



9ª Semana da Estatística – IME – UFF
Modelagem Econométrica em Finanças:
Modelos ARCH, GARCH e EGARCH

- **APRESENTAÇÃO DO MINICURSO**

- **Objetivo:**

Apresentar os conceitos básicos e algumas aplicações da moderna modelagem econométrica de séries temporais em finanças para alunos de graduação em Estatística e áreas afins.

- **Ementa:**

Conceitos básicos da análise de séries temporais no domínio do tempo; testes de raiz unitária; e introdução aos modelos SARIMA, ARCH, GARCH e EGARCH.

- **Softwares indicados para a modelagem:**

- **Eviews, software R, PcGive, PcFiml, Stata, Matlab e SAS.**

- **Bibliografia recomendada:**

- **Engle, R.; 1982; “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity whith Estimates of the variance of UK Inflation”. *Econometrica*, 50, 987-1008.**
- **Bollerslev, T. Y.; 1986; “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity whith Estimates of the variance of UK Inflation”. *Econometrica*, 50, 987-1008.**
- **Campbell, J.; Lo, A.; MacKinlay, A.; 1997; “The Econometrics of Financial Markets”. Princeton University Press; Princeton, NJ.**
- **Hamilton, J.; 1994; “Time Series Analysis”. Princeton University Press; Princeton, NJ.**

- **INTRODUÇÃO**
- **DEFINIÇÃO INFORMAL DE SÉRIE TEMPORAL**

Uma série temporal pode ser definida como um conjunto de observações de uma variável ou fenômeno de interesse, ordenadas no tempo e geralmente medidas e coletadas em valores numéricos de mesma periodicidade.

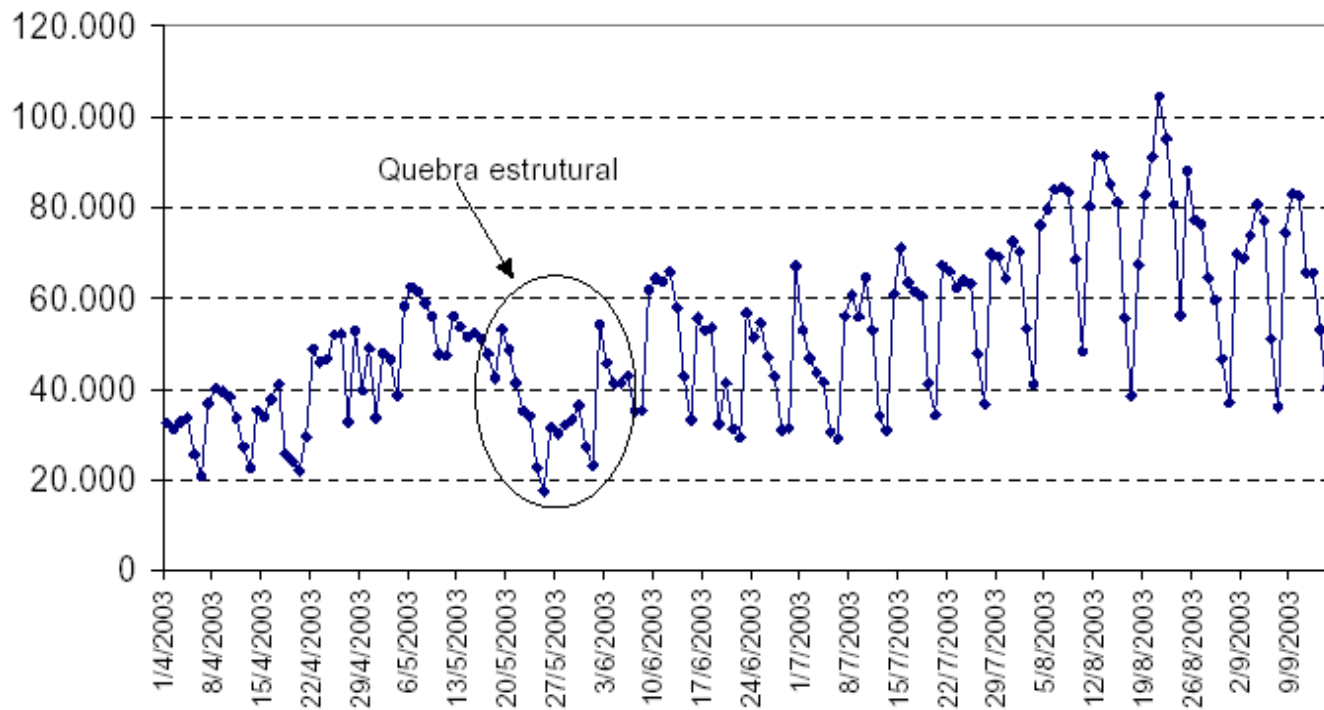
(Na prática, comumente se trabalha com séries temporais de periodicidades diária, mensal, trimestral e anual.)

- **Tipos de Série Temporal**

- **Série Temporal Discreta:** descreve o comportamento de realizações de uma variável aleatória discreta no tempo. Variáveis que definem processos de contagem ou conjuntos enumeráveis de uma forma geral.
- **Série Temporal Contínua:** descreve o comportamento de realizações de uma variável aleatória contínua no tempo. Variáveis que representam conjuntos não enumeráveis.
- **Amostragem de uma Série Temporal:** é sempre realizada de forma discreta, mesmo que o fenômeno ou a variável aleatória seja contínua, pois não é possível investigar e modelar dados essencialmente contínuos.

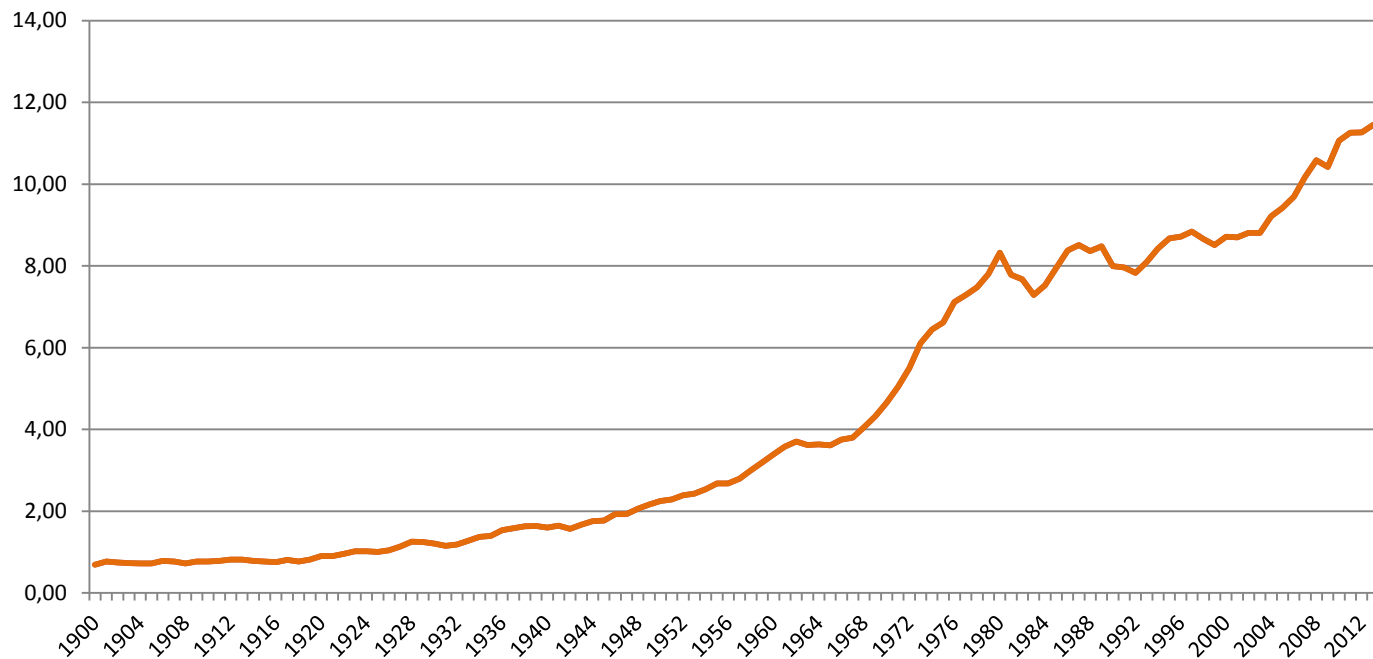
- **EXEMPLOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

Número de Ligações Telefônicas Diárias Recebidas por um Call Center, no período de janeiro a setembro de 2003



- **EXEMPLOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

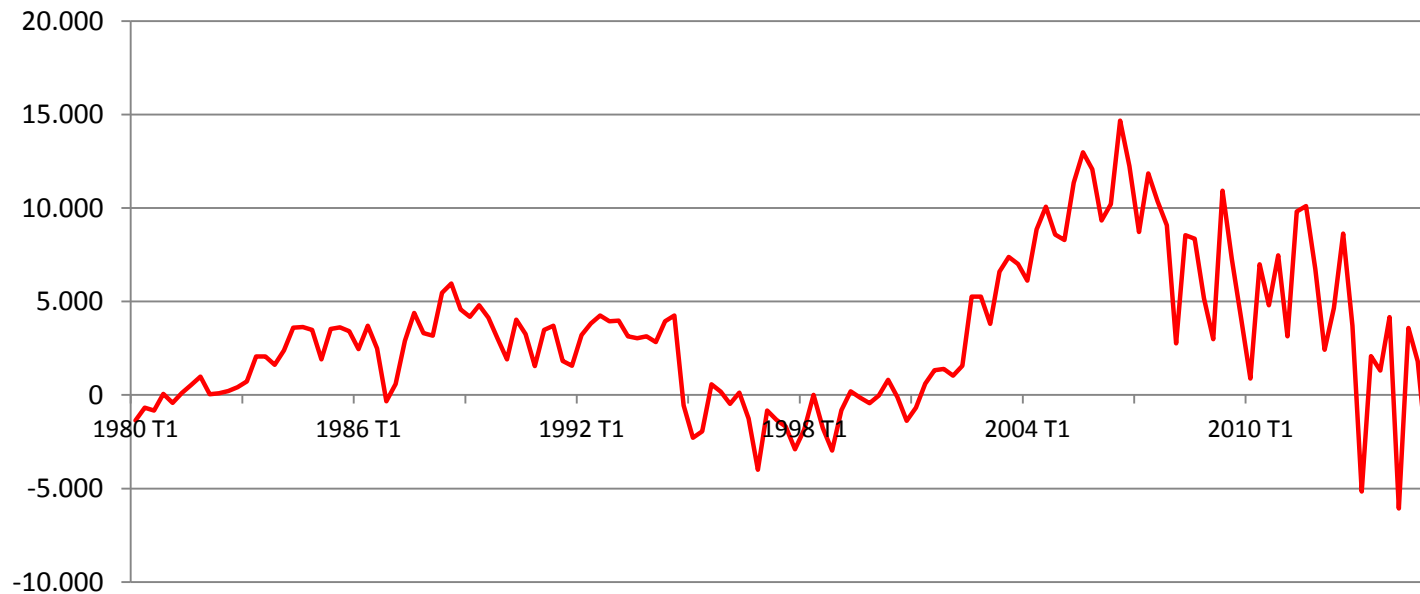
**Brasil - PIB per capita anual, no período de 1900 a 2013
(em mil US\$ de 2013)**



Fonte: IBGE (dados brutos); IPEA – GAC (cálculos e derivações)

- **EXEMPLOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

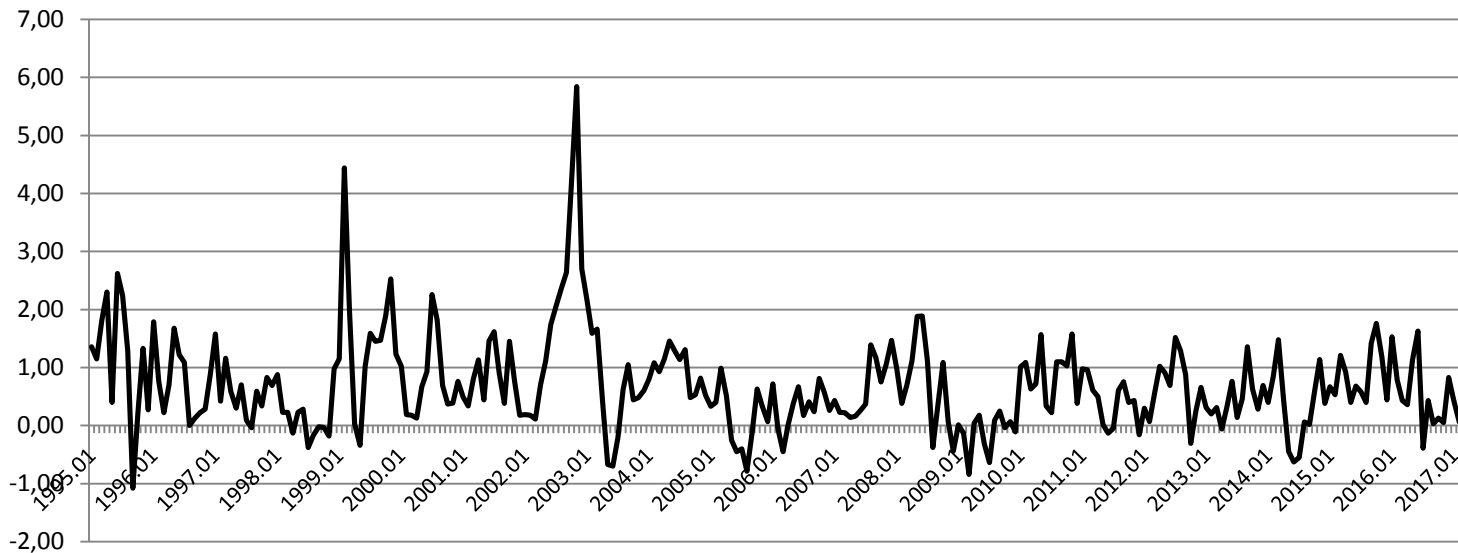
**Saldo Trimestral da Balança Comercial Brasileira (FOB),
no Período de 1980 a 2014 - (em milhões de US\$)**



