





---

This Document is set with ConT<sub>E</sub>Xt, using the MKIV branch  
Many thanks to Hans Hagen for developing so hard on ConT<sub>E</sub>Xt and  
LuaT<sub>E</sub>X to providing such a great Document preparation system.



# Contents

Part 1	Analysis I	1
<b>1.1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1.1	Mengen und Abbildungen - die Sprache der Mathematik	3
1.1.1.1	Mengen	3
1.1.1.1.1	Operationen auf Mengen	3
1.1.1.1.2	Abkürzungen aus der Logik	5
1.1.1.1.3	Abbildungen	6
1.1.1.1.4	Komposition von Abbildungen	6
1.1.2	Vollständige Induktion	7
1.1.2.1	Summen- und Produktsymbole	9
1.1.2.2	Fakultät	10
1.1.2.3	Binomialkoeffizienten	11
1.1.2.4	Der binomische Satz	12
1.1.3	Die reellen Zahlen	13
1.1.3.1	Die Anordnung des $\mathbb{R}$	16
1.1.3.2	Die Betragsfunktion	17
1.1.3.3	Supremum und Infimum	18
1.1.3.4	Das Vollständigkeitsaxiom	20
1.1.3.5	Quadratwurzeln	20
1.1.3.6	Das Intervallschachtelungsprinzip	22
1.1.3.7	Abzählbarkeit – Überabzählbarkeit	22
<b>1.2</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>25</b>
1.2.1	Grenzwerte von Folgen	25
1.2.1.1	Folgen reeller Zahlen	25
1.2.1.2	Grenzwerte von Folgen	27
1.2.1.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	30
1.2.1.4	Infimum und Supremum von Folgen	32
1.2.1.5	Häufungswerte von Folgen	32
1.2.1.6	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	33
1.2.1.7	Berechnung von Quadratwurzeln	34
1.2.1.8	Cauchy Folgen	36
1.2.1.9	Das Cauchy-Kriterium	37
1.2.1.9.1	Ausblick	37
1.2.1.10	Bestimmte Divergenz	38
1.2.2	Unendliche Reihen	39
<b>A</b>	<b>Index</b>	<b>41</b>
<b>B</b>	<b>References</b>	<b>43</b>









# Kapitel 1.1

## Grundlagen

“Ein Studienanfänger in Mathematik braucht für den Anfang eigentlich gar kein Lehrbuch, die Vorlesungen sind autark, und die wichtigste Arbeitsgrundlage des Studenten ist seine eigenhändige Mitschrift...”

### Ziele der Vorlesung - Warum Analysis?

- i. Die Analysis ist nicht umsonst an den Anfang des Mathematikstudiums gestellt und stellt die Grundlagen des Mathematikstudiums zur Verfügung.
- ii. Analysis ist der Vorrat an Begriffen und Techniken zur Beschreibung der physikalischen Realität.
- iii. Analysis ist ein Beispiel eines lückenlosen Aufbaus einer mathematischen Theorie

### § 1.1.1 - Mengen und Abbildungen - die Sprache der Mathematik

#### § 1.1.1.1 - Mengen

Wir werden im folgenden einen "naiven" Mengenbegriff verwenden. Dies bedeutet, das eine Menge eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten ist.

Vorsicht: Der naive Mengenbegriff ist keine mathematische Definition!



**Beispiel**  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  die Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$  die Menge der rationalen Zahlen und

$\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen, siehe hierzu Kapitel (noch einschalten)

**Notation** Für Mengen werden folgende Notationen vereinbart:

- i.  $a \in M$  bedeutet  $a$  ist ein Element der Menge  $M$ . Analog ergeben sich dabei dann auch folgende Notationen:  $0 \in \mathbb{N}_0$  aber  $0 \notin \mathbb{N}$ .
- ii.  $N \subset M$  bedeutet: Jedes Element in  $N$  ist auch Element von  $M$ . Daraus ergeben sich folgende Anordnungen:  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}_0$  und  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

#### 1.1.1.1.1 Operationen auf Mengen

**Definition 1** Seien  $M$  und  $N$  beliebige Mengen, dann heißt

- i.  $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$  Durchschnitt von  $M$  und  $N$ ,
- ii.  $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$  Vereinigung von  $M$  und  $N$ ,
- iii.  $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$  Differenzmenge von  $M$  und  $N$  und
- iv.  $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$  kartesisches Produkt von  $M$  und  $N$ .

**Beispiel**  $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$

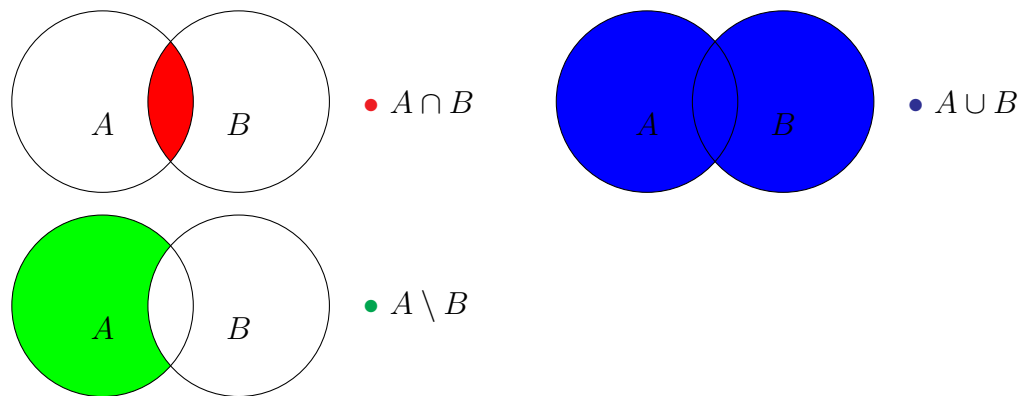
$\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0$

$\mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N} = \{0\}$

$\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0 = \emptyset$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2$ .

Diese Zusammenhänge lassen sich sehr gut in Venn-Diagrammen verdeutlichen.



**Figure 1.1** Mengen-Operationen und deren Venn Diagramme

1.1.1.1.2 Abkürzungen aus der Logik

Abkürzung	Bedeutung	Example
$A \Rightarrow B$	Falls $A$ gilt, dann auch $B$ Aus $A$ folgt $B$ $A$ impliziert $B$	$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}_0$
$A \Leftrightarrow B$	$A$ gilt genau dann wenn $B$ gilt $A$ impliziert $B$ und $B$ impliziert $A$ $A$ und $B$ sind äquivalent	$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x - 1 \in \mathbb{N}_0$
$\exists x :$	Es gibt/existiert ein $x$ , so daß ... gilt	
$\exists x \in M :$	Es gibt ein $x \in M$ , so daß ... gilt	$\exists x \in \mathbb{N} : x > 1000$
$\forall x :$	Für alle $x$ gilt ...	
$\forall x \in M :$	Für alle $x \in M$ gilt ...	$\forall x \in \mathbb{N} : x > 0$
$\wedge$	logisches "und"	
$\vee$	logisches "oder"	

**Beispiel**  $N \subset M \Leftrightarrow (\forall x : x \in N \Rightarrow x \in M)$   
 $N = M \Leftrightarrow (\forall x : x \in N \Leftrightarrow x \in M)$

**Anwendung** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $M$  eine Menge dann gilt:

$$\bigcap_{i=1}^n M_i := M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \dots \wedge x \in M_n\} = \{x \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : x \in M_i\}$$

Analog gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n M_i = M_1 \cup \dots \cup M_n = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \dots \vee x \in M_n\} = \{x \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in M_i\}$$

**Beispiel** (für einen Beweis)

**Behauptung:** Für beliebige Mengen  $A, B, C$  gilt:

$$A \setminus (B \cap C) = A \setminus B \cup A \setminus C$$

**Beweis** Es gilt für beliebiges  $x$

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cap C) &\stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \cup C \\
 &\stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
 &\stackrel{\text{Aussagenlogik}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
 &\stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \\
 &\stackrel{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

□

#### 1.1.1.1.3 Abbildungen

Seien  $M$  und  $N$  Mengen, dann ist eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  eine Zuordnung die jedem Element  $x \in M$  ein Element  $f(x) \in N$  zuordnet. Dabei heißt  $M$  die Definitionsmenge von  $f$  und  $f(x)$  die Bildmenge oder das Bild von  $x$  unter  $f$ .

**Beispiel** Die Nachfolgeabbildung

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\
 x &\mapsto x + 1
 \end{aligned}$$

die quadratische Abbildung

$$\begin{aligned}
 g : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\
 x &\mapsto x^2
 \end{aligned}$$

die Geburtsjahresfunktion

$$\begin{aligned}
 h : \text{Alle Hörer der aktuellen Analysis I VL} &\rightarrow \mathbb{N} \\
 x &\mapsto \text{Geburtsjahr von } x
 \end{aligned}$$

die Betragsfunktion

$$\begin{aligned}
 k : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\
 x &\mapsto |x| := \begin{cases} x & , \text{ if } x \geq 0 \\ -x & , \text{ if } x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

#### 1.1.1.1.4 Komposition von Abbildungen

Seien  $f : M \rightarrow M'$  und  $g : M' \rightarrow M''$  je zwei Abbildungen, dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : M \rightarrow M''$$

$$x \mapsto g(\underbrace{f(x)}_{\in M'})$$

die Komposition von  $f$  und  $g$ . Siehe hierzu auch folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & M'' \end{array}$$

**Beispiel** Sei  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $x \mapsto x + 1$  und  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $x \mapsto |x|$ , dann ist  $g \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $x \mapsto |x + 1|$ .

