Eksamensæt

M4STI1-01 Statistik for ingeniører -- 02-06-2023

Eksamensnummer -- 185432

```
clear all
clf
format shortg
```

Opgave 1

I en glasproduktion inspiceres de færdige glas for fejl. Ved inspektionen findes der erfaringsmæssigt 6.2 glas med fejl pr. time.

a. Hvilken sandsynlighedsfordeling er hensigtsmæssig at anvende til beskrivelse af antal glas med fejl pr. time?
Opskriv det generelle udtryk for denne fordelings sandsynlighedsfunktion (tæthedsfunktion).

a.

Da der tælles antal fejl på en time benyttes en poisson fordelling.

$$p(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} & \text{for } y = 0, 1, 2, \ldots \text{ og } \lambda > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Dette er en god fordeling da man enten har en fejl eller ikke en fejl og sandsynligheden for at få noget der imellem er således = 0.

b. Bestem fordelingens middelværdi, varians og standardafvigelse.

```
lambda = 6.2 % antal fejl pr. time
```

```
lambda =
         6.2
```

```
mu = lambda % middel værdien
```

```
mu =
         6.2
```

```
var = lambda % variansen
```

```
var =
         6.2
```

```
std = sqrt(lambda) % standard afvigelsen
```

```
std =
        2.49
```

$\mu = 6,2$

$\sigma^2 = 6,2$

$\sigma = 2,49$

c. Bestem sandsynligheden for netop 4 glas med fejl.

Der benyttes den indbyggede propperbility density function i matlab.

Denne benytter formlen i opgave a gevet en y værdi og en gennesnitsværdi

Senere gøres dette også med cdf som er den kummulerede tæthedsfunction (sandsynlighed fra typisk 0 til x)

```
P_4 = poisspdf(4,mu)
```

```
P_4 =
      0.12495
```

Således 12,5% sandsynlighed.

d. Bestem sandsynligheden for mindst 5 glas med fejl.

```
P_5_or_more = 1 - poisscdf(4,mu)
```

```
P_5_or_more =
      0.74082
```

Således 74,1% sandsynlighed.

e. Bestem sandsynligheden for mindst 5 og højst 9 glas med fejl.

```
P_5_til_og_med_9 = poisscdf(9,mu) - poisscdf(4,mu)
```

```
P_5_til_og_med_9 =
      0.64244
```

Således 64,2% sandsynlighed.

f. Bestem sandsynligheden for netop 10 glas med fejl i et tilfældigt valgt interval på 2 timer.

Der formodes at der er et gennemsnit på $2 \cdot \mu$ på de to timer og dermed får vi:

```
poisspdf(10,2*mu)
```

```
ans =
     0.097544
```

Således 9,8% sandsynlighed.

Opgave 2

```
clear all
clf
format shortg
```

a.

Der fremstilles 140 propelblade pr. døgn. Resultatet ses i følgende tabel.

	Maskine A	Maskine B	Maskine C
In Intakt propelblad	39	41	36
D Defekt propelblad	11	4	9
I alt	50	45	45

Et tilfældigt blandt de fremstillede propelblade udtages.

a. Beregn sandsynlighederne for følgende:

Propelbladet er intakt, $P(\text{In})$
Propelbladet er defekt, $P(\text{D})$
Propelbladet er fremstillet på maskine A, $P(\text{A})$
Propelbladet er fremstillet på maskine B, $P(\text{B})$
Propelbladet er fremstillet på maskine C, $P(\text{C})$

Vi opstiller først vores data

```
A_in = 39;
B_in = 41;
C_in = 36;

A_D = 11;
B_D = 4;
C_D = 9;

A_tot = 50;
B_tot = 45;
C_tot = 45;

tot = 140;
tot_in = A_in + B_in + C_in
```

```
tot_in =
   116
```

```
tot_D = A_D + B_D + C_D
```

```
tot_D =
    24
```

Vi finder nu sandsynlighederne

```
P_in = tot_in / tot
```

```
P_in =
      0.82857
```

For intakt 82,9% sandsynlighed.

```
P_D = tot_D / tot
```

```
P_D =
      0.17143
```

For defekt 17,1% sandsynlighed.

```
P_A = A_tot / tot
```

```
P_A =
      0.35714
```

Producerede på maskine A 35,7% sandsynlighed.

```
P_B = B_tot / tot
```

```
P_B =
      0.32143
```

Producerede på maskine B 32,1% sandsynlighed.

```
P_C = C_tot / tot
```

```
P_C =
      0.32143
```

Producerede på maskine C 32,1% sandsynlighed.

