UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Filipe Gomes Arante de Souza

1º Trabalho de Algoritmos Numéricos
Algoritmos para Solução de Sistemas Lineares

Julho / 2022

1 Impressões de Tela do Editor do Octave

1.1 Eliminação de Gauss

Segue abaixo implementação:

elim_gauss.m | determinante.m | elim_gauss_pivotacao.m | maior_modulo.m | modulo.m | residuo.m | subs_retroativas.m | swap.m | troca_linhas.m

```
% Eliminação de Gauss para o sistema A * x = b sem pivotação parcial.
% n: Dimensão da matriz A.
% A: Matriz de coeficientes.
% b: Vetor independente.
% Retorna A como matriz triangular superior e b após as operações l-elementares.
function [A, b] = elim_gauss(n, A, b)
    for j = (1: 1: n - 1) % Etapa.
        for i = (j + 1: 1: n) % Linhas.
            mult = A(i, j) / A(j, j);
            for k = (j + 1: 1: n) % Colunas.
                A(i, k) = A(i, k) - mult * A(j, k);
            endfor
            b(i) = b(i) - mult * b(j);
        endfor
    endfor
endfunction
```

Figura 1: Implementação da eliminação de Gauss.

1.2 Eliminação de Gauss com pivotação parcial

Para este algoritmo optei modularizar o código. Segue abaixo implementação do algoritmo, juntamente com todas as funções auxiliares em seguida.

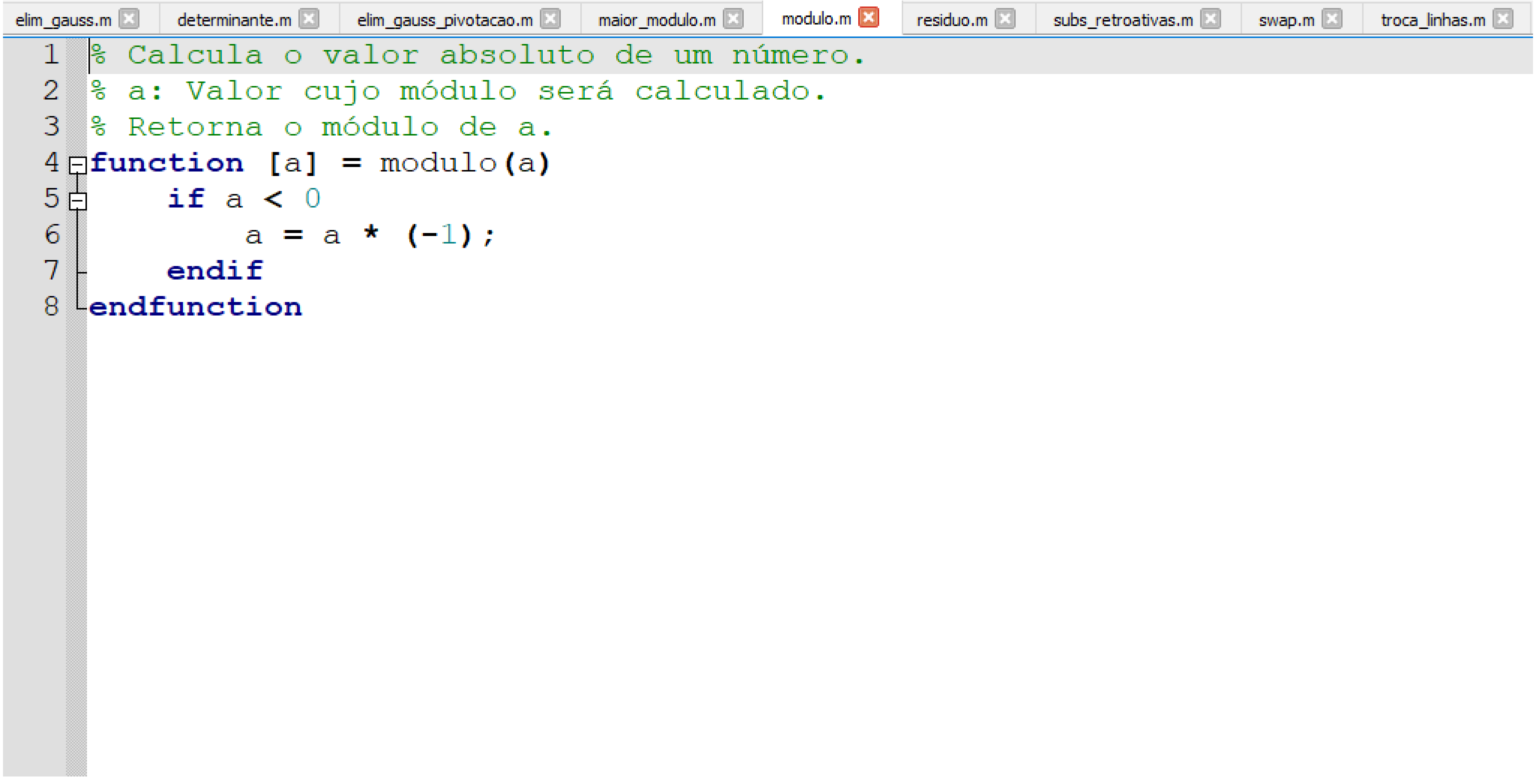
```
% Eliminação de Gauss para o sistema A * x = b com pivotação parcial.
% n: Dimensão da matriz A.
% A: Matriz de coeficientes.
% b: Vetor independente.
% Retorna A como matriz triangular superior e b após as operações l-elementares.
function [A, b] = elim_gauss_pivotacao(n, A, b)
    for j = (1: 1: n - 1) % Etapa.
        linha = maior_modulo(n, j, A);

        if linha != j
            A = troca_linhas(n, j, linha, A);
            [b(j), b(linha)] = swap(b(j), b(linha));
        endif

        for i = (j + 1: 1: n) % Linhas.
            mult = A(i, j) / A(j, j);

            for k = (j + 1: 1: n) % Colunas.
                A(i, k) = A(i, k) - mult * A(j, k);
            endfor

            b(i) = b(i) - mult * b(j);
        endfor
    endfor
endfunction
```