### § 1.1.2 - Vollständige Induktion

Die "Vollständige Induktion" ist eine Beweismethode, die sich häufig bei Aussagen über natürliche Zahlen anwenden läßt. Sie beruht auf dem fünften Peano Axiom, welche zusammen die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  einführen.

**Beispiel** Das folgende Beispiel war aufgrund seiner Einfachheit schon in der vor-griechischen Mathematik bekannt, geriet aber irgendwie in Vergessenheit und wurde von Johann Carl Friedrich Gauß (30. April 1777 in Braunschweig - 23. Februar 1855 in Göttingen) im Alter von 9 Jahren wiederentdeckt. Die Geschichte ist durch Wolfgang Sartorius von Waltershausen (1809-1876) überliefert:

“Der junge Gauss war kaum in die Rechenklasse eingetreten, als Büttner die Summation der arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indes kaum ausgesprochen als Gauß die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: »Dor ligget se.« (Da liegen sie.) [Wikipedia, 2010](#)”

Die genau Aufgabenstellung ist jedoch nicht überliefert, es wird aber oft berichtet, daß Büttner die Schüler die Reihe von 1 bis 100 (anderen Quellen zufolge von 1 bis 60) aufsummieren ließ.

Entsprechend den damaligen Verhältnissen unterrichtete Büttner etwa 100 Schüler in einer Klasse. Damals waren auch Züchtigungen mit der sogenannten Karwatsche üblich. Sartorius berichtet: *"Am Ende der Stunde wurden daraufhin die Rechentafeln umgekehrt; die von Gauss mit einer einzigen Zahl lag oben und als Büttner das Exempel prüfte, wurde das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden, während viele der übrigen falsch waren und alsbald mit der Karwatsche rectificiert wurden."* Büttner erkannte bald, dass Gauß in seiner Klasse nichts mehr lernen konnte.

Allgemeiner gefasst ergibt sich damit für das Aufsummieren der Zahlen von 1 bis  $n$  folgendes:

- i. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- ii. Als eine weitere Verallgemeinerung läßt sich die Summe über alle ungeraden Zahlen auffassen:

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

**Prinzip** Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Für jede natürliche Zahl  $n$  sei eine Aussage  $A_n$  gegeben, dann gilt, dann sind alle Aussagen  $A_n$  wahr, falls man folgendes Zeigen kann:

- i.  $A_1$  ist wahr. Dieser Schritt wird Induktionsanfang genannt und meistens mit (IA) abgekürzt,
- ii. Unter der Annahme das  $A_n$  wahr ist (Induktionsvoraussetzung (IV)) kann man zeigen, das auch  $A_{n+1}$  wahr ist. Dieser Teil wird als Induktionsschluß bezeichnet und oft mit (IS) abgekürzt.

**Beispiel** Nehmen wir uns noch einmal unserer obigen Beispiele an und betrachten:

**Behauptung:**  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

**IA** Den Induktionsanfang beweisen wir für  $n = 1$ :  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$  und dies wahr.

**IV** In der Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, daß unsere Aussage bereits für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt, es sei also  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  bereits wahr.

**IS** Es ist  $\cancel{1} + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Es gilt also

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= \underbrace{(1 + 2 + \dots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \\ &\stackrel{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

□

**Behauptung:**  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

**Beweis**

**IA**  $n = 1$ :  $1 = 1^2$  ist wahr

**IS** Nach IV gilt die Aussage bereits für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  
 ~~$\mathbb{Z}$~~ :  $1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) &= \underbrace{(1 + 3 + \dots + (2n - 1))}_{n^2} + (2n + 1) \\ &\stackrel{IV}{=} n^2 + (2n + 1) \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

□

**Hinweis:** Wir werden im folgenden das Induktionsprinzip in der Vorlesung nicht beweisen.

### § 1.1.2.1 - Summen- und Produktsymbole

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sei eine Zahl  $a_k$  gegeben, dann ist für jedes  $m \leq n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \\ \prod_{k=m}^n a_k &= a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \prod_{k=1}^n k &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n =: n! \quad (\text{Fakultät}) \end{aligned}$$

Weiterhin werden folgende Sondervereinbarungen für den Fall  $m > n$  getroffen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &:= 0 \quad \text{die leere Summe,} \\ \prod_{k=m}^n a_k &:= 1 \quad \text{das leere Produkt.} \end{aligned}$$

**Satz 1** Die Geometrische Reihe

Für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\sum_{k=0}^n x^k := \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (1.1)$$

**Beweis** mittels Induktion nach  $n$ .

$n = 0$ :  $x^0 = \frac{1-x^1}{1-x}$  ist wahr

$n \rightarrow n + 1$ : Es gelte bereits die IV  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}_0$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} \\ &\stackrel{IV}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \end{aligned}$$

□

### § 1.1.2.2 - Fakultät

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  sei

$$n! := \prod_{k=1}^n nk$$

und insbesondere seien  $1! := 1$  und  $0! := 1$ , dann gilt  $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

**Satz 2** Die Anzahl der Anordnungen der Menge  $\{1, \dots, n\}$  ist  $n!$ , das heißt es gibt genau  $n!$  Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$ .

**Beispiel** Die Anordnungen von  $\{1, 2, 3\}$  sind:  
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$ .

**Beweis** durch Induktion nach  $n$ :

$n = 1$ : Anzahl der Anordnungen von  $\{1\} := 1 = 1!$  und damit wahr.

$n \rightarrow n + 1$ : Die Anzahl der Anordnungen von  $\{1, \dots, n\}$  sei als Induktionsvoraussetzung bereits  $n!$ , dann zerfällt die Anordnung von  $\{1, \dots, n+1\}$  in  $n+1$  disjunkte Typen. Diese unterscheiden sich nach ihrem ersten Tupel-Element in Anordnungen, die die 1 an 1. Stelle haben, Anordnungen, die die 2 an 1. Stelle haben



... und Anordnungen, die die  $n + 1$  an 1. Stelle haben. Zu jedem dieser Typen gibt es nach IV genau  $n!$  Anordnungen, also insgesamt  $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$  Anordnungen.

□

### § 1.1.2.3 - Binomialkoeffizienten

Seien  $k, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \leq n$ , so sei

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &:= \prod_{i=1}^k \frac{n-i+1}{i} \\ &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

**Eigenschaften** des Binomialkoeffizienten

- i.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- ii.  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$  für  $k < n$  (Rekursionsformel)

**Beweis** der Binomialkoeffizienteneigenschaften

- i. klar nach der Definition des Binomialkoeffizienten.

- ii.  $\mathbb{Z} : \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{((k+1) + (n-k))n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
n & & & & & & \\
0 & & & 1 & & & \binom{0}{0} \\
1 & & & 1 & & 1 & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
2 & & 1 & & 2 & & 1 & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
3 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\vdots & & & & & & & & \ddots \\
n & & & & & & & & \binom{n}{0} \quad \dots \quad \binom{n}{k} \quad \dots \quad \binom{n}{n}
\end{array}$$
$$\binom{n}{k}.$$

$n = 1$ : Es gibt  $\binom{1}{1} = 1$  einelementige Teilmenge.

9

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (1.2)$$

Die Summanden, die beim Ausmultiplizieren von  $(x+y)^n = (x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)$  auftreten

sind  $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \dots, y^n$ . Es tritt der Faktor  $x^k y^{n-k}$  genau so oft auf, wie es Möglichkeiten gibt aus den  $n$  Faktoren  $(x+y)$   $k$  Faktoren auszuwählen, also  $\binom{n}{k}$  mal.  $\square$

### § 1.1.3 - Die reellen Zahlen

Mögliche Zugänge in der Analysis Vorlesung sind:

- i.  $\mathbb{R}$  als bekannt voraussetzen (z.B. Schule)
  - sachlich problematisch
- ii.  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{N}$  "konstruieren"
  - sehr zeitaufwendig (Spezialvorlesung)
  - didaktisch fragwürdig
- iii. Axiomatische/r Aufbau/Einführung
  - Man stellt die Eigenschaften zusammen, die  $\mathbb{R}$  "charakterisieren" und verwendet für den Aufbau der Analysis nur diese Eigenschaften,
  - zeitökonomisch und
  - mathematisch OK.

