Bemærk følgende:

Bilagsfiler: `AfstandeTeknikereKunder.m`, `MinimerSamletAfstand.m`, `samletafst.p`, `rk4system.m`, `Skibspositioner.m` (kan downloades fra Digital Eksamen).

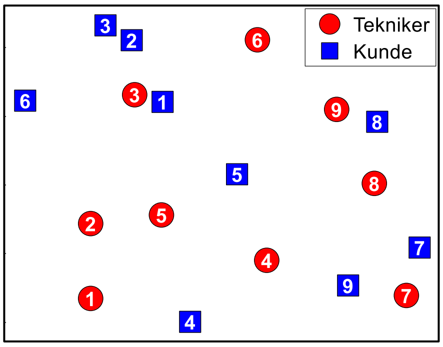
Plot: Hvis besvarelsen af en given delopgave inkluderer et plot, skal dette forsynes med passende titel og aksetekster (inkl. enhed hvis relevant) samt *grid*. I den enkelte delopgave kan der være anført yderligere krav til et givet plot, og disse skal naturligvis også efterkommes.

Talresultater: Svarresultater skal angives med et passende antal decimaler/betydende cifre, og enheden skal anføres, hvis relevant.

MATLAB-kode: MATLAB-kode og -kommandoer anvendt i forbindelse med besvarelse af opgaverne skal indsættes som tekst i svardokumentet (ikke som billede, fx skærmklip).

OPGAVE 1

En virksomhed råder over ni servicecentre fra hvilke, man udsender serviceteknikere til kunder, der har købt virksomhedens maskiner. En given dag er der ni forskellige kunder (1, 2, …, 9), der har behov for besøg af en tekniker. Der er i alt ni teknikere til rådighed (1, 2, …, 9), én på hvert servicecenter, og hver tekniker skal derfor tildeles netop én af de ni kunder. Teknikernes og kundernes indbyrdes placering samt transportafstandene mellem dem fremgår af henholdsvis figur 1 og tabel 1.



Figur 1: "Geografisk" placering af teknikere og kunder.

Tabel 1: Transportafstande (km) mellem teknikere og kunder.

Tekniker \ Kunde	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	152	190	199	74	140	152	242	245	187
2	103	137	145	102	112	101	240	221	192
3	21	40	55	170	94	80	235	177	208
4	138	188	207	71	66	210	111	129	62
5	82	129	144	81	62	129	189	171	145
6	82	91	111	211	99	174	192	105	191
7	226	273	294	158	151	311	36	128	43
8	165	205	227	167	100	261	57	45	77
9	127	157	179	188	86	226	117	31	128

Data i tabel 1 kan downloades fra Digital Eksamen via M-filen `AfstandeTeknikereKunder.m`, hvori afstandene er defineret i form af matricen `afstande`.

Opgaven drejer sig overordnet om at tildele kunderne til teknikerne på en sådan måde, at teknikerne samlet skal transportere sig kortest muligt for at nå ud til de ni kunder. Derfor skal der først programmeres en funktion til beregning af samlet transportafstand ved given kundetildeling.

(1a)

Skriv en MATLAB-funktion, `samletafst`, der kan udregne den samlede transportafstand, `sa`, til kunderne ved en given tildeling af kunder til teknikere. Funktionen skal altså kunne beregne:

$$\mathrm{sa} = \sum_{\mathrm{Tekniker}=1}^{n} \text{transportafstand fra tekniker til kunde, der er tildelt den pågældende tekniker}$$

hvor $n = 9$ i det aktuelle tilfælde. Første linje i funktionen skal være:

```
function sa = samletafst(kundetildelt,afstande)
```

hvor inputargumentet `afstande` er afstandsmatricen, mens inputargumentet `kundetildelt` er en vektor, der angiver, hvordan kunderne er tildelt teknikerne. Eksempelvis svarer `kundetildelt = [8 3 6 1 7 9 4 2 5]` til, at tekniker 1 får tildelt kunde 8, tekniker 2 får tildelt kunde 3 osv.

Besvarelsen skal indeholde den færdiggjorte funktion, `samletafst`, samt resultatet opnået ved afprøvning af funktionen med følgende input: `kundetildelt = [8 3 6 1 7 9 4 2 5]` og `afstande =` tidligere nævnte afstandsmatrix.