Figura 2: Implementação da eliminação de Gauss com pivotação parcial.

elim_gauss.m | determinante.m | elim_gauss_pivotacao.m | maior_modulo.m | modulo.m | residuo.m | subs_retroativas.m | swap.m | troca_linhas.m

```
% Função para auxiliar a eliminação de Gauss com pivotação parcial.
% Encontra o maior elemento em módulo de uma coluna abaixo do pivô.
% n: Dimensão da matriz M.
% pivo: Linha pivotal.
% M: Matriz de coeficientes.
% linha: Índice da linha que contém o maior elemento em módulo da coluna.
% Retorna o índice da linha que contém o maior elemento em módulo da coluna.
function [linha] = maior_modulo(n, pivo, M)
    maior = modulo(M(pivo, pivo));
    linha = pivo;
    for i = (pivo + 1: 1: n)
        if modulo(M(i, pivo)) > maior
            maior = modulo(M(i, pivo));
            linha = i;
        endif
    endfor
endfunction
```

Figura 3: Implementação da descoberta do maior número em módulo abaixo do pivô.




```
% Calcula o valor absoluto de um número.
% a: Valor cujo módulo será calculado.
% Retorna o módulo de a.
function [a] = modulo(a)
    if a < 0
        a = a * (-1);
    endif
endfunction
```

Figura 4: Implementação do módulo de um número.

elim_gauss.m | determinante.m | elim_gauss_pivotacao.m | maior_modulo.m | modulo.m | residuo.m | subs_retroativas.m | swap.m | troca_linhas.m

```
% Função para auxiliar na eliminação de Gauss com pivotação parcial.
% Troca os valores de duas linhas da matriz de coeficientes de um sistema linear.
% n: Dimensão da matria M.
% p: Índice da linha da matriz que terá seu valor permutado.
% q: Índice da linha da matriz que terá seu valor permutado.
% M: Matriz de coeficientes.
% Retorna a matriz M com suas linhas p e q invertidas.
function [M] = troca_linhas(n, p, q, M) # Troca as linhas p, q da matriz M.
    for j = (1: 1: n)
        [M(p, j), M(q, j)] = swap(M(p, j), M(q, j));
    endfor
endfunction
```

Figura 5: Implementação da troca de duas linhas de uma matriz.

```
% Função para auxiliar na eliminação de Gauss com pivotação parcial.
% Troca o valor de duas variáveis.
% a: Variável que terá seu valor permutado.
% b: Variável que terá seu valor permutado.
% Retorna a e b com seus valores invertidos.
function [a, b] = swap(a, b)
    aux = a;
    a = b;
    b = aux;
endfunction
```

Figura 6: Implementação da troca do valor entre dois números.