In der Menge  $\mathbb{R}$  sind zwei Operationen definiert. Dies Operationen sind:

$$\begin{array}{llll}
 + & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 & (a,b) & \mapsto & a + b \\
 \text{und} & & & \\
 \cdot & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 & (a,b) & \mapsto & a \cdot b
 \end{array}$$

Diese beiden Operationen nennen wir Addition und Multiplikation. Durch sie ist  $\mathbb{R}$  ein Körper, das heißt er erfüllt die folgenden Körperaxiome:

Axiom	Bezeichnung	Beschreibung
(K1)	Kommutativität	Additiv: $a + b = b + a$ Multiplikativ: $a \cdot b = b \cdot a$
(K2)	Assoziativität	Additiv: $(a + b) + c = a + (b + c)$ Multiplikativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(K3)	neutrales Element	Additiv: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ , so daß $a+0 = 0+a = a$ ist Multiplikativ: Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ , so daß $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ist
(K4)	inverses Element	Additiv: Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-a \in \mathbb{R}$ , so daß $a + (-a) = 0$ ist Multiplikativ: Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $a^{-1} \in \mathbb{R}$ , so daß $a \cdot a^{-1} = 1$ ist.
(K5)	Distributivität	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

**Bemerkung 1** Auch  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{F}_2$  sind Körper

**Folgerung** aus den Axiomen

- i. Die neutralen Elemente 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.

**Beweis** Sei  $0' \in \mathbb{R}$  mit  $a + 0' = a \forall a \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$0 \stackrel{\text{Ann.}}{=} 0 + 0' \stackrel{(K1)}{=} 0' + 0 \stackrel{(K3)}{=} 0'.$$

Die Beweisführung verläuft analog für 1. □

- ii. Die inversen Elemente  $-a$  für  $a \in \mathbb{R}$  und  $a^{-1}$  für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind eindeutig bestimmt.

**Beweis**

- i. Seien  $a, a' \in \mathbb{R}$  mit  $a + a' = 0$ , so gilt

$$\begin{aligned} -a &\stackrel{(K3)}{=} (-a) + (a + a') \stackrel{(K2)}{=} ((-a) + a) + a' \stackrel{(K1)}{=} (a + (-a)) + a' \stackrel{(K4)}{=} 0 + a' \stackrel{(K1)}{=} \\ &a' + 0 \stackrel{(K3)}{=} a' \end{aligned}$$

- ii. analog für  $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . □

- iii.  $-0 = 0$  und  $1^{-1} = 1$

$$\textbf{Beweis} \quad 0 + 0 \stackrel{(K3)}{=} 0 \stackrel{(K4)}{=} 0 + (-0) \Rightarrow \quad 0 = -0$$

Analog für 1. □

- iv.  $\forall a \in \mathbb{R} : -(-a) = a$   
 $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (a^{-1})^{-1} = a$

**Beweis**

$$\left. \begin{array}{l} (-a) + (-(-a)) \stackrel{(K4)}{=} 0 \\ (-a) + a \stackrel{(K1)}{=} a + (-a) \stackrel{(K4)}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -(-a) = a$$

Analog für  $(a^{-1})^{-1} = a$ . □

- v.  $-(a+b) = (-a) + (-b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$   
 $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Beweis** wird in den Übungen behandelt. □

- vi. I.  $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

II.  $(-a) \cdot b = -(ab) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

III.  $(-a) \cdot (-b) = ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \text{I. } a \cdot 0 + a \cdot 0 &\stackrel{(K1),(K5)}{=} a \cdot (0+0) \stackrel{(K3)}{=} a \cdot 0 \stackrel{(K3)}{=} 0 + a \cdot 0 \\ &\Rightarrow (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = (0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) \Rightarrow a \cdot 0(a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) \stackrel{(K2),(K4)}{\Rightarrow} \\ &a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

II. Übungsaufgabe

III. Übungsaufgabe □

Aus den obigen Folgerungen ergibt sich folgende Ableitung:  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

**Beweis**

" $\Leftarrow$ " schon gezeigt!

" $\Rightarrow$ " Sei  $a \cdot b = 0$ , so existieren 2 Fälle, welche unterschieden werden müssen.

**1. Fall:**  $a = 0$  ist bereits bewiesen

**2. Fall:**  $a \neq 0$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= 0 \\
 \Rightarrow a^{-1}(a \cdot b) &= 0 \\
 \Rightarrow (a^{-1} \cdot a)b &= 0 \\
 \Rightarrow 1 \cdot b &= 0 \\
 \Rightarrow b &= 0
 \end{aligned}$$

□

**Definition 2** Für Addition und Multiplikation werde nun die Subtraktion und Division wie folgt definiert:

Für die Addition sei  $a - b := a + (-b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$  und heißt Subtraktion,

Für die Multiplikation sei  $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und wird als Division bezeichnet.

### § 1.1.3.1 - Die Anordnung des $\mathbb{R}$

Es gibt eine Teilmenge  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$  der positiven Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

	<b>Eigenschaft</b>	<b>Beschreibung</b>
(A1)	Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen: $a \in \mathbb{R}^+, a = 0, -a \in \mathbb{R}^+$	
(A2)	Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}^+$	
(A3)	$\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n - a \in \mathbb{R}^+$ (Archimedisches Axiom)	

### Notation

$$a > b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+$$

$$a \geq b :\Leftrightarrow a > b, \vee a = b$$

$$a < b :\Leftrightarrow b > a$$

$$a \leq b :\Leftrightarrow b \geq a$$

Hinweis: Die Eigenschaften (A1) - (A3) drücken aus, daß  $\mathbb{R}$  ein archimedisches angeordneter Körper ist. Weiterhin ist auch  $\mathbb{Q}$  archimedisches angeordnet, jedoch  $\mathbb{C}$  nicht.

### Folgerung

i.  $a^2 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Beweis** Nach (A1) ist  $a > 0$  oder  $-a > 0$ . Ist  $a > 0$ , so ist  $a^2 = a \cdot a > 0$  nach (A2), ist jedoch  $-a > 0$ , so ist  $a^2 = (-a)(-a) > 0$  nach (A2). □

ii. Es gilt für

$\left. \begin{matrix} a < b \\ b < c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a < c$ . Diese Eigenschaft heißt Transitivität.

**Beweis** der Transitivität:

$$\left. \begin{array}{l} a < b \xrightarrow{Def} b - a > 0 \\ b < c \xrightarrow{Def} c - b > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (b - a) + (c - b) = c - a > 0 \xrightarrow{Def} c > a \quad \square$$

iii. I.  $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

II. Es gilt für

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ a' < b' \end{array} \right\} \Rightarrow a + a' < b + b'$$

**Beweis**

$$I. \quad a < b \xrightarrow{Def} b - a > 0 \Rightarrow (b + c) - (a + c) > 0 \xrightarrow{Def} a + c < b + c$$

II. Es sei

$$\left. \begin{array}{l} a < b \xrightarrow{Def} b - a > 0 \\ a' < b' \xrightarrow{Def} b' - a' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < (b - a) + (b' - a') = (b + b') - (a + a') \\ \xrightarrow{Def} a + a' < b + b'$$

□

iv. I.  $a < b \Rightarrow a - c < b - c \quad \forall c \in \mathbb{R}^+$

II. Es sei:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < a' < b' \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot a' < b \cdot b'$$

**Beweis** Übungsaufgaben

□

### § 1.1.3.2 - Die Betragsfunktion

Für  $a \in \mathbb{R}$  sei

$$|a| := \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{else} \end{cases}$$

**Eigenschaften** Damit ergeben sich für die Betragsfunktion mit  $a, b \in \mathbb{R}$  folgende Eigenschaften:

i.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

ii.  $|a + b| \leq |a| + |b|$

iii.  $|a - b| \geq |a| - |b|$

**Beweis**

i. klar.

ii. Aus

$$\left. \begin{array}{l} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Eig. iii}} a + b \leq |a| + |b| \quad \left. \begin{array}{l} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Eig. iii}} -a - b \leq |a| + |b| \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{array}} \right\} \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$\text{iii. } |a| = |b + (a - b)| \stackrel{ii}{\leq} |b| + |a - b| \xrightarrow{\text{Eig. iii}} |a| - |b| \leq |a - b|$$

□

**Definition 3** Intervalle

Um über einen bestimmten zusammenhängenden Bereich zu sprechen ist es notwendig den Begriff des Intervalls einzuführen, dafür seien  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt mit  $a \leq b$ . Es sind folgende Anordnungen möglich:

Intervall	math.	Beschreibung	Bezeichnung
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossenes Intervall von a bis b	
$[a, b) := [a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	(rechts-)halboffenes Intervall von a bis b	
$(a, b] := ]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall von a bis inkl. b	
$(a, b) := ]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(links-)halboffenes Intervall von a bis b	
$[a, \infty) := [a, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	halboffenes Intervall von inkl. a bis	
$(a, \infty) := ]a, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	halboffenes Intervall von exkl. a bis	
$(-\infty, b] := ]-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	inkl. b bis	
$(-\infty, b) := ]-\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	exkl. b	

§ 1.1.3.3 - Supremum und Infimum

**Definition 4** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  und  $M \neq \emptyset$

i. Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt obere Schranke von  $M$ , falls gilt:

$$a \geq x \quad \forall x \in M$$

ii.  $M$  heißt nach oben beschränkt, falls es eine obere Schranke  $a$  für  $M$  gibt.

$$\forall b \in M : b \leq a$$



**Beispiel**

1.  $M_1 = [0,1]$
2.  $M_2 = [0,1)$
3.  $M_3 = [0, \infty)$
4.  $M_4 = \mathbb{N}$

Die Mengen  $M_1$  und  $M_2$  sind nach oben beschränkt, denn jede Zahl  $a \geq 1$  ist obere Schranke. Die Mengen  $M_3$  und  $M_4$  sind nicht nach oben beschränkt. Zu  $M_1$  und  $M_2$  gibt es jeweils sogar eine kleinste obere Schranke.

