Analysis
I & II

Dozent: Prof. Dr. Thomas Bauer
Satz: Scholz Online (http://scholz-net.org)
Frog and Owl (http://frogandowl.org)
Martin Scholz
aktualisiert am: July 14, 2010

This Document is set with ConTEXt, using the MKIV branch
Many thanks to Hans Hagen for developing so hard on ConTEXt and LuaTEX to providing such a great Document preparation system.

Kapitel

Contents

Kapitel 1.1

Grundlagen

> "Ein Studienanfänger in Mathematik braucht für den Anfang eigentlich gar kein Lehrbuch, die Vorlesungen sind autark, und die wichtigste Arbeitsgrundlage des Studenten ist seine eigenhändige Mitschrift..."

Ziele der Vorlesung - Warum Analysis?

i. Die Analysis ist nicht umsonst an den Anfang des Mathematikstudiums gestellt und stellt die Grundlagen des Mathematikstudiums zur Verfügung.

ii. Analysis ist der Vorrat an Begriffen und Techniken zur Beschreibung der physikalischen Realität.

iii. Analysis ist ein Beispiel eines lückenlosen Aufbaus einer mathematischen Theorie

§ 1.1.1 - Mengen und Abbildungen - die Sprache der Mathematik

§ 1.1.1.1 - Mengen

Wir werden im folgenden einen "naiven" Mengenbegriff verwenden. Dies bedeutet, das eine Menge eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten ist.
Vorsicht: Der naive Mengenbegriff ist keine mathematische Definition!

Beispiel $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und
$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, siehe hierzu Kapitel (noch einschalten)

Notation Für Mengen werden folgende Notationen vereinbart:

i. $a \in M$ bedeutet a ist ein Element der Menge M. Analog ergeben sich dabei dann auch folgende Notationen: $0 \in \mathbb{N}_0$ aber $0 \notin \mathbb{N}$.

ii. $N \subset M$ bedeutet: Jedes Element in N ist auch Element von M. Daraus ergeben sich folgende Anordnungen:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.1.1.1.1 Operationen auf Mengen

Definition 1 Seien M und N beliebige Mengen, dann heißt

i. $M \cap N \;:=\; \{x \mid x \in M \,\text{und}\, x \in N\}$ Durchschnitt von M und N,

ii. $M \cup N \;:=\; \{x \mid x \in M \,\text{oder}\, x \in N\}$ Vereinigung von M und N,

iii. $M \setminus N \;:=\; \{x \mid x \in M \,\text{und}\, x \notin N\}$ Differenzmenge von M und N und

iv. $M \times N \;:=\; \{(x,y) \mid x \in M \,\text{und}\, y \in N\}$ kartesisches Produkt von M und N.

Beispiel $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} \;=\; \{2,3\}$
$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} \;=\; \{1,2,3,4\}$
$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_0 \;=\; \mathbb{N}$
$\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0 \;=\; \mathbb{N}_0$
$\mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N} \;=\; \{0\}$
$\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0 \;=\; \emptyset$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:=\; \mathbb{R}^2$.
Diese Zusammenhänge lassen sich sehr gut in Venn-Diagrammen verdeutlichen.

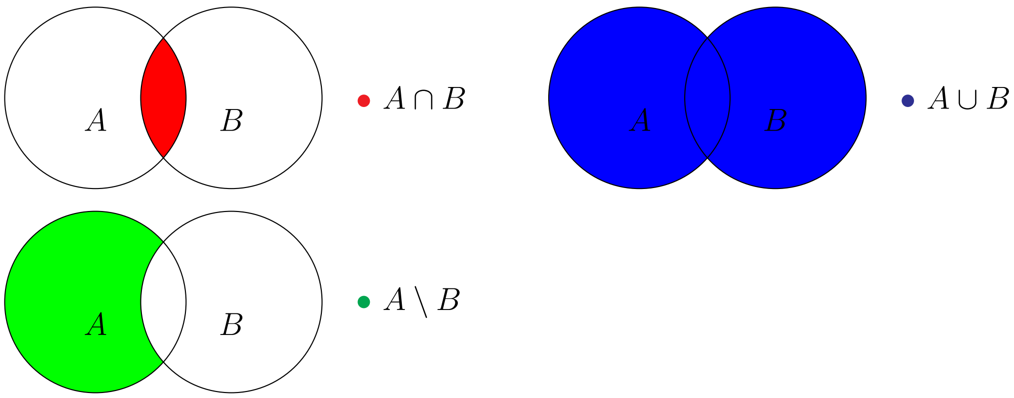

Figure 1.1 Mengen-Operationen und deren Venn Diagramme

1.1.1.1.2 Abkürzungen aus der Logik

Abkürzung	Bedeutung	Example
$A \Rightarrow B$	Falls A gilt, dann auch B	$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}_0$
	Aus A folgt B	
	A impliziert B	
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann wenn B gilt	$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x - 1 \in \mathbb{N}_0$
	A impliziert B und B impliziert A	
	A und B sind äquivalent	
$\exists\, x\ :$	Es gibt/existiert ein x, so daß ... gilt	
$\exists\, x \in M\ :$	Es gibt ein $x \in M$, so daß ... gilt	$\exists\, x \in \mathbb{N} : x > 1000$
$\forall\, x\ :$	Für alle x gilt ...	
$\forall\, x \in M\ :$	Für alle $x \in M$ gilt ...	$\forall x \in \mathbb{N} : x > 0$
$\wedge$	logisches "und"	
$\vee$	logisches "oder"	

Beispiel $N \subset M \Leftrightarrow (\forall\, x : \ x \in N \Rightarrow \ x \in M)$
$N = M \ \Leftrightarrow (\forall x : \ x \in N \Leftrightarrow \ x \in M)$

Anwendung Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge dann gilt:
$\bigcap_{i=1}^{n} M_i \ := \ M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n \ = \ \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n\} \ =$
$\{x \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x \in M_i\}$
Analog gilt:
$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \ = \ M_1 \cup \ldots \cup M_n \ = \ \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_n\} \ =$
$\{x \mid \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in M_i\}$

Beispiel (für einen Beweis)
Behauptung: Für beliebige Mengen A, B, C gilt:
$A \setminus (B \cap C) = A \setminus B \cup A \setminus C$

Beweis Es gilt für beliebiges x

$$
\begin{aligned}
x \in A\backslash(B \cap C) &\overset{\text{Def. }\backslash}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \cup C \\
&\overset{\text{Def. }\cap}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\overset{\text{Aussagenlogik}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\overset{\text{Def. }\backslash}{\Leftrightarrow} x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \\
&\overset{\text{Def. }\cup}{\Leftrightarrow} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{aligned}
$$

□

1.1.1.1.3 Abbildungen
Seien M und N Mengen, dann ist eine Abbildung $f : M \to N$ eine Zuordnung die jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zuordnet. Dabei heißt M die Definitionsmenge von f und $f(x)$ die Bildmenge oder das Bild von x unter f.

Beispiel Die **Nachfolgeabbildung**

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
x &\longmapsto x + 1
\end{aligned}
$$

die **quadratische Abbildung**

$$
\begin{aligned}
g : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\
x &\longmapsto x^2
\end{aligned}
$$

die **Geburtsjahresfunktion**

$$
\begin{aligned}
h : \text{Alle Hörer der aktuellen Analysis I VL} &\to \mathbb{N} \\
x &\longmapsto \text{ Geburtsjahr von } x
\end{aligned}
$$

die **Betragsfunktion**

$$
\begin{aligned}
k : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N}_0 \\
x &\longmapsto |x| := \begin{cases} x & \text{, if } x \geq 0 \\ -x & \text{, if } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.1.1.1.4 Komposition von Abbildungen
Seien $f : M \to M'$ und $g : M' \to M''$ je zwei Abbildungen, dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : M \to M''$$
$$x \longmapsto g(\underbrace{f(x)}_{\in M'})$$

die Komposition von f und g. Siehe hierzu auch folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & M' \arrow[d, "g"] \\ & M'' \end{tikzcd}$$

Beispiel Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $x \longmapsto x + 1$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $x \longmapsto |x|$, dann ist $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $x \longmapsto |x + 1|$.

§ 1.1.2 - Vollständige Induktion

Die "Vollständige Induktion" ist eine Beweismethode, die sich häufig bei Aussagen über natürliche Zahlen anwenden läßt. Sie beruht auf dem fünften Peano Axiom, welche zusammen die natürlichen Zahlen$\mathbb{N}$ einführen.

Beispiel Das folgende Beispiel war aufgrund seiner Einfachheit schon in der vorgriechischen Mathematik bekannt, geriet aber irgendwie in Vergessenheit und wurde von Johann Carl Friedrich Gauß(30. April 1777 in Braunschweig - 23. Februar 1855 in Göttingen) im Alter von 9 Jahren wiederentdeckt. Die Geschichte ist durch Wolgang Sartorius von Waltershausen (1809-1876) überliefert:

> “Der junge Gauss war kaum in die Rechenclasse eingetreten, als Büttner die Summation der arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indes kaum ausgesprochen als Gauß die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: »Dor ligget se.« (Da liegen sie.)Wikipedia, 2010”

Die genau Aufgabenstellung ist jedoch nicht überliefert, es wird aber oft berichtet, daß Büttner die Schüler die Reihe von 1 bis 100 (anderen Quellen zufolge von 1 bis 60) aufsummieren ließ.

