Eksamen M4STI1 2019F

Løsningsforslag af Allan Leck Jensen

Opgave 1 - Sorteringseffektivitet

Oplysninger i opgaven:

```
clear; close all; clc; format compact;
n_VH = 885              % Antal stykker hårdt plastik, der skal sorteres
```

```
n_VH = 885
```

```
n_VB = 313              % Antal stykker blødt plastik, der skal sorteres
```

```
n_VB = 313
```

```
n_total = n_VH + n_VB   % Antal stykker plastik ialt.
```

```
n_total = 1198
```

```
n_SH = 738              % Antal stykker plastik, der blev sorteret som hårdt
```

```
n_SH = 738
```

```
n_SB = n_total - n_SH   % Antal stykker plastik, der blev sorteret som blødt
```

```
n_SB = 460
```

```
n_VH_n_SH = 732     % Antal stykker hårdt plastik, der er sorteret som hårdt
```

```
n_VH_n_SH = 732
```

```
                    % Jeg bruger n som tegnet for fælleshændelse, så (VH n SH) betyder
                    % at plastikstykket er både hårdt i virkeligheden og sorteret som hårdt
n_VB_n_SB = 307     % Antal stykker blødt plastik, der også er sorteret som blødt
```

```
n_VB_n_SB = 307
```

Tallene kan stilles op i en tabel for at få overblik (jeg har lavet den i Excel):

	Virkeligt Hård (VH)	Virkeligt Blød (VB)	Total
Sorteret Hård (SH)	n_(VHnSH) = **732**	n_(VBnSH) = 738 - 732 = 313 - 307 = **6**	n_SH = **738**
Sorteret Blød (SB)	n_(VHnSB) = 885 - 732 = 460 - 307 = **153**	n_(VBnSB) = **307**	n_SB = 1198 - 738 = **460**
Total	n_VH = **885**	n_VB = **313**	n_tot = 885 + 313 = **1198**

Tallene med gul baggrund er oplyste, dem med hvid baggrund er beregnet.

a. Beregn sandsynlighederne P(*VH*), P(*VB*), P(*SH*) og P(*SB*) for kassens indhold.

Sandsynligheden for, at et tilfældigt stykke plastik er hårdt i virkeligheden, beregnes som antal stykker plastik, der er hårde i virkeligheden (n_VH = 885) delt med det totale antal plastikstykker (n_total = 1198). Det giver P_VH = 0.7387. De andre sandsynligheder beregnes tilsvarende:

```
P_VH = n_VH/n_total
```

```
P_VH = 0.7387
```

```
P_VB = n_VB/n_total
```

```
P_VB = 0.2613
```

```
P_SH = n_SH/n_total
```

```
P_SH = 0.6160
```

```
P_SB = n_SB/n_total
```

```
P_SB = 0.3840
```

b. Beregn sandsynlighederne P(*VH* | *SH*) og P(*VB* |*SB*)

Sandsynligheden for at et stykke plastik i virkeligheden er hårdt, når det er blevet sorteret som hårdt (P_VH_givet_SH), beregnes som antal stykker plastik, der er hårde i virkligheden blandt de stykker, der er blevet sorteret som hårde (n_VH_n_SH = 732), delt med antal stykker, der er blevet sorteret som hårde (n_SH = 738). Det giver P_VH_givet_SH = 0.9919, så over 99 % af det plastik, der er sorteret som hårdt, er hårdt i virkeligheden. Tilsvarende findes P_VH_givet_SH = 0.6674, så kun godt 2/3 af det plastik, der er sorteret som blødt, er blødt i virkeligheden.

Den formel, der bruges er $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

```
P_VH_givet_SH = n_VH_n_SH / n_SH
```

```
P_VH_givet_SH = 0.9919
```

```
P_VB_givet_SB = n_VB_n_SB / n_SB
```

```
P_VB_givet_SB = 0.6674
```

c. Beregn sandsynlighederne P(*VB* | *SH*) og P(*VH* |*SB*)

Hændelsen at plastik sorteres forkert er det komplementære til at det sorteres korrekt.

```
P_VB_givet_SH = 1 - P_VH_givet_SH
```

```
P_VB_givet_SH = 0.0081
```

```
P_VH_givet_SB = 1 - P_VB_givet_SB
```

```
P_VH_givet_SB = 0.3326
```

