Demostración del teorema fundamental del álgebra

J. Gómez Benavente
email: jaime.gomez.benavente@alumnos.upm.es

28 de noviembre de 2021

El **teorema fundamental del álgebra** enuncia que todo polinomio de un grado mayor a cero tiene al menos una raíz, o de manera más general, que el número de raíces de un polinomio es igual a su grado. Esta afirmación, con la cual los estudiantes nos familiarizamos desde la escuela secundaria, no es habitualmente demostrada debido al avanzado nivel de las matemáticas requeridas para hacerlo.

Enunciado por primera vez en la tesis doctoral de C. F. Gauss en 1799 (en base a trabajos anteriores por L. Euler, J. L. Lagrange y P. S. Laplace, entre otros), el teorema fue completado por K. T. Weierstrass en 1863. Existen varios enfoques para demostrar el TFA. Probablemente, la demostración más breve sea la topológica[1], sin embargo, requiere un formalismo matemático de teoría de grupos demasiado exigente para lo que aquí se propone.

El objetivo de este documento es proporcionar, en castellano, una demostración accesible para un lector con nociones en cálculo vectorial y análisis complejo, lo que en la esfera inglesa se denominaría *undergraduate level*. La línea a seguir será la siguiente: se desarrollará paso a paso un marco teórico para, a partir del teorema de Stokes y las condiciones de Cauchy-Riemann, llegar al teorema de Liouville. Seguidamente, se demostrará el TFA por contradicción.

1. Marco teórico

La naturaleza bidimensional sobre los ejes real e imaginario del plano complejo requiere generalizar el concepto de integración a un plano, considerando la integración sobre curvas generales y no solo sobre intervalos del eje real. La teoría de la integración compleja está formulada de una manera muy elegante, y gira alrededor del **teorema de Cauchy-Goursat**, que demostraremos a continuación partiendo del teorema de Stokes:

Teorema 1.1: Teorema de Stokes

Sea S una superficie abierta, orientada por un vector normal unitario $\mathbf{n}$, cuya frontera es una curva regular, simple y cerrada[2] ∂S. Si $\mathbf{F}(x,y,z)$ es un campo vectorial de clase C^1 (continuo y con derivadas parciales continuas) en una región abierta que contiene a S y su frontera, se cumple:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{1}$$

[1]La prueba topológica resulta de probar lo siguiente: *El cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$, está algebraicamente cerrado*, afirmación que implica el TFA.

[2]Una *curva regular, simple y cerrada* es una curva que (1) admite parametrización, (2) no se interseca consigo misma y (3) su punto inicial es igual al final.

Consideremos un campo vectorial $\mathbf{F} = (M(x,y), N(x,y)) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de dos dimensiones con derivadas parciales continuas sobre D. Puede generalizarse ese campo vectorial a otro de tres dimensiones en el cual la componente cartesiana en z es cero, es decir, $\mathbf{F} = (M, N, 0)$.

Para aplicar el teorema de Stokes, aplicamos el producto escalar por diferencial de línea y el rotacional del campo vectorial:

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = (M, N, 0) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

llegando mediante estas operaciones al **teorema de Green**:

Teorema 1.2: Teorema de Green

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región positivamente orientada cuya frontera es una curva regular, simple y cerrada ∂D. Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son de clase C^1 en D y continuas sobre la frontera ∂D, se cumple:

$$\oint M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Para ver la relación entre las integrales curvilíneas, los campos vectoriales y la integración compleja, escribimos la integral de línea de una función compleja $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ en términos de sus partes real e imaginaria, utilizando la notación usual $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \iint \big(u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)\big) \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \\ &= \iint u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i} \iint v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Desarrollando esta ecuación, se aprecia que la parte real de $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ es igual a la integral curvilínea sobre Γ del campo vectorial $(u, -v)$, así como su parte imaginaria es igual a la integral curvilínea sobre Γ del campo (v, u). Aplicando el teorema de Green a ambas integrales:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \iint \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i} \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ = 0, \end{aligned}$$

y reduciendo los términos de derivadas parciales con las condiciones de Cauchy-Riemann[3], llegamos al **teorema de Cauchy-Goursat**:

[3] Sea una función compleja $f(z)$, con $z = x + \mathrm{i}y$, la cual se puede descomponer en suma de dos funciones de variable real $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Si la función $f(z)$ es derivable en un z_0 dado, entonces se cumplen las llamadas *condiciones de Cauchy-Riemann* en z_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Teorema 1.3: Teorema de Cauchy-Goursat

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo[4]. Si $f(z)$ es una función analítica[5]en D, y Γ es una curva simple regular cerrada sobre D, entonces:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

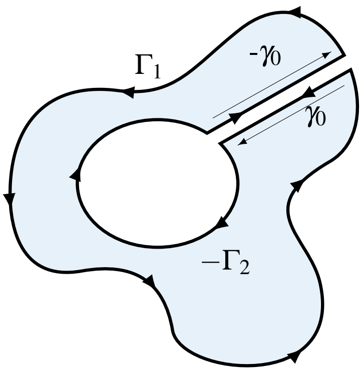

Figura 1: Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat a una curva $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \gamma_0 - \gamma_0$

Consideremos la figura 1, en la cual se traza una curva regular, simple y cerrada Γ, positivamente orientada, formada por las curvas Γ_1 y Γ_2 y dos segmentos γ_0 que permiten unir las dos anteriores. En el límite en el cual los dos segmentos de γ_0 convergen en uno solo, aplicando el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\
&= \oint_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cancel{\oint_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z} + \oint_{-\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cancel{\oint_{-\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z} \\
&= \oint_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

demostrando lo que se domina **invarianza de la deformación**.

Corolario 1.1: Invarianza de la deformación

Sea $f(z)$ una función analítica dentro de un dominio A dado, y sean Γ_1, Γ_2 curvas simples regulares cerradas sobre A. Si podemos deformar la curva Γ_1 de manera continua hacia otra curva Γ_2 sin salir del dominio A (es decir, Γ_1 es homotópica a Γ_2 sobre A), entonces se cumple:

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

[5]Un dominio es *simplemente conexo* si es homotópico a un punto, o de manera intuitiva, si no tiene «agujeros» que lo atraviesen.

[5]Se dice que una función es *analítica* en un punto z_0 si es infinitamente diferenciable (es decir, todas sus derivadas complejas existen y son continuas en z_0) en un entorno de dicho punto, y es representable mediante una serie infinita de potencias convergente. Si una función es analítica en todo $\mathbb{C}$, se dice que es *entera*.

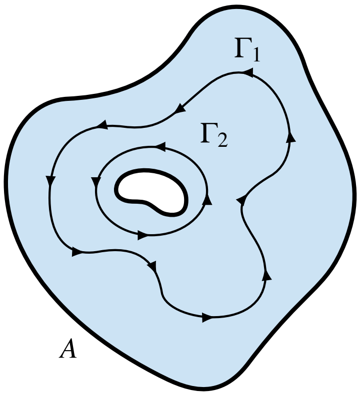

Figura 2: Invarianza de la deformación

Es importante remarcar que no es necesario que f sea analítica *dentro* de las curvas Γ_k, sino únicamente *sobre* las curvas Γ_k. El dominio de analiticidad de la función f no tiene por qué ser necesariamente simplemente conexo (como puede verse en la figura 2).

Consideremos ahora una función compleja f, analítica en un dominio $A \subset \mathbb{C}$, y dentro de A, una curva cerrada Γ que contiene un punto z_0. Aplicando la invarianza de la deformación, para la integral $\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ podemos sustituir la curva Γ por una circunferencia C_r contenida en A, de radio ρ y centro z_0[6].