Entsprechend den damaligen Verhältnissen unterrichtete Büttner etwa 100 Schüler in einer Klasse. Damals waren auch Züchtigungen mit der sogenannten Karwatsche üblich. Sartorius berichtet: "*Am Ende der Stunde wurden daraufhin die Rechentafeln umgekehrt; die von Gauss mit einer einzigen Zahl lag oben und als Büttner das Exempel prüfte, wurde das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden, während viele der übrigen falsch waren und alsbald mit der Karwatsche rectifizirt wurden.*" Büttner erkannte bald, dass Gauß in seiner Klasse nichts mehr lernen konnte.

Algemeiner gefasst ergibt sich damit für das Aufsummieren der Zahlen von 1 bis n folgendes:

i. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ii. Als eine weitere Verallgemeinerung läßt sich die Summe über alle ungraden Zahlen auffassen:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Prinzip Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage n sei eine Aussage A_n gegeben, dann gilt, dann sind alle Aussagen A_n wahr, falls man folgendes Zeigen kann:

i. A_1 ist wahr. Dieser Schritt wird Induktionsanfang genannt und meistens mit (IA) abgekürzt,

ii. Unter der Annahme das A_n wahr ist (Induktionsvoraussetzung (IV)) kann man zeigen, das auch A_{n+1} wahr ist. Dieser Teil wird als Induktionsschluß bezeichnet und oft mit (IS) abgekürzt.

Beispiel Nehmen wir uns noch einmal unserer obigen Beispiele an und betrachten:

Behauptung: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

Beweis

IA Den Induktionsanfang beweisen wir für $n = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ und dies wahr.

IV In der Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, daß unsere Aussage bereits für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, es sei also $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ bereits wahr.

IS Es ist $\not{Z}\; 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Es gilt also

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + (n + 1) &= \underbrace{(1 + 2 + \ldots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n + 1) \\ &\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

□

Behauptung: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Beweis

IA $n = 1$: $1 = 1^2$ ist wahr

IS Nach IV gilt die Aussage bereits für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dann ist
$\cancel{Z}: 1 + 3 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$
Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) &= \underbrace{(1 + 3 + \ldots + (2n - 1))}_{n^2} + (2n + 1) \\ &\overset{IV}{=} n^2 + (2n + 1) \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

□

Hinweis: Wir werde im folgenden das Induktionsprinzip in der Vorlesung nicht beweisen.

§ 1.1.2.1 - Summen- und Produktsymbole

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei eine Zahl a_k gegeben, dann ist für jedes $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n =: n! \quad \text{(Fakultät)}$$

Weiterhin werden folgende Sondervereinbarungen für den Fall $m > n$ getroffen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \qquad \text{die leere Summe,}$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \qquad \text{das leere Produkt.}$$

Satz 1 Die Geometrische Reihe

Für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k := \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{1.1}$$

Beweis mittels Induktion nach n.

$n = 0$: $x^0 = \frac{1-x^1}{1-x}$ ist wahr

$n \to n + 1$: Es gelte bereits die IV $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} \\ &\overset{IV}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}\end{aligned}$$

□

§ 1.1.2.2 - Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$n! := \prod_{k=1} nk$$

und insbesondere seien $1! := 1$ und $0! := 1$, dann gilt $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 2 Die Anzahl der Anordnungen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ ist $n!$, das heißt es gibt genau $n!$ Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{1, \ldots, n\}$.

Beispiel Die Anordnungen von {1,2,3} sind:
(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

Beweis durch Induktion nach n:

$n = 1$: Anzahl der Anordnungen von $\{1\} := 1 = 1!$ und damit wahr.

$n \to n + 1$: Die Anzahl der Anordnungen von $\{1, \ldots, n\}$ sei als Induktionsvoraussetzung bereits $n!$, dann zerfällt die Anordnung von $\{1, \ldots, n+1\}$ in $n+1$ disjunkte Typen. Diese unterscheiden sich nach ihrem ersten Tupel-Element in Anordnungen, die die 1 an 1. Stelle haben, Anordnungen, die die 2 an 1. Stelle haben

... und Anordnungen, die die $n+1$ an 1. Stelle haben. Zu jedem dieser Typen gibt es nach IV genau $n!$ Anordnungen, also insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Anordnungen.

$\square$

§ 1.1.2.3 - Binomialkoeffizienten

Seien $k,n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$, so sei

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &:= \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} \\ &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

i. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

ii. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ für $k < n$ (Rekursionsformel)

Beweis der Binomialkoeffizienteneigenschaften

i. klar nach der Definition des Binomialkoeffizienten.

ii. $\cancel{Z}$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{((k+1)+(n-k))n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

$\square$

Der Binomialkoeffizient läßt sich mit Aussage ii im Pascalschen Dreieck veranschaulichen:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
n \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & \binom{0}{0} \\
1 & & & 1 & & 1 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\
2 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
3 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\vdots & & & & & & & & \iddots & & & & \vdots & & & & \ddots \\
n & & & & & & & \binom{n}{0} & & & \cdots & & \binom{n}{k} & & \cdots & & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Satz 3 Seien $k,n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, so ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementingen Menge

$$\binom{n}{k}.$$

Beweis durch Induktion nach n:

$n = 1$**:** Es gibt $\binom{1}{1} = 1$ einelementige Teilmenge.

$n \to n + 1$**:** Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$, dabei zerfallen die k-elementigen Teilmengen in 2 disjunkte Typen, jene welche a_{n+1} enthalten und jene welche a_{n+1} nicht enthalten. Es gibt also $\binom{n}{k}$ Mengen vom Typ die a_{n+1} nicht enthalten und $\binom{n}{k-1}$ Mengen vom Typ, die a_{n+1} enthalten. Die Behauptung folgt dann aus der Rekursionsformel.

$\square$

§ 1.1.2.4 - Der binomische Satz

Seien $x,y \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}
$$

Satz 4 Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1.2}$$

Beweis aus der Kombinatorik.
Die Summanden, die beim Ausmultiplizieren vn $(x+y)^n = (x+y)\cdots(x+y)$ auftreten

sind x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2, \ldots$, y^n. Es tritt der Faktor $x^k y^{n-k}$ genau so oft auf, wie es Möglichkeiten gibt aus den n Faktoren $(x+y)$ k Faktoren auszuwählen, also $\binom{n}{k}$ mal. $\square$

§ 1.1.3 - Die reelen Zahlen

Mögliche Zugänge in der Analysis Vorlesung sind:

i. $\mathbb{R}$ als bekannt voraussetzen (z.B. Schule)

  - sachlich problematisch

ii. $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{N}$ "konstruieren"

  - sehr zeitaufwendig (Spezialvorlesung)
  - didaktisch fragwürdig

iii. Axiomatische/r Aufbau/Einführung

  - Man stellt die Eigenschaften yusammen, die $\mathbb{R}$ "charakterisieren" und verwendet für den Aufbau der Analysis nur diese Eigenschaften,
  - zeitökonomisch und
  - mathematisch OK.

In der Menge $\mathbb{R}$ sind zwei Operationen definiert. Dies Operationen sind:

$$\begin{array}{llcl} + & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a+b \\ \text{und} & & & \\ \cdot & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a\cdot b \end{array}$$

Diese beiden Operationen nennen wir Addition und Multiplikation. Durch sie ist $\mathbb{R}$ ein Körper, das heißt er erfüllt die folgenden Körperaxiome:

Axiom	Bezeichnung	Beschreibung
(K1)	Kommutativität	Additiv: $a + b = b + a$
		Multiplikativ: $a \cdot b = b \cdot a$
(K2)	Assoziativität	Additiv: $(a + b) + c = a + (b + c)$
		Multiplikativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(K3)	neutrales Element	Additiv: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so daß $a+0 = 0+a = a$ ist
		Multiplikativ: Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, so daß $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ist
(K4)	inverses Element	Additiv: Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-a \in \mathbb{R}$, so daß $a + (-a) = 0$ ist
		Multiplikativ: Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $a^{-1} \in \mathbb{R}$, so daß $a \cdot a^{-1} = 1$ ist.
(K5)	Distributivität	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

Bemerkung 1 Auch $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_2$ sind Körper

Folgerung aus den Axiomen

i. Die neutralen Elemente 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.

   Beweis Sei $0' \in \mathbb{R}$ mit $a + 0' = a \, \forall a \in \mathbb{R}$, dann gilt

   $0 \overset{\text{Ann.}}{=} 0 + 0' \overset{(K1)}{=} 0' + 0 \overset{(K3)}{=} 0'$.

   Die Beweisführung verläuft analog für 1. □

ii. Die inversen Elemente $-a$ für $a \in \mathbb{R}$ und a^{-1} für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind eindeutig bestimmt.

