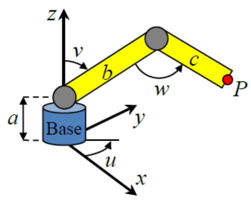
Mathias Bruun Houmøller - 202006837

Opgave1 - M3NUM1 E15 Ordinær eksamen

Figur 1 illustrerer en toleddet robotarm placeret i et xyz-koordinatsystem. Robotarmen er monteret på en base, der kan dreje om den lodrette z-akse og dermed svinge robotarmen rundt. Svingvinklen i forhold til x-aksen benævnes u. Robotarmen er monteret i en højde a [m] over xy-planen, og dets inderste og yderste led har henholdsvis længderne b og c [m]. Det inderste leds drejningsvinkel i forhold til z-aksen benævnes v, mens vinklen mellem det inderste og yderste led benævnes w. Det yderste punkt på yderste led betegnes P med koordinaterne (x, y, z) [m].



Figur 1

a)

Der defineres nu tre såkaldte rotationsmatricer, **U**, **V** og **W**, samt tre vektorer, **A**, **B** og **C**:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos w & 0 & -\sin w \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin w & 0 & \cos w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}$$

På grundlag heraf kan punktet P's koordinater udregnes som:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B}) + \mathbf{A})$$

hvor **P** er en søjlevektor, der indeholder x, y og z, og hvor prik $(\cdot)$ betegner matrixmultiplikation.

Lav et MATLAB-script, der kan udregne **P**, når $a = 1$ m, $b = 3$ m, $c = 2$ m, $u = 30°$, $v = 60°$ og $w = 90°$. Scriptets første linjer skal være:

```
a = 1; b = 3; c = 2; % m
u = 30*pi/180;  % rad
v = 60*pi/180;  % rad
w = 90*pi/180;  % rad
```

Besvarelsen skal indeholde det færdiggjorte script og den opnåede **P**-vektor efter kørsel af scriptet.

```
a = 1; b = 3; c = 2; % m
u = 30*pi/180; % rad
v = 60*pi/180; % rad
w = 90*pi/180; % rad

%Vi opskriver matricerne
U = [cos(u) -sin(u) 0
    sin(u) cos(u) 0
    0 0 1];

V = [cos(v) 0 sin(v)
    0 1 0
    -sin(v) 0 cos(v)];

W = [cos(w) 0 -sin(w)
    0 1 0
    sin(w) 0 cos(w)];

%Vi opskriver vektorene
A = [0; 0; a];

B = [0; 0; b];

C = [0; 0; -c];

%Der udregnes hvor resultatet bliver en vektor
P = U * (V * (W * C + B) + A) %obs rækkefølgen matricer ganges sammen med er ikke ligegyldig.
```

```
P = 3×1
    3.1160
    1.7990
    0.7679
```

b)

Det antages fortsat, at $a = 1$ m, $b = 3$ m og $c = 2$ m. Men nu ønskes det bestemt, hvad vinklerne u, v og w skal være, for at punktet P's koordinater bliver $x = 1{,}1$ m, $y = 2{,}8$ m og $z = 0{,}6$ m. Med baggrund i matrixformlen i spørgsmål (a) kan det vises, at u, v og w kan bestemmes som løsning til følgende ulineære ligningssystem:

$$\cos(u)\cdot(b\sin(v) - c\sin(v-w)) = x$$
$$\sin(u)\cdot(b\sin(v) - c\sin(v-w)) = y$$
$$a + b\cos(v) - c\cos(v-w) = z$$

Ligningssystemet ønskes løst vha. Newton-Raphsons metode, idet der som startværdier af u, v og w anvendes henholdsvis 45°, 30° og 55°, og idet der ønskes en nøjagtighed på 0,0001%, dog højest 20 iterationer. Her følger et delvist færdigt MATLAB-script, der kan løse ligningssystemet på baggrund af disse betingelser:

```
a = 1; b = 3; c = 2;  % m
x = 1.1; y = 2.8; z = 0.6;  % m
u0 = 45*pi/180;  % rad
v0 = 30*pi/180;  % rad
w0 = 55*pi/180;  % rad
es = 0.0001; maxit = 20; % Ønsket nøjagtighed (%) og maks iterationer
X = [u0; v0; w0];
iter = 0;
while 1
  u = X(1); v = X(2); w = X(3);
  f = [cos(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) - x
       sin(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) - <UDFYLD>
       a + b*cos(v)-c*cos(v-w) - z];
  J = [-sin(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) cos(u)*(b*cos(v)-c*cos(v-w)) c*cos(v-w)*cos(u)
        cos(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) sin(u)*(b*cos(v)-c*cos(v-w))      <UDFYLD>
                     0                          <UDFYLD>                -c*sin(v-w)    ];
  dX = J\f;
  X = X - <UDFYLD>;
  iter = iter + <UDFYLD>;
  ea = 100*max(abs(dX./X));
  if iter>=<UDFYLD> || ea<=<UDFYLD>, break, end
end
u = X(1)*180/pi % u i grader
v = X(2)*180/pi % v i grader
w = X(3)*180/pi % w i grader
ea
iter
```

Scriptet kan downloades fra Blackboard under navnet `NewtRaphRobot.m`.

