثر fading، هر چه قدر SNR را افزایش دهیم، تنها تاثیری در احتمال خطا نخواهد داشت، بلکه سبب میشود که حول عدد ۰.۵ نوسان بکند.

ب و ج)

اگر کانال بر سیگنال ارسالی بی تاثیر باشد ($h[m] = 1$)، با توجه به روابط به دست آمده در قسمت الف، احتمال خطا به شرح زیر است:

$$P_e = Q\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q(\sqrt{2SNR})$$



تصویر ۲: احتمال خطا بدون اثر fading در بازه $[-20dB, 20dB]$

با توجه به تصویر های ۱ و ۲ میتوان نتیجه گرفت که اگر اثر fading وجود نداشته باشد، با افزایش SNR احتمال خطا کاهش پیدا میکند.

برای رسیدن به احتمال خطا $P_e = 10^{-6}$:

$$Q(\sqrt{2SNR}) = 10^{-6} \rightarrow SNR = \frac{(Q^{-1}(10^{-6}))^2}{2} = 11.2975 = 10 \times \log(11.2975)dB = 10.5298 dB$$

سوال ۲)

الف و ب)

فرضیات مسئله:

سیگنال دریافتی برای هر بیت شامل دو بخش است:

$$y = [y_0 \ y_1]$$

اگر بیت ۱ ارسال شود: ($x = 1$)

$$y_0 \sim \mathcal{CN}(0, a^2 + N_0), \quad y_1 \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$$

اگر بیت ۰ ارسال شود: ($x = 0$)

$$y_0 \sim \mathcal{CN}(0, N_0), \quad y_1 \sim \mathcal{CN}(0, a^2 + N_0)$$

یک متریک (threshold) جهت محاسبه احتمال خطا تعیین میکنیم:

$$\Delta = \ln \left(\frac{f(y|x=1)}{f(y|x=0)} \right) = \ln \left(\frac{f(y_0|x=1)f(y_1|x=1)}{f(y_0|x=0)f(y_1|x=0)} \right) = \ln \left(\frac{e^{-\frac{y_0^2}{a^2+N_0}} \times e^{-\frac{y_1^2}{N_0}}}{e^{-\frac{y_1^2}{a^2+N_0}} \times e^{-\frac{y_0^2}{N_0}}} \right)$$

$$= -\frac{y_0^2}{a^2 + N_0} - \frac{y_1^2}{N_0} + \frac{y_1^2}{a^2 + N_0} + \frac{y_0^2}{N_0} = \frac{(y_0^2 - y_1^2)a^2}{N_0(a^2 + N_0)}$$

$$\Delta_{x=1} \geq^{x=0} 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_e &= P_r\{y_0^2 - y_1^2 > 0|x = 1\}P_r\{x = 1\} + P_r\{y_0^2 - y_1^2 < 0|x = 0\}P_r\{x = 0\} \\ &= \frac{1}{2}(P_r\{y_0^2 - y_1^2 > 0|x = 1\} + P_r\{y_0^2 - y_1^2 < 0|x = 0\}) \end{aligned}$$

$$\rightarrow P_r\{y_0^2 - y_1^2 > 0|x = 1\} = \xrightarrow{y_0 \sim \mathcal{CN}(0, a^2 + N_0), y_1 \sim \mathcal{CN}(0, N_0)} \dots$$

y_0, y_1 توزیع مختلط گوسی دارند، بنابراین y_0^2, y_1^2 توزیع نمایی با امید های $a^2 + N_0$ و N_0 خواهند داشت. با توجه به لینک زیر احتمالات خواسته شده را بدست می آوریم:

$$P_r\{y_0^2 - y_1^2 > 0|x = 1\} = P_r\{y_0^2 > y_1^2\} = \frac{N_0}{a^2 + 2N_0} = \frac{1}{\frac{a^2}{N_0} + 2}$$

$$P_r\{y_0^2 - y_1^2 < 0|x = 0\} = \xrightarrow{y_1 \sim \mathcal{CN}(0, a^2 + N_0), y_0 \sim \mathcal{CN}(0, N_0)} \dots$$

y_0, y_1 توزیع مختلط گوسی دارند، بنابراین y_0^2, y_1^2 توزیع نمایی با امید های $2N_0$ و $2(a^2 + N_0)$ خواهند داشت. با توجه به لینک زیر احتمالات خواسته شده را بدست می آوریم:

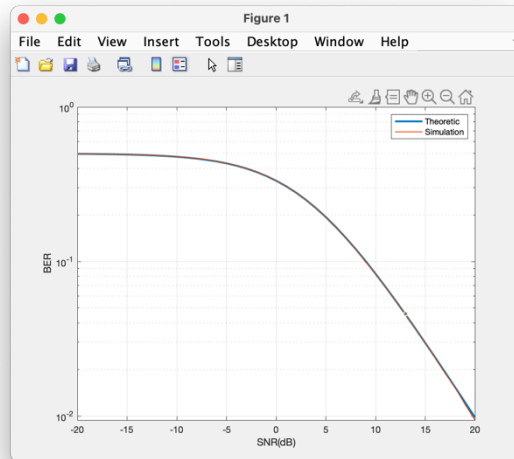
$$P_r\{y_0^2 - y_1^2 < 0|x = 0\} = P_r\{y_1^2 > y_0^2\} = \frac{N_0}{a^2 + 2N_0} = \frac{1}{\frac{a^2}{N_0} + 2}$$

لینک استفاده شده:

<https://math.stackexchange.com/questions/115022/pdf-of-the-difference-of-two-exponentially-distributed-random-variables>

بنابراین احتمال خطا کل به شکل زیر بدست می آید:

$$P_e = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\frac{a^2}{N_0} + 2} + \frac{1}{\frac{a^2}{N_0} + 2} \right\} = \frac{1}{\frac{a^2}{N_0} + 2} = \frac{1}{SNR + 2}$$



تصویر ۳: مقایسه نمودار احتمال خطا بر اساس تئوری و شبیه سازی

(ج)

$$P_e = \frac{1}{SNR + 2} = 10^{-6} \rightarrow SNR = 10^6 - 2 = 10 \times \log(10^6 - 2) \approx 60 \text{ dB} !!$$

با توجه به نتایج بدست آمده نتیجه میگیریم که برای رسیدن به احتمال خطا 10^{-6} در سیستم با وجود اثر fading باید ۶ برابر (در واحد دسیبل) توان ارسالی را افزایش دهیم.

