

Компьютерная математика (Системы компьютерной алгебры)

Компьютерная математика – это совокупность методов и средств, обеспечивающих максимально комфортную и быструю подготовку алгоритмов и программ для решения **математических задач** любой сложности, при этом в подавляющем большинстве случаев с высокой степенью визуализации всех этапов решения.

В настоящее время компьютерные математические системы можно (достаточно условно) подразделить на 7 основных классов:

Системы для численных расчетов

1. *Табличные процессоры*
2. *Матричные системы*
3. *Системы для статистических расчетов*
4. *Системы для специальных расчетов*
5. *Системы для аналитических расчетов (компьютерной алгебры)*
6. *Универсальные системы*

По преобладающему типу вычислений системы компьютерной математики (СКМ) принято делить на два класса: инженерные пакеты и системы компьютерной алгебры. Инженерные пакеты созданы для эффективного выполнения громоздких численных расчетов, а системы компьютерной алгебры ориентированы прежде всего на символьные преобразования математических объектов и аналитическое решение связанных с ними задач.

Система компьютерной алгебры (СКА, англ. computer algebra system, CAS) — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме. В системах компьютерной алгебры используются следующие разделы математики: символьное интегрирование, гипергеометрическое суммирование, пределы, факторизация полиномов, наибольший общий делитель, метод Гаусса, диофантовы уравнения, производные от элементарных и специальных функций и др.).

Основное назначение систем компьютерной алгебры (СКА) – работа с математическими выражениями в символьной форме. К базовым типам данных СКА относятся числа и математические выражения. СКА работают следующим образом: – математические объекты (алгебраические выражения, ряды, уравнения, векторы, матрицы

и др.) и указания, что с ними делать, задаются пользователем на входном языке системы в виде символьных выражений; – интерпретатор анализирует и переводит символьные выражения во внутреннее представление; – символьный процессор системы выполняет требуемые преобразования или вычисления и выдает ответ в математической нотации.

Что касается классификации систем компьютерной алгебры, то по критерию функционального назначения часто выделяют СКА общего назначения (универсальные) и специализированные. Наиболее известные системы первой группы: Derive, Mathematica, Maple, Macsyma и ее потомок Maxima, Scratchpad и ее потомок Axiom, Reduce, MuPAD, MathCAD, MATHLAB, Sage, Yacas, Scientific WorkPlace, Kalamaris. Эти системы позволяют работать в широком диапазоне предметных областей. Системы для решения задач одного или нескольких смежных разделов символьной математики – это специализированные СКА. Примерами таких систем являются: GAP (алгебра групп), Cadabra (тензорная алгебра), KANT (алгебра и теория чисел) и др.

Основные функциональные возможности СКА Системы компьютерной алгебры позволяют реализовывать с использованием компьютера аналитические и численные методы решения задач, представляя результаты в математической нотации, обеспечивают графическую визуализацию, оформление результатов и подготовку к изданию. Используя СКА, можно выполнять в аналитической форме:

- упрощение выражений до меньшего размера или приведение к стандартному виду,
 - подстановки символьных и численных значений в выражения,
 - изменение вида выражений: раскрытие произведений и степеней, частичная и полная факторизация (разложение на множители),
 - разложение на простые дроби, удовлетворение ограничений, запись тригонометрических функций через экспоненты, преобразование логических выражений,
 - нахождение пределов функций и последовательностей,
 - операции с рядами (суммирование, умножение, суперпозиция),
 - дифференцирование в частных и полных производных,
 - нахождение неопределённых и определённых интегралов (символьное интегрирование),
- Лекция № 1. Общие сведения о системах компьютерной алгебры 5
- анализ функций на непрерывность,
 - поиск экстремумов функций и асимптот,

- символьное решение задач оптимизации: нахождение глобальных экстремумов, условных экстремумов и т. д.,
- решение линейных и нелинейных уравнений,
- алгебраическое (нечисленное) решение дифференциальных и конечно-разностных уравнений, • интегральные преобразования,
- прямое и обратное быстрое преобразование Фурье,
- интерполяция, экстраполяция и аппроксимация,
- операции с векторами,
- матричные операции: обращение, факторизация, решение спектральных задач,
- статистические вычисления,
- машинное доказательство теорем.

Некоторые СКА также обеспечивают:

- создание и редактирование графики (создание компьютерных изображений, а также обработку сигналов и анализ изображений),
- синтез звука.

Обзор систем компьютерной алгебры.

1. Maple

Является продуктом компании Waterloo Maple Software, Inc. (<http://www.maplesoft.com/>), которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Maple позволяет выполнять как численные, так и аналитические расчеты с возможностью редактирования текста и формул на рабочем листе. Благодаря представлению формул в полиграфическом формате, великолепной двух- и трехмерной графике и анимации Maple является одновременно и мощным научным графическим редактором. Простой и эффективный язык-интерпретатор, открытая архитектура, возможность преобразования кодов Maple в коды C делает его очень эффективным средством создания новых алгоритмов. Обладает интуитивно понятным интерфейсом, простыми правилами работы и широким функционалом.

2. Система Mathematica — компании Wolfram Research, Inc.

(<http://www.wolfram.com/>) имеет чрезвычайно широкий набор средств, переводящих сложные математические алгоритмы в программы. По сути дела, все алгоритмы,

содержащиеся в курсе высшей математики технического вуза, заложены в память компьютерной системы Mathematica. В некоторых странах (например, в США) система высшего образования тесно связана с этим продуктом. Огромное преимущество системы Mathematica состоит в том, что ее операторы и способы записи алгоритмов просты и естественны. Mathematica имеет мощный графический пакет, с помощью которого можно строить графики очень сложных функций одной и двух переменных. Главное преимущество Mathematica, делающее ее бесспорным лидером среди других систем высокого уровня, состоит в том, что эта система получила сегодня очень широкое распространение во всем мире, охватив огромные области применения в научных и инженерных исследованиях, а также в сфере образования.