Antag, at der er uafhængighed mellem kvaliteten af de fremstillede propelblade, og hvilken maskine propelbladene er fremstillet på.

b. Udfyld nedenstående tabel med forventede antal propelblade pr. døgn. Nødvendige mellemregninger skal fremgå.

b.

Vi finder forventede antal propelblade pr. døgn ved hver maskine intakte og defekte, ved at bruge den totale mængde, samt ved antagelse af uafhængighed kan vi gange sandsynligheden for hhv intakte og defekte blade sammen med sandsynligheden for at proppellen er producerede på den respektive maskine A, B eller C.

Her beskriver E at det er et antal af den totale mængde. procensatsen er en fælles hændelse. Hændelsen for fx in(intakte) og producerede på maskine A $P(In \cap A)$.

```
E_in_A = tot * P_in * P_A
```

```
E_in_A =
       41.429
```

Intakte fra maskine A = 41 stk

```
E_in_B = tot * P_in * P_B
```

```
E_in_B =
       37.286
```

Intakte fra maskine B = 37 stk

```
E_in_C = tot * P_in * P_B
```

```
E_in_C =
       37.286
```

Intakte fra maskine C = 37 stk

```
E_D_A = tot * P_D * P_A
```

```
E_D_A =
       8.5714
```

Defekte fra maskine A = 9 stk

```
E_D_B = tot * P_D * P_B
```

```
E_D_B =
       7.7143
```

Defekte fra maskine B = 8 stk

```
E_D_C = tot * P_D * P_B
```

```
E_D_C =
       7.7143
```

Defekte fra maskine C = 8 stk

```
Kol_names = {'Maskine A', 'Maskine B', 'Maskine C', 'I alt'};
row_names = {'In', 'D', 'I alt'};
table(round([E_in_A; E_D_A; E_in_A+ E_D_A],0), ...
    round([E_in_B; E_D_B; E_in_B + E_D_B],0), ...
    round([E_in_C; E_D_C; E_in_C + E_D_C],0), ...
    round([tot_in; tot_D; tot],0), VariableNames=Kol_names, RowNames=row_names)
```

ans = 3×4 table

	Maskine A	Maskine B	Maskine C	I alt
1 In	41	37	37	116
2 D	9	8	8	24
3 I alt	50	45	45	140

Således for vi den forventede tabel vist herover. Det bemærkes at intakte og defekte blades total ikke går helt op på grund af afrundinger.

I alle udregninger bruges dog de præcise komma tal.

c.

Det skal nu undersøges ved hjælp af en hypotesetest om kvaliteten af de fremstillede propelblade er uafhængig af hvilken maskine propelbladene er fremstillet på. Ved hypotesetesten anvendes et signifikansniveau på 10%.

c. Opstil nulhypotese og alternativ hypotese for hypotesetesten.

H_0 : kvaliteten af proppelerne er **uafhængig** af om de er producerede på maskine A, B og C

H_a : kvaliteten af proppelerne er **afhængig** af om de er producerede på maskine A, B og C

d. Opstil en formel for teststørrelsen (teststatistikken), og angiv hvilken fordeling den følger.

Vi tester for uafhængighed og benytter derfor in χ^2 test hvor der summes over kollonner og rækker

$$\chi^2{}_0 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

den følger en χ^2 fordeling.

e. Bestem den kritiske værdi og angiv det kritiske område for testen, når der vælges et signifikansniveau på 10%.

```
alpha = 1 - 0.10 % signifikansniveau på 10%
```

```
alpha =
          0.9
```

```
df = (2 - 1) * (3 - 1) % en to gange tre matrix estameres
```

```
df =
     2
```

```
chi_c = chi2inv(alpha, df) % den kritiske værdi
```

```
chi_c =
       4.6052
```

Vi har nu at $\chi_0^2 < \chi_c^2 = 4,6052$ for at forblive uden for det kritiske område og beholde H_0 hypotesen.

f. Beregn teststørrelses (teststatistikkens) værdi. Mellemregninger skal fremgå.