سوال (۳)

(الف)

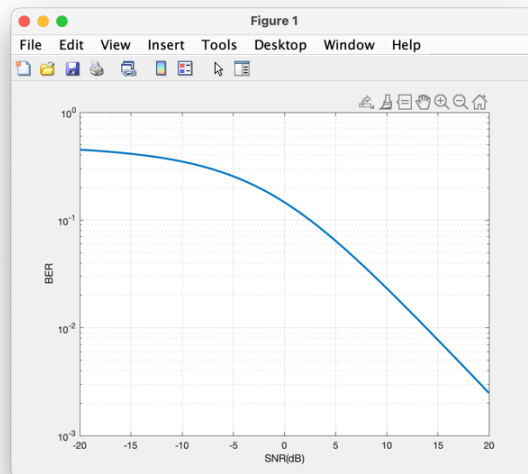
$$\begin{aligned} y[m] &= h[m]x[m] + w[m] \xrightarrow{\times h^*[m]} |h[m]|^2 x[m] + h^*[m]w[m] \xrightarrow{\div |h[m]|^2} \\ &= x[m] + \frac{h^*[m]}{|h[m]|^2} w[m] \end{aligned}$$

در این قسمت فرض میکنیم که کانال یک متغیر تصادفی نیست بلکه یک عدد دانسته شده در گیرنده است (در هر لحظه مقدار آن را میدانیم).

$$\Rightarrow \frac{E_s}{\frac{|h^*[m]|^2 N_0}{|h[m]|^4}} = \frac{|h[m]|^2 E_s}{N_0} = \frac{|h[m]|^2 \frac{a^2}{2}}{N_0} = |h[m]|^2 \times SNR$$

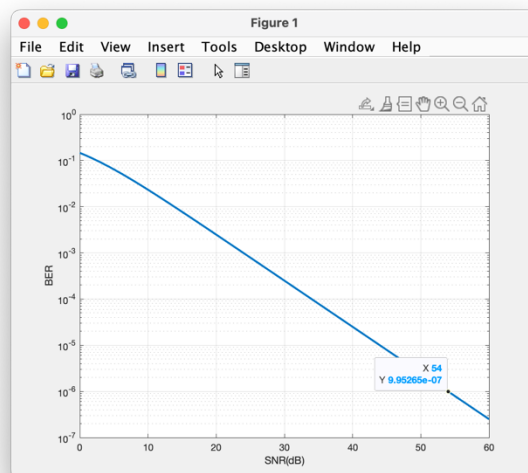
با توجه به محاسبات انجام شده در بخش الف سوال ۱، احتمال خطا به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
 P_{e|h[m] \text{ is known}} &= Q\left(\sqrt{2 \times \frac{|h[m]|^2 \frac{a^2}{2}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{|h[m]|^2 a^2}{N_0}}\right) \\
 &= Q\left(\frac{|h[m]|a}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{h_r^2 + h_i^2} a}{\sqrt{N_0}}\right) \xrightarrow{h_r, h_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)} \\
 \Rightarrow P_e &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{\sqrt{h_r^2 + h_i^2} a}{\sqrt{N_0}}\right) e^{-(h_r^2 + h_i^2)} d(h_r) d(h_i) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\sqrt{(h_r^2 + h_i^2) \times 2 \times SNR}\right) e^{-(h_r^2 + h_i^2)} d(h_r) d(h_i)
 \end{aligned}$$



تصویر ۴: احتمال خطا در بازه $[-20dB, 20dB]$ زمانی که اطلاعات کانال در گیرنده معلوم باشد

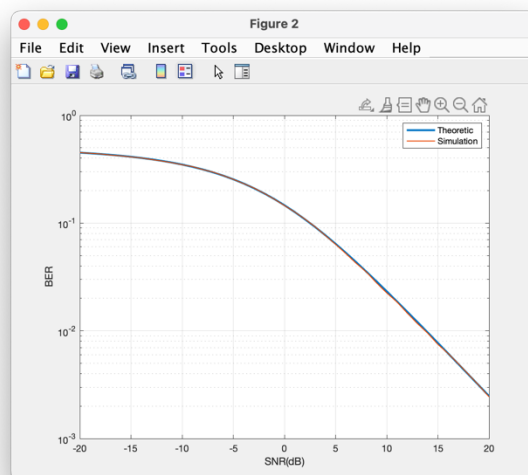
با توجه به نمودار تصویر ۵ برای رسیدن به احتمال خطا 10^{-6} در سیستم زمانی که اطلاعات کانال در گیرنده وجود دارد، SNR باید 54dB باشد.



تصویر ۵: احتمال خطا در بازه $[0dB, 60dB]$ زمانی که اطلاعات کانال در گیرنده معلوم باشد

ب و ج)

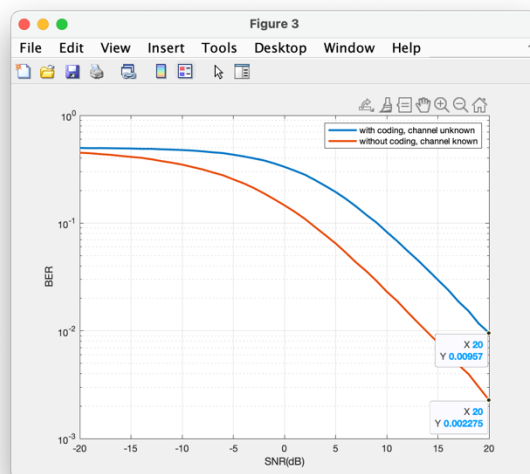
با توجه به نمودار تصویر ۶ به صحت رابطه بدست آمده در قسمت قبل پی میبریم.



