Bemærk følgende:

Bilagsfiler: `massemidtdist.m`, `suboptmindist.m`, `massemidtdist.p`, `svingningsdata.m`

Plot: Hvis besvarelsen af en given delopgave inkluderer et plot, skal dette forsynes med passende titel og aksetekster (inkl. enhed hvis relevant) samt *grid*. I den enkelte delopgave kan der være anført yderligere krav til et givet plot, og disse skal naturligvis også efterkommes.

OPGAVE 1

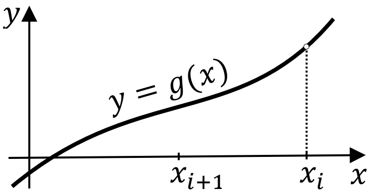
(1a)

Antag, at Newton-Raphsons iterative metode anvendes til at finde en rod i funktionen $g(x)$. Lad x_i betegne rodestimatet i iteration nummer i.

Vis/forklar, gerne ud fra en skitse, at rodestimatet i iteration nummer $i+1$, altså x_{i+1}, kan beregnes som:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}$$

hvor $g'(x)$ er den afledte af $g(x)$.



Figur 1: Newton-Raphson-iteration.

I de følgende delopgaver betragtes funktionen

$$h(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

der har en enkelt rod. Om funktionen gælder der:

$$h(x) \to -2 \text{ for } x \to -\infty, \quad h(x) \to 1 \text{ for } x \to \infty, \quad h'(x) > 0 \text{ for } x \in \mathbb{R}.$$

(1b)

Plot funktionen i intervallet fra $x = -5$ til 5 ved brug af MATLAB, og bestem den omtrentlige værdi af roden ud fra plottet. Besvarelsen skal indeholde anvendt MATLAB-kode samt plottet og den aflæste rod med én decimal.

(1c)

Anvend Newton-Raphsons metode med et startgæt på $x_0 = 2{,}5$ til at bestemme en rod i funktionen $h(x)$. Gennemfør 5 iterationer. Besvarelsen skal indeholde beregningsresultater og beregningsformler for de enkelte iterationer (på tabelform vha. fx Excel). Anfør som facit den fundne rod med sikre decimaler (efter afrunding).

(1d)

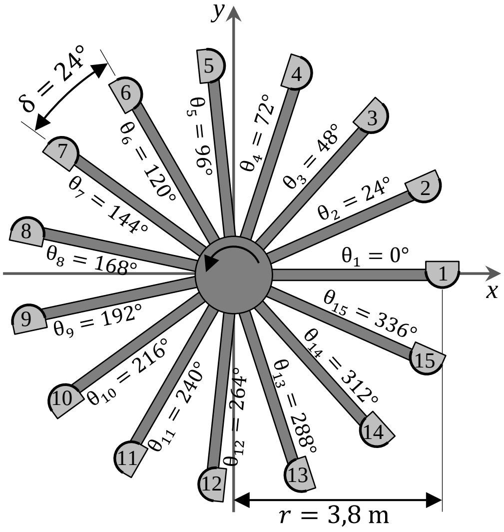
I delopgave (1c) konvergerer Newton-Raphsons metode mod den korrekte rodværdi efter at have taget udgangspunkt i et startgæt på $x_0 = 2{,}5$. Hvis der derimod tages udgangspunkt i et startgæt på $x_0 = 2{,}74$, vil man se, at Newton-Raphsons metode divergerer:

i	0	1	2	3	4
x_i	2,740	−2,046	3,402	−6,250	339,468

Forklar, hvorfor Newton-Raphsons metode divergerer, evt. ud fra en skitse af funktionens graf.

OPGAVE 2

Vi betragter en karrusel, der roterer omkring en lodret akse (fig. 3). Karrusellen har $n = 15$ nummererede siddepladser jævnt fordelt (interval $\delta = \frac{360°}{n} = 24°$) langs en rotationscentreret cirkel med radius $r = 3{,}8$ m. På plads 1-15 placeres 15 personer, og den masse (kg), der derved placeres på plads nummer i, benævnes m_i ($i = 1, \dots, n$). Masserne kan i den aktuelle sammenhæng betragtes som punktmasser.



Figur 3: Karrusel.

Der indlægges et vandret xy-koordinatsystem med origo i karrusellens centrum og x-akse gennem plads nummer 1 (se fig. 3). Koordinaterne for de 15 punktmassers samlede massemidtpunkt betegnes (x_c, y_c) og kan beregnes som:

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \text{og} \quad y_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

hvor M er den samlede masse, $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, mens (x_i, y_i) er plads i's koordinater ($i = 1, \dots, n$), dvs. $x_i = r\cos(\theta_i)$ og $y_i = r\sin(\theta_i)$, hvor $\theta_i = (i-1)\delta$.