Vi finder de forskellige led i sumningen. i alt er der 6 led pga de 2 rækker og 3 kolonner.

```
chi2_in_A = (A_in - E_in_A)^2 / E_in_A
```

```
chi2_in_A =
      0.14236
```

```
chi2_D_A = (A_D - E_D_A)^2 / E_D_A
```

```
chi2_D_A =
       0.6881
```

```
chi2_in_B = (B_in - E_in_B)^2 / E_in_B
```

```
chi2_in_B =
      0.37001
```

```
chi2_D_B = (B_D - E_D_B)^2 / E_D_B
```

```
chi2_D_B =
       1.7884
```

```
chi2_in_C = (C_in - E_in_C)^2 / E_in_C
```

```
chi2_in_C =
     0.044335
```

```
chi2_D_C = (C_D - E_D_C)^2 / E_D_C
```

```
chi2_D_C =
      0.21429
```

Vi kan nu summer ledene sammen til at finde vores χ_0^2. (ligningen fra opgave d benyttes)

```
chi2_0 = chi2_in_A + chi2_D_A + chi2_in_B + chi2_D_B + chi2_in_C + chi2_D_C
```

```
chi2_0 =
       3.2474
```

g. Konkluder på hypotesetesten.

Det ses at $\chi_0^2 = 3,2474 < 4,6052 = \chi_c^2$ og vi er kan således ikke forkaste vores H_0 hypotese.

Vi konkludere således at kvaliteten af bladene er ens ligegyldigt om de er alavet på maskine A, B eller C, med 90% sikkerhed.

h. Bestem p-værdien.

```
p = 1 - chi2cdf(chi2_0,df)
```

```
p =
      0.19716
```

Vi får nu en p-værdi på 0,20.

Opgave 3

```
clear all
clf
format shortg
%vi henter data fra excel filen
data = xlsread("Statestik\Eksamens sæt\EKSAMEN\Data_M4STI1_2023F.xlsx", 'H:I');
```

Opgave 3

Følgende 14 sammenhørende målinger af spænding (x) og flux (y) er målt på en standard fluxkondensator (flux capacitor) i en DeLorean DMC, model 1985:

x	0	5	10	10	15	20	20
y	22.7	165.5	236.5	214.3	255.6	226.1	255.0
x	25	25	30	30	35	40	45
y	249.7	233.6	254.8	288.6	345.9	529.7	740.1

Fluxkondensator

Kilde: m.media-amazon.com/images/W/IMAGEREN DERING_521856-T1/images/I/71cv3X1C6PL._AC_SX679_.jpg

a. Lav en lineær regression med y som funktion af x og skriv regressionsligningen op.

a.

```
x = data(:,1);
y = data(:,2);
mdl = fitlm(x, y)
```

```
mdl =
Linear regression model:
    y ~ 1 + x1

Estimated Coefficients:
                   Estimate      SE       tStat       pValue
                   ________    ______    _______    __________

    (Intercept)      46.73     49.296    0.94795       0.36186
    x1               10.851    1.9283     5.6275    0.00011118


Number of observations: 14, Error degrees of freedom: 12
Root Mean Squared Error: 92.2
R-squared: 0.725,  Adjusted R-Squared: 0.702
F-statistic vs. constant model: 31.7, p-value = 0.000111
```

Vi får nu den lineær regressionsligningen

$$y(x) = 46,73 + 10,851 \cdot x$$

b. Vurder ud fra regressionsanalysens statistikker (f.eks. R2, F og p-værdier), om modellen beskriver observationerne godt.

Modellen passer ikke særlig godt på dataene da vi har en lav R^2_{adj} værdi på 0,702. Her vil vi gerne ha over 0,9.

R-værdien er nemlig et mål for hvor stor en del af variationen i dataen der forklares af modellen. Hvor R^2_{adj} justere for antal parametre i modellen

p værdien fortæller også at skæringspunktet(intercept) ikke passer særlig godt med en p-værdi på 0,36 hvilket må formodes over et bestemt significant nivue.

F værdien og den lave p-værdi for x_1 fortæller dog at der kan være et sammenhæng mellem x og y.