تصویر ۶: احتمال خطا به کمک شبیه سازی در بازه $[-20dB, 20dB]$ زمانی که اطلاعات کانال در گیرنده معلوم باشد

با توجه به تصویر ۷ میتوان نتیجه گرفت که دانستن اطلاعات کانال در گیرنده مزیت قابل توجهی نسبت به نداشتن این اطلاعات دارد زیرا برای رسیدن به احتمال خطا یکسان، در حالتی که از کانال اطلاعی نداریم، SNR بیشتری داریم.

برای مثال وقتی $SNR=20dB$ میباشند احتمال خطا در وجود CSI، به اندازه ۶.۲۳۹۳ دسیبل بهتر از احتمال خطا در نبود CSI است.



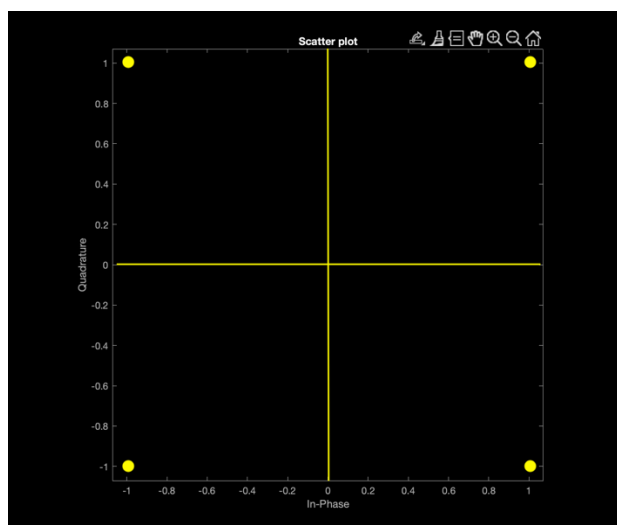
تصویر ۷: مقایسه احتمال خطا در بازه $[-20dB, 20dB]$ در وجود و نبود CSI

سوال (۴)

الف)

فرضیات مسئله:

نقاط constellation و نواحی تصمیم گیری برای مدولاسیون QPSK به شکل زیر هستند:



تصویر ۸: نقاط constellation و نواحی تصمیم گیری برای مدولاسیون QPSK

$$h[m] = h_r + jh_i$$

$$w[m] = w_r + jw_i$$

$$x[m] = x_r + jx_i$$

$$w_r, w_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

سیگنال دریافتی:

$$y[m] = (h_r + jh_i)(x_r + jx_i) + w_r + jw_i = (h_r x_r - h_i x_i + w_r) + j(h_i x_r + h_r x_i + w_i) = y_r + jy_i$$

چون مدولاسیون ارسالی QPSK است، برای تصمیم گیری بهینه هر دو قسمت حقیقی و موهومی اهمیت دارند.

$$\begin{aligned} z[m] &= y[m] \times h^*[m] = ((h_r x_r - h_i x_i + w_r) + j(h_i x_r + h_r x_i + w_i)) \times (h_r - jh_i) \\ &= (h_r(h_r x_r - h_i x_i + w_r) + h_i(h_i x_r + h_r x_i + w_i)) \\ &\quad + j(h_r(h_i x_r + h_r x_i + w_i) - h_i(h_r x_r - h_i x_i + w_r)) \\ &= ((h_r^2 + h_i^2)x_r + h_r w_r + h_i w_i) + j((h_r^2 + h_i^2)x_i + h_r w_i - h_i w_r) \end{aligned}$$

$$Y[m] = \frac{z[m]}{|h[m]|^2} = \frac{z[m]}{(h_r^2 + h_i^2)} = x_r + \frac{h_r w_r + h_i w_i}{(h_r^2 + h_i^2)} + jx_i + j\frac{h_r w_i - h_i w_r}{(h_r^2 + h_i^2)}$$

به علت تقارن در نمودار constellation (تصویر ۸) و برابر بودن احتمال های پیشین ، احتمال خطای یک

سمبل برابر با احتمال خطا کل خواهد بود. بنابراین برای سادگی فقط محاسبات احتمال خطا برای سمبل

در ادامه آورده شده است. $\frac{a}{\sqrt{2}}(-1 - j)$

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c = 1 - P_r \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{h_r w_r + h_i w_i}{(h_r^2 + h_i^2)} < 0, -\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{h_r w_i - h_i w_r}{(h_r^2 + h_i^2)} < 0 \right) \\ &= 1 - P_r \left\{ h_r w_r + h_i w_i < \frac{a(h_r^2 + h_i^2)}{\sqrt{2}}, h_r w_i - h_i w_r < \frac{a(h_r^2 + h_i^2)}{\sqrt{2}} \right\} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه w_i, w_r توزیع *i.i.d* دارند، ترکیب خطی آنها زیر توزیع نرمال دارد که امید و واریانس آن به

شکل زیر به دست می آید:

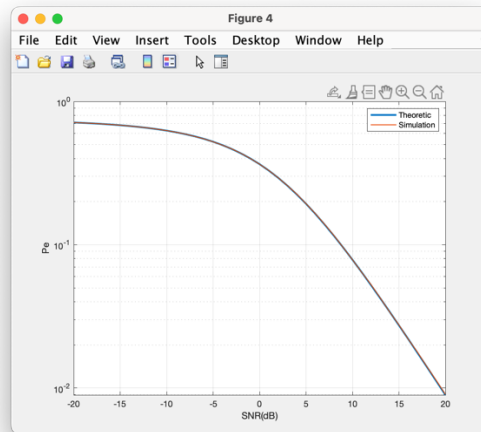
$$\begin{aligned} w_r, w_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right) &\rightarrow \begin{cases} Z_1 = h_r w_r + h_i w_i \rightarrow E(Z_1) = E(h_r w_r + h_i w_i) = h_r E(w_r) + h_i E(w_i) = 0 \\ Z_2 = h_r w_i - h_i w_r \rightarrow E(Z_2) = E(h_r w_i - h_i w_r) = h_r E(w_i) - h_i E(w_r) = 0 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} Var(Z_1) = Var(h_r w_r + h_i w_i) = h_r^2 Var(w_r) + h_i^2 Var(w_i) = \frac{N_0}{2}(h_r^2 + h_i^2) \\ Var(Z_2) = Var(h_r w_i - h_i w_r) = h_r^2 Var(w_i) + h_i^2 Var(w_r) = \frac{N_0}{2}(h_r^2 + h_i^2) \end{cases} \end{aligned}$$

