Modelagem Estocástica de Redes Neurais

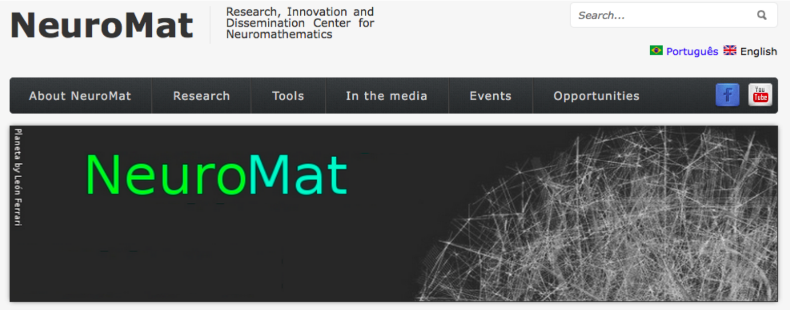
Aline Duarte

Universidade de São Paulo/ CEPID NeuroMat

Universidade Federal Fluminense

25 de outubro de 2017

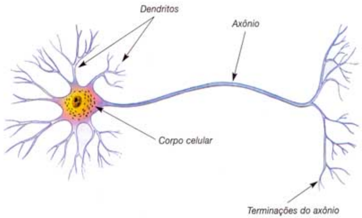
CEPID NeuroMat



CEPID NeuroMat

Redes Neurais

- Unidade cerebral: neurônios - células excitáveis



- Neurônios comunicam-se através de sequências de pulsos elétricos - disparos ou potencias de ação

Potencial de membrana e disparos

Potencial de Membrana = **Diferença** em voltagem entre o interior e exterior da membrana celular.

Potencial de membrana e disparos

Potencial de Membrana $= \quad U_t \in [0, \infty)$

Potencial de membrana e disparos

$$\text{Potencial de Membrana} = U_t \in [0, \infty)$$

Evolução temporal

1. O neurônio acumula potencial devido a uma corrente C_t estímulo (em razão de outros neurônios ou de um estímulo externo)
2. A ocorrência de um disparo depende do potencial de membrana (quanto maior o potencial, maior a probabilidade de disparar)
3. Quando um neurônio dispara, perde todo potencial acumulado

Modelo para disparos de um único neurônio

Modelo Integra-e-dispara **determinístico** (Lapicque 1907)

Fixe um tempo $t \geq 0$

- $C_t \in (0, \infty)$: corrente estímulo
- $L_t \in (-\infty, t]$: o tempo de último disparo do neurônio

- $$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Modelo Integra-e-dispara **determinístico** (Lapicque 1907)

Fixe um tempo $t \geq 0$

- $C_t \in (0, \infty)$: corrente estímulo
- $L_t \in (-\infty, t]$: o tempo de último disparo do neurônio

- $$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

- Continuo somando até que $U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s \geq \vartheta$, então $U_{t+1} = 0$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \ \ t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \ \ t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \ U_4 = 4$
- $U_5 = 0$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$
- $U_5 = 0$
- $U_6 = 1, \; U_7 = 2$ ...

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$
- $U_5 = 0$
- $U_6 = 1, \; U_7 = 2$ ...

Observe que

- $U_1 = 0 + 1 = U_0 + 1$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$
- $U_5 = 0$
- $U_6 = 1, \; U_7 = 2$ ...

Observe que

- $U_1 = 0 + 1 = U_0 + 1$
- $U_2 = U_1 + 1$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$
- $U_5 = 0$
- $U_6 = 1, \; U_7 = 2$ ...

Observe que

- $U_1 = 0 + 1 = U_0 + 1$
- $U_2 = U_1 + 1$
- $U_3 = U_2 + 1, \; U_4 = U_3 + 1,$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$
- $U_5 = 0$
- $U_6 = 1, \; U_7 = 2$ ...

Observe que

- $U_1 = 0 + 1 = U_0 + 1$
- $U_2 = U_1 + 1$
- $U_3 = U_2 + 1, \; U_4 = U_3 + 1,$
- $U_5 = 0 \neq U_4 + 1$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$
- $U_5 = 0$
- $U_6 = 1, \; U_7 = 2$ ...

Observe que

- $U_1 = 0 + 1 = U_0 + 1$
- $U_2 = U_1 + 1$
- $U_3 = U_2 + 1, \; U_4 = U_3 + 1,$
- $U_5 = (U_4 + 1)1_{\{U_4 \leq 4\}}$

Simulação **determinística** de um único neurônio

$$U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} C_s$$

Suponha

- $C_t \equiv 1, \;\; t \in \mathbb{N}$
- $U(0) = 0$
- $\vartheta = 4$

Nesse caso

- $U_1 = 0 + 1 = 1$
- $U_2 = 1 + 1 = 2$
- $U_3 = 3, \; U_4 = 4$
- $U_5 = 0$
- $U_6 = 1, \; U_7 = 2$ ...

Observe que

- $U_1 = (U_0 + 1)1_{\{U_0 \leq 4\}}$
- $U_2 = (U_1 + 1)1_{\{U_1 \leq 4\}}$
- $U_3 = (U_2 + 1)1_{\{U_2 \leq 4\}}$
- $U_4 = (U_3 + 1)1_{\{U_3 \leq 4\}}$
- $U_5 = (U_4 + 1)1_{\{U_4 \leq 4\}}$
- $U_6 = (U_5 + 1)1_{\{U_5 \leq 4\}}$
- $U_7 = (U_6 + 1)1_{\{U_6 \leq 4\}}$

$$\mathbf{U_k = f(U_{k-1})}$$

Modelo Integra-e-dispara **estocástico**

Fixe um tempo $t > \mathbb{Z}$

- $C_t \equiv c$: corrente estímulo constante
- $L_t \in (-\infty, t)$: tempo de último disparo do neurônio

- $U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} c$
- $U_t = \begin{cases} U_{t-1} + c, & \text{se não dispara no tempo } t \\ 0, & \text{se dispara no tempo } t \end{cases}$

Modelo Integra-e-dispara **estocástico**

Fixe um tempo $t > \mathbb{Z}$

- $C_t \equiv c$: corrente estímulo constante
- $L_t \in (-\infty, t)$: tempo de último disparo do neurônio

- $U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} c$
- $U_t = \begin{cases} U_{t-1} + c, & \text{se não dispara no tempo } t \\ 0, & \text{se dispara no tempo } t \end{cases}$

- $\mathbb{P}(U_{t+1} = 0 \mid U_t) = \varphi(U_t)$
  - $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ função probabilidade de disparo

Modelo Integra-e-dispara **estocástico**

Fixe um tempo $t > \mathbb{Z}$

- $C_t \equiv c$: corrente estímulo constante
- $L_t \in (-\infty, t)$: tempo de último disparo do neurônio

- $U_t = \sum_{s=L_t+1}^{t} c$
- $U_t = \begin{cases} U_{t-1} + c, & \text{se não dispara no tempo } t \\ 0, & \text{se dispara no tempo } t \end{cases}$

- $\mathbb{P}(U_{t+1} = 0 \mid U_t) = \varphi(U_t)$
  - $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ função probabilidade de disparo

$\Rightarrow$ $(U_t)_{t \geq 0}$ é uma **cadeia de Markov de ordem 1**

Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a's iid com distribuição uniforme em $[0, 1]$.

Definição: Cadeia de Markov

Um processo $U_0, U_1, U_2, \ldots$ tomando valores em um alfabeto A é uma *cadeia de Markov de ordem 1*, com estado inicial $a \in A$, se $U_0 = a$ e existe uma função $f : A \times [0, 1] \to A$ tal que para todo $t \geq 0$

$$U_{t+1} = f(U_t, \xi_{t+1})$$

Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a's iid com distribuição uniforme em $[0, 1]$.

Definição: Cadeia de Markov

Um processo U_0, U_1, $U_2, \ldots$ tomando valores em um alfabeto A é uma *cadeia de Markov de ordem 1*, com estado inicial $a \in A$, se $U_0 = a$ e existe uma função $f : A \times [0, 1] \to A$ tal que para todo $t \geq 0$

$$U_{t+1} = f(U_t, \xi_{t+1})$$

No nosso modelo para neurônio:

1. $U_{t+1} = \begin{cases} U_t + c, & \text{se não dispara no tempo } t+1 \\ 0, & \text{se dispara no tempo } t+1 \end{cases}$
2. $\mathbb{P}(U_{t+1} = 0 \mid U_t) = \varphi(U_t)$

Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a's iid com distribuição uniforme em $[0, 1]$.

Definição: Cadeia de Markov

Um processo $U_0, U_1, U_2, \ldots$ tomando valores em um alfabeto A é uma *cadeia de Markov de ordem 1*, com estado inicial $a \in A$, se $U_0 = a$ e existe uma função $f : A \times [0, 1] \to A$ tal que para todo $t \geq 0$

$$U_{t+1} = f(U_t, \xi_{t+1})$$

No nosso modelo para neurônio:

1. $U_{t+1} = \begin{cases} U_t + c, & \text{com prob } 1 - \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } \varphi(U_t) \end{cases}$

Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a's iid com distribuição uniforme em $[0,1]$.

Definição: Cadeia de Markov

Um processo $U_0, U_1, U_2, \ldots$ tomando valores em um alfabeto A é uma *cadeia de Markov de ordem 1*, com estado inicial $a \in A$, se $U_0 = a$ e existe uma função $f : A \times [0,1] \to A$ tal que para todo $t \geq 0$

$$U_{t+1} = f(U_t, \xi_{t+1})$$

No nosso modelo para neurônio:

1. $U_{t+1} = \begin{cases} U_t + c, & \text{com prob } 1 - \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } \varphi(U_t) \end{cases}$

$$U_{t+1} = f(U_t, \xi_{t+1}) = (U_t + c)1_{\{\xi_{t+1} > \varphi(U_t)\}}$$

Simulação **estocástica** de um único neurônio

$$U_{t+1} = f(U_t, \xi_{t+1}) = (U_t + c)1_{\{\xi_{t+1} > \varphi(U_t)\}}$$

Suponha

- $c = 1, \ U(0) = 0,$
- $\varphi(n) = 1 - 2^{-n}$ $(\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0.5, \varphi(2) = 0.75, \varphi(3) = 0.875, \varphi(4) = 0.9375)$
- $(\xi_t)_{t \geq 1}$: v.a's iid com $\xi_t \sim Unif([0, 1])$
  - $\xi_1 = 0.35, \xi_2 = 0.85, \xi_3 = 0.79, \xi_4 = 0.28, \xi_5 = 0.03, \ \ldots$

Simulação **estocástica** de um único neurônio

$$U_{t+1} = f(U_t, \xi_{t+1}) = (U_t + c)1_{\{\xi_{t+1} > \varphi(U_t)\}}$$

Suponha

- $c = 1, \; U(0) = 0,$
- $\varphi(n) = 1 - 2^{-n}$ $(\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0.5, \varphi(2) = 0.75, \varphi(3) = 0.875, \varphi(4) = 0.9375)$
- $(\xi_t)_{t \geq 1}$: v.a's iid com $\xi_t \sim Unif([0,1])$
  - $\xi_1 = 0.35, \xi_2 = 0.85, \xi_3 = 0.79, \xi_4 = 0.28, \xi_5 = 0.03, \; \ldots$

Nesse caso

- $U_1 = (0+1)1_{\{0.35>0\}} = 1$
- $U_2 = (1+1)1_{\{0.85>0.5\}} = 2$
- $U_3 = (2+1)1_{\{0.79>0.75\}} = 3$
- $U_4 = (3+1)1_{\{0.28>0.875\}} = 0$
- $U_5 = (0+1)1_{\{0.03>0\}} = 1 \; \ldots$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}}$$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(?)$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(?)$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$
    - $X_{t-2} = 1$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$
    - $X_{t-2} = 1 \Rightarrow U_{t-2} = 0$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$
    - $X_{t-2} = 1 \Rightarrow U_{t-2} = 0 \Rightarrow U_{t-1} = c$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$
    - $X_{t-2} = 1 \Rightarrow U_{t-2} = 0 \Rightarrow U_{t-1} = c \Rightarrow U_t = 2c$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$
    - $X_{t-2} = 1 \Rightarrow U_{t-2} = 0 \Rightarrow U_{t-1} = c \Rightarrow U_t = 2c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(2c)$

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$
    - $X_{t-2} = 1 \Rightarrow U_{t-2} = 0 \Rightarrow U_{t-1} = c \Rightarrow U_t = 2c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(2c)$
    - $X_{t-2} = 0 \Rightarrow U_{t-2} \neq 0$ ...

Memória variável

Considere a cadeia estocástica $(X_t)_{t\geq 0}$ dada por

$$X_t = 1_{\{U_t=0\}} \qquad \Rightarrow X_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{com prob } \varphi(U_t) \\ 0, & \text{com prob } 1-\varphi(U_t) \end{cases}$$

Pergunta: Como definir um algoritmo estocástico para gerar X_{t+1} a partir de $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$?

Vejamos

- $X_t = 1 \Rightarrow U_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(0)$
- $X_t = 0 \Rightarrow U_t \neq 0$
  - $X_{t-1} = 1 \Rightarrow U_{t-1} = 0 \Rightarrow U_t = c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(c)$
  - $X_{t-1} = 0 \Rightarrow U_{t-1} \neq 0$
    - $X_{t-2} = 1 \Rightarrow U_{t-2} = 0 \Rightarrow U_{t-1} = c \Rightarrow U_t = 2c \Rightarrow X_{t+1} = 1$ com prob $\varphi(2c)$
    - $X_{t-2} = 0 \Rightarrow U_{t-2} \neq 0$ ...

Árvore de Contextos!!!!

Memória variável

Defina

$$L_t = L_t(X_t, X_{t-1}, \ldots) = \sup\{s \leq t : X_s = 1\}$$

(a última vez que X foi igual a 1, antes do tempo t)

Assim

$$X_{t+1} = F(\xi_{t+1}, X_t, \ldots, X_{L_t})$$

Exemplo: Suponha a seguinte realização

$$X_0 = 1,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1,\ X_4 = 0,\ X_5 = 0,\ X_6 = 0$$

- $L_6 = 3$
- $X_7 = F(\xi_7, X_6, \ldots, X_3)$

Exemplo: Suponha a seguinte realização

$$X_0 = 1,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1,\ X_4 = 0,\ X_5 = 0,\ X_6 = 0$$

- $L_6 = 3$
- $X_7 = F(\xi_7, X_6, \ldots, X_3)$
- $U_3 = 0,\ U_4 = c,\ U_5 = 2c$ e $U_6 = 3c$

Exemplo: Suponha a seguinte realização

$$X_0 = 1,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1,\ X_4 = 0,\ X_5 = 0,\ X_6 = 0$$

- $L_6 = 3$
- $X_7 = F(\xi_7, X_6, \dots, X_3)$
- $U_3 = 0,\ U_4 = c,\ U_5 = 2c$ e $U_6 = 3c$
- Por definição

$$U_6 = \sum_{s=L_6+1}^{6} c = c(6 - L_6)$$

Exemplo: Suponha a seguinte realização

$$X_0 = 1,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1,\ X_4 = 0,\ X_5 = 0,\ X_6 = 0$$

- $L_6 = 3$
- $X_7 = F(\xi_7, X_6, \dots, X_3)$
- $U_3 = 0,\ U_4 = c,\ U_5 = 2c$ e $U_6 = 3c$
- Por definição
$$U_6 = \sum_{s=L_6+1}^{6} c = c(6 - L_6)$$
- O que implica

$$X_7 = 1 \text{ com prob } \varphi\big(c(6 - L_6)\big).$$

Exemplo: Suponha a seguinte realização

$$X_0 = 1,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1,\ X_4 = 0,\ X_5 = 0,\ X_6 = 0$$

- $L_6 = 3$
- $X_7 = F(\xi_7, X_6, \ldots, X_3)$
- $U_3 = 0,\ U_4 = c,\ U_5 = 2c$ e $U_6 = 3c$
- Por definição

$$U_6 = \sum_{s=L_6+1}^{6} c = c(6 - L_6)$$

- O que implica

$$X_7 = 1 \text{ com prob } \varphi\big(c(6 - L_6)\big).$$

- Assim, X_7 pode ser escrito como

$$X_7 = 1_{\{\xi_7 < \varphi(c(6 - L_6))\}}$$

Sistema de Neurônios Interagentes

Motivação biológica

- Cada neurônio dispara com probabilidade proporcional ao seu potencial

Motivação biológica

- Cada neurônio dispara com probabilidade proporcional ao seu potencial
- **Sinapses químicas**
  - Se um neurônio i dispara em um instante t
    - o seu potencial é **resetado** para 0
      $\Rightarrow U_t(i) = 0$
    - o potencial dos demais neurônios **recebe uma quantidade** $W_{i \to j} \in \mathbb{R}$
      $\Rightarrow \forall j \neq i, U_t(j) = U_{t-1}(j) + W_{i \to j}$ (sinapses químicas)

Definição do modelo

- $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ - um conjunto finito de neurônios
- $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$: cadeia estocástica tomando valores em $\{0, 1\}^I$, $\forall t \geq 0$

$$\mathbf{X}_t = (X_t(1), X_t(2), \ldots, X_t(N))$$

- Para cada neurônio $i \in I$ e cada instante de tempo $t \geq 0$

$$X_t(i) = \begin{cases} 1, & \text{se o neurônio } i \text{ disparou no instante } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definição do modelo

- $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ - um conjunto finito de neurônios
- $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$: cadeia estocástica tomando valores em $\{0,1\}^I$, $\forall t \geq 0$

$$\mathbf{X}_t = (X_t(1), X_t(2), \ldots, X_t(N))$$

- Para cada neurônio $i \in I$ e cada instante de tempo $t \geq 0$

$$X_t(i) = \begin{cases} 1, & \text{se o neurônio } i \text{ disparou no instante } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $L_t^i = \sup\{s \leq t : X_s(i) = 1\}$, com $\sup\{\emptyset\} = -\infty$

(tempo do último disparo de i)

Definição do Modelo

Para $t \geq 0$, considere uma sequência $\zeta_t = (\xi_t(1), \xi_t(2), \ldots, \xi_t(N))$ de v.a's iid com distribuição uniforme em $[0, 1]$, para cada $t \geq 0$

$$\mathbf{X}_{t+1} = F(\zeta_{t+1}, \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \ldots, \mathbf{X}_0)$$

Onde F é tal que

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F_i\left(\xi_{t+1}(i), X_t(1), X_{t-1}(i), \ldots, X_{L_t^i}(i)\right) \\ &= 1_{\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(U_i(t))\}} \\ &= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i))\right\}} \end{aligned}$$

Definição do Modelo

Para $t \geq 0$, considere uma sequência $\zeta_t = (\xi_t(1), \xi_t(2), \ldots, \xi_t(N))$ de v.a's iid com distribuição uniforme em $[0,1]$, para cada $t \geq 0$

$$\mathbf{X}_{t+1} = F(\zeta_{t+1}, \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \ldots, \mathbf{X}_0)$$

Onde F é tal que

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F_i\left(\xi_{t+1}(i), X_t(1), X_{t-1}(i), \ldots, X_{L_t^i}(i)\right) \\ &= 1_{\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(U_i(t))\}} \\ &= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i))\right\}} \end{aligned}$$

$$U_t(i) = \sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i) : \text{ potencial do neurônio } i \text{ no tempo } t$$

Definição do Modelo

Para $t \geq 0$, considere uma sequência $\zeta_t = (\xi_t(1), \xi_t(2), \ldots, \xi_t(N))$ de v.a's iid com distribuição uniforme em $[0,1]$, para cada $t \geq 0$

$$\mathbf{X}_{t+1} = F(\zeta_{t+1}, \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \ldots, \mathbf{X}_0)$$

Onde F é tal que

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F_i\big(\xi_{t+1}(i), X_t(1), X_{t-1}(i), \ldots, X_{L_t^i}(i)\big) \\ &= 1_{\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(U_i(t))\}} \\ &= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i))\right\}} \end{aligned}$$

$$U_t(i) = \sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i) : \text{ potencial do neurônio } i \text{ no tempo } t$$

Mas quem é a corrente estímulo $C_t(i)$?

Definindo a corrente estímulo

- $C_t(i)$ não é mais constante!!!!!
- $C_t(i)$ agora **modela a interação com outros neurônios!**

Definindo a corrente estímulo

- $C_t(i)$ não é mais constante!!!!!
- $C_t(i)$ agora **modela a interação com outros neurônios!**

$$C_t(i) = \sum_{j \neq i} X_t(j), \quad t \geq 0$$

- Se j dispara no tempo $t \geq 0 \Rightarrow X_t(j) = 1$,
  $\Rightarrow C_t(i)$ recebe 1

Definindo a corrente estímulo

- $C_t(i)$ não é mais constante!!!!!
- $C_t(i)$ agora **modela a interação com outros neurônios!**
  - Sinapses químicas: $W_{j\to i} \in \mathbb{R}$ para $j \neq i$ e $W_{i\to i} = 0$

$$C_t(i) = \sum_{j \neq i} W_{j\to i} X_t(j), \;\; t \geq 0$$

- Se j dispara no tempo $t \geq 0 \Rightarrow X_t(j) = 1,$

  $\Rightarrow C_t(i)$ recebe $W_{j\to i}$

Definição do Modelo

Portanto

$$
\begin{aligned}
X_{t+1} &= F_i\big(\xi_{t+1}(i), X_t(1), X_{t-1}(i), \ldots, X_{L_t^i}(i)\big) \\
&= 1_{\{\xi_{t+1}(i) \le \varphi(U_i(t))\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \le \varphi(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i))\right\}}
\end{aligned}
$$

Definição do Modelo

Portanto

$$
\begin{aligned}
X_{t+1} &= F_i\big(\xi_{t+1}(i), X_t(1), X_{t-1}(i), \ldots, X_{L_t^i}(i)\big) \\
&= 1_{\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(U_i(t))\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i))\right\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi\left(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_s(j)\right)\right\}}
\end{aligned}
$$

Definição do Modelo

Portanto

$$
\begin{aligned}
X_{t+1} &= F_i\big(\xi_{t+1}(i), X_t(1), X_{t-1}(i), \ldots, X_{L_t^i}(i)\big) \\
&= 1_{\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(U_i(t))\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i))\right\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi\left(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_s(j)\right)\right\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \leq \varphi\left(\sum_{j \neq i} W_{j \to i} \sum_{s=L_t^i+1}^{t} X_s(j)\right)\right\}}
\end{aligned}
$$

Definição do Modelo

Portanto

$$
\begin{aligned}
X_{t+1} &= F_i\big(\xi_{t+1}(i), X_t(1), X_{t-1}(i), \ldots, X_{L_t^i}(i)\big) \\
&= 1_{\{\xi_{t+1}(i) \le \varphi(U_i(t))\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \le \varphi(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} C_s(i))\right\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \le \varphi\left(\sum_{s=L_t^i+1}^{t} \sum_{j \neq i} W_{j\to i} X_s(j)\right)\right\}} \\
&= 1_{\left\{\xi_{t+1}(i) \le \varphi\left(\sum_{j \neq i} W_{j\to i} \sum_{s=L_t^i+1}^{t} X_s(j)\right)\right\}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $X_{t+1} = 1$ com probabilidade $\varphi(U_t(i))$ com

$$
U_t(i) = \sum_{j \neq i} W_{j\to i} \sum_{s=L_t^i+1}^{t} X_s(j)
$$

Probabilidade de disparo: sinapses químicas

3	0	1	0	0	0					
2	0	0	0	1	0					
1	1	0	1	0	0					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n

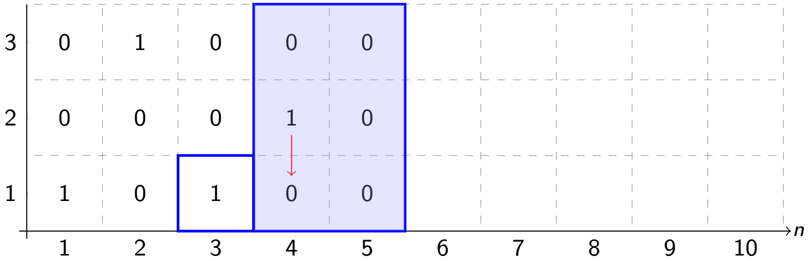
Probabilidade de disparo: sinapses químicas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	0	0	0					
2	0	0	0	1	0					
1	1	0	1	0	0					

n

$$\mathbb{P}\big(X_6(1) \mid \text{passado}\big) = \varphi\begin{pmatrix}\text{disparos de 2 e 3 desde o}\\ \text{tempo de último disparo de 1}\end{pmatrix}$$

Probabilidade de disparo: sinapses químicas



$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_6(1) \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(\begin{array}{c}\text{disparos de 2 e 3 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 1}\end{array}\right) \\
\mathbb{P}\big(X_6(1) = 1 \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(W_{2\to 1} + 0\right)
\end{aligned}
$$

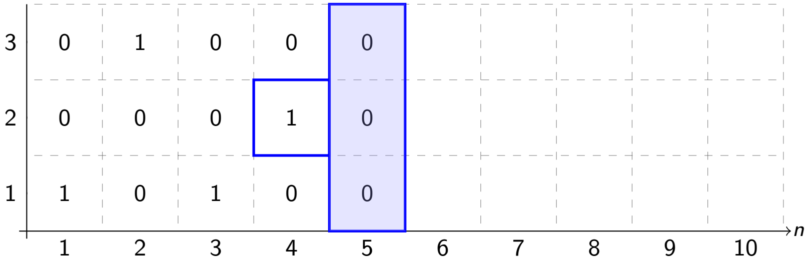
Probabilidade de disparo: sinapses químicas

3	0	1	0	0	0					
2	0	0	0	1	0					
1	1	0	1	0	0					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n

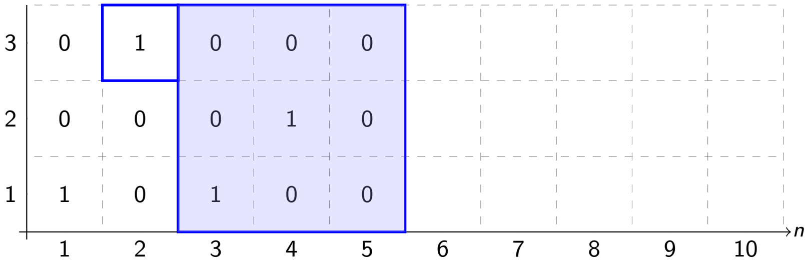
$$\mathbb{P}\big(X_6(2) \mid \text{passado}\big) \quad = \quad \varphi\left(\begin{array}{c}\text{disparos de 1 e 3 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 2}\end{array}\right)$$

Probabilidade de disparo: sinapses químicas



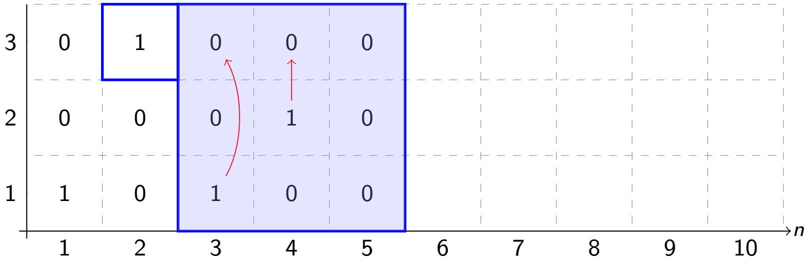
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_6(2) \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(\begin{array}{c}\text{disparos de 1 e 3 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 2}\end{array}\right) \\
\mathbb{P}\big(X_6(2) = 1 \mid \text{passado}\big) &= \varphi(0)
\end{aligned}$$

Probabilidade de disparo: sinapses químicas



$$\mathbb{P}\big(X_6(3) \mid \text{passado}\big) = \varphi\begin{pmatrix}\text{disparos de 1 e 2 desde o}\\ \text{tempo de último disparo de 3}\end{pmatrix}$$

Probabilidade de disparo: sinapses químicas



$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_6(3) \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(\begin{array}{c}\text{disparos de 1 e 2 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 3}\end{array}\right) \\
\mathbb{P}\big(X_6(3) = 1 \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(W_{1\to 3} + W_{2\to 3} + 0\right)
\end{aligned}
$$

Motivação biológica

- **Canais de vazamento**
  - Cada neurônio perde continuamente potencial para o meio

Motivação biológica

- **Canais de vazamento**
  - Cada neurônio perde continuamente potencial para o meio
  - Sinapses que ocorreram a pouco tempo tem maior influência

Motivação biológica

- **Canais de vazamento**
  - Cada neurônio perde continuamente potencial para o meio
  - Sinapses que ocorreram a pouco tempo tem maior influência
  - Os canais de vazamento são descritos através de uma sequência decrescente $1, \rho, \rho^2, \rho^3, \ldots$ com $\rho \in [0, 1]$

Potencial de membrana com vazamento

- Sinapses químicas: $W_{j\to i} \in \mathbb{R}$ para $j \neq i$ e $W_{i\to i} = 0$

$$U_t(i) = \sum_{j\neq i} W_{j\to i} \sum_{s=L_t^i+1}^{t} \qquad X_s(j), \;\; t \geq 0$$

- Se j disparou no tempo $L_t^i + 1 \leq s \leq t \Rightarrow X_t(j) = 1$,

$\Rightarrow U_t(i)$ recebe $\qquad W_{j\to i}$

Potencial de membrana com vazamento

- Sinapses químicas: $W_{j\to i} \in \mathbb{R}$ para $j \neq i$ e $W_{i\to i} = 0$
- Os canais de vazamento: $1, \rho, \rho^2, \rho^3, \ldots,\ \rho \in [0,1]$

$$U_t(i) = \sum_{j\neq i} W_{j\to i} \sum_{s=L_t^i+1}^{t} \rho^{t-s} X_s(j), \ \ t \geq 0$$

- Se j disparou no tempo $L_t^i + 1 \leq s \leq t \Rightarrow X_t(j) = 1,$

$\Rightarrow U_t(i)$ recebe $\rho^{t-s} W_{j\to i}$

Probabilidade de disparo: COM canais de vazamento

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	0	0	0					
2	0	0	0	1	0					
1	1	0	1	0	0					
										n

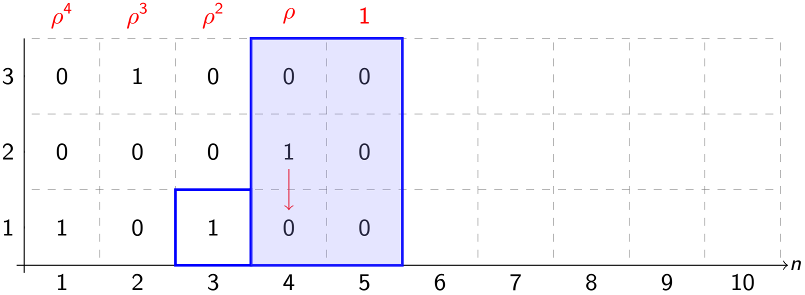
Probabilidade de disparo: COM canais de vazamento

	ρ^4	ρ^3	ρ^2	ρ	1					
3	0	1	0	0	0					
2	0	0	0	1	0					
1	1	0	1	0	0					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n

$$P\big(X_6(1) \mid \text{passado}\big) \quad = \quad \varphi\left(\begin{array}{c}\text{disparos de 2 e 3 desde o}\\ \text{tempo de último disparo de 1}\\ \text{ponderados vazamento}\end{array}\right)$$

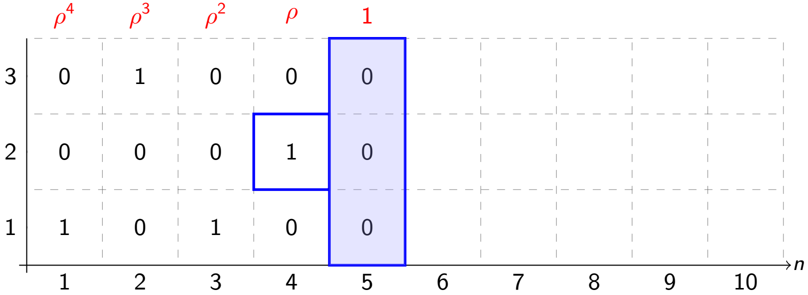
Probabilidade de disparo: COM canais de vazamento



$$P\big(X_6(1) \mid \text{passado}\big) = \varphi\begin{pmatrix}\text{disparos de 2 e 3 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 1} \\ \text{ponderados vazamento}\end{pmatrix}$$

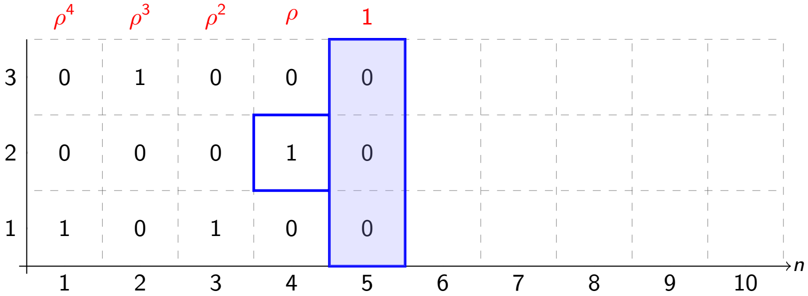
$$P\big(X_6(1) \mid \text{passado}\big) = \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right)$$

Probabilidade de disparo: COM canais de vazamento



$$\mathbb{P}\big(X_6(2) \mid \text{passado}\big) \quad = \quad \varphi\begin{pmatrix} \text{disparos de 1 e 3 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 2} \\ \text{ponderados vazamento} \end{pmatrix}$$

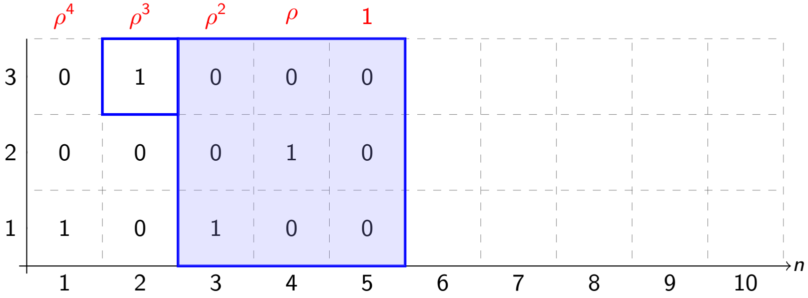
Probabilidade de disparo: COM canais de vazamento



$$\mathbb{P}\big(X_6(2) \mid \text{passado}\big) \quad = \quad \varphi\left(\begin{array}{c}\text{disparos de 1 e 3 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 2} \\ \text{ponderados vazamento}\end{array}\right)$$

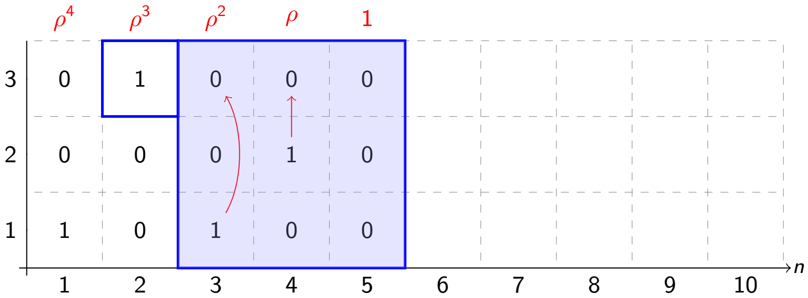
$$P\big(X_6(2) \mid \text{passado}\big) \quad = \quad \varphi\,(0)$$

Probabilidade de disparo: COM canais de vazamento



$$\mathbb{P}\big(X_6(3) \mid \text{passado}\big) \quad = \quad \varphi\left(\begin{array}{c}\text{disparos de 1 e 2 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 3} \\ \text{ponderados vazamento}\end{array}\right)$$

Probabilidade de disparo: COM canais de vazamento



$$\mathbb{P}\big(X_6(3) \mid \text{passado}\big) = \varphi\begin{pmatrix}\text{disparos de 1 e 2 desde o} \\ \text{tempo de último disparo de 3} \\ \text{ponderados vazamento}\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\big(X_6(3) \mid \text{passado}\big) = \varphi\left(\rho^2 W_{1\to 3} + \rho W_{2\to 3} + 0\right)$$

A cadeia dos potencias é Markov

Suponha que i dispara no tempo ℓ

- $U_\ell(i) = 0$

A cadeia dos potencias é Markov

Suponha que i dispara no tempo ℓ

- $U_\ell(i) = 0$
- $U_{\ell+1}(i) = \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j)$

A cadeia dos potencias é Markov

Suponha que i dispara no tempo ℓ

- $U_\ell(i) = 0$
- $U_{\ell+1}(i) = \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j)$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+2}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho X_{\ell+1}(j) + X_{\ell+2}) \\ &= \rho \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$

A cadeia dos potencias é Markov

Suponha que i dispara no tempo ℓ

- $U_\ell(i) = 0$
- $U_{\ell+1}(i) = \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j)$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+2}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho X_{\ell+1}(j) + X_{\ell+2}) \\ &= \rho \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \\ &= \rho U_{\ell+1}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$

A cadeia dos potencias é Markov

Suponha que i dispara no tempo ℓ

- $U_\ell(i) = 0$
- $U_{\ell+1}(i) = \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j)$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+2}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho X_{\ell+1}(j) + X_{\ell+2}) \\ &= \rho \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \\ &= \rho U_{\ell+1}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+3}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho^2 X_{\ell+1}(j) + \rho X_{\ell+2}(j) + X_{\ell+3}(j)) \\ &= \rho U_{\ell+2}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$

A cadeia dos potencias é Markov

Suponha que i dispara no tempo ℓ

- $U_\ell(i) = 0$
- $U_{\ell+1}(i) = \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j)$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+2}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho X_{\ell+1}(j) + X_{\ell+2}) \\ &= \rho \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \\ &= \rho U_{\ell+1}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+3}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho^2 X_{\ell+1}(j) + \rho X_{\ell+2}(j) + X_{\ell+3}(j)) \\ &= \rho U_{\ell+2}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$

$$U_k(i) = \rho U_{k-1}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_k(j)$$

A cadeia dos potencias é Markov

Suponha que i dispara no tempo ℓ

- $U_\ell(i) = 0$
- $U_{\ell+1}(i) = \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j)$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+2}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho X_{\ell+1}(j) + X_{\ell+2}) \\ &= \rho \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+1}(j) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \\ &= \rho U_{\ell+1}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} U_{\ell+3}(i) &= \sum_{j \neq i} W_{j \to i}(\rho^2 X_{\ell+1}(j) + \rho X_{\ell+2}(j) + X_{\ell+3}(j)) \\ &= \rho U_{\ell+2}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} X_{\ell+2}(j) \end{aligned}$$

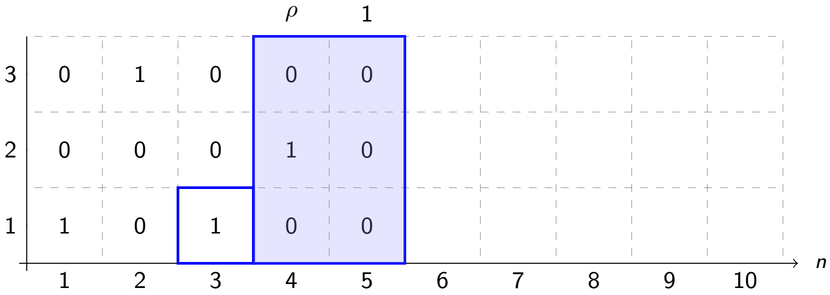
$$U_k(i) = \rho U_{k-1}(i) + \sum_{j \neq i} W_{j \to i} 1_{\{\xi_k(j) \leq \varphi(U_{k-1}(j))\}}$$

Evolução do potencial

3	0	1	0	0	0					
2	0	0	0	1	0					
1	1	0	1	0	0					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n

Evolução do potencial



$$P\Big(X_6(1) = 1 |\ \text{passado}\ \Big) \quad = \quad \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right)$$

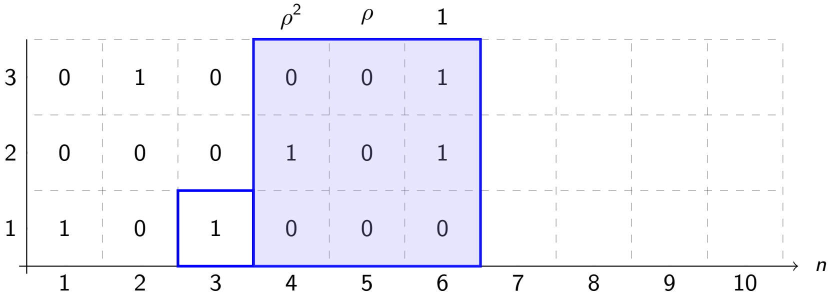
Evolução do potencial

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	0	0	0	1				
2	0	0	0	1	0	1				
1	1	0	1	0	0	0				

n

$$P\left(X_6(1) = 1 \middle| \text{ passado } \right) \quad = \quad \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right)$$

Evolução do potencial



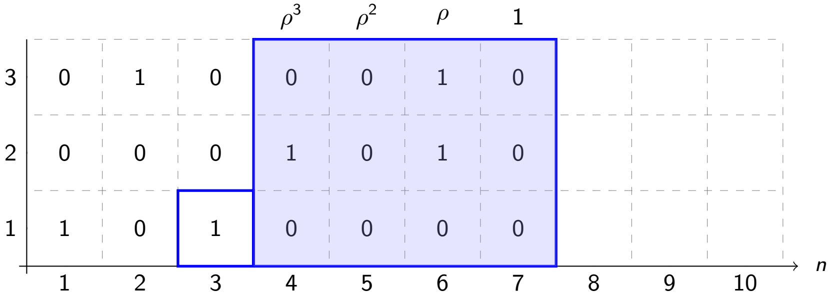
$$
\begin{aligned}
P\big(X_6(1) = 1 | \text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right) \\
P\big(X_7(1) = 1 | \text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to 1} + 0 + (W_{2\to 1} + W_{3\to 1})\right)
\end{aligned}
$$

Evolução do potencial

3	0	1	0	0	0	1	0			
2	0	0	0	1	0	1	0			
1	1	0	1	0	0	0	0			
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$
\begin{aligned}
P\big(X_6(1) = 1 |\ \text{passado}\ \big) &= \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right) \\
P\big(X_7(1) = 1 |\ \text{passado}\ \big) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to 1} + 0 + (W_{2\to 1} + W_{3\to 1})\right)
\end{aligned}
$$

Evolução do potencial



$$
\begin{aligned}
P\big(X_6(1)=1 |\ \text{passado}\ \big) &= \varphi\left(\rho W_{2\to1}+0\right)\\
P\big(X_7(1)=1 |\ \text{passado}\ \big) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to1}+0+(W_{2\to1}+W_{3\to1})\right)\\
P\big(X_8(1)=1 |\ \text{passado}\ \big) &= \varphi\left(\rho^3 W_{2\to1}+0+\rho(W_{2\to1}+W_{3\to1})+0\right)
\end{aligned}
$$

Evolução do potencial

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	0	0	0	1	0	1		
2	0	0	0	1	0	1	0	0		
1	1	0	1	0	0	0	0	1		

n

$$
\begin{aligned}
P\big(X_6(1) = 1 \mid \text{ passado } \big) &= \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right) \\
P\big(X_7(1) = 1 \mid \text{ passado } \big) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to 1} + 0 + (W_{2\to 1} + W_{3\to 1})\right) \\
P\big(X_8(1) = 1 \mid \text{ passado } \big) &= \varphi\left(\rho^3 W_{2\to 1} + 0 + \rho(W_{2\to 1} + W_{3\to 1}) + 0\right)
\end{aligned}
$$

Evolução do potencial

3	0	1	0	0	0	1	0	1		
2	0	0	0	1	0	1	0	0		
1	1	0	1	0	0	0	0	$\boxed{1}$		
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$
\begin{aligned}
P\left(X_6(1) = 1 \middle| \text{ passado } \right) &= \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right) \\
P\left(X_7(1) = 1 \middle| \text{ passado } \right) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to 1} + 0 + (W_{2\to 1} + W_{3\to 1})\right) \\
P\left(X_8(1) = 1 \middle| \text{ passado } \right) &= \varphi\left(\rho^3 W_{2\to 1} + 0 + \rho(W_{2\to 1} + W_{3\to 1}) + 0\right) \\
P\left(X_9(1) = 1 \middle| \text{ passado } \right) &= \varphi(0)
\end{aligned}
$$

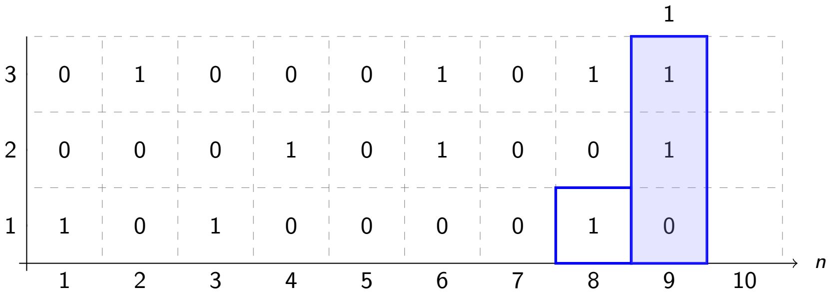
Evolução do potencial

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	0	0	0	1	0	1	1	
2	0	0	0	1	0	1	0	0	1	
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	

n

$$
\begin{aligned}
P\big(X_6(1) = 1 \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right) \\
P\big(X_7(1) = 1 \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to 1} + 0 + (W_{2\to 1} + W_{3\to 1})\right) \\
P\big(X_8(1) = 1 \mid \text{passado}\big) &= \varphi\left(\rho^3 W_{2\to 1} + 0 + \rho(W_{2\to 1} + W_{3\to 1}) + 0\right) \\
P\big(X_9(1) = 1 \mid \text{passado}\big) &= \varphi(0)
\end{aligned}
$$

Evolução do potencial



$$
\begin{aligned}
P\big(X_6(1) = 1 | \text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right) \\
P\big(X_7(1) = 1 | \text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to 1} + 0 + (W_{2\to 1} + W_{3\to 1})\right) \\
P\big(X_8(1) = 1 | \text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho^3 W_{2\to 1} + 0 + \rho(W_{2\to 1} + W_{3\to 1}) + 0\right) \\
P\big(X_9(1) = 1 | \text{ passado }\big) &= \varphi(0) \\
P\big(X_{10}(1) = 1 | \text{ passado }\big) &= \varphi(W_{2\to 1} + W_{3\to 1})
\end{aligned}
$$

Evolução do potencial

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0

n

$$\begin{aligned}
P\big(X_6(1) = 1|\text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho W_{2\to 1} + 0\right)\\
P\big(X_7(1) = 1|\text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho^2 W_{2\to 1} + 0 + (W_{2\to 1} + W_{3\to 1})\right)\\
P\big(X_8(1) = 1|\text{ passado }\big) &= \varphi\left(\rho^3 W_{2\to 1} + 0 + \rho(W_{2\to 1} + W_{3\to 1}) + 0\right)\\
P\big(X_9(1) = 1|\text{ passado }\big) &= \varphi(0)\\
P\big(X_{10}(1) = 1|\text{ passado }\big) &= \varphi(W_{2\to 1} + W_{3\to 1})
\end{aligned}$$

Definição do Modelo

Para cada $t \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s(j), s \leq t, j \in I) = \left\{ \begin{array}{l} \text{a história de todo sistema} \\ \text{até o tempo } t \end{array} \right\}$$

Para cada conjunto $F \subset I$ e configuração $a(i) \in \{0,1\}, i \in F$,

$$P(X_{t+1}(i) = a(i), i \in F | \mathcal{F}_t) = \prod_{i \in F} P(X_{t+1}(i) = a(i) | \mathcal{F}_t)$$

onde

$$P(X_{t+1}(i) = 1 | \mathcal{F}_t) = \begin{cases} \varphi_i(0), & \text{se } L_t^i = t \\ \varphi_i\left(\sum_{j \in I} W_{j \to i} \sum_{s = L_t^i + 1}^{t} \rho^{t-s} X_s(j) \right), & \text{se } L_t^i i \leq t - 1 \end{cases}$$

Sobre o modelo

- Introduzido em A.Galves e E. Löcherbach (2013).
- Para cada i, a cadeia $(X_t(i))_{t\in\mathbb{Z}}$ esquece o passado a cada tempo de disparo.
- A cadeia $(X_t(i))_{t\in\mathbb{Z}}$ pode ser vista como uma **cadeia estocástica com memória de alcance variável.**
- A probabilidade de disparo do neurônio i depende da atividade do sistema desde o seu tempo de último disparo.
- O modelo é um **sistema de cadeias com memória de alcance variável interagentes.**

Existência

Basta garantir que, para cada $i \in I$ e cada $t \geq 0$,

$$L_t^i < \infty \qquad \text{e} \qquad U_t(i) = \sum_{j \in I} W_{j \to i} \sum_{s = L_t^i + 1}^{t} X_s(j) < \infty$$

- Lembre que I pode ser infinito

Hipóteses H1

1. $\forall i \in I, L_t^i < \infty$
2. $\sup_{i \in I} \sum_{j \in I} |W_{j \to i}| < \infty$

Sob **H1** a cadeia estocástica $(\mathbf{X}_t)_{t \leq 0}$ esta bem definida

Grafo de interação entre os neurônio

Motivação

THE STRUCTURE OF THE NERVOUS SYSTEM OF THE NEMATODE *CAENORHABDITIS ELEGANS*

BY J. G. WHITE, E. SOUTHGATE, J. N. THOMSON AND S. BRENNER, F.R.S.

Laboratory of Molecular Biology, Medical Research Council Centre, Hills Road, Cambridge CB2 2QH, U.K.

- Mapeamento completo da rede neural de um Caenorhabditis elegans
- wormweb.org

A vizinhança/grafo de interação

Os pesos sinápticos induzem um **grafo orientado**

- O conjunto de neurônios são os vértices.
- Dados dois neurônios i e j se $W_{i \to j} \neq 0$ então a aresta $i \to j$ pertence ao grafo.

A vizinhança/grafo de interação

Os pesos sinápticos induzem um **grafo orientado**

- O conjunto de neurônios são os vértices.
- Dados dois neurônios i e j se $W_{i\to j} \neq 0$ então a aresta $i \to j$ pertence ao grafo.

Pergunta: É possível recuperar o grafo de interações a partir de amostras cadeia $\mathbf{X}$?

A vizinhança/grafo de interação

Os pesos sinápticos induzem um **grafo orientado**

- O conjunto de neurônios são os vértices.
- Dados dois neurônios i e j se $W_{i \to j} \neq 0$ então a aresta $i \to j$ pertence ao grafo.

Pergunta: É possível recuperar o grafo de interações a partir de amostras cadeia $\mathbf{X}$?
Resposta: Sim.

Reformulando o problema

Fixado um neurônio i, vamos recuperar a *vizinhança de interação* de i.

O conjunto dos neurônios cujos disparos afetam o potencial de membrana de i.

$$V_{\cdot \to i} = \{j \in I : W_{j \to i} \neq 0\}$$

Reformulando o problema

Fixado um neurônio i, vamos recuperar a *vizinhança de interação* de i.

O conjunto dos neurônios cujos disparos afetam o potencial de membrana de i.

$$V_{\cdot \to i} = \{ j \in I : W_{j \to i} \neq 0 \}$$

Estimar o grafo de interação entre os neurônios

$$\Updownarrow$$

Estimar a vizinhança de interação de cada neurônio.

Ideia (ignorando os canais de vazamento)

$$
\mathrm{P}\left(X(i) = 1 \;\middle|\; \begin{array}{cc|c|c|c|c|}
\cline{3-6}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{3-6}
 & {\color{red} j} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cline{3-6}
 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{3-6}
 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{3-6}
 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{2-6}
i & \multicolumn{1}{|c|}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-6}
\end{array} \right)
$$

Ideia (ignorando os canais de vazamento)

$$\mathrm{P}\left(X(i) = 1 \;\middle|\; \begin{array}{cc|c|c|c|c|} \cline{3-6} & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{3-6} {\color{red} j} & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cline{3-6} & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{3-6} & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{3-6} & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{2-6} i & \multicolumn{1}{|c|}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-6} \end{array} \right)$$

$$= \varphi\Big(W_{\cdot \to i} \# \text{ 1's amarelos } + W_{j \to i} \# \text{ 1's vermelhos} \Big)$$

Ideia (ignorando os canais de vazamento)

$$\mathrm{P}\left(X(i) = 1 \mid \begin{array}{cc|cccc} & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ {\color{red} j} & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \varphi\left(W_{\cdot\to i}\#\text{ 1's amarelos} + W_{j\to i}\#\text{ 1's vermelhos}\right)$$

Ideia (ignorando os canais de vazamento)

$$
\mathrm{P}\left(X(i) = 1 \;\middle|\; \begin{array}{cc|cccc}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
{\color{red} j} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right)
$$

$$
= \varphi\Big(W_{\cdot\to i} \#\ \text{1's amarelos} + W_{j\to i} \#\ \text{1's vermelhos} \Big)
$$

Ideia (ignorando os canais de vazamento)

$$
\mathrm{P}\left(X(i) = 1 \;\middle|\; \begin{array}{c|c|cccc}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
j & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
= \varphi\Big(W_{\cdot\to i}\#\ \text{1's amarelos} + W_{j\to i}\#\ \text{1's vermelhos}\Big)
$$

Ideia (ignorando os canais de vazamento)

$$
\mathrm{P}\left(X(i) = 1 \;\middle|\; \begin{array}{c|c|cccc}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\color{red}{j} & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right)
$$

$$
= \varphi\Big(W_{\cdot \to i} \#\ 1\text{'s amarelos} + W_{j \to i} \#\ 1\text{'s vermelhos} \Big)
$$

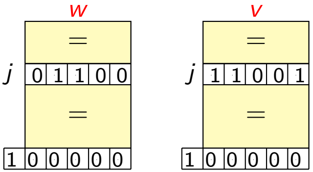
Conlcusão:

φ estritamente crescente $\Longrightarrow$ $P(X_t(i) = 1 \mid \text{ bloco })$

é sensível a mudanças na realizações de j.

Exemplo

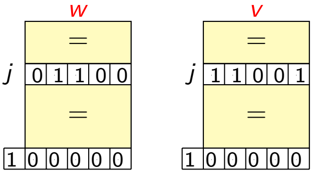
Se $W_{j\to i} = 0$, então



$$
\begin{aligned}
P(X(i) = 1 \mid w) &= P(W_{\cdot\to i} \# \text{ 1's amarelos } + 0 \# \text{ 1's de } j) \\
&= P(X(i) = 1 \mid v)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Se $W_{j \to i} = 0$, então

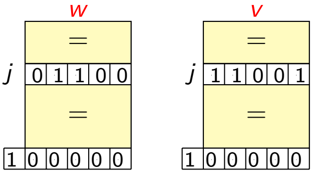


$$
\begin{aligned}
P(X(i) = 1 \mid {\color{red}w}) \\
&= P(W_{\cdot \to i}\#\ \text{1's amarelos } + 0\#\ \text{1's de } j) \\
&= P(X(i) = 1 \mid {\color{red}v})
\end{aligned}
$$

Não conhecemos as probabilidades!!

Exemplo

Se $W_{j\to i} = 0$, então

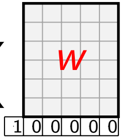


$$
\begin{aligned}
P(X(i) = 1 \mid {\color{red} w}) \\
&= P(W_{\cdot\to i} \#\ \text{1's amarelos } + 0 \#\ \text{1's de } j) \\
&= P(X(i) = 1 \mid {\color{red} v})
\end{aligned}
$$

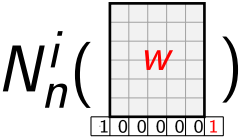
Não conhecemos as probabilidades!!

Mas conhecemos os instantes de disparos!!

Considere o número de vezes que uma configuração/bloco w acontece numa amostra de tamanho n

$N_n^i($  $)$

Considere o número de vezes que uma configuração/bloco w acontece numa amostra de tamanho n seguido por um disparo de i



Teorema

Quando o tamanho da amostra n cresce para o infinito

$$\hat{p}_i(1|v) = \frac{N_n^i\left(\underset{1\;0\;0\;0\;0\;0\;1}{\boxed{v}}\right)}{N_n^i\left(\underset{1\;0\;0\;0\;0\;0}{\boxed{v}}\right)} \longrightarrow P(X(i) = 1|v)$$

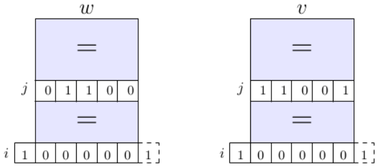
Estimador

- Se a sensibilidade de $\hat{p}$ em relação a mudanças nos disparos de j é "pequena", consideramos que j não influencia i

Estimador

- Se a sensibilidade de $\hat{p}$ em relação a mudanças nos disparos de j é "pequena", consideramos que j não influencia i

- Isto é, tome $\varepsilon > 0$ pequeno



- Calcule

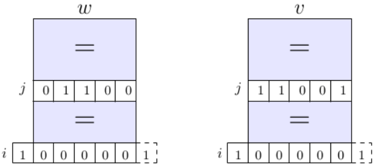
$$|\hat{p}(X(i) = 1|w) - \hat{p}(X(i) = 1|v)|$$

para "todos os pares" w e v de configurações que diferem apenas nos disparos de j

Estimador

- Se a sensibilidade de $\hat{p}$ em relação a mudanças nos disparos de j é "pequena", consideramos que j não influencia i

- Isto é, tome $\varepsilon > 0$ pequeno



- Calcule

$$|\hat{p}(X(i) = 1|w) - \hat{p}(X(i) = 1|v)|$$

para "todos os pares" w e v de configurações que diferem apenas nos disparos de j

- Se **para algum par** a diferença é maior que ε, então consideramos que j influencia i.

Exemplo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1

n

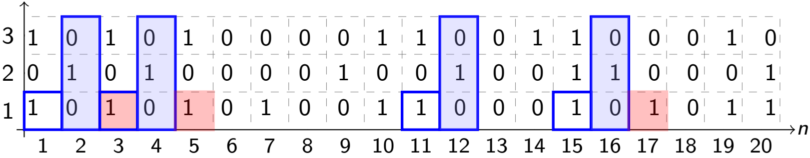
Exemplo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1

$$N_{20}(1 \text{ configuração azul }) = 3$$

$$N_{20}(\text{configuração azul}) = 4$$

Exemplo

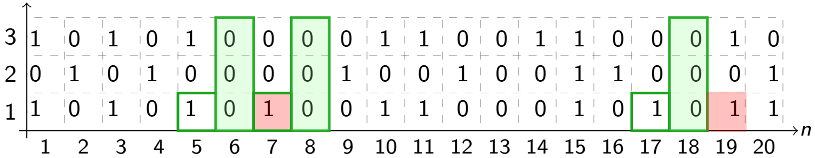


$$N_{20}(1 \text{ configuração azul }) = 3$$

$$N_{20}(\text{configuração azul}) = 4$$

$$\hat{p}_1(1| \text{ configuração azul }) = 3/4$$

Exemplo



$$N_{20}(1|\text{configuração verde}) = 2$$

$$N_{20}(\text{configuração verde}) = 3$$

Exemplo

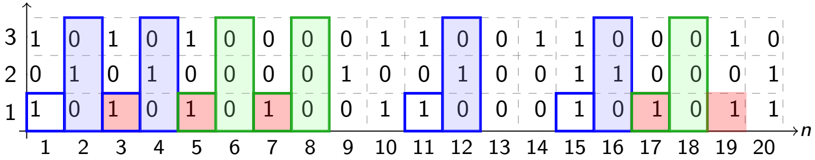
3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

$$N_{20}(1|\text{configuração verde}) = 2$$

$$N_{20}(\text{configuração verde}) = 3$$

$$\hat{p}_1(1|\text{ configuração verde }) = 2/3$$

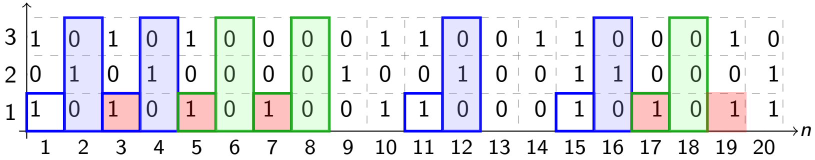
Exemplo



$$\hat{p}_1(1|\text{ configuração azul }) = 3/4$$

$$\hat{p}_1(1|\text{ configuração verde }) = 2/3$$

Exemplo



$$\hat{p}_1(1|\text{ configuração azul }) = 3/4$$

$$\hat{p}_1(1|\text{ configuração verde }) = 2/3$$

$$|\hat{p}_1(1|\text{ configuração azul }) - \hat{p}_1(1|\text{ configuração verde })|$$

$$= |3/4 - 2/3| = 1/12 >> 0$$

Exemplo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1

n

$$\hat{p}_1(1|\text{ configuração azul }) = 3/4$$

$$\hat{p}_1(1|\text{ configuração verde }) = 2/3$$

$$|\hat{p}_1(1|\text{ configuração azul }) - \hat{p}_1(1|\text{ configuração verde })|$$

$$= |3/4 - 2/3| = 1/12 >> 0$$

Conclusão: 2 influencia 1 ou $W_{2\to 1} \neq 0$

Formalmente

- Uma "boa" aproximação de $\hat{p}_i(1|w)$ depende do número de vezes que o bloco w ocorreu seguido de um disparo de i
- Portanto vamos restringir o estimador aos pares v e w em que ambos blocos aparecem pelo menos $n^{1/2+\beta}$, com $\beta \in (0, 1/2)$.

  $\Rightarrow$ Chame de $\mathcal{T}_n$ esse conjunto

Defina a medida de sensibilidade

$$\Delta_{(i,n)}(j) = \max_{w,v \in \mathcal{T}_{(i,n)}^{w,j}} |\hat{p}_{(i,n)}(1|w) - \hat{p}_{(i,n)}(1|v)|$$

Formalmente

- Uma "boa" aproximação de $\hat{p}_i(1|w)$ depende do número de vezes que o bloco w ocorreu seguido de um disparo de i
- Portanto vamos restringir o estimador aos pares v e w em que ambos blocos aparecem pelo menos $n^{1/2+\beta}$, com $\beta \in (0, 1/2)$.

  $\Rightarrow$ Chame de $\mathcal{T}_n$ esse conjunto

Defina a medida de sensibilidade

$$\Delta_{(i,n)}(j) = \max_{w,v \in \mathcal{T}^{w,j}_{(i,n)}} |\hat{p}_{(i,n)}(1|w) - \hat{p}_{(i,n)}(1|v)|$$

Assim

$$\hat{V}^{\varepsilon}_n = \{j \in I : \Delta_{(i,n)}(j) > \varepsilon\}$$

Consistência

Hipótese H2:

1. Existe um $\alpha > 0$ tal que, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \varphi(u) \leq 1 - \alpha$

Teorema

Sob H1 e H2. Para qualquer $i \in I$, o seguinte vale

1. **(Superestimação)** Para qualquer $j \in I \setminus V_{\cdot \to i}$ e qualquer $\varepsilon > 0$

$$P\big(j \in \hat{V}_n^{\varepsilon}\big) \leq 4n^{3/2-\beta} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n^{2\varepsilon}}{2}\right\}$$

2. **(Subestimação)** Para qualquer $j \in V_{\cdot \to i}$ e qualquer $\varepsilon > 0$ ‘suficientemente pequeno”

$$P\big(j \in \hat{V}_n^{\varepsilon}\big) \leq 4n^{3/2-\beta} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n^{2\varepsilon}}{2}\right\}$$

3. Em particular, tomando $\varepsilon = O(n^{-\beta/2})$

$$\hat{V}_n^{\varepsilon_n} = V_i \quad \text{quase certamente para } n \text{ grande}$$

Sistemas a tempo contínuo

Sistemas a tempo contínuo

- Evolução temporal do potencial de membrana

$$\mathbf{U}_t = (U_t(1), U_t(2), , U_t(N)) \text{ com } U_t(i) \in \mathbb{R}, \forall i \in I, t \in \mathbb{R}_+$$

- Cada neurônio dispara com uma taxa que depende de $\varphi(U_t(i))$

Sistemas a tempo contínuo

- Evolução temporal do potencial de membrana

$$\mathbf{U}_t = (U_t(1), U_t(2), , U_t(N)) \text{ com } U_t(i) \in \mathbb{R}, \forall i \in I, t \in \mathbb{R}_+$$

- Cada neurônio dispara com uma taxa que depende de $\varphi(U_t(i))$
- Sinapses químicas: se o neurônio i dispara no instante t
  - o seu potencial é **resetado** para 0
    $\Rightarrow U_t(i) = 0$
  - o potencial dos demais neurônios **recebe uma quantidade** $W_{i\to j} \in \mathbb{R}$
    $\Rightarrow \forall j \neq i, U_t(j) = U_{t-}(j) + W_{i\to j}$ (sinapses químicas)
- Formalmente: $\Pi^i(ds, dz), i \in I$ medidas de Poisson iid com intensidade $dsdz$

$$U_i(t) = \sum_{j\neq i} \int_{L_t^i}^{t} \int_0^{\infty} W_{i\to j} 1_{\{z \leq \varphi(U_{s-}(j))\}} \Pi^j(ds, dz)$$

Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$

Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$

Apenas sinapses químicas

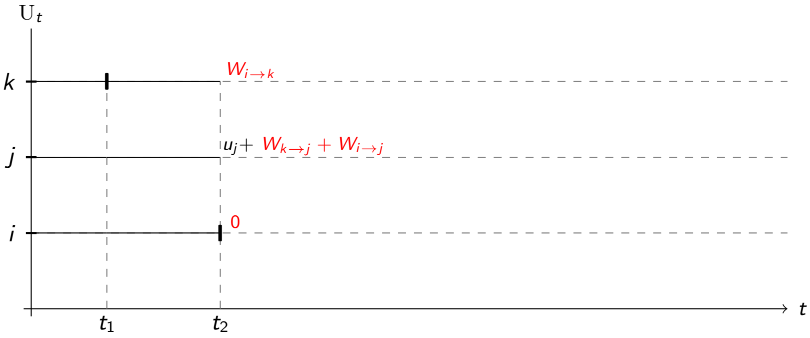
$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$

Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$

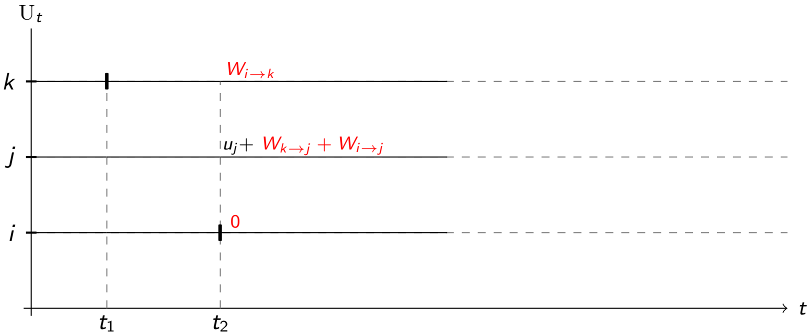
Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



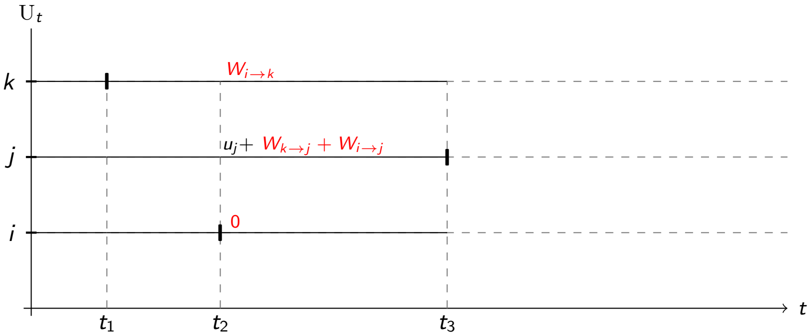
Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



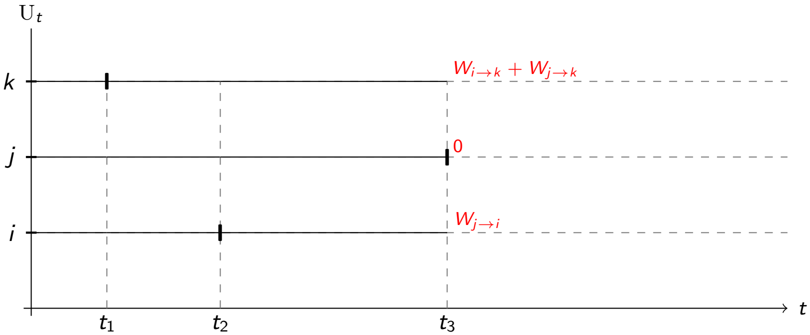
Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



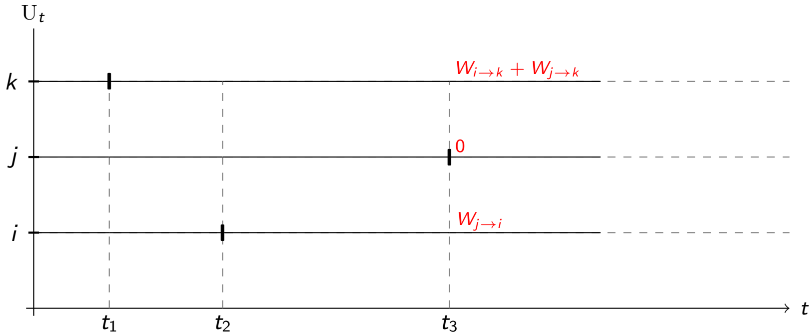
Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



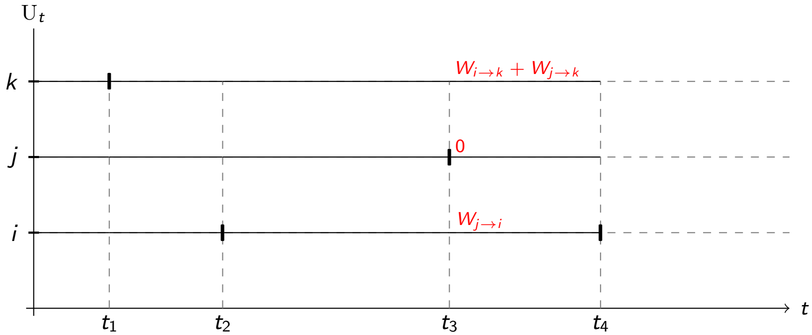
Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



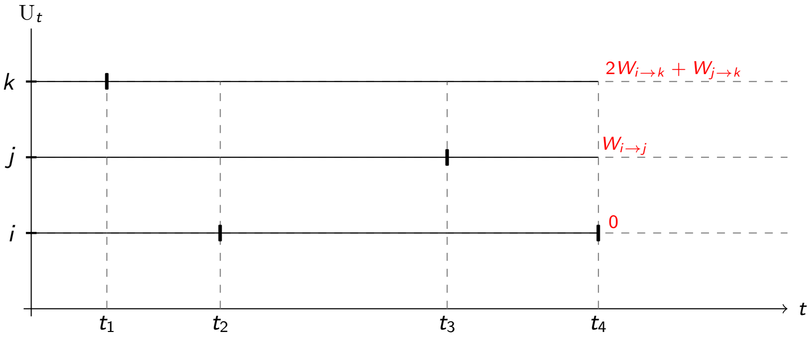
Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



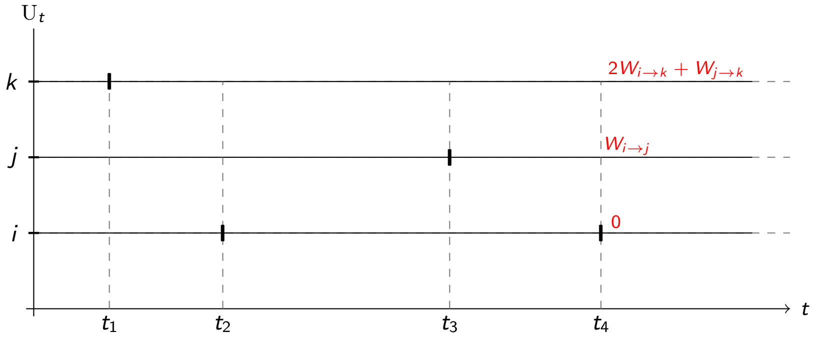
Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



Apenas sinapses químicas

$$\mathcal{L}f(u) = \sum_{i \in I} \varphi(u_i)[f(\Delta_i(u)) - f(u)]$$



Sistemas a tempo contínuo

- Canais de vazamento: entre disparos o potencial de cada neurônio segue um fluxo determinístico
  - Se L foi o tempo de último disparo do sistema, então

$$U_t(i) = U_L(i)e^{-\rho(t-L)}$$

Sistemas a tempo contínuo

- Canais de vazamento: entre disparos o potencial de cada neurônio segue um fluxo determinístico
  - Se L foi o tempo de último disparo do sistema, então

$$U_t(i) = U_L(i)e^{-\rho(t-L)}$$

Processo de Markov determinístico com partes

Comportamento a longo prazo do sistema

Com canais de vazamento

Sejam $T_k, k \geq 0$, os tempos de disparo do sistema

Teorema

Se $\rho > 0$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k < \infty\}} < \infty \text{ quase certamente}$$

Isto é, o sistema tem apenas um número finito de disparos.

Sem canais de vazamento

Teorema

Se $\rho = 0$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k < \infty\}} = \infty \text{ quase certamente}$$

Isto é, o sistema continua disparando indefinidamente.

Questões em aberto

- Quando I não é infinto

Questões em aberto

- Quando I não é infinto - **Ok!**

Questões em aberto

- Quando I não é infinto - **Ok!**
- Quando $V_{\cdot \to i}$ é infinito

Questões em aberto

- Quando I não é infinto - **Ok!**
- Quando $V_{\cdot \to i}$ é infinito
- O estimado do grafo é eficiente?

Questões em aberto

- Quando I não é infinto - **Ok!**
- Quando $V_{\cdot \to i}$ é infinito
- O estimado do grafo é eficiente?
- Limite hidrodinâmico

Questões em aberto

- Quando I não é infinto - **Ok!**
- Quando $V_{\cdot \to i}$ é infinito
- O estimado do grafo é eficiente?
- Limite hidrodinâmico
- Modelos populacionais

Questões em aberto

- Quando I não é infinto - **Ok!**
- Quando $V_{\cdot\to i}$ é infinito
- O estimado do grafo é eficiente?
- Limite hidrodinâmico
- Modelos populacionais
- Plasticidade

Questões em aberto

- Quando I não é infinto **- Ok!**
- Quando $V_{\cdot \to i}$ é infinito
- O estimado do grafo é eficiente?
- Limite hidrodinâmico
- Modelos populacionais
- Plasticidade