   Beweis

   i. Seien $a,a' \in \mathbb{R}$ mit $a + a' = 0$, so gilt

      $-a \overset{(K3)}{=} (-a) + (a + a') \overset{(K2)}{=} ((-a) + a) + a' \overset{(K1)}{=} (a + (-a)) + a' \overset{(K4)}{=} 0 + a' \overset{(K1)}{=} a' + 0 \overset{(K3)}{=} a'$

   ii. analog für $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   □

iii. $-0 = 0$ und $1^{-1} = 1$

   Beweis $0 + 0 \overset{(K3)}{=} 0 \overset{(K4)}{=} 0 + (-0) \Rightarrow \quad 0 = -0$

   Analog für 1. □

iv. $\forall\, a \in \mathbb{R}:\ -(-a) = a$
$\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}:\ (a^{-1})^{-1} = a$

Beweis

$$\left.\begin{aligned} (-a) + (-(-a)) &\overset{(K4)}{=} 0 \\ (-a) + a \overset{(K1)}{=} a + (-a) &\overset{(K4)}{=} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -(-a) = a$$

Analog für $(a^{-1})^{-1} = a$. □

v. $-(a+b) = (-a) + (-b) \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$
$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Beweis wird in den Übungen behandelt. □

vi. I. $a \cdot 0 = 0 \,\forall\, a \in \mathbb{R}$

II. $(-a) \cdot b = -(ab) \,\forall\, a,b \in \mathbb{R}$

III. $(-a) \cdot (-b) = ab \,\forall\, a,b \in \mathbb{R}$

Beweis

I. $a \cdot 0 + a \cdot 0 \overset{(K1),(K5)}{=} a \cdot (0+0) \overset{(K3)}{=} a \cdot 0 \overset{(K3)}{=} 0 + a \cdot 0$
$\Rightarrow \quad (a\cdot 0 + a\cdot 0) + (-(a\cdot 0)) = (0 + a\cdot 0) + (-(a\cdot 0)) \Rightarrow a\cdot 0(a\cdot 0 + (-(a\cdot 0))) \overset{(K2),(K4)}{\Rightarrow}$
$a \cdot 0 = 0$

II. Übungsaufgabe

III. Übungsaufgabe

□

Aus den obigen Folgerungen ergibt sich folgende Ableitung: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Beweis

"$\Leftarrow$" schon gezeigt!

"$\Rightarrow$" Sei $a \cdot b = 0$, so existieren 2 Fälle, welche unterschieden werden müssen.

1. Fall: $a = 0$ ist bereits bewiesen

2. Fall: $a \neq 0$
Es gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ \Rightarrow\ a^{-1}(a \cdot b) &= 0 \\ \Rightarrow\ (a^{-1} \cdot a)b &= 0 \\ \Rightarrow\ 1 \cdot b &= 0 \\ \Rightarrow\ b &= 0 \end{aligned}$$

□

Definition 2 Für Addition und Multiplikation werde nun die Subtraktion und Division wie folgt definiert:
Für die Addition sei $a - b := a + (-b) \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$ und heißt Subtraktion,
Für die Multiplikation sei $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \wedge \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und wird als Division bezeichnet.

§ 1.1.3.1 - Die Anordnung des $\mathbb{R}$

Es gibt eine Teilmenge $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ der positiven Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

Eigenschaft	**Beschreibung**
(A1)	Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen: $a \in \mathbb{R}^+$, $a = 0$, $-a \in \mathbb{R}^+$
(A2)	Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt: $a,b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b,\ a \cdot b \in \mathbb{R}$
(A3)	$\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n - a \in \mathbb{R}^+$ (Archimedisches Axiom)

Notation

$$\begin{aligned} a > b &:\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \\ a \geq b &:\Leftrightarrow a > b, \vee\, a = b \\ a < b &:\Leftrightarrow b > a \\ a \leq b &:\Leftrightarrow b \geq a \end{aligned}$$

! Hinweis: Die Eigenschaften (A1) - (A3) drücken aus, daß $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordneter Körper ist. Weiterhin ist auch $\mathbb{Q}$ archimedisch angeordnet, jedoch $\mathbb{C}$ nicht.

Folgerung

i. $a^2 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Beweis Nach (A1) ist $a > 0$ oder $-a > 0$. Ist $a > 0$, so ist $a^2 = a \cdot a > 0$ nach (A2), ist jedoch $-a > 0$, so ist $a^2 = (-a)(-a) > 0$ nach (A2). □

ii. Es gilt für
   $\left.\begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array}\right\} \Rightarrow a < c$. Diese Eigenschaft heißt Transitivität.

Beweis der Transitivität:

$$\left.\begin{array}{lcl} a < b & \overset{Def}{\Longrightarrow} & b - a > 0 \\ b < c & \overset{Def}{\Longrightarrow} & c - b > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (b-a) + (c-b) = c - a > 0 \overset{Def}{\Longrightarrow} c > a \qquad \square$$

iii. I. $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

II. Es gilt für

$$\left.\begin{array}{r} a < b \\ a' < b' \end{array}\right\} \Rightarrow a + a' < b + b'$$

Beweis

I. $a < b \overset{Def}{\Longrightarrow} b - a > 0 \Rightarrow (b + c) - (a + c) > 0 \overset{Def}{\Longrightarrow} a + c < b + c$

II. Es sei

$$\left.\begin{array}{lcl} a < b & \overset{Def}{\Longrightarrow} & b - a > 0 \\ a' < b' & \overset{Def}{\Longrightarrow} & b' - a' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < (b-a) + (b'-a') = (b+b') - (a+a')$$

$$\overset{Def}{\Longrightarrow} a + a' < b + b'$$

$\square$

iv. I. $a < b \Rightarrow a - c < b - c \quad \forall c \in \mathbb{R}^+$

II. Es sei:

$$\left.\begin{array}{r} 0 < a < b \\ 0 < a' < b' \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot a' < b \cdot b'$$

Beweis Übungsaufgaben $\square$

§ 1.1.3.2 - Die Betragsfunktion

Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$|a| := \begin{cases} a & \text{if a}\geq 0 \\ -a & \text{else} \end{cases}$$

Eigenschaften Damit ergeben sich für die Betragsfunktion mit a,$b \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:

i. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

ii. $|a + b| \leq |a| + |b|$

iii. $|a - b| \geq |a| - |b|$

Beweis

i. klar.

ii. Aus

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{array}\right\} \xRightarrow{Eig.\,iii} \quad a+b \leq |a|+|b| \\ \left.\begin{array}{r} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{array}\right\} \xRightarrow{Eig.\,iii} \quad -a-b \leq |a|+|b| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Beh.}$$

iii. $|a| = |b + (a-b)| \overset{ii}{\leq} |b| + |a-b| \xRightarrow{Eig.\,iii} |a| - |b| \leq |a-b|$

$\square$

Definition 3 Intervalle
Um über einen bestimmten zusammenhängenden Bereich zu sprechen ist es notwendig den Begriff des Intervalls einzuführen, dafür seien $a,b \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt mit $a \leq b$. Es sind folgende Anordnungen möglich:

Intervall	**math. Beschreibung**	**Bezeichnung**
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossenes Intervall von a bis b
$[a,b) := [a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	(rechts-)halboffenes Intervall von a bis b
		halboffenes Intervall von a bis exkl. b
$(a,b] :=]a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	(links-)halboffenes Intervall von a bis b
		halboffenes Intervall von exkl. b bis inkl. a
$(a,b) :=]a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offnes Intervall von a bis b
$[a,\infty) := [a,\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	
$(a,\infty) :=]a,\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
$(-\infty,b] :=]-\infty,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
$(-\infty,b) :=]-\infty,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	

§ 1.1.3.3 - Supremum und Infimum

Definition 4 Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$

i. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M, falls gilt:

$$a \geq x \quad \forall x \in M$$

ii. M heißt nach oben beschränkt, falls es eine obere Schranke a für M gibt.

$$\forall b \in M : \, b \leq a$$

Beispiel

1. $M_1 = [0,1]$
2. $M_2 = [0,1)$
3. $M_3 = [0, \infty)$
4. $M_4 = \mathbb{N}$

Die Mengen M_1 und M_2 sind nach oben beschränkt, denn jede Zahl $a \geq 1$ ist obere Schranke. Die Mengen M_3 und M_4 sind nicht nach oben beschränkt. Zu M_1 und M_2 gibt es jeweils sogar eine kleinste obere Schranke.

Definition 5 Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so heißt eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ Supremum oder kleinste obere Schranke von M, falls gilt:

i. s ist obere Schranke von M und

ii. für jede obere Schranke a von M gilt $s \leq a$.

Bemerkung 2 In den Beispielen 1 und 2 ist jeweils die Zahl 1 ein Supremum von M_i.
Hinweis: Nur in 1 gilt $1 \in M_1$. !

Falls ein Supremum von M existiert, dann ist es eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten jede Menge hat höchstens ein Supremum. In dem Fall das ein Supremum existiert, so schreibt man $s = \sup(M)$.

Beweis der obigen Aussage:
Seien $s,t \in \mathbb{R}$ zwei Suprema von M, so gilt $s \leq t$, da t obere Schranke und s Supremum ist, andererseits gilt aber auch $t \leq s$, da s obere Schranke und t Supremum ist. Aus beiden Aussagen folgt dann das $t = s$ sein muss. □

Definition 6 Falls eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Supremum s besitzt und falls $s \in M$ ist, so heißt s auch das Maximum von M. In diesem Fall schreibt man dann auch $s = \max(M)$

Beispiel $\sup([0,1]) = 1 = \max([0,1])$
$\sup([0,1)) = 1$

Bemerkung 3 Sei $M \subset \mathbb{R}$, dann definiert man analog zu den Begriffen "nach oben beschränkt", "obere Schranke" und "Supremum" die folgenden Begriffe "nach unten beschränkt", "untere Schranke", "Infimum", "gößte untere Schranke" und "inf(M).

Beispiel $M = (0,1)$ ist beschränkt, das heißt nach obendurch $\sup(M) = 1$ und unten durch $\inf(M) = 0$.

§ 1.1.3.4 - Das Vollständigkeitsaxiom

Uns ist bisher bekannt das $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnete Körper sind. In $\mathbb{R}$ gilt zusätzlich das Vollständigkeitsaxiom (V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 4 Die analoge Aussage für $\mathbb{Q}$ ist falsch

(K1)-(K5), (A1)-(A3) und (V) drücken aus, daß $\mathbb{R}$ ein vollständig angeordneter Körper ist. Interesant ist weiterhin, das man zeigen kann, daß es bis auf "Isomorphie" nur einen einzigen vollständige angeordneten Körper gibt.