حال می‌خواهیم کواریانس متغیرهای تصادفی Z_1, Z_2 را محاسبه کنیم تا بتوانیم توزیع توأم شان را در ادامه بدست آوریم:

$$\begin{aligned} Cov(Z_1, Z_2) &= E([Z_1 - E(Z_1)] \times [Z_2 - E(Z_2)]) = E(Z_1 Z_2) = E((h_r w_r + h_i w_i)(h_r w_i - h_i w_r)) \\ &= E(h_r^2 w_r w_i) - E(h_r h_i w_r^2) + E(h_r h_i w_i^2) - E(h_i^2 w_r w_i) \\ &= h_r^2 E(w_r w_i) - h_r h_i E(w_r^2) + h_r h_i E(w_i^2) - h_i^2 E(w_r w_i) \\ &= (h_r^2 + h_i^2) E(w_r w_i) + h_r h_i (E(w_i^2) - E(w_r^2)) \xrightarrow{w_r \text{ and } w_i \text{ are independent}} \\ &= (h_r^2 + h_i^2) E(w_r) E(w_i) + h_r h_i (E(w_i^2) - E(w_r^2)) = 0 \end{aligned}$$

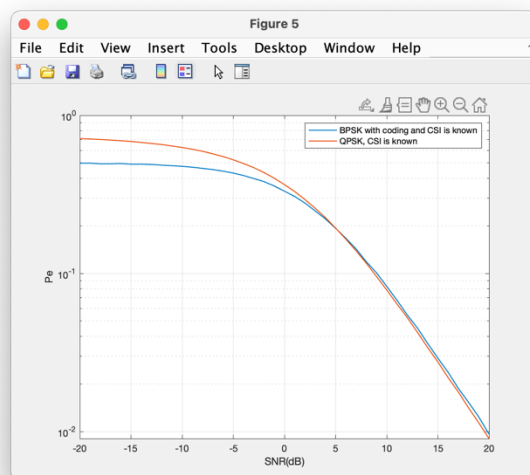
بنابراین میتوان نتیجه گرفت که Z_1, Z_2 مستقل هستند و احتمال خطا به شکل زیر ساده میشود:

$$\begin{aligned} P_{e|h_r \text{ and } h_i \text{ are known}} &= 1 - P_r \left\{ h_r w_r + h_i w_i < \frac{a(h_r^2 + h_i^2)}{\sqrt{2}}, h_r w_i - h_i w_r < \frac{a(h_r^2 + h_i^2)}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= 1 - P_r \left\{ h_r w_r + h_i w_i < \frac{a(h_r^2 + h_i^2)}{\sqrt{2}} \right\} \times P_r \left\{ h_r w_i - h_i w_r < \frac{a(h_r^2 + h_i^2)}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= 1 - \left(1 - Q \left(\frac{\frac{a(h_r^2 + h_i^2)}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}(h_r^2 + h_i^2)}} \right) \right)^2 = 1 - \left(1 - Q \left(\sqrt{\frac{a^2(h_r^2 + h_i^2)}{N_0}} \right) \right)^2 \\ &= 1 - \left(1 - Q \left(\sqrt{SNR (h_r^2 + h_i^2)} \right) \right)^2 \\ P_e &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - Q \left(\sqrt{SNR (h_r^2 + h_i^2)} \right) \right)^2 e^{-(h_r^2 + h_i^2)} dh_r dh_i \end{aligned}$$



تصویر ۹: احتمال خطا برای QPSK در بازه $[-20dB, 20dB]$ - مقایسه شبیه سازی و تئوری

ب) با توجه به تصویر ۱۰ میتوان نتیجه گرفت که در SNR های پایین، BPSK احتمال خطا کمتر (بهتری) نسبت به QPSK دارد ولی در SNR های بالا احتمال خطایشان با تقریب خوبی برابری میکند و بهبودی مشاهده نمیشود.



تصویر ۱۰: مقایسه احتمال خطا BPSK و QPSK با معلوم بودن اطلاعات کانال

سوال ۵)

الف) فاصله زمانی بین عنصرها حداقل باید به اندازه ای باشد که اکو سمبل های از قبل ارسال شده از بین بروند.

ب) برای آشکار سازی از روش MRC استفاده میکنیم. با توجه به روابطی که در درس داشتیم، محاسبات مربوط احتمال خطا در ادامه آورده شده است:

$$V_i = a_i e^{-j\theta_i} \xrightarrow{\text{مقدار بهینه}} a_i = \frac{r_i}{\sqrt{N_0}}$$

سیگنال دریافتی:

$$Z = \left(\sum_{i=1}^L a_i r_i \right) s(t) + \sum_{i=1}^L a_i e^{-j\theta_i} n_i(t) = \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}} \right) s(t) + \sum_{i=1}^L \frac{r_i}{\sqrt{N_0}} e^{-j\theta_i} n_i(t)$$

توجه : تصویر ۱۱ نشان دهنده دایورسیتی در زمان نیست بلکه نشان دهنده دایورسیتی در مکان است و صرفاً برای مشخص کردن منظور از متغیر ها آورده شده است.