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

A continuación, usamos un artificio matemático: sumando y restando $f(z_0)$ al numerador del integrando, se puede descomponer la integral original en dos subintegrales, que se considerararán de manera separada.

$$\begin{aligned}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \\ &= \oint_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Si evaluamos la primera de las integrales sobre la circunferencia C_r, conviene realizar un cambio de variable a coordenadas polares $z = z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ para simplificar el cálculo, puesto que se cancela el denominador:

$$\oint_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{z=z_0+\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \int_0^{2\pi} \left[f(z_0+\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f(z_0)\right] \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta.$$

Como el radio de la circunferencia C_r es arbitrario, si se hace tender hasta el límite $\rho \to 0$:

$$\lim_{\rho\to 0} \int_0^{2\pi} \left[f(z_0+\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f(z_0)\right] \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

[6]El punto z_0 es el único punto de A en el cual el integrando $\frac{f(z)}{z-z_0}$ no está definido (el integrando no es analítico en A, $f(z)$ sí lo es). Por tanto, puede aplicarse la invarianza de la deformación a una circunferencia arbitrariamente pequeña alrededor de z_0, pero que no incluya a z_0.

Procediendo de manera análoga con la segunda subintegral, y teniendo en cuenta que $f(z_0)$ es constante y puede salir del integrando, se tiene:

$$\oint_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{z=z_0+\rho e^{i\theta}} = f(z_0)\int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}f(z_0).$$

Combinando los dos resultados:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(z_0),$$

y mediante un apropiado cambio de variable $\{z=\zeta, z_0=z\}$ con el fin de aumentar la claridad de la expresión, se llega a la **fórmula integral de Cauchy**:

Teorema 1.4: Fórmula integral de Cauchy

Sea f una función compleja analítica en una región A, y sea $\Gamma \in A$ una curva simple regular cerrada. Entonces, para todo punto $z \in A$:,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \tag{5}$$

Este resultado es verdaderamente notable, puesto que muestra que los valores de f *sobre* γ determinan los valores de f *dentro* de γ. Gracias a esto, y aplicando la derivación bajo el signo integral, se puede obtener una formulación rápida para las derivadas de una función compleja f (demostrable por inducción[7]):

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n} = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{6}$$

Ahora bien, al ser f analítica en A, admite un desarrollo en serie convergente de potencias. En el caso de que el desarrollo sea alrededor de $z_0 = 0$, y utilizando la ecuación 6, los coeficientes serán de la forma:

$$a_k = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}z^k} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

El valor de estos coeficientes puede acotarse en cierta medida, y aplicando la desigualdad integral $|\int f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \int |f(x)|\,\mathrm{d}x$, se tiene:

$$|a_k| = \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\right| |\mathrm{d}\zeta|.$$

[7] Si se deriva la ecuación 6:

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}z^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}\,\mathrm{d}\zeta$$

y se sustituye $n+1 = n'$ considerando que $n!(n+1) = (n+1)!$ se obtiene la ecuación original, con lo cual queda demostrado.

Ahora bien, si f es analítica sobre Γ, y sabiendo que la compacidad se conserva bajo funciones continuas (resultado de la generalización del teorema de Weierstrass al dominio complejo), entonces el conjunto $f(\Gamma) \in \mathbb{C}$ será compacto, y por tanto, acotado por un valor $M > 0$, o lo que es lo mismo, $|f(z)| \leq M \; \forall z \in \Gamma$:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\right||\mathrm{d}\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\frac{M}{|\zeta|^{k+1}}|\mathrm{d}\zeta|.$$

Recurriendo a la invarianza de la deformación, transformamos Γ en una circunferencia de radio ρ, centro $z_0 = 0$ y aplicamos un cambio de variable apropiado $\zeta = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\frac{M}{|\zeta|^{k+1}}|\mathrm{d}\zeta| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{\rho^{k+1}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(k+1)}\right|}\rho\,|\mathrm{i}|\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{\rho^k}\mathrm{d}\theta = \frac{M}{\rho^k}\end{aligned}$$