(1b)
Følgende MATLAB-script kan bestemme den kundetildeling, `optkundetildelt`, der resulterer i den mindst mulige værdi af den samlede transportafstand, `minsamletafstand`:

```
AfstandeTeknikereKunder;          % Definér afstandsmatricen afstande
n = length(afstande);
tildelingsmuligh = perms(1:n);    % Generér alle tildelingsmuligheder
N = factorial(n);                 % Antal tildelingsmuligheder = n!
minsamletafstand = +inf;          % Sæt initielt min. afst. = uendelig
for i = 1:N
  kundetildelt = tildelingsmuligh(i,:);
  samletafstand = samletafst(kundetildelt,afstande);
  if samletafstand < minsamletafstand
    optkundetildelt = kundetildelt;
    minsamletafstand = samletafstand;
  end
end
optkundetildelt                   % Vis indhold af optkundetildelt
minsamletafstand                  % Vis værdi af minsamletafstand
```

Scriptet kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `MinimerSamletAfstand.m`. Bemærk, at scriptet forudsætter, at funktionen `samletafst` fra delopgave (1a) allerede er udarbejdet. Hvis dette ikke er tilfældet, kan man som erstatning downloade filen `samletafst.p` fra Digital Eksamen (indeholder en "krypteret", men fungerende version af funktionen).

Resultatet ved kørsel af ovenstående script bliver: `optkundetildelt = [4 6 3 5 1 2 9 7 8]` og `minsamletafstand = 600`. Det antages imidlertid, at virksomheden vil undgå, at tekniker 1 udsendes til kunde 4, men samtidig sikre, at netop tekniker 4 udsendes til kunde 7. Målet er nu at bestemme den kundetildeling, der under disse betingelser resulterer i mindst mulig samlet transportafstand.

Tilføj kode i scriptets `if`-linje, der sikrer, at tekniker 1 ikke tildeles kunde 4, men samtidig sikrer, at netop tekniker 4 tildeles kunde 7. Besvarelsen skal indeholde det redigerede script samt det resultat, der opnås ved kørsel af scriptet (indhold af `optkundetildelt` og `minsamletafstand`).

OPGAVE 2

I en given butikskæde har man vedrørende en bestemt vare erfaring for, at salget, S [enheder/uge], og lagerbeholdningen, B [enheder], varierer over tid t [uger] ifølge to koblede differentialligninger:

$$S'(t) = a\,(P_{\text{midl}} - P_{\text{max}} + k\,B(t)), \quad S(0) = S_0$$

$$B'(t) = L_{\text{max}} e^{-d\,B(t)} - S(t), \qquad B(0) = B_0$$

I ligningerne indgår følgende konstanter:

P_{midl} [kr./enhed] er markedets middelsalgspris for den pågældende vare.

$P_{\max}$ [kr./enhed] er det maksimale niveau, som butikskæden vil hæve salgsprisen til.

$L_{\max}$ [enheder/uge] er det maksimale antal enheder, butikskæden køber til lager pr. uge (finder sted i uger, hvor lagerbeholdningen er gået i nul).

a er en positiv proportionalitetskonstant for, hvordan salget forventes øget, hvis salgsprisen sænkes.

k er en positiv proportionalitetskonstant for, hvordan butikskæden vil sænke salgsprisen, hvis lagerbeholdningen øges.

d er en positiv konstant for, hvordan butikskæden reducerer det ugentlige køb til lager ved stigende lagerbeholdning.

S_0 [enheder/uge] er det ugentlige salg til tidspunktet $t = 0$.

B_0 [enheder] er lagerbeholdningen til tidspunktet $t = 0$.

I opgaven benyttes følgende værdier af konstanterne: $P_{\text{midl}} = 185$; $P_{\max} = 214$; $L_{\max} = 125$; $a = 1{,}2$; $k = 1{,}3$; $d = 0{,}03$; $S_0 = 24$; $B_0 = 66$.

(2a)

Benyt Eulers metode til at løse differentialligningssystemet fra $t = 0$ til 5 uger med et tidsskridt på 0,25 uge. I besvarelsen skal løsningsværdierne af S og B angives for alle tidspunkter, $t = 0{,}00, 0{,}25, 0{,}50, \dots, 5{,}00$ uger. Angiv desuden det tidspunkt, hvor salget ifølge løsningen er størst samt antal solgte enheder pr. uge på det pågældende tidspunkt.

PS! Det er valgfrit, om man vil anvende MATLAB eller fx regneark til løsning af opgaven.

(2b)

Benyt en fjerdeordens Runge-Kutta-metode til at løse differentialligningssystemet fra $t = 0$ til 5 uger med et tidsskridt på 0,25 uge. Løsningen skal gennemføres med MATLAB-funktionen `rk4system`, som har været anvendt i undervisningen (funktionen kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `rk4system.m`). Besvarelsen skal indeholde benyttede MATLAB-kommandoer og opnåede løsningsresultater (output fra funktionen `rk4system`). Angiv desuden det tidspunkt, hvor salget ifølge løsningen er størst samt antal solgte enheder pr. uge på det pågældende tidspunkt. Kommentér endvidere hvorvidt løsningsresultatet i delopgave (2a) eller (2b) er mest troværdigt.

OPGAVE 3

Lad være givet følgende ligningssystem med ubekendte x_1, x_2 og x_3:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &= 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= 0 \\ f_3(x_1,x_2,x_3) &= 0 \end{aligned} \quad \text{hvor} \quad \begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt{x_1^2+1} - x_2x_3 - 2 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1\,(x_2-2)^2 + 2x_3 - 2 \\ f_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 \end{aligned}$$

(3a)

Bestem Jacobi-matricen, J, svarende til vektorfunktionen

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \\ f_3(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix}$$

Forklar, hvordan man ud fra Jacobi-matricen kan se, at ligningssystemet er ulineært.

PS! Hvis delopgave (3a) ikke besvares, kan man benytte følgende ikke korrekte, men brugbare Jacobi-matrix, ved besvarelse af den resterende del af opgaven:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -0{,}02x_1 & -x_2 & 2x_3 \\ -0{,}6 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

(3b)
Hvis man vil anvende Newton-Raphsons metode til at finde en løsning til ligningssystemet, har man brug for et startgæt på løsningen for at kunne påbegynde iterationsprocessen.

Forklar, hvorfor startgættet $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ikke er anvendeligt for det aktuelle ligningssystem.

(3c)
Benyt Newton-Raphsons metode til at bestemme en løsning til ligningssystemet, idet der anvendes et startgæt på $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, og idet der gennemføres seks iterationer. Opgaven skal løses ved brug af MATLAB. Besvarelsen skal indeholde anvendt MATLAB-kode samt den fundne løsning angivet med sikkert bestemte decimaler (afrundet).

OPGAVE 4

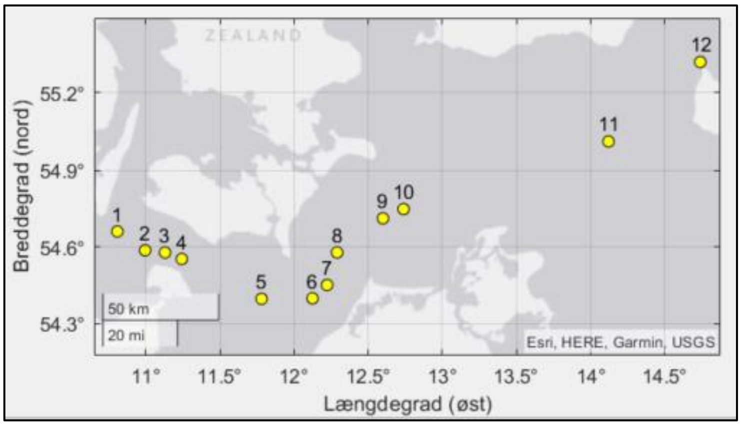
I perioden 23. august til 3. september 2021 sejlede tankskibet Madrid Spirit fra Cove Point (USA) til Klaipeda (Litauen). Den 2. september passerede skibet syd om Lolland-Falster og videre nord om Bornholm. Figur 2 viser 12 positioner på denne del af sejladsen, og i tabel 2 er samme positioner (længdegrad, breddegrad) listet i decimalgrader. De anførte positionsdata kan desuden downloades fra Digital Eksamen i form af et MATLAB-script med navnet `Skibspositioner.m`, hvori længde- og breddegrader er defineret i henholdsvis vektorer `lgd` og `brd`.

Denne opgave drejer sig om at "udfylde" hele sejlruten mellem position 1 og 12 ved at anvende interpolation til at estimere mellemliggende positioner. I den forbindelse skal breddegrad opfattes som værende funktion af længdegrad.

Tabel 2: Skibspositioner (dec.grd.)

Position nummer	Længdegrad (øst)	Breddegrad (nord)
1	10,8086°	54,6616°
2	10,9961°	54,5881°
3	11,1300°	54,5794°
4	11,2429°	54,5542°
5	11,7808°	54,3979°
6	12,1242°	54,4002°
7	12,2231°	54,4525°
8	12,2897°	54,5797°
9	12,5993°	54,7128°
10	12,7380°	54,7489°
11	14,1194°	55,0114°
12	14,7380°	55,3174°

(4a)
Anvend MATLAB til at bestemme et polynomium af netop tilstrækkelig høj grad til, at det går igennem de 12 positioner. Plot derefter de 12 positioner som symboler og polynomiet som kurve (i et fælles koordinatsystem). Kommentér, hvorvidt polynomiet giver et godt estimat af sejlrutens forløb. Anfør i besvarelsen anvendt MATLAB-kode/-kommandoer, de fundne polynomiumskoefficienter (ekskl. enhed), plottet samt kommentarer.



Figur 2: Skibspositioner (datakilde: marinetraffic.com).

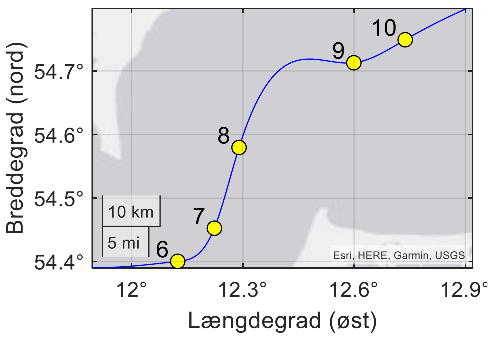
(4b)
Det oplyses, at de 12 opgivne positioner markerer steder på sejlruten, hvor skibet har været i færd med at foretage betydelige kursændringer. Derfor antages det i denne delopgave, at skibet har fulgt rette linjestykker mellem positionerne.

> Anvend MATLAB til at interpolere lineært mellem de 12 positioner. Plot de 12 positioner som symboler og det interpolerede forløb som linjestykker i et fælles koordinatsystem. Anfør i besvarelsen anvendt MATLAB-kode/-kommandoer samt det producerede plot. Beregn og anfør desuden den lineært interpolerede værdi af breddegraden ved en længdegrad på 12,4000°.

(4c)
Da tankskibet ikke kan foretage momentane kursændringer, ønskes der i stedet for lineær interpolation anvendt en interpolationsform, der giver et glattere forløb.

> Anvend MATLAB til at interpolere mellem de 12 positioner ved brug af en kubisk *spline* med *not-a-knot* endebetingelser. Plot de 12 positioner som symboler og det interpolerede forløb som kurve i et fælles koordinatsystem. Anfør i besvarelsen anvendt MATLAB-kode/-kommandoer samt det producerede plot. Beregn og anfør desuden den interpolerede værdi af breddegraden ved en længdegrad på 12,4000°.

(4d)
Som tidligere nævnt, er de 12 positioner i tabel 2 kendetegnet ved, at der omkring disse er foretaget betydelige kursændringer. Dette bliver ikke korrekt modelleret ved interpolation med en kubisk *spline* med *not-a-knot* endebetingelser, idet den interpolerede kurve har urealistiske udsving mellem de registrerede positioner. Et grelt eksempel er mellem position 8 og 9, hvilket fremgår af figur 3.

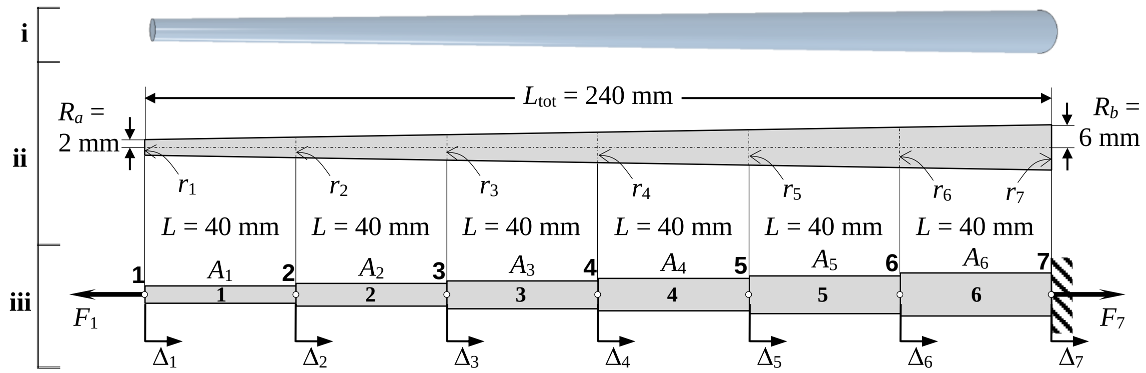


Figur 3: Skibspositioner og kubisk *spline*.

> Anvend MATLAB til at interpolere mellem de 12 positioner ved brug af en type kubisk *spline*, der minimerer udsving mellem positionerne. Plot de 12 positioner som symboler og det interpolerede forløb som kurve i et fælles koordinatsystem. Anfør i besvarelsen anvendt MATLAB-kode/-kommandoer samt det producerede plot. Beregn og anfør desuden den interpolerede værdi af breddegraden ved en længdegrad på 12,4000°.

OPGAVE 5

Der betragtes et massivt, konisk stålemne med cirkulært tværsnit og med længde $L_{\text{tot}} = 240$ mm (fig. 4). Stålemnets enderadier er henholdsvis $R_a = 2$ mm og $R_b = 6$ mm, og E-modulet er $E =$



Figur 4: Massivt, konisk stålemne (i) med givne dimensioner (ii) og opdeling i stangelementer (iii).

210 GPa. Med henblik på en *finite element*-beregning opdeles emnet i seks keglestubformede sektioner (fig. 4ii), som hver modelleres som et stangelement (fig. 4iii). Sektioner og stangelementer har alle samme længde ($L = 40$ mm). Stålemnet er i venstre ende (knude 1) påvirket af en kraft på $F_1 = 2000$ N (fig. 4iii) og er i højre ende (knude 7) fikseret, så der dér virker en reaktionskraft, F_7. Kraftpåvirkningen resulterer i vandrette forskydninger, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$, af de frie knuder. Der regnes positiv retning mod højre.

(5a)
Enderadierne af de keglestubformede sektioner betegnes $r_1, r_2, \dots, r_7$ (fig. 4ii), hvor $r_i = R_a + \frac{R_b - R_a}{6}(i-1), i = 1,2,\dots,7$, og tværsnitsarealerne af stangelementerne betegnes $A_1, A_2, \dots, A_6$ (fig. 4iii).

Benyt MATLAB til at beregne arealerne $A_1, A_2, \dots, A_6$, således at hvert stangelement har samme volumen som den tilsvarende keglestubformede sektion. Udregningerne ønskes gennemført vha. vektoriserede beregninger og/eller en løkkestruktur, som resulterer i en vektor `A` indeholdende de seks arealer. Det oplyses, at sektion nummer j fra venstre i figur 4ii har volumenet $V_{\text{sek}j} = \frac{\pi}{3}(r_j^2 + r_j r_{j+1} + r_{j+1}^2)L$, mens stangelement nummer j fra venstre i figur 4iii har volumenet $V_{\text{elm}j} = A_j L$, hvor $j = 1,2,\dots,6$.

(5b)
Hvis delopgave (5a) er løst korrekt, når man frem til følgende tværsnitsarealer af de seks stangelementer: $A_1 = 17{,}2206$ mm^2, $A_2 = 28{,}3907$ mm^2, $A_3 = 42{,}3533$ mm^2, $A_4 = 59{,}1085$ mm^2, $A_5 = 78{,}6562$ mm^2, $A_6 = 100{,}9964$ mm^2.

Bestem stivhedsmatricen, K, for stålemnet bestående af seks sammenføjede stangelementer (fig. 4iii).

PS! Såfremt man ikke har beregnet stivhedsmatricen i delopgave (5b), kan følgende alternativ anvendes i det følgende (er dog ikke lig med det rigtige svar på delopgave (5b)):

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 250 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 350 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 500 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -300 & 700 & -400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -400 & 900 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \text{MN/m}$$

(5c)
Beregn forskydningerne, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$, af de frie knuder.