**Definition 5** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt, so heißt eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$  Supremum oder kleinste obere Schranke von  $M$ , falls gilt:

- i.  $s$  ist obere Schranke von  $M$  und
- ii. für jede obere Schranke  $a$  von  $M$  gilt  $s \leq a$ .

**Bemerkung 2** In den Beispielen **1** und **2** ist jeweils die Zahl 1 ein Supremum von  $M_i$ .

Hinweis: Nur in **1** gilt  $1 \in M_1$ . !

Falls ein Supremum von  $M$  existiert, dann ist es eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten jede Menge hat höchstens ein Supremum. In dem Fall das ein Supremum existiert, so schreibt man  $s = \sup(M)$ .

**Beweis** der obigen Aussage:

Seien  $s, t \in \mathbb{R}$  zwei Suprema von  $M$ , so gilt  $s \leq t$ , da  $t$  obere Schranke und  $s$  Supremum ist, andererseits gilt aber auch  $t \leq s$ , da  $s$  obere Schranke und  $t$  Supremum ist. Aus beiden Aussagen folgt dann das  $t = s$  sein muss.  $\square$

**Definition 6** Falls eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  ein Supremum  $s$  besitzt und falls  $s \in M$  ist, so heißt  $s$  auch das Maximum von  $M$ . In diesem Fall schreibt man dann auch  $s = \max(M)$

**Beispiel**  $\sup([0,1]) = 1 = \max([0,1])$   
 $\sup([0,1)) = 1$

**Bemerkung 3** Sei  $M \subset \mathbb{R}$ , dann definiert man analog zu den Begriffen "nach oben beschränkt", "obere Schranke" und "Supremum" die folgenden Begriffe "nach unten beschränkt", "untere Schranke", "Infimum", "größte untere Schranke" und " $\inf(M)$ ".

**Beispiel**  $M = (0,1)$  ist beschränkt, das heißt nach oben durch  $\sup(M) = 1$  und unten durch  $\inf(M) = 0$ .

## § 1.1.3.4 - Das Vollständigkeitsaxiom

Uns ist bisher bekannt das  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  archimedisch angeordnete Körper sind. In  $\mathbb{R}$  gilt zusätzlich das Vollständigkeitsaxiom (V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat ein Supremum in  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 4** Die analoge Aussage für  $\mathbb{Q}$  ist falsch

(K1)-(K5), (A1)-(A3) und (V) drücken aus, daß  $\mathbb{R}$  ein vollständig angeordneter Körper ist. Interessant ist weiterhin, das man zeigen kann, daß es bis auf "Isomorphie" nur einen einzigen vollständige angeordneten Körper gibt.

## § 1.1.3.5 - Quadratwurzeln

**Satz 5** Zu jeder Zahl  $a \in \mathbb{R}_0^+$  gibt es genau eine Zahl  $s \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $s^2 = a$

**Beweis** Klar für  $a = 0$ , sei also im folgenden  $a > 0$

i. Eindeutigkeit: Angenommen es gibt  $s, t \in \mathbb{R}^+$  mit  $s \neq t$  und  $s^2 = t^2 = a$ .

1. Fall:  $s < t$ , dann ist  $s^2 < t^2$  zu  $s^2 = t^2$

2. Fall:  $s > t$ , dann ist  $s^2 > t^2$  zu  $s^2 = t^2$

ii. Existenz: Man betrachte  $M := \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 \leq a\}$ .

Es gilt

i.  $M \neq \emptyset$ , denn  $0 \in M$ .

ii.  $M$  ist nach oben beschränkt, denn für  $x \in M$  gilt:  $x^2 \leq a \leq 1 + 2a + a^2 = (1 + a)^2 \Rightarrow x \leq 1 + a$

wegen i und ii besitzt  $M$  ein Supremum  $s$  mit dem Vollständigkeitsaxiom.

Es ist noch  $\nexists: s^2 = a$ , dies geschieht durch Widerspruch.

Annahme:  $s^2 \neq a$  mit  $s$  dem Supremum von  $M$ .

1. Fall:  $s^2 < a$

Behauptung: Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(s + \frac{1}{n})^2 < a$

Teilbeweis: Nach (A3) existiert also ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \frac{2s+1}{a-s^2}$  und  $s^2 < a$ , dann ist

$$\frac{1}{n} < \frac{a - s^2}{2s + 1} \tag{1.3}$$

also ist

$$\begin{aligned}
 \left(s + \frac{1}{n}\right)^2 &= s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \\
 &\leq s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n} \\
 &= s^2 + \frac{2s+1}{n} \\
 &\stackrel{[eq:5]}{=} s^2 + (a - s^2) = a
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $s + \frac{1}{n} > s$ , also ist  $s + \frac{1}{n} \notin M$ , da  $s$  obere Schranke von  $M$  ist, das heißt  $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 > a$

## 2. Fall: $s^2 > a$

Behauptung: Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 > a$ .

Teilbeweis: Nach (A3) existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \frac{1}{s}$  und  $n > \frac{2s}{s^2-a}$ , dann ist  $s - \frac{1}{n} > 0$  und  $s^2 - a > \frac{2s}{n}$ . Also ist  $\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > s^2 - \frac{2s}{n} > a$ .

Andererseits gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  das  $s - \frac{1}{n} < s$  ist, also ist  $s - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $M$ , da  $s$  das Supremum ist, also existiert ein  $x \in M$  mit  $x > s - \frac{1}{n}$  daher ist  $\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 < x^2 \leq a$

$$\Rightarrow s^2 = a.$$

□

**Definition 7** Die reelle Zahl  $s \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $s^2 = a$  heißt Quadratwurzel von  $a$ . Man schreibt auch  $s = \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

Im folgenden zeigt man das  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  ist.

**Beweis** Angenommen  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , so kann man  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  als gekürzten Bruch schreiben, mit  $a, b \in \mathbb{N}$ , das heißt  $a$  und  $b$  haben keinen gemeinsamen Teiler mehr.

Dann ist  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ , das heißt  $2b^2 = a^2$

$$\Rightarrow 2 \mid a^2, \text{ das heißt } 2 \text{ teilt } a^2,$$

$$\Rightarrow 2 \mid a$$

$$\Rightarrow 4 \mid a^2$$

$$\Rightarrow 2 \mid b^2$$

$$\Rightarrow 2 \mid b$$

also ist 2 gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

□

Man verallgemeinert den Wurzelbegriff nun in folgender Weise: Zu jeder reellen Zahl  $a \in \mathbb{R}_0^+$  und jeder Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt es genau eine Zahl  $s \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $s^n = a$ .  $s$  heißt in diesem Fall  $n$ -te Wurzel aus  $a$  und man schreibt  $s = \sqrt[n]{a}$ .

**Beweis** erfolgt in den Übungen. Als Hinweis sei gegeben das man  $M := \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x^n \leq a\}$  betrachtet. Diese Menge ist nach oben beschränkt und damit existiert ein Supremum.  $\square$

### § 1.1.3.6 - Das Intervallschachtelungsprinzip

Es seien Intervalle  $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$  gegeben.

**Satz 6** Falls  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, so existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$c \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

das heißt  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

**Beweis** Es gilt  $a_n \leq b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$  nach Voraussetzung. Also ist die Menge  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist also nach oben beschränkt und besitzt nach (V) ein Supremum  $a \in \mathbb{R}$ . Analog ist  $B := \{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nach unten beschränkt und besitzt ebenfalls nach (V) ein Infimum  $b \in \mathbb{R}$ . Damit gilt  $a_n \leq b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ . Also ist jedes  $b_m$  oberer Schranke von  $A$  und mit  $a = \sup(A) \Rightarrow a \leq b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ . Weiterhin ist  $a$  untere Schranke von  $B$  und damit gilt mit  $b = \inf(B) \Rightarrow a \leq b$ , also ist  $[a, b] \neq \emptyset$  und  $[a, b] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , da Punkt in  $[a_n, b_n]$  existiert.  $\square$

**Bemerkung 5** Man kann zeigen, daß umgekehrt das Supremumsprinzip (V) aus dem Intervallschachtelungsprinzip (I) folgt, daher könnte man bei der axiomatischen Definition von  $\mathbb{R}$  auch (I) anstelle von (V) verwenden.

### § 1.1.3.7 - Abzählbarkeit – Überabzählbarkeit

Die Menge  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar,  $\mathbb{R}$  jedoch überabzählbar.

**Definition 8** Eine Menge  $M$  heißt abzählbar, falls es eine bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt. Dabei heißt bijektive: Es existiert eine Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow M$ , so daß  $(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in M$  und  $(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in \mathbb{N}$  gilt.