§ 1.1.3.5 - Quadratwurzeln

Satz 5 Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ gibt es genau eine Zahl $s \in \mathbb{R}_0^+$ mit $s^2 = a$

Beweis Klar für $a = 0$, sei also im folgenden $a > 0$

i. Eindeutigkeit: Angenommen es gibt $s,t \in \mathbb{R}^+$ mit $s \neq t$ und $s^2 = t^2 = a$.

   1. Fall: $s < t$, dann ist $s^2 < t^2$ zu $s^2 = t^2$

   2. Fall: $s > t$, dann ist $s^2 > t^2$ zu $s^2 = t^2$

ii. Existenz: Man betrachte $M := \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 \leq a\}$.
   Es gilt

   i. $M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$.

   ii. M ist nach oben beschränkt, denn für $x \in M$ gilt: $x^2 \leq a \leq 1 + 2a + a^2 = (1 + a)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leq 1 + a$

   wegen i und ii besitzt M ein Supremum s mit dem Vollständigkeitsaxiom.
   Es ist noch $\not\mathbb{Z}$: $s^2 = a$, dies geschieht durch Widerspruch.
   Annahme: $s^2 \neq a$ mit s dem Supremum von M.

   1. Fall: $s^2 < a$
   <u>Behauptung:</u> Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(s + \frac{1}{n})^2 < a$
   <u>Teilbeweis:</u> Nach (A3) existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{2s+1}{a-s^2}$ und $s^2 < a$, dann ist

$$\frac{1}{n} < \frac{a - s^2}{2s + 1} \tag{1.3}$$

   also ist

$$\begin{aligned}(s+\frac{1}{n})^2 &= s^2+\frac{2s}{n}+\frac{1}{n^2}\\ &\leq s^2+\frac{2s}{n}+\frac{1}{n}\\ &= s^2+\frac{2s+1}{n}\\ &\overset{\in[eq:5]}{=} s^2+(a-s^2)=a\end{aligned}$$

Andererseits gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ $s+\frac{1}{n} > s$, also ist $s+\frac{1}{n} \notin M$, da s obere Schranke von M ist, das heißt $(s+\frac{1}{n})^2 > a$

2. Fall: $s^2 > a$
Behauptung: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(s-\frac{1}{n})^2 > a$.
Teilbeweis: Nach (A3) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{s}$ und $n > \frac{2s}{s^2-a}$, dann ist $s-\frac{1}{n} > 0$ und $s^2-a > \frac{2s}{n}$. Also ist $(s-\frac{1}{n})^2 = s^2-\frac{2s}{n}+\frac{1}{n^2} > s^2-\frac{2s}{n} > a$.
Andererseits gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ das $s-\frac{1}{n} < s$ ist, also ist $s-\frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M, da s das Supremum ist, also existiert ein $x \in M$ mit $x > s-\frac{1}{n}$ daher ist $(s-\frac{1}{n})^2 < x^2 \leq a$

$\Rightarrow s^2 = a$.

□

Definition 7 Die reelle Zahl $s \in \mathbb{R}_0^+$ mit $s^2 = a$ heißt Quadratwurzel von a. Man schreibt auch $s = \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

Im folgenden zeigt man das $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist.

Beweis Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, so kann man $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ als gekürzten Bruch schreiben, mit $a,b \in \mathbb{N}$, das heißt a und b haben keinen gemeinsamen Teiler mehr.
Dann ist $2 = \frac{a^2}{b^2}$, das heißt $2b^2 = a^2$
$\Rightarrow 2 \mid a^2$, das heißt 2 teilt a^2,
$\Rightarrow 2 \mid a$
$\Rightarrow 4 \mid a^2$
$\Rightarrow 2 \mid b^2$
$\Rightarrow 2 \mid b$
also ist 2 gemeinsamer Teiler von a und b. □

Man verallgemeinert den Wurzelbegriff nun in folgender Weise: Zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ und jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Zahl $s \in \mathbb{R}_0^+$ mit $s^n = a$. s heißt in diesem Fall n-te Wurzel aus a und man schreibt $s = \sqrt[n]{a}$.

Beweis erfolgt in den Übungen. Als Hinweis sei gegeben das man $M := \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x^n \leq a\}$ betrachtet. Diese Menge ist nach oben beschränkt und damit existiert ein Supremum. □

§ 1.1.3.6 - Das Intervallschachtelungsprinzip

Es seien Intervalle $[a_n,b_n] \subset \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Satz 6 Falls $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$c \in [a_n,b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

das heißt $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} [a_n,b_n] \neq \emptyset$

Beweis Es gilt $a_n \leq b_m \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung. Also ist die Menge $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist also nach oben beschränkt und besitzt nach (V) ein Supremum $a \in \mathbb{R}$. Analog ist $B := \{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt und besitzt ebenfalls nach (V) ein Infimum $b \in \mathbb{R}$. Damit gilt $a_n \leq b_m \, \forall m,n \in \mathbb{N}$. Also ist jedes b_m ober Schranke von A und mit $a = \sup(A) \Rightarrow a \leq b_m \, \forall m \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist a untere Schranke von B und damit gilt mit $b = \inf(B) \Rightarrow a \leq b$, also ist $[a,b] \neq \emptyset$ und $[a,b] \subset [a_n,b_n] \, \forall n \in \mathbb{N}$, da Punkt in $[a_n,b_n]$ existiert. □

Bemerkung 5 Man kann zeigen, daß umgekehrt das Supremumsprinzip (V) aus dem Intervallschachtelungsprinzip (I) folgt, daher könnte man bei der axiomatischen Definition von $\mathbb{R}$ auch (I) anstelle von (V) verwenden.

§ 1.1.3.7 - Abzählbarkeit – Überabzählbarkeit

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ jedoch überabzählbar.

Definition 8 Eine Menge M heißt abzählbar, falls es eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ gibt. Dabei heißt bijektive: Es existiert eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to M$, so daß $(g \circ f)(x) = x \, \forall x \in M$ und $(f \circ g)(y) = y \, \forall y \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel $\mathbb{Z}$ ist abzählbar nach folgenden Schema:

$\mathbb{Z}$	$\ldots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\ldots$
$\mathbb{N}$	$\ldots$	7	5	3	1	2	4	6	$\ldots$

mathematisch läßt sich dieses Schema ausdrücken als eine Bijektion mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ in Verbindung mit $n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{, if } n > 0 \\ 2\,|n| + 1 & \text{, if } n \leq 0 \end{cases}$ und der Umkehrung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, if n ungerade} \\ -\frac{(n-1)}{2} & \text{, else} \end{cases}$. Beachte dabei das $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ ist.

Satz 7 $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Beweis Wir nummerieren die Brüche längs des folgenden Streckenzugs, wobei wir Brüche $\frac{m}{n}$ überspringen, bei denen m und n nicht teilerfremd sind. Dies liefert uns dann eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\cdots & \leftarrow & \frac{-3}{1} & \frac{-2}{1} & \leftarrow & \frac{-1}{1} & & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \rightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \uparrow & & \\
\cdots & & \frac{-3}{2} & \frac{-2}{2} & & \frac{-1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & & \cdots \\
 & & \uparrow & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \uparrow & & \\
\cdots & & \frac{-3}{3} & \frac{-2}{3} & \rightarrow & \frac{-1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & & \cdots \\
 & & \uparrow & & & & & & & & & & & \downarrow & \uparrow & &
\end{array}$$

□

Satz 8 $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

Beweis Annahme $\mathbb{R}$ sei abzählbar, das heißt es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ so, daß man $\mathbb{R} = \{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ schreiben kann. Nun konstruiert man rekursiv eine Intervallschachtelung (I_n) mit

$$x_n \notin I_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

Ist nun $n = 1$: $I_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2]$, dann ist $x_1 \notin I_1$.
Zeige das aus $n \to n + 1$: Teile I_n in drei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle, wähle nun als I_{n+1} eines der Intervalle, das x_{n+1} nicht enthält. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gilt nun $\bigcap\limits_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$, das heißt aber $\exists k \in \mathbb{N} : x_k \in I_n \quad \forall n$ und damit gilt $x_k \in I_k$(**1.4**). □

Als Schlußbemerkung zu den rellen Zahlen läßt sich folgendes zusammenfassen. Man hat $\mathbb{R}$ als gegeben vorausgesetzt und durch Axiome charakterisiert. Es würde genügen, nur die natürlichen Zahlen als gegeben vorauszusetzen, dann kann man nacheinander $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ aus ihnen konstruieren so, daß gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

oder besser

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Als Stichworte seien hier nur der Aufbau des Zahlensystems oder die Zahlenbereicherweiterung genannt.

Kapitel 1.2

Folgen und Reihen

§ 1.2.1 - Grenzwerte von Folgen

§ 1.2.1.1 - Folgen reeller Zahlen

Definition 9 Eine Folge reeler Zahlen ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & a_n \end{array}$$

Man schreibt kurz $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)$, dabei wird $f(n) = a_n$ das n-te Folgenglied genannt.

Beispiel

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$
2. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$
3. $(27)_{n\in\mathbb{N}} = (27,27,27,27,\ldots)$ die konstante Folge.