1.3 Substituições retroativas

Segue abaixo implementação:

```
% Aplica substituições retroativas num sistema linear.
% Pré condição: U deve ser matriz triangular superior.
% n: Dimensão da matriz U.
% U: Matriz dos coeficientes após eliminação de Gauss.
% d: Vetor independente após eliminação de Gauss.
% Retorna o vetor solução x do sistema linear.
function [x] = subs_retroativas(n, U, d)
    x(n, 1) = d(n) / U(n, n);

    for i = (n - 1: -1: 1)
        soma = 0;

        for  j = (i + 1: 1: n)
            soma = soma + U(i, j) * x(j);
        endfor

        x(i, 1) = (d(i) - soma) / U(i, i);
    endfor
endfunction
```

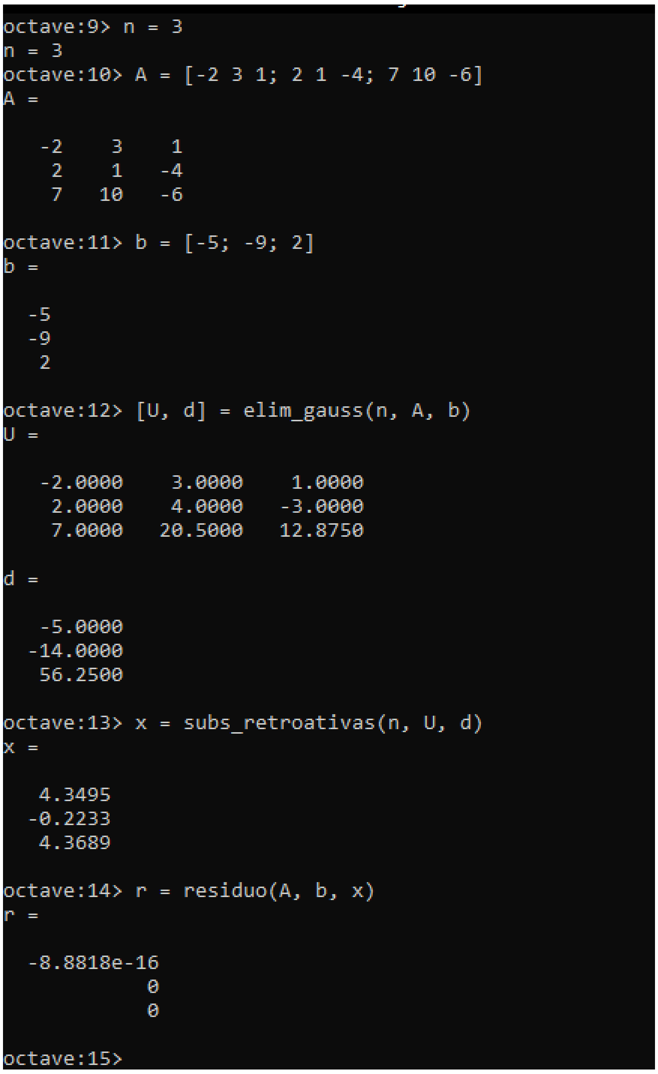
Figura 7: Implementação do algoritmo de substituições retroativas numa matriz triangular superior.

2 Impressões de tela da janela de comandos do Octave

Segue abaixo execução dos algoritmos implementados. Obs: Fiz uma função auxiliar residuo(A, b, x) para calcular o resíduo.