$$P_e = P_r(\text{real}(Z) < 0 | s(t) = a) \times P_r(s(t) = a) + P_r(\text{real}(Z) > 0 | s(t) = -a) \times P_r(s(t) = -a)$$

$$\xrightarrow{P_r\{s(t)=-a\}=P_r\{s(t)=a\}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (P_r(\text{real}(Z) < 0 | s(t) = a) + P_r(\text{real}(Z) > 0 | s(t) = -a))$$

$$= \frac{1}{2} \left(P_r \left(\text{real} \left(\left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}} \right) a + \sum_{i=1}^L \frac{r_i}{\sqrt{N_0}} e^{-j\theta_i n_i(t)} \right) < 0 \right) \right.$$

$$\left. + P_r \left(\text{real} \left(- \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}} \right) a + \sum_{i=1}^L \frac{r_i}{\sqrt{N_0}} e^{-j\theta_i n_i(t)} \right) > 0 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(P_r \left(\text{real} \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i}{\sqrt{N_0}} e^{-j\theta_i n_i(t)} \right) < - \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}} \right) a \right) \right.$$

$$\left. + P_r \left(\text{real} \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i}{\sqrt{N_0}} e^{-j\theta_i n_i(t)} \right) > \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}} \right) a \right) \right)$$

$$\xrightarrow{n_i(t)=w_{r,i}+jw_{I,i}} P_e = \frac{1}{2} \left(P_r \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{r,i} + \sum_{i=1}^L \frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{I,i} < - \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}} \right) a \right) \right.$$

$$\left. + P_r \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{r,i} + \sum_{i=1}^L \frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{I,i} > \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}} \right) a \right) \right)$$

برای بدست آوردن احتمال های عبارت بالا باید توزیع w_r و w_I مستقل اند و توزیع نرمال دارند، پس ترکیب خطی آنها هم توزیع نرمال دارد که

میانگین و واریانس آن به شرح زیر است:

$$\mu = E \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{r,i} + \sum_{i=1}^L \frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{I,i} \right) = \sum_{i=1}^L \frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} E(w_{r,i}) + \sum_{i=1}^L \frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} E(w_{I,i})$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var \left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{r,i} + \sum_{i=1}^L \frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_{I,i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^L \left(\frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} \right)^2 Var(w_{r,i}) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} \right)^2 Var(w_{I,i}) \\ &= \frac{N_0}{2} \left(\sum_{i=1}^L \left(\frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} \right)^2 + \left(\frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L r_i^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^L \frac{r_i \cos(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_r + \sum_{i=1}^L \frac{r_i \sin(\theta_i)}{\sqrt{N_0}} w_l \sim N\left(0, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L r_i^2\right)$$

با توجه به محاسبات احتمال خطا به شکل زیر ساده میشود:

$$P_{e|r_i's \text{ are known}} = \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}}\right)^a}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L r_i^2}}\right) + Q\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}}\right)^a}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L r_i^2}}\right) \right) = Q\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^L \frac{r_i^2}{\sqrt{N_0}}\right)^a}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L r_i^2}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\sum_{i=1}^L r_i^2 \times \frac{2a^2}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\sum_{i=1}^L r_i^2 \times 2 \times SNR}\right)$$

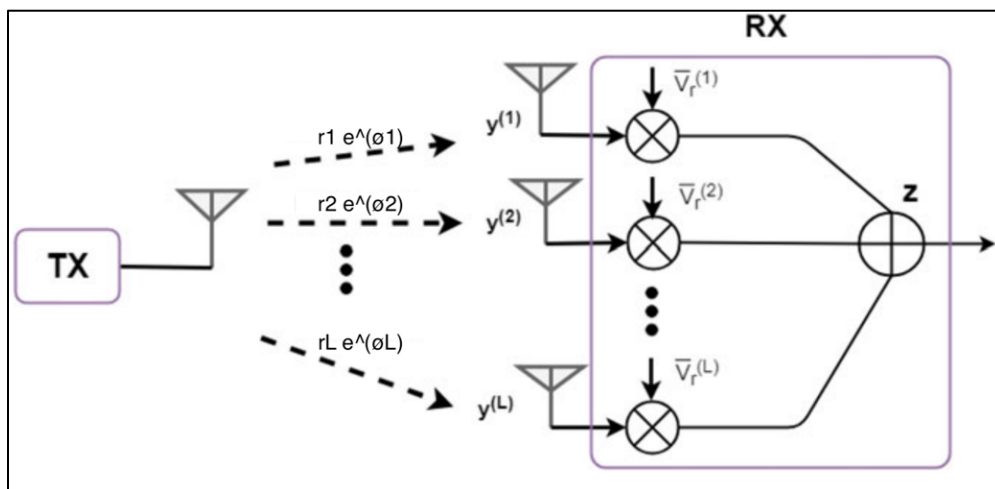
در ادامه به محاسبه توزیع $\sum_{i=1}^L r_i^2$ میپردازیم.

$$r_i = \sqrt{h_{r,i}^2 + h_{l,i}^2} \rightarrow \sum_{i=1}^L r_i^2 = \sum_{i=1}^L h_{r,i}^2 + h_{l,i}^2$$

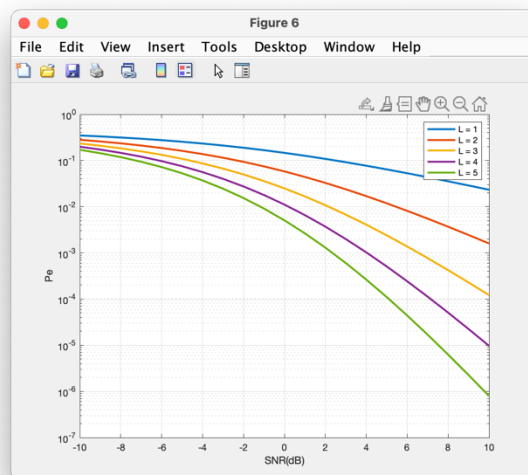
$$h_{r,i}, h_{l,i} \sim N(0, \frac{1}{2})$$

بنابراین $\sum_{i=1}^L r_i^2$ در واقع مجموع مجذور $2L$ تا متغیر نرمال مستقل (i.i.d) هستند؛ پس میتوان نتیجه گرفت که توزیع آن $2L$ -squared با درجه آزادی $2L$ است و احتمال خطا به شکل زیر بدست خواهد آمد:

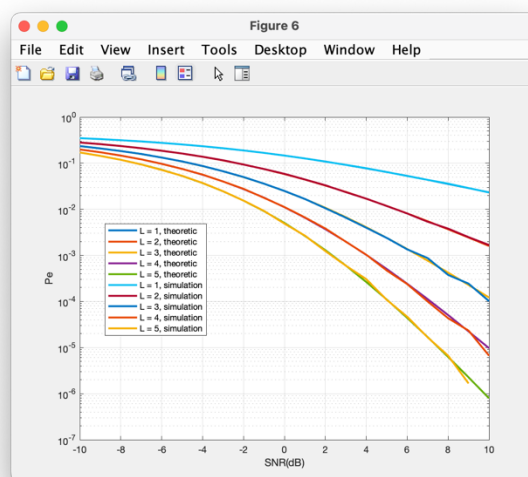
$$\sum_{i=1}^L r_i^2 = z \rightarrow P_e = \int_0^\infty Q(\sqrt{z \times 2 \times SNR}) \frac{z^{L-1} \times e^{-z}}{2^L \times \Gamma(L) \times \frac{1}{2}} dz = \int_0^\infty Q(\sqrt{z \times 2 \times SNR}) \frac{z^{L-1} \times e^{-z}}{\Gamma(L)} dz$$



تصویر ۱۱: شماتیک دایورسیتی در گیرنده



تصویر ۱۲: نمودار احتمال خطا به صورت تئوری برای $L=1,2,3,4,5$



تصویر ۱۳: مقایسه نمودار احتمال خطا به صورت تئوری و شبیه سازی برای $L=1,2,3,4,5$

تصویر ۱۳ صحت رابطه بدست آمده را نشان میدهد؛ همچنین از نتیجه هر دو روش تئوری و شبیه سازی میتوان نتیجه گرفت که با افزایش L (یا تعداد آنتن های گیرنده) احتمال خطا کاهش پیدا میکند (به خصوص در SNR های بالا)

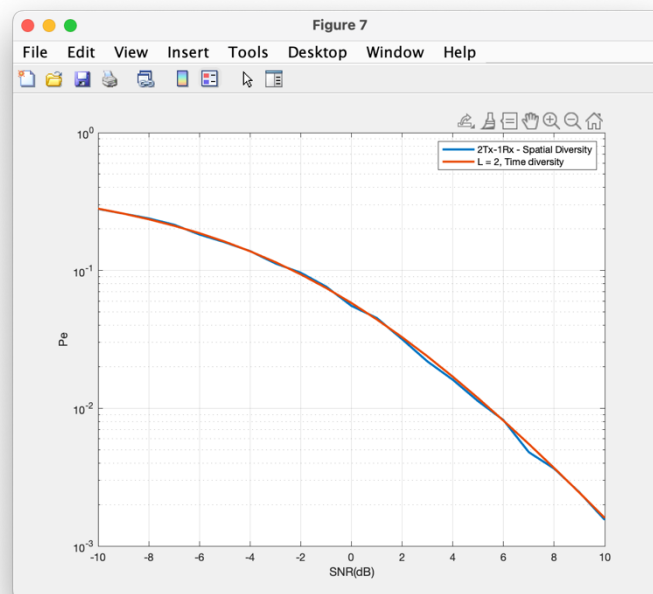
سوال ۶)

الف) در قسمت ۵ یک آنتن در فرستنده و یک آنتن در گیرنده داریم و یک سمبل را L بار ارسال میکنیم و امیدواریم تا در یکی از دفعات سیگنال با SNR خوبی ارسال شود.

در این قسمت یک آنتن فرستنده و M آنتن در گیرنده داریم (مانند تصویر ۱۱)؛ سمبل ۱ بار ارسال شده و از M مسیر مختلف دریافت میشود؛ چون آنتن ها به اندازه کافی دور هستند بنابراین کانال هایشان از هم مستقل خواهد بود و انگاره M دفعه، با فاصله زمانی کافی، سیگنال ارسال شده باشد.

ب و ج)

با توجه به تصویر ۱۴ میتوان نتیجه گرفت که احتمال خطا دایورسیتی در زمان هنگامی که $L=2$ است و دایورسیتی در مکان وقتی دو فرستنده و یک گیرنده داریم برابر است؛ بنابراین از لحاظ احتمال خطا به یکدیگر برتری ندارند اما در دایورسیتی در زمان، در ۲ بازه زمانی یک سمبل ارسال میشود در صورتی که در دایورسیتی در مکان در ۲ بازه زمانی، دو سمبل، دو بار ارسال میشوند، پس نرخ دایورسیتی در مکان دو برابر دایورسیتی در زمان است.



تصویر ۱۴: مقایسه نمودار احتمال خطا دایورسیتی در زمان ($L=2$) و دایورسیتی مکان (دو فرستنده، یک گیرنده)

بخش دوم: کانال فرکانس گزین

(۱)

تعداد تپ های کانال از رابطه زیر به دست می آید:

$$L = T_d \times W = 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^6 = 200$$

برای اینکه در کانولوشن گیری، کانولوشن خطی به دایروی تبدیل شود و نرخ ارسال زیاد کاهش پیدا نکند طول cp را $L - 1 = 199$ در نظر میگیریم.

(۲)

زمان همدوستی نشان دهنده مدت زمانی که یک کانال ثابت یا تقریباً ثابت می ماند. اگر طول (زمانی) بلاک OFDM از زمان همدوستی بیشتر باشد، آنگاه کانال تغییر کرده (بهره و تعداد تپ ها تغییر میکنند) و آشکار سازی داده با خطای بیشتری اتفاق خواهد افتاد. بنابراین حداکثر طول بلاک برابر T_c است و کران بالا برای زیر حامل ها را از رابطه زیر بدست آورده میشود:

$$BW = n_c \Delta f = N \frac{1}{T_c} \Rightarrow n_c = BW \times T_c$$

$$\Rightarrow n_c = 20 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-3} = 10^5$$

(۳)

طول کل بلاک داده 10^8 و طول هر بلاک OFDM 10^5 است، بنابراین تعداد کل بلاک های OFDM

$$\text{برابر } \frac{10^8}{10^5} = 10^3 \text{ میباشد.}$$

(۴)

بلاک دیاگرام سیستم در تصویر ۱۵ نمایش داده شده است که شامل ۵ بلاک است.