Für 1 sieht die folge wie folgt aus:

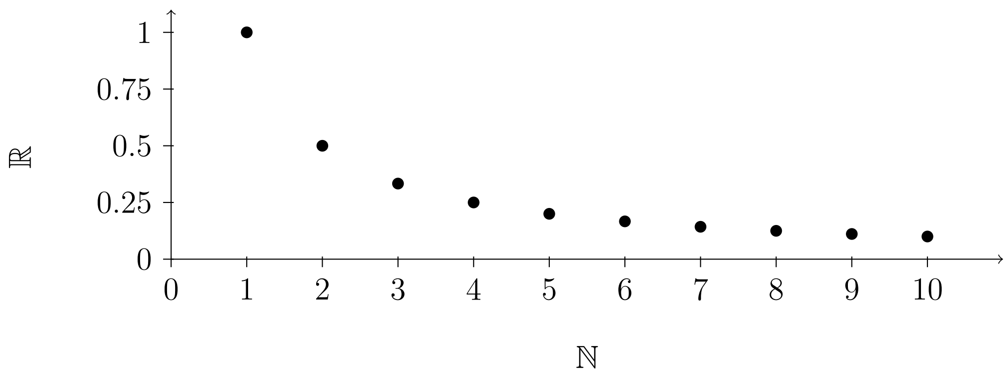

Figure 2.1 Folge $\frac{1}{n}$

Beispiel Es sei $(a_n) := \left(\frac{1}{n}\right)$, $(b_n) := \left(\frac{1}{2n}\right)$ und $(c_n) := \left(\frac{1}{n^2}\right)$, dann heißen (b_n) und (c_n) Teilfolgen von (a_n). Es gilt $b_n = a_{2n}$ und $c_n = a_{n^2}$, das heißt es gibt eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen $k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ so, daß $b_n = a_{k_n}$ gilt. Hierbei wäre $k_n = 2n$ und analog für $c_n = a_{k_n}$ mit $k_n = n^2$.

Definition 10 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, dann heißt die Folge (b_n) mit $b_n := a_{k_n}$ eine Teilfolge von (a_n).

Definition 11

i. (a_n) heißt nach oben beschränkt, falls $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c$.

ii. (a_n) heißt nach unten beschränkt, falls $\exists d \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq d$.

iii. (a_n) heißt monoton steigend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.

iv. (a_n) heißt monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.

Beispiel

1. $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}_0} = \{1, 2, 5, 7, 9, \ldots\}$ ist monoton steigend und nicht nach oben beschränkt.

2. $\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$ ist monoton steigend und nach oben beschränkt.

Beispiel für das Verhalten von Folgen

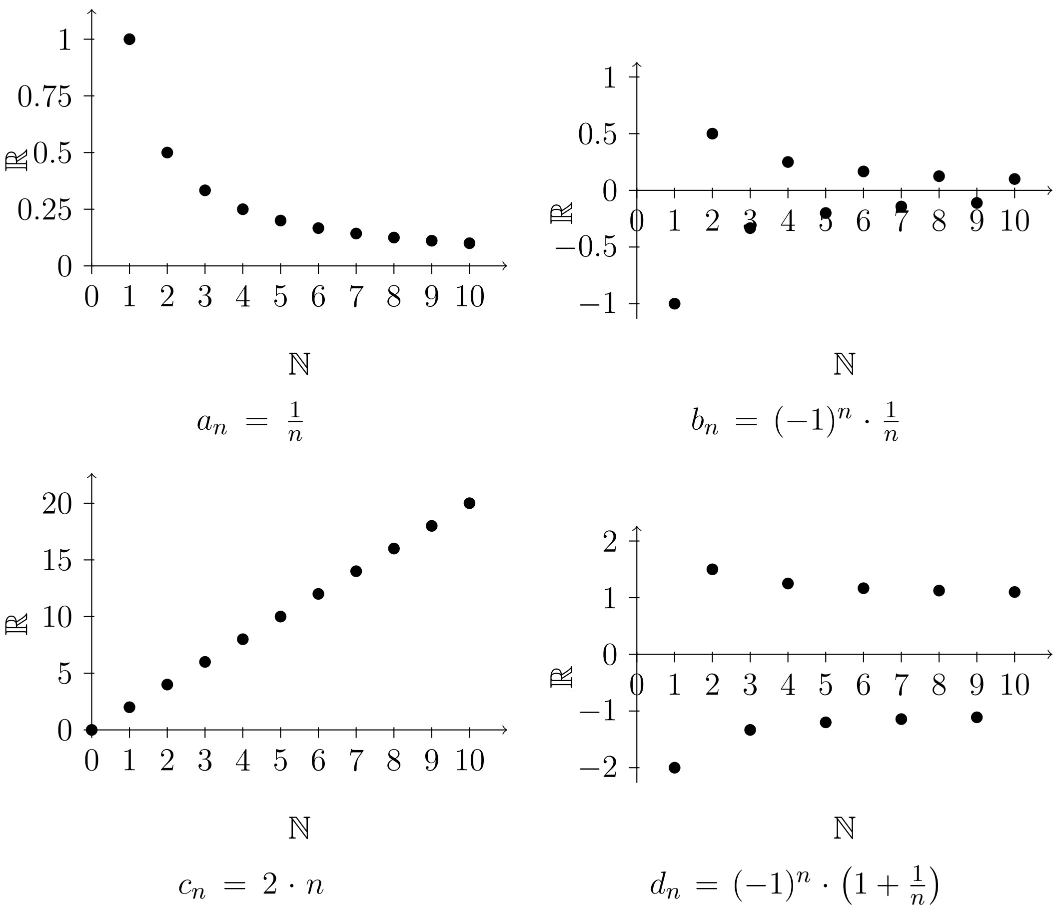

Figure 2.2 Beispiele für Folgen

Wir werden in Kürze davon sprechen, das die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent und (c_n) und (d_n) divergent sind. "Konvergenz" wird in diesem zusammenhang bedeuten, daß der Abstand zum Wert "0" beliebig klein wird, wenn nur n genügend groß ist. Als Beobachtung können wir festhalten, daß

1. der Abstand der Folgeglieder a_n zum Wert "0" beliebig klein wird, wenn n genügend groß ist,
2. das selbe für die Folge (b_n) gilt,
3. die Folge (c_n) unbeschränkt ist und
4. die Folge (d_n) beschränkt ist und die Beträge $|d_n|$ monoton fallend sind, dennoch wird sich die Folge als nicht konvergent erweisen.

§ 1.2.1.2 - Grenzwerte von Folgen

Sei (a_n) eine Folge mit $a \in \mathbb{R}$

Definition 12 (a_n) konvergiert gegen a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon \, \forall n \geq N$, das heißt $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$.
In Zeichen schreibt man $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.
(a_n) heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \to a$, ansonsten heißt sie divergent.
Dieses läßt sich sehr gut in **Figure 2.3** verdeutlichen.

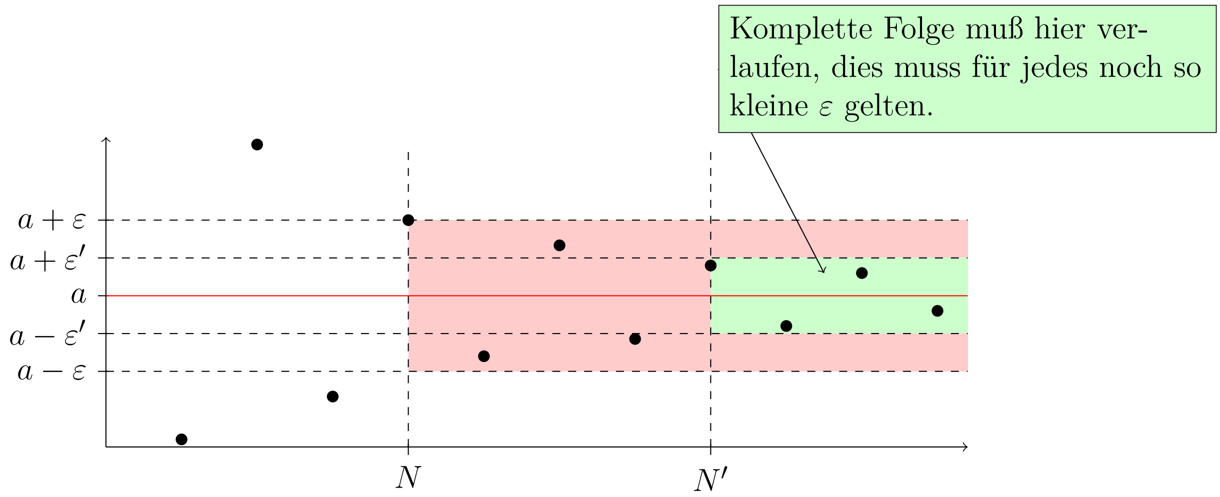

Figure 2.3 Veranschaulichung Konvergenz

$a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad$ Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a, dabei meint "fast alle" das gleiche wie "alle bis auf endlich viele". Für die ε-Umgebung von a schreiben wir $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Beispiel

1. $\frac{1}{n} \to 0$

   Beweis Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert nach (A3) ein $N \in \mathbb{N}$ mit

   $$N > \frac{1}{\varepsilon} \tag{2.1}$$

   Dann gilt für $n \geq N$

   $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \overset{(2.1)}{<} \varepsilon$$

   □

2. $\underbrace{((-1))^n)_{n\in\mathbb{N}}}_{a_n}$ ist divergent.

   Beweis Annahme: $\exists a \in \mathbb{R} : a_n \to a$
   Dann gilt für $\varepsilon = \frac{1}{2}$, das fast alle Folgenglieder in $U_{\frac{1}{2}}(a)$ liegen, aber aus $1 \in U_{\frac{1}{2}}(a) \Rightarrow -1 \notin U_{\frac{1}{2}}(a)$ damit ist die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. □

3. Spezialfälle:
   (a_n) heißt Nullfolge, falls $a_n \to 0$ gilt, das heißt $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n| < \varepsilon$.

