Bemærk følgende:

Bilagsfiler: `Rejsetider.m`, `totalrejsetid.p`, `subopttotalrejsetid.m`, `TidevandAarhusJanuar2023.m` (kan downloades fra Digital Eksamen).

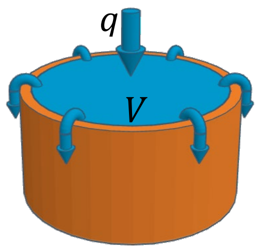
Plot: Hvis besvarelsen af en given delopgave inkluderer et plot, skal dette forsynes med passende titel og aksetekster (inkl. enhed hvis relevant) samt *grid*. I den enkelte delopgave kan der være anført yderligere krav til et givet plot, og disse skal naturligvis også efterkommes.

Talresultater: Svarresultater skal angives med et passende antal decimaler/betydende cifre, og enheden skal anføres, hvis relevant.

MATLAB-kode: MATLAB-kode og -kommandoer anvendt i forbindelse med besvarelse af opgaverne skal indsættes som tekst i svardokumentet (ikke som billede, fx skærmklip).
Det er tilladt at anvende MATLAB-kode fra undervisningen, men i så fald skal koden gengives i besvarelsen.

OPGAVE 1

En åben beholder med volumen V [L] er fyldt til randen med en vandig opløsning af saltet natriumacetat (fig. 1.1). Saltopløsningen, der indeholder m_0 [kg] salt, ønskes udskiftet med rent vand. For at undgå at tømme beholderen, inden der fyldes vand i, tilføres rent vand til opløsningen, så denne gradvist fortyndes.



Figur 1.1: Fortynding af saltopløsning.

Vandet tilføres med en massestrøm på q [kg/s]. Under fortyndingsprocessen får overskydende væske lov at løbe ud over kanten af beholderen.

Tilførslen af vand begynder til tidspunktet $t = 0$ s, og som tiden går, vil massen, $m(t)$ [kg], af salt i beholderen blive reduceret. Under passende antagelser kan $m(t)$ modelleres vha. følgende differentialligning med tilhørende begyndelsesbetingelse:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{qm}{m + \rho_v V}\ , \quad m(0) = m_0\ , \quad \text{hvor } m \geq 0; t \geq 0;\ q \geq 0; \rho_v > 0; V > 0$$

I opgaven regnes med følgende værdier af konstanterne i modellen:

$q = 0{,}5$ kg/s, $V = 120$ L, $m_0 = 30$ kg og $\rho_v = 1{,}0$ kg/L (densitet af rent vand).

(1a)

Anvend Eulers metode til at løse differentialligningen fra $t = 0$ til 720 s med tidsskridt på 120 s.
Besvarelsen skal præsenteres både i form af tal (fx i en tabel) og i form af et plot.
Det skal specifikt angives, hvor meget salt (kg) der ifølge løsningen er tilbage i beholderen til tidspunktet $t = 240$ s.
Det er valgfrit, om man vil anvende MATLAB eller fx regneark til løsning af opgaven.

(1b)

Hvis differentialligningen løses både analytisk og med Eulers metode fra $t = 0$ til 540 s med tidsskridt på henholdsvis 60 s og 180 s, fås følgende resultater til tidpunktet $t = 540$ s:

	Analytisk løsning	Løsning med Eulers metode $h = 60$ s	$h = 180$ s
m (kg) til $t = 540$ s	3,929	3,021	1,043
Fejl (kg)	0,000	0,908	2,886

Altså, hvis tidsskridtet øges fra 60 til 180 s, øges Eulerfejlen fra 0,908 til 2,886 kg.

Sammenlign øgningen i fejlen med øgningen i tidsskridtet. Svarer den relative øgning i fejlen til det forventede? Giv en forklaring, helst med relevant beregning.

