Um breve passeio pelos Processos Estocásticos e suas aplicações

IX Semana de Estatística – UFF
26 de outubro de 2017

Nei Carlos dos Santos Rocha – IM-UFRJ

Natureza dos Processos Estocásticos

- Em muitas situações estamos interessados na descrição da dinâmica de variáveis aleatórias ao longo do tempo.

- O estudo sobre as estruturas de variáveis aleatórias indexadas no tempo é o objeto principal dos Processos Estocásticos.

O que é um Processo Estocástico?

Um processo estocástico é uma coleção infinita de variáveis aleatórias.

Interpretação

- X_t representa o estado de um sistema no tempo t.
- Se $t \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$, o processo é dito a **tempo discreto**. Se $t \in T = [0, \infty)$, o processo é dito a **tempo contínuo**.
- $X_t \in S$, com S denominado o **espaço de estados** do processo.

O que é um Processo Estocástico?

Em resumo:

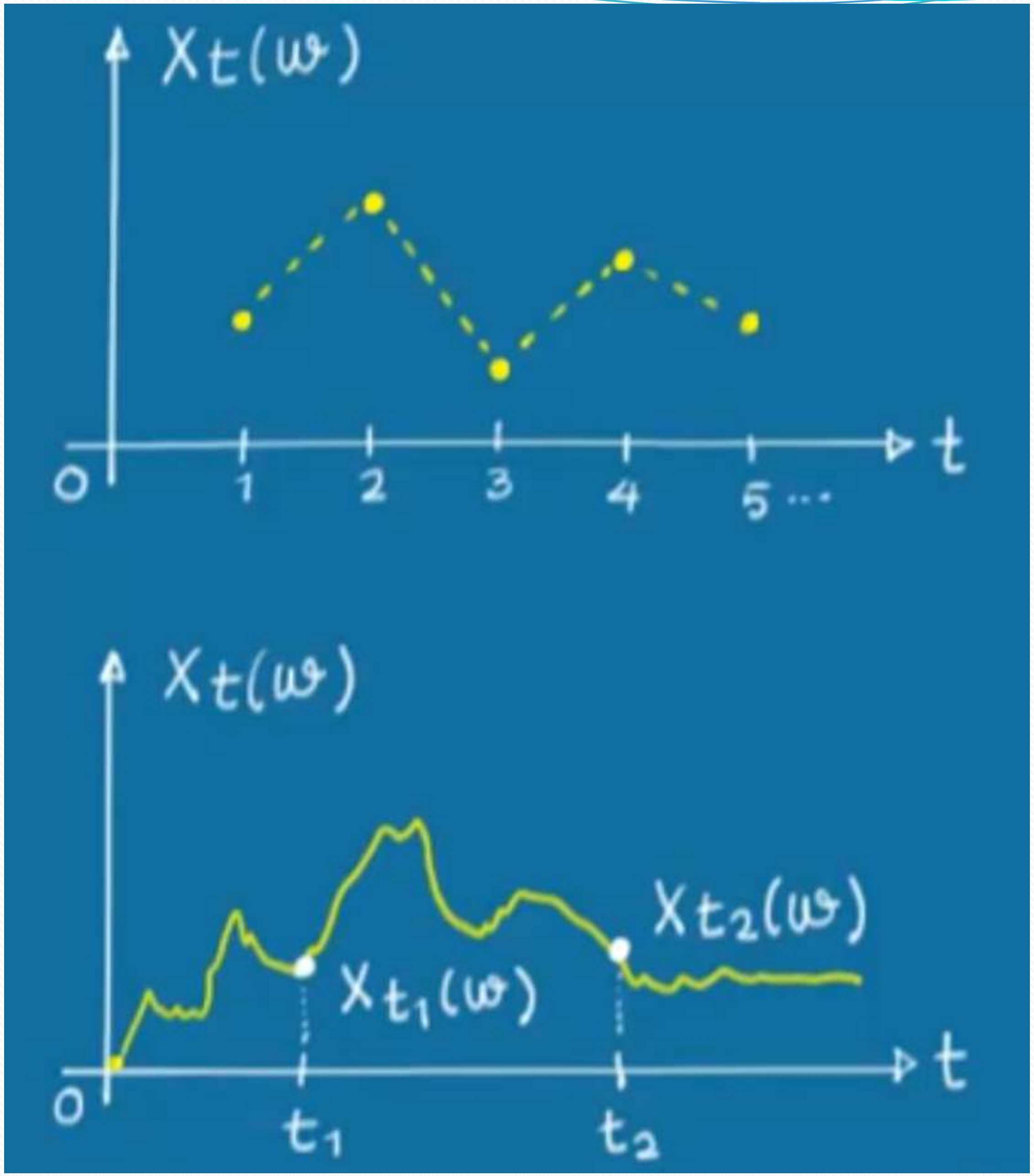
Um processo estocástico é uma coleção de v.a.'s $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por um conjunto T denominado de **espaço parametral** para os quais as v.a.'s tomam valores num conjunto S denominado **espaço de estados**.

Trajetória de Processos Estocásticos

Uma trajetória de um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$ é uma função $t \rightarrow X_t(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

- **Objetivo**:

(a) Obter $P(X_t \in A)$ para algum subconjunto A dos reais.
(b) Obter $P(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n)$ com $A_i's$ subconjuntos dos reais.



Xt(ω)
0
1
2
3
4
5 ...
t
Xt(ω)
Xt2(ω)
Xt1(ω)
0
t1
t2
t

Tipos de Processos Estocásticos

Existem diferentes tipos de processos estocásticos. Suas identidades são definidas a partir dos seguintes critérios:

(a) a natureza do espaço parametral T;

(b) a natureza do espaço de estados S;

(c) a natureza das trajetórias;

(d) a relação de dependência entre as v.a.'s que compõem o processo.

Processos Estocásticos de Ensaios Independentes

Os fenômenos descritos por processos estocásticos independentes têm as seguintes características:

(a) $T = \{0, 1, 2, \dots\}$;

(b) S é um subconjunto dos reais;

(c) X_0, X_1, X_2, ... são variáveis aleatórias independentes (ou seja, toda subcoleção finita de v.a.'s passa pelo critério de independência).

Cadeias de Markov

Um processo $\{X_t: t = 0, 1, 2, \ldots\}$ com espaço de estados S (um subconjunto discreto dos reais) é uma **Cadeia de Markov** se, para x_0, x_1, x_2,..., x_n, x_{n+1} em S, tivermos

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$
$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

(Propriedade de Markov)

Processos de Incrementos Independentes

Um processo $\{X_t: t \geq 0\}$ com espaço de estados S (um subconjunto dos reais) é um **Processo de Incrementos Independentes** se, para $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 <\ldots < t_n$, em T, as v.a.'s

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

são independentes.

Processos Estocásticos de Estacionários (Sentido Estrito)

Um processo $\{X_t : t \geq 0\}$ com espaço de estados S (um subconjunto dos reais) é um **processo estacionário no sentido estrito** se, para quaisquer $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ em T, e $h > 0$ tivermos

$$(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{D}{\Leftrightarrow} (X_{t_0+h}, X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h})$$

(equivalência em distribuição)

Processos Estocásticos de Incrementos Estacionários

Um processo $\{X_t : t \geq 0\}$ com espaço de estados S (um subconjunto dos reais) é um **processo de incrementos estacionários** se, para quaisquer $0 < s < t$ em T, e $h > 0$ tivermos

$$(X_t - X_s) \overset{D}{\Leftrightarrow} (X_{t+h} - X_{s+h})$$

(equivalência em distribuição)

Martingais

Um processo $\{X_t : t = 0, 1, 2, \ldots\}$ com espaço de estados S (um subconjunto dos reais) é um **martingal** se, para x_0, x_1, x_2,..., x_n em S, tivermos

$$E(X_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = x_n$$

Processos de Lévy

Um processo $\{X_t : t \geq 0\}$ com espaço de estados S (um subconjunto dos reais) é um **Processo de Lévy** se seus incrementos são

(a) independentes e

(b) estacionários.

Processos Gaussianos

Um processo $\{X_t : t \geq 0\}$ com espaço de estados S (um subconjunto dos reais) é um **Processo Gaussiano** se para quaisquer tempos $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 <\ldots < t_n$, em T

$$(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$$

tem distribuição normal multivariada.

Passeio pelas Cadeias de Markov

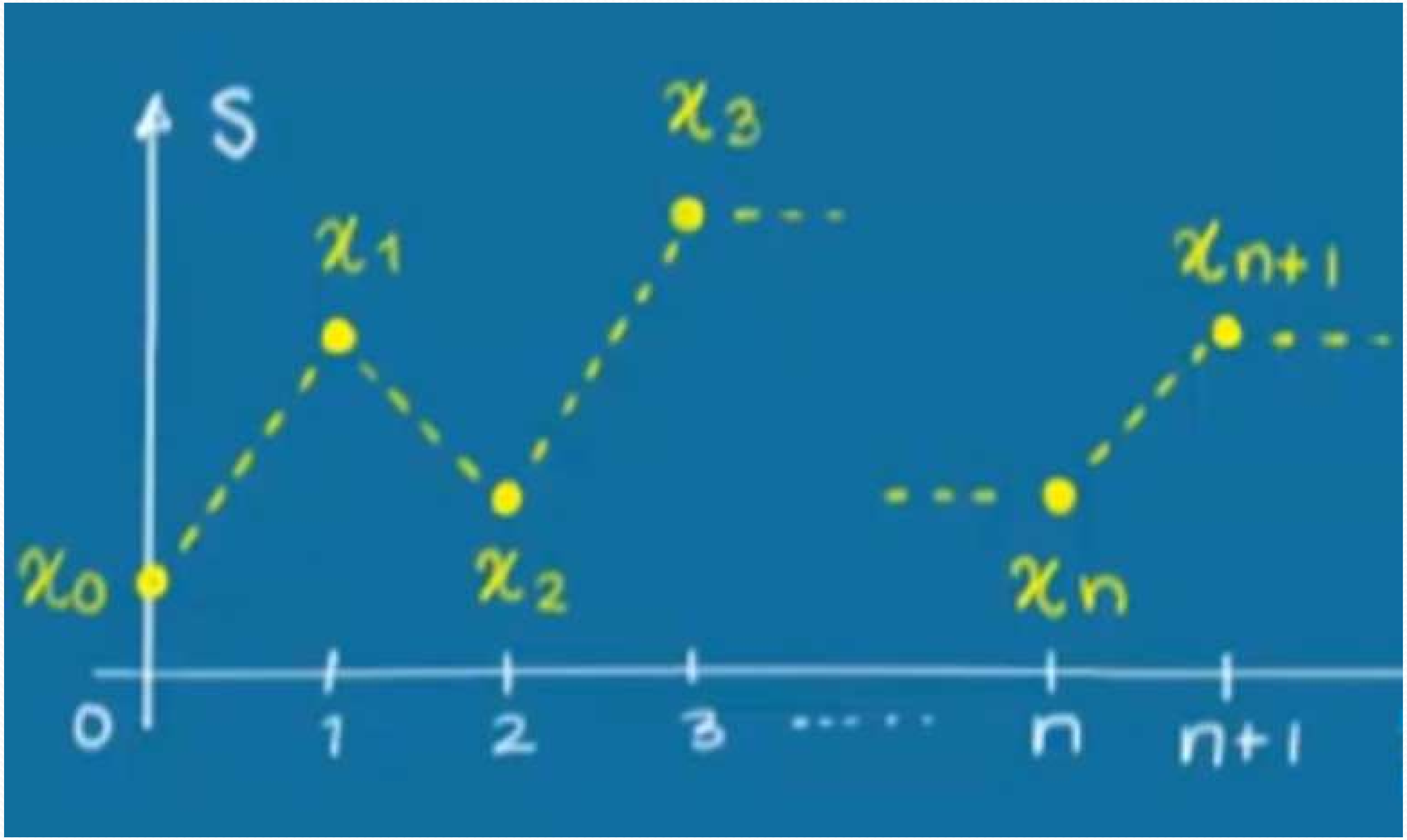
Vimos que um processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ com $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ é uma **Cadeia de Markov** se, para x_0, x_1, x_2,..., x_n, x_{n+1} em S, tivermos

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$
$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

Condição equivalente:

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n+1} = x_{n+1})$$
$$= P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \dots P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

Passeio pelas Cadeias de Markov



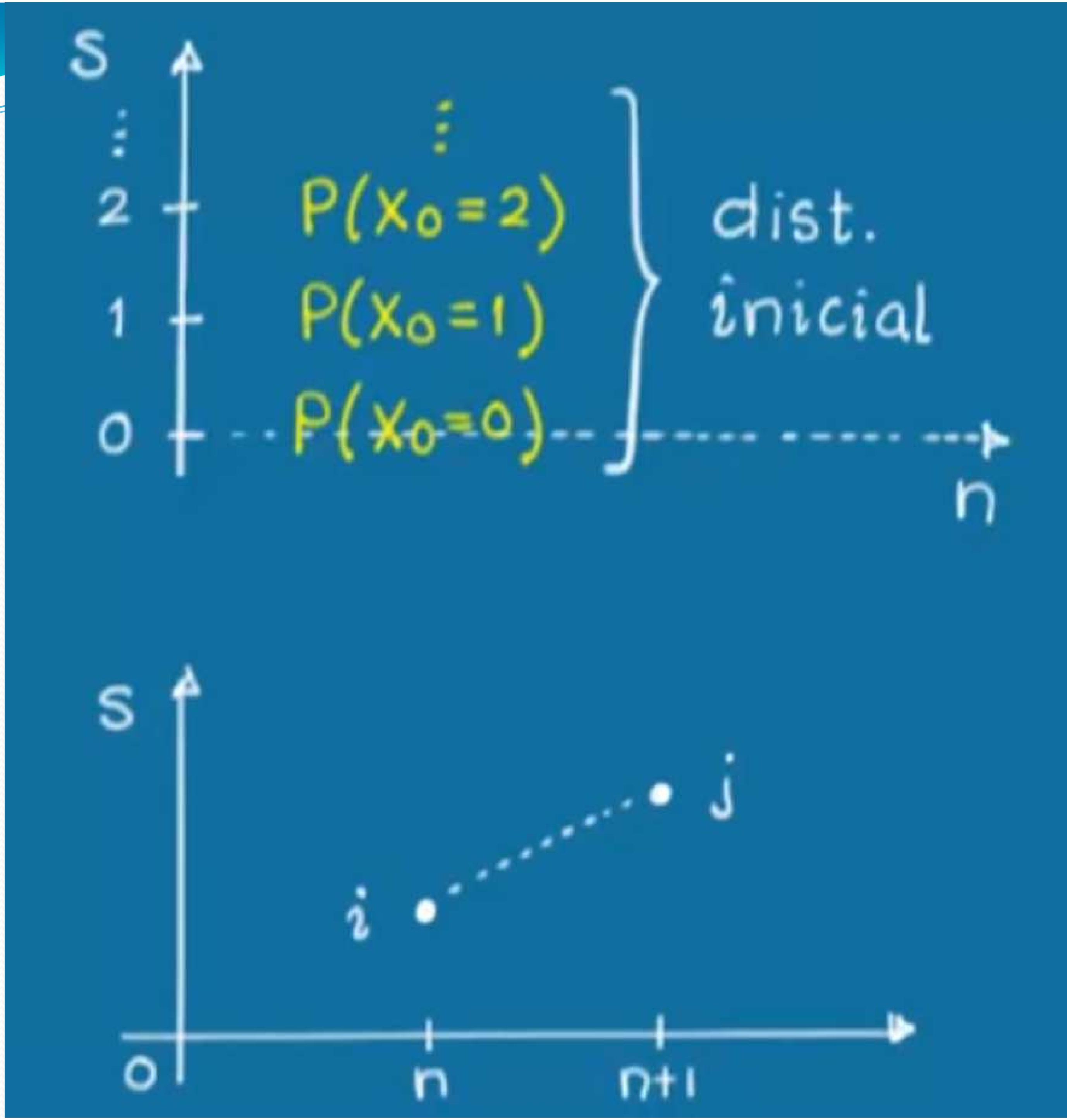
Passeio pelas Cadeias de Markov

- A distribuição da v.a. X_0 é denominada de **distribuição inicial** do processo, isto é,

$$(P(X_0 = 0), P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), \ldots) = (p_0(0), p_1(0), p_2(0) \ldots)$$

- A probabilidade $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$

é denominada **probabilidade de transição** do estado i ao estado j, do tempo n ao tempo $n+1$.


S
2
1
0
P(X0=2)
P(X0=1)
P(X0=0)
dist.
inicial
n
S
i
j
0
n
n+1

Passeio pelas Cadeias de Markov

Se

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(0,1) = p_{ij}(1) = p_{ij}$$

a cadeia de Markov é dita **estacionária** no tempo, pois a probabilidade de transição não depende do tempo.