Bemerkung 6 Wenn $a_n \to a$ konvergiert, dann ist $(a_n - a)$ eine Nullfolge.

Behauptung gilt

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to a \\ a_n \to b \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Man nennt a in diesem Fall den Grenzwert der Folge (a_n) und schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Beweis der Behauptung:
Annahme: $a \neq b$, dann sei $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$, dann liegen aber fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ und in $U_\varepsilon(b) := (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, aber $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$, also war unsere Annahme falsch und somit gilt unsere Behauptung $a = b$. □

Beweis Alternative Version zu obiger Behauptung:
zu $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ und $\exists N' \in \mathbb{N} \forall n \geq N' : |a_n - b| < \varepsilon$, aber: $2\varepsilon = |a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow$ Behauptung □

⚠ <u>Vorsicht:</u> Beachten Sie bitte die folgenden exemplarischen Beispiele:

1. Die Folge $\left(1, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ konvergiert nicht gegen 0, obwohl die Folgenglieder beliebig nahe an 0 herankommen, jedoch konvergiert eine Teilfolge gegen 0.

2. Ist $(a_n - a)$ monoton fallend, so muß nicht $a_n \to a$ gelten.

   Beispiel Sei $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, $a = 1$ so ist $a_n - a = 1 + \frac{1}{n}$.

Lemma 1 Bernoulli Ungleichung
Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis mittels Induktion nach n

IA $n = 1$ gilt

IV Die Aussage gelte bereits für beliebiges n.

IS Aus n folgt $n+1$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)^n}_{\overset{IV}{\geq} 1+nx} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \\
&\geq (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + (n+1)x
\end{aligned}$$

□

Behauptung: Für $q \in \mathbb{R}$ gilt

i. $|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

ii. $|q| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Beweis

i. $q = 0$ ist klar, für $q \neq 0$ und $|q| < 1$ gilt $\frac{1}{|q|} > 1$
   $\Rightarrow \exists x > 0 : \frac{1}{|q|} = 1 + x$. Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so ist

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx}$$

   Man wählt nun $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon x}$, dann ist für $n \geq N$

$$\frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} \leq \varepsilon$$

also ist $|q^n - 0| < \varepsilon$.

ii. Analog zu vorherigem Teil

□

§ 1.2.1.3 - Rechnen mit konvergenten Folgen

Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

Satz 9 Falls (a_n) und (b_n) konvergent sind, dann sind auch $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ sowie $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

i. $\exists N_1 \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists N_2 \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$
Man wählt nun $N := \max\{N_1, N_2\}$, dann gilt für $n \geq N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ii. Es gilt

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \tag{2.2}$$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ und $|a_n - a| < 1$
$\exists N_2 \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$
Dann wählt man erneut $N := \max\{N_1, N_2\}$ und es gilt für $n \geq N$

$$|a_n| = |a - a_n - a| \leq |a - a_n| + |a| \leq 1 + |a|$$

Nach Gleichung (2.2) folgt dann:

$$|a_n b_n - ab| < (1 + |a_n|)\frac{\varepsilon}{2(1 + |a_n|)} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2\,|b|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Vorsicht: Es kann vereinzelt vorkommen, daß $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ konvergent sind, obwohl (a_n) und/oder (b_n) nicht konvergent sind.

Beispiel $0 = \lim(0) = (-1)^n + (-1)^{n+1}$, definiert man nun: $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ so konvergieren (a_n) und (b_n) nicht. Weiterhin gilt $a_n - b_n = -1$, damit konvergiert sie gegen -1 obwohl die (a_n) und (b_n) nicht konvergieren.

Die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

Beweis Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, so $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, dann ist für $n \geq N$ $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ so gilt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| &= \frac{1}{|a_n| \cdot |a|} \cdot |a_n - a| \\ &\overset{\forall n \geq N}{\geq} \frac{2}{|a|^2} \cdot |a_n - a| \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dann $\exists N' \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N' : |a_n - a| < \varepsilon \frac{|a|^2}{2}$. damit sit für $n \geq N'$ Gleichung (2.3)$<\varepsilon$ und damit auch $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ für $n \geq \max\{N,N'\}$. $\square$

Beispiel Sei $a_n := \frac{2n^2+n}{n^2-1} = \frac{\cancel{n}^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$, gesucht wird der $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ falls existent. Als Lösung ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n^2}} \to \frac{2}{1}$$

also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Satz 10 Seien (a_n) und (b_n) konvergent und $a_n \leq b_n\, \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Annahme: $a > b$, das heißt $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$, dann existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq N_1$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ und es existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq N_2$ gilt $|b_n - b| < \varepsilon$. Für $n \geq \max\{N_1,N_2\}$ gilt dann

$$\left.\begin{aligned} a_n > a - \varepsilon = (2\varepsilon + b) - \varepsilon = b + \varepsilon \\ b_n < b + \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n > b_n$$

Dies ist aber ein Widerspruch und unsere Annahme ist falsch, damit folgt dann die Behauptung. $\square$

<u>Vorsicht:</u> Aus $a_n < b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ folgt im Allgemeinen nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ Als Gegenbeispiel sei hier $0 \leftarrow -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} \to 0, \mathit{aber} \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}\right)$.

§ 1.2.1.4 - Infimum und Supremum von Folgen

Satz 11 Sei (a_n) eine monoton steigende und nach oben beschränkte Folge, dann ist (a_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis Sei $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Aus M nach oben beschränkt folgt nach (V) das $s := \sup(M)$ existiert. Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N} : s - \varepsilon < a_n$. Aus $a_N \leq a_n \leq s$ folgt daher für $n \geq N$ die Monotonie: $|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < \varepsilon$. □

Analog wird definiert:

Satz 12 Sei a_n eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge, dann ist (a_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Bemerkung 7 Dies folgt direkt zum Beispiel mit folgenden Betrachtungen:

1. (a_n) monoton fallend $\Leftrightarrow$ $(-a_n)$ monoton steigend.
2. (a_n) nach unten beschränkt $\Leftrightarrow$ $(-a_n)$ nach oben beschränkt
3. $t := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow -t = \sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

§ 1.2.1.5 - Häufungswerte von Folgen

Sei (a_n) eine Folge

Definition 13 $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), falls in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(h)$ ∞-viele Folgenglieder liegen, das heißt falls $a_n \in U_\varepsilon(h)$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.
∞-viele? Es darf auch passieren, daß endliche viele außerhalb liegen.

Beispiel

1. $((-1)^n)$ hat die Häufungspunkte 1 und -1.
2. $a_n = \begin{cases} 1 & \text{, if n even} \\ \frac{1}{n} & \text{, if n odd} \end{cases}$, hat die Häufungspunkte 0 und 1.
3. (a_n) konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist der einzige Häufungspunkt.

Satz 13 h ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen h konvergiert.

Beweis

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$, dann liegen in $U_\varepsilon(h)$ fast alle Glieder von (a_{k_n}) nach Definition der Konvergenz, danach folgt das in $U_\varepsilon(h)$ ∞-viele Glieder von (a_n) liegen.

$\Rightarrow$ $\exists k_1 \in \mathbb{N} : \; a_{k_1} \in U_1(h)$
$\exists k_2 > k_1 : \; a_{k_2} \in U_{\frac{1}{2}}(h)$
$\exists k_3 > k_2 : \; a_{k_3} \in U_{\frac{1}{3}}(h)$
$\vdots$
$\exists k_n > k_{n-1} : \; a_{k_n} \in U_{\frac{1}{n}}(h)$
damit existiert eine Teilfolge (a_{k_n}) mit $a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} h$.

□

§ 1.2.1.6 - Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz 14 Jede nach oben und unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ oder besitzt eine konvergente Teilfolge, egal wie häßlich diese auch sein mag.

Beweis

1. Sei (a_n) beschränkt, das heißt $-s \leq a_n \leq s \, \forall n$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachtet man $s_n := \sup\{a_i \mid i \geq n\}$. Das Supremum existiert nach (V). Es gilt: $s_n \geq s_{n+1} \, \forall n$ und $s_n \geq -s$, das heißt (s_n) monoton fallend und nach unten beschränkt, damit folgt daß $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: a$.