> Færdiggør scriptet ved at erstatte tekstangivelserne **<UDFYLD>** med korrekt MATLAB-kode. Besvarelsen skal indeholde både det færdiggjorte script og det output i kommandovinduet, som scriptet giver anledning til, når det køres.

Vi finder først de afledte funktioner af f

```
syms u v w a b c x y z

f = [cos(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) - x %resultatet af hver ligning sættes = 0
     sin(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) - y
     a + b*cos(v)-c*cos(v-w) - z];

for i = 1:length(f)
    fprintf(" Ligning %d patielt differentiert for alle varable", i)
    diff(f(i), u)
    diff(f(i), v)
    diff(f(i), w)
end
```

Ligning 1 patielt differentiert for alle varable

ans = $-\sin(u)\ (b\sin(v) - c\sin(v-w))$

ans = $\cos(u)\ (b\cos(v) - c\cos(v-w))$

ans = $c\cos(v-w)\cos(u)$

Ligning 2 patielt differentiert for alle varable

ans = $\cos(u)\ (b\sin(v) - c\sin(v-w))$

ans = $\sin(u)\ (b\cos(v) - c\cos(v-w))$

ans = $c\cos(v-w)\sin(u)$

Ligning 3 patielt differentiert for alle varable

```
ans = 0
ans = c sin(v − w) − b sin(v)
ans = −c sin(v − w)
```

Her bruges ligning 6 og 8 ud af de 9 afledet

```
a = 1; b = 3; c = 2; % m
x = 1.1; y = 2.8; z = 0.6; % m
u0 = 45*pi/180; % rad
v0 = 30*pi/180; % rad
w0 = 55*pi/180; % rad
es = 0.0001; maxit = 20; % Ønsket nøjagtighed (%) og maks iterationer
X = [u0; v0; w0];
iter = 0;
while 1
    u = X(1); v = X(2); w = X(3);

    %resultatet af hver ligning sættes = 0
    f = [cos(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) - x
        sin(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) - y
        a + b*cos(v)-c*cos(v-w) - z];

    % de afledte funktioner indsættes i en matrix
    J = [-sin(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) cos(u)*(b*cos(v)-c*cos(v-w)) c*cos(v-w)*cos(u)
        cos(u)*(b*sin(v)-c*sin(v-w)) sin(u)*(b*cos(v)-c*cos(v-w)) c*cos(v - w)*sin(u)
        0 c*sin(v - w) - b*sin(v) -c*sin(v-w) ];

    dX = J\f; %løser ligningsystemet J*dx = f
    X = X - J\f;
    iter = iter + 1;
    ea = 100*max(abs(dX./X));
    if iter>=maxit || ea<=es, break, end
end
u = X(1)*180/pi % u i grader
```

```
u = 68.5523
```

```
v = X(2)*180/pi % v i grader
```

```
v = 58.8704
```

```
w = X(3)*180/pi % w i grader
```

```
w = 71.5889
```

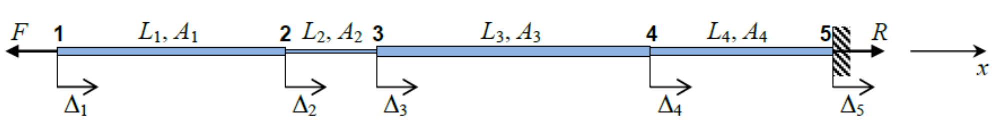
```
ea
```

```
ea = 4.5887e-05
```

```
iter
```

```
iter = 5
```

Opgave 4 - M3NUM1 F16 Ordinær eksamen



Figur 2: Sammenføjede stangelementer påvirket af trækkraft

I figur 2 er vist en konstruktion bestående af fire sammenføjede stålstænger (stangelementer) med E-modul på $E = 210$ GPa og forskellige længder ($L_1, \ldots, L_4$) og tværsnitsarealer ($A_1, \ldots, A_4$). Konstruktionen er i knude **1** påvirket af en kraft F mod venstre og er i den fikserede knude **5** påvirket af en lige så stor og modsatrettet reaktionskraft, R. Kraftpåvirkningen bevirker at knude **1** til **4** udsættes for vandrette forskydninger ($\Delta_1, \ldots, \Delta_4$), mens knude **5** ikke forskydes ($\Delta_5 = 0$ mm). Der regnes positiv retning mod højre.