Matriz Estocástica de Probabilidades de Transição em um Passo para Cadeia de Markov Estacionária

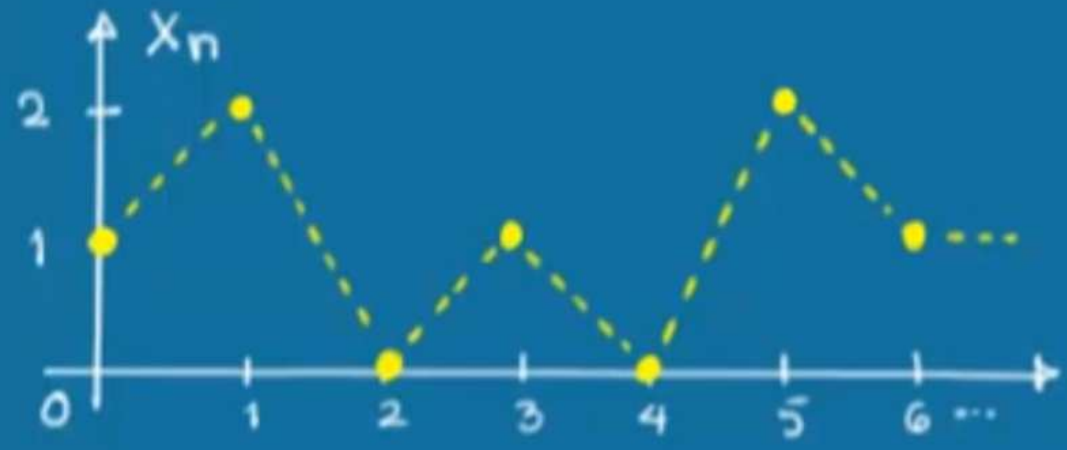
$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\
P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\
P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Exemplo

$S = \{0, 1, 2\}$

$X_0 = 1$

$$
P = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



Exemplo

Suponha que desejemos calcular

$P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 0)$

$= P(X_2 = 0|X_0 = 1, X_1 = 2)P(X_0 = 1, X_1 = 2)$

$= P(X_2 = 0|X_0 = 1, X_1 = 2)P(X_1 = 2|X_0 = 1)\ \mathrm{P}(X_0 = 1)$

$= P(X_2 = 0|X_1 = 2)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_0 = 1)$

$= p_{2,0}(1).\, p_{1,2}(1).\, p_1(0)$

$= 0{,}4 \times 0{,}5 \times 1$

$= 0{,}2$

Propriedades da Matriz Estocástica

Seja $\boldsymbol{P} = [(p_{ij})]$ a matriz de entradas

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \text{ para todo } n.$$

Então as seguintes propriedades se verificam:

(a) $p_{ij} \geq 0$ para todo i e j;

(b) $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$

Elementos de uma Cadeia de Markov

- Um espaço de estados S.

- Uma distribuição inicial sobre o espaço de estados S.

- Uma matriz estocástica $\boldsymbol{P}$.

Probabilidade de Transição *n* passos a frente

- À probabilidade

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{ij}(m, m+n)$$

se denomina **probabilidade de transição** do estado i no tempo m ao estado j no tempo $m+n$.

- Para cadeias estacionárias, temos

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{ij}(m, m+n) = p_{ij}(0, n) = p_{ij}(n).$$

Matriz Estocástica de Probabilidade de Transição *n* passos a frente

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\
P(n) = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} P_{00}(n) & P_{01}(n) & P_{02}(n) & \cdots \\ P_{10}(n) & P_{11}(n) & P_{12}(n) & \cdots \\ P_{20}(n) & P_{21}(n) & P_{22}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matriz Estocástica de Probabilidade de Transição *n* passos a frente

Casos Particulares

- Se $n = 1$ então $\boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}$.

- Se $n = 0$ então $\boldsymbol{P}(0) := \mathbf{I}$ (matriz identidade), isto é $p_{ij}(0) = 1$ se $i = j$ e $p_{ij}(0) = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

- Suponha $S = \{0, 1\}$ o espaço de estados de uma cadeia de Markov.

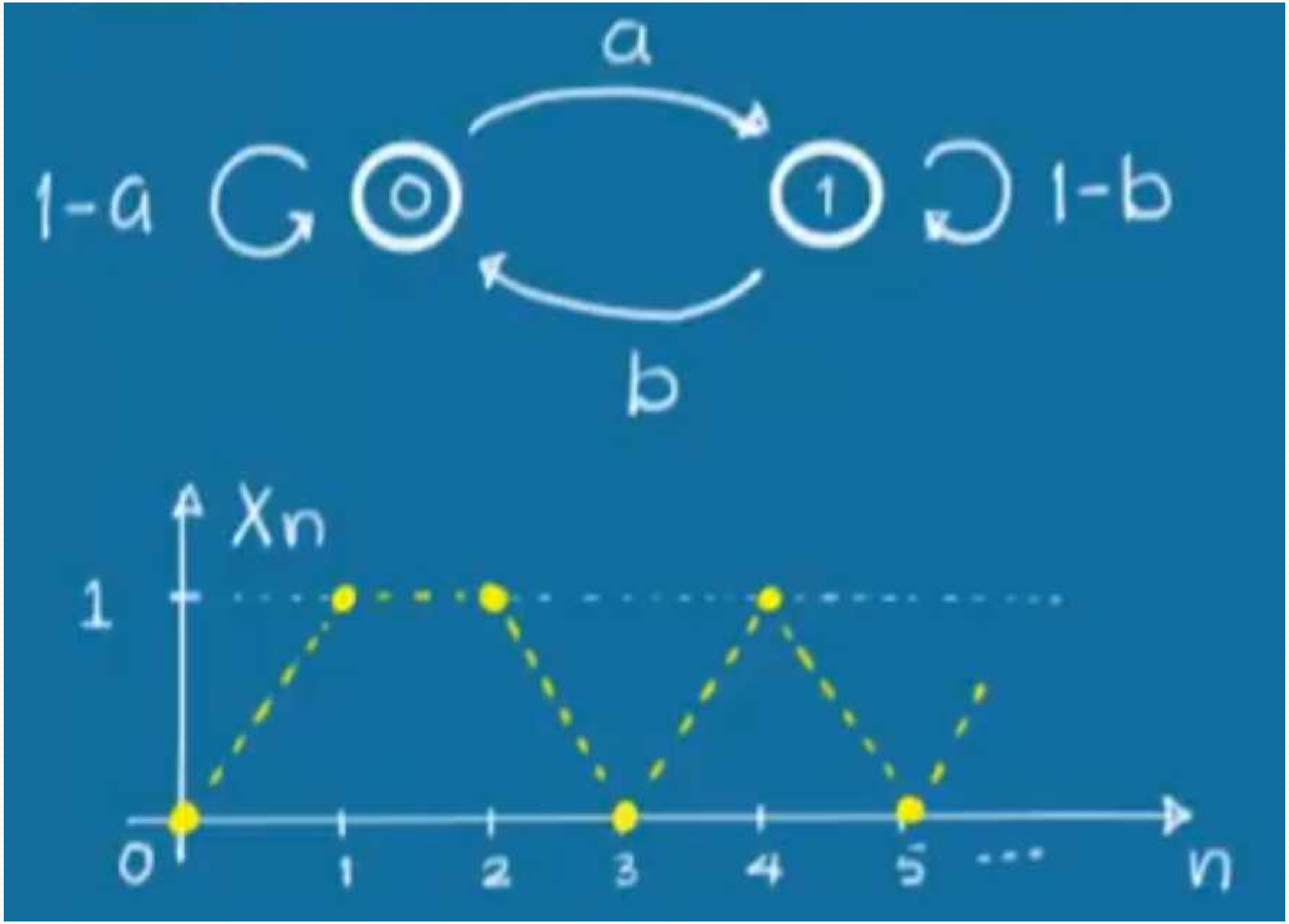
- Suponha $P(X_0 = 0) = p_0(0) = p$ e $P(X_0 = 1)$ $= p_1(0) = 1 - p = q$.

- Suponha a matriz de transição da cadeia estacionária dada por

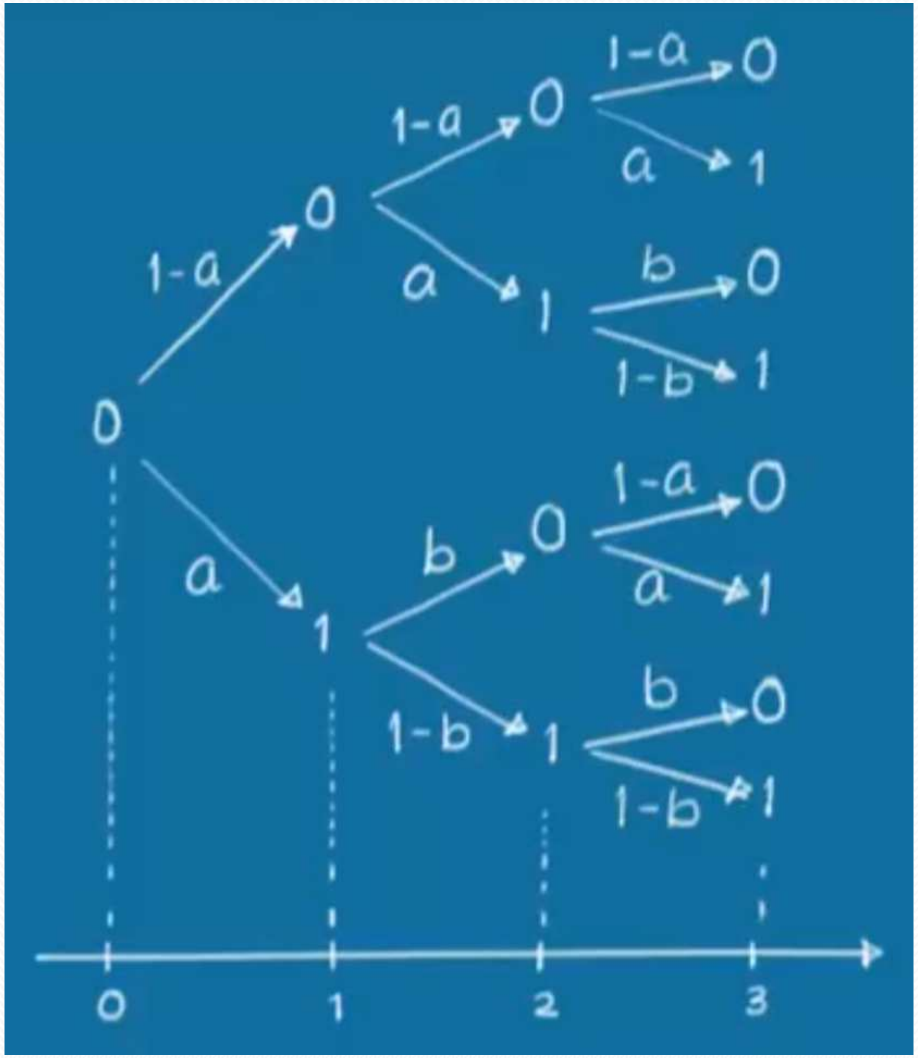
$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 - a & a \\ b & 1 - b \end{bmatrix}$$

com $0 < a, b < 1$.

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados



Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados



Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

Observe que

$P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0).P(X_1 = 0|X_0 = 0)+P(X_0 = 1).P(X_1 = 0|X_0 = 1)$
$=p_0(0).p_{0,0}(1)+p_1(0).p_{1,0}(1)$

$P(X_1 = 1) = P(X_0 = 0).P(X_1 = 1|X_0 = 0)+P(X_0 = 1).P(X_1 = 1|X_0 = 1)$
$=p_0(0).p_{0,1}(1)+p_1(0).p_{1,1}(1)$

ou seja

$$[P(X_1 = 0) \quad P(X_1 = 1)] = [p_0(1) \quad p_1(1)] = [p_0(0) \quad p_1(0)] \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$
$$= [p_0(0) \quad p_1(0)].\boldsymbol{P}$$

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

Da mesma forma

$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0).P(X_2 = 0|X_1 = 0)+P(X_1 = 1).P(X_2 = 0|X_1 = 1)$

$=p_0(1).p_{0,0}(1)+p_1(1).p_{1,0}(1)$

$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0).P(X_2 = 1|X_1 = 0)+P(X_1 = 1).P(X_2 = 1|X_1 = 1)$

$=p_0(1).p_{0,1}(1)+p_1(1).p_{1,1}(1)$

ou seja

$$[P(X_2 = 0) \quad P(X_2 = 1)] = [p_0(2) \quad p_1(2)] = [p_0(1) \quad p_1(1)] \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$=[p_0(1) \quad p_1(1)].\boldsymbol{P}$$

$$=[p_0(0) \quad p_1(0)].\boldsymbol{P}.\boldsymbol{P}$$

$$=[p_0(0) \quad p_1(0)].\boldsymbol{P}^2$$

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

Assim, pela regularidade, temos

$$[P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1)] = [p_0(n) \quad p_1(n)] = [p_0(0) \quad p_1(0)].\boldsymbol{P}^n$$

Como, no caso geral,

$$[P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1)] = [p_0(0) \quad p_1(0)].\boldsymbol{P}(n),$$

concluímos que, quando a cadeia é estacionária, temos

$$\boldsymbol{P}(n) = [(p_{ij}(n))] = \boldsymbol{P}^n.$$

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

Pode-se mostrar por diagonalização de matrizes por meio de autovalores e autovetores que no exemplo dado temos

$$\boldsymbol{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) \\ p_{1,0}(n) & p_{1,1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}^n = \boldsymbol{P}^n$$

$$= \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}$$

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

Observe também que, como $-1 < 1 - a - b < 1$, temos

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{P}(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{bmatrix}$$

ou seja, não importa onde a cadeia começa a distribuição limite de X_n existe e

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} P(X_n = 0) = \pi_0 = \frac{b}{a+b} \quad \text{e} \quad \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} P(X_n = 1) = \pi_1 = \frac{a}{a+b}.$$

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

Observe também que

$$[p_0(n+1) \quad p_1(n+1)] = [p_0(n) \quad p_1(n)] \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$

E que aplicando o limite quando n tende a infinito em ambos os lados, temos

$$[\pi_0 \quad \pi_1] = [\pi_0 \quad \pi_1] \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_0 \quad \pi_1] = [\pi_0 \quad \pi_1] \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} \pi_0 = (1-a)\pi_0 + b\pi_1 \\ \pi_1 = a\pi_0 + (1-b)\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

Exemplo de Cadeia de Markov com Dois Estados

A solução do sistema coincide com os valores das colunas de

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{P}(n),$$

isto é,

$$\pi_0 = \frac{b}{a+b} \quad \text{e} \quad \pi_1 = \frac{a}{a+b}.$$

Problematização: Em que circunstâncias $\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{P}(n)$ existe?

Cadeia de Variáveis Aleatórias Independentes

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ com $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ composto por v.a.'s independentes e identicamente distribuídas, tais que

$P(X_n = 0) = p_0$, $P(X_n = 1) = p_1$, $P(X_n = 2) = p_2, \dots$

Então o processo é uma cadeia de Markov com probabilidade de transição, dada por,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_{n+1} = j) = p_j$$

Cadeia de Variáveis Aleatórias Independentes

A matriz estocástica de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Cadeia de Variáveis Aleatórias Independentes

- Suponha agora que $Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, então $\{Y_n, : n = 1, 2, \ldots\}$ tem espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é também uma cadeia de Markov e sua matriz estocástica de probabilidade de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 + p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Cadeia de Variáveis Aleatórias Independentes

- Suponha agora que $Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, então $\{Z_n, : n = 1, 2, \ldots\}$ com $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é também uma cadeia de Markov e sua matriz estocástica de probabilidade de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Cadeia de Rajadas de Sucesso

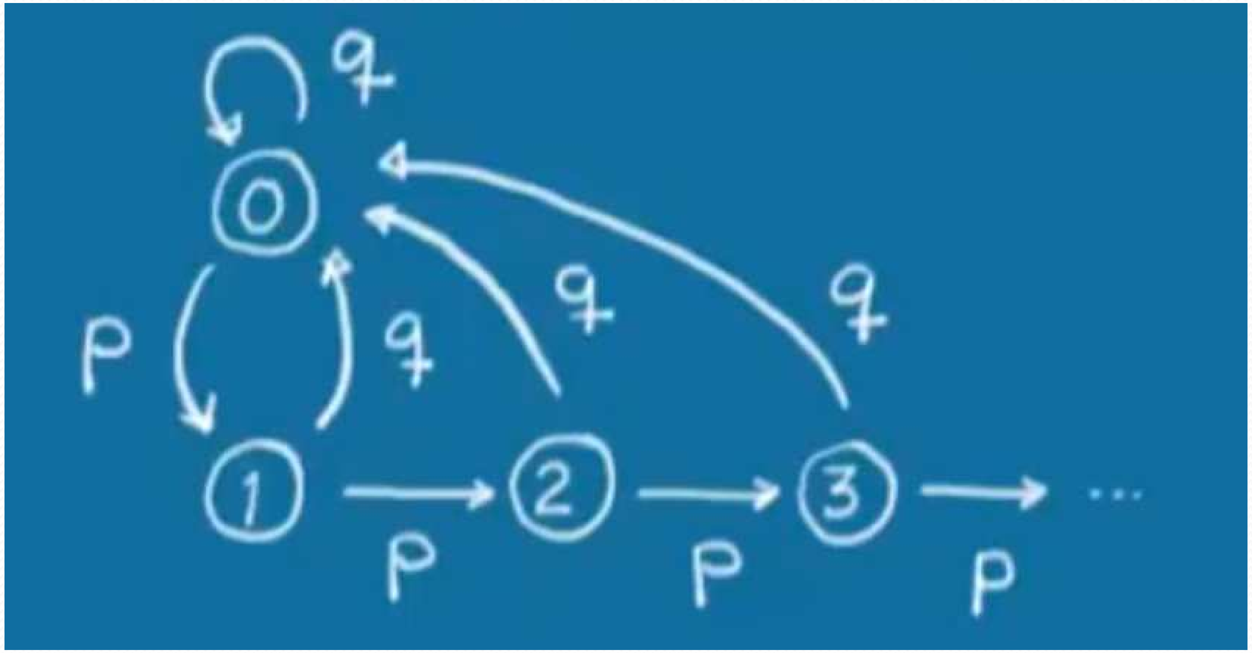
Suponha agora que $\{Y_n : n = 1, 2, \dots\}$ seja uma coleção de variáveis independentes com distribuição de Bernoulli de parâmetro p com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Seja X_n o número de sucessos consecutivos prévios até o tempo n.

n	1	2	3	4	5	7	...
Y_n	F	F	S	S	F	S	...
X_n	0	0	1	2	0	1	...