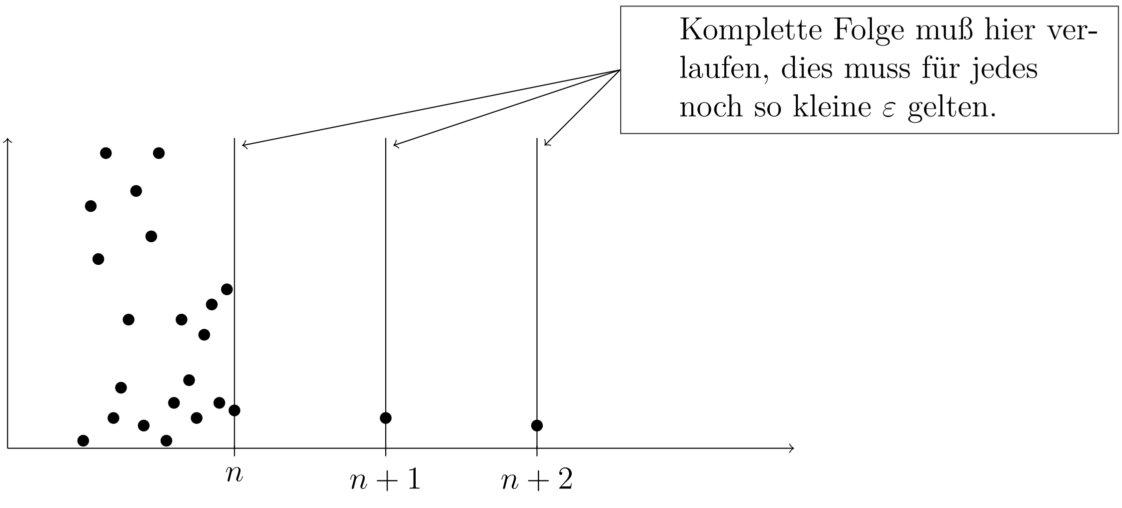

Figure 2.4 Folge der Suprema
Startwerte werden immer neu gewählt

2. Behauptung a ist Häufungswert von (a_n). Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben, so zeigt man $\exists n \geq N : \; |a_n - a| < \varepsilon \, a_n \in U_\varepsilon(a)$, das heißt das in $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgeglieder liegen.
$\exists m \in \mathbb{N} : \; |a - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, denn $a \overset{1}{=} \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Man kann nun $m \geq \mathbb{N}$ so wählen, daß $\exists n \geq m : |s_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, denn $s_m = \sup\{a_i \mid i \geq m\}$, daher gilt

$$|a - a_n| = |a - s_m + s_m - a_n| \leq |a - s_m| + |s_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Weiterhin können wir sagen das $a := \lim_{n\to\infty} \underbrace{(\sup\{a_i \mid i \geq n\})}_{:=s_n}$ der größte Häufungswert von (a_n) ist.

Beweis Annahme: a' ist Häufungspunkt von (a_n) und $a < a'$. Man wählt nun $\delta > 0$ mit $a < a' - \delta$. Für unendlich viele Folgeglieder a_n gilt $a_n \in U_\varepsilon(a')$, also $a' - \delta \leq a_n$ für diese n. Damit ist $\sup\{a_i \mid i \geq n\} \geq a' - \delta$ und weiterhin $a \geq a' - \delta$ Damit ist unsere Annahme falsch gewesen und es folgt die Behauptung. □

Definition 14 Für eine beschränkte Folge (a_n) heißt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_i \mid i \geq n\}) = \text{größter Häufungspunkt von } (a_n)$$

der Limers Superior von (a_n).

Beispiel $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ der größte Häufungspunkt.

Definition 15 Für eine beschränkte Folge (a_n) heißt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_i \mid i \geq n\}) = \text{kleinste Häufungswert von } (a_n)$$

Limes Inferior von (a_n).

Beispiel $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$

§ 1.2.1.7 - Berechnung von Quadratwurzeln

Im folgenden ist $b \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

<u>**Frage:**</u> Wie berechnet man gute Näherungswerte für $\sqrt{b}$?

Man definiert rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ beliebig,}$$
$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right) \quad (2.4)$$

Diese Rekursive Definition wird auch die Babylonische Folge genannt.

Beispiel Sei $b = 2$ und $a_0 = 1$, dann ist:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12} = 1.416\ldots$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} = 1.41425\ldots$$

$$\vdots$$

Satz 15 Für jeden Startwert a_0 konvergiert die durch **Gleichung (2.4)** definierte Folge (a_n) gegen $\sqrt{b}$.

Beweis

i. Es gilt $a_n > 0\,\forall n \in \mathbb{N}$ Induktion nach n

ii. Es gilt $a_n \geq \sqrt{b}\,\forall n \geq 1$, denn

$$\begin{aligned} a_n^2 - b &\overset{(\ 2.4)}{=} \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}\right)^2 - b \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 2b + \frac{b^2}{a_{n-1}^2}\right) - b \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{b}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

also $a_n^2 \geq b$ und damit $\underbrace{a_n}_{>0} \geq \sqrt{b}$.

iii. $a_{n+1} \leq a_n\,\forall n \geq 1$, denn:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &\overset{(\ 2.4)}{=} a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2\underbrace{a_n}_{>0 \text{ n. i}}}\underbrace{(a_n^2 - b)}_{\geq 0 \text{ n. ii}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

iv. Nach ii und iii ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge, und damit folgt (a_n) konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \sqrt{b} > 0$.

v. Bestimmung von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

$$\begin{aligned}
a &:= \lim_{n\to\infty} a_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}\right) \\
&\overset{\text{Regeln}}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}_{\text{existiert}} + \frac{b}{\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{\text{existiert}}}\right)}_{\text{existiert da } (a_n) \text{ konvergent}} \\
&= \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right) \\
\Rightarrow a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right) \\
\Rightarrow a^2 &= b
\end{aligned}$$

das heißt $a = \sqrt{b}$. In dem mit Regeln überschriebenen Gleichheitsschritt erlaubt die Konvergenz diesen.

□

§ 1.2.1.8 - Cauchy Folgen

Definition 16 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \, \forall n,m \geq N$$

Mit anderen Worten:

$$\underbrace{\text{Hinreichend späte}}_{\exists N\in\mathbb{N}} \text{ Folgenglieder haben } \underbrace{\text{beliebig}}_{\forall\varepsilon>0:} \underbrace{\text{kleinen Abstand}}_{|a_n - a_m| < 0 \, \forall n,m \geq N}$$

Frage: Was hat diese Bedingung mit Konvergenz zu tun?

Beobachtungen:

1. (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

   Beweis Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$
   Es gilt:

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\
&\leq |a_n - a| + |a - a_m| \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

   Da (a_n) konvergent ist gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N : \; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dann gilt für $n,m \geq N$ in Verbindung mit **Gleichung (2.5)**$\lneq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

2. (a_n) Cauchy-Folge $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt

   Beweis Sei (a_n) Cauchy-Folge, dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1\, \forall n,m \geq N$$

   Dann gilt für $n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(a_n - a_N) + a_N| \\ &\leq |a_n - a_N| + |a_N| \\ &< 1 + |a_N| \end{aligned}$$

   Also gilt für $n \geq 1$:

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

□

§ 1.2.1.9 - Das Cauchy-Kriterium

Satz 16 Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Beweis Sei (a_n) eine Cauchy-Folge nach (2) folgt dann, das (a_n) beschränkt ist und mit Bolzano-Weierstraß gilt (a_n) hat dann einen Häufungswert h.
Man zeigt nun: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h$.
Sei $\varepsilon > 0$ so $\exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \geq N : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\exists m \geq N : \; |a_m - h| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Dann gilt auch für $n,m \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n - h| &= |(a_n - a_m) + (a_m - h)| \\ &\leq |a_n - a_m| + |a_m - h| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

1.2.1.9.1 Ausblick
Man hat das Cauchy-Kriterium letztlich aus dem Supremumsprinzip (V) abgeleitet.

(V) $\Rightarrow$ Satz über monotone & beschränkte Folgen $\Rightarrow$ Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ Cauchy-Kriterium

Aber es gilt sogar

$$\text{Intervallschachtelungsprinzip} \quad \Leftrightarrow \quad (V) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Cauchy-Kriterium}$$

Diese drei Aussagen sind äquivalent und man könnte die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ anstelle von (V) durch das Cauchy-Kriterium oder durch das Intervallschachtelungsprinzip ausdrücken.

§ 1.2.1.10 - Bestimmte Divergenz

Beispiel $a_n = n^2 + 1$
$b_n = (-1)^n$
$c_n = (-1)^n \cdot (n^2 + 1)$
alle drei Folgen sind divergent, das heißt nicht konvergent, aber bei (a_n) liegt eine bestimmte Divergenz vor, denn sie wächst über alle Schranken.

Definition 17 Eine Folge (a_n) heißt bestimmt divergent gegen ∞, falls zu jedem $\mathcal{G} \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n \geq \mathcal{G} \quad \forall n \geq N$$

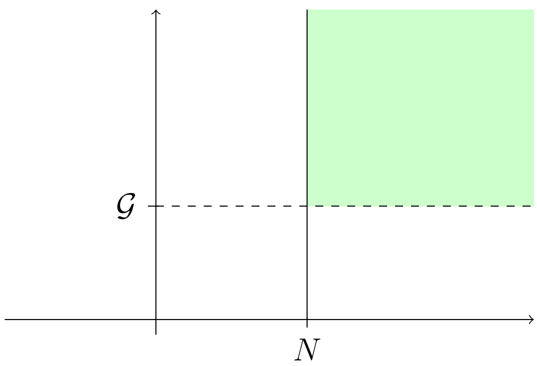

Figure 2.5 Bestimmte Divergenz

Satz 17 Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \to \infty$, dann gilt mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Beweis Zu $\mathcal{G} = 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq 1 \, \forall n \geq N$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gilt: $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n}$ für $n \geq N$.
Zu $\mathcal{G} = \frac{2}{\varepsilon}$ existiert nun ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq \frac{2}{\varepsilon} \, \forall n \geq N'$, damit gilt dann für $n \geq N$ und $n \geq N'$

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Dies ist möglich, da alle Teile Positiv sind. $\square$

Satz 18 Sei (a_n) eien Folge mit

$a_n > 0 \, \forall n$ und

$a_n \to 0$,

dann gilt

$$\frac{1}{a_n} \to \infty$$

Beweis Sei $\mathcal{G} \in \mathbb{R}$ gegeben, Œ dürfen wir annehmen das $\mathcal{G} > 0$ ist, dann gilt nach Vorraussetzung $a_n \to 0$, also existiert zu $\varepsilon := \frac{1}{\mathcal{G}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \overset{a_n > 0}{=\!=\!=} |a_n - 0| < \varepsilon \,\text{für}\, n \geq N$$

Damit gilt dann für $n \geq N$

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = \mathcal{G}$$

$\square$

Analog können Definitionen und Sätze für $a_n \to -\infty$ formuliert werden. Dies bleibt zur Übung offen.