Fonte: Banco Central do Brasil

- **EXEMPLOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

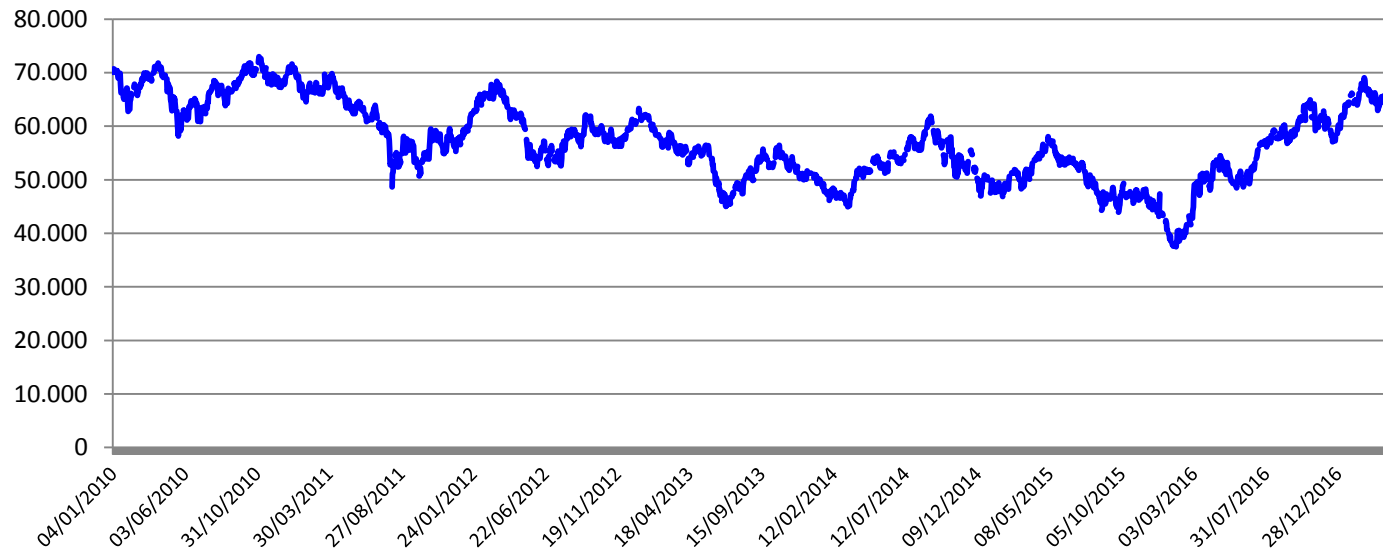
**Taxa Mensal de Inflação - IGP- DI - FGV,
no Período de jan/1995 a fev/2017 (em %)**



Fonte: Fundação Getúlio Vargas - FGV

- **EXEMPLOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

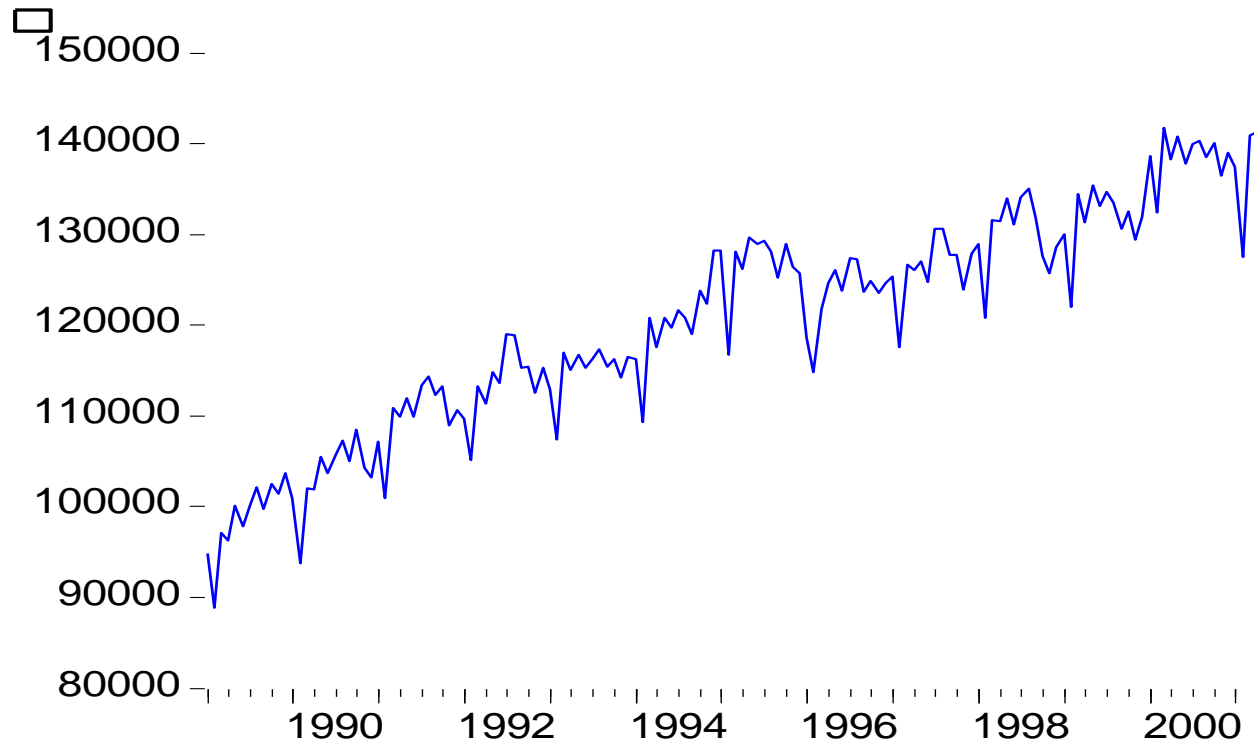
**Índice Diário de ações - Ibovespa - Fechamento -
no Período de 04/01/2010 a 04/04/2017**



Fonte: Bolsa de Valores de São Paulo

- **EXEMPLOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

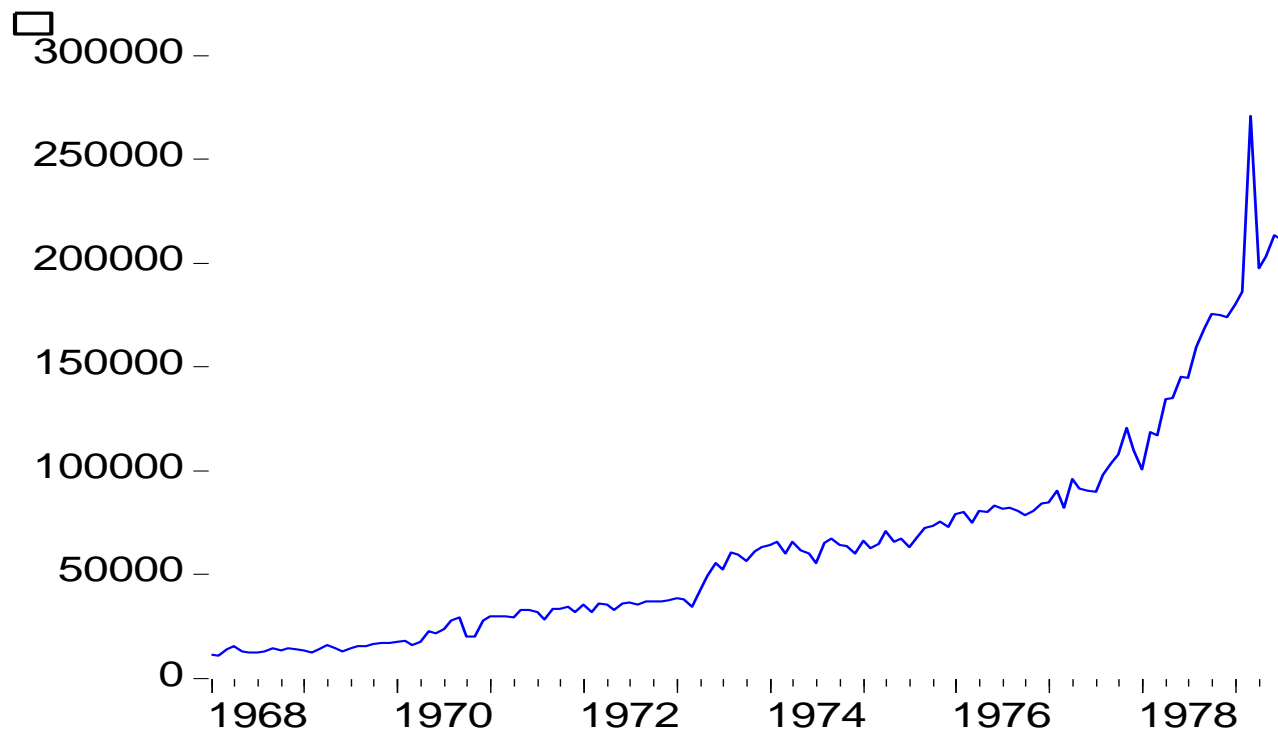
Produção Mensal de Ovos de Galinha – Brasil
jan/1989 a mar/2001 (em mil dúzias)



Fonte: IBGE.

- **EXEMPLOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

**Consumo Mensal de Energia Elétrica no Brasil
Jan/1968 a jun/1979 (em MWh)**



Fonte: Eletrobras.

Objetivos da Análise de Séries Temporais:

Estudar e tentar descrever o comportamento e a dinâmica temporal do processo estocástico gerador dos dados, com a finalidade de identificar fatos estilizados, estimar componentes não observáveis definidos como tendência, ciclo e sazonalidade, e realizar previsões pontuais e intervalares da variável de interesse.

1. Conceitos e Definições Básicas:

1.1. Definição de Processo Estocástico:

- Processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias;

$$\{Y(\omega, t); \omega \in \Omega \text{ e } t \in T\}$$

Espaço de estados e Espaço de Parâmetros (tempo);

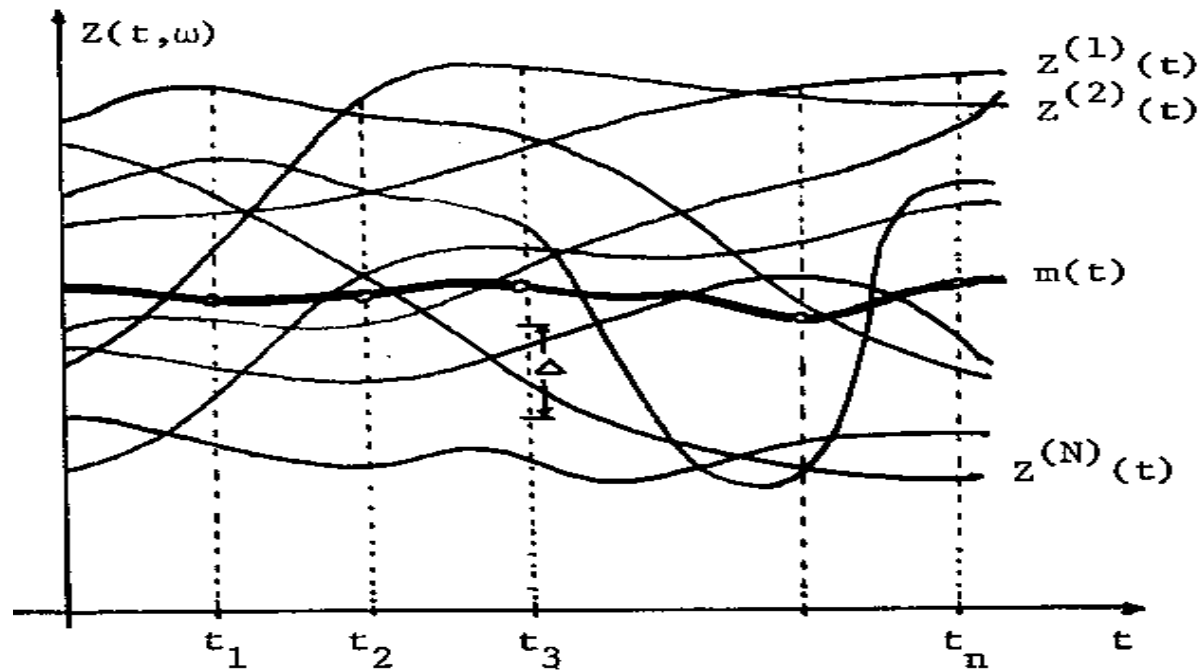
- Especificação do processo estocástico.

1.2. Definição Probabilística de Série Temporal:

Uma vez especificado o processo estocástico $\{Y(\omega, t); \omega \in \Omega \text{ e } t \in T\}$, pode-se definir uma série temporal, denotada por $Y(t)$, como uma específica realização ou trajetória deste processo.

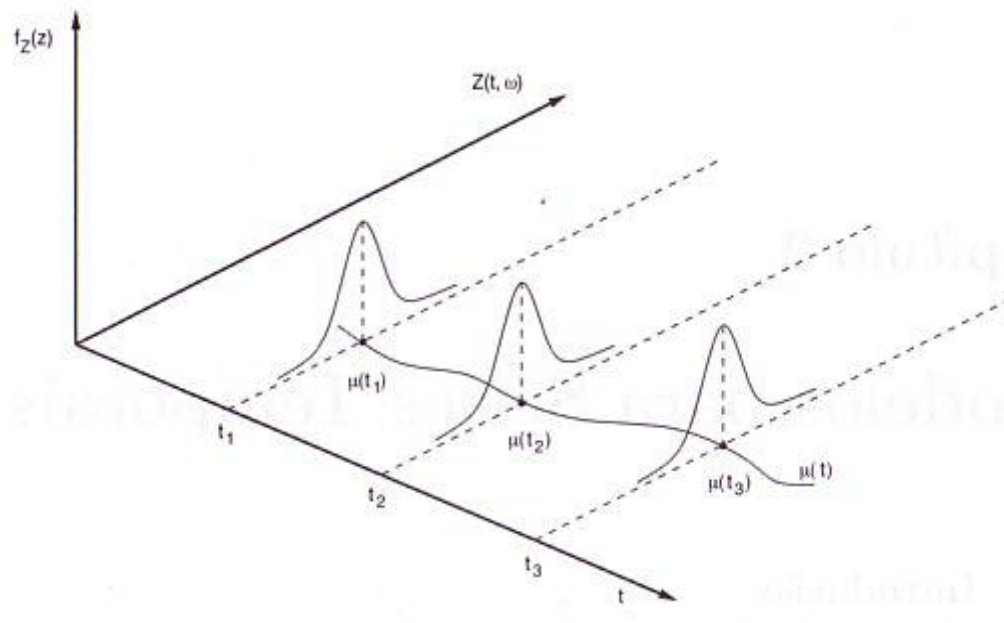
1. Conceitos e Definições Básicas:

Processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias



1. Conceitos e Definições Básicas:

Processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias



1.3. Especificação e Momentos do Processo Estocástico

i) Especificação:

Um processo estocástico estará completamente especificado se as suas distribuições finito-dimensionais, aqui representadas pela função de distribuição conjunta,

$$F(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n) = P(Y(t_1) \leq y_1, \dots, Y(t_n) \leq y_n)$$

são conhecidas e satisfazem as seguintes propriedades:

- Simetria: para qualquer permutação do tempo $(t_{k_1}, \dots, t_{k_n})$

$$F(y_1, \dots, y_n; t_{k_1}, \dots, t_{k_n}) = F(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n)$$

ou

$$P(Y(t_{k_1}) \leq y_1, \dots, Y(t_{k_n}) \leq y_n) = P(Y(t_1) \leq y_1, \dots, Y(t_n) \leq y_n)$$

1.3. Especificação e Momentos do Processo Estocástico

i) Especificação:

- **Consistência:** para qualquer permutação do tempo $(t_{k_1}, \dots, t_{k_n})$,

$$\lim F(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n) = F(y_1, \dots, y_m)$$

ou quando $y_{m+1} \rightarrow +\infty, \dots, y_n \rightarrow +\infty$.

$$F(y_1, \dots, y_m, +\infty, \dots, +\infty) = F(y_1, \dots, y_m)$$

ii) Momentos:

$$\text{Função média: } E(Y(t)) = m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_t dF(y_t)$$

$$\text{quando } y_{m+1} \rightarrow +\infty, \dots, y_n \rightarrow +\infty$$

1.3. Especificação e Momentos do Processo Estocástico

ii) Momentos:

- Função de Autocovariância - FACV:

$$\gamma(k) = \text{COV}(Y_t, Y_{t-k}) = [E(Y_t - E(Y_t))][E(Y_{t-k} - E(Y_{t-k}))]$$

- Função de Autocorrelação - FAC:

$$\rho(k) = \gamma(k) / \sigma_{Y_t} \sigma_{Y_{t-k}}$$

Estas funções descrevem a estrutura de dependência entre o presente e o passado de Y .