Afstanden, d, fra karrusellens centrum til massemidtpunktet (x_c, y_c) kan udregnes som:

$$d = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

(2a)

Der skal programmeres en MATLAB-funktion, `massemidtdist`, der givet en placering af 15 personer med givne masser kan beregne massemidtpunktets afstand, `d`, fra centrum vha. ovenstående formler. Her følger en ufærdig version af funktionen (den kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `massemidtdist.m`):

```
function d = massemidtdist(m,r)
n = length(m);
M = sum(m);
delta = <UDFYLD>;
sum_mx = <UDFYLD>;
sum_my = <UDFYLD>;
for i = 1:n
  <UDFYLD 1,2,... LINJER>
end
xc = sum_mx/M;
yc = sum_my/M;
d = <UDFYLD>;
```

Inputargumentet `m` er vektor indeholdende masserne placeret på henholdsvis plads $1, 2 \dots, n$, og inputargumentet `r` er svarer til radius r (m) i ovenstående formler .

> Færdiggør funktionen ved at erstatte hvert **`<UDFYLD>`** og **`<UDFYLD 1,2,... LINJER>`** med korrekt MATLAB-kode. Besvarelsen skal indeholde den færdiggjorte funktion samt opnået `d`-værdi ved afprøvning med følgende input:
>
> `m = [81 62 65 76 90 102 86 77 107 85 80 77 67 44 60]` og `r = 3.8`

(2b)

For at minimere belastning og slid på karrusellen vil det være ønskeligt at minimere d (massemidtpunktets afstand fra centrum). Dette kan gøres ved en optimeret placering af personerne (masserne). Det vil være ekstremt tidskrævende at udregne d for alle $15! = 1{,}3 \cdot 10^{12}$ mulige personplaceringer og søge mindste d-værdi blandt disse. I stedet kan man anvende en suboptimal strategi, hvor man begynder med en startplacering af masserne (givet ved en vektor `m0`) og derefter systematisk afprøver parvise ombytninger af masserne med henblik på at finde en ombytning, der reducerer d. Når man finder en d-reducerende ombytning, beholder man denne og går videre med at søge og etablere d-reducerende ombytninger, indtil man ikke længere kan finde en ombytning, der reducerer d.

Her følger en MATLAB-funktion, `suboptmindist`, der har til formål at gennemføre ovenstående suboptimale optimeringsprocedure (den kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `suboptmindist.m`):

```
function [m,d] = suboptmindist(m0,r)
m = m0;
n = length(m);
d = massemidtdist(m,r); % Kald funktion fra delopg. (a)
while 1
  dmin = d; % Gem mindste afstand fundet indtil videre
  for i = 1:n-1
    for j = i+1:n
      mtest = m;
      mtest(i) = m(i);
      mtest(j) = m(j);
      dtest = massemidtdist(m,r); % Kald funktion fra delopg. (a)
      if dtest > d
        mtest = m;
        dtest = d;
      end
    end
  end
  if d == dmin
    break
  end
end
```

Inputargumentet `m0` er startplaceringsvektoren (masser placeret på henholdsvis plads $1, \dots, n$) og `r` er radius som tidligere defineret. Outputargumentet `m` er den opnåede suboptimale placering af masserne, og `d` er den dertil svarende afstand mellem massemidtpunkt og karruselcentrum.

> Den anførte funktion er behæftet med fejl. Ret fejlene og afprøv funktionen med følgende input:
>
> `m = [81 62 65 76 90 102 86 77 107 85 80 77 67 44 60]` og `r = 3.8`
>
> Besvarelsen skal indeholde den færdiggjorte funktion samt `m`-vektor og `d`-værdi opnået ved afprøvningen.
>
> PS! Hvis delopgave (2a) ikke er besvaret, vil man i denne delopgave mangle funktionen `massemidtdist`. I så fald kan man fra Digital Eksamen downloade filen `massemidtdist.p`, som indeholder en ”krypteret”, men fungerende version af funktionen `massemidtdist`.

OPGAVE 3

Lydhastigheden i rent ferskvand er omkring 1500 m/s, men afhænger af vandets temperatur. Her følger et datasæt bestående af 11 sammenhørende værdier af temperatur, T (°C), og lydhastighed, c (m/s), givet i form af MATLAB-vektorer, `T` og `c`:

```
T = [     0     10     20     30     40     50     60     70     80     90    100]; % grC
c = [1402.4 1447.3 1482.4 1509.2 1528.9 1542.6 1551.0 1554.8 1554.5 1550.5 1543.1]; % m/s
```

(3a)

Plot vha. MATLAB de 11 sammenhørende værdier af T og c som punkter, og plot desuden en kubisk *not-a-knot spline* gennem punkterne. Anfør såvel anvendte MATLAB-kommandoer som det opnåede plot i besvarelsen. Anfør desuden, hvad den kubiske *spline* beregner lydhastigheden til, når vandtemperaturen er 62,3°C.

(3b)

Lydhastigheden ved en vandtemperatur på 62,3°C kan estimeres ved polynomiel interpolation baseret på de nærmeste datapunkter. Spørgsmålet er blot, hvilken polynomiumsgrad og dermed hvor mange datapunkter man skal basere interpolationen på.