(1c)

Hvis differentialligningen løses med Eulers metode fra $t = 0$ til 2880 s med tidsskridt på 720 s, fås følgende resultat:

t (s)	0	720	1440	2160	2880
m (kg)	30,00	-42,00	151,85	-49,24	201,28

Resultatet er åbenlyst forkert, da der for $t > 0$ skiftevis estimeres negative masser og masser, der i tiltagende grad overstiger begyndelsesværdien.

Hvilken betegnelse benyttes om Eulers metode, når den fører til et fejlagtigt resultat af ovenstående karakter?
Forklar, hvorfor Eulers metode fejler i den pågældende situation.
Forklar specifikt, baseret på en beregning, hvorfor der estimeres en negativ masse til tidspunktet $t = 720$ s.

(1d)

Anvend en fjerdeordens Runge-Kuttametode til at løse differentialligningen fra $t = 0$ til 720 s med tidsskridt på 120 s.
I besvarelsen skal løsningsresultatet præsenteres både i form af tal (fx i en tabel) og i form af et plot.
Det skal specifikt angives, hvor meget salt (kg) der ifølge løsningen er tilbage i beholderen til tidspunktet $t = 240$ s.
Det er valgfrit, om man vil anvende MATLAB eller fx regneark til løsning af opgaven.

OPGAVE 2

Lad der været givet følgende ligningssystem,

$$\begin{aligned}(a + b\,y)^2 - (d - c\,x)^2 + k\,z + (c\,x + b\,y)\,(c\,x - by) &= 0\\ (b\,x^{-1} + c)\,x + a\,z^2 - b\,x + d\,y - a\,(c - z)^2 &= 0\\ c\,z - d\,y + k\,x &= b\end{aligned}$$

hvor x, y og z er ubekendte
a, b, c, d og k er konstanter
$x \neq 0$

(2a)

Vis, at dette tilsyneladende ulineære ligningssystem faktisk er lineært (skal vises symbolsk, dvs. konstanterne må ikke erstattes med talværdier).

(2b)

Da ligningssystemet er lineært, kan det opstilles på matrixform, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, hvor $\mathbf{X}$ er en søjlevektor indeholdende de ubekendte, $\mathbf{X} = [x\ y\ z]^T$, mens $\mathbf{A}$ er en koefficientmatrix, og $\mathbf{B}$ er en søjlevektor af konstanter.

Hvad bliver **A** og **B** for det givne ligningssystem? Svar symbolsk, dvs. konstanterne må ikke erstattes med talværdier.

(2c)

Antag nu, at $a = -1,\ b = 4,\ c = 2,\ d = -3$ og $k = 3$.

Bestem x, y, og z ved at løse matrixligningen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ med hensyn til $\mathbf{X}$.

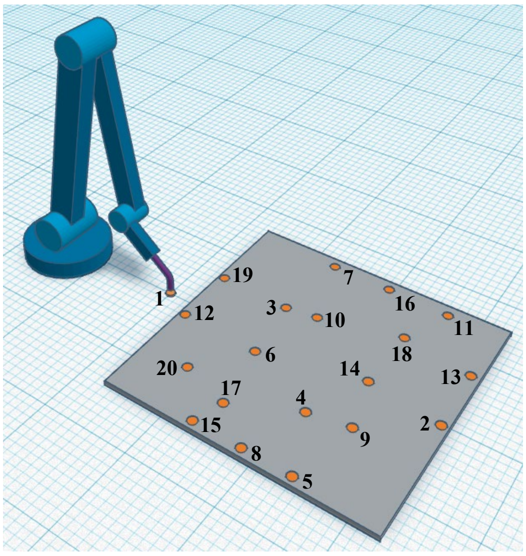
PS! Hvis man i delopgave (2b) ikke har fået bestemt matricerne **A** og **B**, kan man i stedet benytte følgende (angiver ikke det korrekte svar på delopgave (2b)):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k\,b & -4\,c & a + b \\ 2\,a & a - c & 4(k - b) \\ k & -d & c \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4\,k - b \\ 4 - 4\,k \\ b \end{bmatrix}$$

