

**Kursus:** M4ST11

**Eksamensdato:** 03.06.2019 – 09:30 – 13:30 (forlænget prøvetid 14:30)

**Eksamenstermin:** Juni 2019

**Underviser:** Allan Leck Jensen

**Praktiske informationer**

**Ingeniørhøjskolen udleverer:**

4 stk. hvidt papir

**Digital eksamen:**

Opgaven tilgås og afleveres gennem den digitale eksamensportal.

Håndskrevne dele af opgavebesvarelsen skal digitaliseres og afleveres i den digitale Eksamensportal.

**Opgavebesvarelsen skal afleveres i PDF-format.**

Husk at uploade og aflevere i Digital eksamen til tiden. Du vil modtage en elektronisk afleveringskvittering, straks du har afleveret.

Husk at aflevere til tiden, da der ellers skal indsendes dispensationsansøgning.

**Husk angivelse af navn og studienr. på alle sider, samt i dokumenttitel / filnavn**

Alle hjælpemidler må benyttes, herunder internettet som opslagsværktøj, men der er **IKKE** tilladt at kommunikere med andre.

**Særlige bemærkninger:** Det er kun muligt at aflevere elektronisk via Digital Eksamen portalen

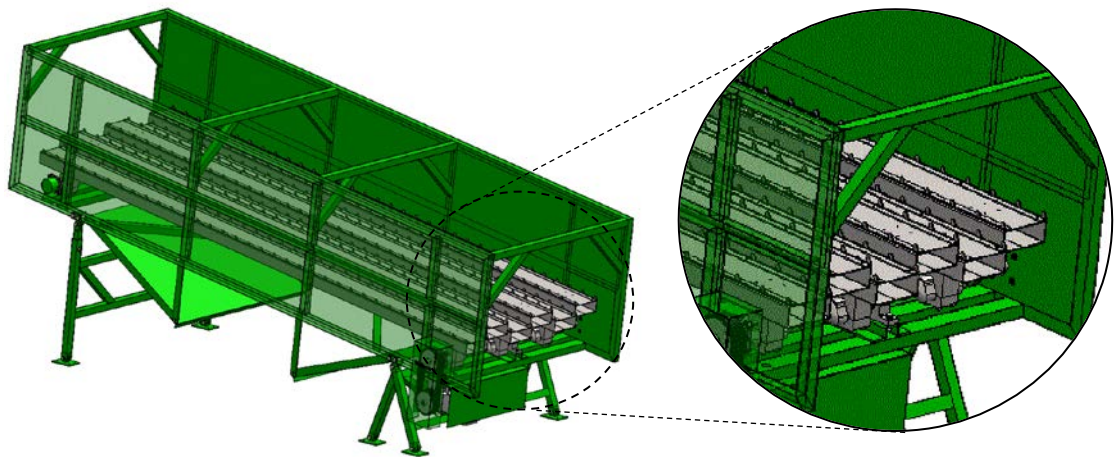
**Bemærk følgende:**

- Decimaltal i opgaverne er angivet med engelsk decimalseparator (.)
- Alle data fra opgaverne kan downloades fra Digital Eksamen portalen i et regneark med navnet Data\_M4STI1\_2019F.xlsx. I regnearket angiver kolonnenavnet, hvilken opgave data hører til.
- Nogle delopgaver benytter resultatet fra en tidligere delopgave. Hvis du ikke kunne løse den, kan du blot antage en værdi for resultatet og regne videre med det.

## Sortering af plastikaffald

Forbruget af plastik på verdensplan er voldsomt og stigende. Det meste af plastikken ender som affald og bliver brændt. I værste fald ender det i havene til stor skade for naturen og miljøet. I mange danske kommuner har man indført affaldssortering hos borgerne i et forsøg på at genanvende mest mulig husholdningsaffald, herunder plastik, papir, pap, glas og metal.

Der findes mange typer af plastik, og ikke alle kan genanvendes, blandt andet blødt plast. Det indsamlede plastik fra renovationen skal derfor sorteres yderligere på sorteringsanlæggene, før det kan genbruges. På Ingeniørhøjskolen Aarhus Universitet udvikler en projektgruppe under Maskinteknik en maskine, der skal kunne sortere blødt plastik fra hårdt.



*CAD diagram af en maskine til udsortering af blødt plastik. Til højre i cirklen vises et udsnit, hvor de roterende sorteringsplader (grå) kan ses i større detalje.*

Maskinen har nogle parallelle plader, der kan foretage roterende bevægelser i pladernes længderetning. Plastikaffaldet hældes ned på midten af pladerne, og pladernes bevægelser sammen med deres hældning får det bløde plastik til at bevæge sig opad, mens det hårde plastik falder nedad og ender i maskinens lave ende (til højre i figuren).

### Opgave 1 – Sorteringseffektivitet

Maskinens effektivitet til at sortere plastik i blødt og hårdt undersøges. En kasse med plastikaffald består af 885 stykker hårdt plastik og 313 stykker blødt plastik. Efter sorteringen af kassens indhold har maskinen fået 738 stykker plastik til at ligge i den lave ende for hårdt plastik, mens resten ligger i den modsatte ende for blødt plastik. Projektgruppen undersøger det sorterede plastik. Det viser sig, at 732 stykker hårdt plastik og 307 stykker blødt plastik er blevet sorteret korrekt.

Vi vil bruge følgende betegnelser om et tilfældigt stykke plastik fra kassen:

$VH$ : Plastikstykket er hårdt i virkeligheden (det er i virkeligheden hårdt)

$VB$ : Plastikstykket er i virkeligheden blødt

$SH$ : Plastikstykket er blevet sorteret som hårdt

$SB$ : Plastikstykket er blevet sorteret som blødt

- Beregn sandsynlighederne  $P(VH)$ ,  $P(VB)$ ,  $P(SH)$  og  $P(SB)$  for kassens indhold.
- Beregn sandsynlighederne  $P(VH | SH)$  og  $P(VB | SB)$ .
- Beregn sandsynlighederne  $P(VB | SH)$  og  $P(VH | SB)$ .

Nu sorteres en ny kasse plastikaffald, hvor fordelingen af hårdt og blødt plastik er ukendt. Det viser sig, at 78 % af plastikstykkerne bliver sorteret som hårdt plastik. Antag i det følgende, at maskinens sorteringseffektivitet er uafhængig af kassernes indhold, således at sandsynlighederne fra delspørgsmål b. og c. også gælder for den nye kasse plastikaffald.

- Beregn andelen af hårdt plastik for den nye kasse,  $P(VH)$ .
- Beregn sandsynligheden for at et hårdt stykke plastik fra den nye kasse bliver sorteret korrekt,  $P(SH | VH)$ .

**Opgave 2 – Optimering af maskinens opsætning**

Projektgruppen undersøger, hvordan sorteringseffektiviteten af hårdt plastik  $E$  afhænger af sorteringspladernes vinkel  $\theta$  (theta) og af deres rotationshastighed  $\omega$  (omega). De måler følgende resultater:

Plade- vinkel $\theta$ (°)	Rotations- hastighed $\omega$ (s <sup>-1</sup> )	Sorterings- effektivitet $E$ (%)	Plade- vinkel $\theta$ (°)	Rotations- hastighed $\omega$ (s <sup>-1</sup> )	Sorterings- effektivitet $E$ (%)
15	0.5	58.8	35	0.5	88.3
15	1	66.7	35	1	80.7
15	1.5	68.6	35	1.5	81.1
15	2	69.4	35	2	80.4
15	3	67.2	35	3	86.2
25	0.5	78.9	45	0.5	69.2
25	1	80.0	45	1	64.8
25	1.5	83.1	45	1.5	65.4
25	2	89.2	45	2	73.0
25	3	89.5	45	3	68.3

- Lav et scatter plot af  $E$  over for henholdsvis  $\theta$  og  $\omega$ . Diskutér, om der lader til at være en sammenhæng mellem den enkelte regressor og responsvariablen.
- Lav en multipel lineær regressionsmodel, der beskriver sorteringseffektiviteten som funktion af vinkel  $\theta$  og rotationshastighed  $\omega$ . Skriv ligningen op.
- Forklar vha. regressionsanalysens statistikker (f.eks. R-squared, F og p-value), om modellen beskriver observationerne godt.
- Udvid modellen, så du inddrager kvadratled og interaktionsled:

$$E = b_0 + b_1\theta + b_2\omega + b_{11}\theta^2 + b_{22}\omega^2 + b_{12}\theta\omega$$

hvor  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{22}$  og  $b_{12}$  er konstanter.

Fjern de led, som du ikke mener er nødvendige i modellen, og begrund dine valg.

- Skriv ligningen for din foretrukne model op. Beregn sorteringseffektiviteten, hvis vinklen sættes til  $\theta = 28$  og rotationshastigheden til  $\omega = 2.5$ .
- Giv dit mest kvalificerede bud på, hvilken vinkel, der bør vælges for sorteringsmaskinen, for at opnå så høj sorteringseffektivitet som muligt.
- Undersøg om der er unormale observationer i datasættet (outliers, løftestangspunkter eller indflydelsespunkter).

**Opgave 3 – Belægning på sorteringspladerne**

Projektgruppen har konstateret, at sorteringsmaskinen har problemer med at sortere hårde plastikstykker korrekt, hvis stykkerne er relativt flade. De mener at kunne afhjælpe problemet med en ændret overflade på de roterende plader, der skal transportere det bløde plastik opad og kaste det hårde nedad. De laver to stikprøver blandt kasserne med blandet plastik. Hver stikprøve består af 24 tilfældigt udtagne kasser, og for hver stikprøve registreres sorteringseffektiviteten af hårdt plastik. Til den første stikprøve benyttes den oprindelige belægning, mens den nye belægning benyttes til den anden stikprøve. Resultaterne vises herunder:

Sorteringseffektiviteter (%) for oprindelig og ny belægning					
Oprindelig	Ny	Oprindelig	Ny	Oprindelig	Ny
70.3	78.6	91.9	79.6	79.6	80.1
86.7	75.6	86.7	80.6	88.9	80.7
77.9	86.6	68.5	85.4	78.6	76.6
75.0	79.2	83.2	78.4	82.6	81.6
79.7	81.3	74.0	83.4	84.3	78.5
73.9	82.7	79.7	81.9	81.4	80.7
80.9	81.3	81.8	80.3	85.4	82.0
78.2	78.3	84.7	77.8	82.6	78.3

- Beregn gennemsnit, varians og standardafvigelse for de to stikprøver.
- Beregn et 95 % konfidensinterval for populationsmiddelværdien for sorteringseffektiviteten af hårdt plastik med hhv. oprindelig og ny belægning.
- Lav et parallelt boksplot af de to stikprøver. Hvad fortæller dine resultater fra delspørgsmål a., b. og c. dig om forskelle på de to belægninger?
- Projektgruppen vurderer, at der ikke er signifikant forskel på den gennemsnitlige sorteringseffektivitet. Derimod vil de gerne foretage en hypotesetest for, om der på 5 % signifikansniveau er forskel på varianserne. Opskriv nulhypotese og alternativhypotese for denne hypotesetest.
- Opstil formelen for teststørrelsen og angiv, hvilken fordeling den følger.
- Beregn den kritiske region for testen, beregn teststørrelsen og konkludér på hypotesetesten.
- Oplys hvilke antagelser, der er gjort i hypotesetesten, og om antagelserne er rimelige på baggrund af data.