Løsningsforslag M4STI1 2017E

Opgave 1 – Bremseevne

a. Parallelle boksplots for hver af de tre faktor vises og kommenteres nedenfor:

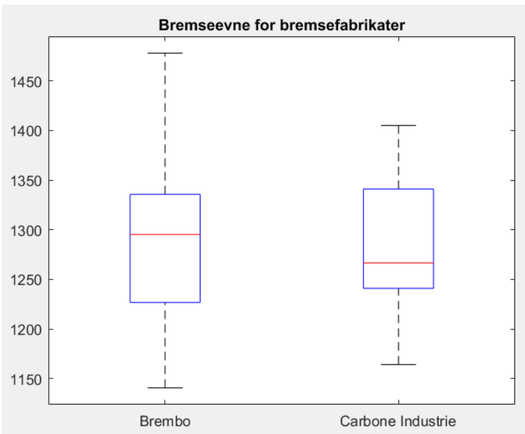


Fig. 1 viser, at de to bremsefabrikater er sammenlignelige. Medianen er lavere for CI, men det interkvartile range (IQR) er ensartet for de to bremsefabrikater. CI har kortere koste, så CI lader til at bremse mere ensartet end Brembo, alt andet lige.

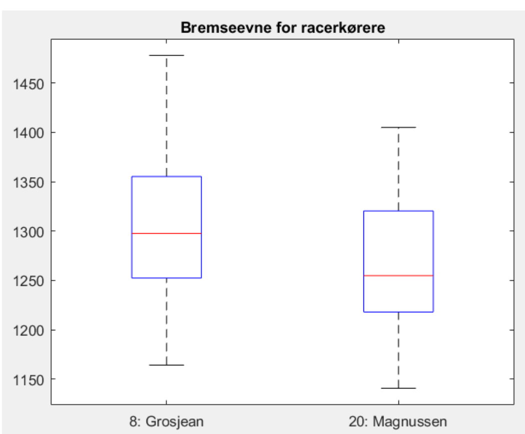


Fig. 2 viser, at de to racerkørere er meget ens. De har nogenlunde lige store IQR og koste, men der er en tendens til, at Magnussens boksplot og median ligger lidt lavere end Grosjeans, altså at Magnussen bremser bedre.

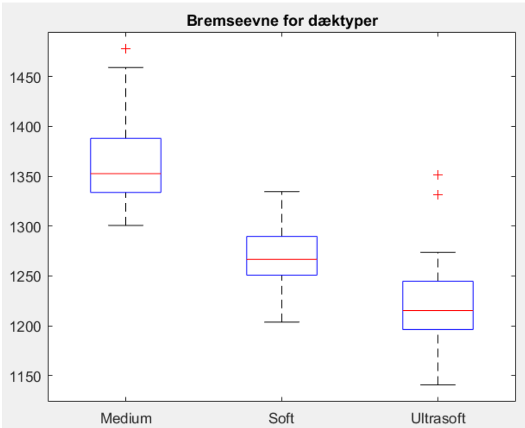


Fig. 3 viser, at der er tydelig forskel på de tre dæktyper. Som forventet har Ultrasoft det bedste vejgreb, så bremsetiden er kortest. Tilsvarende bremser Soft dæk bedre end Medium. IQR og koste er af sammenlignelig størrelse, så der er ensartet variation. Der er tre outliers, markeret som røde plusser, men det er ikke bekymrende. De er alle større end forventet, så det er sikkert bare nedbremsninger, der ikke er forløbet optimalt, f.eks. p.g.a. udskridning.

b. ANOVA analysen har følgende resultat:

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
Bremse	1337.6	1	1337.6	1.17	0.2857
Kører	21961.2	1	21961.2	19.14	0.0001
Dæk	196709.5	2	98354.7	85.71	0
Bremse*Kører	30289.6	1	30289.6	26.39	0
Bremse*Dæk	150.4	2	75.2	0.07	0.9367
Kører*Dæk	267.6	2	133.8	0.12	0.8902
Bremse*Kører*Dæk	834.1	2	417.1	0.36	0.6972
Error	55082.7	48	1147.6		
Total	306632.8	59			

De direkte effekter af de tre faktorer vises i de første tre rækker. På 5 % signifikansniveau kan vi konkludere følgende ved at se på p-værdierne i sidste kolonne:

- Der er ikke signifikant forskel på bremsefabrikaterne ($p = 0.29 > 0.05$)
- Der er signifikant forskel på kørerne ($p = 0.0001$)
- Der er signifikant forskel på dæktyperne ($p = 0$)

De næste tre rækker i ANOVA tabellen viser, om der er interaktioner imellem par af faktorer. Resultaterne er:

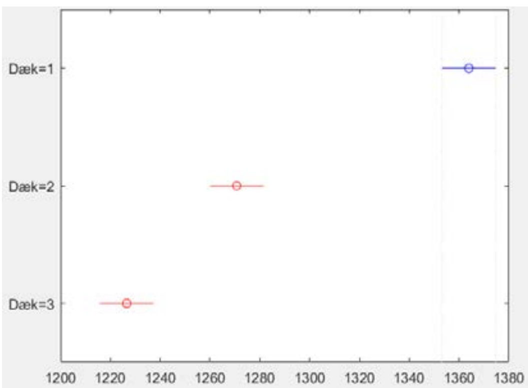
- Der er signifikant interaktion mellem bremsefabrikat og kører ($p = 0$)
- Der er ikke signifikant interaktion mellem bremsefabrikat og dæktype ($p = 0.94$)
- Der er ikke signifikant interaktion mellem kører og dæktype ($p = 0.89$)