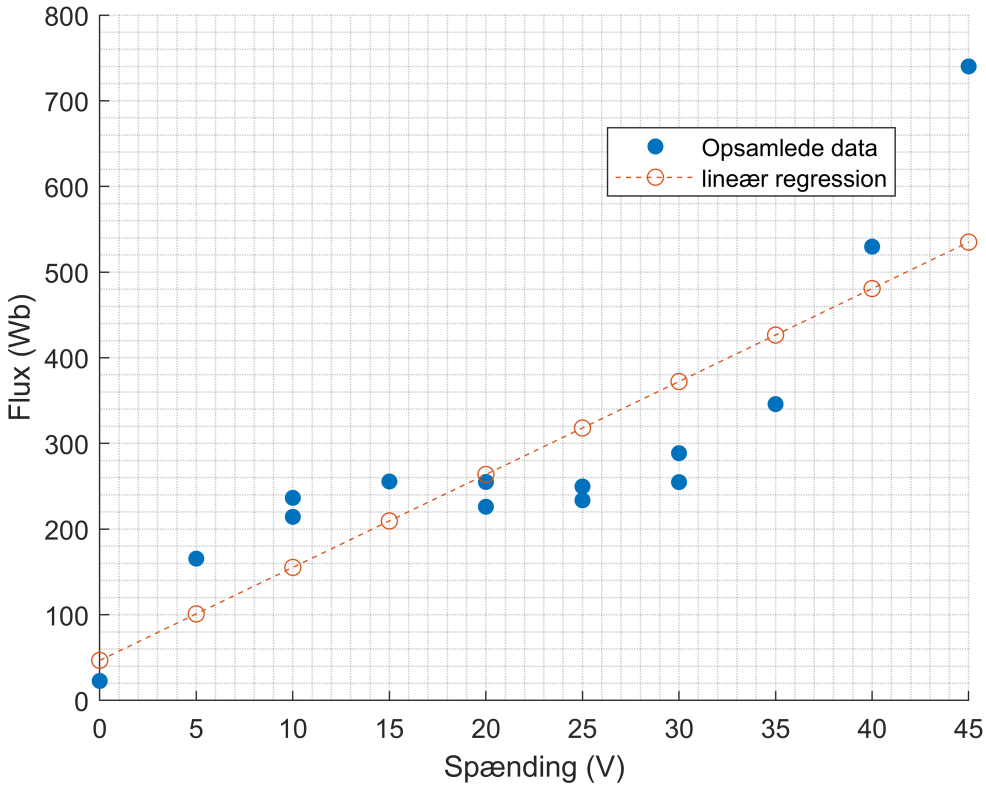
c. Lav et plot, der viser data og regressionsligningen. Diskutér sammenhængen mellem regressor- og responsvariablen.

Vi opstiller vores lineær funktion

```
y_fun = @(X) 46.73 + 10.851 * X
```

```
y_fun = function_handle with value:
    @(X)46.73+10.851*X
```

```
figure(1)
scatter(x, y, 'filled', DisplayName='Opsamlede data')
hold on
plot(x, y_fun(x), 'o--', DisplayName='lineær regression')
% lsline %alternativ kan der bruges lsline til at vise den lineær
% regrassion
xlabel('Spænding (V)')
ylabel('Flux (Wb)')
grid('minor')
legend('Location','best')
hold off
```




```
% man kunne også have plottet det som
% plot(mdl) % fra fitlm tidliger for at få et hurtigt overblik
```

I plottet ses dataen med en S form omkring regressionen. Dette siger mig at modellen ikke passer helt godt og især til sidst ser data ud til at "stikke lidt af" op af y-aksen. Dette kunne tyde på at en polynomium form.

d.

Lav en polynomiel regression, der udtrykker y som et tredjegradspolynomium af x:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

hvor b_0, b_1, b_2 og b_3 er konstanter.
Skriv regressionsligningen op.