Cadeia de Rajadas de Sucesso

$\{X_n\}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ é também uma cadeia de Markov e sua matriz estocástica de probabilidade de transição pode ser construída a partir do diagrama abaixo:



Cadeia de Rajadas de Sucesso

Assim temos

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p \ \text{ se } j = i+1 \\ q \ \text{ se } j = 0 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \\ q & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Cadeia de Passeio Aleatório

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ com $S = \mathbb{Z}$ (o conjunto dos número inteiros) tal que $X_0 = 0$ e

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1 \\ q & \text{se } j = i - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array} \right\| \end{array}$$

Cadeia de Passeio Aleatório

Pode-se provar que as probabilidades de transição

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

em n passos é dada por

$$p_{ij}(n) = \binom{n}{(n+j-i)/2} p^{(n+j-i)/2} q^{(n-j+i)/2}$$

se n e $j - i$ são ambos pares ou ímpares e $|j - i| \leq n$;

e

$$p_{ij}(n) = 0$$

em qualquer outro caso.

Cadeia de Passeio Aleatório

Uma outra forma de construir o passeio aleatório é escrever

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

com $Y_i's$ variáveis aleatórias *i.i.d.* tais que

$$P(Y_i = +1) = p \text{ e } P(Y_i = -1) = q.$$

Cadeia do Jogador

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, \dots, \mathrm{N}\}$ tal que $X_0 = k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ representa o capital inicial do jogador e $N - k$ é o capital do jogador oponente. Assim, temos

- $p_{00} = 1$
- $p_{NN} = 1$
- Para $i = 1, 2, \dots, N-1,$

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1 \\ q & \text{se } j = i - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O objetivo é calcular a probabilidade de ruína do jogador.

Cadeia do Jogador

A matriz estocástica de probabilidades de transição é dada por

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c}
\\
0 \\ 1 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ N
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & & k-1 & k & k+1 & \cdots & N
\end{array} \\
\left\Vert \begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & q & 0 & p & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array} \right\Vert
\end{array}
$$

Cadeia de Ehrenfest

Suponha N bolas numeradas de 1 a N a serem alocadas em duas urnas **A** e **B**. A partir de uma distribuição inicial das bolas nas urnas, um número de 1 a N é selecionado aleatoriamente e a bola de número selecionado é transferida da urna em que se encontra para a outra urna.

Cadeia de Ehrenfest

Defina o processo $\{X_n, : n = 0, 1, 2, \dots\}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, \dots, \mathrm{N}\}$ tal que $X_0 = k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ representa o número de bolas inicialmente na urna **A** e X_n é o número de bolas na urna **A** após a n-ésima transferência.

Cadeia de Ehrenfest

Então o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, \dots, \mathrm{N}\}$ e probabilidades de transição dadas por

- $p_{01} = 1$
- $p_{N,N-1} = 1$
- Para $i = 1, 2, \dots, N-1$,

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{(N-i)}{N}, & \text{se } j = i+1 \\ \frac{i}{N}, & \text{se } j = i-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Cadeia de Ehrenfest

A matriz estocástica da Cadeia de Ehrenfest é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c||cccccccccc||}
 & 0 & 1 & 2 & & i-1 & i & i+1 & \cdots & N-1 & N \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
i & 0 & 0 & & \cdots & i/N & 0 & (N-i)/N & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
N & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{array}$$

Cadeia de Ramificação

Suponha partículas que possam gerar outras partículas do mesmo tipo, como no esquema abaixo:

Cadeia de Ramificação

Seja X_n o número de partículas da geração n e seja

$$X_0 = 1.$$

Então, se os números de descendentes de cada partícula são independentes de uma partícula a outra, o processo $\{X_n, : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Cadeia de Ramificação

Defina

D_k^n : o número de descendentes da partícula k da geração n.

Então $k = 1, 2, \dots, X_n \;\; (X_n \geq 1)$.

Assim

$$X_{n+1} = D_1^n + D_2^n + \cdots + D_{X_n}^n$$

$$p_{ij} = P(D_1^n + D_2^n + \cdots + D_i^n = j) \text{ para } i \geq 1$$

Cadeia de Ramificação

Essas probabilidades são estacionárias se a distribuição de D_k^n não depender de n.

Objetivo: Calcular a probabilidade de extinção do processo de ramificação.

Cadeia de Fila de Espera

- Observa-se o tamanho de uma fila nos tempos discretos $n = 0, 1, 2, \ldots$

- Para cada $n \geq 1$, defina a v.a. M_n o número de clientes que entram em fila durante o período $(n-1, n]$, tomando valores $0, 1, 2, \ldots$

- Quando há um cliente esperando na frente da fila no tempo n, este é atendido durante o período $(n, n+1]$.

- A cada período somente um cliente é atendido.

Cadeia de Fila de Espera

Seja X_n o tamanho da fila no tempo n.

Então, $X_{n+1} = \begin{cases} M_{n+1}, & \text{se } X_n = 0 \\ M_{n+1} + X_n - 1, & \text{se } X_n \geq 1 \end{cases}$

Se M_1, M_2, $M_3, \ldots$ são independentes, então o processo $\{X_n, : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Cadeia de Fila de Espera

As probabilidades de transição são dadas por

$$p_{ij}(n, n+1) = \begin{cases} P(M_{n+1} = j) \text{ se } i = 0 \\ P(M_{n+1} = j - i + 1) \text{ se } i \geq 1 \end{cases}$$

- Qual será o comportamento da fila a longo prazo? Crescerá sem limites?
- Qual o tempo médio de espera na fila?

Cadeia de Fila de Espera

Se $P(M_n = k) = p_k$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ e para todo n, então a matriz estocástica é dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array} \right\| \end{array}$$

Cadeia de Estoques

Seja X_n o número de bens em estoque nos tempos $n = 0, 1, 2, \dots$

Em cada período $(n-1, n]$ uma demanda aleatória D_n de bens é requerida.

A cada tempo n é aplicada a seguinte política de abastecimento:

$$X_{n+1} = \begin{cases} A - D_{n+1} & \text{se } X_n \leq a \\ X_n - D_{n+1} & \text{se } a < X_n \leq A \end{cases}$$

com a o nível mínimo de reabastecimento e A a capacidade do estoque.

Cadeia de Estoques

Se $D_1, D_2, D_3, \ldots$ são independentes, então o processo $\{X_n\colon n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{A}\}$.

As probabilidades de transição são dadas por

$$p_{ij}(n, n+1) = \begin{cases} P(D_{n+1} = A - j) \text{ se } i \leq a \\ P(D_{n+1} = i - j) \text{ se } a < i \leq A \end{cases}$$

Cadeia de Estoques

Se D_1, D_2, D_3, ... são i.i.d. então as probabilidades de transição não dependem de n e são dadas por

$$p_{ij} = \begin{cases} P(D = A - j) \text{ se } i \leq a \\ P(D = i - j) \text{ se } a < i \leq A \end{cases}$$

Cadeia de Estoques

Se $P(D = k) = d_k$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ e se, por exemplo $a = 1$ e $A = 3$ a matriz de transição de probabilidade é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} \cdots & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \\ \cdots & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & 0 \\ \cdots & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \\ \cdots & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \\ \cdots & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right\| \end{array}$$

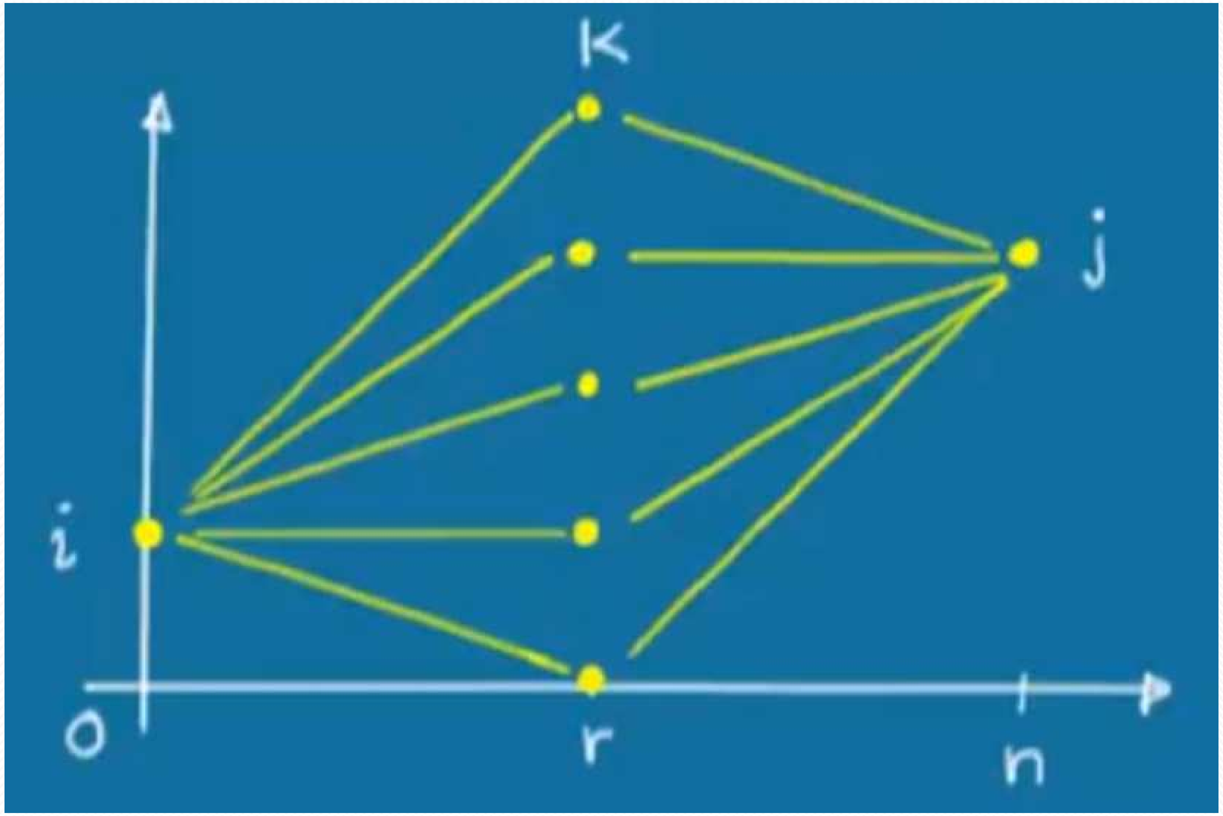
A Equação de Chapman-Kolmogorov

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov com probabilidade de transição p_{ij}.

- **PROPOSIÇÃO**: Para qualquer par de tempos r e n, tais que $0 \leq r < n$, temos

$$p_{ij}(n) = \sum_{k} p_{ik}(r)\, p_{kj}(n-r)$$

A Equação de Chapman-Kolmogorov



A Equação de Chapman-Kolmogorov

A consequência imediata da Equação de Chapman-Kolmogorov é que

$$p_{ij}(n) = (\boldsymbol{P}^n)_{ij}$$

ou seja $p_{ij}(n)$ é a entrada (i, j) da matriz $\boldsymbol{P}^n$.

Comunicação

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov com probabilidade de transição p_{ij}.

Definição: Sejam i e j dois estados da cadeia de Markov.

(a) j é dito ***acessível*** por i ($i \to j$) se existe $n \geq 0$ tal que

$$p_{ij}(n) > 0.$$

(b) i e j são ditos ***comunicáveis*** ($i \leftrightarrow j$) se $i \to j$ e $j \to i$.

Comunicação

PROPOSIÇÃO: A comunicação é uma relação de equivalência, ou seja, é

(a) Reflexiva : $i \leftrightarrow i$

(b) Simétrica: se $i \leftrightarrow j$ então $j \leftrightarrow i$

(c) Transitiva: se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $i \leftrightarrow k$

Comunicação

A comunicação induz uma partição do espaço de estados em classes comunicáveis.

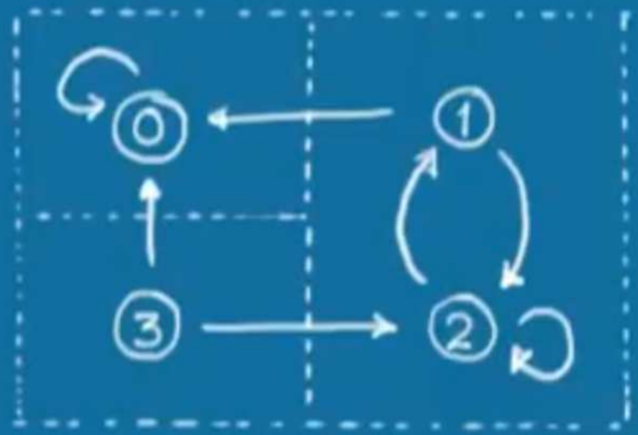
Seja $C(i)$ a classe de comunicação do estado i.

Definição: Uma cadeia de Markov é dita **irredutível** se todos os seus estados se comunicam entre si.

Comunicação

Exemplo

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



S

Período - Definição

Seja i um estado de uma cadeia de Markov $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$

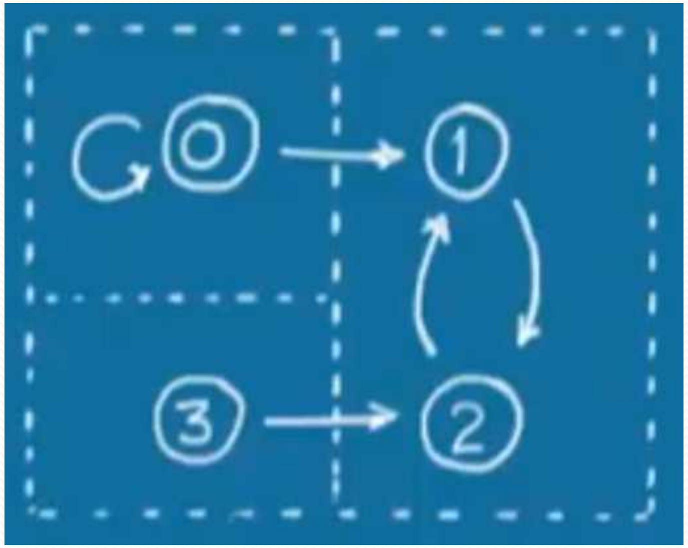
Definição: O período de i é o inteiro definido como

$$d(i) = mdc\{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\}.$$

- Quando $p_{ii}(n) = 0$ para $n \geq 1$, define-se $d(i) = 0$.
- Se $d(i) = 1$, diz-se que i é **aperiódico**.
- Se $d(i) = k$, diz-se que i é **periódico de período $\boldsymbol{k}$**.

Período - Definição

Seja a Cadeia de Markov do diagrama abaixo:



$$d(0) = mdc\{1, 2, \dots\} = 1$$
$$d(1) = mdc\{2, 4, \dots\} = 2$$
$$d(2) = mdc\{2, 4, \dots\} = 2$$
$$d(3) = mdc\ \emptyset = 0$$

Período - Propriedades

PROPOSIÇÃO: Se $i \leftrightarrow j$, então $d(i) = d(j)$.

PROPOSIÇÃO: Para cada estado i, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $p_{ii}(nd(i)) > 0$.

PROPOSIÇÃO: Para $i \neq j$ tais que $p_{ij}(m) > 0$, para algum $m \geq 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $p_{ij}(m + nd(i)) > 0$.