Endelig viser den syvende række i ANOVA tabellen:

- Der er <u>ikke</u> signifikant 3-faktor interaktion (d.v.s. interaktion mellem bremsefabrikat, kører og dæktype) (p = 0.70).

c. Vi kan aflæse antal frihedsgrader for interaktion mellem bremsefabrikat og dæktype i ANOVA tabellens femte række (Bremse*Dæk) i kolonnen d.f. Her fremgår det, at der er 2 frihedsgrader.
For interaktionen mellem to faktorer A og C med hhv. a og c niveauer er der $(a-1)\cdot(c-1)$ frihedsgrader. Derfor er der for interaktionen mellem bremsefabrikat og dæktype $\underline{(2-1)\cdot(3-1) =}$ <u>2 frihedsgrader</u>.

d. Parvis sammenligning af dæktyper
Dæktype er den tredje faktor, så vi skal bruge 'Dimension', [3] i kaldet af multcompare for at sammenligne niveauerne af denne faktor:
[c,m] = multcompare(stats, 'Alpha',0.05, 'CType','lsd', 'Dimension',[3])



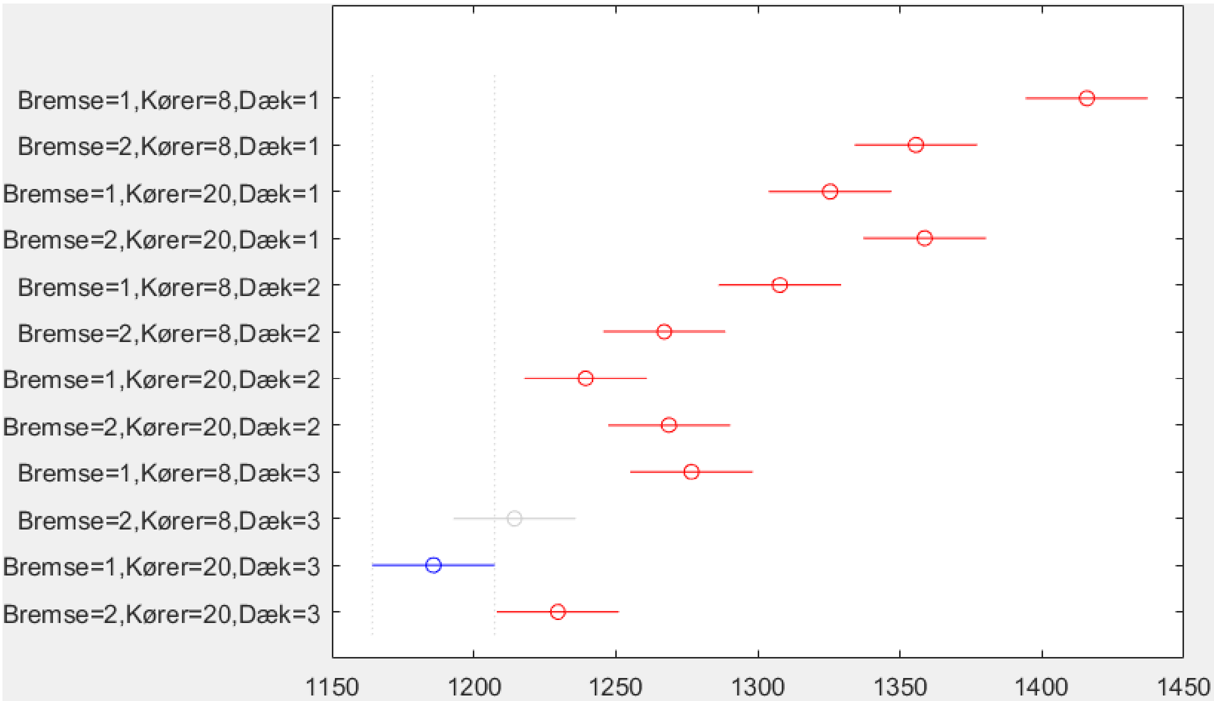

```
c =
    1.0000    2.0000   71.6663   93.2050  114.7437    0.0000
    1.0000    3.0000  115.8263  137.3650  158.9037    0.0000
    2.0000    3.0000   22.6213   44.1600   65.6987    0.0001
```

Resultatet er, at alle tre dæktyper har signifikant forskellig bremseevne. I grafikken ses det ved at uanset hvilket dæk, der markeres som blåt, så bliver de andre dæk markeret røde. Derfor er der signifikant forskel på alle par af dæktyper. I matricen c ses det ved at hver af de tre parvise sammenligninger har en p-værdi på højest 0.0001, som jo er langt under 0.05.