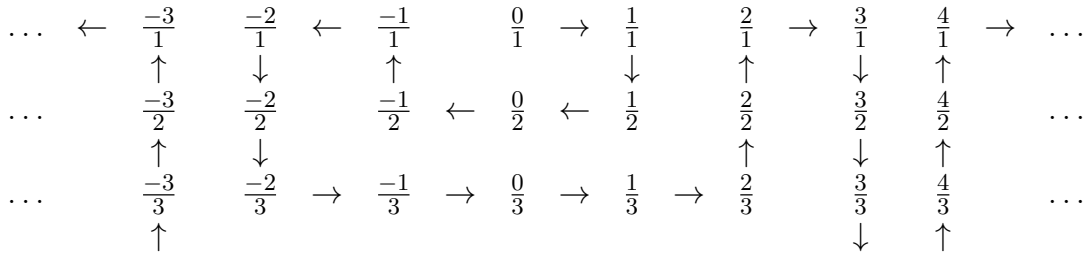
**Beispiel**  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar nach folgenden Schema:

$$\begin{array}{c|cccccccc} \mathbb{Z} & \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline \mathbb{N} & \dots & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array}$$

mathematisch läßt sich dieses Schema ausdrücken als eine Bijektion mit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  in Verbindung mit  $n \mapsto \begin{cases} 2n & , \text{ if } n > 0 \\ 2|n| + 1 & , \text{ if } n \leq 0 \end{cases}$  und der Umkehrung  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ if } n \text{ ungerade} \\ -\frac{(n-1)}{2} & , \text{ else} \end{cases}$ . Beachte dabei das  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$  ist.

**Satz 7**  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar

**Beweis** Wir nummerieren die Brüche längs des folgenden Streckenzugs, wobei wir Brüche  $\frac{m}{n}$  überspringen, bei denen  $m$  und  $n$  nicht teilerfremd sind. Dies liefert uns dann eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ .



□

**Satz 8**  $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar

**Beweis** Annahme  $\mathbb{R}$  sei abzählbar, das heißt es gibt eine bijektive Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  so, daß man  $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  schreiben kann. Nun konstruiert man rekursiv eine Intervallschachtelung  $(I_n)$  mit

$$x_n \notin I_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

Ist nun  $n = 1$ :  $I_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2]$ , dann ist  $x_1 \notin I_1$ .

Zeige das aus  $n \rightarrow n + 1$ : Teile  $I_n$  in drei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle, wähle nun als  $I_{n+1}$  eines der Intervalle, das  $x_{n+1}$  nicht enthält. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gilt nun  $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$ , das heißt aber  $\exists k \in \mathbb{N} : x_k \in I_n \quad \forall n$

und damit gilt  $x_k \in I_k$  (1.4). □

Als Schlußbemerkung zu den reellen Zahlen läßt sich folgendes zusammenfassen. Man hat  $\mathbb{R}$  als gegeben vorausgesetzt und durch Axiome charakterisiert. Es würde genügen, nur die natürlichen Zahlen als gegeben vorauszusetzen, dann kann man nacheinander  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  aus ihnen konstruieren so, daß gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

oder besser

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Als Stichworte seien hier nur der Aufbau des Zahlensystems oder die Zahlenbereichserweiterung genannt.



# Kapitel 1.2

## Folgen und Reihen

### § 1.2.1 - Grenzwerte von Folgen

#### § 1.2.1.1 - Folgen reeller Zahlen

**Definition 9** Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung

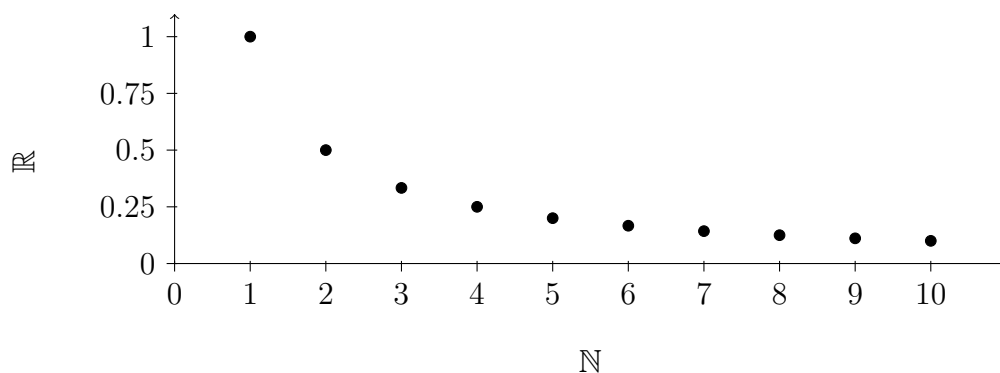
$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Man schreibt kurz  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)$ , dabei wird  $f(n) = a_n$  das  $n$ -te Folgenglied genannt.

#### Beispiel

1.  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
2.  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$
3.  $(27)_{n \in \mathbb{N}} = (27, 27, 27, 27, \dots)$  die konstante Folge.

Für 1 sieht die Folge wie folgt aus:



**Figure 2.1** Folge  $\frac{1}{n}$

**Beispiel** Es sei  $(a_n) := (\frac{1}{n})$ ,  $(b_n) := (\frac{1}{2n})$  und  $(c_n) := (\frac{1}{n^2})$ , dann heißen  $(b_n)$  und  $(c_n)$  Teilfolgen von  $(a_n)$ . Es gilt  $b_n = a_{2n}$  und  $c_n = a_{n^2}$ , das heißt es gibt eine Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen  $k_n \in \mathbb{N}$  mit  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$  so, daß  $b_n = a_{k_n}$  gilt. Hierbei wäre  $k_n = 2n$  und analog für  $c_n = a_{k_n}$  mit  $k_n = n^2$ .

**Definition 10** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ , dann heißt die Folge  $(b_n)$  mit  $b_n := a_{k_n}$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ .

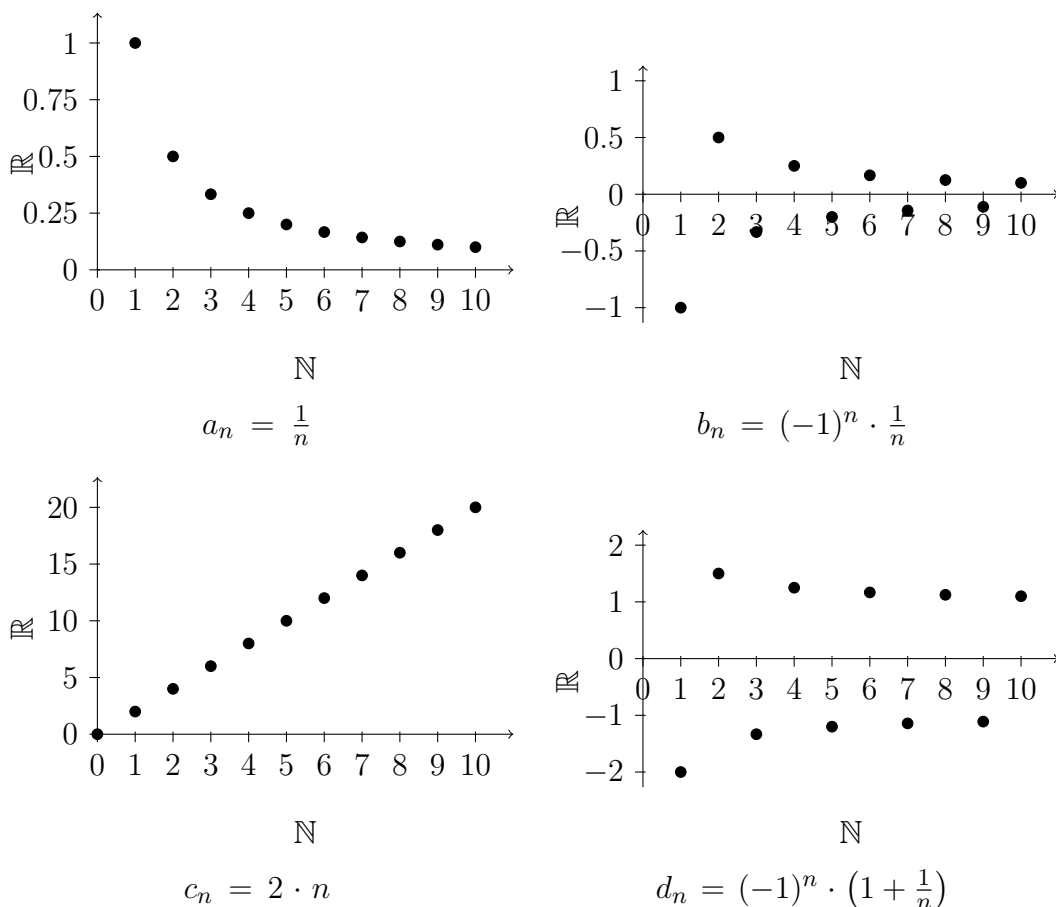
**Definition 11**

- i.  $(a_n)$  heißt nach oben beschränkt, falls  $\exists c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c$ .
- ii.  $(a_n)$  heißt nach unten beschränkt, falls  $\exists d \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq d$ .
- iii.  $(a_n)$  heißt monoton steigend, falls  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ .
- iv.  $(a_n)$  heißt monoton fallend, falls  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$ .

