Typst における定理・法則の記述

1. 微分積分学

極限の基本性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$、$\lim_{n\to\infty} b_n = b$とする。

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$$

特に、kが定数のとき

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = ka$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b_n, b \neq 0)$$

$a_n \leq b_n$ならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

合成関数の微分法

関数$y = f(x)$が区間Iで微分可能、その値域$f(I)$で$z = g(y)$が微分可能ならば、
合成関数$z = g(f(x))$はIで微分可能で、

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(f(x))f'(x)$$

基本的な関数の不定積分(抜粋)

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x$$

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a}$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \log|x|$$

$$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

定積分の存在

$f(x)$が有界閉区間$[a, b]$上で連続であれば、

$$I = \lim_{|\Delta \to 0|} S(\Delta) = \lim_{|\Delta \to 0|} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

が存在する(Iは$[a, b]$の分割の仕方、ξ_iのとり方によらない)。

合成関数の微分

関数$z = f(x, y)$が全微分可能で、$x = \varphi(t), y = \psi(t)$が$t$について微分可能ならば、合成関数$z = f(\varphi(t), \psi(t))$は$t$について微分可能で、 次式が成り立つ。

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

ラグランジュの乗数法

$f(x,y)$、$g(x,y)$はC^1級とする。条件$g(x,y)=0$のもとで関数$z=f(x,y)$が$(x,y)=(a,b)$で極値を取り、$g_{x(a,b)}$または$g_{y(a,b)}$が 0 でないとする。このとき、ある定数λが存在し、次式が成り立つ。

$$\begin{cases} f_{x(a,b)} - \lambda g_{x(a,b)} = 0 \\ f_{y(a,b)} - \lambda g_{y(a,b)} = 0 \\ g(a,b) = 0 \end{cases}$$

2. 線形代数学

行列の定義

(m,n)型の行列、$m \times n$行列とは、$m \times n$個の数の配列であり、記号で

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と表される。a_{ij}を行列の(i,j)成分という。

ベクトルの例

m次元列ベクトル:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

n次元行ベクトル:

$$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$$

零ベクトル: 成分がすべて0のベクトルで、記号で$\mathbf{0}$と表す。

ベクトル空間

すべてのn次元実数ベクトルxの集合をn次元ベクトル空間といい、記号で$\boldsymbol{R}^n$と表す。

スカラー倍に関する性質:

$$\boldsymbol{x} = [x_i] \in \boldsymbol{R}^n, a \in \boldsymbol{R}$$

のとき

$$a\boldsymbol{x} = [ax_i] \in \boldsymbol{R}^n$$

和に関する性質:

$$\boldsymbol{x} = [x_i], \boldsymbol{y} = [y_i] \in \boldsymbol{R}^n$$

のとき

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = [x_i + y_i] \in \boldsymbol{R}^n$$