Der er givet følgende værdier af kraft og dimensioner:

$F = 1244$ N, $E = 210$ GPa
$L_1 = 250$ mm, $L_2 = 100$ mm, $L_3 = 300$ mm, $L_4 = 200$ mm
$A_1 = 65$ mm^2, $A_2 = 8$ mm^2, $A_3 = 102$ mm^2 og $A_4 = 47$ mm^2

Følgende ufærdige MATLAB-script er beregnet til at udregne forskydningerne $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ i form af en vektor D:

```
clear
L = [250 100 300 200]*1e-3; % m     Længder af stangelementerne
A = [65 8 102 47]*1e-6;     % m^2   Tværsnitsarealer af stangelementerne
E = 210e9;                  % Pa    E-modul for stangelementerne
k = A*E./L;                 % N/m   Fjederkonstanter for stangelementerne
K = [ k(1)     -k(1)        0          0        0     % N/m  Stivhedsmatrix
     -k(1)    <UDFYLD>    -k(2)        0        0
       0       -k(2)     <UDFYLD>    -k(3)      0
       0         0        -k(3)     <UDFYLD>  -k(4)
       0         0          0        -k(4)     k(4)];
Kred = K(<UDFYLD>,<UDFYLD>);
Fvek = [<UDFYLD>; 0; 0; <UDFYLD>];
D = Kred\Fvek
```

MATLAB-scriptet kan downloades fra Blackboard under navnet `FEMstangelementer.m`.

a)

Færdiggør MATLAB-scriptet ved at erstatte tekstangivelserne **<UDFYLD>** med korrekt MATLAB-kode, og kør herefter scriptet. I besvarelsen ønskes såvel det færdiggjorte script som de beregnede forskydninger, Δ_1, Δ_2, Δ_3, og Δ_4 anført.

```
clear
L = [250 100 300 200]*1e-3; % m Længder af stangelementerne
A = [65 8 102 47]*1e-6; % m^2 Tværsnitsarealer af stangelementerne
E = 210e9; % Pa E-modul for stangelementerne

k = A*E./L; % N/m Fjederkonstanter for stangelementerne

K = [ k(1) -k(1) 0 0 0 % N/m Stivhedsmatrix
    -k(1) k(1)+k(2) -k(2) 0 0
    0 -k(2) k(2)+k(3) -k(3) 0
    0 0 -k(3) k(3)+k(4) -k(4)
    0 0 0 -k(4) k(4)];

Kred = K(1:4,1:4);
F = 1244; %N
Fvek = [-F; 0; 0; 0];
D = Kred\Fvek;

format("shortG")
tab = table(D, VariableNames={'Forskydning i punkt'}, RowNames={'\Delta_1', '\Delta_2', '\Delta_3', '\Delta_4'})
```

tab = 4×1 table

	Forskydning i punkt
1 \Delta_1	-0.00013946
2 \Delta_2	-0.00011668
3 \Delta_3	-4.2631e-05
4 \Delta_4	-2.5208e-05

b)

Kraftpåvirkningen forårsager forlængelser af de fire stangelementer. Beregn forlængelsen af hvert stangelement i mm og i procent. Hvis spørgsmål (a) ikke er besvaret, kan man antage, at resultatet i spørgsmål 4a blev
`D = [-0.1245e-3; -0.1008e-3; -0.0623e-3; -0.0240e-3].`

```
format shortG %laver færrer decimaler

%flipper vectorne så vi starter ved inspændingen
D_lang = flip(D);
L_rev = flip(L);

%sætter start værdi og lister til forloop
d = 0;
forlaengelse = [];
d_proc = [];

%forloop udregner forlængelse
for i = 1:length(L)
```

```
    d = D_lang(i) - d;
    forlaengelse(i) = d * 1000;
    d_proc(i) = d/L_rev(i) * 100;
end

%opsætter tabel
clear table
tab_delta = table(flip(forlaengelse'), flip(d_proc'), VariableNames={'Forlængelse(mm)', 'Forlængelse(%)'})
```

tab_delta = 4×2 table

	Forlængelse(mm)	Forlængelse(%)
1	-0.040207	-0.016083
2	-0.099255	-0.099255
3	-0.017423	-0.0058077
4	-0.025208	-0.012604