2.1 Sistema Linear 1

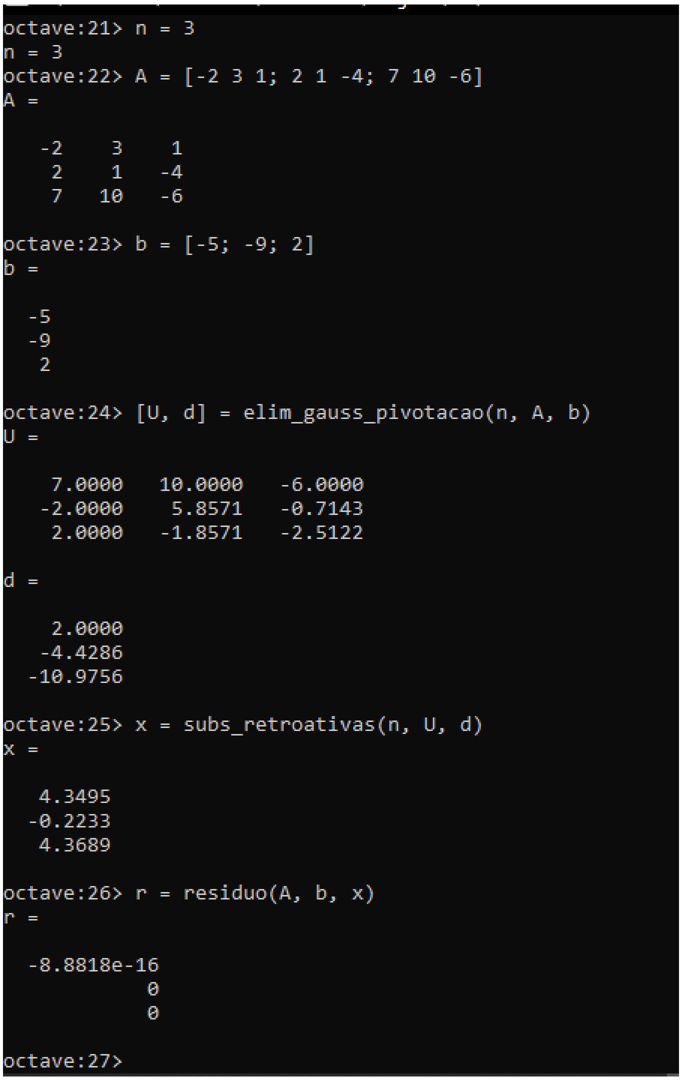
2.1.1 Sem pivotação parcial



```
octave:9> n = 3
n = 3
octave:10> A = [-2 3 1; 2 1 -4; 7 10 -6]
A =

  -2    3    1
   2    1   -4
   7   10   -6

octave:11> b = [-5; -9; 2]
b =

  -5
  -9
   2

octave:12> [U, d] = elim_gauss(n, A, b)
U =

  -2.0000    3.0000    1.0000
   2.0000    4.0000   -3.0000
   7.0000   20.5000   12.8750

d =

  -5.0000
 -14.0000
  56.2500

octave:13> x = subs_retroativas(n, U, d)
x =

   4.3495
  -0.2233
   4.3689

octave:14> r = residuo(A, b, x)
r =

  -8.8818e-16
            0
            0

octave:15>
```

Figura 8: Resolução do sistema 1 sem pivotação parcial.