Vi benytter igen fitlm, dog modificerede

```
mdl2 = fitlm(x,y, 'y ~ x1 + x1^2 + x1^3')
```

```
mdl2 =
Linear regression model:
    y ~ 1 + x1 + x1^2 + x1^3

Estimated Coefficients:
                   Estimate        SE         tStat       pValue
                   ________    _________    _______    _________
```

(Intercept)	27.325	14.127	1.9343	0.081848
x1	35.085	2.6749	13.116	1.2604e-07
x1^2	-1.8455	0.13924	-13.254	1.141e-07
x1^3	0.031651	0.0020149	15.708	2.2424e-08

```
Number of observations: 14, Error degrees of freedom: 10
Root Mean Squared Error: 15.7
R-squared: 0.993,  Adjusted R-Squared: 0.991
F-statistic vs. constant model: 498, p-value = 3.5e-11
```

Således fås funktionen

$$y(x) = 27,325 + 35,085 \cdot x - 1,8455 \cdot x^2 + 0,031651 \cdot x^3$$

e. Er den polynomielle regressionsmodel bedre end den lineære model? Begrund dit svar.

Ja modellen er meget bedre og tyder på at vores formodning om polynomium passede bedre.

Dette ses ud fra en R^2_{adj} på 0,991 og de lave p-værdier.

Kun p-værdien for skæringspunktet(intercept) på 0,082 kan være en lille smule ved siden af hvis vi ønsker et significans nivue på 5%.

I det følgende skal du bruge modellen fra delopgave d. Hvis du ikke har besvaret delopgave d, kan du bruge modellen fra delopgave a.

f. Lav et residualplot, der viser studentiserede residualer mod $\hat{y}$. Diskutér resultatet.

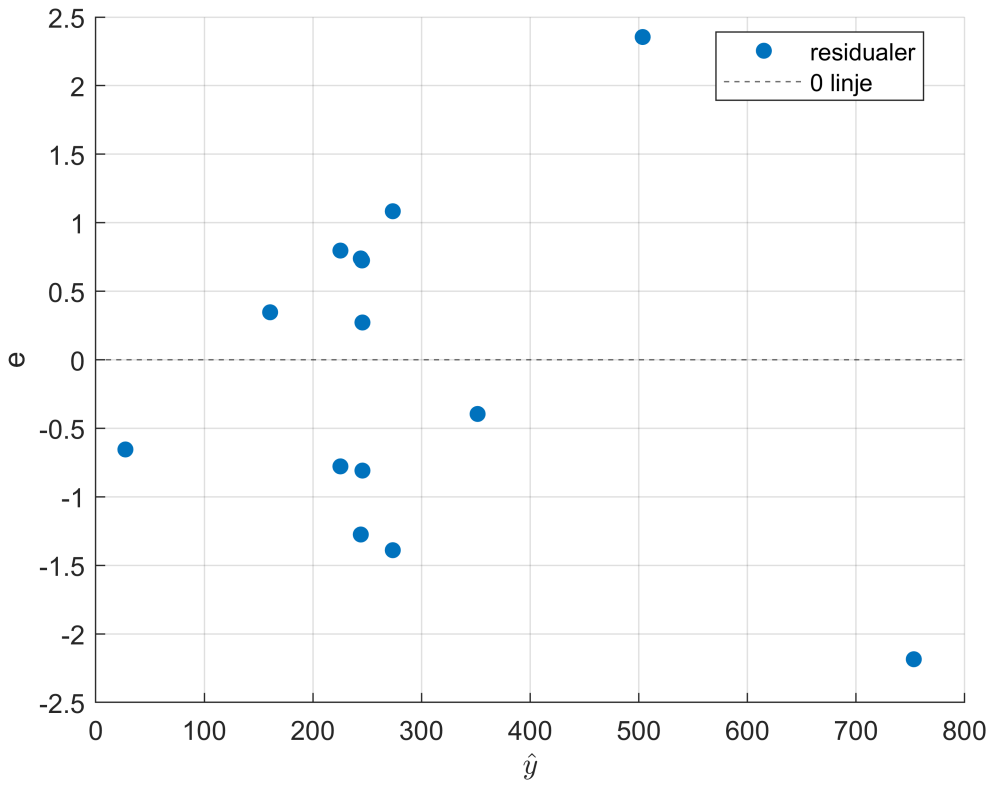
```
[yhat, yci] = predict(mdl2, x);
```

Vi finder de studentisrede residualer fra vores model lavet med fitlm

```
rst = mdl2.Residuals.Studentized; % Outlier punkter "unormale" værdier i y-retningen. abs(rst)
```

Vi kan nu opstille plottet.

```
figure(2)
scatter(yhat, rst, 'filled', DisplayName='residualer')
yline(0, '--', DisplayName='0 linje')
xlabel('$\hat y$', Interpreter='latex')
ylabel('e')
grid('on')
legend('Location','best')
```



g. Undersøg om der er unormale observationer i datasættet og angiv eventuelle unormale observationer med deres type (outliers, løftestangs-punkter eller indflydelsespunkter).