Probabilidade de Primeiras Visitas

Sejam i e j dois estados de uma cadeia de Markov.

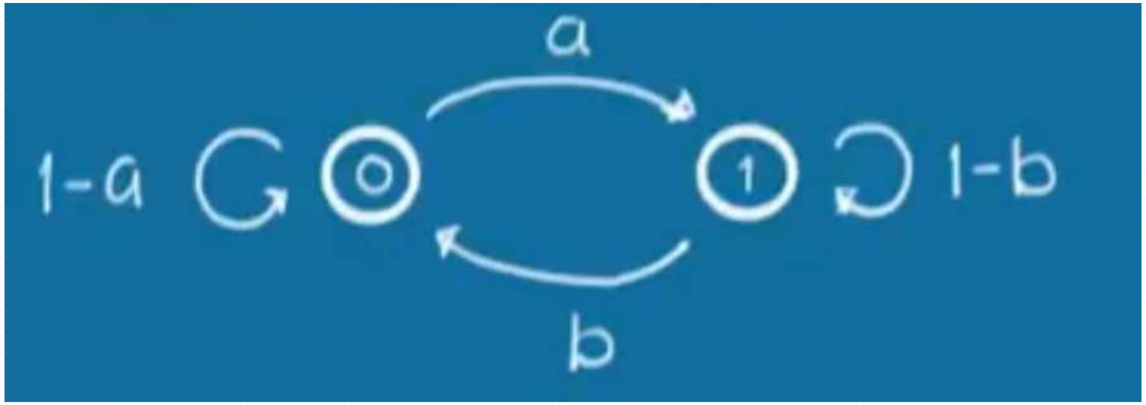
Definição: Para todo $n \geq 1$ a probabilidade de primeira visita ao estado j, n passos após a cadeia iniciar no estado i é dada por

$$f_{ij}(n) = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i)$$

Define-se também $f_{ij}(0) = 0$ e $f_{ii}(0) = 0$.

Probabilidade de Primeiras Visitas

Sejam uma cadeia de Markov de dois estados, segundo o diagrama abaixo



Então

$$f_{01}(n) = (1-a)^{n-1}a, \text{ para } n \geq 1$$
$$f_{00}(n) = a(1-b)^{n-2}b, \text{ para } n \geq 2$$

Probabilidade de Primeiras Visitas

PROPOSIÇÃO: Para $n \geq 1$,

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k)\, p_{jj}(n-k)$$

- A probabilidade de uma eventual visita ao estado j começando a cadeia no estado i é dada por

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

Recorrência e Transitoriedade - Definição

Seja i um estado de uma cadeia de Markov $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$

Definição: Diz-se que o estado i é

(a) **recorrente** se

$$P(X_n = i, para\ algum\ n \geq 1 | X_0 = i) = 1;$$

(b) **transiente** se

$$P(X_n = i, para\ algum\ n \geq 1 | X_0 = i) < 1.$$

Recorrência e Transitoriedade - Critérios

Seja $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n)$, então pode-se mostrar:

PROPOSIÇÃO: O estado i é

(a) **recorrente** se e somente se

$$f_{ii} = 1;$$

(b) **transiente** se e somente se

$$f_{ii} < 1.$$

Recorrência e Transitoriedade - Critérios

PROPOSIÇÃO: O estado i é

(a) **recorrente** se e somente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty;$$

(b) **transiente** se e somente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty.$$

Recorrência e Transitoriedade - Critérios

Pode-se mostrar que recorrência e transiência são propriedades de classes.

Assim se dois estados i e j estão na mesma classe ($i \leftrightarrow j$), então

(a) se i é recorrente, j também o será;

(b) se i é transiente, j também o será.

Recorrência e Transiência - Critérios

PROPOSIÇÃO: Seja qualquer estado inicial i e seja j um estado **transiente**. Então

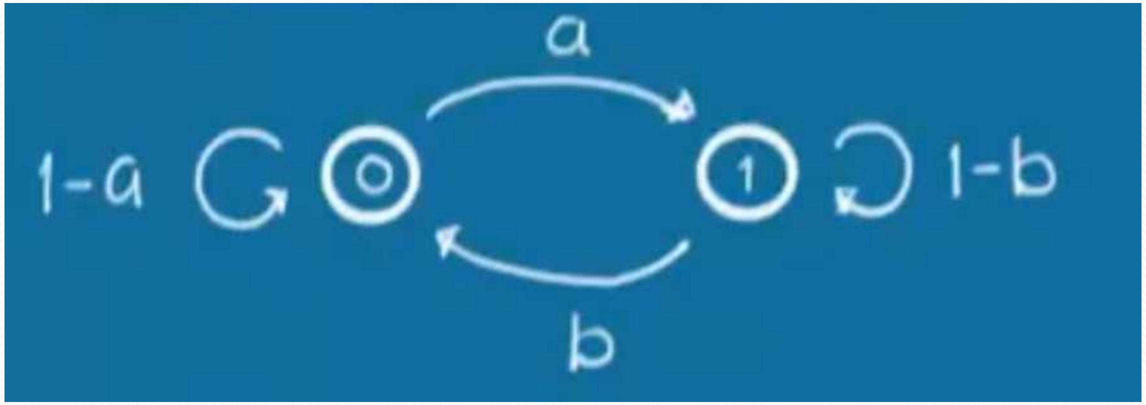
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) < \infty$.

(b) $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$.

COROLÁRIO: Toda cadeia finita e irredutível é recorrente.

Recorrência e Transiência - Definição

Seja uma cadeia de Markov de dois estados segundo o diagrama abaixo, com $0 < a, b < 1$.



Então, 0 é um estado recorrente?

$$f_{00}(1) = 1 - a \text{ e}$$

$$f_{00}(n) = a(1-b)^{n-2}b, \text{ para } n \geq 2$$

Recorrência e Transiência

Assim

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}(n) = (1-a) + \sum_{n=2}^{\infty} a(1-b)^{n-2} b$$

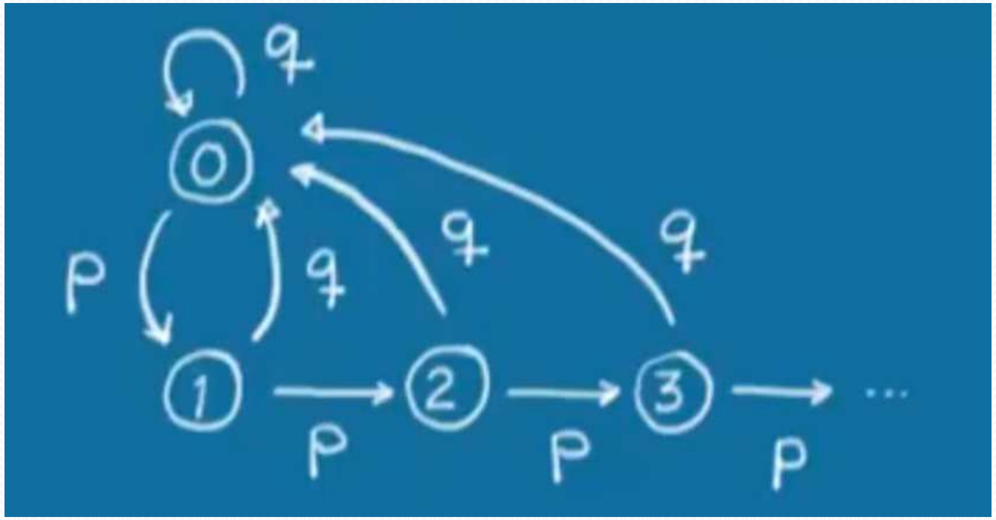
$$= (1-a) + ab \sum_{n=2}^{\infty} (1-b)^{n-2} = (1-a) + ab \times \frac{1}{b}$$

$$= 1$$

Ou seja, o estado 0 é **recorrente**. Analogamente, se mostra que o estado 1 é também **recorrente**, pois 0 e 1 pertencem à mesma classe.

Recorrência e Transiência

Seja a Cadeia de Rajadas de Sucessos, dada pelo diagrama abaixo com $0 < p < 1$ e $p + q = 1$.



Pergunta-se: 0 é um estado recorrente?

$$f_{00}(1) = q \ \text{ e}$$

$$f_{00}(n) = p^{n-1}q, \text{ para } n \geq 2$$

Recorrência e Transiência

Assim

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}(n) = q + \sum_{n=2}^{\infty} p^{n-1} q$$

$$= q + q \sum_{n=2}^{\infty} p^{n-1} = q + q \times \frac{p}{1-p}$$

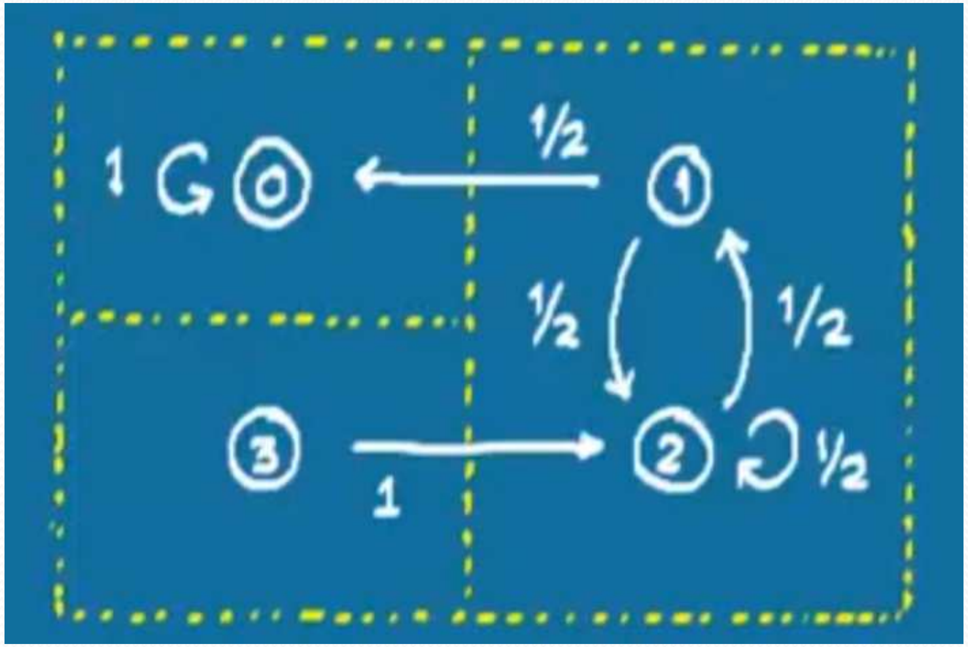
$$= p + q$$

$$= 1$$

Ou seja, o estado 0 é **recorrente**. Analogamente, se mostra que todos os outros estados são também **recorrentes**, pois a cadeia é irredutível.

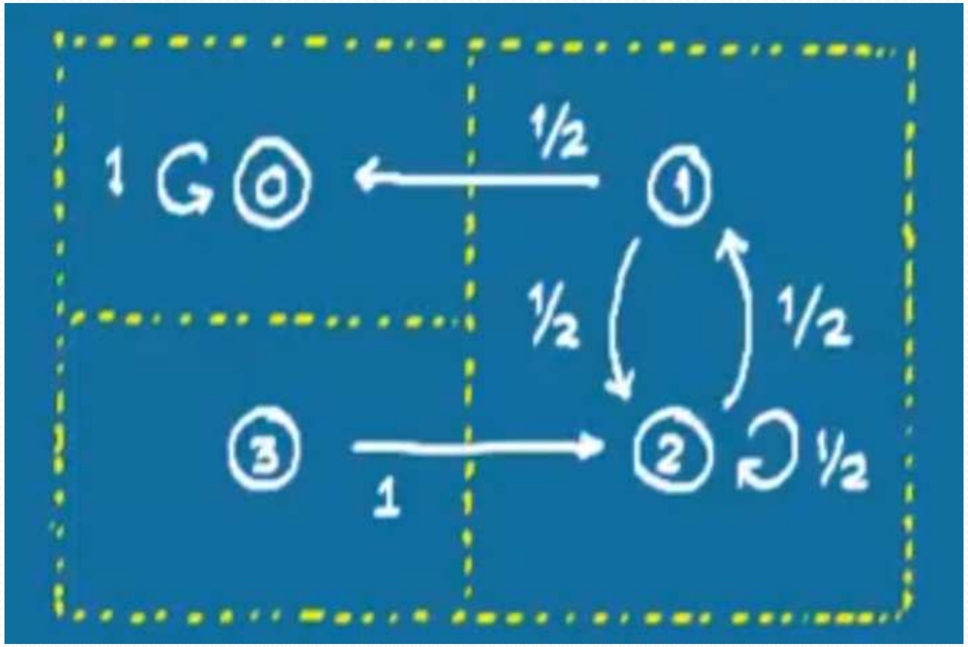
Recorrência e Transiência

Seja a cadeia dada pelo diagrama abaixo



Como $p_{00}(n) = 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, segue-se que 0 é **recorrente**.

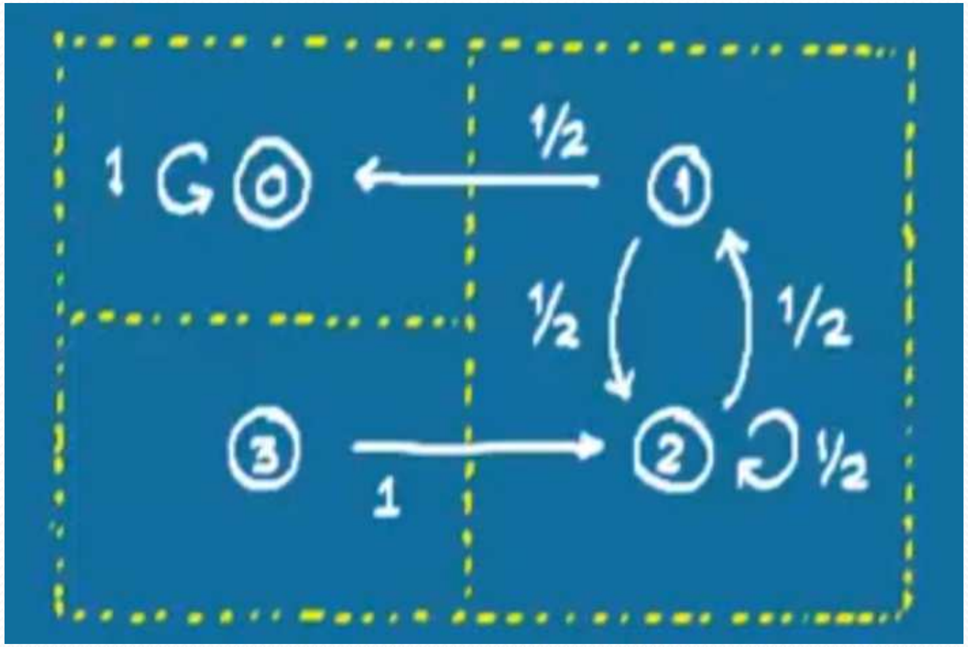
Recorrência e Transiência



Como $\quad f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \quad ,$

segue-se que 1 é **transiente**.

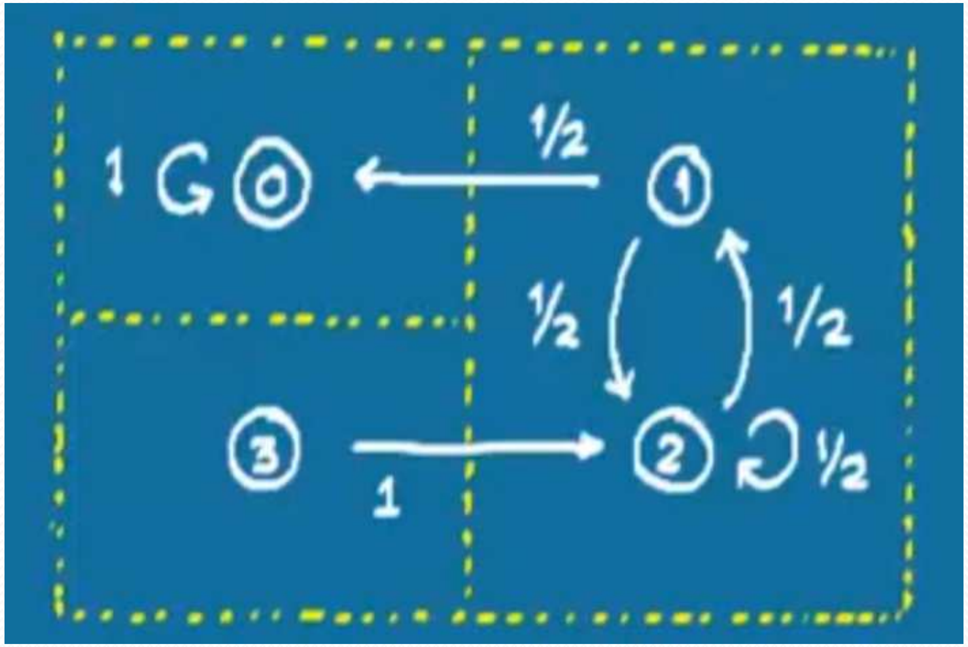
Recorrência e Transiência



Como os estados 1 e 2 pertencem à mesma classe e como 1 é **transiente**, segue-se que 2 é também **transiente**, o que se comprova por

$$f_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}(n) = f_{22}(1) + f_{22}(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

Recorrência e Transiência



Como $\sum_{n=1}^{\infty} p_{33}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 < \infty$, temos que o estado 3 é **transiente**.

