
PHQ030 - Résumé du module 1

Les oscillations

Jérôme Bourassa

jerome.bourassa@usherbrooke.ca

1 Mouvement harmonique simple

Un mouvement harmonique consiste en un **simple va-et-vient autour d'une position d'équilibre**. Le temps requis pour que le mouvement d'oscillation se répète est appelé la **période** T et se mesure en secondes.

On définit alors la **fréquence** f du mouvement comme

$$f = \frac{1}{T}, \quad (1)$$

correspondant au nombre d'oscillations effectuées durant 1 seconde complète.
Dans le système d'unités international, la fréquence s'exprime en **hertz** :

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (2)$$

On définit également la **pulsation** (ou **fréquence angulaire**) du mouvement comme étant

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (3)$$

Dans le système d'unités international, la pulsation s'exprime en radians par seconde (rad/s).

• • • • •

Si le mouvement harmonique se fait autour de la position d'équilibre x_e , avec l'amplitude x_m , la position de l'objet oscillant évolue suivant la relation suivante :

$$x(t) = x_e + x_m \cos(\omega t + \phi), \quad (4)$$

Un tel mouvement harmonique est représenté graphiquement dans les [figures 1.3 et 1.4 du manuel](#).

L'amplitude x_m est une quantité définie positive ($x_m > 0$) qui correspond à l'étendue du mouvement de part et d'autre de l'équilibre. **L'amplitude est déterminée uniquement par le travail mécanique extérieur effectué sur le système afin de le préparer dans son état initial.**

La constante ϕ est couramment appelé le **déphasage** du mouvement. **Sa valeur est déterminée entièrement par les conditions de position x et de vitesse v du mouvement au temps $t = 0$.** Autrement dit, la constante ϕ est ajustée pour tenir compte du décalage entre le moment où le système a été démarré, et le moment où un observateur a commencé à observer la position et la vitesse de l'objet oscillant.

La pulsation (ou fréquence angulaire) ω est entièrement déterminée par les caractéristiques mécaniques du système, en particulier par son inertie (par exemple, sa masse) et l'intensité de la force qui tente de ramener le système vers sa position d'équilibre. C'est ainsi dire qu'une fois que le système est construit et assemblé mécaniquement, sa fréquence d'oscillation est alors déterminée et fixe.

Afin de bien repérer à quel stade du mouvement un objet oscillant se situe, il faut absolument déterminer à la fois sa position et sa vitesse. En effet, comme le mouvement harmonique simple est un mouvement de va-et-vient, un objet passera systématiquement à 2 reprises au même endroit, avec la même vitesse, mais dans des directions opposées.

Comme on le verra, la position et la vitesse d'un objet en mouvement harmonique simple sont directement reliées entre-elles à travers l'argument qui se trouve à l'intérieur de la fonction trigonométrique décrivant la position, soit $\omega t + \phi$.

Dans le jargon commun, cet argument souvent appelée **la phase du mouvement** $\Phi(t) = \omega t + \phi$. Indiquée en radians, la phase $\Phi(t)$ permet à elle seule de repérer exactement à quel stade du mouvement d'oscillation l'objet se trouve à un temps t donné.

On peut noter qu'il est également possible de modifier le cosinus de l'expression précédente en un sinus en utilisant le fait que

$$\cos \theta = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \quad (5)$$

quel que soit l'angle θ . Cela revient simplement à ajouter $\pi/2$ au déphasage ϕ .

Il est fortement suggéré de prendre bonne note des identités trigonométriques de la p. 562 (Annexe E) du livre car elles seront maintes fois utilisées dans le cours.

Aussi, on pose très souvent la position d'équilibre comme étant la **position de référence** $x_e = 0$. L'oscillation se produit alors entre $\pm x_m$. On prendra en général cette convention par la suite.