OPGAVE 3

Der betragtes en robotsvejser, der skal punktsvejse 19 punkter på en plan flade (punkterne 2-20 i figur 3.1). Svejsejobbet udføres ved, at robotten bevæger svejsehovedet fra sit hjempunkt (punkt 1) til et svejsepunkt, som svejses, derefter til et nyt svejsepunkt, som svejses osv. Når alle 19 svejsepunkter er svejst, bevæger svejsehovedet sig tilbage til hjempunktet.

Hvilken rækkefølge, svejsepunkterne 2-20 skal svejses i, kan vælges frit, men det ligger fast, at robotten skal starte og slutte sit job i punkt 1 (hjempunktet).



Figur 3.1: Punktersvejsning med robot.

Den tid, det tager svejsehovedet at bevæge sig fra ét punkt til et nyt punkt vil vi her betegne rejsetid. Rejsetiderne for det aktuelle tilfælde er vist i tabel 3.1, og de kan desuden downloades fra Digital Eksamen via filen `Rejsetider.m`, hvori tiderne er defineret som en MATLAB-matrix med navnet `rejsetider`. Bemærk, at matricen er symmetrisk.

Robottens samlede rejsetid i forbindelse med et svejsejob afhænger den rækkefølge, som de 19 svejsepunkter svejses i.

Tabel 3.1: Rejsetider mellem parvise punkter (sekunder)

Fra punkt \ Til punkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,0	2,4	1,0	1,7	2,1	1,0	1,4	1,7	2,0	1,2	2,3	0,3	2,5	1,8	1,4	1,8	1,3	1,9	0,5	0,9
2	2,4	0,0	1,6	0,9	1,2	1,5	1,8	1,4	0,6	1,3	1,2	2,1	0,6	0,6	1,7	1,5	1,5	0,9	2,2	1,9
3	1,0	1,6	0,0	1,1	1,7	0,6	0,7	1,5	1,3	0,3	1,3	0,8	1,5	1,0	1,4	0,9	1,1	1,0	0,6	1,0
4	1,7	0,9	1,1	0,0	0,6	0,7	1,7	0,6	0,3	1,0	1,6	1,3	1,3	0,6	0,8	1,6	0,6	1,1	1,6	1,0
5	2,1	1,2	1,7	0,6	0,0	1,2	2,2	0,4	0,6	1,6	2,1	1,7	1,7	1,1	0,8	2,1	0,8	1,6	2,1	1,2
6	1,0	1,5	0,6	0,7	1,2	0,0	1,3	0,9	1,0	0,6	1,6	0,7	1,6	0,9	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	0,5
7	1,4	1,8	0,7	1,7	2,2	1,3	0,0	2,1	1,8	0,7	1,0	1,4	1,5	1,3	2,1	0,5	1,8	1,0	1,0	1,7
8	1,7	1,4	1,5	0,6	0,4	0,9	2,1	0,0	0,8	1,5	2,2	1,4	1,9	1,1	0,4	2,1	0,4	1,7	1,8	0,8
9	2,0	0,6	1,3	0,3	0,6	1,0	1,8	0,8	0,0	1,1	1,5	1,7	1,1	0,5	1,1	1,6	0,9	1,0	1,8	1,3
10	1,2	1,3	0,3	1,0	1,6	0,6	0,7	1,5	1,1	0,0	1,1	1,1	1,3	0,8	1,5	0,7	1,2	0,7	0,9	1,2
11	2,3	1,2	1,3	1,6	2,1	1,6	1,0	2,2	1,5	1,1	0,0	2,1	0,7	1,0	2,3	0,5	2,0	0,5	1,8	2,2
12	0,3	2,1	0,8	1,3	1,7	0,7	1,4	1,4	1,7	1,1	2,1	0,0	2,2	1,5	1,1	1,7	1,0	1,7	0,6	0,6
13	2,5	0,6	1,5	1,3	1,7	1,6	1,5	1,9	1,1	1,3	0,7	2,2	0,0	0,8	2,1	1,1	1,9	0,6	2,1	2,1
14	1,8	0,6	1,0	0,6	1,1	0,9	1,3	1,1	0,5	0,8	1,0	1,5	0,8	0,0	1,3	1,1	1,1	0,6	1,6	1,3
15	1,4	1,7	1,4	0,8	0,8	0,8	2,1	0,4	1,1	1,5	2,3	1,1	2,1	1,3	0,0	2,1	0,3	1,8	1,6	0,5
16	1,8	1,5	0,9	1,6	2,1	1,4	0,5	2,1	1,6	0,7	0,5	1,7	1,1	1,1	2,1	0,0	1,9	0,6	1,4	1,9
17	1,3	1,5	1,1	0,6	0,8	0,6	1,8	0,4	0,9	1,2	2,0	1,0	1,9	1,1	0,3	1,9	0,0	1,6	1,4	0,4
18	1,9	0,9	1,0	1,1	1,6	1,2	1,0	1,7	1,0	0,7	0,5	1,7	0,6	0,6	1,8	0,6	1,6	0,0	1,6	1,7
19	0,5	2,2	0,6	1,6	2,1	0,9	1,0	1,8	1,8	0,9	1,8	0,6	2,1	1,6	1,6	1,4	1,4	1,6	0,0	1,1
20	0,9	1,9	1,0	1,0	1,2	0,5	1,7	0,8	1,3	1,2	2,2	0,6	2,1	1,3	0,5	1,9	0,4	1,7	1,1	0,0