Alternativt kan de to sandsynligheder beregnes med samme metode som i delopgave b:

```
n_VB_n_SH = n_SH - n_VH_n_SH
```

```
n_VB_n_SH = 6
```

```
n_VH_n_SB = n_VH - n_VH_n_SH
```

```
n_VH_n_SB = 153
```

```
P_VB_givet_SH = n_VB_n_SH / n_SH
```

```
P_VB_givet_SH = 0.0081
```

```
P_VB_givet_SB = n_VH_n_SB / n_SB
```

```
P_VB_givet_SB = 0.3326
```

d. Andelen af hårdt plastik i ny kasse, P(*VH*)

I den nye kasse bliver 78 % sorteret som hårdt. Dermed bliver 22 % sorteret som blødt.

```
P_SH_ny = 0.78
```

```
P_SH_ny = 0.7800
```

```
P_SB_ny = 1 - P_SH_ny
```

```
P_SB_ny = 0.2200
```

Ifølge loven om den totale sandsynlighed: Det plastik, der er hårdt i virkeligheden, består af to grupper: 1) det, der er sorteret korrekt som hårdt plus 2) det, der er sorteret forkert som blødt (og som derfor i virkeligheden er hårdt):

P_VH_ny = P_VH_givet_SH_ny * P_SH_ny + P_VH_givet_SB_ny * P_SB_ny

Vi antager, at de betingede sandsynligheder er de samme for den nye kasse som for den oprindelige:

P_VH_givet_SH_ny = P_VH_givet_SH = 0.9919

P_VH_givet_SB_ny = P_VH_givet_SB = 0.6674

Derfor:

```
P_VH_ny = P_VH_givet_SH * P_SH_ny + P_VH_givet_SB * P_SB_ny
```

```
P_VH_ny = 0.8468
```

Knap 85 % af plastikken i den nye kasse er altså hårdt.

e. Beregn sandsynligheden for at et hårdt stykke plastik fra den nye kasse bliver sorteret korrekt, P(SH | VH)

Sandsynligheden P(SH |VH) kan beregnes med Bayes' formel:

P_SH_givet_VH = P_VH_givet_SH * P_SH_ny / P_VH_ny

```
P_SH_givet_VH = P_VH_givet_SH * P_SH_ny / P_VH_ny
```

```
P_SH_givet_VH = 0.9136
```

Godt 94 % af det hårde plastik i den nye kasse bliver sortertet korrekt.

Opgave 2 – Optimering af maskinens opsætning

Indlæsning af data

```
clear; close all; clc; format compact;
D = xlsread('Data_M4STI1_2019F.xlsx', 'A:C');
```

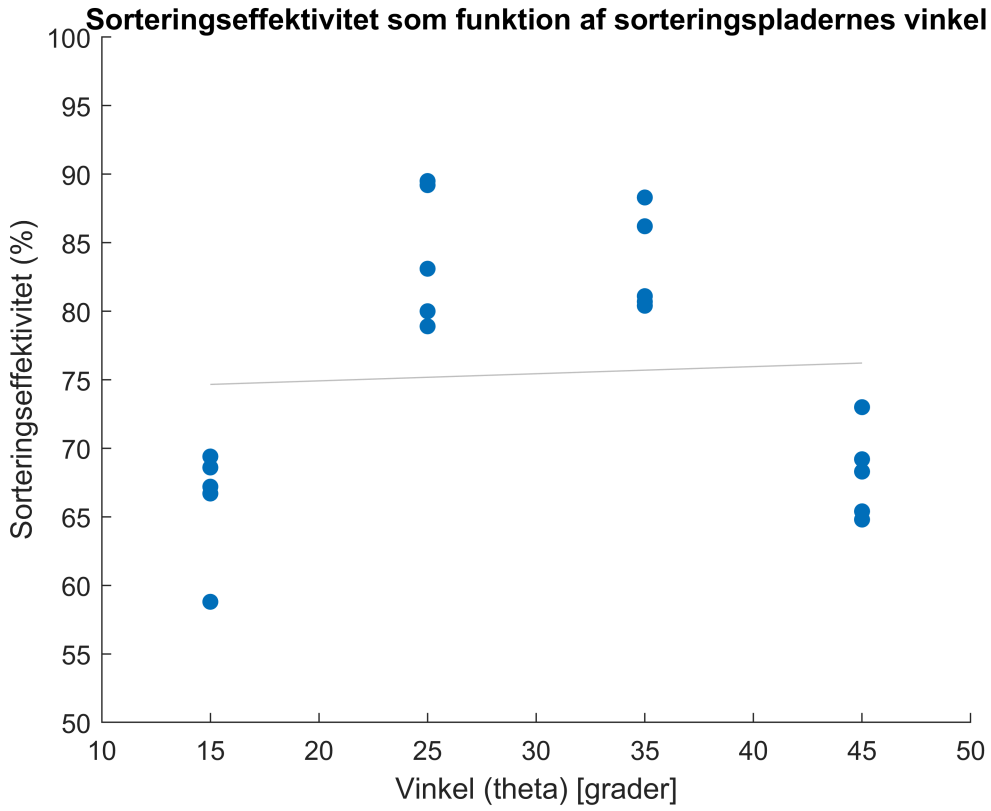
```
vinkel = D(:,1);     % Vinkel på pladerne, der skal sortere plastikken
rothast = D(:,2);    % Rotationshastighed for pladerne
effekt = D(:,3);     % Sorteringseffektivitet
n = size(D,1)       % Antal observationer i datasættet
```

```
n = 20
```