**Beispiel**

- 1.  $(2n + 1)_{n \in \mathbb{N}_0} = \{1, 2, 5, 7, 9, \dots\}$  ist monoton steigend und nicht nach oben beschränkt.
- 2.  $(1 - \frac{1}{n}) = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$  ist monoton steigend und nach oben beschränkt.

**Beispiel** für das Verhalten von Folgen



**Figure 2.2** Beispiele für Folgen



Wir werden in Kürze davon sprechen, dass die Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergent und  $(c_n)$  und  $(d_n)$  divergent sind. "Konvergenz" wird in diesem Zusammenhang bedeuten, daß der Abstand zum Wert "0" beliebig klein wird, wenn nur  $n$  genügend groß ist. Als Beobachtung können wir festhalten, daß

1. der Abstand der Folgenglieder  $a_n$  zum Wert "0" beliebig klein wird, wenn  $n$  genügend groß ist,
2. das selbe für die Folge  $(b_n)$  gilt,
3. die Folge  $(c_n)$  unbeschränkt ist und
4. die Folge  $(d_n)$  beschränkt ist und die Beträge  $|d_n|$  monoton fallend sind, dennoch wird sich die Folge als nicht konvergent erweisen.

### § 1.2.1.2 - Grenzwerte von Folgen

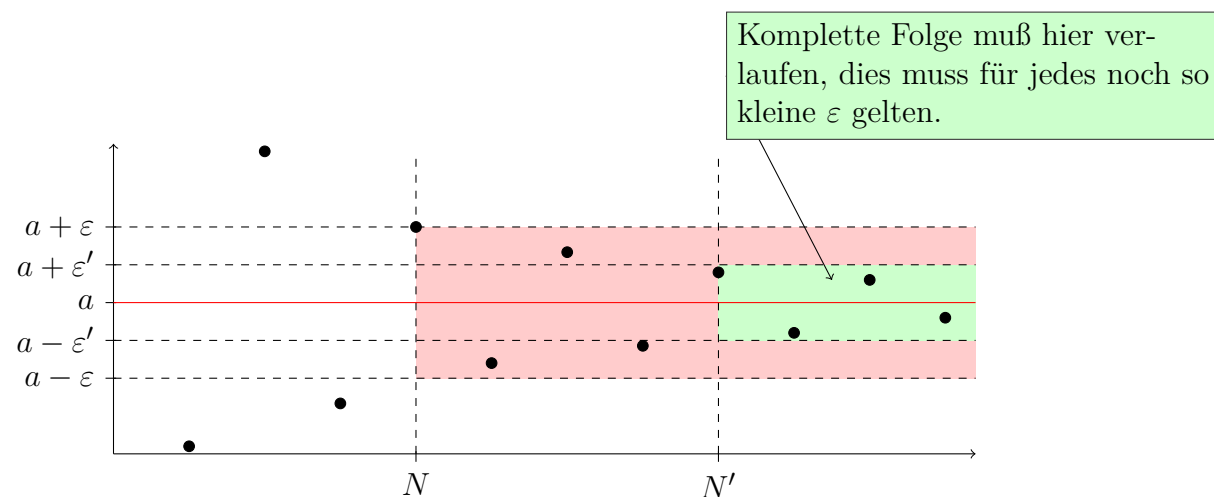
Sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $a \in \mathbb{R}$

**Definition 12**  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$ , das heißt  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ .

In Zeichen schreibt man  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

$(a_n)$  heißt konvergent, falls ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert mit  $a_n \rightarrow a$ , ansonsten heißt sie divergent.

Dieses läßt sich sehr gut in **Figure 2.3** verdeutlichen.



**Figure 2.3** Veranschaulichung Konvergenz

$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  liegen fast alle Folgenglieder in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ , dabei meint "fast alle" das gleiche wie "alle bis auf endlich viele". Für die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  schreiben wir  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

### Beispiel

1.  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

**Beweis** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann existiert nach (A3) ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

Dann gilt für  $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \stackrel{(2.1)}{<} \varepsilon$$

□

2.  $\underbrace{((-1))^n}_{a_n}_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent.

**Beweis** Annahme:  $\exists a \in \mathbb{R} : a_n \rightarrow a$

Dann gilt für  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , das fast alle Folgenglieder in  $U_{\frac{1}{2}}(a)$  liegen, aber aus  $1 \in U_{\frac{1}{2}}(a) \Rightarrow -1 \notin U_{\frac{1}{2}}(a)$  damit ist die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. □

3. Spezialfälle:

$(a_n)$  heißt Nullfolge, falls  $a_n \rightarrow 0$  gilt, das heißt  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n| < \varepsilon$ .

**Bemerkung 6** Wenn  $a_n \rightarrow a$  konvergiert, dann ist  $(a_n - a)$  eine Nullfolge.

**Behauptung** gilt

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow a \\ a_n \rightarrow b \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$$

Man nennt  $a$  in diesem Fall den Grenzwert der Folge  $(a_n)$  und schreibt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

**Beweis** der Behauptung:

Annahme:  $a \neq b$ , dann sei  $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$ , dann liegen aber fast alle Folgenglieder in  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  und in  $U_\varepsilon(b) := (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , aber  $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ , also war unsere Annahme falsch und somit gilt unsere Behauptung  $a = b$ . □

**Beweis** Alternative Version zu obiger Behauptung:

zu  $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$  und  $\exists N' \in \mathbb{N} \forall n \geq N' : |a_n - b| < \varepsilon$ , aber:  $2\varepsilon = |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow$  Behauptung □

Vorsicht: Beachten Sie bitte die folgenden exemplarischen Beispiele:



1. Die Folge  $(1, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \dots)$  konvergiert nicht gegen 0, obwohl die Folgenglieder beliebig nahe an 0 herankommen, jedoch konvergiert eine Teilfolge gegen 0.
2. Ist  $(a_n - a)$  monoton fallend, so muß nicht  $a_n \rightarrow a$  gelten.

**Beispiel** Sei  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ ,  $a = 1$  so ist  $a_n - a = 1 + \frac{1}{n}$ .

**Lemma 1** Bernoulli Ungleichung

Für  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**Beweis** mittels Induktion nach  $n$

**IA**  $n = 1$  gilt

**IV** Die Aussage gelte bereits für beliebiges  $n$ .

**IS** Aus  $n$  folgt  $n+1$ :

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)^n}_{\substack{IV \\ \geq 1+nx}} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

□

Behauptung: Für  $q \in \mathbb{R}$  gilt

- i.  $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$
- ii.  $|q| \geq 1 \Rightarrow (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent.

**Beweis**

- i.  $q = 0$  ist klar, für  $q \neq 0$  und  $|q| < 1$  gilt  $\frac{1}{|q|} > 1$   
 $\Rightarrow \exists x > 0 : \frac{1}{|q|} = 1 + x$ . Sei nun ein  $\varepsilon > 0$  gegeben, so ist

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx}$$

Man wählt nun  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > \frac{1}{\varepsilon x}$ , dann ist für  $n \geq N$

$$\frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} \leq \varepsilon$$

also ist  $|q^n - 0| < \varepsilon$ .

ii. Analog zu vorherigem Teil

□

### § 1.2.1.3 - Rechnen mit konvergenten Folgen

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen.

**Satz 9** Falls  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergent sind, dann sind auch  $(a_n + b_n)$  und  $(a_n - b_n)$  konvergent und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

**Beweis** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  sowie  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

- i.  $\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 Man wählt nun  $N := \max\{N_1, N_2\}$ , dann gilt für  $n \geq N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ii. Es gilt

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \quad (2.2)$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|} \text{ und } |a_n - a| < 1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$$

Dann wählt man erneut  $N := \max\{N_1, N_2\}$  und es gilt für  $n \geq N$

$$|a_n| = |a - a_n + a| \leq |a - a_n| + |a| \leq 1 + |a|$$

Nach Gleichung (2.2) folgt dann:

$$|a_n b_n - ab| < (1 + |a_n|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |a_n|)} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Vorsicht: Es kann vereinzelt vorkommen, daß  $(a_n + b_n)$  und  $(a_n - b_n)$  konvergent sind, obwohl  $(a_n)$  und/oder  $(b_n)$  nicht konvergent sind.



**Beispiel**  $0 = \lim(0) = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ , definiert man nun:  $a_n = (-1)^n$  und  $b_n = (-1)^{n+1}$  so konvergieren  $(a_n)$  und  $(b_n)$  nicht. Weiterhin gilt  $a_n - b_n = -1$ , damit konvergiert sie gegen  $-1$  obwohl die  $(a_n)$  und  $(b_n)$  nicht konvergieren.