•••••

Lors d'un mouvement harmonique, la **vitesse** de l'objet oscille également au cours du temps. On a en effet

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) = -v_m \sin(\omega t + \phi) , \quad (6)$$

où $v_m = \omega x_m$ est la vitesse maximale atteinte par l'objet durant son mouvement. La vitesse de l'objet s'annule aux extrema de l'oscillation ($x = \pm x_m$), lorsque l'objet est sur le point de changer de direction. Au contraire, elle est maximale (en valeur absolue) lorsque l'objet passe par la position d'équilibre ($x = x_e = 0$) autour de laquelle l'oscillation a lieu. On peut voir cela dans la [figure 1.7 du manuel](#).

•••••

Lors d'un mouvement harmonique, l'**accélération** de l'objet oscille également au cours du temps. On a en effet

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -a_m \cos(\omega t + \phi) , \quad (7)$$

où $a_m = \omega v_m = \omega^2 x_m$ est l'accélération maximale atteinte par l'objet durant son mouvement. L'accélération de l'objet s'annule lorsque l'objet passe par la position d'équilibre ($x = x_e = 0$) autour de laquelle l'oscillation a lieu. Au contraire, elle est maximale (en valeur absolue) aux extrema de l'oscillation ($x = \pm x_m$), lorsque l'objet est sur le point de changer de direction. On peut voir cela dans la [figure 1.7 du manuel](#).

•••••

Sachant que la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps, on peut utiliser l'expression précédente pour écrire directement l'**équation différentielle** dictant le mouvement harmonique simple :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t) . \quad (8)$$

•••••

En terminant, on notera au passage la procédure pour effectuer la dérivée d'une des fonctions ci-haut. Remarquons tout d'abord la forme algébrique de, par exemple, la position $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Avec la phase du mouvement $\Phi = \omega t + \phi$, la position s'exprime alors

$$x(t) = x_m \cos \Phi.$$

Ici l'objectif est de déterminer la vitesse $v_x(t) = dx/dt$. Or, on remarquera que le temps est 'caché' à l'intérieur de la phase, et en fait c'est la *seule* variable qui dépend du temps. Dans cette situation, on peut alors utiliser la notion de *dérivée en chaîne* (voir Annexe E, p. 563, E. 30) qui nous permet de calculer la vitesse selon

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{d\Phi} \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Ainsi, on calcule d'abord la dérivée de la fonction trigonométrique toute seule, et on multiplie le résultat par la dérivée de l'argument. On aura dans notre exemple ici :

$$\frac{dx(t)}{d\Phi} = \frac{dx_m \cos \Phi}{d\Phi} = x_m \frac{d \cos \Phi}{d\Phi} = -x_m \sin \Phi = -x_m \sin(\omega t + \phi),$$

alors que

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d(\omega t + \phi)}{dt} = \frac{d(\omega t)}{dt} + \frac{d\phi}{dt} = \omega.$$

En multipliant les deux dérivées, on trouve l'expression de la vitesse

$$v_x(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi),$$

telle qu'énoncée plus haut.

La démarche précédent s'applique à toute autre fonction, telle qu'une exponentielle par exemple. Également, on ré-appliquera la méthode pour déterminer l'accélération $a_x(t)$ à partir de la vitesse $v_x(t)$.

2 Énergies mises en jeu dans le mouvement harmonique simple

•••••

L'**énergie potentielle élastique** liée à un système masse-ressort est donnée par

$$U = \frac{1}{2} kx^2(t) = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \quad (9)$$

Elle est maximale lorsque l'objet se trouve aux extrema de l'oscillation ($x = \pm x_m$) et s'annule au niveau de la position d'équilibre ($x = x_e = 0$) car le ressort n'est alors ni comprimé, ni étiré. Cette énergie vient en effet de l'énergie emmagasinée dans la déformation du ressort par rapport à sa forme à l'équilibre, que ce dernier soit comprimé ou étiré.

•••••

L'**énergie cinétique** du système masse-ressort est donnée par

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (10)$$

Elle est maximale lorsque l'objet se trouve au niveau de la position d'équilibre ($x = x_e = 0$) et s'annule aux extrema de l'oscillation ($x = \pm x_m$) car l'objet est sur le point de changer de direction. En effet, cette énergie vient de la vitesse de l'objet oscillant, qui s'annule au moment où ce dernier change de direction.

