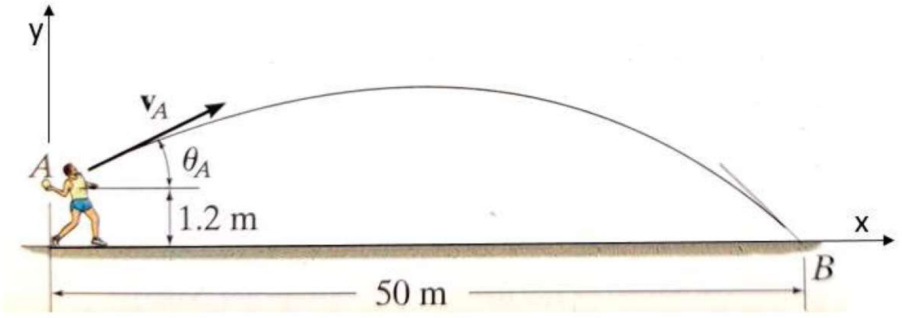
Eksamensæt

M3DYN1-03 Dynamik -- 09-06-2023

Eksamensnummer -- 185432



Figur 1

Figur 1 illustrerer at en bold kastes fra position A til position B. Tiden som det tager bolden at bevæge sig fra A til B er 2,5 s. Boldens banekurve kan beregnes som en kasteparabel, hvor luftmodstand negligeres. Tyngdeaccelerationen er g = 9,81 m/s^2

Følgende ønskes beregnet:

a) Størrelsen af boldens starthastighed v_A samt den vinkel θ_A som hastigheden har med vandret

Vi pladsere vores koordinat system med origo i kasteresn venstre fod

Vi op stiller to ligninger med to ubekendte.

ligning i x-retningen er

$x = x_0 + v_{x0} \cdot t$

ligning i y-retning

$y = y_0 + v_{y0} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$

```
clear all
clf
format shortg

t_f = 2.5;
g = 9.81;
s = 50;
s_0 = 0;
t = t_f;
syms v_0 theta
v_x0 = v_0 * cos(theta)
```

v_x0 = $v_0 \cos(\theta)$

```
v_y0 = v_0 * sin(theta)
```

v_y0 = $v_0 \sin(\theta)$

```
x = 50;
x_0 = 0;
y = 0;
y_0 = 1.2;

eq_sx = x == x_0 + v_x0*t
```

eq_sx =

$50 = \frac{5\, v_0 \cos(\theta)}{2}$

```
eq_sy = y == y_0 + v_y0*t - g*t^2 / 2
```

eq_sy =

$0 = \frac{5\, v_0 \sin(\theta)}{2} - \frac{4713}{160}$

```
[v_0_sol, theta_sol] = solve([eq_sx, eq_sy], [v_0, theta]);
v_0 = v_0_sol(1);
v_0_ = vpa(v_0_sol(1),5)
```

v_0_ = 23.213

```
theta_rad = theta_sol(1);
theta_rad_ = vpa(theta_sol(1),5)
```

theta_rad_ = 0.53238

```
theta_deg = vpa(rad2deg(theta_rad), 3)
```

theta_deg = 30.5

Således er start hastigheden

$v_0 = 23,2$ m/s^2

og vinklen

$\theta = 30,5°$

b) Størrelsen af boldens hastighed v_B ved punkt B umiddelbart før bolden rammer jorden

Dette findes ved at op stille hastigheds ligninger for x og y retningen

De to komposanter samles med pythagoras.

```
v_x = v_0 * cos(theta_rad);
vpa(v_x, 5)
```

ans = 20.0

```
v_y = v_0 * sin(theta_rad) - g * t;
vpa(v_y, 5)
```

ans = −12.742

```
v = sqrt(v_x^2 + v_y^2);
vpa(v, 5)
```

ans = 23.714

Vi får nu at hastigheden i x-reningen ikke ændres pga konstant hastighed, men i y-reningen har vi tyngde accelerationen som ændre hastigheden. I B får vi dermed resultaterne

$v_x B = 20 \text{ m/s}^2$

$v_y B = -12,7 \text{ m/s}^2$

$v = 23,7 \text{ m/s}^2$

Det ses at start hastigheden er en lille smule lavere end slut hastigheden. Dette giver god mening da vi slutter i et tyngdefelt der er længere nede end i A.

c) Koordinaterne (x_{top},y_{top}) til banekurvens toppunkt

top punktets tid findes når y-hastigheden er v_y0 = 0.

derefter kan denne tid indsættes i ligningerne for x og y pladsering.

```
syms t
eq_ytop = 0 == v_0 * sin(theta_rad) - g * t;

t_top = vpa(solve(eq_ytop, t),5)
```

t_top = 1.2010703363914373088685015290 52

```
x_top = x_0 + (v_0 * cos(theta_rad))*t_top;
vpa(x_top, 5)
```

ans = 24.021

```
y_top = y_0 + (v_0 * sin(theta_rad))*t_top - g*t_top^2 / 2;
vpa(y_top, 5)
```

ans = 8.2758

Vi får således koordinatsætet

$(24,02; 8,28)$

$x = 24,02 \text{ m}$

$y = 8,28 \text{ m}$

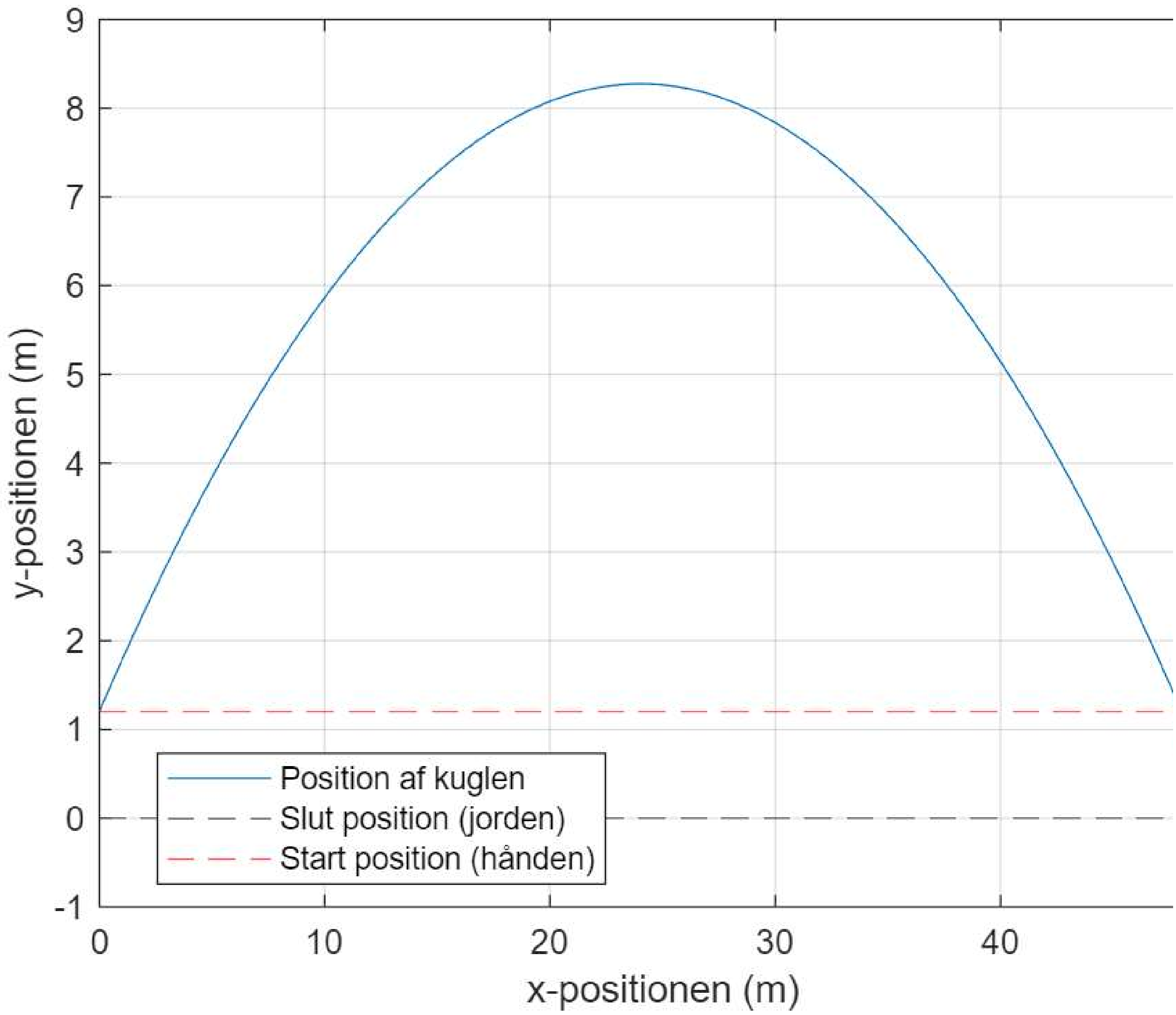
Hvilket passer godt med at vi når top punktet lidt før midten af den fulde kaste længde.

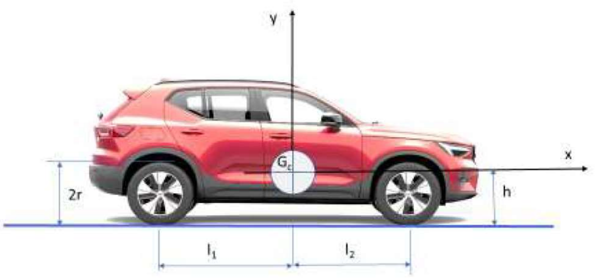
d) Et plot af boldens banekurve y(x)

først isoleres t i x-pladserings ligningen og derefter substitueres den ind i y-pladserings ligningen.

Den kan nu plottes som $y(x)$

```
syms x t y
t_insert = x == x_0 + (v_0 * cos(theta_rad))*t;

x_eq = solve(t_insert, t);
y(x) = y_0 + (v_0 * sin(theta_rad))*x_eq - g*x_eq^2 / 2;
x_lin = linspace(0,50,100);
figure(1)
plot(x_lin, y(x_lin), DisplayName='Position af kuglen')
yline(0,'k--', DisplayName='Slut position (jorden)')
yline(1.2,'r--', DisplayName='Start position (hånden)')
xlabel('x-positionen (m)')
ylabel('y-positionen (m)')
grid('on')
legend('Location','best')
```





Figur 2

Figur 2 viser en bil med forhjulstræk, der accelererer retlinet med acceleration a i x-retningen på en vandret vej.

Massen af bilen *uden hjul* er m_c og dens massemidtpunkt G_c fremgår af figuren. Alle fire hjul har hver radius r, inertiradius k_G og massen m_w

Antag at baghjulene roterer frit og at bilen påvirker hvert forhjul med momentet M. Alle hjul ruller på underlaget uden hjulspin. Der ses bort fra vind- og rullemodstand samt roterende masser inde i bilen (transmission etc.).

Free Body Diagram (FBD) og Kinetic Diagram KD for bilen uden hjul, et baghjul og et forhjul er vist i bilag 1.

Data:

$g = 9{,}81\ m/s^2$	$r = 250$ mm
$a = 3{,}75\ m/s^2$	$l_1 = 1402$ mm
$m_c = 2400$ kg	$l_2 = 1300$ mm
$m_w = 20$ kg	$h = 550$ mm
$k_G = 200$ mm	

Følgende ønskes besvaret:

a) Beregn masseinertimomentet for et hjul

```
clear all
clf
format shortg
g = 9.81;
a = 3.75;
m_c = 2400;
m_W = 20;
k_G = 0.200;
r = 0.25;
l_1 = 1.402;
l_2 = 1.300;
h = 0.550;
```

Inertimomentet for et hjul beregnes

```
I_W = k_G^2 * m_W
```

```
I_W =
          0.8
```

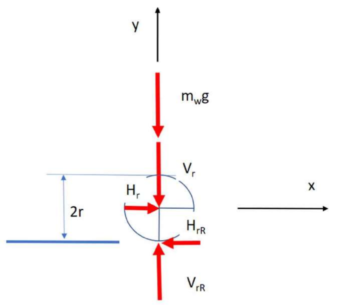
$I_W = 0.8\ \ \text{kg m}^2$

b) Vis at vinkelaccelerationen for et hjul er $\alpha = -15 rad/s^2$

vi ved at

$M = I_W \cdot \alpha = F_W \cdot r$

med KD digrammet i bilaget har vi




```
syms alpha H_rR H_fR M
eq_Mr = I_W * alpha == -H_rR * r
```

eq_Mr =

$\frac{4\,\alpha}{5} = -\frac{H_{rR}}{4}$

```
eq_Mf = I_W * alpha == H_fR * r - M
```

eq_Mf =

$\frac{4\,\alpha}{5} = \frac{H_{fR}}{4} - M$

Jeg mangler her en sidste ligning til at løse for alpha

Ville ellers ha stillede lige mange ligninger og ubkendte op og løse for α

```
[alpha_sol, M_sol] = solve([eq_Mr, eq_Mf], [alpha, M])
```

alpha_sol =

$-\frac{5\,H_{rR}}{16}$

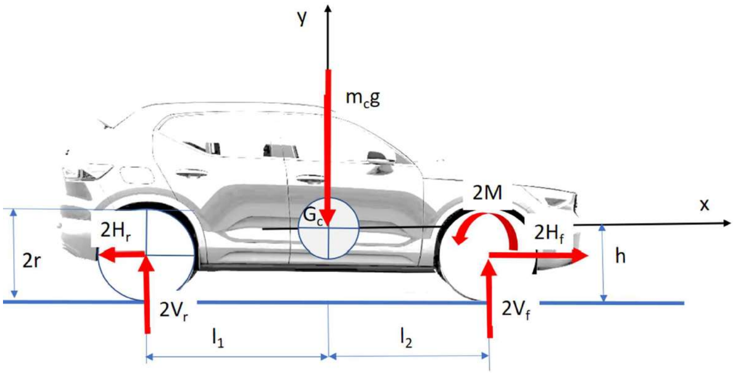
M_sol =

$\frac{H_{fR}}{4} + \frac{H_{rR}}{4}$

```
alpha = -15
```

```
alpha =
   -15
```

c) Opskriv de tre bevægelsesligninger symbolsk for bilen uden hjul

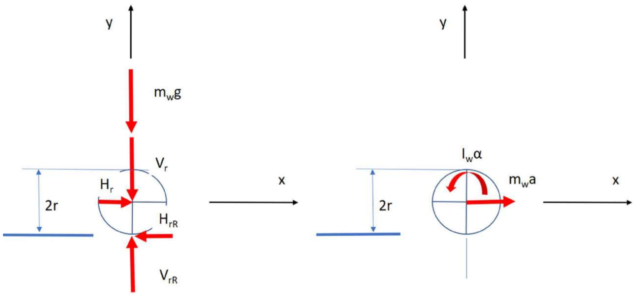


Vi opstiller de tre bevægellses ligninger i y og x retningen og moment ligningen.

$$\sum F_y = -m_c \cdot g + 2V_r + 2V_f = 0$$
$$\sum F_x = 2H_r + 2H_f = m_c \cdot a$$
$$\sum M = -2V_r \cdot l_1 + 2V_f \cdot l_2 - 2H_r \cdot (2r - h) + 2H_f \cdot (2r - h) + 2M = I_c \cdot \alpha_G = 0$$

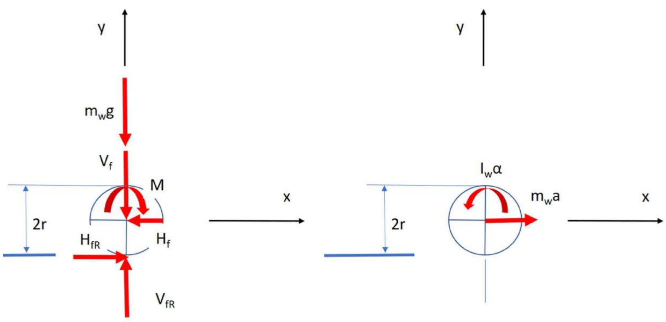
I momentligningen ses H_r og H_f som den kraft hjulene skubber med, og at denne kraft oprindeligt kommer fra underlaget.

d) Opskriv de tre bevægelsesligninger symbolsk for et baghjul



$$\sum F_y = -m_W \cdot g - V_r + V_{rR} = 0$$
$$\sum F_x = H_r - H_{rR} = m_W \cdot a$$
$$\sum M = -H_{rR} \cdot r = I_W \cdot \alpha$$

e) Opskriv de tre bevægelsesligninger symbolsk for et forhjul



FBD og KD for et forhjul

$$\sum F_y = -m_W \cdot g - V_f + V_{fR} = 0$$
$$\sum F_x = -H_f + H_{fR} = m_W \cdot a$$
$$\sum M = H_{fR} \cdot r + M = I_W \cdot \alpha$$

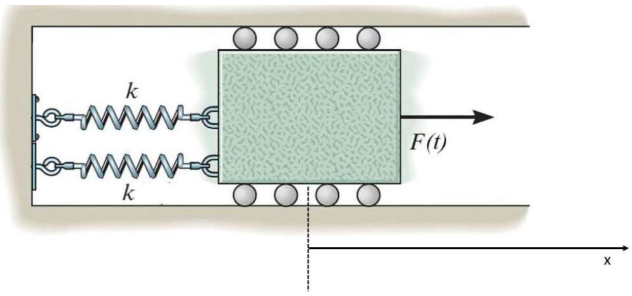
f) Vis at lejekraften på et baghjul er $F_r = \sqrt{H_r^2 + V_r^2} = 6604N$ og at lejekraften og momentet på et forhjul er henholdsvis $F_f = \sqrt{H_f^2 + V_f^2} = 6935N$ og $M = 1187\ Nm$

(Hint: løs først samtlige bevægelsesligninger ved hjælp af en Solve Block)

Nåede ikke denne opgave men ville stille alle ligningerne op og solve

```
syms  V_r V_f H_r H_f M H_rR H_fR V_rR V_fR
eq_bil_Fy = -m_c * g + 2*V_r + V_f == 0;
eq_bil_F_x = 2 * H_r + 2*H_f == m_c * a;
eq_bil_M = -2 * V_r * l_1 + 2*V_f * l_2 - 2* H_r * (2*r - h) + 2 * H_f * (2*r - h) + 2 * M == 0;

F_ry = -m_W * g - V_r + V_rR == 0;
F_rx = H_r - H_rR == m_W * a;
M_r = -H_rR * r == I_W * alpha;

F_fy = -m_W * g - V_f + V_fR == 0;
F_fx = H_f - H_fR == m_W * a;
M_f = -H_fR * r + M == I_W * alpha;

[V_r, V_f, H_r, H_f, M, H_rR, H_fR, V_rR, H_fR] = solve( ...
    [eq_bil_Fy, eq_bil_F_x, eq_bil_M, F_ry, F_rx, M_r, F_fy, F_fx, M_f], ...
    [V_r, V_f, H_r, H_f, M, H_rR, H_fR, V_rR, H_fR])
```

```
Error using sym.getEqnsVars>checkVariables
Second argument must be a vector of symbolic variables.

Error in sym.getEqnsVars (line 62)
    checkVariables(vars);

Error in sym/solve>getEqns (line 429)
[eqns, vars] = sym.getEqnsVars(argv{:});

Error in sym/solve (line 226)
[eqns,vars,options] = getEqns(varargin{:});
```



Figur 3

Figur 3 viser en masse m, som er styret så den kun bevæger sig i den vandrette x-retning. x-koordinat som beskriver positionen regnes med udgangspunkt (x=0) i udeformerede fjedre. På grund af friktion samt luftmodstand kan svingningen regnes som underdæmpet med et dæmpningsforhold ζ. Massen er fastgjort med to fjedre, som hver har fjederstivheden k. Massen kan betragtes som en partikel. Massen sættes i bevægelse med følgende startbetingelser: Til tiden nul er positionen $x(0) = x_0$ og hastigheden er $v(0) = v_0$.

Data:

m = 20 kg
k = 5000 N/m
F(t) = 150 sin(20t) N
$\zeta = 0{,}14$
$x_0 = 0$ m
$v_0 = 8$ m/s

Følgende ønskes beregnet med metoderne i lærebogens kapitel 8

a) Den dæmpede egenfrekvens ω_d (svaret ønskes anført i rad/s)

```
clear all
clf
format shortg

m = 20;
k = 5000 * 2;
syms t A_1 A_2
F(t) = 150 * sin(20*t) %N
```

F(t) = $150 \sin(20\, t)$

```
omega = 20;
zeta = 0.14;
x_0 =0;
v_0 = 8;
t_0 = 0;
```

Vi finder egenfrekvensen(ω_n)

```
omega_n = sqrt(k/m)
```

```
omega_n =
        22.361
```

$\omega_n = 22,36\ \text{rad/s}$

b) Amplituden X på den partikulære del af løsningen $x_p(t)$ (steady state)

Denne finder vi med ligning 8/20

$$X = \frac{F_0/k}{\{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\}^{1/2}} \qquad (8/20)$$

```
X_steady(t) = (F(t) / k) / sqrt( (1 - (omega/omega_n)^2)^2 + (1 - (2 * zeta * omega/omega_n)^2) );
vpa(X_steady(t),5)
```

ans = $0.015173\sin(20.0\,t)$

Således bliver stedy state amplituden $X = 0,0152\sin(20\cdot t)$ m.

Hvor den maximale amplitude vil være 0,0152 m

c) Et plot af massens position x(t) i tidsintervallet 0<t<3s samt en kort redegørelse for hvordan forskriften er bestemt.

Først finde den naturlige dæmpede svigningsfrekvens ω_d

```
syms psi C_s f(t) t f_1(t)

w_d = omega_n*sqrt(1-zeta^2)
```

```
w_d =
        22.14
```

Ligning (8/12) opstilles og benyttes til at finde forskydningen for den komplimentære løsning

```
x_c(t) = C_s * exp(-zeta * omega_n * t) * (sin(w_d * t + psi)) % Sted funktionen for underdæmpede svininger ligning (8/12) %
```

x_c(t) =

$$C_s\, e^{-\frac{7\sqrt{5}\,t}{5}} \sin\left(\psi + \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{2451}\,t}{5}\right)$$

Ved at differentier forskydningsligningen får vi hastighedes ligningen

```
x_c1(t) = diff(x_c(t), t) %% Hastigheds funktionen
```

x_c1(t) =

$$\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{2451}\,C_s\, e^{-\frac{7\sqrt{5}\,t}{5}} \cos\left(\psi + \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{2451}\,t}{5}\right)}{5} - \frac{7\sqrt{5}\,C_s\, e^{-\frac{7\sqrt{5}\,t}{5}} \sin\left(\psi + \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{2451}\,t}{5}\right)}{5}$$

Vi løser ligningssystemet for C_s og psi

```
sol = [x_c(t_0) == x_0, x_c1(t_0) == v_0]; %% sættes op i et array så der kan solves for de 2 ukendte.

S = solve(sol, psi, C_s); %Solver for psi og C_s i vores x lignings system

%udpakker og vudere værdierne fra struct
psi = vpa(S.psi)
```

psi = 0.0

```
C_s = vpa(S.C_s)
```

C_s = $0.36132942798553755930669118831229$

```
x_c(t) = C_s*exp(-zeta * omega_n * t) * (sin(w_d * t + psi));
```

Dette er den komplimentære forskydningsligning.

Vi finder nu den partikulære løsning

Først redefineres aplituden X

```
X(t) = (F(t) / k) / sqrt( (1 - (omega/omega_n)^2)^2 + (1 - (2 * zeta * omega/omega_n)^2) )
```

X(t) =

$$\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{3054}\,\sin(20\,t)}{8144}$$

Vi finder start vinklen ϕ

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \qquad (8/21)$$

```
phi = atan( (2*zeta * omega/omega_n) / (1-(omega/omega_n)^2) )
```

```
phi =
      0.89691
```

Vi kan nu opskrive den partikulære løsning.

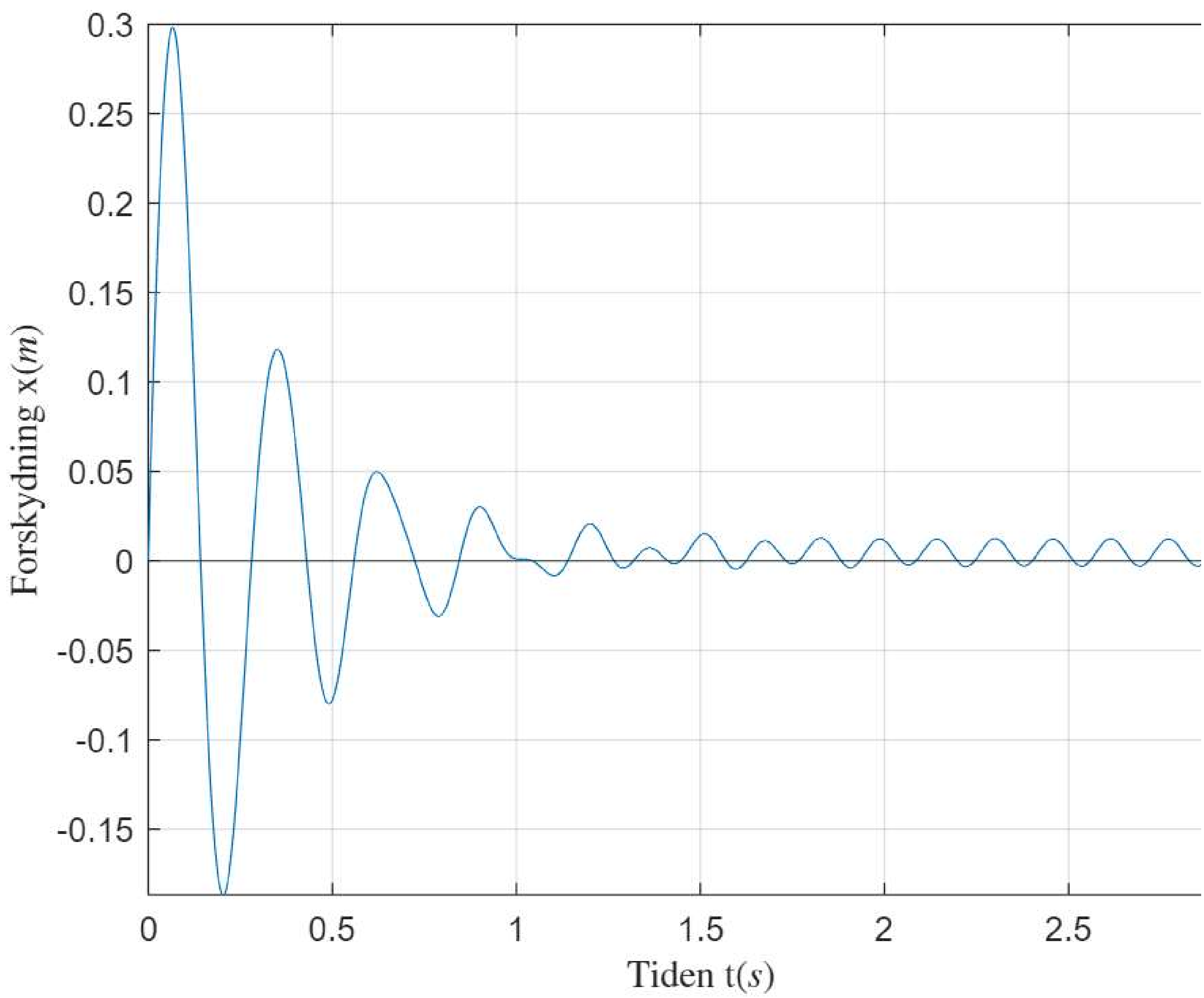
```
x_p(t) = X * sin(omega * t - phi);
```

Den samlede ligning er nu den partikulære del + den komplimentære del.

```
x(t) = x_c(t) + x_p(t);
```

Der plottes en kurve over bevægelsen

```
fplot(x(t), [t_0, 3]) %plot
yline(0)
ylabel('Forskydning x($m$)', Interpreter='latex')
xlabel('Tiden t($s$)', Interpreter='latex')
grid()
```



Det ses på plottet at den complimentære del dør ud og til sidst har vi kun den drevne svigning