1.4. Processos Estocásticos Estacionários

i) Estacionariedade Forte (estrita):

- **Definição:** Diz-se que um o processo estocástico $\{Y(t)\}$ é estacionário forte se as suas distribuições finito-dimensionais são invariantes no tempo.

Exemplo: $Y(t) \sim N(\mu, \sigma^2), \forall t \in T$

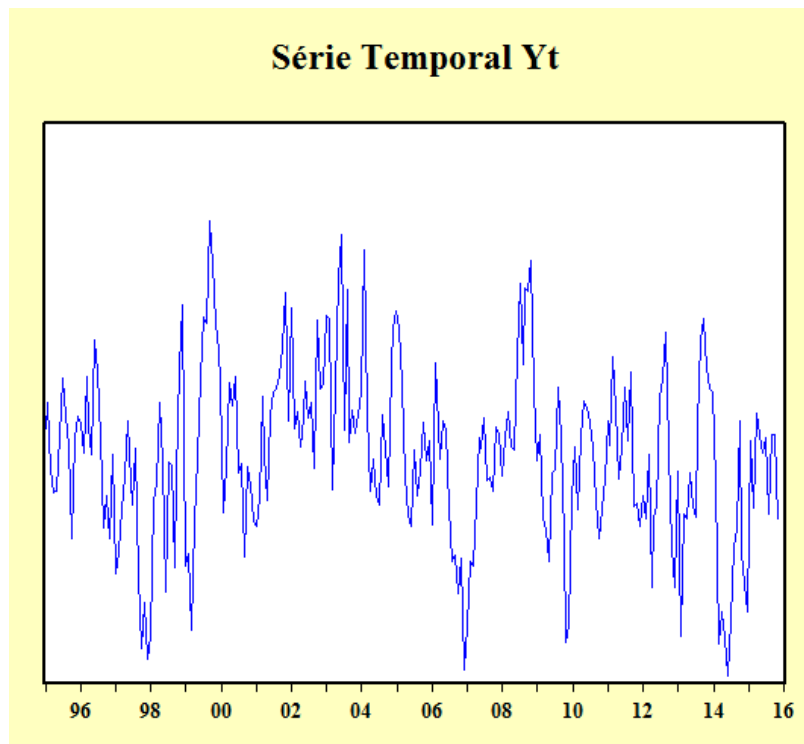
1.4. Processos Estocásticos Estacionários

ii) Estacionariedade Fraca (de segunda ordem):





























































• **Definição:** um processo estocástico $\{Y(t)\}$ é dito fracamente estacionário (ou estacionário de segunda ordem) se as seguintes condições de momentos são satisfeitas:

- a) $E(Y(t)) = \mu = \text{constante}, \forall t \in T;$
- b) $\text{VAR}(Y(t)) = \sigma^2 = \text{constante}, \forall t \in T;$
- c) **FACV** $[\gamma(k)]$ e **FAC** $[\rho(k)]$ dependem somente da defasagem ou diferença entre tempos (k é denominado de lag). Adicionalmente, diante de um processo estacionário, estas funções convergem rapidamente para zero quando k cresce.

Exemplo de Série Temporal Estacionária e sua FAC:



FAC e FACP de Y_t

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.650	0.650	107.35	0.000
		2	0.458	0.062	160.94	0.000
		3	0.283	-0.064	181.43	0.000
		4	0.185	0.013	190.27	0.000
		5	0.055	-0.110	191.04	0.000
		6	0.049	0.088	191.65	0.000
		7	0.047	0.034	192.22	0.000
		8	0.066	0.029	193.36	0.000
		9	0.058	-0.004	194.24	0.000
		10	0.055	-0.012	195.05	0.000
		11	0.064	0.042	196.15	0.000
		12	0.085	0.045	198.05	0.000
		13	0.036	-0.075	198.40	0.000
		14	0.026	0.014	198.59	0.000
		15	0.035	0.037	198.93	0.000
		16	0.056	0.036	199.76	0.000
		17	0.060	0.023	200.73	0.000
		18	0.034	-0.064	201.04	0.000
		19	0.009	-0.026	201.06	0.000
		20	-0.095	-0.160	203.53	0.000
		21	-0.139	-0.019	208.90	0.000
		22	-0.175	-0.027	217.36	0.000
		23	-0.150	0.012	223.66	0.000
		24	-0.072	0.112	225.11	0.000
		25	0.051	0.123	225.83	0.000
		26	0.086	-0.022	227.91	0.000
		27	0.086	-0.046	230.00	0.000
		28	0.111	0.062	233.50	0.000
		29	0.077	-0.039	235.18	0.000
		30	0.045	0.018	235.76	0.000

2. MODELOS SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

O que significa a sigla SARIMA?

S: Sazonal

AR: Auto-Regressivo

I: Integrado

MA: Média Móvel (Moving Average)

p: ordem do polinômio auto-regressivo $\phi(B)$

d: ordem de integração não sazonal

q: ordem do polinômio média móvel $\theta(B)$

P: ordem do polinômio auto-regressivo sazonal $\phi(B)$

D: ordem de integração não sazonal

Q: ordem do polinômio média móvel sazonal $\Theta(B)$

s: Periodicidade da sazonalidade (por exemplo, $s=12$ para dados mensais)

REPRESENTAÇÃO GERAL DOS MODELOS

SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^d Y_t = \Theta(B)\theta(B)a_t$$

Classe de modelos que generaliza modelos estacionários, não estacionários homogêneos, sazonais e não sazonais. Onde,

- B: operador de defasagem ou de retardo; $B^k Y_t = Y_{t-k}$
- $\Delta = 1 - B$: operador de diferença; $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - B)Y_t$
- $\Delta^d = (1 - B)^d$: operador de diferença aplicado d vezes;
- s: periodicidade sazonal; (exemplo: s = 4, para dados trimestrais)
- $\Delta_s^D = (Y_t - Y_{t-s})^D$: operador de diferença sazonal aplicado D vezes;

REPRESENTAÇÃO GERAL DOS MODELOS

SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^dY_t = \Theta(B)\theta(B)a_t$$

Onde,

- $\Phi(B) = (1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_p B^{Ps})$; operador auto-regressivo sazonal
- $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$; operador auto-regressivo não sazonal
- $\Theta(B) = (1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_Q B^{Qs})$; operador média móvel sazonal
- $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$; operador média móvel não sazonal
- a_t : ruído branco. Sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com média zero e variância constante.

2.1 CASOS PARTICULARES DE MODELOS

$$\text{SARIMA } (p, d, q) \times (P, D, Q)_s$$

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^d Y_t = \Theta(B)\theta(B)a_t$$

i) Modelos estacionários e não sazonais

1. Modelos: SARIMA $(p, 0, q) \times (0, 0, 0)_s \sim \text{ARMA}(p, q)$

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)a_t$$

2. Modelos: SARIMA $(p, 0, 0) \times (0, 0, 0)_s \sim \text{AR}(p)$

$$\phi(B)Y_t = a_t$$

3. Modelos: SARIMA $(0, 0, q) \times (0, 0, 0)_s \sim \text{MA}(q)$

$$Y_t = \theta(B)a_t$$

SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^dY_t = \Theta(B)\theta(B)a_t$$

ii) Modelos não estacionários e não sazonais

1. Modelos: SARIMA (p, d, q) x (0, 0, 0)_s ~ ARIMA(p, d, q)

$$\phi(B)\Delta^dY_t = \theta(B)a_t$$

2. Modelos: SARIMA (p, d, 0) x (0, 0, 0)_s ~ ARI(p, d, 0)

$$\phi(B)\Delta^dY_t = a_t$$

3. Modelos: SARIMA (0, d, q) x (0, 0, 0)_s ~ IMA(0, d, q)

$$\Delta^dY_t = \theta(B)a_t$$

SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^dY_t = \Theta(B)\theta(B)a_t$$

iii) Modelos estacionários e sazonais puros

1. Modelos: SARIMA (0, 0, 0) x (P, 0, Q)_s ~ SARMA (P, 0, Q)_s

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)a_t$$

2. Modelos: SARIMA (0, 0, 0) x (P, 0, 0)_s ~ SAR(P, 0, 0)

$$\Phi(B)Y_t = a_t$$

3. Modelos: SARIMA (0, 0, 0) x (0, 0, Q)_s ~ SMA(0, 0, Q)

$$Y_t = \Theta(B)a_t$$

SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^d Y_t = \Theta(B)\theta(B)a_t$$

iv) Modelos não estacionários e sazonais puros

1. Modelos: SARIMA (0, 0, 0) x (P, D, Q)_s ~ SARIMA(P, D, Q)

$$\Phi(B)\Delta_s^D Y_t = \Theta(B)a_t$$

2. Modelos: SARIMA (0, 0, 0) x (P, D, 0)_s ~ SARI(P, D, 0)

$$\Phi(B)\Delta_s^D Y_t = a_t$$

3. Modelos: SARIMA (0, 0, 0) x (0, D, Q)_s ~ SIMA(0, D, Q)

$$\Delta_s^D Y_t = \Theta(B)a_t$$

MODELOS AR(p)

EXEMPLOS:

$$\text{AR}(1) \Rightarrow (1 - \phi B)Y_t = a_t$$

$$Y_t - \phi B Y_t = a_t$$

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = a_t$$

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + a_t$$

$$\text{AR}(2) \Rightarrow (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)Y_t = a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_t$$

MODELOS SAR(P)

EXEMPLOS:

$$\text{SAR}(1) \Rightarrow (1 - \Phi B^s) Y_t = a_t$$

$$Y_t - \Phi B^s Y_t = a_t$$

$$Y_t - \Phi Y_{t-s} = a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \Phi Y_{t-s} + a_t$$

$$\text{SAR}(2) \Rightarrow (1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s}) Y_t = a_t$$

$$Y_t - \Phi_1 B^s Y_t - \Phi_2 B^{2s} Y_t = a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \Phi_2 Y_{t-2s} + a_t$$

MODELOS MA(q)

EXEMPLOS:

$$\begin{aligned} \text{MA}(1) &\Rightarrow Y_t = (1 - \theta_1 B) a_t \\ &\Rightarrow Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MA}(2) &\Rightarrow Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t \\ &\Rightarrow Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \end{aligned}$$

MODELOS MA(Q)

EXEMPLOS:

$$\text{SMA}(1) \Rightarrow Y_t = (1 - \Theta_1 B^s) a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = a_t - \Theta_1 a_{t-s}$$

$$\text{SMA}(2) \Rightarrow Y_t = (1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s}) a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = a_t - \Theta_1 a_{t-s} - \Theta_2 a_{t-2s}$$

MODELOS ARMA(p, q)

Representação na forma de equação de diferenças:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} \text{ARMA}(1, 1) &\Rightarrow (1 - \phi_1 B) Y_t = (1 - \theta_1 B) a_t \\ &\Rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \end{aligned}$$

MODELOS SARMA(P, Q)

Representação na forma de equação de diferenças:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \dots + \Phi_P Y_{t-Ps} + a_t - \Theta_1 a_{t-s} - \dots - \Theta_Q a_{t-Qs}$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} \text{SARMA}(1,1) &\Rightarrow (1 - \Phi_1 B^s) Y_t = (1 - \Theta_1 B^s) a_t \\ &\Rightarrow Y_t = \Phi Y_{t-s} + a_t - \Theta_1 a_{t-s} \end{aligned}$$

MODELOS ARIMA(p, d, q)

EXEMPLO: ARIMA(1, 1, 1)

$$(1 - \phi_1 B)\Delta Y_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \phi_1 B)(1 - B)Y_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow (1 - (1 + \phi_1)B + \phi_1 B^2)Y_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow Y_t = (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + a_t - \theta a_{t-1}$$

Ou seja, uma representação ARMA(2, 1) não estacionária:

MODELOS SARIMA(p, d, q)x(P, D, Q)_s

Representação na forma de equação de diferenças:

EXEMPLO: SARIMA(1,0,0)x(1,1,0)₁₂

$$(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \phi_1 B)(1 - B^{12})Y_t = a_t$$
$$\Rightarrow Y_t = a_t + \phi_1 Y_{t-1} + (1 + \Phi_1)Y_{t-12} - \phi_1(1 + \Phi_1)Y_{t-13} - \phi_1 Y_{t-14} + \phi_1 \Phi_1 Y_{t-25}$$

Ou seja, uma representação SARIMA não estacionária:

2. MODELOS SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

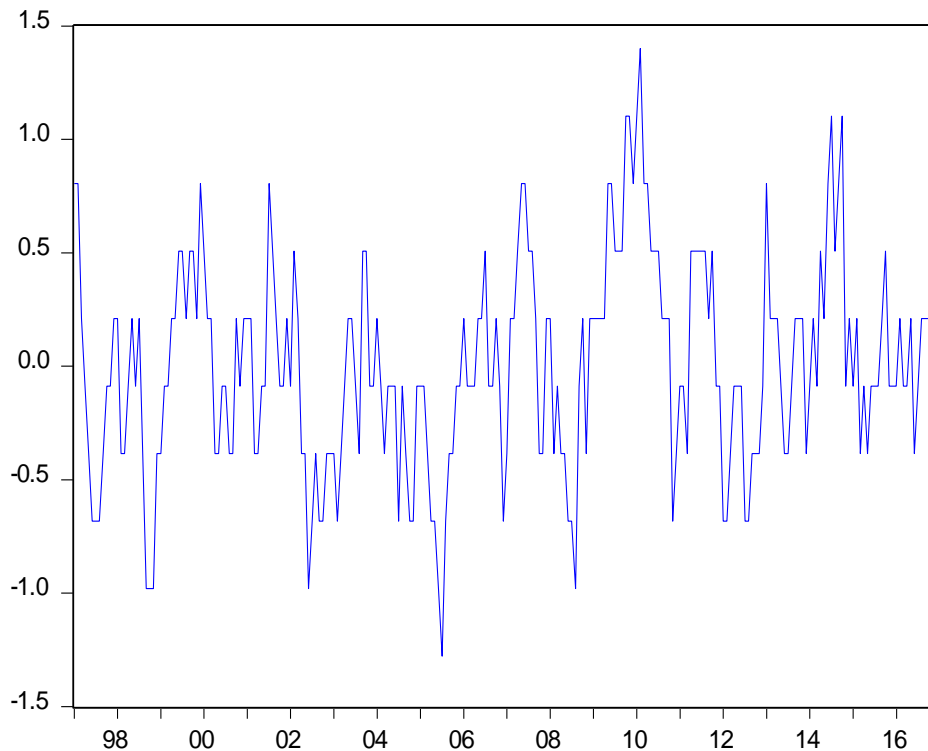
2.2 Etapas da Modelagem (ciclo iterativo)

- i) Identificação do modelo;**
 - a) Identificação dos graus p, q, P e Q dos polinômios AR e MA através da análise das funções FAC e FACP;**
 - b) Testes de Raiz Unitária para avaliação da estacionariedade e identificação das ordens de integração d e D;**
- ii) Estimação do modelo identificado através do Método de Máxima Verossimilhança ou de Mínimos Quadrados;**
- iii) Testes Diagnóstico: avaliação da qualidade do ajuste e verificação das hipótese básicas do modelo.**
- iv) Previsão**

a) Análise Gráfica da FAC e FACP - Exemplos

Exemplo 1: Modelo AR(1), com $0 < \phi < 1$

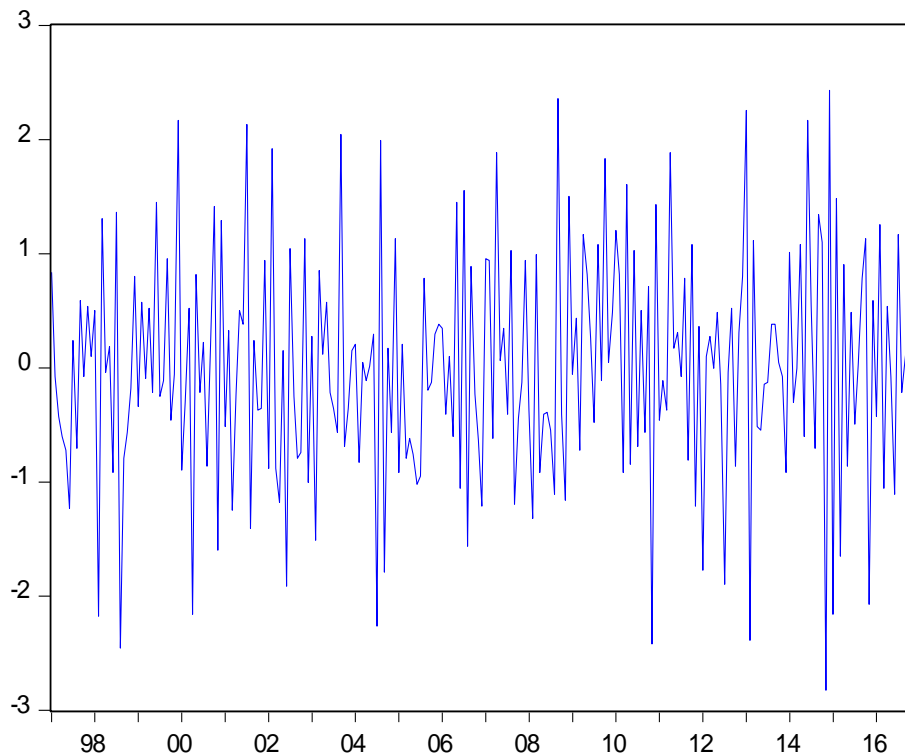
Série - X1



Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.704	0.704	120.55	0.000
		2 0.515	0.038	185.37	0.000
		3 0.407	0.062	226.02	0.000
		4 0.274	-0.084	244.55	0.000
		5 0.155	-0.064	250.48	0.000
		6 0.112	0.050	253.60	0.000
		7 0.097	0.042	255.93	0.000
		8 0.077	0.010	257.41	0.000
		9 0.005	-0.121	257.42	0.000
		10 -0.042	-0.044	257.85	0.000
		11 -0.103	-0.089	260.57	0.000
		12 -0.105	0.068	263.36	0.000
		13 -0.096	0.018	265.71	0.000
		14 -0.069	0.033	266.93	0.000
		15 -0.032	0.017	267.19	0.000
		16 0.013	0.035	267.24	0.000
		17 0.067	0.084	268.42	0.000
		18 0.031	-0.113	268.66	0.000
		19 0.012	0.003	268.70	0.000
		20 -0.017	-0.080	268.78	0.000

Exemplo 2: Modelo AR(1), com $-1 < \phi < 0$

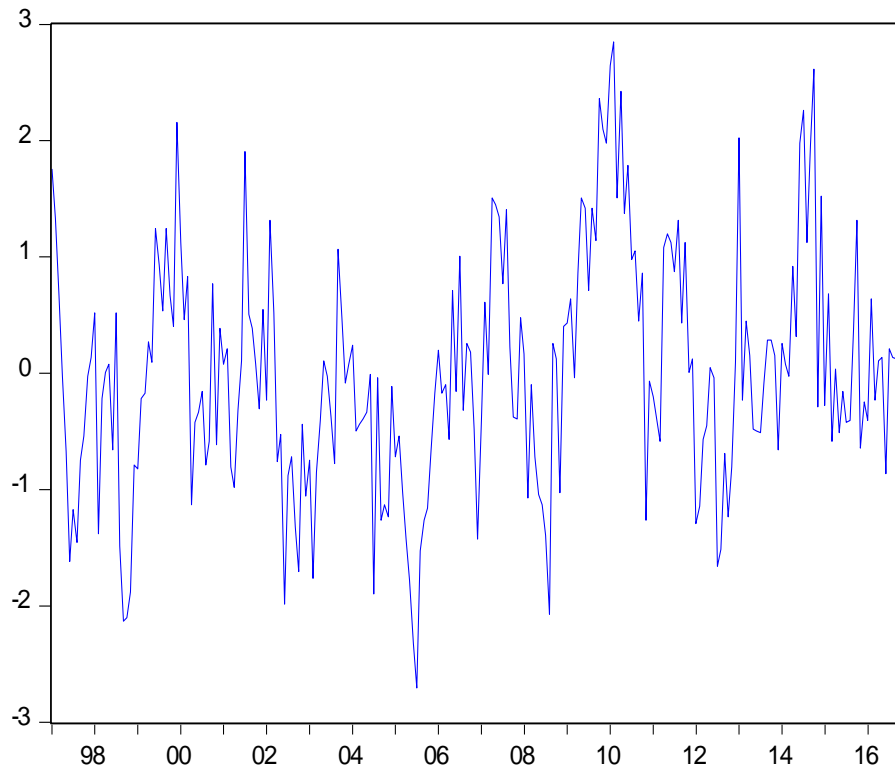
Série - X2











































Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.449	-0.449	49.095	0.000
		2 0.224	0.028	61.393	0.000
		3 -0.083	0.034	63.091	0.000
		4 0.151	0.151	68.678	0.000
		5 -0.172	-0.074	76.024	0.000
		6 0.111	-0.028	79.066	0.000
		7 -0.062	-0.006	80.012	0.000
		8 0.102	0.087	82.593	0.000
		9 -0.068	0.037	83.748	0.000
		10 0.052	-0.003	84.438	0.000
		11 -0.105	-0.110	87.221	0.000
		12 0.043	-0.072	87.692	0.000
		13 -0.034	0.006	87.988	0.000
		14 0.037	0.048	88.339	0.000
		15 -0.031	0.023	88.584	0.000
		16 0.000	-0.055	88.584	0.000
		17 0.123	0.135	92.525	0.000
		18 -0.037	0.100	92.882	0.000
		19 0.000	0.014	92.882	0.000
		20 0.025	-0.002	93.042	0.000

Exemplo 3: Modelo AR(2), com $0 < \phi_1$ e $\phi_2 < 1$

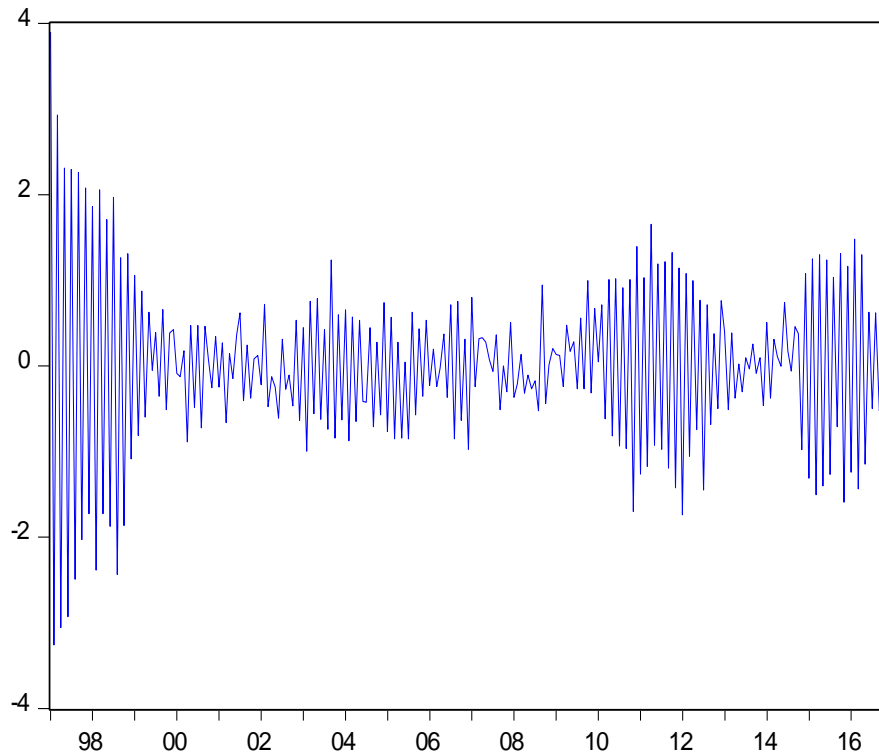
Série - X3



Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.631	0.631	96.840	0.000
		2	0.578	0.299	178.50	0.000
		3	0.450	0.010	228.18	0.000
		4	0.354	-0.038	259.01	0.000
		5	0.223	-0.114	271.27	0.000
		6	0.204	0.065	281.64	0.000
		7	0.143	0.016	286.77	0.000
		8	0.127	0.024	290.81	0.000
		9	0.057	-0.079	291.62	0.000
		10	0.015	-0.072	291.68	0.000
		11	-0.047	-0.062	292.23	0.000
		12	-0.028	0.072	292.43	0.000
		13	-0.037	0.051	292.78	0.000
		14	-0.019	0.018	292.86	0.000
		15	-0.019	-0.023	292.96	0.000
		16	0.016	0.025	293.02	0.000
		17	0.060	0.104	293.96	0.000
		18	0.018	-0.076	294.04	0.000
		19	0.011	-0.052	294.07	0.000
		20	-0.016	-0.065	294.14	0.000

Exemplo 4: Modelo AR(2), com $-1 < \phi_1 < 0$ e $0 < \phi_2 < 1$

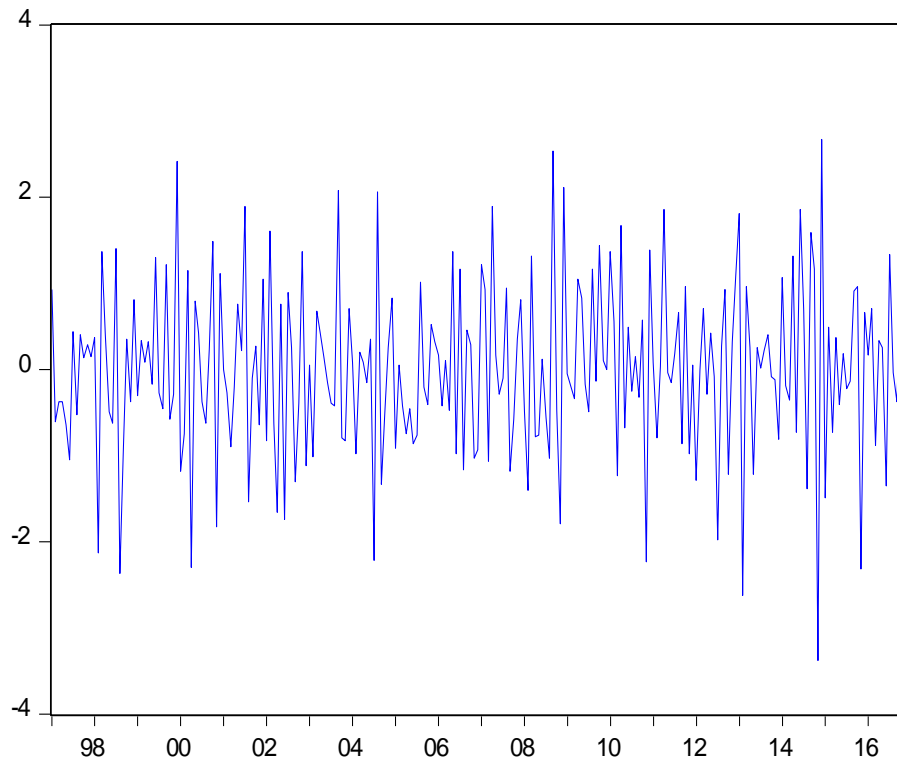
Série - X4



Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1		-0.895	-0.895	194.72	0.000
2		0.856	0.277	373.69	0.000
3		-0.799	0.017	530.18	0.000
4		0.763	0.058	673.48	0.000
5		-0.731	-0.059	805.49	0.000
6		0.684	-0.074	921.50	0.000
7		-0.646	0.013	1025.4	0.000
8		0.608	0.009	1118.0	0.000
9		-0.566	0.050	1198.5	0.000
10		0.529	-0.017	1269.0	0.000
11		-0.500	-0.044	1332.4	0.000
12		0.460	-0.052	1386.4	0.000
13		-0.430	0.008	1433.6	0.000
14		0.384	-0.065	1471.5	0.000
15		-0.350	0.017	1503.1	0.000
16		0.316	-0.002	1529.1	0.000
17		-0.276	0.053	1549.0	0.000
18		0.252	0.032	1565.6	0.000
19		-0.218	0.021	1578.0	0.000
20		0.182	-0.058	1586.8	0.000
21		-0.160	-0.038	1593.6	0.000
22		0.120	-0.070	1597.4	0.000
23		-0.107	-0.057	1600.5	0.000
24		0.085	0.013	1602.4	0.000

Exemplo 5: Modelo AR(2), com $-1 < \phi_1 < 0$ e $-1 < \phi_2 < 0$

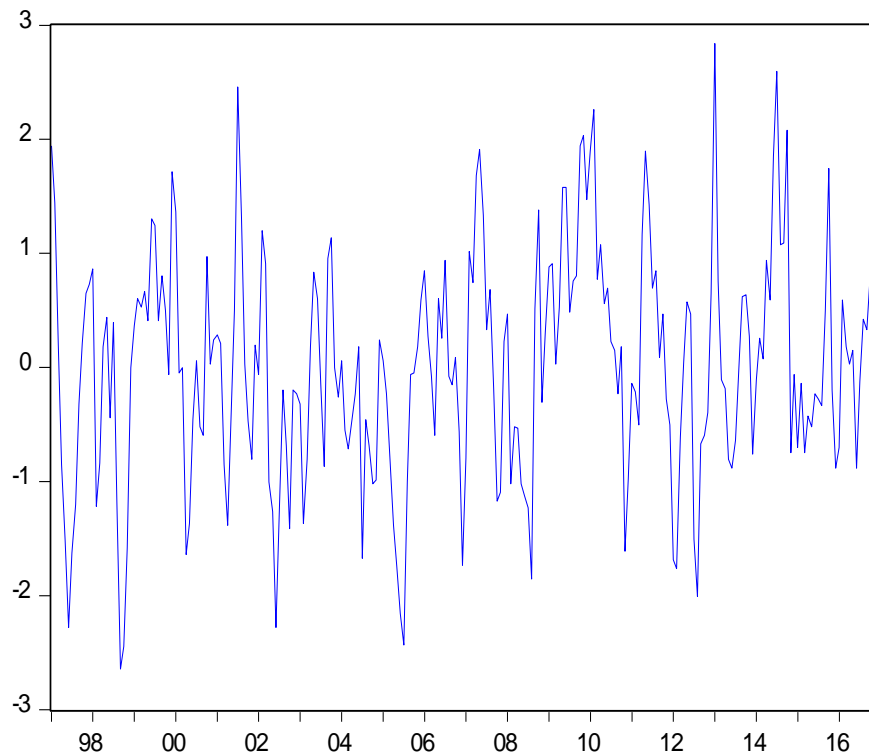
Série - X5











































Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.439	-0.439	46.784	0.000
		2 -0.063	-0.316	47.748	0.000
		3 0.215	0.055	59.107	0.000
		4 -0.035	0.126	59.417	0.000
		5 -0.116	-0.027	62.723	0.000
		6 0.098	-0.009	65.111	0.000
		7 -0.043	-0.057	65.563	0.000
		8 0.030	0.044	65.785	0.000
		9 0.003	0.044	65.787	0.000
		10 0.015	0.055	65.842	0.000
		11 -0.084	-0.089	67.617	0.000
		12 0.035	-0.084	67.936	0.000
		13 -0.010	-0.054	67.959	0.000
		14 0.024	0.054	68.113	0.000
		15 -0.062	-0.013	69.097	0.000
		16 -0.009	-0.090	69.118	0.000
		17 0.121	0.072	72.946	0.000
		18 -0.074	0.052	74.378	0.000
		19 0.008	0.074	74.393	0.000
		20 0.052	0.037	75.103	0.000

Exemplo 6: Modelo AR(2), com $0 < \phi_1 < 1$ e $-1 < \phi_2 < 0$

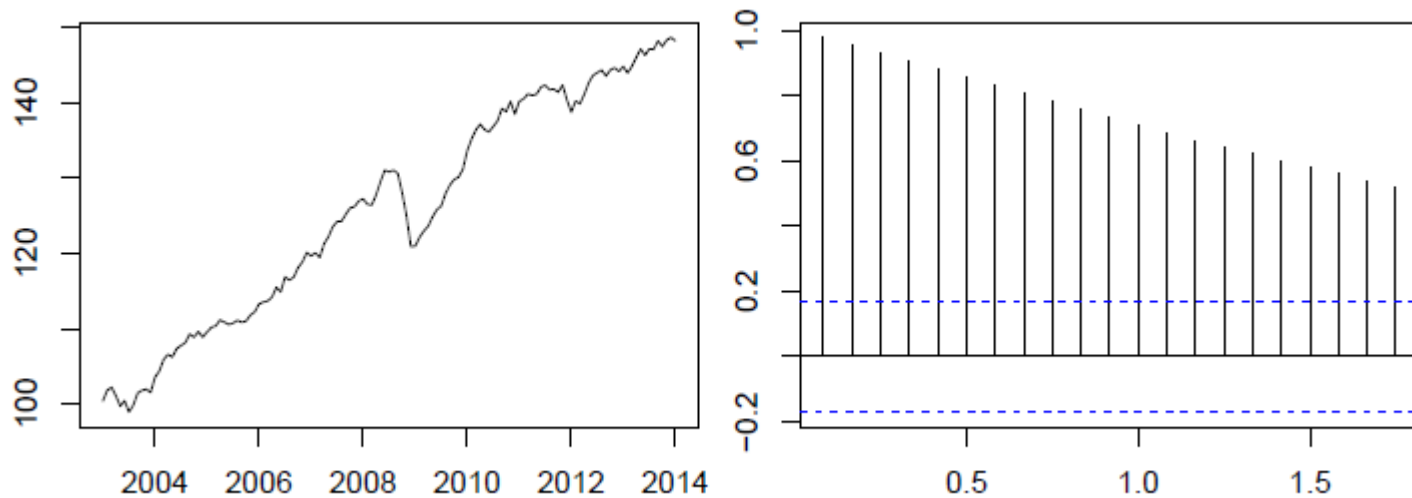
Série - X6



Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.626	0.626	95.152	0.000
		2	0.294	-0.161	116.19	0.000
		3	0.130	0.030	120.35	0.000
		4	0.017	-0.073	120.42	0.000
		5	-0.063	-0.049	121.39	0.000
		6	-0.021	0.102	121.50	0.000
		7	0.029	0.010	121.70	0.000
		8	0.056	0.029	122.48	0.000
		9	0.005	-0.095	122.48	0.000
		10	-0.072	-0.075	123.78	0.000
		11	-0.129	-0.049	128.01	0.000
		12	-0.100	0.056	130.57	0.000
		13	-0.075	-0.025	132.01	0.000
		14	-0.055	-0.016	132.80	0.000
		15	-0.028	-0.008	133.00	0.000
		16	0.059	0.108	133.90	0.000
		17	0.132	0.089	138.46	0.000
		18	0.106	-0.046	141.41	0.000
		19	0.070	0.014	142.69	0.000
		20	0.016	-0.076	142.76	0.000

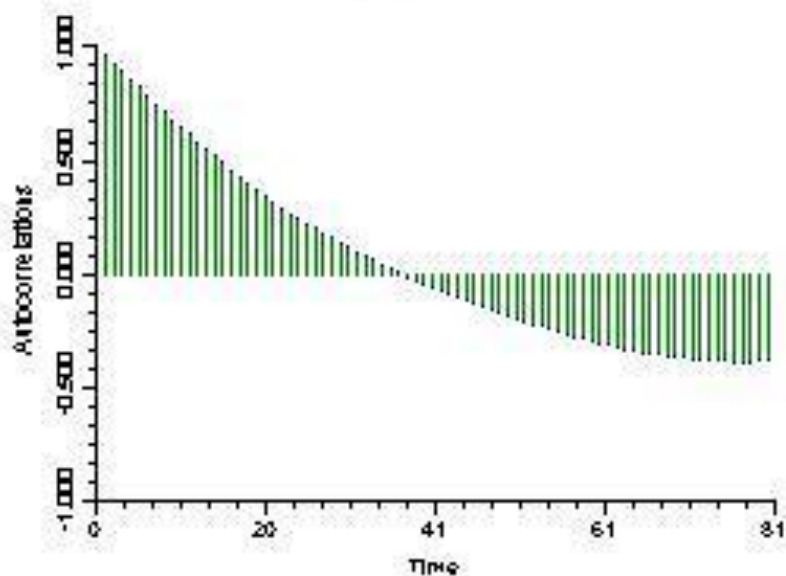
Avaliação Gráfica da Estacionariedade

- Exemplo de Série Temporal Não Estacionária e sua FAC

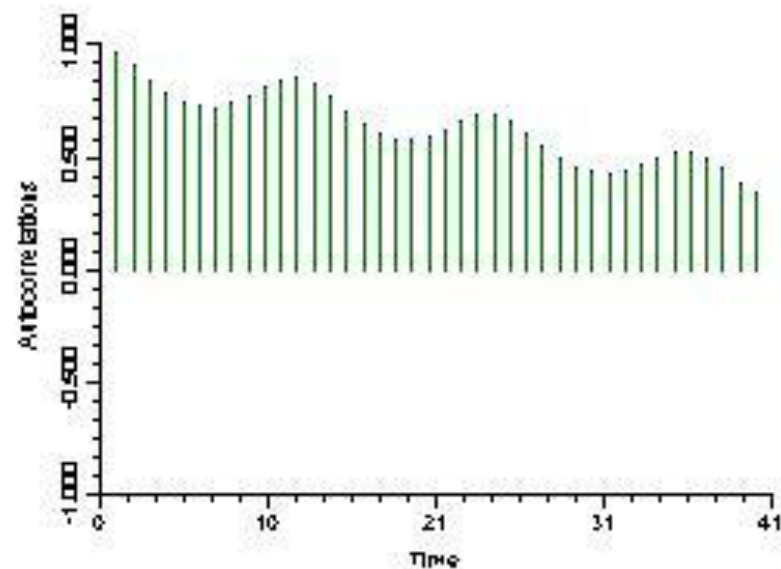


Exemplos de FACs de Processos Não Estacionários

FAC de uma série temporal não sazonal e não estacionária



FAC de uma série sazonal e não estacionária



2. 2 Modelagem SARIMA

a) Teste de Raiz Unitária

Teste Augmented Dickey – Fuller (ADF)

Hipóteses Gerais do teste:

H_0 : Y_t é um processo de raiz unitária

H_1 : Y_t é um processo tendência estacionário ou estacionário

(Comentários gerais sobre processos estocásticos TE e DE)

a) Teste de Raiz Unitária - ADF

Equações Auxiliares do Teste ADF

- i)
$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t+i} + \varepsilon_t$$
- ii)
$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t+i} + \varepsilon_t$$
- iii)
$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \beta t + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t+i} + \varepsilon_t$$

a) Testes de Raiz Unitária - ADF

Hipóteses Estatísticas do teste:

$$H_0: \gamma = 0$$

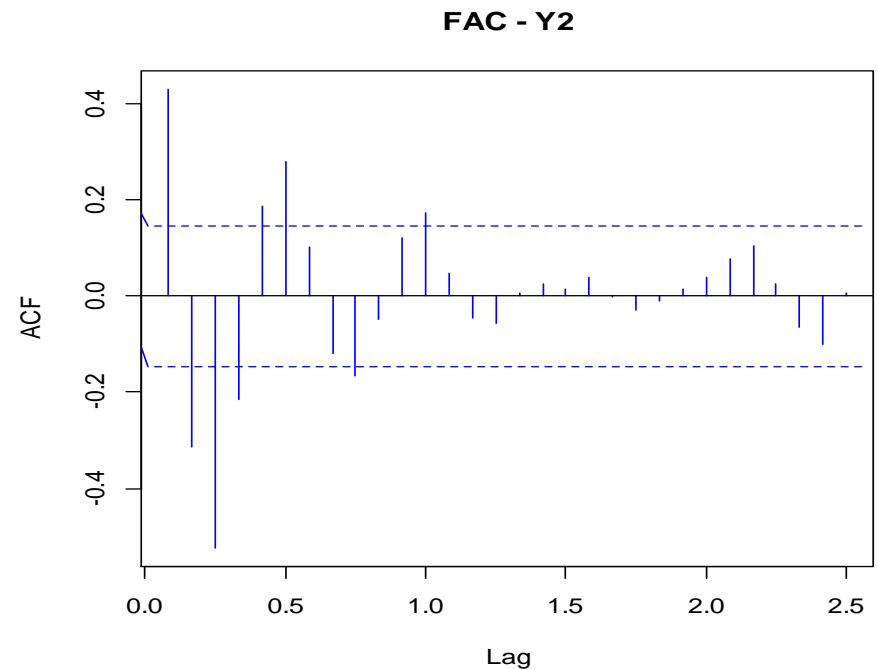
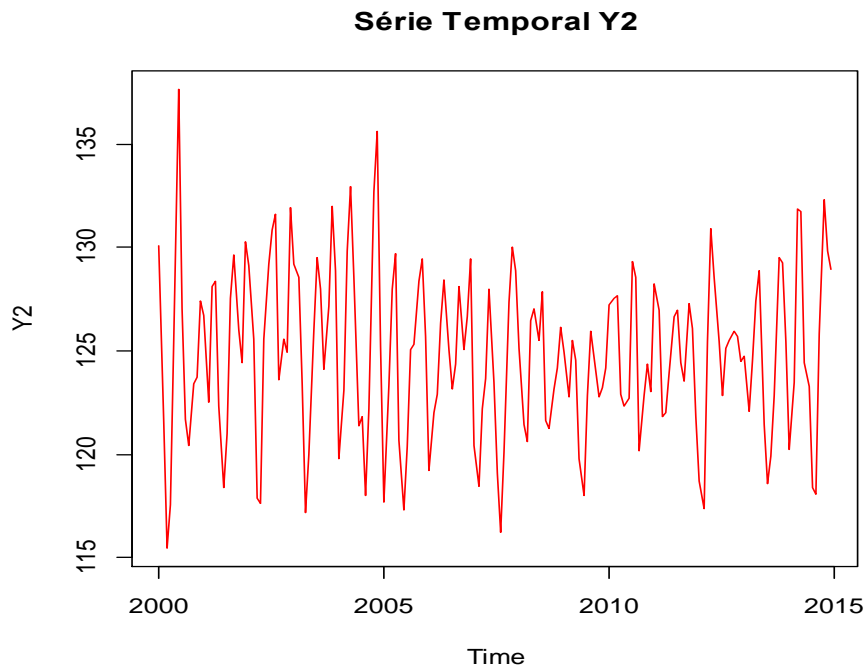
$$H_1: \gamma < 0$$

Regra de decisão do teste: rejeita-se H_0 , ao nível de significância de $\alpha\%$, se a estatística $t_{\text{calc}} < t_{\text{tab}} (\alpha\%)$

(Tabelas de valores críticos simuladas por MacKinnon (1996))

i) Exemplo de Identificação do Modelo SARIMA

Etapa i) a): Analisar os Gráficos da Série Temporal (Y_2) e da sua FAC



Comentário: Os gráficos mostram comportamento estacionário para a série temporal Y_2 . Logo, a hipótese de raiz unitária do teste ADF provavelmente será rejeitada.

b) Resultados de Teste ADF para a Série Temporal (Y_2)

Resultados do Teste ADF para (Y_2):

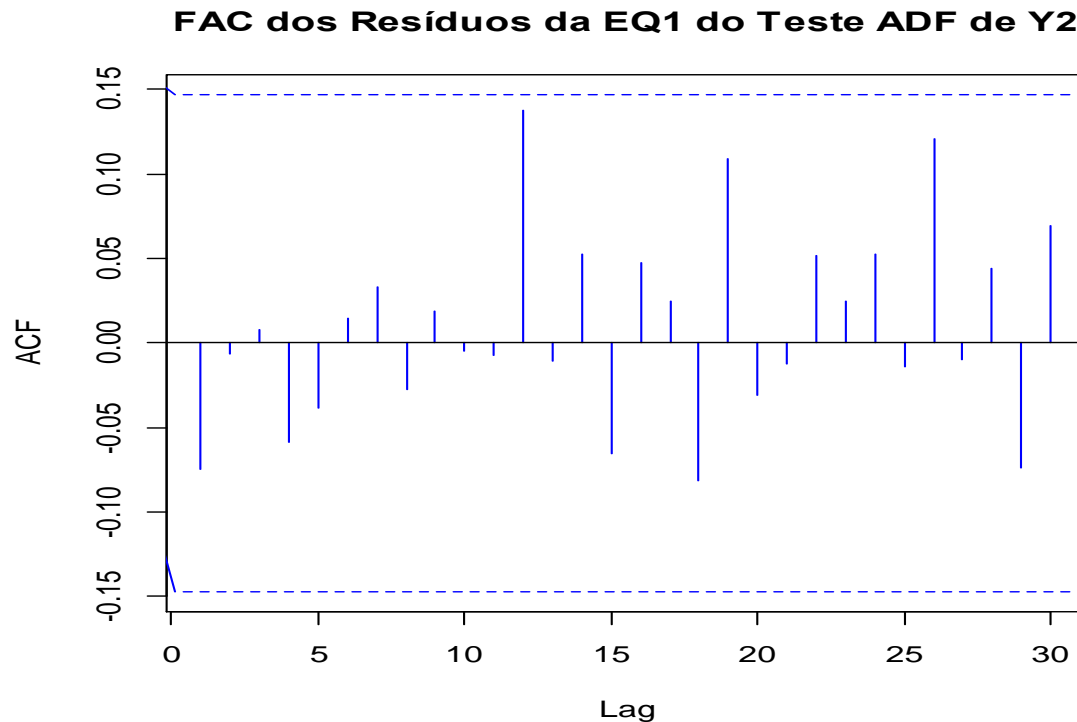
Equação 1: com constante e com tendência – CCCT

$$H_0: \gamma = 0 ; \quad H_1: \gamma < 0$$

Regra de decisão do teste: rejeita-se H_0 , ao nível de significância de 1%, pois $t_{\text{calc}} = -14,593 < t_{\text{tab}} (1\%) = \tau_3 (1\%) = -3,99$.

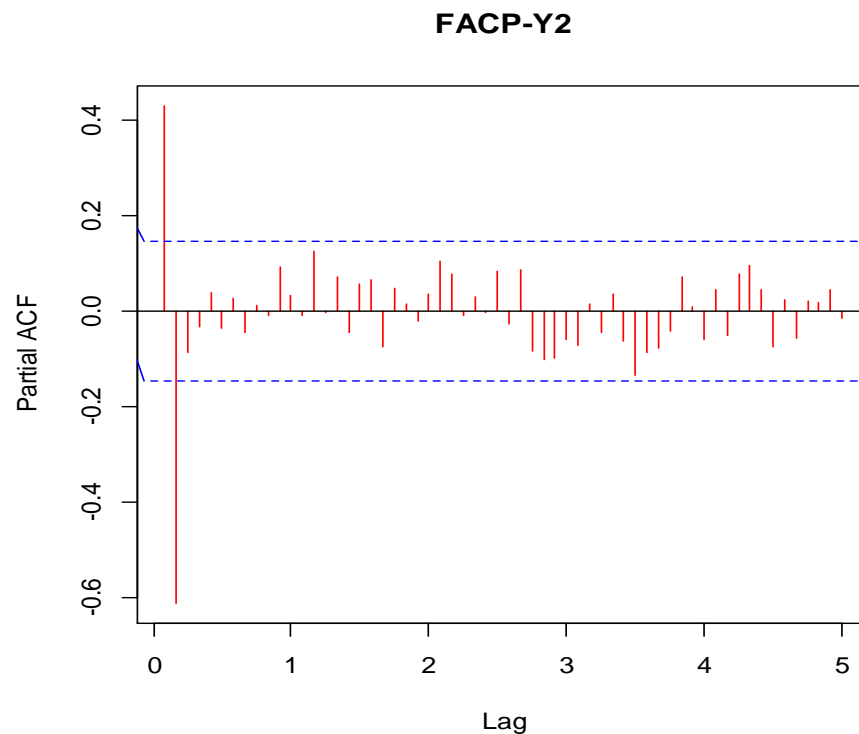
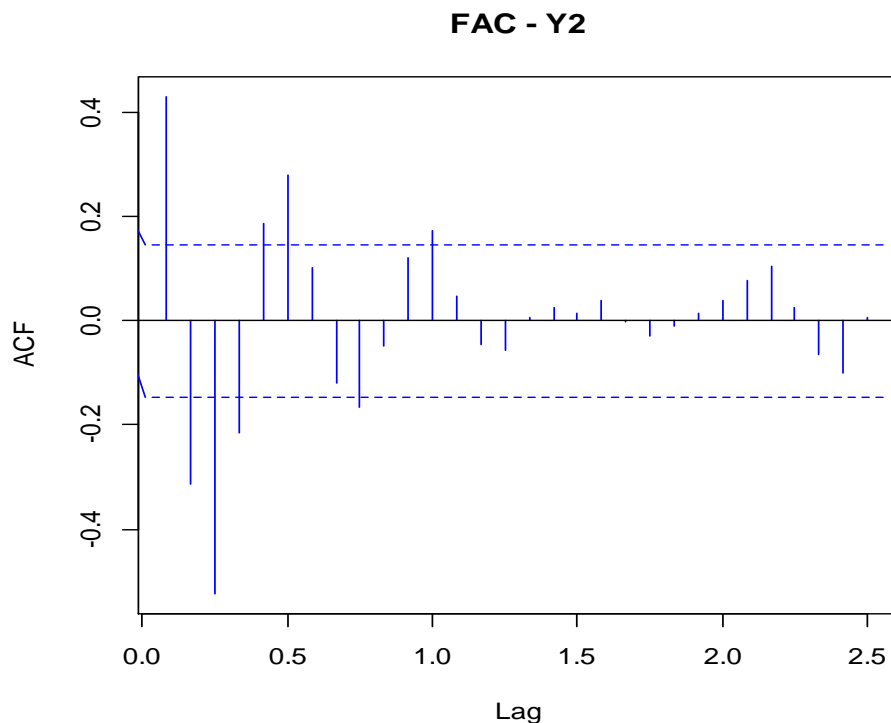
Comentário: O teste ADF rejeita a hipótese de raiz unitária ao nível de significância de 1% e em níveis inferiores a 1%. Portanto, com base neste resultado pode-se assumir a hipótese de estacionária fraca para a série Y_2 e considerar ($d = D = 0$). O número ótimo de defasagens da equação de teste foi definido pelo usual teste-t e pelos critérios de informação de Akaike (AIC) e BIC. Contudo, antes da conclusão final é necessário verificar se FAC dos resíduos da equação de teste indicam um processo de ruído branco.

Etapa i) b): Teste ADF para a Série Temporal (Y_2)



Conclusão: A FAC dos resíduos da equação 1 mostram configuração de um processo de ruído branco e confirmam os resultados do teste ADF e a estacionariedade de Y_2 .

Etapa i) c): Análise gráfica da FAC e FACP na tentativa de identificação das ordens p , q , P e Q do modelo SARIMA



Conclusão: Os gráficos indicam que há fortes evidências de ser um modelo AR(2) não sazonal.

Etapa ii): Estimação do Modelo AR(2) para Y2

ARIMA(2,0,0) with non-zero mean :

Coefficients:

	ar1	ar2	mean
	0.7136	-0.6325	4.8266
s.e.	0.0583	0.0581	0.0018

sigma^2 estimated = 0.0005203

log likelihood = 425.99

AIC = -843.98 AICc = -843.75 BIC = -831.2

error measures:	RMSE	MAE	MAPE
	2.824	2.230	1.788%

Conclusão: Os resultados atestam o modelo AR(2) como uma possível representação do processo Y2.

Medidas de Erro ou de Qualidade do Ajuste

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}} = 2,824$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t| = 2,230$$

$$\text{MAPE} = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \right) \times 100 = 1,788\%$$

Etapa iii): Testes Diagnóstico do Modelo Estimado para Y2

Verificação das Hipóteses Básicas dos Erros do Modelo AR(2)

- **Erros Não Autocorrelacionados**
- **Homocedasticidade**
- **Normalidade**

Verificação das Hipóteses Básicas dos Erros do Modelo AR(2)

- **Teste de Autocorrelação de Ljung – Box**

$$H_0: Q = 0; \quad H_1: Q > 0$$

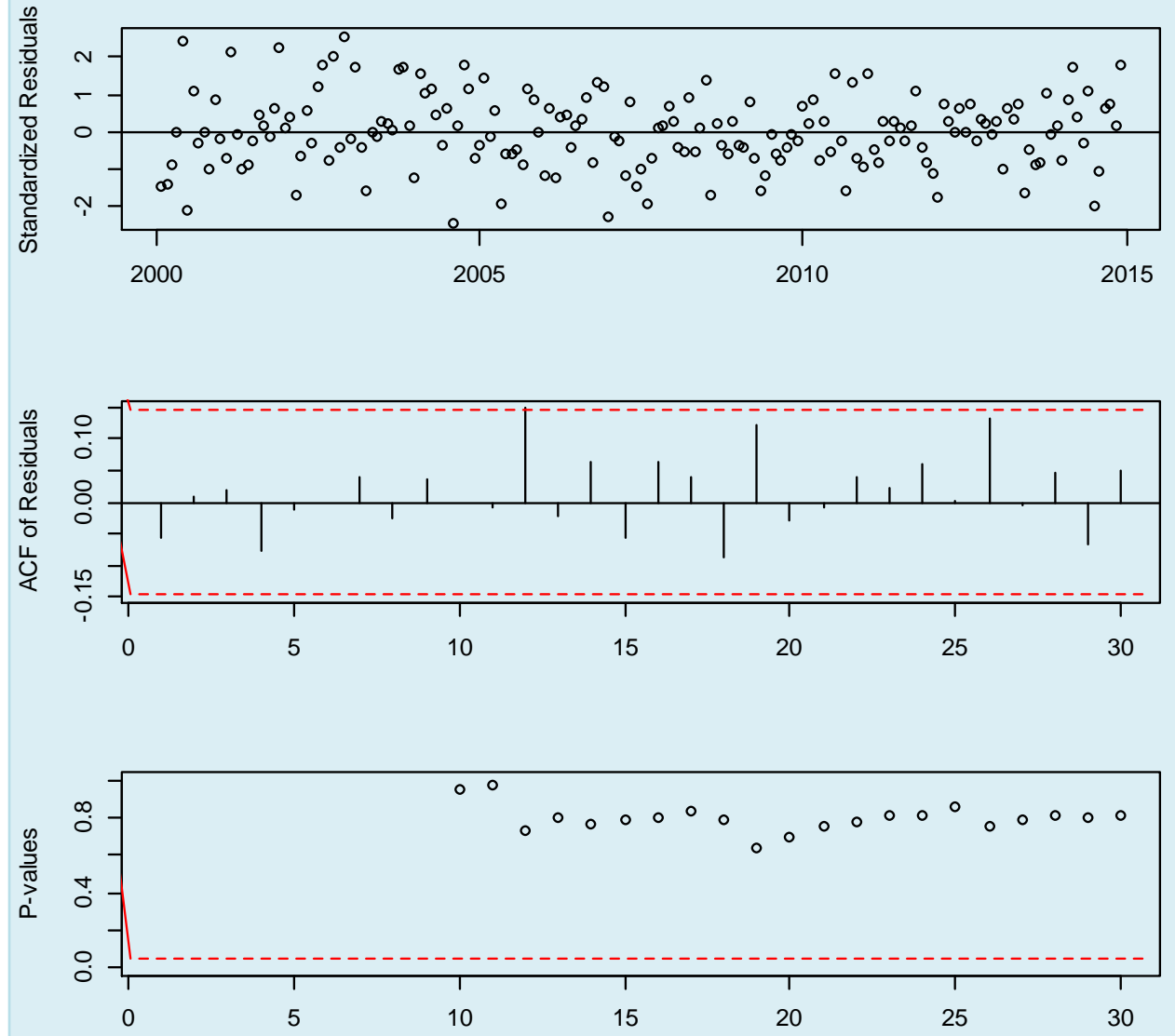
$$Q = n(n + 2) \sum_{j=1}^k r_j^2 \sim \chi_{(k-(p+q))_{gl}}^2$$

Onde os r_j são as k primeiras autocorrelações amostrais dos resíduos do modelo SARIMA estimado.

Verificação das Hipóteses do Modelo AR(2)

Comentário:

Os resíduos padronizados, a FAC dos resíduos e as estatísticas do teste de Ljung – Box indicam que a estrutura de erro do modelo é de um processo do tipo ruído branco. Contudo, é necessário ainda testar a normalidade.



- **Teste LM para Heterocedasticidade (Breusch-Pagan)**

Equação auxiliar do teste: Auto-regressão no quadrado dos resíduos do modelo estimado.

$$e_t^2 = \alpha + \beta_1 e_{t-1}^2 + \beta_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \beta_k e_{t-k}^2 + u_t, \text{ onde } u_t \sim N(0, \sigma_u^2).$$

$$\text{Hipóteses} \begin{cases} H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0 & \text{Estatística de teste} \\ H_0: \text{pelo menos um } \beta_i \neq 0 & BP = n \times R_e^2 \underset{\sim}{\overset{ass}{\chi^2_{(k)gl}}} \end{cases}$$

Regra de Decisão: Rejeita-se H_0 , ao nível de significância de $\alpha\%$, se

$$BP_{cal} > BP_{tab} = \chi^2(\alpha\%; kgl).$$

Conclusão do Teste: Os resultados do teste LM, ao nível de significância de 5%, indicam que a hipótese de homocedasticidade dos resíduos do modelo estimado não deve ser rejeitada, pois

$$BP_{cal} = 1,5031 < BP_{tab}(5\%; 2gl) = 5,991.$$

- **Teste de Normalidade de Jarque - Bera (JB)**

$$JB = n \left[\frac{\hat{A}}{6} - \frac{(\hat{K} - 3)^2}{24} \right] \underset{\sim}{ass} \chi^2_{(2)gl}$$

Onde \hat{A} e \hat{K} são, respectivamente, os estimadores amostrais do coeficiente de assimetria e curtose dos resíduos do modelo.

$$\text{Hipóteses} \begin{cases} H_0: \varepsilon_t \sim Normal \\ H_0: \varepsilon_t \neq Normal \end{cases}$$

Regra de Decisão: Rejeita-se H_0 ,
ao nível de significância de $\alpha\%$, se
 $JB_{cal} > JB_{tab} = \chi^2(\alpha\%; 2gl)$.

Conclusão do Teste: Os resultados do teste indicam, ao nível de significância de 5%, que a hipótese de normalidade dos resíduos do modelo AR(2) estimado não apresenta evidências empíricas para ser rejeitada, pois

$$JB_{cal} = 0,51178 < JB_{tab}(5\%; 2gl) = 5,991.$$

REPRESENTAÇÃO SARIMA-ARCH

SARIMA (p, d, q) x (P, D, Q)_s

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^dY_t = \Theta(B)\theta(B)\varepsilon_t$$

$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, onde $z_t \sim \text{RB}(0, 1) \sim \text{NIID}(0, 1)$

e

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \beta_k \varepsilon_{t-k}^2$$

$$\alpha > 0, \beta_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, k; \text{ e } \sum_{i=1}^k \beta_i < 1;$$

Assim definido, temos que $\varepsilon_t \sim \text{ARCH}(k)$

REPRESENTAÇÃO SARIMA-ARCH

Pode-se demonstrar que:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0} ; \mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-s}) = \mathbf{0}; \mathbf{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \frac{\alpha}{1 - \sum_{i=1}^k \beta_i}.$$

Mas,

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{I}_{t-1}) = \sigma_t^2 \text{ e } \mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-s} | \mathbf{I}_{t-1}) = \boldsymbol{\gamma}(s) \neq \mathbf{0}.$$

REPRESENTAÇÃO SARIMA-GARCH

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^dY_t = \Theta(B)\theta(B)\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \text{ onde } z_t \sim \text{RB}(0, 1) \sim \text{NIID}(0, 1)$$

e

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^k \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \rho_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\alpha > 0; \beta_i \geq 0 \text{ e } \rho_j \geq 0; i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^v (\beta_i + \rho_i) < 1; v = \max(k, m).$$

Assim definido, temos que $\varepsilon_t \sim \text{GARCH}(k, m)$

REPRESENTAÇÃO SARIMA-GARCH

Pode-se demonstrar que:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0} ; \mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-s}) = \mathbf{0}; \mathbf{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \frac{\alpha}{1 - \sum_{i=1}^p (\beta_i + \rho_i)}.$$

Mas,

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{I}_{t-1}) = \sigma_t^2 \text{ e } \mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-s} | \mathbf{I}_{t-1}) = \boldsymbol{\gamma}(s) \neq \mathbf{0}.$$

REPRESENTAÇÃO SARIMA-EGARCH

$$\Phi(B)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^d Y_t = \Theta(B)\theta(B)\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \text{ onde } z_t \sim \text{RB}(0, 1) \sim \text{NIID}(0, 1)$$

e

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha + \sum_{i=1}^k \beta_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^m \rho_j \log(\sigma_{t-j}^2).$$

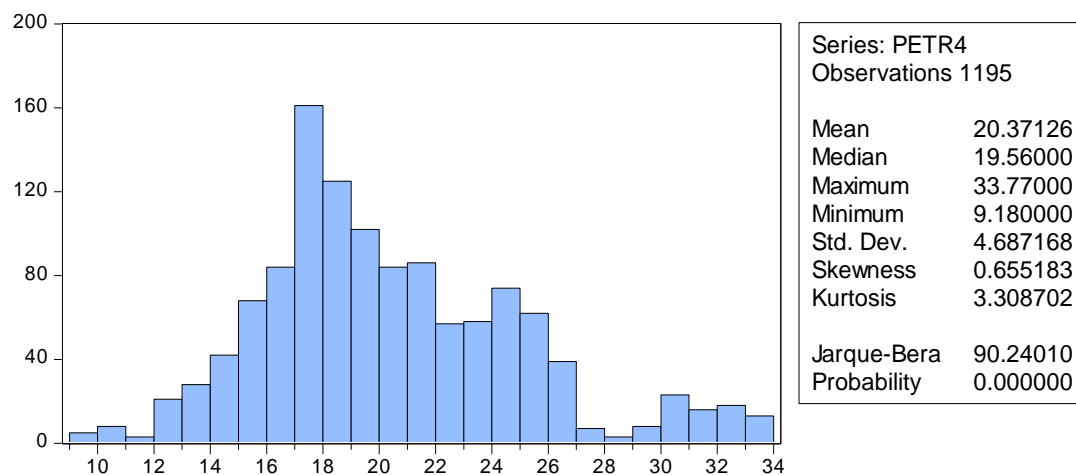
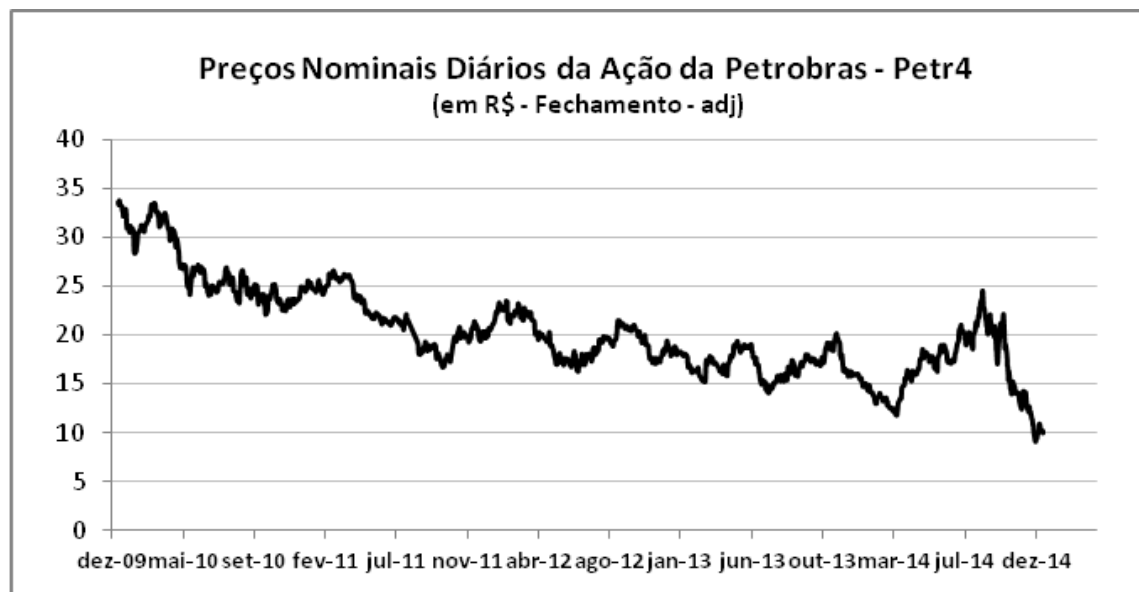
Onde

$$g(z_t) = \theta z_t + \lambda(|z_t| - E(|z_t|))$$

A formulação para $g(z_t)$ permite que o sinal e a magnitude de z_t tenham efeitos separados na variância condicional. Esta assimetria possibilita que a volatilidade responda mais rapidamente a retornos negativos do que a positivos. Isto é particularmente útil na modelagem de precificação de ativos.

Assim definido, temos que $\varepsilon_t \sim \text{EGARCH}(k, m)$

EXEMPLO DE MODELAGEM: AÇÃO - PETR4



Resultados do Modelo ARCH para a PETR4

Dependent Variable: D(LOG(PETR4))

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Included observations: 1153 after adjustments

Convergence achieved after 12 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

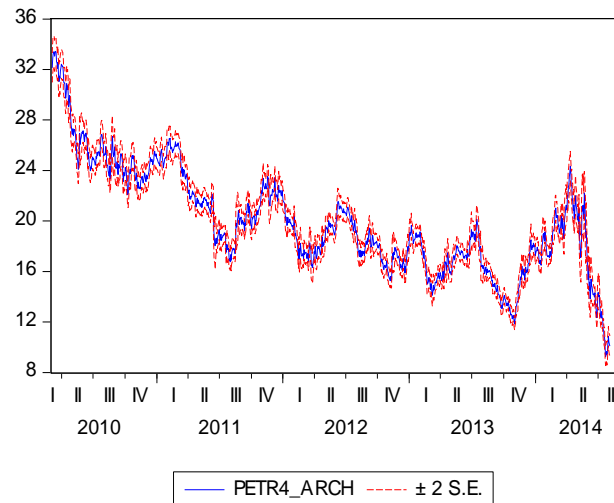
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*RESID(-3)^2
+ C(7)*RESID(-4)^2 + C(8)*RESID(-5)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(13)	-0.103983	0.023190	-4.484041	0.0000
AR(41)	0.096657	0.025223	3.832107	0.0001

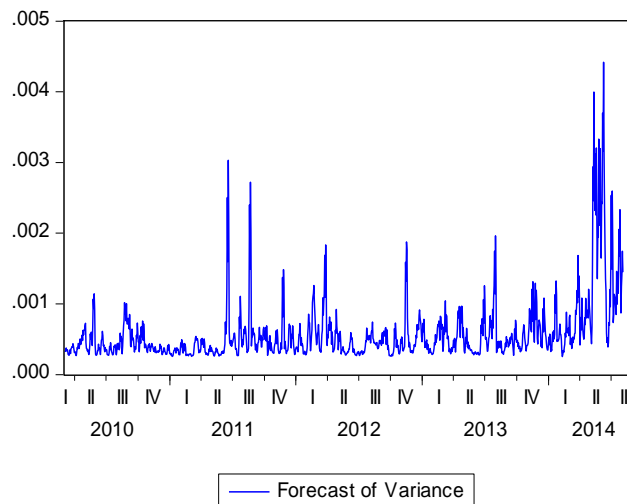
Variance Equation

C	0.000246	2.07E-05	11.90873	0.0000
RESID(-1)^2	0.045996	0.020105	2.287728	0.0222
RESID(-2)^2	0.154912	0.039912	3.881386	0.0001
RESID(-3)^2	0.084803	0.026672	3.179499	0.0015
RESID(-4)^2	0.182764	0.026095	7.003880	0.0000
RESID(-5)^2	0.122746	0.026042	4.713442	0.0000

R-squared	0.006654	Mean dependent var	-0.001014
Adjusted R-squared	0.005791	S.D. dependent var	0.024144
S.E. of regression	0.024074	Akaike info criterion	-4.753138
Sum squared resid	0.667066	Schwarz criterion	-4.718098
Log likelihood	2748.184	Hannan-Quinn criter.	-4.739913
Durbin-Watson stat	1.955727		



Forecast: PETR4_ARCH
 Actual: PETR4
 Forecast sample: 1/04/2010 3/30/2015
 Adjusted sample: 3/03/2010 8/20/2014
 Included observations: 1153
 Root Mean Squared Error 0.454968
 Mean Absolute Error 0.335431
 Mean Abs. Percent Error 1.748827
 Theil Inequality Coefficient 0.011135
 Bias Proportion 0.001842
 Variance Proportion 0.000103
 Covariance Proportion 0.998055



.Resultados do Modelo GARCH para a PETR4

Dependent Variable: D(LOG(PETR4))

Method: ML - GARCH (Marquardt) - Normal distribution

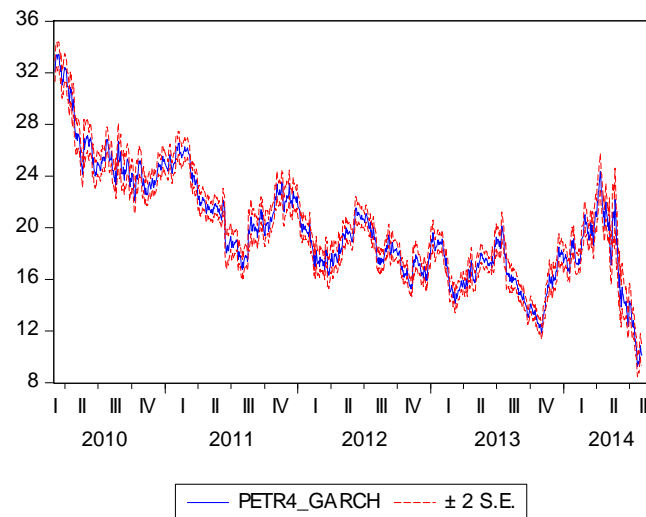
Included observations: 1153 after adjustments

Convergence achieved after 13 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

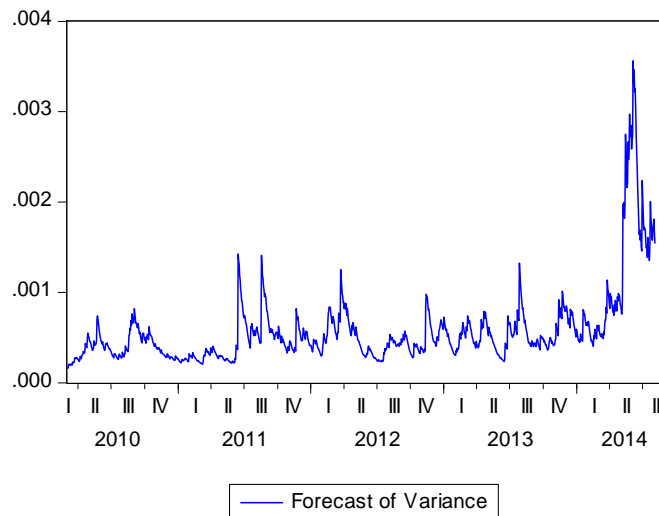
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(13)	-0.102605	0.028409	-3.611678	0.0003
AR(41)	0.088160	0.026774	3.292681	0.0010
Variance Equation				
C	1.48E-05	3.27E-06	4.526941	0.0000
RESID(-1)^2	0.076552	0.012398	6.174260	0.0000
GARCH(-1)	0.900451	0.013780	65.34584	0.0000
R-squared	0.006861	Mean dependent var		-0.001014
Adjusted R-squared	0.005998	S.D. dependent var		0.024144
S.E. of regression	0.024071	Akaike info criterion		-4.767152
Sum squared resid	0.666927	Schwarz criterion		-4.745252
Log likelihood	2753.263	Hannan-Quinn criter.		-4.758886
Durbin-Watson stat	1.956433			



Forecast: PETR4_GARCH
 Actual: PETR4
 Forecast sample: 1/04/2010 3/30/2015
 Adjusted sample: 3/03/2010 8/20/2014
 Included observations: 1153

Root Mean Squared Error	0.454860
Mean Absolute Error	0.335301
Mean Abs. Percent Error	1.748364
Theil Inequality Coefficient	0.011132
Bias Proportion	0.001856
Variance Proportion	0.000100
Covariance Proportion	0.998045



Resultados do Modelo EGARCH para a PETR4

Dependent Variable: D(LOG(PETR4))

Method: ML - EGARCH

Included observations: 1153 after adjustments

Convergence achieved after 19 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

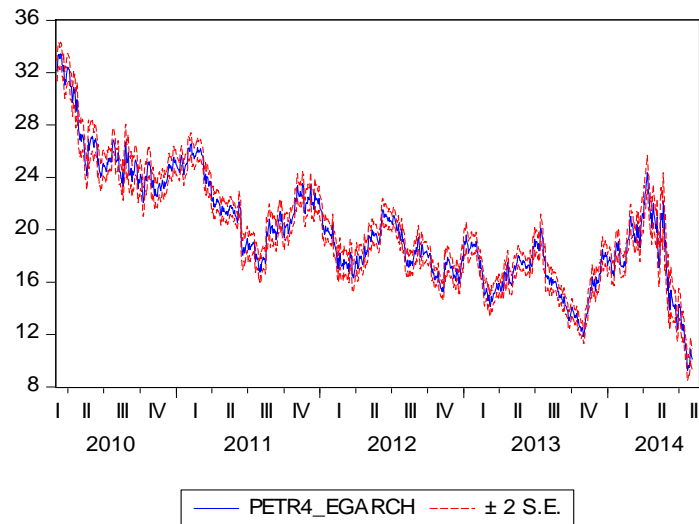
LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(5)
*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(13)	-0.104104	0.027762	-3.749869	0.0002
AR(41)	0.075617	0.028295	2.672402	0.0075

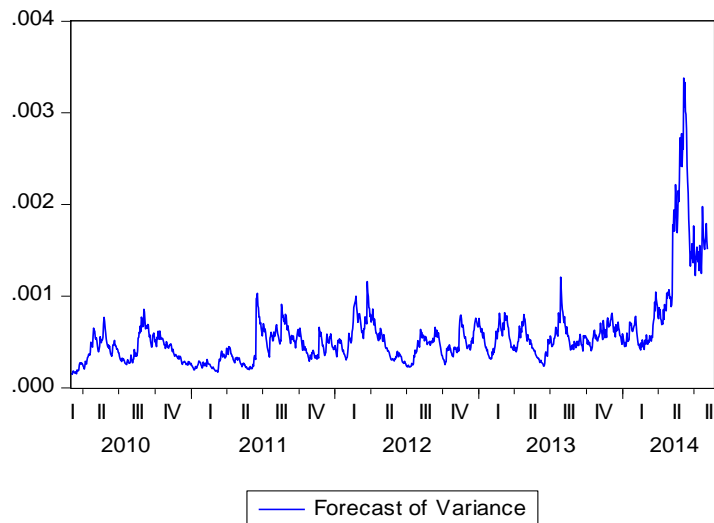
Variance Equation

C(3)	-0.355693	0.058929	-6.035930	0.0000
C(4)	0.162501	0.026345	6.168294	0.0000
C(5)	-0.023318	0.015057	-1.548676	0.1215
C(6)	0.969274	0.006240	155.3379	0.0000