Ifølge c matricen er 95 % konfidensintervallet for forskellen på bremseevne for hvert par af dæktyper følgende:

Medium og Soft (1 og 2):	[71.7; 114.7]
Medium og Ultrasoft (1 og 3):	[115.8; 158.9]
Soft og Ultrasoft (2 og 3):	[22.6; 65.7]

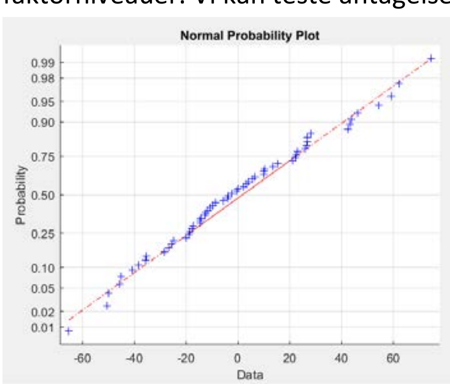
e. Jeg får sammenlignet alle kombinationer af faktorniveauer ved at sætte værdien af 'Dimension' til [1,2,3] i kaldet af multcompare:
[c,m] = multcompare(stats, 'Alpha',0.05, 'CType','lsd', 'Dimension', [1,2,3])



Ifølge grafikken er den bedste kombination (d.v.s. kombinationen med den korteste forventede bremsetid) 'Bremse=1, Kører=20, Dæk=3', d.v.s. kombinationen Brembo, Magnussen, Ultrasoft. Denne kombination (markeret blå) er signifikant forskellig fra alle (de røde), bortset fra den næstbedste, nemlig CI, Grosjean, Ultrasoft (markeret grå). Den dårligste kombination er Brembo, Grosjean, Medium.

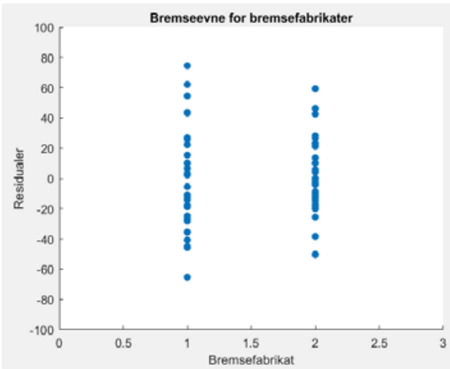
Der er signifikant forskel på kombinationerne. Det ses f.eks. grafisk, da den dårligste kombination er forskellig fra alle andre, således også den bedste. Det kan også ses i c matricen, der er output af multcompare. Her bliver den dårligste kombination (1) sammenlignet med den bedste (11) i matricens række 10 med en p-værdi på 0.0000.

f. Vi har antaget at residualerne er normalfordelte med middelværdi 0 og med samme varians, uanset faktorniveauer. Vi kan teste antagelsen om normalfordeling med et normalfordelingsplot.

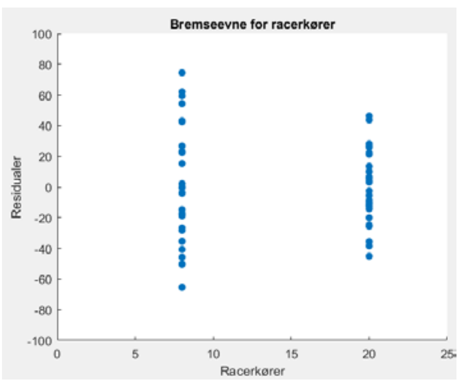


Resultatet ser fint ud, da residualerne ligger nogenlunde pænt på en linje i normalfordelingsplottet.

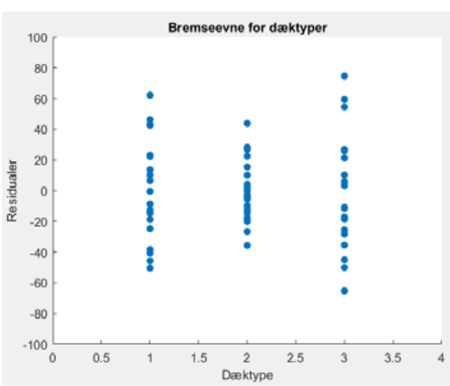
Vi kan teste antagelsen om ensartet varians ved at plotte residualerne mod de enkelte faktorer.



Der lader til at være større varians på residualerne for Brembo (1) end for CI (2)



Grosjean (8) har større varians på residualerne end Magnussen (20)



Der er mindre varians på residualerne for dæk af typen Soft (2) end for Medium (1) og Ultrasoft (3).

Vi kan ikke være helt trygge ved om antagelsen om varianshomogenitet holder ud fra de grafiske resultater. I opgaven blev der bedt om en undersøgelse af antagelserne med plots, som ovenstående.

Det er dog muligt at teste varianshomogenitet med Bartlett's tests af hver faktor. Disse tests viser, at antagelsen om varianshomogeniteten holder. De visuelle forskelle i variansen, vi kunne se af de tre ovenstående grafikker, var altså ikke store nok til at afvise antagelsen.