Tempo Médio de Recorrência

Seja j um estado **recorrente**.

Problematização: Quanto tempo em média leva a cadeia para regressar ao estado j?

Definição: O tempo médio de recorrência de um estado recorrente j é dado por

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{jj}(n)$$

Tempo Médio de Recorrência

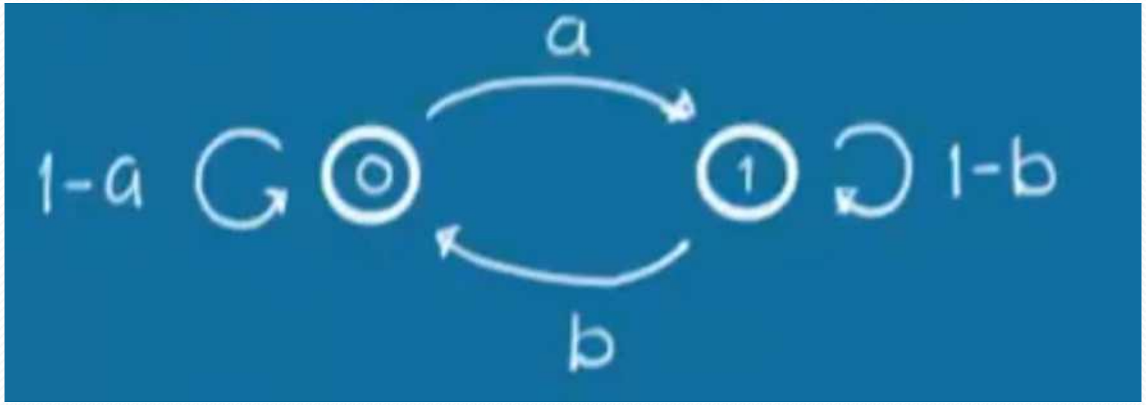
Mais geralmente, temos a seguinte definição

Definição: O tempo médio de recorrência de um estado recorrente j a partir do estado i é dado por

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ij}(n)$$

Tempo Médio de Recorrência

Seja uma cadeia de Markov de dois estados segundo o diagrama abaixo, com $0 < a, b < 1$.



Então, qual o tempo médio de recorrência do estado 0?

$$f_{00}(1) = 1 - a \text{ e}$$

$$f_{00}(n) = a(1-b)^{n-2}b, \text{ para } n \geq 2$$

Tempo Médio de Recorrência

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{00}(n) = (1-a) + \sum_{n=2}^{\infty} na(1-b)^{n-2}b$$

$$= (1-a) + ab \sum_{n=2}^{\infty} n(1-b)^{n-2}$$

$$= (1-a) + ab(b+1)/b^2$$

$$\mu_0 = \frac{a+b}{b}$$

Tempo Médio de Recorrência

De maneira análoga se pode mostrar que

$$\mu_1 = \frac{a+b}{a}$$

Observe que

$$\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} = 1.$$

Exercício: Calcule você mesmo(a) μ_{01} e μ_{10}.

Classes Fechadas

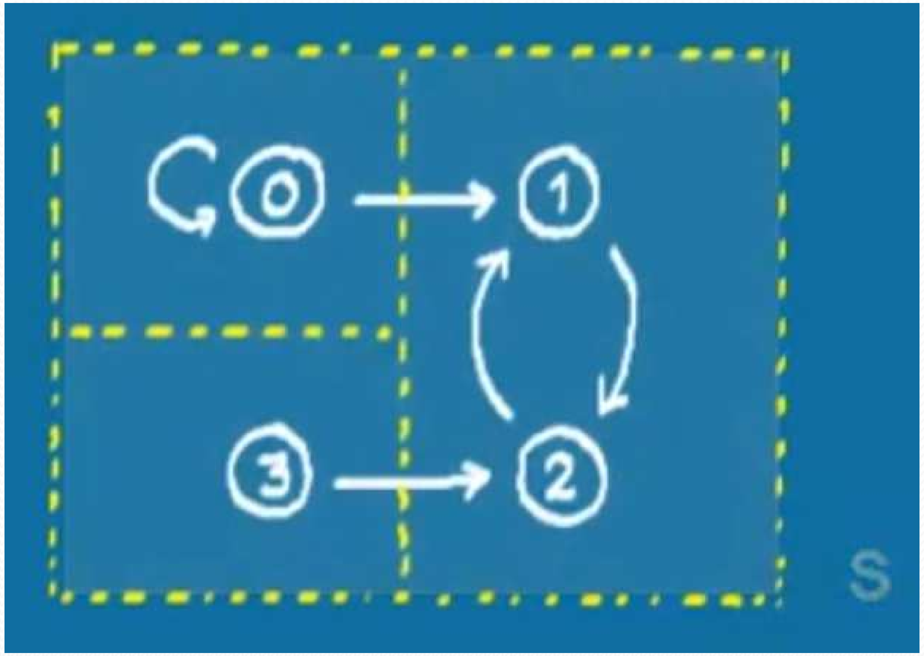
Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S.

Definição: Uma coleção não vazia de estados C é **fechada** se nenhum estado fora de C é acessível a partir de algum estado dentro de C.

- Se i é um estado absorvente $(p_{ii} = 1)$ então $C = \{i\}$.
- $C = \{estados\ recorrentes\}$

Classes Fechadas

- Para a cadeia abaixo, temos as seguintes classes fechadas:



$C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{0, 1, 2\}$, $C_3 = \{1, 2, 3\}$, $C_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Classes Fechadas

Pode-se provar o seguinte resultado para classes fechadas e irredutíveis:

PROPOSIÇÃO: Toda classe C **fechada** e **irredutível** é uma classe de comunicação.

Número de Visitas

Sejam i e j dois estados de uma cadeia de Markov $\{X_n: n = 0, 1, 2, \dots\}$ com espaço de estados S. Suponha $X_0 = i$.

Para $n = 1, 2, \dots$ defina a v.a.

$$N_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_k=j)}$$

Então,

- $0 \leq N_{ij}(1) \leq N_{ij}(2) \leq \dots$
- $\lim\limits_{n\to\infty} N_{ij}(n) = N_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(X_k=j)}$ quase certamente.

Número de Visitas

Pode-se provar os seguintes resultados:

PROPOSIÇÃO:

(a) $P(N_{ij} \geq k) = \begin{cases} 1, \ se\ k = 0 \\ f_{ij}(f_{jj})^{k-1}, \ se\ k \geq 1 \end{cases}$

(b) $P(N_{ij} = k) = \begin{cases} 1 - f_{ij}, \quad se\ k = 0 \\ f_{ij}\left(f_{jj}\right)^{k-1}(1 - f_{jj}), \quad se\ k \geq 1 \end{cases}$

Número de Visitas

(c) $E(N_{ij}) = \begin{cases} 0, \; se \; f_{ij} = 0 \\ \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}}, \; se \; 0 \leq f_{ij} < 1 \\ \infty, \; se \; f_{ij} \neq 0 \; e f_{jj} = 1 \end{cases}$

(d) $P(N_{ij} = \infty) = \begin{cases} 0, \; se \; j \text{ é } transiente \\ f_{ij}, \; se \; j \text{ é } recorrente \end{cases}$

(e) $P(N_{ij} < \infty) = \begin{cases} 1, \; se \; j \text{ é } transiente \\ 1 - f_{ij}, \; se \; j \text{ é } recorrente \end{cases}$

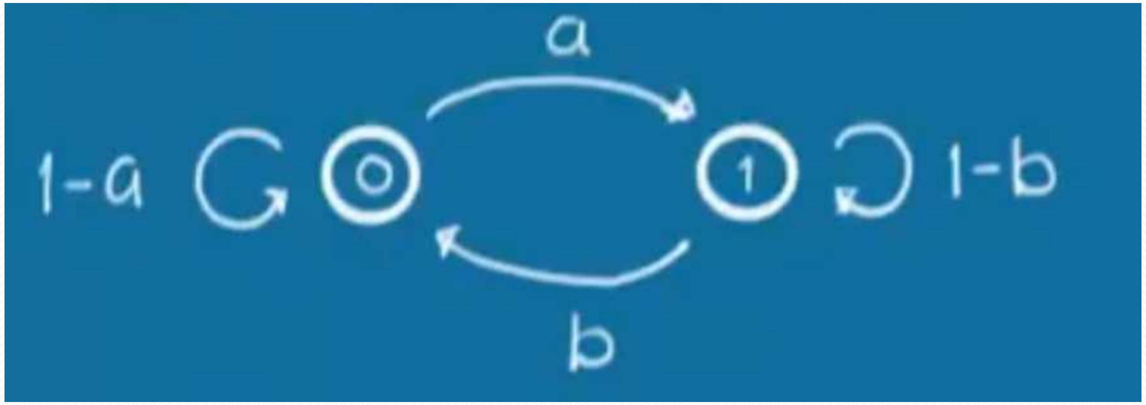
Propriedade Forte de Markov

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S.

Definição: Uma v.a. $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ é um tempo de parada (**stopping time**) com respeito a $\{X_n\}$ se o evento $\{\tau = n\}$ depende unicamente de $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Propriedade Forte de Markov

Seja uma cadeia de Markov de dois estados segundo o diagrama abaixo, com $0 < a, b < 1$.



Suponha $X_0 = 0$ e defina $\tau = \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Então τ é um tempo de parada, pois, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\{\tau = n\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\}.$$

Propriedade Forte de Markov

PROPOSIÇÃO: Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S e seja τ um tempo de parada finito.

Então $\{X_{\tau+n} : n = 0, 1, 2, \dots\}$ é também uma cadeia de Markov. Assim

$$P(X_{\tau+n+1} = j | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{\tau+n-1} = x_{n-1}, X_{\tau+n} = i)$$
$$= P(X_{\tau+n+1} = j | X_{\tau+n} = i)$$

(Propriedade Forte de Markov)

Teorema Ergódico para Cadeias de Markov

Sejam i e j dois estados de uma cadeia de Markov $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ com espaço de estados S. Suponha $X_0 = i$ e seja

$$N_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_k = j)}$$

Teorema Ergódico: Se a cadeia de Markov é irredutível e recorrente, então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_{ij}(n)}{n} = \frac{\mathbf{1}}{\mu_j}$$

quase certamente, com μ_j o tempo médio de recorrência ao estado j.

Teorema Ergódico para Cadeias de Markov

Interpretação: Para cadeias irredutíveis e recorrentes, o número

$$\pi_j = \frac{\mathbf{1}}{\mu_j}$$

é a frequência relativa do número de visitas ao estado *j* a longo prazo.

Teorema Ergódico para Cadeias de Markov

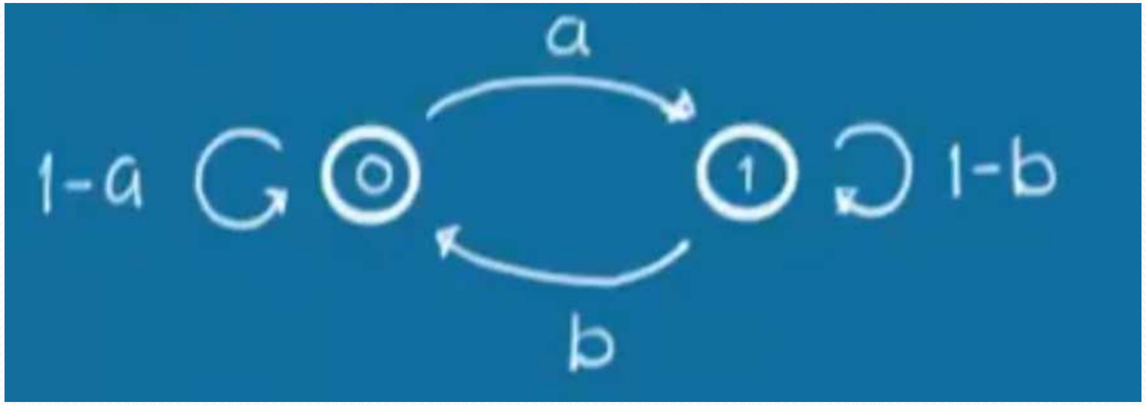
Corolário do Teorema Ergódico: Se a cadeia de Markov é irredutível e recorrente, então

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k)}{n} = \frac{\mathbf{1}}{\mu_j}$$

quase certamente, com μ_j o tempo médio de recorrência ao estado j.

Teorema Ergódico para Cadeias de Markov

Seja uma cadeia de Markov de dois estados segundo o diagrama abaixo, com $0 < a, b < 1$.



Vimos que $\mu_0 = \frac{a+b}{b}$ e $\mu_1 = \frac{a+b}{a}$. Assim

$$\pi_0 = \frac{1}{\mu_0} = \frac{b}{a+b} \text{ e } \pi_1 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{a}{a+b},$$

valores esses encontrados antes na distribuição limite.

Teorema Ergódico para Cadeias de Markov

Se, por exemplo, $a = 0{,}2$ e $b = 0{,}3$, temos

$$\pi_0 = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

$$\text{e} \;\; \pi_1 = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4,$$

ou seja em 60% do tempo a cadeia se encontra no estado 0 e em 40% do tempo a cadeia se encontra no estado 1.

Recorrência Positiva e Nula

Seja i um estado **recorrente** com tempo médio de

recorrência dado por

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}(n)$$

Definição: Diz-se que o estado i é recorrente

(a) **positivo** se

$$\mu_i < \infty;$$

(b) **nulo** se

$$\mu_i = \infty.$$

Recorrência Positiva e Nula

PROPOSIÇÃO: Recorrência positiva e recorrência nula são propriedades de classe, isto é, se $i \leftrightarrow j$, então

(a) se i é recorrente positivo, então j é recorrente positivo;

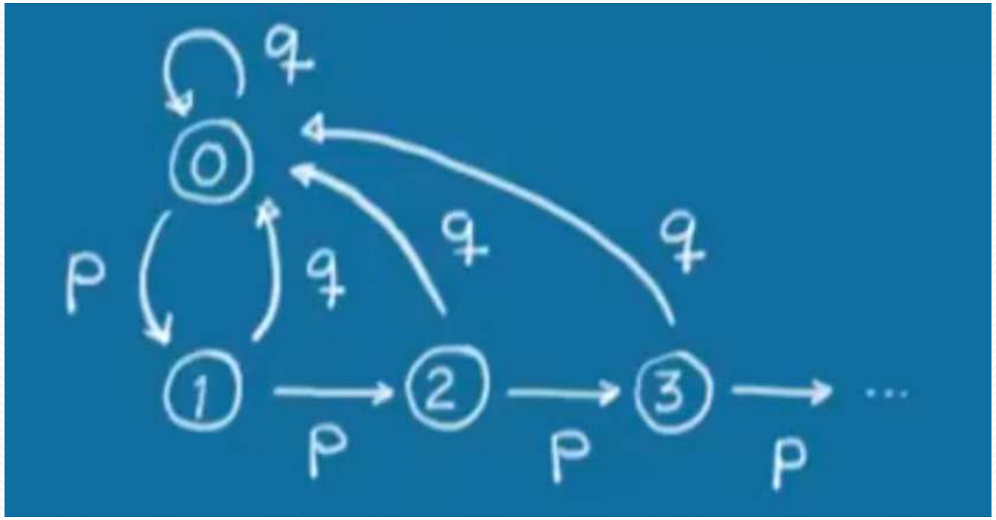
(b) se i é recorrente nulo, então j é recorrente nulo.

Há portanto três classes possíveis: classe transitória, classe recorrente positiva e classe recorrente nula.

PROPOSIÇÃO: Não existem estados recorrentes nulos em cadeias de Markov finitas.

Recorrência Positiva e Nula

Seja a Cadeia de Rajadas de Sucessos, dada pelo diagrama abaixo com $0 < p < 1$ e $p + q = 1$.



Pergunta-se: 0 é um estado recorrente positivo, isto é,

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{00}(n) < \infty?$$

Recorrência Positiva e Nula

Vimos que $f_{00}(n) = p^{n-1}q$, para $n \geq 1$.

Assim

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{00}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$$

$$= q\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = q\frac{1}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{1}{q} < \infty$$

Logo, 0 bem como todos os demais estados são recorrentes positivos (pois a cadeia é irredutível).

O que é uma distribuição estacionária?

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ com matriz de transição $\boldsymbol{P}$ e com **distribuição inicial**

$$\mathbf{p}(0) = (p_0(0), p_1(0), p_2(0) \dots).$$

Se $\mathbf{p}(1) = (p_0(1), p_1(1), p_2(1) \dots)$ é a distribuição de X_1, então temos

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\boldsymbol{P} \text{ e}$$

$$\mathbf{p}(\mathrm{n} + 1) = \mathbf{p}(\mathrm{n})\boldsymbol{P}$$

O que é uma distribuição estacionária?