§ 1.2.2 - Unendliche Reihen

Frage:

1. Wie kann man "unendliche Summen"

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

auffassen?

Beispiel $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

2. Kann man mit diesen "unendlichen Summen" rechnen?

Beispiel

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots \\ &\overset{\text{Assoziativ}}{=\!=\!=\!=} 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \ldots \\ &\overset{?}{=} 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - \ldots \\ &\overset{?}{=} 1 \end{aligned}$$

Diese Behauptung beruht auf Guido Grandis und ist als die Schöpfung der Welt aus dem Nichts bekannt.

§ 1.2.2.1 - Der Begriff der "Reihe"

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann heißt

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$$

die n-te Partialsumme von (a_n). Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt unendliche Reihe mit den Gliedern a_n. Man schreibt auch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 0} = \sum a_n := (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Beispiel $a_n := \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum \frac{1}{n} = (s_n)$$

Definition 18 Die Reihe $\sum a_n$ heißt konvergent gegen s, beziehungsweise divergent, falls (s_n) konvergent gegen s beziehungsweise divergent ist.

<u>Vorsicht:</u> Das Symbol $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ hat zwei Bedeutungen:

1. die Folge (s_n) und
2. ihrem Grenzwert, falls dieser als Wert der Reihe existiert.

§ 1.2.2.2 - Die geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$, so betrachtet man die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Diese Reihe heißt die geometrische Reihe. Die Partialsummen sind dann:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Es gilt daher:

a. $|q| < 1 \Rightarrow \sum q^n$ ist konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$,

b. $|q| > 1 \Rightarrow \sum q^n$ ist divergent,

Beweis

a. ist klar.

b. siehe zum Beweis das Nachfolgerkriterium.

$\square$

Beispiel

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{q}^{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{9}{8}\right)}_{q}^{n}$ ist divergent.

Bemerkung 8 b besagt also: Die Folge der Partialsaummen $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{9}{8}\right)^n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ ist divergent.
Weiterhin besagt **a** das $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist und der Grenzwert sich als 2 errechnet.

§ 1.2.2.3 - Teleskopreihen

Beispiel $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, ist dies Reihe konvergent oder divergent?
Es gilt: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ und daher folgt

$$\begin{aligned}
s_n &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1
\end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent und hat den (Reihen-)Wert 1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent und damit auch (s_n). Weiterhin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ und dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

ist konvergent, das heißt (s_n) ist konvergent und mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ gilt dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

§ 1.2.2.4 - Beobachtungen zu Reihen

Sei $\sum a_n$ eine Reihe und $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

1. Cauchy-Kriterium

$$\begin{aligned}\sum a_n \text{ konvergent} &\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (s_n) \text{ konvergent}\\ &\underset{\text{Kriterium}}{\overset{\text{Cauchy}}{\Longleftrightarrow}} \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \, |s_n - s_m| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \, \forall n > m \geq N : \underbrace{\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right|}_{=|s_n - s_m|} < \varepsilon\end{aligned}$$

2. Nullfolgen-Kriterium

$$\sum a_n \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \to 0$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$
$\underset{\text{Kriterium}}{\overset{\text{Cauchy}}{\Longrightarrow}} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \, |a_n| = \left|\sum\limits_{i=n}^{n} a_i\right| < \varepsilon.$ ☐

3. Beschränktheits-Kriterium Es sei $a_n \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\sum a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow (s_n) \text{ nach oben beschränkt.}$$

Beweis

$\Rightarrow$ Aus konvergent folgt beschränkt, und damit is diese Richtung klar.

$\Leftarrow$ $a_n > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (s_n)$ monoton steigend, da $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}$ und nach oben beschränkt.

☐

§ 1.2.2.5 - Die harmonische Reihe

<u>Vorsicht:</u>Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, obwohl $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist!

Beweis Sei $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ und wir betrachten die Teilfolge: $(s_{2^k})_{k\geq 1}$ von (s_n). Es ist dann

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \\ &= 1 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\ \vdots \\ &+ \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}} \\ &\geq k \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also ist (s_{2^k}) nicht nach oben beschränkt und somit folgt für diese Teilfolge die Divergenz, aber damit ist auch (s_n) divergent. □

Betrachte nummerische Werte für die harmonische Reihe:

n	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = s_n$
100	5.18737...
200	5.87803...
1000	7.48547...
10000	9.7876...
10^8	18.59785...
10^{12}	28.2082...

Table 2.1 Nummerische Werte der harmonischen Reihe

§ 1.2.2.6 - Das Leibnitz-Kriterium

Satz 19 Sei (a_n) monoton fallende Nullfolge, zum Beispiel $\frac{1}{n}$, dann ist die alternierende Reihe $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ konvergent.

Beweis Betrachte als Beispiel: $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}$ ist konvergent.
Als Idee kommt hier das Cauchy-Kriterium, sei also $\varepsilon > 0$, so gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N: \; a_n = \underbrace{|a_n|}_{\geq 0} < \varepsilon \text{ ist Nullfolge}$$

also ist für $n \geq m \geq N$:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=m}^{n}(-1)^i a_i\right| &= \left|a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - \ldots + (-1)^{n-m}a_n\right| \\ &\overset{a_m \text{ mon. fallend}}{\leq} |a_m| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

§ 1.2.2.7 - Absolute Konvergenz

Definition 19 $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum |a_n|$ konvergent ist.

Bemerkung 9 Aus $\sum a_n$ absolut konvergent folgt das $\sum a_n$ konvergent ist.

Beweis Sei $\sum a_n$ absolut konvergent, das heißt $\sum |a_n|$ ist konvergent, dann gilt für $n \geq m$:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$$

nach der Dreiecks-Ungleichung. Wendet man nun das Cauchy-Kriterium an, so folgt die Behauptung. □

Vorsicht: $\sum a_n$ konvergent $\overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ absolut konvergent. Als Beispiel sei hier die Reihe $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ genannt.

Bemerkung 10 Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, so gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Beweis durch die "verallgemeinerte Dreiecks-Ungleichung"
Es gilt für $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|$$

durch die Dreiecksungleichung und Induktion nach N folgt:

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|$$

und dies liefert die Behauptung. □

§ 1.2.2.8 - Majoranten Kriterium

Das Majoranten-Kriterium wird auch als das Vergleichskriterium bezeichnet, man sieht in kürze auch warum. Seien nun $\sum a_n$ und $\sum b_n$ zwei Reihen

Satz 20 Aus

$$\left.\begin{array}{c}\sum b_n \text{ absolut konvergent} \\ |a_n| \leq |b_n| \ \forall n\end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ absolut konvergent}$$

Man nennt $\sum b_n$ in diesem Fall eine konvergente Majorante von $\sum a_n$.

Beweis

$$\begin{aligned}\sum b_n \text{ absolut konvergent} &\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \sum |b_n| \text{ konvergent} \\ &\overset{3}{\Longleftrightarrow} (s_n) := \left(\sum_{k=0}^{n}|b_k|\right) \text{ beschränkt} \\ &\overset{\text{Vor.}}{\Longleftrightarrow} (t_n) := \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right) \text{ beschränkt} \\ &\overset{3}{\Longleftrightarrow} (t_n) \text{ konvergent} \\ &\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \sum a_k \text{ absolut konvergent}\end{aligned}$$

□

Beispiel $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Problem: Wir haben keine explizite Formel für die Partialsummen, aber

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \\ \sum \frac{2}{n(n+1)} \text{ absolut konvergent}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Majoranten-Kriterium}} \sum \frac{1}{n^2} \text{ absolut konvergent.}$$

Allgemeiner läßt sich sagen:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ ist konvergent für alle $k \geq 2$, denn $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$ für $k \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$. Die allgemeine Behauptung folgt dann mit dem Majoranten-Kriterium

§ 1.2.2.9 - Das Quotienten-Kriterium

Satz 21 Falls ein q mit $0 \leq q < 1$ existiert und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt, dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Beweis

$$\left.\begin{array}{rr} |a_n| \leq & q \cdot |a_{n-1}| \\ |a_{n-1}| \leq & q \cdot |a_{n-2}| \\ \vdots & \\ |a_2| \leq & q \cdot |a_1| \\ |a_1| \leq & q \cdot |a_0| \end{array}\right\} \Rightarrow |a_n| \leq q^n \underbrace{|a_0|}_{=\text{const.}}$$

also ist $\sum q^n |a_0|$ konvergente Majorante von $\sum a_n$ und somit folgt mit dem Majoranten-Kriterium die absolute Konvergenz für $\sum a_n$. $\square$

Beispiel $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1+\frac{1}{n})^2 \\ &\stackrel{n\geq 3}{\leq} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})^2 \\ &= \frac{8}{9} =: 1 < 1 \end{aligned}$$

Nach dem Quotienten-Kriterium ist damit $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent und damit auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

<u>Vorsicht:</u> Für die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ gilt: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$ demnach ist die divergent, da kein q gefunden werden kann!

§ 1.2.2.10 - Das Wurzel-Kriterium

```
n,z = var('n','z');
p = 0.02;
(1+p/2)**(2)
(1+p/3)**(3)
(1+p/12)**(12)
a(n) = (1+p/n)**(n)
```

```
b(n) = (1+z/n)**(n)
limit(a(n),n=infinity)
limit(b(n),n=infinity)
for n in range(1,20,1):
    (1+p/n)**(n)
```

Kapitel A

Index

Kapitel B

References

Wikipedia (2010). Gaußsche summenformel. .