Die Folge  $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent, wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

**Beweis** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , so  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ , dann ist für  $n \geq N$   $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| &= \left| \frac{a - a_n}{a_n a} \right| = \frac{1}{|a_n| \cdot |a|} \cdot |a_n - a| \\ &\stackrel{\forall n \geq N}{\geq} \frac{2}{|a|^2} \cdot |a_n - a| \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dann  $\exists N' \in \mathbb{N} \forall n \geq N' : |a_n - a| < \varepsilon \frac{|a|^2}{2}$ . damit sit für  $n \geq N'$  Gleichung (2.3)  $< \varepsilon$  und damit auch  $\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$  für  $n \geq \max\{N, N'\}$ .  $\square$

**Beispiel** Sei  $a_n := \frac{2n^2+n}{n^2-1} = \frac{n^2(2+\frac{1}{n})}{n^2(1-\frac{1}{n^2})}$ , gesucht wird der  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  falls existent. Als Lösung ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{2}{1}$$

also ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

**Satz 10** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergent und  $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

**Beweis** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Annahme:  $a > b$ , das heißt  $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$ , dann existiert ein  $N_1 \in \mathbb{N}$  so daß für alle  $n \geq N_1$  gilt  $|a_n - a| < \varepsilon$  und es existiert ein  $N_2 \in \mathbb{N}$  so daß für alle  $n \geq N_2$  gilt  $|b_n - b| < \varepsilon$ . Für  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$  gilt dann

$$\left. \begin{aligned} a_n &> a - \varepsilon = (2\varepsilon + b) - \varepsilon = b + \varepsilon \\ b_n &< b + \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n > b_n$$

Dies ist aber ein Widerspruch und unsere Annahme ist falsch, damit folgt dann die Behauptung.  $\square$

Vorsicht: Aus  $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$  folgt im Allgemeinen nicht  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Als Gegenbeispiel sei hier  $0 \leftarrow -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , aber  $\lim \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim \left(\frac{1}{n}\right)$ .

#### § 1.2.1.4 - Infimum und Supremum von Folgen

**Satz 11** Sei  $(a_n)$  eine monoton steigende und nach oben beschränkte Folge, dann ist  $(a_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Beweis** Sei  $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Aus  $M$  nach oben beschränkt folgt nach (V) das  $s := \sup(M)$  existiert. Sei  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $N \in \mathbb{N} : s - \varepsilon < a_n$ . Aus  $a_N \leq a_n \leq s$  folgt daher für  $n \geq N$  die Monotonie:  $|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < \varepsilon$ .  $\square$

Analog wird definiert:

**Satz 12** Sei  $a_n$  eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge, dann ist  $(a_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Bemerkung 7** Dies folgt direkt zum Beispiel mit folgenden Betrachtungen:

1.  $(a_n)$  monoton fallend  $\Leftrightarrow (-a_n)$  monoton steigend.
2.  $(a_n)$  nach unten beschränkt  $\Leftrightarrow (-a_n)$  nach oben beschränkt
3.  $t := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow -t = \sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

#### § 1.2.1.5 - Häufungswerte von Folgen

Sei  $(a_n)$  eine Folge

**Definition 13**  $h \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $(a_n)$ , falls in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(h)$   $\infty$ -viele Folgenglieder liegen, das heißt falls  $a_n \in U_\varepsilon(h)$  für  $\infty$ -viele  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Es darf auch passieren, daß endliche viele außerhalb liegen.

#### Beispiel

1.  $((-1)^n)$  hat die Häufungspunkte 1 und  $-1$ .
2.  $a_n = \begin{cases} 1 & , \text{ if } n \text{ even} \\ \frac{1}{n} & , \text{ if } n \text{ odd} \end{cases}$ , hat die Häufungspunkte 0 und 1.
3.  $(a_n)$  konvergent  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ist der einzige Häufungspunkt.

**Satz 13**  $h$  ist Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt, die gegen  $h$  konvergiert.

#### Beweis

$\Leftarrow$  Sei  $\varepsilon > 0$ , dann liegen in  $U_\varepsilon(h)$  fast alle Glieder von  $(a_{k_n})$  nach Definition der Konvergenz, danach folgt das in  $U_\varepsilon(h)$   $\infty$ -viele Glieder von  $(a_n)$  liegen.

$$\Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : a_{k_1} \in U_1(h)$$

$$\exists k_2 > k_1 : a_{k_2} \in U_{\frac{1}{2}}(h)$$

$$\exists k_3 > k_2 : a_{k_3} \in U_{\frac{1}{3}}(h)$$

$\vdots$

$$\exists k_n > k_{n-1} : a_{k_n} \in U_{\frac{1}{n}}(h)$$

damit existiert eine Teilfolge  $(a_{k_n})$  mit  $a_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ .

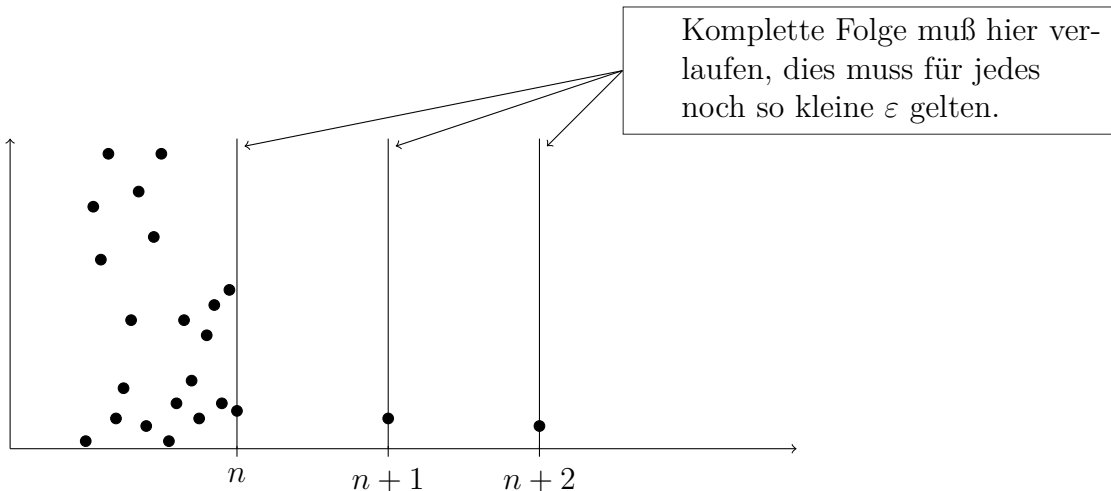
□

### § 1.2.1.6 - Der Satz von Bolzano-Weierstraß

**Satz 14** Jede nach oben und unten beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  hat einen Häufungspunkt in  $\mathbb{R}$  oder besitzt eine konvergente Teilfolge, egal wie häßlich diese auch sein mag.

#### Beweis

1. Sei  $(a_n)$  beschränkt, das heißt  $-s \leq a_n \leq s \forall n$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachtet man  $s_n := \sup\{a_i \mid i \geq n\}$ . Das Supremum existiert nach (V). Es gilt:  $s_n \geq s_{n+1} \forall n$  und  $s_n \geq -s$ , das heißt  $(s_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt, damit folgt daß  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: a$ .



**Figure 2.4** Folge der Suprema  
Startwerte werden immer neu gewählt

2. Behauptung  $a$  ist Häufungswert von  $(a_n)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$  gegeben, so zeigt man  $\exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$   $a_n \in U_\varepsilon(a)$ , das heißt das in  $U_\varepsilon(a)$  unendlich viele Folgenglieder liegen.

$\exists m \in \mathbb{N} : |a - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ , denn  $a \stackrel{1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Man kann nun  $m \geq N$  so wählen, daß

$\exists n \geq m : |s_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ , denn  $s_m = \sup\{a_i \mid i \geq m\}$ , daher gilt

$$|a - a_n| = |a - s_m + s_m - a_n| \leq |a - s_m| + |s_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Weiterhin können wir sagen das  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\sup\{a_i \mid i \geq n\})}_{:= s_n}$  der größte Häufungswert von  $(a_n)$  ist.

**Beweis** Annahme:  $a'$  ist Häufungspunkt von  $(a_n)$  und  $a < a'$ . Man wählt nun  $\delta > 0$  mit  $a < a' - \delta$ . Für unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  gilt  $a_n \in U_\varepsilon(a')$ , also  $a' - \delta \leq a_n$  für diese  $n$ . Damit ist  $\sup\{a_i \mid i \geq n\} \geq a' - \delta$  und weiterhin  $a \geq a' - \delta$ . Damit ist unsere Annahme falsch gewesen und es folgt die Behauptung. □

**Definition 14** Für eine beschränkte Folge  $(a_n)$  heißt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_i \mid i \geq n\}) = \text{größter Häufungspunkt von } (a_n)$$

der Limes Superior von  $(a_n)$ .

**Beispiel**  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$  der größte Häufungspunkt.

**Definition 15** Für eine beschränkte Folge  $(a_n)$  heißt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{a_i \mid i \geq n\}) = \text{kleinste Häufungswert von } (a_n)$$

Limes Inferior von  $(a_n)$ .

**Beispiel**  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$

### § 1.2.1.7 - Berechnung von Quadratwurzeln

Im folgenden ist  $b \in \mathbb{R}^+$  gegeben.

**Frage:** Wie berechnet man gute Näherungswerte für  $\sqrt{b}$ ?

Man definiert rekursiv eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  durch

$$\begin{aligned} a_0 &\in \mathbb{R}^+ \text{ beliebig,} \\ a_{n+1} &:= \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{b}{a_n} \right) \quad (2.4) \end{aligned}$$

Diese Rekursive Definition wird auch die Babylonische Folge genannt.