۱- بلاک **waterfilling**: از این بلاک زمانی میتوانیم استفاده کنیم که اطلاعات کانال را در

فرستنده داشته باشیم. عملکرد این بلاک به این نحو است که دامنه سمبل i ام را متناسب با عکس H_i

تغییر میدهیم. درواقع چون در سیستم OFDM، خروجی بلاک FFT، نمایشگر ضرب هر داده (a_i) در

i امین ضریب FFT کانال است پس میدانیم که داده با چه تناسبی در حال تغییر است؛ بلاک

waterfilling با تقسیم هر داده بر تناسب متناظرش سبب میشود که افت توان که در کانال اتفاق

می افتد جبران شود.

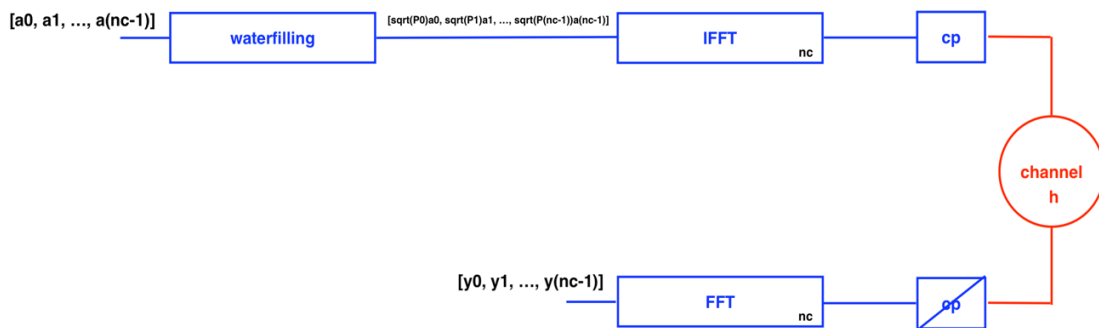
۲- بلاک IFFT: خروجی بلاک **waterfilling** وارد این بلاک میشود و از آن IFFT گرفته میشود

(n_c نقطه ای). اگر طول IFFT از n_c کمتر یا بیشتر باشد اساس سیستم بهم میریزد (اتفاقی که در

واقعیت می افتد این است که داده a_i در $e^{j2\pi\Delta t \times (i+1)}$ ضرب شده و در کانال ارسال میگردد و در گیرنده با نرخ نائیکوئیست از آن نمونه برداری میشود. اگر ضابطه سیگنال نمونه برداری شده را بنویسیم، رابطه IFFT، n_c نقطه ای خواهد بود)

۳- بلاک cp : اگر به اندازه کافی بین ۲ بلاک صبر نکنیم، به دلیل چند مسیر بودن کانال، تداخل خواهیم داشت (Inter Block Inteference). راه حل از بین بردن IBI این است که بین ۲ بلاک OFDM به اندازه طول پاسخ ضربه کانال یا بیشتر زمان محافظ بگذاریم. در نگاه اول به نظر میرسد که در بازه محافظ نباید سیگنال ارسال شود، ولی در OFDM برای ایجاد فرمی شبیه تناوب تعداد مشخصی از سمبل های انتهای بلاک داده را در باند محافظ ابتدای بلاک کپی میکنیم. در گیرنده، بعد از نمونه برداری از سیگنال، پیشوند گردشی حذف شده و بقیه نمونه ها وارد بلاک FFT (n_c نقطه ای) میشود.

۴- بلاک FFT : همانطور که اشاره شد، در فرستنده از داده IFFT گرفته میشود، بنابراین عکس آن (FFT) باید در گیرنده انجام شود. خروجی این بلاک داده ایست که تاثیر کانال و نویز تا حد خوبی از آن حذف شده است.



(۵)

برای بدست آوردن P_i ها، مسئله بهینه سازی زیر به کمک تابع $fmincon$ متلب حل میشود:

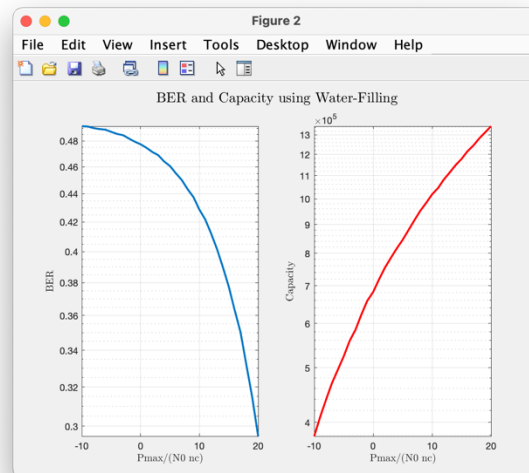
$$\sum_{n=0}^{n_c-1} \log\left(1 + \frac{P_n |H_n|^2}{N_0}\right)$$

$$\max_{\lambda} \quad s.t. \quad \sum_{n=0}^{n_c-1} P_n = P_{max}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_n|^2}\right)^+$$

تابع `fmincon`، تابع هدف، شروط، و مقدار اولیه لاندا را به عنوان ورودی دریافت میکند و لاندا بهینه را برمیگرداند. (شروط مسئله در فایل `subject.m` پیدا میشود و در کد تابعی به اسم `Waterfilling` وجود دارد که با استفاده از این تابع استفاده کرده و لاندا بهینه و ظرفیت کانال در این لاندا را برمیگرداند). روند کد به شرح زیر است:

- (۱) به ازای هر `SNR`، به تعداد بلاک های `OFDM`، کانال و بلاک را تولید میکنیم.
- (۲) سپس به کمک تابع `Waterfilling` لاندا بهینه و ضرایب `P` را بدست می آوریم.
- (۳) در نهایت با کمک توابع `Rx` و `Tx` عملیات های نام برده شده در قسمت ۴ را بر روی سیگنال ارسالی و دریافتی انجام میدهیم و احتمال خطا و ظرفیت کانال را نیز بدست می آوریم.