Den temperatur i datasættet, der er nærmest 62,3°C, ses at være 60°C. Undersøg ud fra datasættet hvorvidt henholdsvis et første-, et tredje- og et femtegradspolynomium er egnet til interpolation af lydhastigheder ved temperaturer nær 60°C. Undersøgelsen skal foretages vha. MATLAB, og besvarelsen skal indeholde anvendte MATLAB-kommandoer og opnåede resultater samt en begrundet konklusion vedrørende valg af egnet polynomiumsgrad.

(3c)

Anvend polynomiel interpolation med henholdsvis et første-, et tredje- og et femtegradspolynomium til at estimere lydhastigheden ved 62,3°C. Benyt et passende antal af de nærmeste datapunkter til hver af interpolationsberegningerne. Undersøgelsen skal foretages vha. MATLAB, og besvarelsen skal indeholde anvendte MATLAB-kommandoer og opnåede resultater samt en kommentar om, hvilke(n) af de tre interpolerede værdier, der er mest troværdigt. Inddrag, hvis det findes relevant, resultaterne af delopgave (3a) og (3b) i kommentaren.

(3d)

I det følgende ses bort fra det tidligere givne datasæt. I stedet betragtes følgende mindre datasæt bestående af tre datapunkter:

```
T = [     0  74.17    100]; % grC
c = [1402.4 1555.1 1543.1]; % m/s
```

I tillæg til dette datasæt oplyses det, at lydhastigheden på 1555,1 m/s ved 74,17°C udgør et lokalt maksimum.

Der skal bestemmes et tredjegradspolynomium, $c(T) = p_1T^3 + p_2T^2 + p_3T + p_4$, som går igennem de tre datapunkter, og om hvilket der gælder $c'(T) = 0$, når $T = 74{,}17$°C (fordi der er et lokalt maksimum).

Vis/forklar, at polynomiets koefficienter, p_1, p_2, p_3 og p_4, kan bestemmes ved at løse følgende ligningssystem:

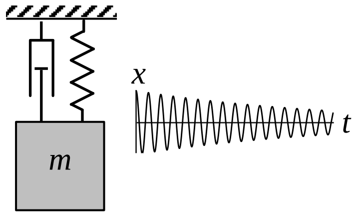
$$
\begin{aligned}
&& p_4 &= 1402{,}4 \\
408023{,}180713p_1 + 5501{,}1889p_2 + 74{,}17p_3 + {}& & p_4 &= 1555{,}1 \\
1000000p_1 + 10000p_2 + 100p_3 + {}& & p_4 &= 1543{,}1 \\
16503{,}5667p_1 + 148{,}34p_2 + p_3 {}& & &= 0
\end{aligned}
$$

(3e)

Opstil ligningssystemet fra delopgave (3d) på matrixform og løs det vha. MATLAB. Benyt løsningsværdierne som grundlag for at plotte polynomiet $c(T)$ i intervallet 0 til 100°C.

OPGAVE 4

Figur 4 viser et underdæmpet masse-fjeder-dæmpersystem. Hvis massen m føres op over sin hvilestilling og slippes, vil den efterfølgende foretage frie lodrette svingninger, og ideelt set vil dens udsving, x, fra hvilestillingen aftage med tiden, t, som skitseret i figuren.



Figur 4: Masse-fjeder-dæmpersystem.

For at bestemme svingningsfrekvensen mere præcist, udføres et eksperiment, hvor massen slippes et stykke over dens hvilestilling (til tidspunktet $t = 0$). Under de efterfølgende svingninger måles massens lodrette position, x (mm), til tidspunkterne $t = 0{,}000,\ 0{,}005,\ 0{,}010, \ldots,\ 1{,}995\ s$. De målte x-værdier kan downloades fra Digital Eksamen via filen `svingningsdata.m`, i hvilken data er tilgængelig i form af en MATLAB-søjlevektor `x`.

(4a)

Det oplyses, at målingerne er temmeligt støjbehæftede, hvilket skyldes det anvendte elektroniske måleudstyr.

Plot de målte x-værdier som funktion at tiden, og forsøg om muligt at estimere svingningsfrekvensen ud fra plottet.

(4b)

Der er mistanke om, at målestøjen bl.a. består af elektronisk støj via måleudstyrets 50 Hz forsyningsspænding. Måleserien kan derfor indeholde to dominerende frekvenser: Masse-fjeder-dæmpersystems svingningsfrekvens og muligvis en 50 Hz støjfrekvens. Det kan i øvrigt oplyses, at førstnævnte frekvens er mindre end 40 Hz.

Analysér måleserien vha. MATLAB med henblik på at bestemme evt. dominerende frekvenser. Besvarelsen skal indeholde anvendt MATLAB-kode, opnåede resultater ved kørsel af koden samt svar på følgende spørgsmål: Er masse-fjeder-dæmpersystems svingningsfrekvens identificérbar og i så fald med hvilken værdi? Er måleserien under indflydelse af 50 Hz støj?