a. Lav et scatterplot af sorteringseffektivitet E over for henholdsvis vinkel theta og rotationshastighed omega. Diskutér, om der lader til at være en sammenhæng mellem den enkelte regressor og responsvariablen.

Afhængighed mellem vinkel og sorteringseffektivitet

```
figure(1)
scatter(vinkel, effekt, 'filled')
lsline
title('Sorteringseffektivitet som funktion af sorteringspladernes vinkel')
xlabel('Vinkel (theta) [grader]')
ylabel('Sorteringseffektivitet (%)')
axis([10, 50, 50, 100])
```

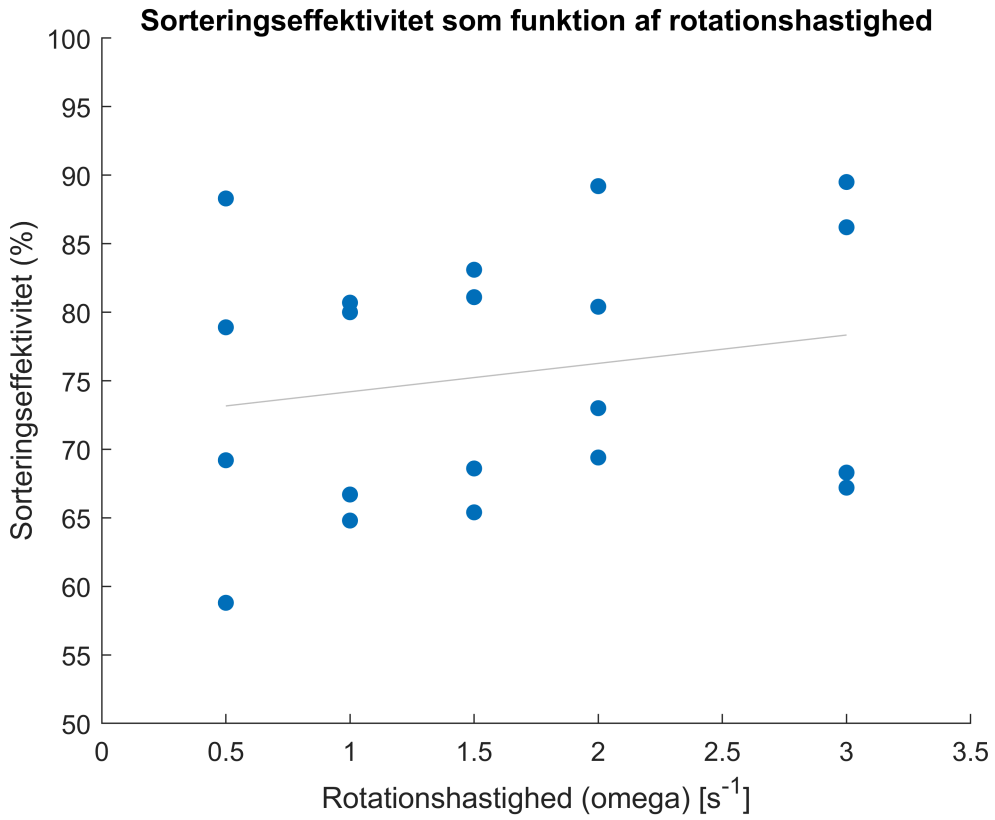


Der lader til at være en sammenhæng mellem vinkel og sorteringseffekt, men den er ikke lineær. Sorteringseffektiviteten er høj ved 25 og 35 grader, men lav ved 15 og 45 grader. Formodentlig er en polynomiel sammenhæng bedre.