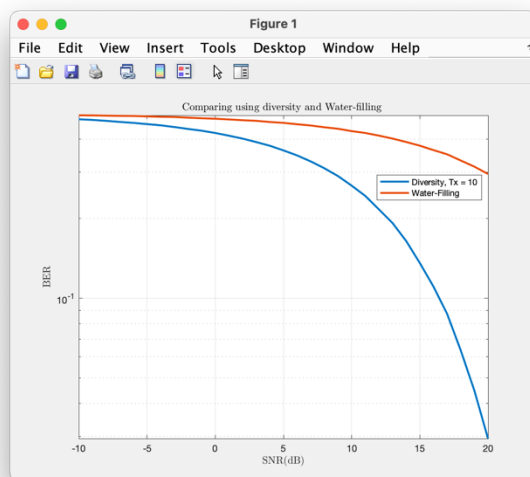
تصویر ۱۵: مقایسه نمودار احتمال خطا و ظرفیت کانال برای `OFDM` با وجود بلاک `water filling`

با توجه به تصویر ۱۵ میتوان نتیجه گرفت که با افزایش $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 nc}$ ، احتمال خطا کاهش و ظرفیت کانال افزایش پیدا میکند که با رابطه شنون همخوانی دارد.

(۶)

برای شبیه سازی این قسمت به ازای هر `SNR`، ۱۰۰۰ بلاک به طول 10^5 تولید کرده و سپس به کمک تابع `Tx` فرستنده ها را تعریف کرده که هر فرستنده از هر بلاک، `ifft` گرفته، `cp` را به آن به اضافه کرده، و در نهایت با کانال کانوالو و نویز را میکند تا سیگنال دریافتی در گیرنده را بوجود آورد. سپس در هر گیرنده `cp` از سیگنال دریافتی حذف شده، از بلاک `fft` عبور داده، در مزدوج تبدیل فوریه پاسخ ضربه کانال ضرب شده، و در نهایت بر $\sqrt{N_0}$ تقسیم میشود.

به ازای هر سمبل، به تعداد گیرنده ها سمبل دریافت خواهیم کرد که در وزن های گفته شده ضرب شده و با یکدیگر جمع میشوند. علامت قسمت حقیقی حاصل جمع معیار آشکار سازی خواهد بود. نتایج شبیه سازی در تصویر ۱۶ قابل مشاهده است که میتوان از آن نتیجه گرفت که با افزایش تعداد گیرنده ها به ۱۰ احتمال خطا نسبت به احتمال خطا بخش ۵ کاهش میابد.



تصویر ۱۶: نمودار احتمال خطا روش MRC

(۷) برای شبیه سازی این قسمت، فرستنده ای مانند فرستنده سوال ۶ طراحی میکنیم. سپس برای هر یک از روش ها گیرنده های جداگانه تعریف شده است که تنها تفاوت آنها وزن های ضرب شده در خروجی بلاک fft است. در هر دو گیرنده ابتدا cp از سیگنال دریافتی حذف شده و سپس آن را از بلاک fft عبور داده و هر یک از داده ها را در وزن متناظرش ضرب میکنیم.

- ضابطه وزن ها با روش zero forcing :

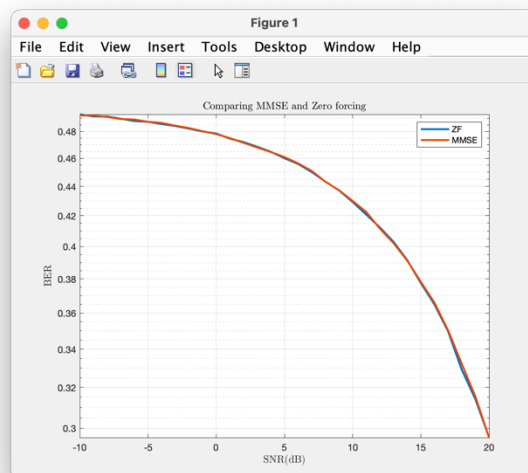
$$w_i = \frac{1}{H_i}$$

که H_i ، i امین ضریب فوریه n_c نقطه ای از پاسخ ضربه کانال است.

- ضابطه وزن ها با روش MMSE :

$$w_i = \frac{H_i^*}{|H_i|^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}}$$

که σ_n^2 واریانس نویز و σ_s^2 توان میانگین Constellation های BPSK است که برابر ۱ میباشد.

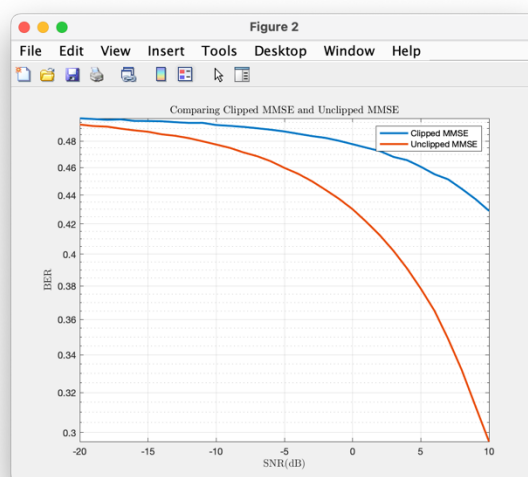


تصویر ۱۷: مقایسه نمودار احتمال خطا روش های MMSE و ZF

با توجه به تصویر ۱۷ میتوان نتیجه گرفت این دو روش با یکدیگر برابری میکنند (به یک اندازه موثر اند) زیرا به ازای هر SNR احتمال خطا برابری دارند. (همچنین اینکه با افزایش SNR احتمال خطا کاهش یافته است)

(۸)

روند شبیه سازی این قسمت مانند شبیه سازی روش MMSE در قسمت ۷ است با این فرق که اندازه خروجی های ifft در فرستنده که اندازه شان از $0.8 \times \text{Max}(ifft(x))$ بیشتر است (بدون تغییر فاز) برابر همین مقدار قرار داده شده اند. نتایج این بخش همراه نتیجه با قسمت ۷ در تصویر ۱۸ مقایسه شده است



تصویر ۱۸: مقایسه نمودار احتمال خطا روش MMSE با وجود و نبود clipping

همانطور که دیده میشود وجود clipping سبب افزایش احتمال خطا میشود که انتظار هم میرفت زیرا clipping باعث میشود که دیگر خروجی fft درگیرنده برابر $Y_k = x_k H_k + Noise_k$ نباشد که ممکن است علامت قسمت حقیقی را عوض کند و آشکارسازی دچار خطا بیشتری شود.