**Beispiel** Sei  $b = 2$  und  $a_0 = 1$ , dann ist:



$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2} = 1.5 \\
a_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{17}{12} = 1.416\ldots \\
a_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}} \right) = \frac{577}{408} = 1.41425\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

**Satz 15** Für jeden Startwert  $a_0$  konvergiert die durch **Gleichung ( 2.4)** definierte Folge  $(a_n)$  gegen  $\sqrt{b}$ .

### Beweis

- i. Es gilt  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  Induktion nach  $n$
- ii. Es gilt  $a_n \geq \sqrt{b} \forall n \geq 1$ , denn

$$\begin{aligned}
a_n^2 - b &\stackrel{(\text{ 2.4 })}{=} \frac{1}{4} \left( a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}} \right)^2 - b \\
&= \frac{1}{4} \left( a_{n-1}^2 + 2b + \frac{b^2}{a_{n-1}^2} \right) - b \\
&= \frac{1}{4} \left( a_{n-1} - \frac{b}{a_{n-1}} \right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

also  $a_n^2 \geq b$  und damit  $\underbrace{a_n}_{>0} \geq \sqrt{b}$ .

- iii.  $a_{n+1} \leq a_n \forall n \geq 1$ , denn:

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &\stackrel{(\text{ 2.4 })}{=} a_n - \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{b}{a_n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{a_n}_{>0 \text{ n. i}} \underbrace{\left( a_n - \frac{b}{a_n} \right)}_{\geq 0 \text{ n. ii}} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

- iv. Nach ii und iii ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge, und damit folgt  $(a_n)$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \sqrt{b} > 0$ .

- v. Bestimmung von  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ :

$$\begin{aligned}
 a &:= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}} \right) \\
 &\stackrel{\text{Regeln}}{=} \frac{1}{2} \underbrace{\left( \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}_{\text{existiert}} + \frac{b}{\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}_{\text{existiert}}} \right)}_{\text{existiert da } (a_n) \text{ konvergent}} \\
 &= \frac{1}{2} \left( a + \frac{b}{a} \right) \\
 \Rightarrow a &= \frac{1}{2} \left( a + \frac{b}{a} \right) \\
 \Rightarrow a^2 &= b
 \end{aligned}$$

das heißt  $a = \sqrt{b}$ . In dem mit Regeln überschriebenen Gleichheitsschritt erlaubt die Konvergenz diesen.

□

### § 1.2.1.8 - Cauchy Folgen

**Definition 16** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Mit anderen Worten:

$$\underbrace{\text{Hinreichend späte}}_{\exists N \in \mathbb{N}} \text{ Folgenglieder haben } \underbrace{\text{beliebig}}_{\forall \varepsilon > 0:} \underbrace{\text{kleinen Abstand}}_{|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N}$$

**Frage:** Was hat diese Bedingung mit Konvergenz zu tun?

Beobachtungen:

1.  $(a_n)$  konvergent  $\Rightarrow (a_n)$  ist Cauchy-Folge

**Beweis** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\varepsilon > 0$   
Es gilt:

$$\begin{aligned}
 |a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\
 &\leq |a_n - a| + |a - a_m|
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Da  $(a_n)$  konvergent ist gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dann gilt für  $n, m \geq N$  in Verbindung mit **Gleichung ( 2.5)**  $\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .  $\square$

2.  $(a_n)$  Cauchy-Folge  $\Rightarrow (a_n)$  ist beschränkt

**Beweis** Sei  $(a_n)$  Cauchy-Folge, dann existiert zu  $\varepsilon := 1$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N$$

Dann gilt für  $n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(a_n - a_N) + a_N| \\ &\leq |a_n - a_N| + |a_N| \\ &< 1 + |a_N| \end{aligned}$$

Also gilt für  $n \geq 1$ :

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

$\square$

### § 1.2.1.9 - Das Cauchy-Kriterium

**Satz 16** Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

**Beweis** Sei  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge nach (2) folgt dann, dass  $(a_n)$  beschränkt ist und mit Bolzano-Weierstraß gilt  $(a_n)$  hat dann einen Häufungswert  $h$ .

Man zeigt nun:  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  so  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $\exists m \geq N : |a_m - h| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Dann gilt auch für  $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n - h| &= |(a_n - a_m) + (a_m - h)| \\ &\leq |a_n - a_m| + |a_m - h| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

#### 1.2.1.9.1 Ausblick

Man hat das Cauchy-Kriterium letztlich aus dem Supremumsprinzip (V) abgeleitet.

(V)  $\Rightarrow$  Satz über monotone &  $\Rightarrow$  Bolzano-Weierstraß  $\Rightarrow$  Cauchy-Kriterium  
beschränkte Folgen

Aber es gilt sogar

Intervallschachtelungsprinzip  $\Leftrightarrow$  (V)  $\Leftrightarrow$  Cauchy-Kriterium

Diese drei Aussagen sind äquivalent und man könnte die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  anstelle von (V) durch das Cauchy-Kriterium oder durch das Intervallschachtelungsprinzip ausdrücken.

### § 1.2.1.10 - Bestimmte Divergenz

**Beispiel**  $a_n = n^2 + 1$

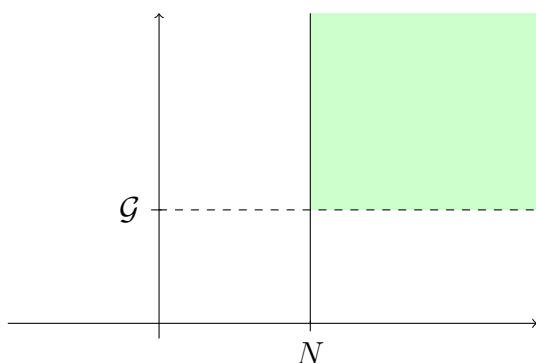
$$b_n = (-1)^n$$

$$c_n = (-1)^n \cdot (n^2 + 1)$$

alle drei Folgen sind divergent, das heißt nicht konvergent, aber bei  $(a_n)$  liegt eine bestimmte Divergenz vor, denn sie wächst über alle Schranken.

**Definition 17** Eine Folge  $(a_n)$  heißt bestimmt divergent gegen  $\infty$ , falls zu jedem  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$a_n \geq \mathcal{G} \quad \forall n \geq N$$



**Figure 2.5** Bestimmte Divergenz

**Satz 17** Sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $a_n \rightarrow \infty$ , dann gilt mit  $a_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Beweis** Zu  $\mathcal{G} = 1$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \geq 1 \forall n \geq N$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann gilt:  $\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| = \frac{1}{a_n}$  für  $n \geq N$ .

Zu  $\mathcal{G} = \frac{2}{\varepsilon}$  existiert nun ein  $N' \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \geq \frac{2}{\varepsilon} \forall n \geq N'$ , damit gilt dann für  $n \geq N$  und  $n \geq N'$

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Dies ist möglich, da alle Teile Positiv sind. □

**Satz 18** Sei  $(a_n)$  eine Folge mit

$a_n > 0 \forall n$  und

$a_n \rightarrow 0$ ,

dann gilt

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$$

**Beweis** Sei  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}$  gegeben,  $\mathbb{E}$  dürfen wir annehmen das  $\mathcal{G} > 0$  ist, dann gilt nach Voraussetzung  $a_n \rightarrow 0$ , also existiert zu  $\varepsilon := \frac{1}{\mathcal{G}}$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$a_n \stackrel{a_n > 0}{=} |a_n - 0| < \varepsilon \text{ für } n \geq N$$

Damit gilt dann für  $n \geq N$

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = \mathcal{G}$$

□

Analog können Definitionen und Sätze für  $a_n \rightarrow -\infty$  formuliert werden. Dies bleibt zur Übung offen.

## § 1.2.2 - Unendliche Reihen

### Frage:

1. Wie kann man "unendliche Summen"

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

auffassen?

**Beispiel**  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$   
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

2. Kann man mit diesen "unendlichen Summen" rechnen?

### **Beispiel**

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{?}{=} (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &\stackrel{\text{Assoziativ}}{=} 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots \\ &\stackrel{?}{=} 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - \dots \\ &\stackrel{?}{=} 1 \end{aligned}$$

Diese Behauptung beruht auf Guido Grandis und ist als die Schöpfung der Welt aus dem Nichts bekannt.

```
n,z = var('n','z');
p = 0.02;
(1+p/2)**(2)
(1+p/3)**(3)
(1+p/12)**(12)
a(n) = (1+p/n)**(n)
b(n) = (1+z/n)**(n)
limit(a(n),n=infinity)
limit(b(n),n=infinity)
for n in range(1,20,1):
    (1+p/n)**(n)
```

# Kapitel A

## Index

---

**a**

absolut Betrag 17

Axiom

Folgerungen 14

**b**

Bernoulli Ungleichung 29

Betragfunktion 17

**f**

Funktionen

inf 18

sup 18

**g**

Geometrische Reihe 9

**i**

inf 18

Infimum 18

**r**

Reihe

geometrische 9

**s**

sup 18

Supremum 18

**u**

Ungleichung

Bernoulli 29





## Kapitel B

## References

---

Wikipedia (2010). Gaußsche summenformel. .



## References