•••••

Au cours d'un mouvement harmonique simple, il y a transformation entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique. En effet, comme toutes les forces mises en jeu sont **conservatives**, l'énergie totale du système est conservée. On voit cela en écrivant

$$E_{\text{méc}} = K + U = \frac{1}{2} k x_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] \quad (11)$$

et en utilisant le fait que $\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi = 1$ quel que soit la phase Φ du mouvement, d'où

$$E_{\text{méc}} = \frac{1}{2} k x_m^2. \quad (12)$$

Cette conservation de l'énergie est représentée graphiquement dans la [figure 1.17 du manuel](#).

L'énergie d'un système oscillant est proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement. Ceci implique que l'amplitude du mouvement est déterminée par le travail extérieur qui a été fait pour préparer le système à l'instant initial.

3 Système masse-ressort

Un système masse-ressort obéit à un **mouvement harmonique simple**. Sachant que la force de rappel d'un ressort est donnée par $F_x = -kx$, où k est la constante de rappel du ressort, la deuxième loi de Newton donne

$$ma_x = -kx, \quad (13)$$

où m est la masse de l'objet oscillant. L'équation différentielle dictant ce mouvement est donc

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t), \quad (14)$$

ce qui permet de définir sa pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (15)$$

Remarquez qu'elle ne dépend que de la rigidité du ressort et de la masse accrochée.

•••••

Si le système masse-ressort est **vertical** (selon la coordonnée y par exemple), la gravité doit être prise en compte. Cependant, *la gravité affecte uniquement la position d'équilibre*, mais rien d'autre. Un tel mouvement est donc toujours dicté par l'équation différentielle

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} y(t), \quad (16)$$

ce qui permet de définir

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (17)$$

, ce qui est exactement comme le système horizontal vu précédemment.

La position de la masse sera alors donnée par

$$y(t) = y_e + y_m \cos(\omega t + \phi), \quad (18)$$

où la position d'équilibre y_e est déterminée par l'étirement du ressort nécessaire afin d'équilibrer le poids de la masse accrochée, c'est-à-dire lorsque

$$-F_g + ky_e = 0.$$

4 Les pendules

•••••

La pulsation d'un **pendule simple** de longueur L soumis à la gravité g est donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (19)$$

On peut noter que cette pulsation (directement reliée à la période du mouvement) est complètement indépendante de la masse de l'objet !

Il est également important de noter que ce résultat est en fait obtenu dans l'approximation des petits angles, où $\sin \theta \simeq \theta$ et $\tan \theta \simeq \theta$. Sans cette approximation, la résolution complète du pendule simple est tout de suite beaucoup plus complexe.

•••••

Dans le cas d'un **pendule composé**, nous avons affaire à un objet quelconque (pas forcément ponctuel, comme dans le cas du pendule simple) de masse m . On peut caractériser cet objet par la distance h séparant son centre de masse du pivot du pendule et par son moment d'inertie I , donné par le théorème des axes parallèles (cours de mécanique) :

$$I = I_{\text{cm}} + mh^2, \quad (20)$$

le moment d'inertie I_{cm} pouvant être obtenu dans le [tableau C.2 de l'annexe C du manuel](#) pour différentes formes d'objet. La pulsation d'un pendule composé est alors

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}. \quad (21)$$

Cette formule est, encore une fois, obtenue dans le cadre de l'approximation des petits angles.

5 Les oscillations dans un circuit LC

•••••

Considérons le circuit de la [figure 1.23 du manuel](#), soit un circuit comprenant un condensateur de capacité C , initialement chargé avec la charge Q_m sur son armature positive ($-Q_m$ sur son armature négative), une bobine d'induction d'inductance L et un interrupteur qu'on ferme au temps $t = 0$. C'est l'**équivalent électrique** du système masse-ressort traditionnel.

Le condensateur peut commencer à se décharger dès que l'interrupteur est fermé, ce qui engendre du courant dans le circuit. Cependant, la bobine induit alors une f.é.m. tendant à s'opposer à la croissance du courant dans le circuit : le courant ne croît que graduellement. Lorsque l'oscillateur est complètement déchargé, le courant est maximal. Il va alors charger le condensateur à l'opposé de sa charge initiale. Cela se fait aussi graduellement parce que la décroissance du courant associée à la charge du condensateur force la bobine à induire une f.é.m. pour l'opposer. Le tout va recommencer en boucle à l'infini (s'il n'y a pas de résistance dans le circuit, ce qui n'est jamais le cas en pratique). Un de ces cycles est représenté dans la [figure 1.26 du manuel](#).

•••••

Ce circuit est équivalent à une masse m accroché à un ressort de raideur k et oscillant suivant l'axe des x . On peut considérer le tableau d'équivalence suivant :

Circuit	Équivalent mécanique
Q	x
$i = -\frac{dQ}{dt}$	$-v = -\frac{dx}{dt}$
L	m
$1/C$	k

L'équation différentielle finale ressemble en effet au résultat de la deuxième loi de Newton pour le système masse-ressort :

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{C} Q, \quad (22)$$

$$m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (23)$$

où a_x est l'accélération de la masse m suivant la direction x .

•••••

L'équation différentielle précédente pour le circuit électrique nous donne une **charge électrique oscillante au cours du temps**,

$$Q(t) = Q_m \cos(\omega t), \quad (24)$$

à la pulsation

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (25)$$

où f et T sont respectivement la fréquence et la période du mouvement oscillant. Le courant électrique oscille également au cours du temps :

$$i(t) = -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_m \sin(\omega t) = i_m \sin(\omega t), \quad (26)$$

où $i_m = \omega Q_m$.

•••••

L'énergie totale du circuit LC est conservée :

$$E_{\text{méc}} = U_C + U_L = \frac{Q_m^2}{2C}. \quad (27)$$

Cette conservation de l'énergie résulte de la conversion de l'énergie électrique du condensateur en l'énergie magnétique de la bobine au cours des oscillations du circuit.

6 Les oscillations amorties dans un circuit RLC

•••••

En ajoutant une résistance dans le circuit LC précédent, on obtient un circuit RLC . Dans ce cas, le circuit va conserver ses propriétés périodiques mais le courant va être progressivement dissipé par la résistance (l'énergie électrique va être progressivement dissipée sous forme d'énergie thermique). On dit alors que les oscillations de la charge électrique vont être **amorties**, ce qui signifie que leur amplitude va diminuer avec le temps.

Cela se traduit par le fait que la charge électrique s'écrive au cours du temps comme

$$Q(t) = Q_m e^{-Rt/(2L)} \cos(\omega_a t + \phi), \quad (28)$$

où la pulsation de l'oscillation amortie est

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} = \omega \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}, \quad (29)$$

avec la pulsation naturelle (non amortie) de l'oscillation $\omega_{na} = 1/\sqrt{LC}$.

•••••

L'amplitude des oscillations est contrôlée par l'enveloppe formée des courbes $\pm Q_m e^{-Rt/(2L)}$ apparaissant dans l'équation Eq. (28) et qui tendent vers zéro au cours du temps. Attention, la courbe négative est aussi pertinente que la courbe positive dans la relation Eq. (28) parce que le cosinus change régulièrement de signe au cours du temps.

•••••

L'équation Eq. (29) permet de mettre en évidence la résistance critique R_c où $\omega_a = 0$:

$$R_c = \sqrt{\frac{4L}{C}}. \quad (30)$$

Trois cas de figures peuvent se présenter :

- $R < R_c$: on obtient les oscillations amorties discutées juste avant, on parle de **régime sous-critique** ;
- $R = R_c$: le système arrive sans la moindre oscillation et le plus rapidement possible à l'état d'équilibre ($Q = 0$ et $i = 0$), on parle de **régime critique** ;
- $R > R_c$: le système arrive sans oscillation à l'état d'équilibre ($Q = 0$ et $i = 0$) en prenant plus de temps que dans le régime critique, on parle de **régime surcritique**.

7 Les oscillations amorties dans un système masse-ressort amorti

•••••

L'équivalent mécanique de ce circuit est le système masse-ressort amorti illustré dans la figure 1.27 du manuel. Ici, la dissipation de l'énergie provient d'une **force de frottement fluide** de la forme

$$\vec{f}_f = -b\vec{v}, \quad (31)$$

où le coefficient b est appelé le **coefficient de résistance** de l'objet. Il dépend de la forme de l'objet et de la viscosité du fluide et s'exprime en kg/s.