Opgave 5 - M3NUM1 E18 Ordinær eksamen

Lad der være givet følgende ligningssystem, hvor a, b, c, d og k er konstanter, mens u og v er ubekendte:

$$\begin{aligned} \frac{\ln a + bu}{\sin c} + \left(3v + u\sqrt{d} - k^2\right)\sin c - 1 &= 0 \\ 6 + \frac{4}{b+d} + \frac{\left(\cos c - \frac{3a}{b}\right)(2u - v\sin c + k)}{b - 2a^2} &= 0 \end{aligned}$$

5a)

Vis at ligningssystemet er lineært ud fra en bestemmelse og vurdering af relevante partielt afledte af ligningernes venstresider. De partielt afledte og argumentationen for linearitet skal fremgå af besvarelsen.

Vi starter med at sætte alle konstanter til 1 og variablerne som symboler der med kan vi hurtigt se om ligningen ser ud til avære være lineær

```
syms u v
a = 1;
b = 1;
c = 1;
d = 1;
k = 1;
f1 = (log(a)+b*u) / sin(c) + (3*v + u * sqrt(d) - k^2) * sin(c) - 1
```

f1 =

$$\frac{34643844702534016924092238187345\,u}{17067059183461908934129239457792} + \frac{11368945240871781\,v}{4503599627370496} - \frac{8293248040994423}{4503599627370496}$$

Vi ser således at ligningen står på lineær form $a \cdot u + b \cdot v + konstant$

For ekstra analyse kan vi også undersøge ligningen ved at lave partiel differentiering for at få en konstant

```
vpa(diff(f1, v),3) %ligning 1 differentieres og evalueres med 3 betydende cifre
```

ans = 2.52

```
vpa(diff(f1, u), 3)
```

ans = 2.03

Vi ser at vi får en konstant ud ved hver partieldifferentiering og vi har således en linær ligning

Det samme gentages for ligning 2

```
f2 = 6 + 4/(b+d) + (cos(c)-3*a/b) * (2*u - v*sin(c) + k) / (b-2*a^2)
```

f2 =

$$\frac{5538746809368157\,u}{1125899906842624} - \frac{20989903059586623388313487092539\,v}{10141204801825835211973625643008} + \frac{23553145318850141}{2251799813685248}$$

```
vpa(diff(f2, v), 3)
```

ans = -2.07

```
vpa(diff(f2, u), 3)
```

ans = 4.92

Ved anden ligning har vi igen kun en konstant tilbage, de to ligninger har altså en konstant hældning.

Vi har således 2 lineær ligninger med to ubekndte.

5b)

Benyt matrixberegning i MATLAB til at løse ligningssystemet, når $a = 1$, $b = 3$, $c = \pi/2$, $d = 1$ og $k = 2$. Besvarelsen skal indeholde de anvendte MATLAB-kommandoer og de fundne løsningsværdier af u og v.

```
clear

a = 1;
b = 3;
c = pi/2;
d = 1;
k = 2;

syms u v

f1 = (log(a)+b*u) / sin(c) + (3*v + u * sqrt(d) - k^2) * sin(c) - 1
```

f1 = $4u + 3v - 5$

```
f2 = 6 + 4/(b+d) + (cos(c)-3*a/b) * (2*u - v*sin(c) + k) / (b-2*a^2)
```

f2 = $v - 2u + 5$

```
%Vi bruger den indbyggede funktion til at omdanne vore lineær ligning til
%en 2x2 matrix vi kan udregne
eqns = [f1 == 0,
        f2 == 0]; %definer ligningerne
[A,B] = equationsToMatrix(eqns); %ligninger omdannes til matrix A med konstanterne B som resultat

X = vpa(linsolve(A,B),5) %Vi kan nu bruge solver funktionen til at løse ligningsystemet
```

X =

$$\begin{pmatrix} 2.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

```
%uden den indbyggede funktionen equationsToMatrix(eqns) kan vi også trække
%værdierne ud således

b1 = diff(f1, v)*v + diff(f1, u)*u - f1; %konstanterne udtrækkes
b2 = diff(f2, v)*v + diff(f2, u)*u - f2;

A = [diff(f1, u), diff(f1, v)
    diff(f2, u), diff(f2, v)]; %matrixen opstilles

B = [b1
    b2]; %konstanterne sættes om løsning til matrixen
X = vpa(linsolve(A,B),5)
```

X =

$$\begin{pmatrix} 2.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

```
%værdierne pakkes ud
u = X(1)
```

u = 2.0

```
v = X(2)
```

v = -1.0