Assim, resolvendo a recorrência, chegamos a

$$\mathbf{p}(\mathrm{n}) = \mathbf{p}(0)\boldsymbol{P}^{\,n}$$

Problematização: $\mathbf{p}(\mathrm{n})$ é convergente? Em geral a resposta é negativa. Veremos as condições para que isso aconteça.

O que é uma distribuição estacionária?

Definição: Uma distribuição de probabilidade

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$$

é **estacionária** ou **invariante** para a cadeia com matriz de transição $\boldsymbol{P}$ se $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$.

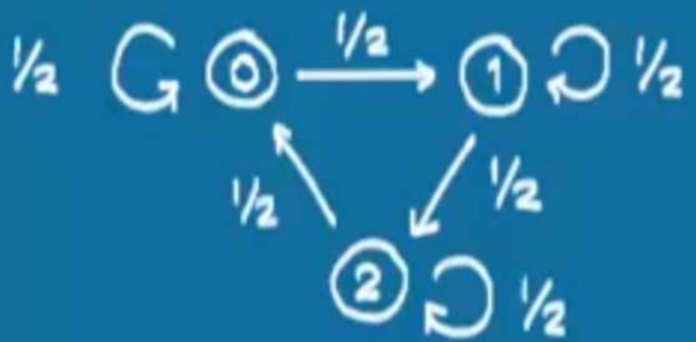
Há três casos a considerar para a cadeia:

- Existe uma única distribuição estacionária.
- Não existe distribuição estacionária.
- Há uma infinidade de distribuições estacionárias.

Exemplo de Distribuição Estacionária Única

Seja a cadeia de Markov abaixo:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$



Exemplo de Distribuição Estacionária Única

Defina $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

Então o sistema $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ é dado por

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = (\pi_0 + \pi_2)/2 \\ \pi_1 = (\pi_0 + \pi_1)/2 \\ \pi_2 = (\pi_1 + \pi_2)/2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Distribuições Estacionárias – Exemplo de Não-Existência

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ com $S = \mathbb{Z}$ tal que $X_0 = 0$ e

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } j = i + 1 \\ 1/2 & \text{se } j = i - 1 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i-1 & i & i+1 & \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array} \right\| \end{array}$$

Distribuições Estacionárias – Exemplo de Não-Existência

$\boldsymbol{\pi} = (\ldots, \pi_{-1}, \pi_0, \pi_1, \ldots)$ é uma distribuição estacionária se

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$$

Assim

$$\pi_i = \frac{1}{2}\pi_{i-1} + \frac{1}{2}\pi_{i+1} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja,}$$

$$\pi_{i+1} - \pi_i = \pi_i - \pi_{i-1} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{gathered}
\pi_1 - \pi_0 = \pi_1 - \pi_0 \\
\pi_2 - \pi_1 = \pi_1 - \pi_0 \\
\pi_3 - \pi_2 = \pi_1 - \pi_0 \\
\pi_4 - \pi_3 = \pi_1 - \pi_0 \\
\vdots \\
\pi_n - \pi_{n-1} = \pi_1 - \pi_0
\end{gathered}$$

Distribuições Estacionárias – Exemplo de Não-Existência

Somando ambos os lados, temos

$$\pi_n - \pi_0 = n(\pi_1 - \pi_0) \text{ para todo } n$$

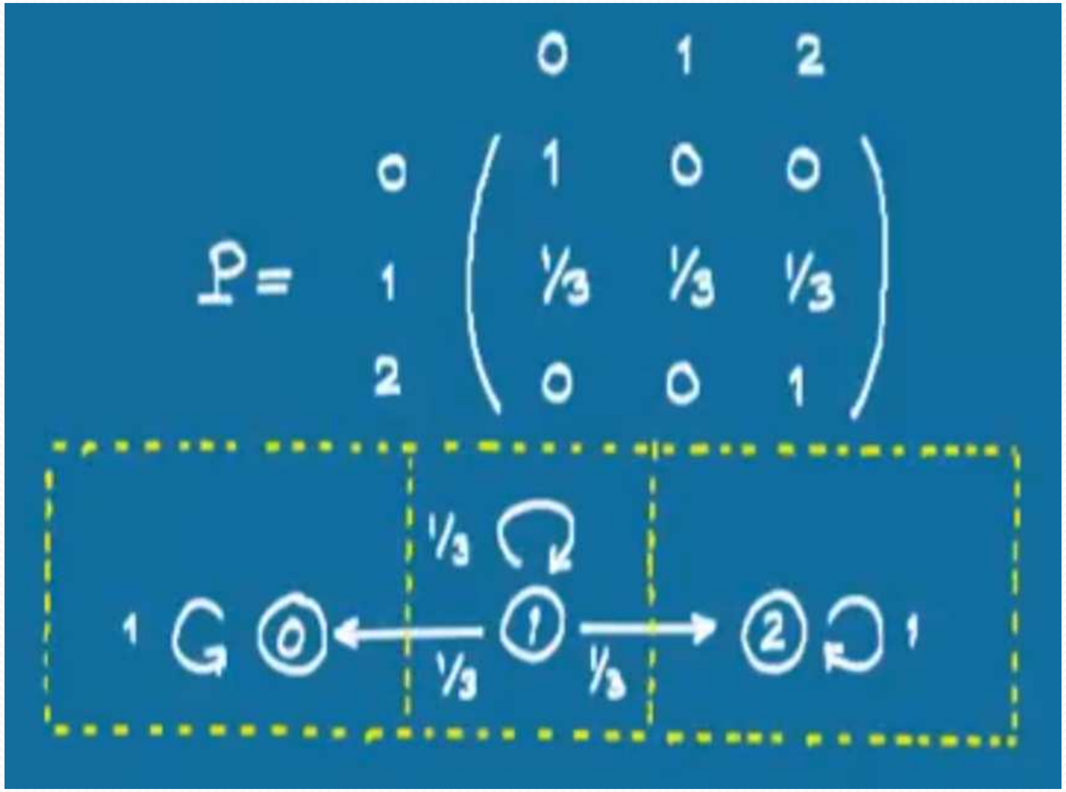
Para n tendendo ao infinito a igualdade só poderá ser satisfeita se $\pi_1 - \pi_0 = 0$, mas isso implica que

$$\pi_i - \pi_{i-1} = 0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim $\pi_i = p$ constante. Mas isso é impossível pois a cadeia tem infinitos estados. Logo, a cadeia não admite nenhuma distribuição estacionária.

Distribuições Estacionárias – Exemplos de Existência Múltipla

- Seja a cadeia de Markov dada abaixo:



Distribuições Estacionárias – Exemplos de Existência Múltipla

Defina $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$. Então o sistema $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ é dado por

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 + \pi_1/3 \\ \pi_1 = \pi_1/3 \\ \pi_2 = \pi_1/3 + \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Temos que $\pi_1 = 0$ e o sistema se reduz a

Distribuições Estacionárias – Exemplos de Existência Múltipla

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \\ \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \pi_0 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, temos infinitas soluções, tomando $\pi_0 = \alpha$ e $\pi_2 = 1 - \alpha$ com $0 \leq \alpha \leq 1$, do tipo

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\alpha, 0, 1 - \alpha).$$

Há portanto uma infinidade de distribuições estacionárias.

Distribuições Estacionárias – Exemplos de Existência Múltipla

Exercício: Mostre que a Cadeia do Jogador admite também uma infinidade de distribuições estacionárias.

Distribuições Estacionárias – Dois Resultados

PROPOSIÇÃO: Sejam $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi}$' duas distribuições estacionárias distintas para uma cadeia com matriz $\boldsymbol{P}$. Para todo $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\alpha\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha)\boldsymbol{\pi}'$$

é também uma distribuição estacionária.

Distribuições Estacionárias – Dois Resultados

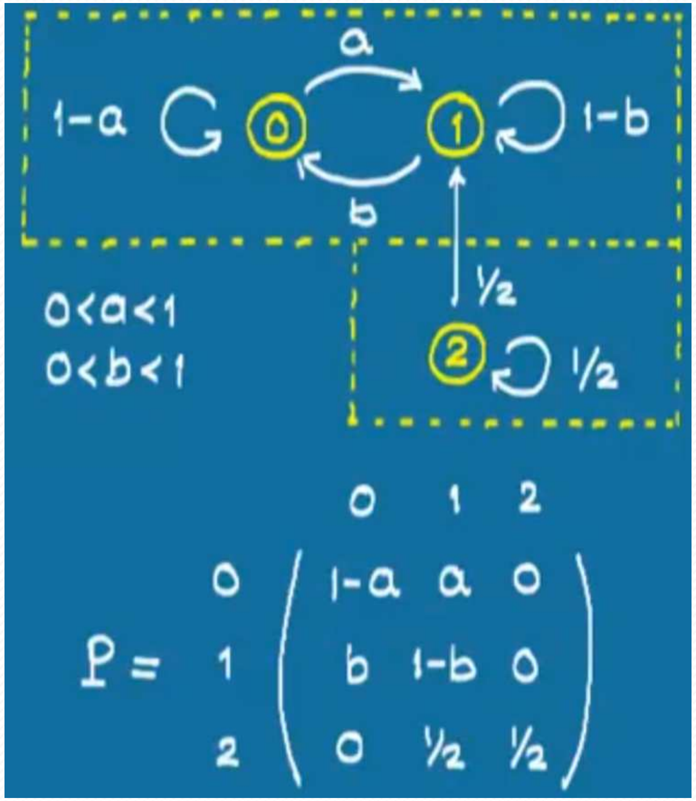
PROPOSIÇÃO: Sejam $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$ uma distribuição estacionária para uma cadeia de Markov com matriz $\boldsymbol{P}$.

Se j é um estado transiente ou recorrente nulo, então

$$\pi_j = 0.$$

Distribuições Estacionárias – Dois Resultados

Seja a cadeia abaixo



Distribuições Estacionárias – Dois Resultados

Vamos mostrar que para o estado 2 transiente teremos $\pi_2 = 0$.
Defina $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$.
Então o sistema $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ é dado por

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ b & 1-b & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = (1-a)\pi_0 + b\pi_1 \\ \pi_1 = a\pi_0 + (1-b)\pi_1 + \pi_2/2 \\ \pi_2 = \pi_2/2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\right)$.

Distribuições Estacionárias –Existência e Unicidade

Quando uma cadeia de Markov admite uma única distribuição estacionária?

PROPOSIÇÃO: Toda cadeia de Markov irredutível e recorrente positiva admite uma única distribuição estacionária $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$ dada por

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0.$$

O que é uma Distribuição Limite?

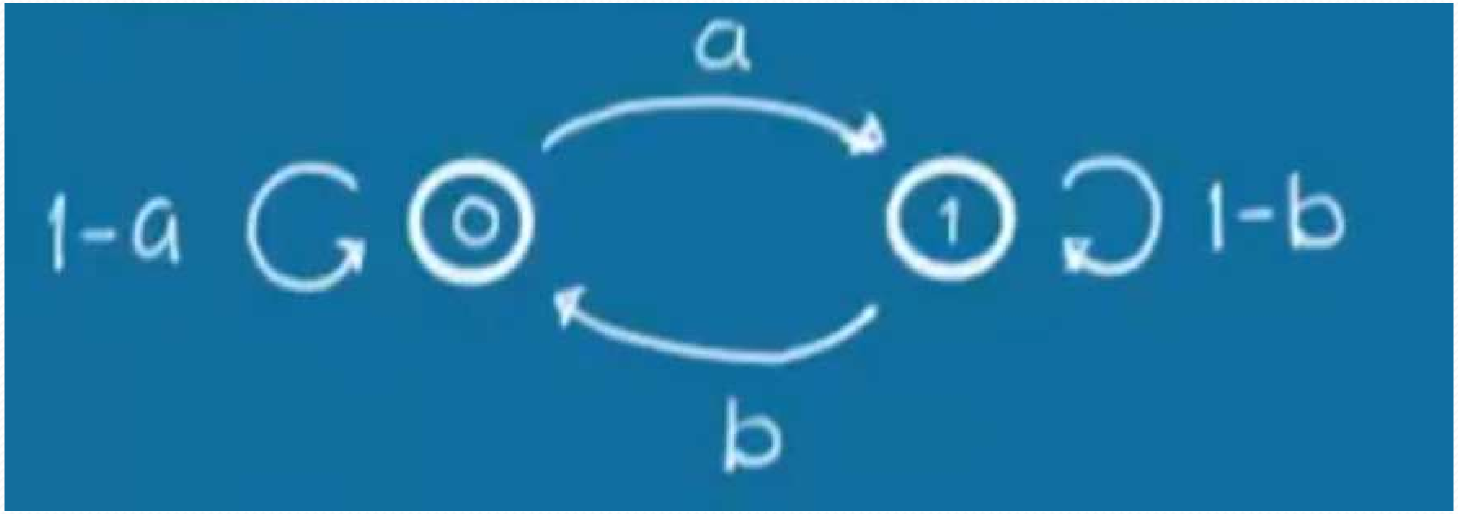
Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov com matriz de probabilidade de transição $\boldsymbol{P}[(p_{ij})]$.

Definição: A distribuição limite de $\{X_n\}$ é o vetor $\boldsymbol{\pi}^{\infty} = (\pi_0^{\infty}, \pi_1^{\infty}, \pi_2^{\infty}, \dots)$ onde

$$\pi_j^{\infty} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(\mathrm{n})$$

se o limite existe para todo estado j e não depende do estado i.

Distribuição Limite da Cadeia de Markov com Dois Estados



Distribuição Limite da Cadeia de Markov com Dois Estados

Vimos que

$$\boldsymbol{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) \\ p_{1,0}(n) & p_{1,1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}^n = \boldsymbol{P}^n$$

$$= \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}$$

Distribuição Limite da Cadeia de Markov com Dois Estados

E que, como $-1 < 1 - a - b < 1$, temos

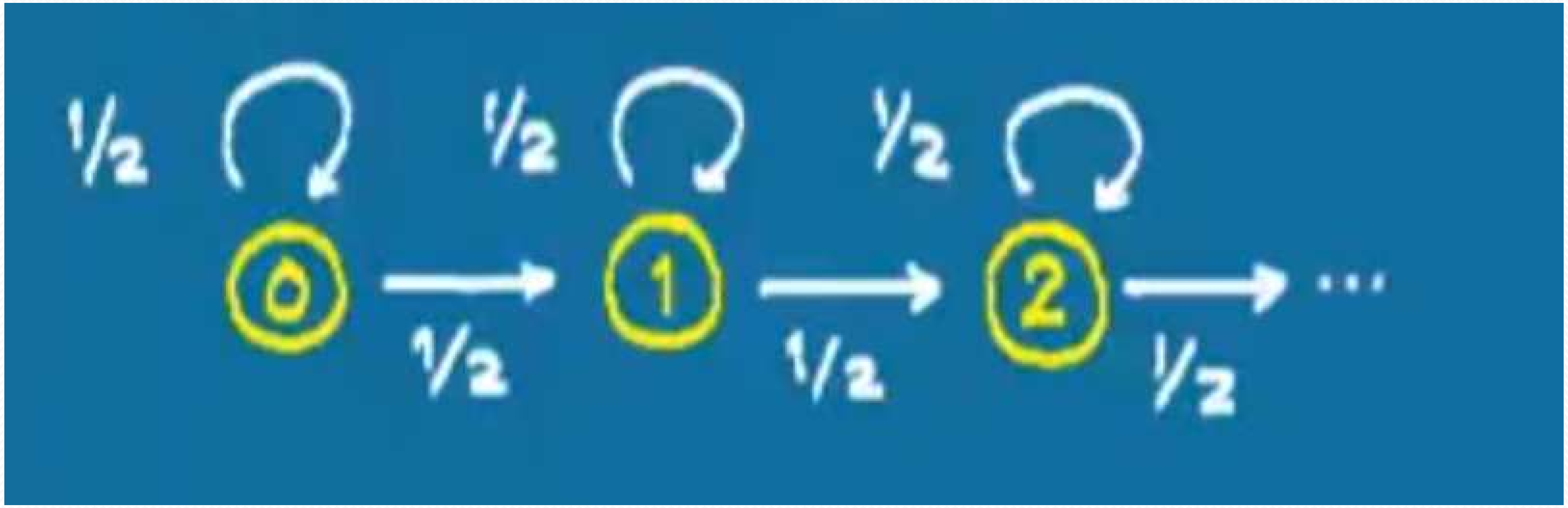
$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{P}(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{bmatrix}$$

ou seja, não importa onde a cadeia começa, a distribuição limite existe e é dada por

$$\pi_0^\infty = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} p_{i0}(\mathrm{n}) = \frac{b}{a+b} \text{ e } \pi_1^\infty = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} p_{i1}(\mathrm{n}) = \frac{a}{a+b}.$$

Distribuição Limite que não é Distribuição de Probabilidade

Seja a cadeia de Markov abaixo.