Vi finder løftestang punkterne direkte fra fitlm således

```
lev = mdl2.Diagnostics.Leverage; %løfte punkter %'unormale' i x-retningen  % y hat
```

Vi finder løfte punktets maximale værdi

```
c = 3; %antal regressor variable
n = length(rst); %antalt observationer
lev_limit = 2 * (c +1 )/ n
```

```
lev_limit =
      0.57143
```

Vi kan nu sammenligne alle vores løftepunkter med max værdien

```
find(lev > lev_limit)
```

```
ans = 2×1
     1
    14
```

Det findes at punkt 1 og 14 er løfte punkter (tabel vises nedenfor).

Vi kan nu se om vores residualer er størrer end 3 og dermed outliers.

```
find(abs(rst) > 3)
```

```
ans =

  0×1 empty double column vector
```

Ingen outliers findes.

Da vi skal ha at et punkt både skal være en outlier og et løfte punkt for at være etindflydelses punkt så kan det ses at der ikke er nogle indflydelses punkter.

```
nr = (1:length(rst))';
disp(table(nr, x, y, lev, rst, yhat))
```

nr	x	y	lev	rst	yhat
1	0	22.7	0.80909	-0.65452	27.325
2	5	165.5	0.25114	0.34643	160.57
3	10	236.5	0.22474	0.79663	225.28
4	10	214.3	0.22474	-0.778	225.28
5	15	255.6	0.20192	0.72448	245.18
6	20	226.1	0.14794	-1.275	244.03
7	20	255	0.14794	0.73926	244.03
8	25	249.7	0.14448	0.27185	245.55
9	25	233.6	0.14448	-0.80857	245.55
10	30	254.8	0.19809	-1.3895	273.49
11	30	288.6	0.19809	1.0836	273.49
12	35	345.9	0.2337	-0.39542	351.58
13	40	529.7	0.27338	2.3548	503.56
14	45	740.1	0.80023	-2.1851	753.17

h. Beregn den forventede værdi af y, når x=27. Beregn et interval for værdier af y, hvor 95 % af målinger med x=27 må forventes at ligge indenfor.

Vi laver antager en t fordeling pga. da spredningen af populationen er ukendt og at det forventes at den centrale grænseværdi sætning er overholdt. Således finder vi konfidensintervallet med

$$\bar{y} \pm t_{df,\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

```
alpha = 0.05;
s = std(x) % standardafvigelsen for stikprøven
```

```
s =
       13.26
```

```
n = length(x) % antal målinger (stikprøvens størrelse)
```

```
n =
    14
```

```
df = n-1 % frihedsgrader
```

```
df =
```

13

```
B = tinv(1 - alpha/2, df) * s/sqrt(n) % vores +- værdi
```

```
B =
        7.656
```

Vi opskriver formlen fundet i opgave **d** og finder vælrdien ved x=27

```
y_mod = @(x) 27.325 + 35.085 * x - 1.8455 * x^2 + 0.031651 * x^3;
y_27 = y_mod(27)
```

```
y_27 =
       252.24
```

Vi kan nu finde min og max værdien.

```
[y_27 - B, y_27 + B]
```

```
ans = 1×2
       244.58       259.89
```

Således for vi $y(27) = 252,24 \pm 7,656$ Wb med 95% konfidens.

Opgave 4

```
clear all
clf
format shortg
```

a.

Kan beskrives med nr 2: $(A \cap C) \cap B^C$ og nr 5: $(A \cap B^C) \cap (C \cap B^C)$

b.

Kan beskrives med nr 1: $A \cap C$

c.

Kan beskrives med nr 4: $(A \cap C \cap B^C) \cup (B \cap C \cap A^C)$