2.1.2 Com pivotação parcial

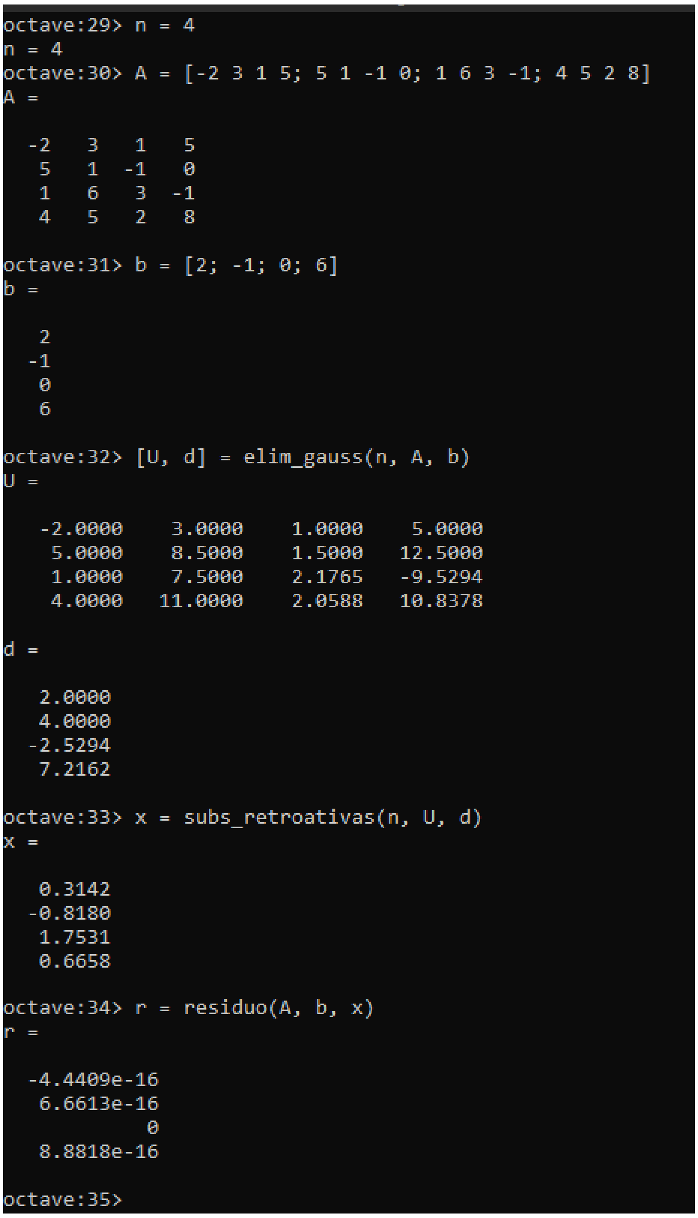


```
octave:21> n = 3
n = 3
octave:22> A = [-2 3 1; 2 1 -4; 7 10 -6]
A =

   -2    3    1
    2    1   -4
    7   10   -6

octave:23> b = [-5; -9; 2]
b =

  -5
  -9
   2

octave:24> [U, d] = elim_gauss_pivotacao(n, A, b)
U =

    7.0000   10.0000   -6.0000
   -2.0000    5.8571   -0.7143
    2.0000   -1.8571   -2.5122

d =

    2.0000
   -4.4286
  -10.9756

octave:25> x = subs_retroativas(n, U, d)
x =

   4.3495
  -0.2233
   4.3689

octave:26> r = residuo(A, b, x)
r =

  -8.8818e-16
            0
            0

octave:27>
```

Figura 9: Resolução do sistema 1 com pivotação parcial.

2.2 Sistema Linear 2

2.2.1 Sem pivotação parcial



```
octave:29> n = 4
n = 4
octave:30> A = [-2 3 1 5; 5 1 -1 0; 1 6 3 -1; 4 5 2 8]
A =

  -2   3   1   5
   5   1  -1   0
   1   6   3  -1
   4   5   2   8

octave:31> b = [2; -1; 0; 6]
b =

   2
  -1
   0
   6

octave:32> [U, d] = elim_gauss(n, A, b)
U =

   -2.0000    3.0000    1.0000    5.0000
    5.0000    8.5000    1.5000   12.5000
    1.0000    7.5000    2.1765   -9.5294
    4.0000   11.0000    2.0588   10.8378

d =

   2.0000
   4.0000
  -2.5294
   7.2162

octave:33> x = subs_retroativas(n, U, d)
x =

   0.3142
  -0.8180
   1.7531
   0.6658

octave:34> r = residuo(A, b, x)
r =

  -4.4409e-16
   6.6613e-16
            0
   8.8818e-16

octave:35>
```

Figura 10: Resolução do sistema 2 sem pivotação parcial.

2.2.2 Com pivotação parcial

```
octave:36> n = 4
n = 4
octave:37> A = [-2 3 1 5; 5 1 -1 0; 1 6 3 -1; 4 5 2 8]
A =

  -2   3   1   5
   5   1  -1   0
   1   6   3  -1
   4   5   2   8

octave:38> b = [2; -1; 0; 6]
b =

   2
  -1
   0
   6

octave:39> [U, d] = elim_gauss_pivotacao(n, A, b)
U =

    5.0000    1.0000   -1.0000         0
    1.0000    5.8000    3.2000   -1.0000
   -2.0000    3.4000   -1.2759    5.5862
    4.0000    4.2000    0.4828   10.8378

d =

  -1.0000
   0.2000
   1.4828
   7.2162

octave:40> x = subs_retroativas(n, U, d)
x =

   0.3142
  -0.8180
   1.7531
   0.6658

octave:41> r = residuo(A, b, x)
r =

  -2.2204e-16
            0
            0
   1.7764e-15

octave:42> 
```

Figura 11: Resolução do sistema 2 com pivotação parcial.