Mostraremos que a distribuição limite existe, mas não é uma distribuição de probabilidade.

Distribuição Limite que não é Distribuição de Probabilidade

A matriz de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\| \end{array}$$

Distribuição Limite que não é Distribuição de Probabilidade

A matriz $\boldsymbol{P}^2$ é dada por

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} (1/2)^2 & 2\,(1/2)^2 & (1/2)^2 & 0 & \cdots \\ 0 & (1/2)^2 & 2\,(1/2)^2 & (1/2)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & (1/2)^2 & 2\,(1/2)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & (1/2)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\| \end{array}$$

Distribuição Limite que não é Distribuição de Probabilidade

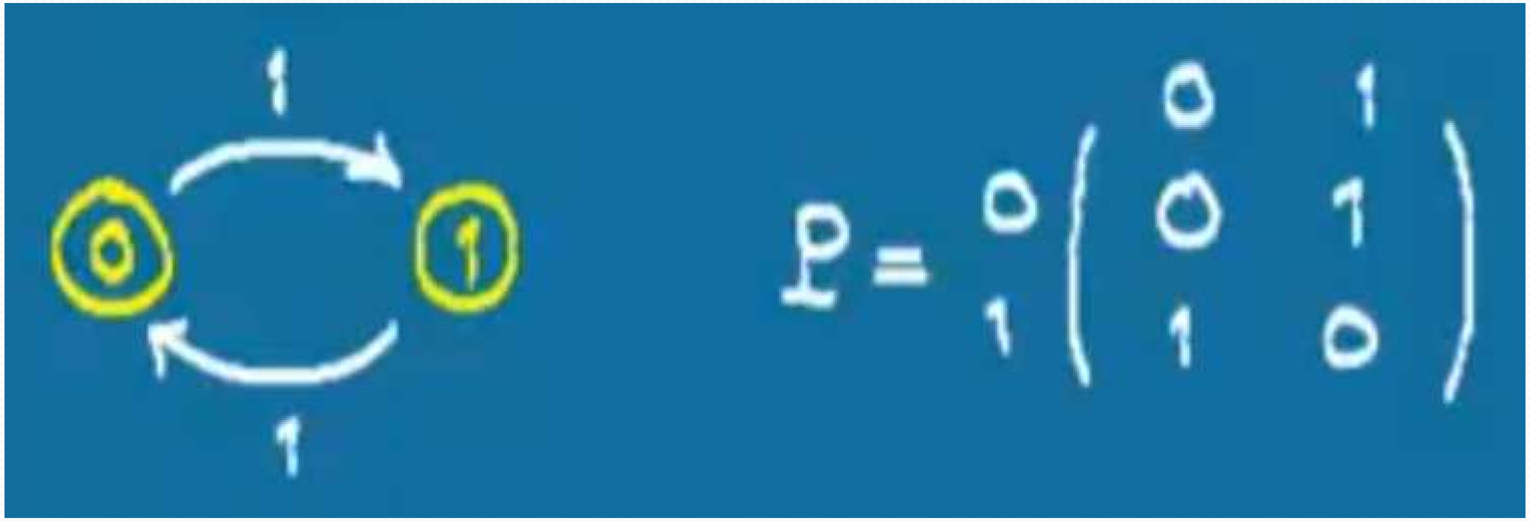
A matriz $\boldsymbol{P}^2$ é dada por

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \quad 0 & \quad\quad 1 & \quad\quad 2 & \quad\quad 3 & \quad\quad \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} (1/2)^2 & 2\,(1/2)^2 & (1/2)^2 & 0 & \cdots \\ 0 & (1/2)^2 & 2\,(1/2)^2 & (1/2)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & (1/2)^2 & 2\,(1/2)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & (1/2)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\| \end{array}$$

e se pode mostrar que para quaisquer i e j, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$, e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \mathbf{0}$ (matriz nula).

Distribuição Limite não existente

Seja a cadeia de Markov dada abaixo:



Então temos: $\boldsymbol{P}^n = \begin{cases} \boldsymbol{P} \; se \; n \text{ é } ímpar \\ \boldsymbol{I} \; se \; n \text{ é } par \end{cases}$

Logo, não existe a distribuição limite.

Propriedades da Distribuição Limite

Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov com matriz de probabilidade de transição $\boldsymbol{P}(p_{ij})$ tal que $\pi_j^{\infty} = \lim\limits_{\boldsymbol{n} \to \infty} p_{ij}(\mathrm{n})$ existe para todo estado j e não depende do estado i. Então:

PROPOSIÇÃO: Se a cadeia é finita, então

(a) $\sum_j \pi_j^{\infty} = 1$ e

(b) $\pi_j^{\infty} = \sum_i \pi_i^{\infty}\, p_{ij}$.

Propriedades da Distribuição Limite

PROPOSIÇÃO: Se a cadeia é infinita, então

(a) $\sum_j \pi_j^{\infty} \leq 1$ e

(b) $\pi_j^{\infty} = \sum_i \pi_i^{\infty} \, p_{ij}$.

Convergência à Distribuição Estacionária

PROPOSIÇÃO: Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov irredutível e recorrente. Defina

$$\tau_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}.$$

Então

$$P(\tau_j < \infty) = 1.$$

Convergência à Distribuição Estacionária

TEOREMA: Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov tal que

(i) é irredutível,

(ii) é aperiódica e

(iii) possui uma única distribuição estacionária $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$. Então

$$\pi_j^{\infty} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j.$$

.

Convergência de Cadeias de Markov

TEOREMA: Seja o processo $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma cadeia de Markov tal que

(i) é irredutível,

(ii) é aperiódica e

(iii) é recorrente positiva.

Então

(a) existe uma única distribuição estacionária $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$ dada por $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j}$.

O que é um Processo de Poisson?

Um processo de contagem $\{N_t : t \geq 0\}$ é dito um Processo de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$, se

(i) $N_0 = 0$

(ii) O processo tem incrementos independentes e estacionários

(iii) Para h pequeno

$$P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$$
$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$
$$P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$$

O que é um Processo de Poisson?

TEOREMA: Se $\{N_t : t \geq 0\}$ é um Processo de Poisson, então para todo $t \geq 0$,

$$P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

COROLÁRIO: Para $s, t \geq 0$,

$$P(N_{t+s} - N_t = k | N_u, u \leq t) = P(N_{t+s} - N_t = k)$$
$$= \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

O que é um Processo de Poisson?

TEOREMA: Se $\{N_t : t \geq 0\}$ é um Processo de Poisson, então

(a) para quase todo ω, cada salto de $N_t(\omega)$ tem medida 1 e

(b) para $s, t \geq 0$

$$E(N_{t+s} - N_t = k | N_u, u \leq t) = \lambda s.$$

O que é um Processo de Poisson?

TEOREMA: Sejam $T_1, T_2, T_3, \ldots$ v.a.'s absolutamente contínuas com T_1 representando o tempo da primeira chegada de um Processo de Poisson, T_j o tempo entre a $(j-1)$-ésima chegada e a j-ésima chegada, para $j \geq 2$. Então T_j são v.a.'s i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro λ.

Como simular um Processo de Poisson?

Uma vez que $N_t = \max\{n \geq 1 : T_1 + T_2 + \cdots + T_n \leq t\}$

com $T_j's$ v.a.'s i.i.d. com distribuição exponencial de

parâmetro λ, basta simular n realizações $t_1, t_2, \ldots, t_n$ da

distribuição exponencial e os tempos de chegada do

processo de Poisson são dados por

$$t_1,\ \ t_1 + t_2,\ t_1 + t_2 + t_3, \ldots,\ t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n$$

O Processo de Poisson Não-Homogêneo

Um processo de contagem $\{N_t : t \geq 0\}$ é dito um Processo de Poisson não-homogêneo de parâmetro $\lambda(t) > 0$, se

(i) $N_0 = 0$

(ii) O processo tem incrementos independentes

(iii) Para h pequeno

$$P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$$
$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda(t)h + o(h)$$
$$P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$$

O Processo de Poisson Não-Homogêneo

TEOREMA: Se $\{N_t : t \geq 0\}$ é um Processo de Poisson não-homogêneo, então para todo $t \geq 0$,

$$P(N_{t+s} - N_t = k) = \frac{e^{-[m(s+t)-m(s)]}(m(s+t)-m(s))^k}{k!},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ com $m(t) = \int_0^t \lambda(u)du$.

O Processo de Poisson Composto

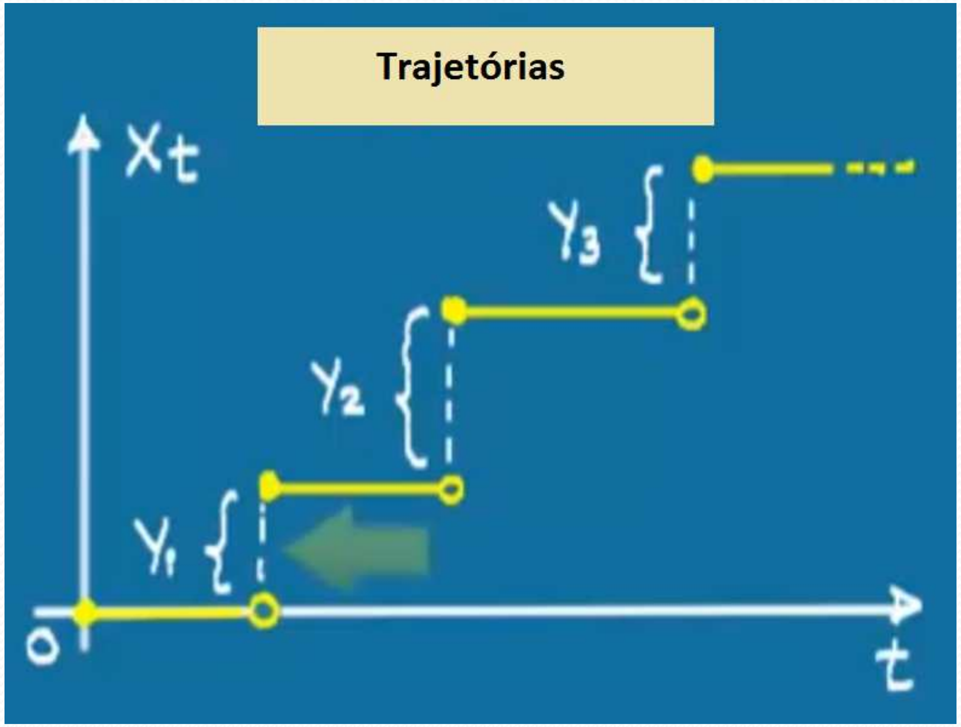
O Processo de Poisson Composto é um processo a tempo contínuo $\{X_t : t \geq 0\}$ da forma

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$$

com $\{N_t : t \geq 0\}$ um processo de Poisson homogêneo de parâmetro $\lambda > 0$ e $\{Y_n : n = 1, 2, \dots\}$ são v.a.'s i.i.d. independentes do processo de Poisson.

O Processo de Poisson Composto

As trajetórias do processo de Poisson Composto são do tipo



O Processo de Poisson Composto

- $\sum_{n=1}^{0} Y_n := 0$

- Quando $Y_n = 1$, para todo n, o processo de Poisson Composto recupera o Processo de Poisson homogêneo.

- A distribuição de X_t não é necessariamente de Poisson e depende da distribuição de Y, podendo, portanto, ter espaço de estados discretos ou contínuos.

O Processo de Poisson Composto

- $E(X_t) = E(N_t)E(Y)$

- X_t tem incrementos independentes e estacionários.

- Os tempos $T_1, T_2, T_3, \ldots$ entre as chegadas são os mesmos do Processo de Poisson $\{N_t\}$ e, portanto, são v.a.'s i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro λ.

- X_t satisfaz à propriedade de Markov.

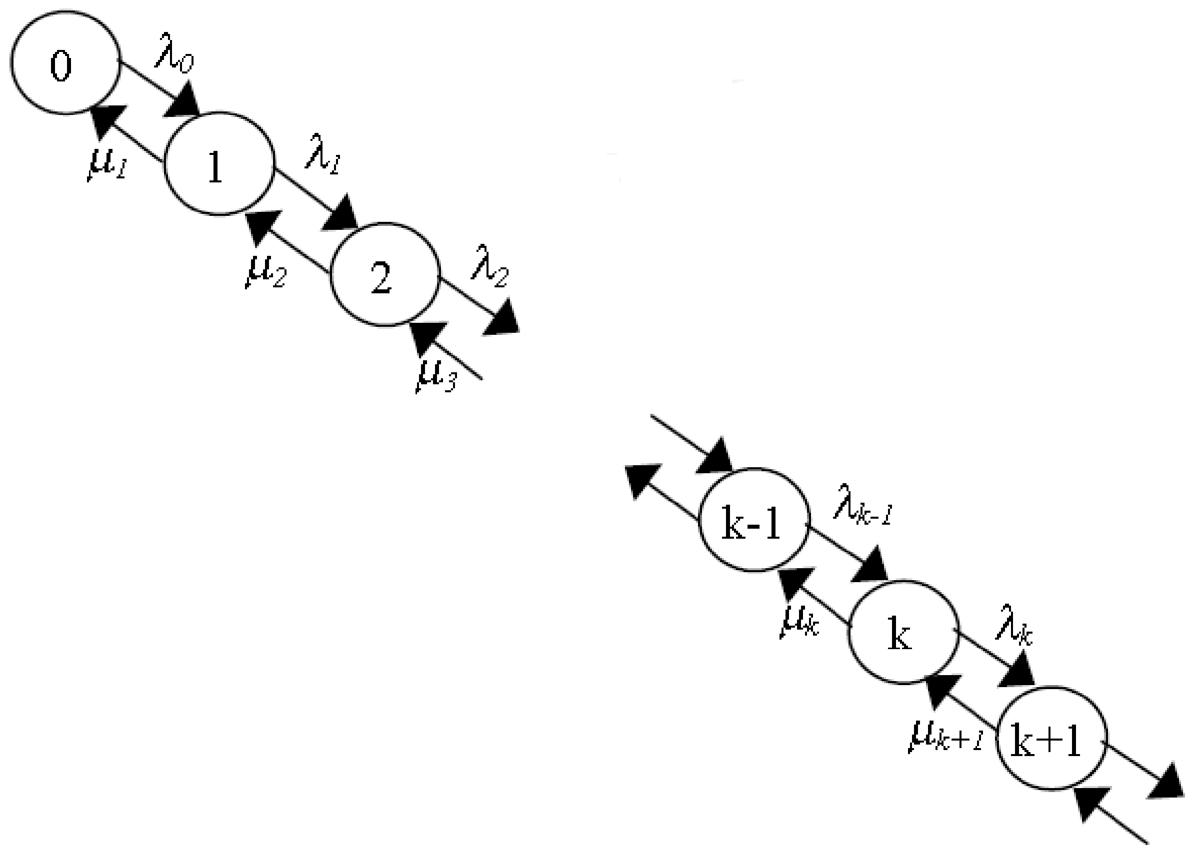
Processos de Nascimento e Morte

O processo a tempo contínuo $\{X_t : t \geq 0\}$ é dito um processo de nascimento e morte com taxa de nascimento λ_k do estado k e taxa de morte μ_k do estado k se as transições obedecem ao seguinte modelo

Para h pequeno (infinitesimal):

$$P(X_{t+h} = k + 1 | X_t = k) = \lambda_k h + o(h)$$
$$P(X_{t+h} = k - 1 | X_t = k) = \mu_k h + o(h)$$
$$P(X_{t+h} = k | X_t = k) = 1 - (\lambda_k + \mu_k) h + o(h)$$

Processos de Nascimento e Morte



Processos de Nascimento e Morte

Defina $P(X_t = k) = p_k(t)$. Então pode-se mostrar que a dinâmica em tempo contínuo de $p_k(t)$ é dada pelas equações diferenciais recursivas:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda_0 h) + p_1(t)\mu_1 h + o(h)$$
$$p_k(t+h)$$
$$= p_k(t)(1-(\lambda_k+\mu_k)h) + p_{k-1}(t)\lambda_{k-1}h + p_{k+1}(t)\mu_{k-1}h + o(h)$$

O que nos dá

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda_k+\mu_k)\, p_k(t) + \lambda_{k-1}p_{k-1}(t) + \mu_{k-1}p_{k+1}(t)$$

Processos de Nascimento e Morte

A distribuição estacionária $p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t)$, quando existe, é obtida das equações anteriores tomando $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$ e acrescentando a condição normalizadora $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

O que nos dá

$$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$$

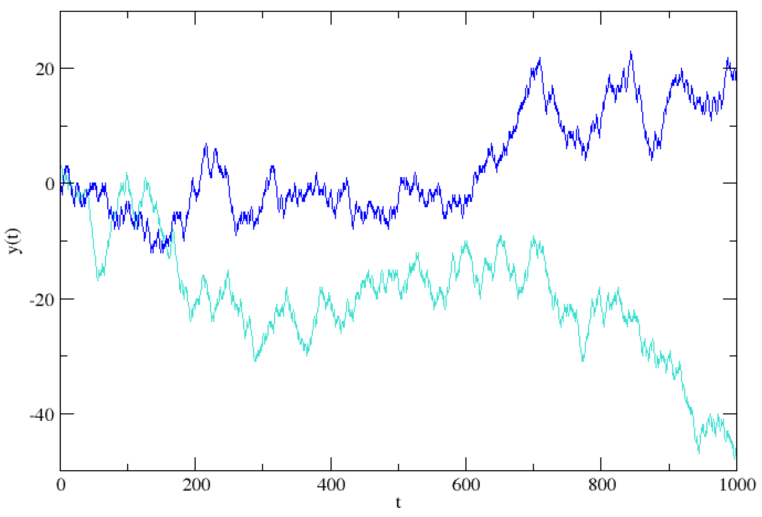
$$-(\lambda_k + \mu_k)\, p_k + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k-1} p_{k+1} = 0$$

cuja solução é dada por

$$p_k = p_0 \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right] \text{ e } p_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

O que é um Movimento Browniano?