MatLab kode til opgave 1

```
%% M4STI1 2017E Opgave 1: Eksperiment med 3 faktorers indflydelse på
bremseevne
clc; clear; close all; format compact;

%% Indlæs og behandl data
D = xlsread('Data_M4STI1_2017E.xlsx','A:D')

x = D(:,1:3)    % Kombinationer af de tre faktorers niveauer
bremse = x(:,1)
koerer = x(:,2)
daek = x(:,3)
y = D(:,4)      % Målinger af bremseevne (ms)


%% a: Boxplots
figure(1)
boxplot(y, bremse, 'labels', {'Brembo'; 'Carbone Industrie'})
title('Bremseevne for bremsefabrikater')

figure(2)
boxplot(y, koerer, 'labels', {'8: Grosjean'; '20: Magnussen'})
title('Bremseevne for racerkørere')

figure(3)
boxplot(y, daek, 'labels', {'Medium'; 'Soft'; 'Ultrasoft'})
title('Bremseevne for dæktyper')

% Fig. 1 viser, at de to bremsefabrikater er sammenlignelige. Medianen er
% lavere for CI, men IQR er ensartede. CI har mindre koste, så CI bremser
% mere ensartet end Brembo, alt andet lige.
% Fig. 2 viser, at de to racerkørere er meget ens. De har nogenlunde lige
% store IQR og koste, men der er en tendens til at Magnussens boksplot
% ligger lidt lavere end Grosjeans, altså at Magnussen bremser bedre.
% Fig. 3 viser, at der er tydelig forskel på de tre dæktyper. Som forventet
% har Ultrasoft bedst vejgreb, så bremsetiden er kortest. Tilsvarende
% bremser Soft dæk bedre end Medium. IQR og koste er af sammenlignelig
% størrelse, så ensartet variation. Der er tre outliers, men det er ikke
% bekymrende. De er alle større end forventet, så det er sikkert bare
% nedbremsninger, der ikke er forløbet optimalt, f.eks. p.g.a. udskridning.


%% b: ANOVA
[p,table,stats,terms] = anovan(y, x, 'model','full',
'varnames',{'Bremse','Kører','Dæk'})

% NB: Jeg bruger Name-Value kombinationen 'model', 'full' for at få også
% tre-faktor interaktionen med. Hvis jeg brugte 'interaction' ville jeg kun
```

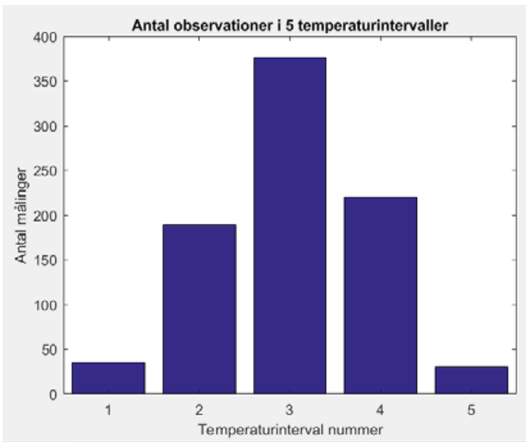
```
% få to-faktor interaktionerne.

% Der er ikke signifikant forskel på bremsefabrikaterne (p=0.29)
% Der er signifikant forskel på kørerne (p=0.0001)
% Der er signifikant forskel på dæktyperne (p=0)
% Der er signifikant interaktion mellem bremsefabrikat og kører (p=0)
% Der er ikke andre signifikante 2-faktor interaktioner
% Der er ikke signifikant 3-faktor interaktion (mellem bremsefabrikat,
%     kører og dæktype) (p=0.70)


%% c: Frihedsgrader
% For interaktionen mellem to faktorer A og C med hhv. a og c niveauer er
% der (a-1)*(c-1) frihedsgrader.
% Derfor er der for interaktionen mellem bremsefabrikat og dæktype
% (2-1)*(3-1) = 2 frihedsgrader.


%% d: Parvis sammenligning af dæktyper
% Dæktype er den tredje faktor, så vi skal bruge 'Dimension', [3] i kaldet
% af multcompare
[c,m] = multcompare(stats, 'Alpha',0.05, 'CType','lsd', 'Dimension',[3])

% Resultatet er, at alle tre dæktyper har signifikant forskellig
% bremseevne. I matricen c har hver af de tre parvise sammenligninger en
% p-værdi på højest 0.0001.

% Ifølge c matricen er 95 % konfidensintervallet for forskellen på
bremseevne
% for hvert par af dæktyper følgende:
% Medium og Soft (1 og 2):       [ 71.7; 114.7]
% Medium og Ultrasoft (1 og 3):  [115.8; 158.9]
% Soft og Ultrasoft (2 og 3):    [ 22.6;  65.7]


%% e:
% Ved at vælge 'Dimension', [1,2,3] får jeg sammenlignet alle
% kombinationer.
[c,m] = multcompare(stats, 'Alpha',0.05, 'CType','lsd', 'Dimension',
[1,2,3])
% Ifølge grafikken, der kommer ud af multcompare er den bedste kombination
% (d.v.s. korteste forventede bremsetid) Brembo, Magnussen, Ultrasoft.
% Denne kombination er signifikant forskellig fra alle, bortset fra den
% næstbedste, nemlig CI, Grosjean, Ultrasoft.
% Den dårligste kombination er Brembo, Grosjean, Medium.
% Der er signifikant forskel på kombinationerne. Det ses f.eks. grafisk, da
% den dårligste kombination er forskellig fra alle andre, således også den
% bedste.
% Det kan også ses i c matricen, hvor den dårligste kombination (1)
```

```
% sammenlignes med den bedste (11) i matricens række 10 med en p-værdi
% på 0.0000.


%% f: Antagelser for residualer
% Vi har antaget, at residualerne er normalfordelte med middelværdi 0 og
% med samme varians for hver faktor.
% Residualer findes i stats objektet, lavet af anovan
resid = stats.resid

figure(4)
normplot(resid)
% Residualerne ligger rimeligt pænt på en linje, så de lader til at være
% normalfordelte, som antaget

figure(5)
scatter(bremse, resid, 'filled')
xlabel('Bremsefabrikat')
ylabel('Residualer')
title('Bremseevne for bremsefabrikater')
axis([0 3 -100 100])
% Der er større varians på residualerne for Brembo end for CI

figure(6)
scatter(koerer, resid, 'filled')
xlabel('Racerkører')
ylabel('Residualer')
title('Bremseevne for racerkører')
axis([0 25 -100 100])

% Grosjean (8) har større varians på residualerne end Magnussen (20)

figure(7)
scatter(daek, resid, 'filled')
xlabel('Dæktype')
ylabel('Residualer')
title('Bremseevne for dæktyper')
axis([0 4 -100 100])
% Der er mindre varians på residualerne for Soft bremser end for Medium og
% Ultrasoft

% Vi kan ikke være helt trygge ved vores konklusioner, da der lader til at
% være forskel på variationerne for de forskellige faktorer. Residualerne
% lader dog til at være normalfordelte.

% Bonus-info:
% Vi kan lave en Bartlett's test for hver faktor
% (Der blev kun bedt om en undersøgelse med plots, så dette er udenfor
% forventningerne til opgavens besvarelse).
```

```
vartestn(y, bremse)
vartestn(y, koerer)
vartestn(y, daek)
% For hver test er p-værdien over 5%, så vi kan ikke forkaste nulhypotesen,
% som siger, at variansen er ens. Vi kan således gå ud fra, at variansen er
% ens for alle faktorniveauer, som vi har antaget. De visuelle forskelle
% fra plots er ikke store nok til at være signifikante.
```