Cela se traduit par le fait que la position s'écrit au cours du temps comme

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega_a t + \phi), \quad (32)$$

où la pulsation de l'oscillation amortie est

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{4km}} = \omega_{na} \sqrt{1 - \frac{b^2}{4km}}, \quad (33)$$

avec la pulsation de l'oscillation non amortie vue précédemment, $\omega_{na} = \sqrt{k/m}$.

•••••

La figure 1.29 du manuel montre en quoi les oscillations sont amorties. En effet, l'amplitude des oscillations est contrôlée par l'enveloppe formée des courbes $\pm x_m e^{-bt/(2m)}$ apparaissant dans l'équation Eq. (32) et qui tendent vers zéro au cours du temps. Attention, la courbe négative est aussi pertinente que la courbe positive dans la relation Eq. (32) parce que le cosinus change régulièrement de signe au cours du temps.

•••••

L'équation Eq. (33) permet de mettre en évidence le coefficient de résistance critique b_c où $\omega_a = 0$:

$$b_c = \sqrt{4km}. \quad (34)$$

Trois cas de figures peuvent se présenter :

- $b < b_c$: on obtient les oscillations amorties discutées juste avant, on parle de **régime sous-critique** ;

- $b = b_c$: le système arrive sans la moindre oscillation et le plus rapidement possible à l'état d'équilibre ($x = 0$ et $v_x = 0$), on parle de **régime critique** ;
- $b > b_c$: le système arrive sans oscillation à l'état d'équilibre ($x = 0$ et $v_x = 0$) en prenant plus de temps que dans le régime critique, on parle de **régime surcritique**.

Les deux derniers régimes sont illustrés dans la [figure 1.31 du manuel](#).

8 Les oscillations forcées et la résonance

•••••

Un système forcé est un système d'oscillations amorties sur lequel on applique une **force extérieure oscillante**

$$F_{\text{ext}} = F_m \cos(\omega_{\text{ext}} t). \quad (35)$$

Une telle force peut provenir d'une paroi vibrante sur laquelle est accroché le ressort d'un système masse-ressort amorti ou d'une source alternative de force électromotrice (f.é.m.) dans un circuit électrique *RLC*.

Le mouvement oscillatoire s'établit désormais à la pulsation forcée ω_{ext} . Cependant, l'amplitude de ce mouvement dépend maintenant à la fois de la grandeur de la force F_m et de la pulsation ω_{ext} . En particulier, on parle de **résonance** lorsque l'amplitude du mouvement est maximale, ce qui se produit à la pulsation externe

$$\boxed{\omega_r \simeq \omega_0}, \quad (36)$$

où ω_0 est la **pulsation naturelle** du système, soit $\sqrt{k/m}$ pour un système masse-ressort forcé, ou $1/\sqrt{LC}$ pour un circuit *RLC* forcé.

L'amplitude maximale du mouvement oscillatoire est alors donnée par

$$\boxed{x_m = \frac{F_m}{b\omega_0}}. \quad (37)$$

9 Petite conclusion

Ce qu'il faut se rappeler, c'est qu'un mouvement harmonique est mathématiquement simple à décrire. Les mathématiques sont très générales et on se rend compte que plusieurs systèmes physiques simples (masse-ressort, pendule, circuit LC, etc.) sont décrits *exactement* par les mêmes équations. En effet, seules les symboles décrivant les variables oscillantes, ainsi que la fréquence ω , va dépendent de la réalisation. Donc, si on comprend bien un de ses systèmes, tous auront le même comportement avec des paramètres similaires.

Ainsi, on peut alors comprendre une foule d'expériences différentes, qui se ramènent à la même physique, tant et aussi longtemps qu'on sait ce qui correspond à la position et qu'on sait comment décrire ω .

Dans le reste du cours, on décrira une foule de phénomènes différents qui sont tous une conséquence des oscillations.