(3a)

Programmér en MATLAB-funktion, `totalrejsetid`, der kan opgøre den samlede rejsetid i forbindelse med et svejsejob, hvor punkterne ”besøges” i en given rækkefølge. Herunder følger funktionens første linje samt valgfrie hint til de efterfølgende linjer:

```
function trt = totalrejsetid(rejsetider,pktfolge)
N = length(pktfolge);
trt = 0;
for …
  …
end
```

I funktionen betegner inputtet `rejsetider` den tidligere nævnte matrix indeholdende rejsetider mellem parvise punkter.
Inputtet `pktfolge` er en vektor indeholdende punktnumre svarende til den rækkefølge, punkterne ”besøges” i – dvs. `pktfolge = [1 … 1]`, hvor prikkerne (…) repræsenterer punktnumrene 2-20 i vilkårlig rækkefølge.
Outputtet `trt` er den samlede opgjorte rejsetid.

Besvarelsen skal indeholde den færdige funktion samt en afprøvning af funktionen, hvor henholdsvis matricen `rejsetider` og vektoren `pktfolge = [1 2 3 4 5`

> `6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 1]` anvendes som input. Angiv, hvilken værdi af `trt` afprøvningen resulterer i.

(3b)

Den samlede rejsetid i forbindelse med svejsejobbet ønskes reduceret ved at "besøge" svejsepunkterne i en mere optimal rækkefølge (suboptimal rækkefølge). Til det formål bruger vi funktionen, `subopttotalrejsetid`, som systematisk søger efter mere optimale løsninger ved gentagne gange at ombytte punktpar i rækkefølgevektoren. Processen afsluttes, når der ikke længere findes en ombytning, der forkorter rejsetiden.

Første linje i funktionen er som følger:

```
function [suboptpktfolge,subopttid] = subopttotalrejsetid(rejsetider,pktfolge0)
```

Den fulde version kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `subopttotalrejsetid.m`.

Funktionens input `rejsetider` er den tidligere nævnte matrix (fra `Rejsetider.m`). Inputtet `pktfolge0` er en vektor med en udgangsrækkefølge af punkterne.