Si añadimos la condición de que f es una función entera (es decir, analítica en todo $\mathbb{C}$), se puede extender el radio de convergencia $\rho \to \infty$, acotando los coeficientes de la serie:

$$|a_k| \leq \begin{cases} M & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \tag{7}$$

lo cual prueba el **teorema de Liouville**:

Teorema 1.5: Teorema de Liouville

Si una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y está acotada, es decir: $\exists M \; t.q. \; \left|f(z)\right| \leq M \; \forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

2. Demostración por contradicción

Sea p una función polinómica (y por tanto entera) de grado n, no constante y de coeficientes complejos $a_k \in \mathbb{C}$:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

y **se asume como premisa que** p **no tiene raíces**, es decir, $\nexists z \;\; t.q. \; p(z) = 0$. Se define una nueva función φ como la función inversa de p:

$$\varphi(z) \mapsto \frac{1}{p(z)}$$

La función φ, por tanto, también es una función entera, al no tener ningún valor $p(z)$ que anule el denominador. Tomando el valor absoluto de la función φ:

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi(z)\right| = \frac{1}{\left|p(z)\right|} &= \frac{1}{|a_n z^n + \cdots + a_0|} \\
&= \frac{1}{|z^n|} \frac{1}{\left|a_n + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|},
\end{aligned}
$$

y extendiendo z al infinito (puesto que φ es una función entera), vemos que la función φ está acotada. Sin embargo, esto **contradice el teorema de Liouville** (1.5), según el cual si una función entera está acotada, entonces es constante. La asunción de la premisa lleva a la contradicción, por tanto, la premisa es falsa y concluimos:

Teorema 2.1: Teorema fundamental del álgebra (I)

Todo polinomio no constante tiene, *al menos*, una raíz.

Partiendo de esta afirmación, procedemos a probar la formulación más general del teorema fundamental del álgebra. Sea un polinomio cualquiera $p(z)$ de grado $n > 0$, y sea $(z - r_1)$ un monomio donde r_1 es una raíz de p. Entonces, si se dividen los dos, aplicando la propiedad fundamental de la división polinómica:

$$p(z) = q(z)(z - r_1),$$

donde $q(z)$ es un polinomio de grado $n-1$. Procediendo de manera análoga con $q(z)$ sucesivamente, se descompone el polinomio como un producto de factores:

$$p(z) = C \prod_{j=1}^{n} (z - r_j), \tag{8}$$

donde $C \in \mathbb{C}$ es el coeficiente a_n que precede al término de mayor grado, llamado coeficiente principal. De aquí se deduce la formulación general del **teorema fundamental del álgebra**

Teorema 2.2: Teorema fundamental del álgebra (II)

Todo polinomio no constante de una sola variable con coeficientes complejos y grado n tiene exactamente n raíces complejas, contando multiplicidades.

En el caso concreto de un polinomio con coeficientes reales $a_k \in \mathbb{R}$, se puede continuar el desarrollo. Como la conjugación compleja se conserva bajo la suma, la potencia y la multiplicación por un número real (es decir, $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \overline{a^n} = \overline{a}^n, \overline{ca} = c\overline{a}$ para $a, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$), si aplicamos esta operación a p:

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = p(\overline{z}),$$

Si $r \in \mathbb{C}$ es una raíz de un polinomio p con coeficientes reales, entonces $\overline{p(r)} = p(\bar{r}) = 0$, por lo que se obtiene otra formulación alternativa del teorema fundamental del álgebra:

Corolario 2.1

Las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen dadas en pares conjugados.

3. Bibliografía

[1] J. E. MARSDEN, M. J. HOFFMANN (1999). *Basic complex analysis*, W. H. Freeman and Company, Nueva York, tercera edición.

[2] B. FINE, G. ROSENBERGER (1997). *The fundamental theorem of algebra*, Springer Verlag, Nueva York.