Opgave 2 – Bremsernes kølesystem

a. Hvis antagelsen om normalfordeling er korrekt vil vi forvente flest observationer omkring middelværdien på 231 grader C og færre længere væk fra middelværdien. Det stemmer godt overens med antal observationer vist i tabellen. Det kan også illustreres med et søjlediagram:



Fordelingen på de fem intervaller ser nogenlunde symmetrisk ud, og den har toppunkt i midten - i den tredje kategori, hvor også middelværdien hører til. Det ser plausibelt ud, at data kommer fra en normalfordeling. Da tabellen viser aggregerede tal, ikke de 850 målinger, giver det ikke mening at lave normplot.

b. Beregning af sandsynligheder under forudsætning af normalfordeling:
$\mathrm{P}(\Delta t < 150\ °\mathrm{C}) = \mathrm{normcdf}(150, 231, 42) = \mathbf{0.0269}$
$\mathrm{P}(150\ °\mathrm{C} \leq \Delta t < 200\ °\mathrm{C}) = \mathrm{normcdf}(200, 231, 42) - \mathrm{normcdf}(150, 231, 42) = \mathbf{0.2033}$
$\mathrm{P}(200\ °\mathrm{C} \leq \Delta t < 250\ °\mathrm{C}) = \mathrm{normcdf}(250, 231, 42) - \mathrm{normcdf}(200, 231, 42) = \mathbf{0.4443}$
$\mathrm{P}(250\ °\mathrm{C} \leq \Delta t < 300\ °\mathrm{C}) = \mathrm{normcdf}(300, 231, 42) - \mathrm{normcdf}(250, 231, 42) = \mathbf{0.2753}$
$\mathrm{P}(\Delta t \geq 300\ °\mathrm{C}) = 1 - \mathrm{normcdf}(300, 231, 42) = \mathbf{0.0502}$

c. Det forventede antal opbremsninger i hvert interval fås ved at gange sandsynlighederne fra delspørgsmål b. med det samlede antal opbremsninger, nemlig 850. Resultaterne kan stilles op i en tabel, hvor de forventede antal vises i den sidste kolonne:

Nedkøling	Observeret antal O	Sandsynlighed p	Forventet antal E
$\Delta t < 150$ °C	35	0.0269	22.8582
150 °C $\leq \Delta t < 200$ °C	189	0.2033	172.8358
200 °C $\leq \Delta t < 250$ °C	376	0.4443	377.6333
250 °C $\leq \Delta t < 300$ °C	220	0.2753	233.9974
$\Delta t \geq 300$ °C	30	0.0502	42.6753
I alt	**850**	**1**	**850**

d. Teststørrelsen for Goodness-of-fit hypotesestest:

$$\chi^2{}_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Teststørrelsen $\chi^2{}_0$ er chi-i-anden fordelt med df = k - p - 1 frihedsgrader. k er antal kategorier, p er antal estimerede parametre. Vi har k = 5 kategorier (temperaturintervaller), og vi har tilsvarende p = 2 parametre, der er estimeret ud fra data (middelværdi = 231 og standardafvigelse = 42), så df = 5 - 2 - 1 = **2**.

e. Den kritiske grænse med 5 % signifikansniveau:

$$\chi^2{}_{\alpha,\, df} = \chi^2{}_{0.05,1} = \mathrm{chi2inv}(1 - 0.05,\ 2) = \mathbf{5.9915}$$

Den kritiske grænse $\chi^2{}_{\alpha,\, df}$ = 5.9915 er den værdi, hvor det gælder, at sandsynligheden for at få den værdi, eller noget større er 5% (α), hvis antagelsen om normalfordeling er korrekt. Med andre ord, hvis teststørrelsen $\chi^2{}_0$ er over den kritiske grænse $\chi^2{}_{\alpha,\, df}$, så forkaster vi nulhypotesen om, at bremsernes køleevne kan modelleres med en normalfordeling.

f. Teststørrelsens værdi beregnes til

$$\chi^2{}_0 = 12.5703$$

Da teststørrelsen $\chi^2{}_0$ er større end den kritiske grænse på $\chi^2{}_{\alpha,\, df} = 5.9915$ forkaster vi hypotesen om, at bremsernes køleevne er normalfordelt. Vi må altså konkludere, at selv om det kunne se ud til at data for bremsernes køleevne følger en normalfordeling (delspørgsmål a.), så er det ikke tilfældet.

MatLab kode til opgave 2

```
%% M4STI1 2017E Opgave 2: Nedkøling af Formel 1 bremser
clc; clear; close all; format compact;

%% Indlæs og behandl data
D = xlsread('Data_M4STI1_2017E.xlsx','G:H')
O = D(:,2)
% O er de observerede antal. Til Goodness of Fit testen skal vi sammenligne
% O med E, der er det forventede observerede antal, hvis antagelsen om
% normalfordeling er korrekt


%% a: Vurdering
% Hvis antagelsen om normalfordeling er korrekt vil vi forvente flest
% observationer omkring middelværdien på 231 grader C og færre jo længere
% væk fra middelværdien. Det stemmer godt overens med antal observationer
% vist i tabellen. Det kan også illustreres med et søjlediagram:
figure(1)
bar(D(:,1),O)
title('Antal observationer i 5 temperaturintervaller');
xlabel('Temperaturinterval nummer')
ylabel('Antal målinger')

% Fordelingen på de fem intervaller ser nogenlunde symmetrisk ud, og den
% har toppunkt i midten - i den tredje kategori, hvor også middelværdien
% hører til. Det ser plausibelt ud, at data kommer fra en normalfordeling.
% Da tabellen viser aggregerede tal, ikke de 850 målinger, giver det ikke
% mening at lave normplot.


%% b: Sandsynligheder for temperaturintervallerne
mu = 231
sigma = 42
P_u150 = normcdf(150, mu, sigma)
% P_u150 = 0.0269
P_m150og200 = normcdf(200, mu, sigma) - normcdf(150, mu, sigma)
% P_m150og200 = 0.2033
P_m200og250 = normcdf(250, mu, sigma) - normcdf(200, mu, sigma)
% P_m200og250 = 0.4443
P_m250og300 = normcdf(300, mu, sigma) - normcdf(250, mu, sigma)
% P_m250og300 = 0.2753
P_o300 = 1 - normcdf(300, mu, sigma)
% P_o300 = 0.0502

% Test: Summen af sandsynlighederne skal give 1
P_test = P_u150 + P_m150og200 + P_m200og250 + P_m250og300 + P_o300
```

```
%% c: Forventet antal nedbremsninger i de fem temperaturintervaller
n = 850
n_u150 = n*P_u150
% n_u150 = 22.8582
n_m150og200 = n*P_m150og200
% n_m150og200 = 172.8358
n_m200og250 = n*P_m200og250
% n_m200og250 = 377.6333
n_m250og300 = n*P_m250og300
% n_m250og300 = 233.9974
n_o300 = n*P_o300
% n_o300 = 42.6753

% Test: Summen af antal i intervallerne skal give 850
n_test = n_u150 + n_m150og200 + n_m200og250 + n_m250og300 + n_o300

E = [n_u150; n_m150og200; n_m200og250; n_m250og300; n_o300]
% Matricen E er det forventede antal i de fem kategorier, hvis antagelsen
% om normalfordeling er korrekt. Hvis den er det, skal E helst ligne O


%% d: Formel for teststørrelsen
% Teststørrelsen beregnes ved at addere et bidrag for hver kategori (her
% temperaturintervaller). Det i-te bidrag er (O_i - E_i)^2/E_i

% Teststørrelsen chi2_0 kan også beregnes med matlab's matrix
% operationer:

% chi2_0 = sum(((O - E) .^ 2) ./ E)

% Teststørrelsen chi2_0 er chi-i-anden fordelt med df = k-p-1
frihedsgrader.
% k er antal kategorier, p er antal estimerede parametre. Vi har k = 5
% kategorier (temperaturintervaller) og p = 2 parametre, der er estimeret
ud
% fra data (middelværdi = 231 og standardafvigelse = 42), så
% df = 5 - 2 - 1 = 2.


%% e: Kritisk grænse

alfa = 0.05
df = 2
chi2_alfa = chi2inv(1-alfa, df)

% Den kritiske grænse chi2_alfa = 5.9915 er den værdi, hvor det gælder, at
% sandsynligheden for at få den værdi, eller noget større er 5% (alfa),
% hvis antagelsen om normalfordeling er korrekt. Med andre ord, hvis
% teststørrelsen chi2_0 er over den kritiske grænse chi2_alfa, så
```

```
% forkaster vi nulhypotesen om, at bremsernes køleevne kan modelleres med
% en normalfordeling.


%% f: Beregning af teststørrelsen og konklusion
chi2_0 = sum(((O - E) .^ 2) ./ E)

% Da teststørrelsen chi2_0 = 12.5703 er større end den kritiske grænse på
% chi2_alfa = 5.9915 forkaster vi hypotesen om, at bremsernes køleevne er
% normalfordelt.
```

Opgave 3 – Omgangstider

a. Middelværdi, varians og standardafvigelse for de to stikprøver for bremsefabrikaterne Brembo og Carbon Industries (CI) er vist i tabellen nedenfor:

	Brembo	CI
Stikprøvemiddelværdi	92.7978	92.9125
Stikprøvevarians	0.6726	6.8375
Stikprøvestandardafvigelse	0.8201	2.6149

b. 95% konfidensinterval for Brembo: [92.4140; 93.1817]
95% konfidensinterval for CI: [91.6888; 94.1363]

Forskelle på Brembo og CI: Der er ikke stor forskel på de gennemsnitlige omgangstider med de to bremsefabrikater (hhv. 92.7978 og 92.9125), men der er ret stor forskel på varianserne (hhv. 0.6726 og 6.8375). Dermed er der også ret stor forskel på standardafvigelserne, da de er kvadratroden af varianserne. Konfidensintervallet for CI er bredere end for Brembo, da bredden afhænger af standardafvigelsen, som er mere end 3 gange så stor for CI. Omgangstiderne er således mere ensartede med Brembo end med CI i denne test.

c. Hypotesetest for forskel på varians i to stikprøver (metode nummer6 i vores flowdiagram)
Nulhypotesen er, at populationsvariansen er ens for Brembo og CI, alternativhypotesen er, at de er forskellige:

$$H_0\text{:}\;\; \sigma^2_{\text{Brembo}} = \sigma^2_{\text{CI}}$$
$$H_a\text{:}\;\; \sigma^2_{\text{Brembo}} \neq \sigma^2_{\text{CI}}$$

d. Formlen for teststørrelsen:

$$F_0 = \frac{s^2_{\text{Brembo}}}{s^2_{\text{CI}}}$$

hvor s^2_{Brembo} og s^2_{CI} er stikprøvevarianserne for omgangstider med hhv. Brembo og CI bremser. Teststørrelsen er F-fordelt med n-1 frihedsgrader i både tæller og nævner (da vi har samme stikprøvestørrelse i de to stikprøver, nemlig n = 20).

Lærebogen V&K anbefaler, at stikprøven med størst varians sættes i tælleren, så teststørrelsen bliver større end 1. Det skyldes, at bogens sandsynlighedstabel for F-fordelingen kun kan tage værdier over 1 for at spare plads. Det behøver vi ikke, da vi bruger MatLab, og her er det gjort omvendt, så $F_0 < 1$.

e. Kritisk region, teststørrelsens værdi og konklusion
Det er en to-sidet test , da vi blot tester, om der er forskel på varianserne. Derfor forkastes nulhypotesen, hvis teststørrelsen er under F_{nedre} eller over $F_{\text{øvre}}$, som beregnes sådan:

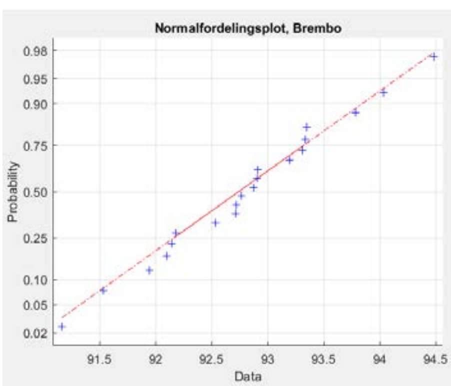
$$F_{\text{nedre}} = \text{finv}\left({}^{\alpha}/_{2}, n-1, n-1\right) = 0.3958$$
$$F_{\text{øvre}} = \text{finv}\left(1 - {}^{\alpha}/_{2}, n-1, n-1\right) = 2.5265$$

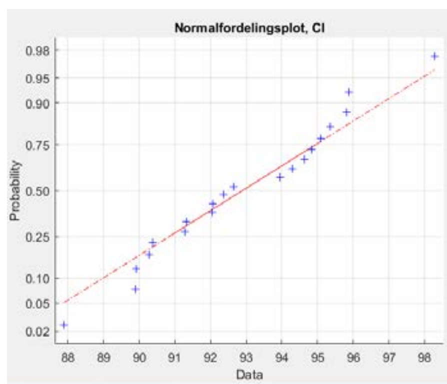
Teststørrelsens værdi:

$$F_0 = \frac{s_{\text{Brembo}}^2}{s_{\text{CI}}^2} = \frac{0.6726}{6.8375} = 0.0984$$

Konklusion: Da teststørrelsen $F_0 = 0.0984$ er mindre end den lave, kritiske værdi, $F_{\text{nedre}} = 0.3958$, forkaster vi nulhypotesen. Med andre ord viser stikprøverne, at der på 5 % signifikansniveau er forskel på variansen af omgangstiderne med de to bremsefabrikater.

f. Hypotesetesten for varianser bygger på antagelsen, at observationerne af omgangstider er normalfordelte. Det er altså en stærkere antagelse end f.eks. den Centrale Grænseværdisætning, hvor det bare antages, at fordelingen er 'pæn' eller stikprøvestørrelsen er stor. Vi kan teste antagelsen med normalfordelingsplot:





Begge normalfordelingsplots er nogenlunde lineære, så jeg mener at antagelsen om normalfordelte data holder.

MatLab kode til opgave 2

```
%% M4STI1 2017E Opgave 3: Omgangstider med to bremsefarbrikater
clc; clear; close all; format compact;

%% Indlæs og behandl data
D = xlsread('Data_M4STI1_2017E.xlsx','K:L')
brembo = D(:,1)
ci = D(:,2)
n = size(D,1) % Antal omgangstider per bremsefabrikat


%% a: Gennemsnit, varians, standardafvigelse
y_streg_brembo = mean(brembo)   % 92.7978
y_streg_ci = mean(ci)           % 92.9125
s2_brembo = var(brembo)         % 0.6726
s2_ci = var(ci)                 % 6.8375
s_brembo = std(brembo)          % 0.8201
s_ci = std(ci)                  % 2.6149


%% b: Konfidensinterval
alfa = 0.05
df = n - 1
t_alfahalve = tinv(alfa/2, df)
KI_bredde_brembo = -t_alfahalve*s_brembo/sqrt(n)
KI_min_brembo = y_streg_brembo - KI_bredde_brembo
KI_max_brembo = y_streg_brembo + KI_bredde_brembo
% 95% konfidensinterval for Brembo: [92.4140; 93.1817]

KI_bredde_ci = -t_alfahalve*s_ci/sqrt(n)
KI_min_ci = y_streg_ci - KI_bredde_ci
KI_max_ci = y_streg_ci + KI_bredde_ci
% 95% konfidensinterval for CI: [91.6888; 94.1363]

% Forskelle på Brembo og CI: Der er ikke stor forskel på de gennemsnitlige
% omgangstider med de to bremsefabrikater (hhv. 92.7978 og 92.9125), men
% der er ret stor forskel på varianserne (hhv. 0.6726 og 6.8375). Dermed er
% der også ret stor forskel på standardadafvigelserne, da de er
% kvadratroden af varianserne.
% Konfidensintervallet for CI er bredere end for Brembo, da bredden
% afhænger af standardafvigelsen, som er mere end 3 gange så stor for CI.
% Omgangstiderne er således mere ensartede med Brembo end med CI i denne
test.


%% c: Hypotesetest for varianser af to stikprøver
% Hypoteser:
% H_0: sigma2_brembo = sigma2_ci
```

```
% H_a: sigma2_brembo <> sigma2_ci
% hvor sigma2_brembo og sigma2_ci er populationsvariansen for omgangstider
% med hhv. Brembo og CI bremser


%% d: Formel for teststørrelsen og dens fordeling
% F_0 = s2_brembo/s2_ci
% hvor s2_brembo og s2_ci er stikprøvevarianserne for omgangstider med hhv.
% Brembo og CI bremser.
% Teststørrelsen er F-fordelt med n-1 frihedsgrader i både tæller og
% nævner (da vi har samme stikprøvestørrelse i de to stikprøver, nemlig
% n = 20).

% Lærebogen V&K anbefaler, at stikprøven med størst varians sættes i
tælleren,
% så teststørrelsen bliver større end 1. Det skyldes, at bogens
% sandsynlighedstabel for F kun kan tage værdier over 1 for at spare plads.
% Det behøver vi ikke, da vi bruger MatLab, og her har jeg gjort det
% omvendt, så F_0 < 1


%% e: Kritisk region, teststørrelsens værdi og konklusion
% Det er en to-sidet test (vi tester blot om der er forskel på
% varianserne), så nulhypotesen forkastes, hvis teststørrelsen er under
% F_alfahalve_nedre eller over F_alfahalve_oevre, som beregnes sådan:

F_alfahalve_nedre = finv(alfa/2, n-1, n-1)      % 0.3958
F_alfahalve_oevre = finv(1-alfa/2, n-1, n-1)    % 2.5265

% Teststørrelsens værdi:
F_0 = s2_brembo/s2_ci       % 0.0984

% Konklusion:
% Da F_0 < F_alfahalve_nedre forkastes nulhypotesen.
% Med andre ord viser stikprøverne, at der på 5 % signifikansniveau er
% forskel på variansen af omgangstiderne med de to bremsefabrikater.


%% f: Antagelser
% Hypotesetesten for varianser bygger på antagelsen, at observationerne af
% omgangstider er normalfordelt. Det er altså en stærkere antagelse end
% f.eks. den Centrale Grænseværdisætning, hvor det bare antages at
% fordelingen er 'pæn' eller stikprøvestørrelsen er stor.
% Vi kan teste antagelsen med normalfordelingsplot:

figure(1)
normplot(brembo)
title('Normalfordelingsplot, Brembo')
```

```
figure(2)
normplot(ci)
title('Normalfordelingsplot, CI')

% Begge normalfordelingsplots er nogenlunde lineære, så jeg mener at
% antagelsen holder.
```