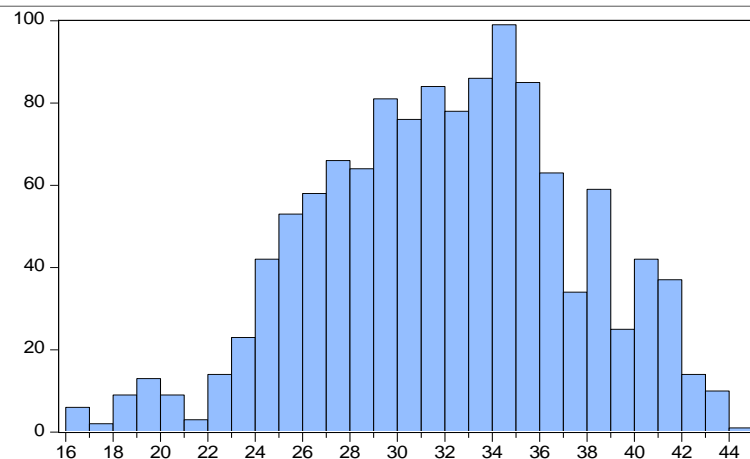
R-squared	0.006636	Mean dependent var	-0.001014
Adjusted R-squared	0.005773	S.D. dependent var	0.024144
S.E. of regression	0.024074	Akaike info criterion	-4.768222
Sum squared resid	0.667077	Schwarz criterion	-4.741942
Log likelihood	2754.880	Hannan-Quinn criter.	-4.758303
Durbin-Watson stat	1.957217		



Forecast: PETR4_EGARCH
 Actual: PETR4
 Forecast sample: 1/04/2010 3/30/2015
 Adjusted sample: 3/03/2010 8/20/2014
 Included observations: 1153
 Root Mean Squared Error 0.454834
 Mean Absolute Error 0.335212
 Mean Abs. Percent Error 1.748128
 Theil Inequality Coefficient 0.011131
 Bias Proportion 0.001884
 Variance Proportion 0.000093
 Covariance Proportion 0.998023



EXEMPLO DE MODELAGEM: AÇÃO – VALE5



Series: VALE5
Sample 1/04/2010 12/30/2014
Observations 1236

Mean	32.01127
Median	32.12500
Maximum	44.27000
Minimum	16.00000
Std. Dev.	5.429266
Skewness	-0.188351
Kurtosis	2.722558

Jarque-Bera	11.27222
Probability	0.003567

Resultados do Modelo ARCH para a VALE5

Dependent Variable: DLOG(VALE5)

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

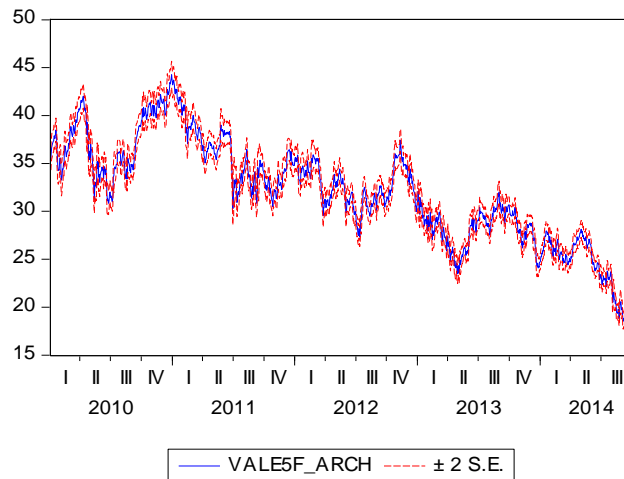
Included observations: 1235 after adjustments

Convergence achieved after 11 iterations

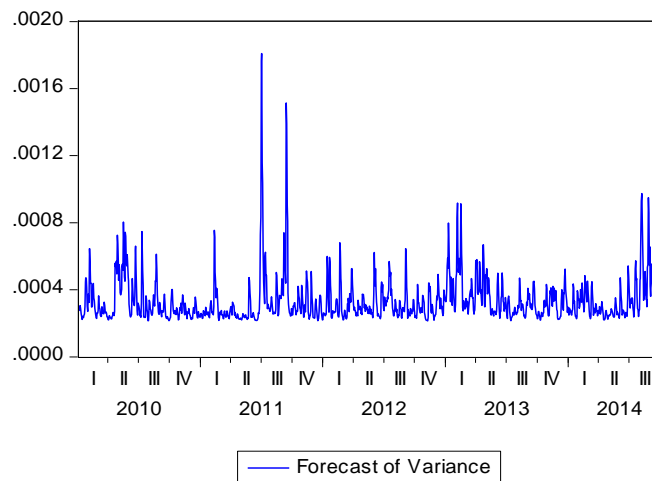
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(1) + C(2)*RESID(-1)^2 + C(3)*RESID(-2)^2 + C(4)*RESID(-3)^2
+ C(5)*RESID(-4)^2 + C(6)*RESID(-5)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	0.000213	1.35E-05	15.78498	0.0000
RESID(-1)^2	0.012042	0.027164	0.443316	0.6575
RESID(-2)^2	0.131498	0.026923	4.884294	0.0000
RESID(-3)^2	0.118284	0.032494	3.640205	0.0003
RESID(-4)^2	0.065306	0.025563	2.554700	0.0106
RESID(-5)^2	0.045796	0.014803	3.093773	0.0020
R-squared	-0.000732	Mean dependent var		-0.000496
Adjusted R-squared	0.000079	S.D. dependent var		0.018335
S.E. of regression	0.018334	Akaike info criterion		-5.203407
Sum squared resid	0.415139	Schwarz criterion		-5.178538
Log likelihood	3219.104	Hannan-Quinn criter.		-5.194052
Durbin-Watson stat	1.936786			



Forecast: VALE5F_ARCH
 Actual: VALE5
 Forecast sample: 1/04/2010 12/30/2014
 Adjusted sample: 1/05/2010 9/30/2014
 Included observations: 1235
 Root Mean Squared Error 0.567591
 Mean Absolute Error 0.419417
 Mean Abs. Percent Error 1.348172
 Theil Inequality Coefficient 0.008740
 Bias Proportion 0.000537
 Variance Proportion 0.000397
 Covariance Proportion 0.999066



Resultados do Modelo GARCH para a VALE5

Dependent Variable: DLOG(VALE5)

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

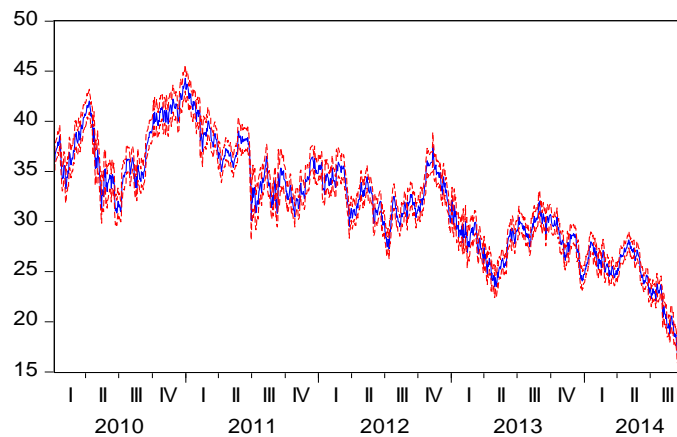
Included observations: 1234 after adjustments

Convergence achieved after 10 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

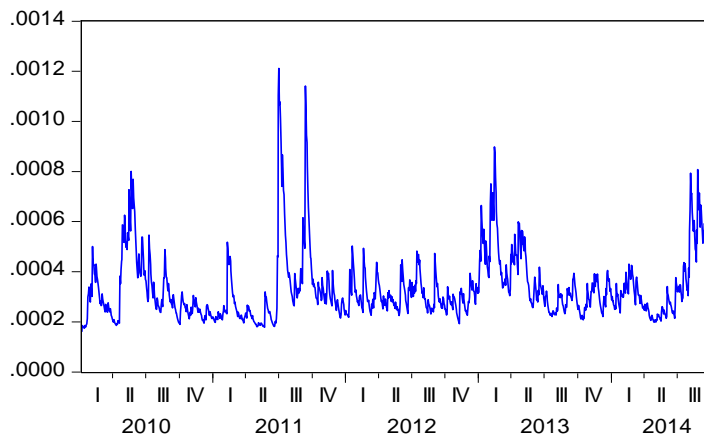
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.060184	0.031818	1.891468	0.0586
Variance Equation				
C	2.04E-05	5.10E-06	3.993666	0.0001
RESID(-1)^2	0.077175	0.012323	6.262729	0.0000
GARCH(-1)	0.863962	0.023928	36.10617	0.0000
R-squared	-0.000613	Mean dependent var	-0.000507	
Adjusted R-squared	-0.000613	S.D. dependent var	0.018338	
S.E. of regression	0.018344	Akaike info criterion	-5.214553	
Sum squared resid	0.414888	Schwarz criterion	-5.197963	
Log likelihood	3221.379	Hannan-Quinn criter.	-5.208313	
Durbin-Watson stat	2.056923			
Inverted AR Roots	.06			



— VALE5F_GARCH - - - ± 2 S.E.

Forecast: VALE5F_GARCH
 Actual: VALE5
 Forecast sample: 1/04/2010 12/30/2014
 Adjusted sample: 1/06/2010 9/30/2014
 Included observations: 1234
 Root Mean Squared Error 0.567495
 Mean Absolute Error 0.420427
 Mean Abs. Percent Error 1.352097
 Theil Inequality Coefficient 0.008739
 Bias Proportion 0.000533
 Variance Proportion 0.000225
 Covariance Proportion 0.999243



— Forecast of Variance

Resultados do Modelo EGARCH para a VALE5

Dependent Variable: DLOG(VALE5)

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

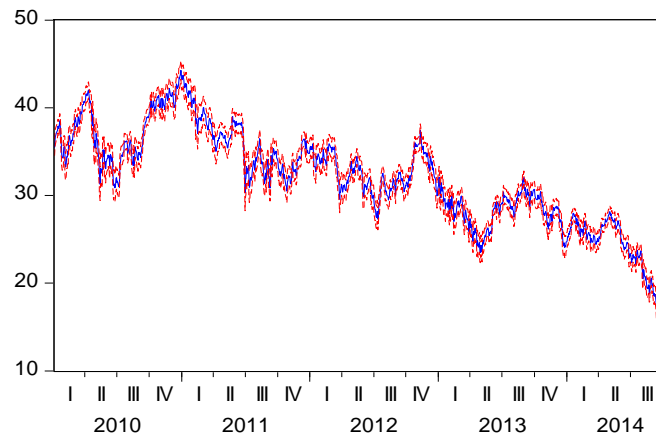
Included observations: 1235 after adjustments

Convergence achieved after 12 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

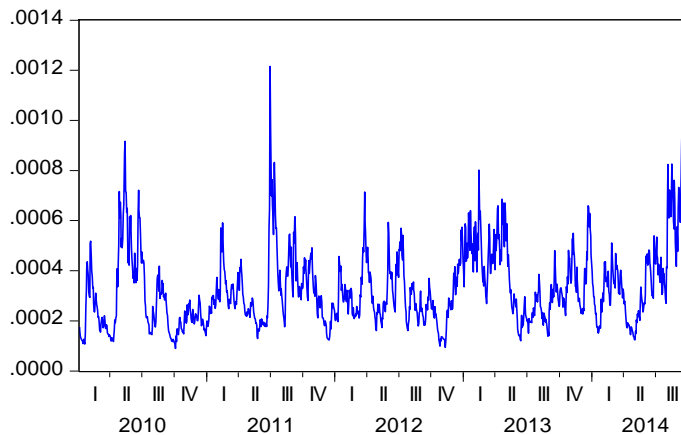
LOG(GARCH) = C(1) + C(2)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(3)
 *RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(4)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C(1)	-0.462624	0.072882	-6.347557	0.0000
C(2)	0.056003	0.019105	2.931357	0.0034
C(3)	-0.134002	0.012792	-10.47568	0.0000
C(4)	0.948685	0.008174	116.0579	0.0000
R-squared	-0.000732	Mean dependent var		-0.000496
Adjusted R-squared	0.000079	S.D. dependent var		0.018335
S.E. of regression	0.018334	Akaike info criterion		-5.269427
Sum squared resid	0.415139	Schwarz criterion		-5.252848
Log likelihood	3257.871	Hannan-Quinn criter.		-5.263191
Durbin-Watson stat	1.936786			



— VALE5F_EGARCH - - - ± 2 S.E.

Forecast: VALE5F_EGARCH
 Actual: VALE5
 Forecast sample: 1/04/2010 12/30/2014
 Adjusted sample: 1/05/2010 9/30/2014
 Included observations: 1235
 Root Mean Squared Error 0.567591
 Mean Absolute Error 0.419417
 Mean Abs. Percent Error 1.348172
 Theil Inequality Coefficient 0.008740
 Bias Proportion 0.000537
 Variance Proportion 0.000397
 Covariance Proportion 0.999066



— Forecast of Variance

EXEMPLO DE APLICAÇÃO: MODELOS DE OPÇÕES DE COMPRA

Resultados dos Exercícios de Precificação de Opções Europeias						
1) Opções de Compra da Petrobras e da Vale, com Ativo-Objeto: PETR4 e VALE5						
Sigla da Opção	Valor da Opção na Data do Contrato	Preço de Exercício PE	Preço do Ativo-Objeto na Data Inicial - P0	Maturidade em dias úteis - T	Data do Contrato de Opção	Data de Vencimento do Contrato
PETRK15E	2,86	14,91	16,61	18	22/10/14	17/11/14
PETRL17E	2,39	16,91	16,61	38	22/10/14	15/12/14
PETRC1E	0,14	12,41	10,00	29	03/02/15	16/03/15
PETRF70E	1,61	10,75	10,20	93	04/02/15	15/06/15
PETRL12E	0,72	12,25	8,18	232	30/01/15	21/12/15
VALEC71E	1,07	17,60	17,82	28	04/02/15	16/03/15
VALED75E	0,07	24,10	18,05	54	03/02/15	20/04/15
VALEF78E	1,24	18,75	16,96	128	17/12/14	15/06/15
VALEH91E	0,89	21,86	18,05	139	03/02/15	17/08/15
VALEH5E	0,98	26,36	16,60	433	17/12/14	15/08/16
Sigla da Opção	Estimativa do Valor Justo da Opção (em R\$)					
	Modelo de Black-Scholes	Modelo GARCH	Modelo de PGDA			
PETRK15E	1,93	2,23	1,85			
PETRL17E	0,83	1,82	0,54			
PETRC1E	0,0371	0,0776	0,0004			
PETRF70E	0,91	0,98	0,48			
PETRL12E	0,419	0,472	0,054			
VALEC71E	0,93	0,95	0,75			
VALED75E	0,0268	0,0295	0,0013			
VALEF78E	1,12	1,14	0,72			
VALEH91E	0,730	0,75	0,34			
VALEH5E	1,09	1,12	0,50			