O movimento Browniano é o nome dado ao movimento aleatório de partículas num líquido ou gás como consequência dos choques das moléculas do meio nas partículas.



- Robert Brown, em 1827, observou no microscópio pequenos grãos de pólen suspensos em água. Percebeu também que isso acontecia igualmente com partículas inorgânicas.
- Em 1900, Louis Bachelier observou que o mercado de ações tinha um aspecto visual muito semelhante ao movimento browniano a uma dimensão
- Em 1905, Albert Einstein, usando a teoria cinética dos gases, explicou quantitativamente os movimentos observados por Brown.

Características do Movimento Browniano

- É de trajetórias contínuas.

- Os deslocamentos são erráticos e parecem não ter relação um com o outro em intervalos de tempo distintos.

- A partícula tem múltiplas colisões com as moléculas do meio.

Modelo Matemático do Movimento Browniano

Definição: Um Movimento Browniano unidimensional de parâmetro σ^2 é um processo estocástico $\{B_t: t \geq 0\}$ com valores reais satisfazendo:

- $B_0 = 0$ quase certamente.
- Suas trajetórias são contínuas.
- Tem incrementos independentes.
- Para $0 \leq s < t, \quad B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$.

$\{B_t: t \geq 0\}$ é também chamado de **Processo de Wiener**.

Modelo Matemático do Movimento Browniano

Definição: Seja $t \geq 0$ e sejam x e y reais. Definimos

$$p(t,y,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(x-y)^2/2\sigma^2 t}$$

PROPOSIÇÃO: Seja $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano. Então $B_t \sim N(0,\sigma^2 t)$, ou seja, B_t tem *f.d.p.* dada por $p(t,0,x)$.

Modelo Matemático do Movimento Browniano

PROPOSIÇÃO: Se $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ então o vetor aleatório $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ tem *f.d.p.* conjunta dada por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= p(t_1, 0, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \ldots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n).$$

Assim

$$P\left(B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2, \ldots, B_{t_n} \in A_n\right) =$$
$$\int_{A_1} \ldots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \ldots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \ldots \mathrm{d}x_1$$

Movimento Browniano – Outros Conceitos Básicos

Seja $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano.

Definições:

1) Quando $\sigma^2 = 1$, o movimento Browniano é denominado padrão.
2) Denota-se por $\{B_t^x : t \geq 0\}$ o movimento Browniano começando por x.
3) Um movimento Browniano n-dimensional é um processo da forma $(B_1(t), \ldots, B_n(t)\ \ )$ cujas coordenadas são movimentos Brownianos unidimensionais independentes.

Movimento Browniano – Outros Conceitos Básicos

PROPOSIÇÃO: Seja $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano padrão. Então os seguintes resultados se verificam:

$(i)\ E(B_t) = 0.$

$(ii)\ Var(B_t) = E(B_t^2) = t.$

$(iii)\ Var(B_t - B_s) = |t - s|.$

$(iv)\ Cov(B_t, B_s) = \min(t, s).$

O Movimento Browniano é um Processo Markoviano

PROPOSIÇÃO: O movimento Browniano $\{B_t : t \geq 0\}$ é um processo de Markov, isto é,

$$\text{para } 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$$

$$P\left(B_{t_{n+1}} \in A | B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \dots, B_{t_n} = x_n\right)$$

$$= P\left(B_{t_{n+1}} \in A | B_{t_n} = x_n\right)$$

O Movimento Browniano é um Martingal Contínuo

PROPOSIÇÃO: O movimento Browniano $\{B_t\colon t \geq 0\}$ é um martingal contínuo, isto é, $E(B_t|B_u, 0 < u \leq s)$ =B_s.

Teorema de Caracterização de Paul Lévy: Um processo $\{X_t\colon t \geq 0\}$ é um movimento Browniano, se e somente se,

- $X_0 = 0$ quase certamente.
- Suas trajetórias são contínuas.
- $\{X_t\colon t \geq 0\}$ é um martingal.
- $\{X_t^2 - t\colon t \geq 0\}$ é um martingal.

Como Simular um Movimento Browniano

Seja o passeio aleatório com $X_0 = 0$

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

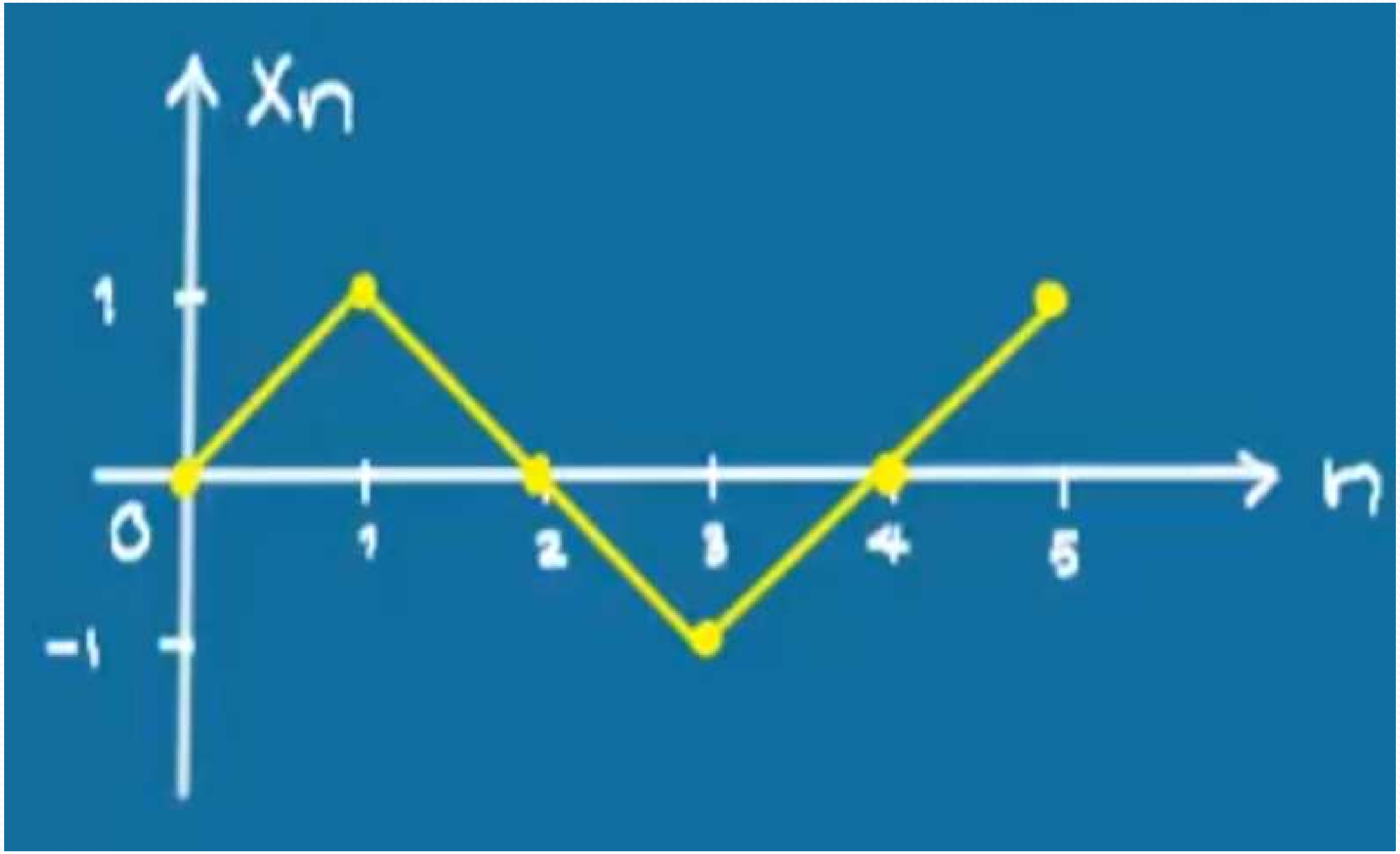
com $Y_i' s$ variáveis aleatórias $i.i.d.$ tais que

$$P(Y_i = +1) = P(Y_i = -1) = 1/2.$$

Assim $E(Y_i) = 0$ e $Var(Y_i) = 1$, e com isso

$$E(X_n) = 0 \text{ e } Var(X_n) = n.$$

Como Simular um Movimento Browniano



Como Simular um Movimento Browniano

Tome agora uma nova escala de tempo como

$$\Delta t = \frac{1}{N}$$

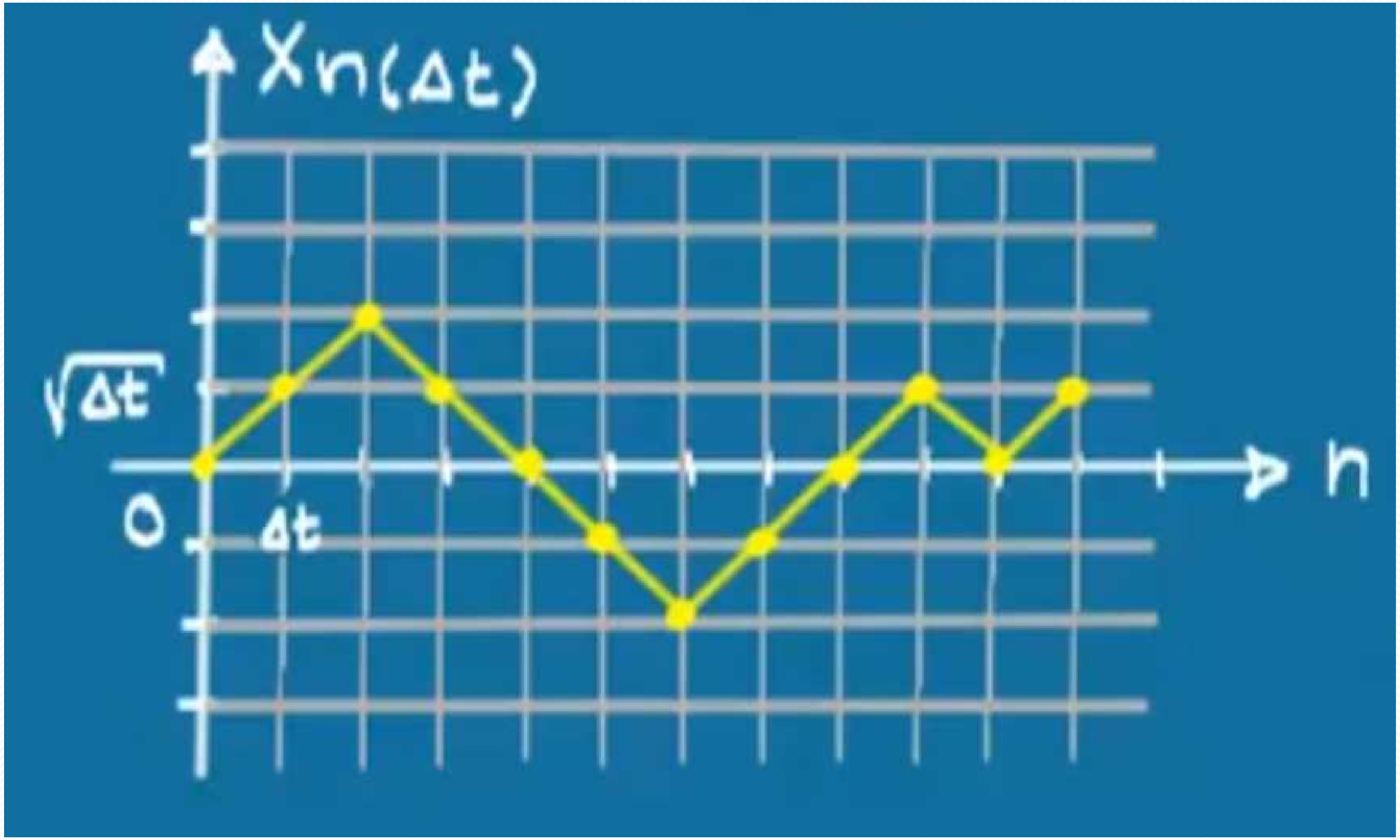
para N um número natural, e para $n = 1, 2, \ldots$ defina

$$X_{n(\Delta t)} = \sqrt{\Delta t} Y_1 + \sqrt{\Delta t} Y_2 + \cdots + \sqrt{\Delta t} Y_n$$

Assim

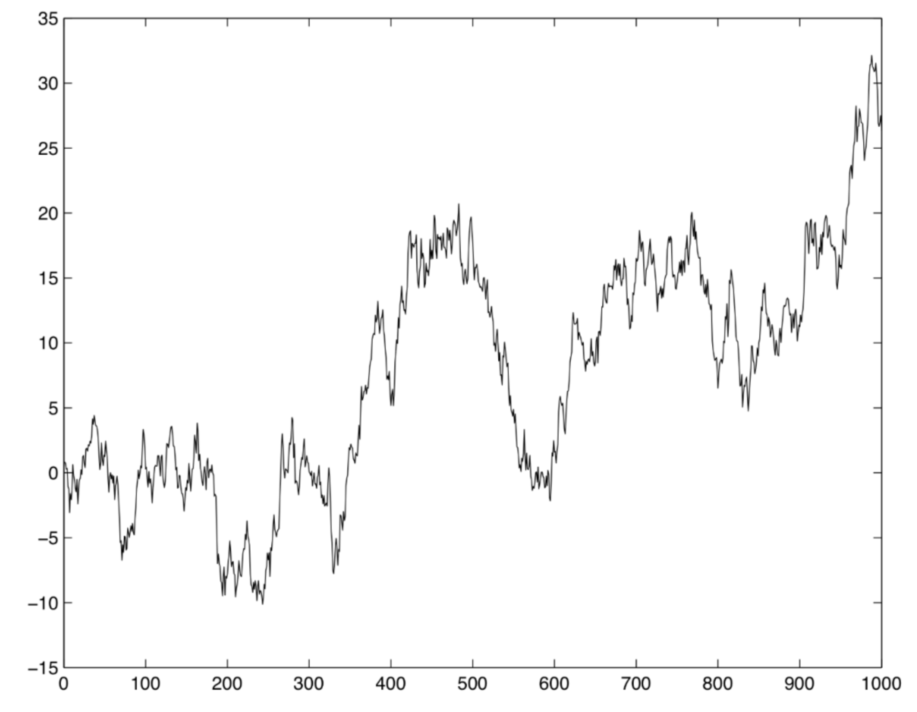
$$E(X_{n(\Delta t)}) = 0 \text{ e } Var(X_{n(\Delta t)}) = n\Delta t.$$

Como Simular um Movimento Browniano



Movimento Browniano – Propriedades das Trajetórias

Seja $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano padrão, como simulado na figura a seguir:



Movimento Browniano – Propriedades das Trajetórias

Seja $[a, b]$ um interval de tempo e seja

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

uma partição finita de $[a, b]$.

Seja $\Delta t = max\ _i\{t_i - t_{i-1}\}$.

PROPOSIÇÃO: A variação de $\{B_t : t \geq 0\}$ sobre $[a, b]$ é infinita quase certamente, isto é,

$$\lim_{\Delta t \to 0} sup \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty$$

quase certamente.

Movimento Browniano – Propriedades das Trajetórias

PROPOSIÇÃO: A variação quadrática de $\{B_t: t \geq 0\}$ sobre $[a, b]$ é finita e vale o comprimento do intervalo, isto é,

$$\lim_{\Delta t \to 0} sup \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 = b - a$$

em media quadrática.

PROPOSIÇÃO: O movimento Browniano $\{B_t: t \geq 0\}$ não é diferenciável em nenhum ponto $t \geq 0$, quase certamente.

Movimento Browniano – Propriedades das Trajetórias

Essas propriedades nortearam a criação do Cálculo Estocástico por Itô, estruturado em média quadrática, gerando resultados supreendentes como, por exemplo,

$$(dB_t)^2 = dt$$

$$\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

OBRIGADO!

BOM ESTUDO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS!