Bemærk følgende:

Hvis besvarelsen af en given delopgave inkluderer et plot, skal dette forsynes med passende titel og aksetekster (inkl. enhed hvis relevant) samt *grid*. I den enkelte delopgave kan der være anført yderligere krav til et givet plot, og disse skal naturligvis også efterkommes.

OPGAVE 1

En bilmotor har fået monteret en sensor til måling af dens vibrationer under et kørselsforsøg. Sensoren måler motorblokkens lodrette acceleration [m/s^2] med en samplingsfrekvens på 10000 Hz. Følgende udsnit af måleserien består af en række måleværdier givet som en MATLAB-vektor, `a` (kan downloades fra Digital Eksamen i form af filen `motorvibrationsdata.m`):

```
a = [ 1.6   2.7   4.7   4.5   0.8  -3.4  -4.6  -2.4   1.7   7.5  11.7  10.2 ...
      2.8  -3.0  -1.5   4.5   6.2   0.1  -7.4  -7.3   0.7   8.3   6.4  -0.8 ...
     -2.3   3.1   5.4  -1.3  -8.9  -7.7   0.9   7.0   3.9  -4.5  -8.0  -2.6 ...
      3.2   1.4  -6.3 -11.7  -9.2   0.0   7.2   3.9  -7.0 -12.4  -5.4   4.8 ...
      5.8  -1.9  -8.6  -9.1  -5.0   0.2   2.1  -1.3  -6.8  -7.9  -3.2   2.5 ...
      4.7   2.3  -2.7  -6.0  -5.0  -1.4   1.6   2.4   0.6  -2.3  -2.1   1.7 ...
      4.2   1.2  -3.2  -3.3   0.7   3.7   1.9  -3.2  -5.9  -2.9   1.7   2.0 ...
     -0.7  -2.6  -2.6  -1.3   1.0   2.3   1.1  -0.4  -0.1   0.4   0.4   0.6 ...
      0.3  -1.1   0.4   4.9   7.3   2.5  -4.8  -5.2   1.4   6.2   4.9   2.4 ...
      2.3   4.4   6.7   7.6   5.4   0.7  -3.9  -4.7  -1.2   2.3   3.6   4.6];
```

(1a)

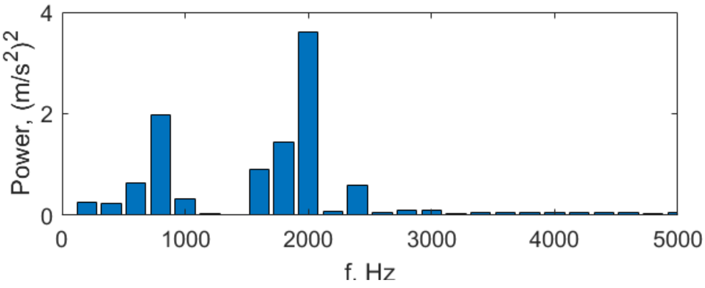
Anvend MATLAB til at plotte accelerationsmålingerne som funktion af tiden, idet første måling antages registreret til tidspunktet $t = 0$ s. Vurdér, om der baseret på dette plot synes at være en fremherskende frekvens i accelerationsmålingerne. Benyt i så fald plottet til at bestemme denne frekvens omtrentligt. Besvarelsen skal indeholde plottet og de tilhørende MATLAB-kommandoer samt et begrundet svar vedrørende en eventuel fremherskende frekvens.

(1b)

Bestem den dominerende frekvens i serien af accelerationsmålinger ud fra tidsseriens powerspektrum. Anfør i besvarelsen den dominerende frekvens samt de MATLAB-kommandoer og –resultater, der har dannet grundlag for bestemmelsen af denne frekvens.

(1c)

For et andet udsnit af måleserien er powerspektret blevet beregnet, og resultatet er som vist i figur 1. Powerværdierne, der ligger til grund for figuren er vist i tabel 1.



Figur 1. Powerspektrum.

Tabel 1. Powerværdier

Frekv. Hz	Power $(m/s^2)^2$
0	0,00
200	0,26
400	0,24
600	0,65
800	1,97
1000	0,32
1200	0,04
1400	0,00
1600	0,90
1800	1,44
2000	3,60
2200	0,08
2400	0,58
2600	0,06
2800	0,09
3000	0,10
3200	0,04
3400	0,06
3600	0,06
3800	0,05
4000	0,05
4200	0,05
4400	0,05
4600	0,05
4800	0,04
5000	0,05

Denne opgave drejer sig om at udfærdige et MATLAB-script, der kan finde alle lokale maksima for powerværdierne. Der er fx et lokalt maksimum på 1,97 $(m/s^2)^2$ ved frekvensen 800 Hz, fordi powerværdierne ved såvel den foregående frekvens (600 Hz) som den efterfølgende frekvens (1000 Hz) er mindre, end den er ved 800 Hz. På tilsvarende måde er der lokale maksima ved 2000 Hz og andre frekvenser. Scriptet skal søge efter lokale maksima ved alle frekvenser på nær første og sidste frekvens, dvs. 0 og 5000 Hz.

Følgende ufærdige MATLAB-script, der kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `FindLokalMaksPower.m`, skal bringes til at finde alle lokale maksima for powerværdierne og udskrive disse samt de tilhørende frekvenser i MATLAB's kommandovindue.

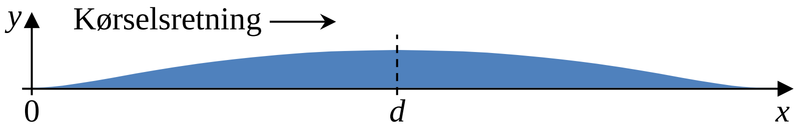
```
clear
f = 0:200:5000;
P = [0.00 0.26 0.24 0.65 1.97 0.32 0.04 0.00 0.90 ...
     1.44 3.60 0.08 0.58 0.06 0.09 0.10 0.04 0.06 ...
     0.06 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 0.04 0.05];
N = length(P);
fprintf('f, Hz   P, (m/s^2)^2\n')
for i = <UDFYLD>
  if P(i) <UDFYLD> && P(i) <UDFYLD>
    fprintf('%5.0f   %6.4f\n',f(i),P(i))
  end
end
```

Færdiggør scriptet ved at erstatte tekstangivelserne **<UDFYLD>** med korrekt MATLAB-kode, og kør derefter scriptet. Besvarelsen skal indeholde det færdiggjorte script samt dets output i kommandovinduet, når det køres.

OPGAVE 2

(2a)

Fartdæmpende vejbump kan have vidt forskellige længdeprofiler, bl.a. den i figur 2 viste, som kaldes et modificeret cirkelbump. På grund af symmetri betragtes kun den første halvdel af bumpet, som har længden d [m] i kørselsretningen.



Figur 2. Modificeret cirkelbump.

I opgaven betragtes et modificeret cirkelbump med $d = 5{,}5$ m, som er beregnet til hastigheds-dæmpning til 50 km/t. Ifølge Vejdirektoratet skal det udformes i overensstemmelse med data i Tabel 2, der viser den krævede højde, y [mm], af bumpet i fem forskellige afstande, x [m], fra bumpets start.

Tabel 2. Højde af bump i forskellige afstande fra bumpstart

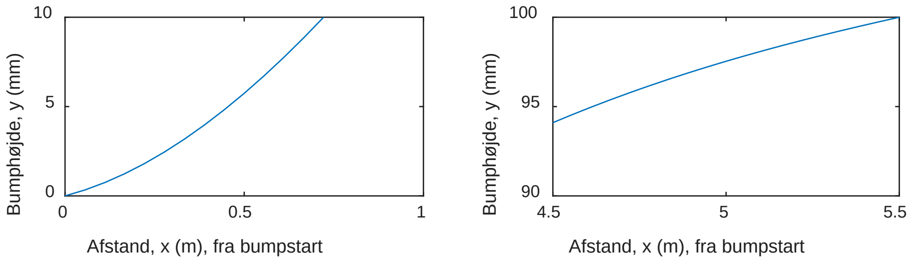
Afstand fra bumpstart, x (m)	0,00	1,75	2,75	3,75	5,50
Bumphøjde, y (mm)	0	38	67	86	100

(2a)

Anvend MATLAB til at plotte de fem sammenhørende værdier af x og y i tabel 2 som punkter, og plot en kubisk *not-a-knot spline* gennem punkterne (for $0 \leq x \leq 5{,}5$ m). Såvel anvendte MATLAB-kommandoer som det opnåede plot ønskes anført i besvarelsen. Desuden ønskes anført, hvad den kubiske *spline* estimerer bumphøjden, y, til ved $x = 4{,}75$ m.

(2b)

Et modificeret cirkelbump skal have vandret tangent ved dets start (ved $x = 0$ m) og ved dets midte (i dette tilfælde ved $x = 5{,}5$ m). Ved start er det for at forhindre en chokvirkning, når et køretøj rammer bumpet, og ved dets midte er det for at undgå en "spids" top. Disse krav er ikke opfyldt for den *spline*, der blev fundet i delopgave 2a, hvilket tydeligt fremgår af de indzoomede *spline*-udsnit i figur 3.



Figur 3. Kubisk *not-a-knot spline* zoomet ind ved bumpets start (t.v.) og midte (t.h.).

Anvend MATLAB til at plotte de fem sammenhørende værdier af x og y i tabel 2 som punkter, og plot en kubisk *spline* gennem punkterne (for $0 \leq x \leq 5{,}5$ m), således at den pågældende *spline* har vandret tangent for $x = 0$ m og $x = 5{,}5$ m. Såvel anvendte MATLAB-kommandoer som det opnåede plot ønskes anført i besvarelsen. Desuden ønskes anført, hvad den kubiske *spline* estimerer bumphøjden, y, til ved $x = 4{,}75$ m.

(2c)

Benyt MATLAB til at bestemme et fjerdegradspolynomium, $y = p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5$, der går igennem datapunkterne i tabel 2. Besvarelsen skal indeholde de fundne værdier af polynomiumskoefficienterne $(p_1, \dots, p_5)$ samt et plot af polynomiet (for $0 \leq x \leq 5{,}5$ m). Desuden ønskes anført, hvad den polynomiet estimerer bumphøjden, y, til ved $x = 4{,}75$ m.

OPGAVE 3

Lad der være givet følgende ligningssystem bestående af to ligninger med to ubekendte, x og y:

$$xa + (x - y)(by + c - y) - 2d = 0$$
$$s + xt^2 - (xu + y)v = w$$

Størrelserne a, b, c, d, s, t, u, v og w er konstanter.

(3a)

Er ligningssystemet lineært eller ulineært? Begrund svaret.

(3b)

Der betragtes nu et specialtilfælde af ligningssystemet, hvor

$$a = 2,\ b = 1,\ c = 5,\ d = 19,\ s = 6,\ t = 2,\ u = -4,\ v = -2 \text{ og } w = -14.$$

Kan ligningssystemet i dette tilfælde opskrives på lineær matrixform, **AX** = **B**, hvor **A** er en 2×2 koefficientmatrix og **B** er en 2×1 matrix indeholdende konstanter, mens $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er vektoren af ubekendte? Begrund svaret. Hvis ja, så opstil matricerne **A** og **B** og løs ligningssystemet ved hjælp af MATLAB. Besvarelsen skal indeholde benyttede MATLAB-kommandoer og resultater.

(3c)

Der betragtes nu et andet specialtilfælde af ligningssystemet, hvor

$$a = -1,\ b = 2,\ c = 5,\ d = -5,\ s = 3,\ t = 1,\ u = 5,\ v = -1 \text{ og } w = 18.$$

Det resulterende ligningssystem bliver derved:

$$4x - 5y - y^2 + xy + 10 = 0$$
$$6x + y - 15 = 0$$

Med henblik på at løse ligningssystemet ved benyttelse af MATLAB-funktionen `newtmult`, der har været anvendt ved undervisningen, skal der programmeres en funktion, der for givne værdier af de ubekendte (givet som en vektor `X`) kan udregne ligningssystemets venstresider (i form af en vektor `f`) samt den tilsvarende Jacobi-matrix (`J`). Her følger en delvist færdig udgave af en sådan funktion, her navngivet `Jogf`:

```
function [J,f] = Jogf(X)
x = X(1); y = X(2);
f = [4*x - 5*y - y^2 + x*y + 10
     6*x + y - 15];
J = [<UDFYLD>, <UDFYLD>
     <UDFYLD>, <UDFYLD>];
```

Funktionen kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `Jogf.m`.

Færdiggør funktionen `Jogf.m` ved at erstatte tekstangivelserne **`<UDFYLD>`** med korrekt MATLAB-kode. Angiv den færdige funktion som svar.

(3d)

Benyt funktionen `newtmult` til at løse det i delopgave 3c viste ligningssystem (`newtmult.m` kan downloades fra Digital Eksamen), idet der anvendes startværdier på $x = 0$ og $y = 0$, og idet der udføres så mange iterationer, at fejlen på løsningen er højest 1%. Besvarelsen skal indeholde såvel de fundne løsningsværdier af x og y som de MATLAB-kommandoer, der er anvendt til at finde løsningen. Derudover ønskes det kommenteret, om den ønskede nøjagtighed af løsningen er opnået.

PS! Såfremt delopgave 3c ikke er besvaret, kan følgende alternative (ikke korrekte, men dog anvendelige) version af funktionen `Jogf` benyttes:

```
function [J,f] = Jogf(X)
x = X(1); y = X(2);
f = [4*x - 5*y - y^2 + x*y + 10
     6*x + y - 15];
J = [5, -6
     4,  3];
```

(3e)

Hvis man besvarer delopgave 3d med ændrede startværdier, nemlig $x = 5$ og $y = -1$, og specificerer en ønsket maksimal fejl på 0,01%, når man frem til følgende løsningsværdier: $x = 3{,}4524$ og $y = -5{,}7143$. Den approksimative relative fejl på løsningen bliver beregnet til 0,0065%.

Hvad er løsningsværdierne for x og y, hvis man kun medtager sikkert bestemte decimaler (efter afrunding)?

OPGAVE 4

En karton køleskabskold mælk (5,0°C) efterlades ved en fejl i et rum, hvor temperaturen gradvist stiger fra 20,0°C til omkring 25°C over de 10 timer, hvor mælken står fremme. Mælkens temperatur, y [°C], stiger med tiden, t [timer], i henhold til følgende differentialligning:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}4 \cdot \left(20 + 6 \cdot \left(1 - e^{-0{,}3t^{0{,}8}}\right) - y\right), \quad y(0) = 5$$

Der er tale om en lineær differentialligning, som ikke kan løses ad analytisk vej, og derfor handler denne opgave om at finde numeriske løsninger.

(4a)

Løs differentialligningen ved hjælp af Eulers metode fra $t = 0$ til 10 timer med tidsskridt på $h = 0{,}5$ time. I besvarelsen ønskes både talresultater og beregningsformler anført på tabelform (Excel):

i	*t*	*y*	*dy*/*dt*
0			
1			
2			
⋮	⋮	⋮	⋮

Anfør desuden, hvad mælketemperaturen ifølge løsningen er efter 5 timer.

(4b)

Løs igen differentialligningen ved hjælp af Eulers metode fra $t = 0$ til 10 timer, men nu med tidsskridt på $h = 0{,}25$ time, og nu ved anvendelse af MATLAB-funktionen `eulode`, som har været anvendt i undervisningen (filen `eulode.m` kan downloades fra Digital Eksamen). I besvarelsen ønskes såvel anvendte MATLAB-kommandoer som opnåede resultater anført. Anfør specifikt, hvad mælketemperaturen ifølge løsningen er efter 5 timer.

(4c)

Hvis man løser differentialligningen med en meget præcis metode, viser det sig, at den korrekte mælketemperatur efter 10 timer er 24,2299°C. Når man løser differentialligningen ved hjælp af Eulers metode med tidsskridt på henholdsvis 0,5 time og 0,25 time, får man, at mælketemperaturen efter 10 timer er henholdsvis 24,3595°C og 24,2965°C, dvs. afvigelserne fra den korrekte temperatur er henholdsvis 0,1296°C og 0,0666°C.

Vurdér, om den reduktion i afvigelsen, man opnår ved at reducere tidsskridtet i Eulers metode fra 0,5 time til 0,25 time, er af den forventede størrelsesorden. Begrund svaret.