2.3 Sistema Linear 3

2.3.1 Sem pivotação parcial

```
octave:43> n = 5
n = 5
octave:44> A = [0 1 3 2 4; 8 -2 9 -1 2; 5 1 1 -7 2; -2 4 5 1 0; 7 -3 2 -4 1]
A =

   0   1   3   2   4
   8  -2   9  -1   2
   5   1   1  -7   2
  -2   4   5   1   0
   7  -3   2  -4   1

octave:45> b = [3; -5; 6; -1; 8]
b =

   3
  -5
   6
  -1
   8

octave:46> [U, d] = elim_gauss(n, A, b)
U =

     0     1     3     2     4
     8  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf
     5  -Inf   NaN   NaN   NaN
    -2   Inf   NaN   NaN   NaN
     7  -Inf   NaN   NaN   NaN

d =

     3
  -Inf
   NaN
   NaN
   NaN

octave:47> x = subs_retroativas(n, U, d)
x =

   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN

octave:48> r = residuo(A, b, x)
r =

   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN

octave:49>
```

Figura 12: Resolução do sistema 3 sem pivotação parcial.

2.3.2 Com pivotação parcial

```
octave:56> n = 5
n = 5
octave:57> A = [0 1 3 2 4; 8 -2 9 -1 2; 5 1 1 -7 2; -2 4 5 1 0; 7 -3 2 -4 1]
A =

   0   1   3   2   4
   8  -2   9  -1   2
   5   1   1  -7   2
  -2   4   5   1   0
   7  -3   2  -4   1

octave:58> b = [3; -5; 6; -1; 8]
b =

   3
  -5
   6
  -1
   8

octave:59> [U, d] = elim_gauss_pivotacao(n, A, b)
U =

   8.0000  -2.0000   9.0000  -1.0000   2.0000
  -2.0000   3.5000   7.2500   0.7500   0.5000
   5.0000   2.2500  -9.2857  -6.8571   0.4286
        0   1.0000   0.9286   1.1000   3.9000
   7.0000  -1.2500  -3.2857  -0.4308   0.8042

d =

   -5.0000
   -2.2500
   10.5714
    4.7000
    9.6713
octave:60> x = subs_retroativas(n, U, d)
x =

  -52.548
  -51.617
   27.748
  -38.365
   12.026

octave:61> r = residuo(A, b, x)
r =

            0
   8.5265e-14
   5.6843e-14
  -2.8422e-14
   7.1054e-14

octave:62>
```

Figura 13: Resolução do sistema 3 com pivotação parcial.

3 Resultados da solução da eliminação de Gauss sem pivotação parcial para os sistemas lineares 1, 2 e 3

Sistema Linear	Vetor Solução	Determinante	Exatidão da Solução
1	[4.3495, -0.2233, 4.3689]	det(A) = -103	[-8.8818e-16, 0, 0]
2	[0.3142, -0.8180, 1.7531, 0.6658]	det(A) = -401	[-4.4409e-16, 6.6613e-16, 0, 8.8818e-16]
3	[NaN, NaN, NaN, NaN, NaN]	det(A) = -230	[NaN, NaN, NaN, NaN, NaN]

Figura 14: Resultados dos sistemas 1, 2 e 3 sem pivotação parcial.

4 Resultados da solução da eliminação de Gauss com pivotação parcial para os sistemas lineares 1, 2 e 3

Sistema Linear	Vetor Solução	Determinante	Exatidão da Solução
1	[4.3495, -0.2233, 4.3689]	det(A) = -103	[-8.8818e-16, 0, 0]
2	[0.3142, -0.8180, 1.7531, 0.6658]	det(A) = -401	[-2.2204e-16, 0, 0, 1.7764e-15]
3	[-52.548, -51.617, 27.748, -38.365, 12.026]	det(A) = -230	[0, 8.5265e-14, 5.6843e-14, -2.8422e-14, 7.1054e-14]

Figura 15: Resultados dos sistemas 1, 2 e 3 com pivotação parcial.