3. Mathcad — система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается лёгкостью использования и применения для коллективной работы. Mathcad был задуман и первоначально написан Алленом Раздовом из Массачусетского технологического института (MIT), соучредителем компании Mathsoft, которая с 2006 года является частью корпорации PTC (Parametric Technology Corporation). Mathcad имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя. Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов. Некоторые из математических возможностей Mathcad (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры Maple (МКМ, Maple Kernel Mathsoft). Начиная с 14 версии — использует символьное ядро MuPAD (<https://en.wikipedia.org/wiki/MuPAD>). Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования. При создании документов-приложений используется принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — «что видишь, то и получаешь»). Несмотря на то, что эта программа, в основном, ориентирована на пользователей, не являющихся программистами, Mathcad также используется в сложных проектах, чтобы визуализировать результаты математического моделирования путём использования распределённых вычислений и традиционных языков программирования. Также Mathcad часто используется в крупных инженерных проектах, где большое значение имеет трассируемость и соответствие стандартам.

4. Maxima

Написана на языке Common Lisp. Произошла от системы Macsyma, разрабатывавшейся в MIT с 1968 по 1982 годы в рамках проекта Project MAC, финансируемого Министерством энергетики США (DOE) и другими государственными организациями. Профессор Уильям Шелтер (англ. Bill Schelter) из Техасского университета в Остине поддерживал один из вариантов системы, известный как DOE Macsyma, с 1982 года до самой своей смерти в 2001 году. В 1998 году Шелтер получил от Министерства энергетики разрешение опубликовать исходный код DOE Macsyma под лицензией GPL, и в 2000 году он создал проект на SourceForge.net (<http://maxima.sourceforge.net/>) для поддержания и дальнейшего развития DOE Macsyma под именем Maxima. Имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высочайшей степенью переносимости: может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных, и вплоть до самых мощных. Для системы построено несколько графических интерфейсов пользователя и надстроек: XMaxima (включен в поставку во многих ОС), wxMaxima (основан на wxWidgets; включается в поставку для ОС Windows) и других, а также может работать в режиме командной строки (используя псевдографику). Для редактирования научных текстов в Maxima может использоваться программа texmacs, которая позволяет экспортировать документы в ряд популярных форматов, включая TeX/LaTeX и HTML/MathML. Благодаря открытому коду системы появились производные решения, например, на основе Maxima сделана программа Stack, предназначенная для автоматизированной проверки] правильности математических выражений, применяемая, в частности, для компьютерной проверки ответов обучающихся математике.

5. Axiom

Свободная система компьютерной алгебры. Она состоит из среды интерпретатора, компилятора и библиотеки, описывающей строгую, математически правильную иерархию типов. Разработка системы была начата в 1971 году группой исследователей IBM под руководством Ричарда Дженкса (Richard Dimick Jenks). Изначально система называлась Scratchpad. Первоначально проект рассматривался как исследовательская платформа для разработки новых идей в вычислительной

математике. В 90-х система была продана компании Numerical Algorithms Group (NAG), получила название Axiom и стала коммерческим продуктом. Но по ряду причин система не получила коммерческого успеха и была отозвана с рынка в октябре 2001. NAG решила сделать Axiom свободным программным обеспечением и открыла исходные коды под модифицированной лицензией BSD. В 2007 у Axiom появились две ветки (два форка) с открытым исходным кодом: OpenAxiom и FriCAS. Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.

6. Reduce — бесплатная система компьютерной алгебры общего назначения, имеющая расширенные возможности для применения в физике. Разработку начал в 1960-е годы Энтони Хёрн (Anthony C. Hearn), позднее к созданию системы присоединились и другие учёные. Система написана целиком на специально созданном для неё языке Portable Standard Lisp — диалекте Лиспа, включающим, в дополнении к языку со стандартным скобочным лисп-синтаксисом, специальный язык RSL с алголоподобным синтаксисом. RSL используется как основа для пользовательского языка системы. С декабря 2008 года Reduce стал доступен бесплатно как открытое программное обеспечение под видоизменённой лицензией BSD license на сайте SourceForge, до этого пакет стоил 695 долларов.

Reduce имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высокой степенью переносимости: она может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных компьютеров, вплоть до самых мощных. Для редактирования научных текстов в Reduce может использоваться программа texmacs, что позволяет экспортировать документы в ряд популярных форматов, включая TeX (LaTeX) и HTML (MathML). Доступна на различных платформах Unix, Linux, Microsoft Windows, Apple Macintosh, iOS и Android. Почти все эти реализации основаны на Portable Standard Lisp или Codemist Standard Lisp. Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.

Список литературы

1. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2001. 1296 с.
2. Л. В. Сардак Компьютерная математика. Учебное пособие для вузов. - М.: Горячая Линия - Телеком, 2016.
3. Титов К.В. Компьютерная математика. Учебное пособие. - М.: Риор, 2016.
4. Классификация средств компьютерной математики // neudoff.net URL: <https://neudoff.net/info/matematika/klassifikaciya-sredstv-kompyuternoj-matematiki/> (дата обращения: 5.02.2021).
5. Компьютерная математика // pereplet.ru URL: <http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/1161.html> (дата обращения: 5.02.2021).
6. Основные понятия и средства использования математических пакетов // studfile.net URL: <https://studfile.net/preview/3529583/> (дата обращения: 6.02.2021).
7. Современные системы компьютерной математики // compress.ru URL: <https://compress.ru/article.aspx?id=12530> (дата обращения: 6.02.2021).
8. List of computer algebra systems // en.wikipedia.org URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems (дата обращения: 6.02.2021).