Outputtet `suboptpktfolge` er den fundne suboptimale rækkefølgevektor, og outputtet `subopttid` er den tilhørende samlede rejsetid.

Hvis funktionen afprøves med matricen `rejsetider` og vektoren

```
pktfolge0 = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 1]
```

som input, fås følgende som output:

```
suboptpktfolge = [19 1 1 12 15 8 5 4 6 10 18 11 13 2 9 14 16 7 3 20 17]
```

```
subopttid = 11.9000.
```

Vektoren `suboptpktfolge` angiver imidlertid ikke en valid rækkefølge, da punkt 1 er blevet flyttet væk fra henholdsvis første og sidste plads i rækkefølgen.

> Foretag ændringer af funktionen `subopttotalrejsetid`, så der ikke bliver flyttet på første og sidste punkt i rækkefølgevektoren i forhold til, hvordan de står i `pktfolge0`.
>
> I besvarelsen skal angives den tilrettede funktion. Desuden skal angives resultater opnået ved at benytte funktionen med matricen `rejsetider` og vektoren

```
pktfolge0 = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 1]
```

som input.

PS! Hvis delopgave (3a) ikke er besvaret, vil man komme til at mangle funktionen `totalrejsetid`. Som erstatning kan man fra Digital Eksamen downloade filen `totalrejsetid.p`, som indeholder en ”krypteret”, men fungerende version af funktionen.

OPGAVE 4

Tidevand er betegnelsen for havoverfladens vedvarende variation mellem højvande (flod) og lavvande (ebbe). Den periodiske variation i tiltrækningen betyder, at skiftet fra ebbe til flod og omvendt altid tager omkring 6,2 timer, dvs. der er ca. 12,4 timer mellem hver højvande og ligeledes ca. 12,4 timer mellem hver lavvande.

I denne opgave skal der anvendes beregnede tidevandsværdier for farvandet ud for Aarhus. Vandstandsværdierne er i centimeter (±) og kan downloades fra Digital Eksamen i form af filen `TidevandAarhusJanuar2023.m`, hvori værdierne er defineret som en MATLAB-vektor `y`.

I datasættet er der værdier for hver tredje time fra og med 1. januar 2023 kl. 00:00 til og med 30. januar 2023 kl. 21:00.

(4a)

Plot tidevandsværdierne som funktion af tiden, idet tiden regnes i timer fra 1. januar 2023 kl. 00:00.

Værdierne svinger med en ret fast periodelængde. Estimér den gennemsnitlige periodelængde (timer) ved at regne på relevante værdier aflæst på plottet.
Besvarelsen skal indeholde plottet og den estimerede periodelængde inklusive udregning(er).

(4b)

Anvend MATLAB til at bestemme og plotte powerspektret for serien af tidevandsværdier. Frekvensen skal regnes i enheden "svingninger pr. time". I besvarelsen skal såvel anvendt MATLAB-kode som powerplottet anføres.

(4c)

Bestem på grundlag af powerspektret den dominerende frekvens i tidevandssvingningerne, og bestem desuden den periodelængde (timer), der svarer til den dominerende frekvens.

PS! Hvis delopgave (4b) ikke er besvaret, bedes man ud fra en principskitse af, hvordan powerplottet kunne se ud, vise, hvordan den dominerende frekvens og tilhørende periodelængde kan bestemmes.

OPGAVE 5

Ligningen $x^2e^{-0,5x^2} = 0,3x + 0,15$ har tre reelle løsninger for x, der alle ligger mellem -4 og 4.

(5a)

Anvend MATLAB til ved hjælp af bisektionsmetoden at bestemme den midterste af de tre løsninger med en relativ approksimativ fejl på højest 0,1%.
Benyt et selvvalgt startinterval for bisektionsbestemmelsen; begrund valget, fx med baggrund i et passende plot.
Angiv den fundne løsning med sikkert bestemte decimaler efter afrunding.