Afhængighed mellem rotationshastighed og sorteringseffektivitet

```
figure(2)
```

```
scatter(rothast, effekt, 'filled')
lsline
title('Sorteringseffektivitet som funktion af rotationshastighed')
xlabel('Rotationshastighed (omega) [s^{-1}]')
ylabel('Sorteringseffektivitet (%)')
axis([0, 3.5, 50, 100])
```



Der lader til at være en positiv korrelation mellem rotationshastighedog sorteringseffekt, men den er meget svag.

b. Lav en multipel lineær regressionsmodel, der beskriver sorteringseffektiviteten som funktion af vinkel theta og rotationshastighed omega. Skriv ligningen op.

```
mdl = fitlm([vinkel, rothast], effekt, 'PredictorVars', {'vinkel', 'rothast'}, 'ResponseVar','
```

```
mdl =
Linear regression model:
    effekt ~ 1 + vinkel + rothast

Estimated Coefficients:
                   Estimate      SE        tStat       pValue
                   ________    _______    _______    __________

    (Intercept)      70.57      7.3798     9.5626    2.9704e-08
    vinkel           0.052     0.19331      0.269       0.79117
    rothast         2.0689      2.5124    0.82348       0.42164

Number of observations: 20, Error degrees of freedom: 17
Root Mean Squared Error: 9.67
```

```
R-squared: 0.0423,  Adjusted R-Squared -0.0704
F-statistic vs. constant model: 0.375, p-value = 0.693
```

Regressionsligning:

effekt = 70.57 + 0.052*vinkel + 2.0689*rothast

c. Forklar vha. regressionsanalysens statistikker (f.eks. R-squared, F og p-value), om modellen beskriver observationerne godt

Modellen er dårlig til at beskrive data. Det er kun koefficienten b0 = 70.57 (dvs. skæringen med y-aksen), der er signifikant forskellig fra 0. Både b1 = 0.052 og b2 = 2.0689 har høje p-værdier (hhv. 0.79 og 0.42), så de kunne lige så godt være 0. Der er altså ingen signifikant korrelation.

Det samme resultat kommer af ANOVA testen. F-teststørrelsen er 0.375 og den tilhørende p-værdi er 0.693, så både b1 og b2 kan sagtens være 0 samtidig.

R-squared = 0.0423 fortæller ligeledes, at modellen er dårlig, da den kun beskriver 4 % af variationen i data.

d. Udvid modellen, så du inddrager kvadratled og interaktionsled. Fjern de led, som du ikke mener er nødvendige i modellen, og begrund dine valg.

Jeg udvider modellen med kvadratled og interaktionsled vha. Wilkinson notation:

```
mdl1 = fitlm([vinkel, rothast], effekt, 'y ~ x1 + x2 + x1^2 + x2^2 + x1:x2')
```

```
mdl1 =
Linear regression model:
    y ~ 1 + x1*x2 + x1^2 + x2^2

Estimated Coefficients:
                   Estimate       SE         tStat        pValue
                   ________    _________    ________    __________

    (Intercept)     0.65597       8.5642    0.076594       0.94003
    x1               5.2037      0.51642      10.076    8.5001e-08
    x2               5.9443       5.0877      1.1684       0.26217
    x1:x2           -0.1073     0.085362      -1.257       0.22933
    x1^2             -0.083    0.0082098      -10.11    8.1579e-08
    x2^2           -0.18542       1.2121    -0.15298        0.8806

Number of observations: 20, Error degrees of freedom: 14
Root Mean Squared Error: 3.67
R-squared: 0.886,  Adjusted R-Squared 0.846
F-statistic vs. constant model: 21.8, p-value = 3.76e-06
```

Jeg vælger et signifikansniveau på 5 %. Der er flere koefficienter, der ikke er signifikante: b2, b12 og b22 kan alle være lig 0, da de har p-værdier over 0.05. b22 = -0.18542 har den højeste p-værdi på 0.8806, så den er mindst signifikant. Den fjerner jeg fra modellen:

```
mdl2 = fitlm([vinkel, rothast], effekt, 'y ~ x1 + x2 + x1^2 + x1:x2')
```

```
mdl2 =
Linear regression model:
    y ~ 1 + x1*x2 + x1^2
```

```
Estimated Coefficients:
                   Estimate       SE         tStat       pValue
                   ________    _________    _______    __________

    (Intercept)     1.0945        7.8032    0.14026       0.89032
    x1              5.2037       0.49933     10.421    2.8953e-08
    x2              5.2878        2.6424     2.0011      0.063813
    x1:x2          -0.1073      0.082536       -1.3       0.21322
    x1^2            -0.083     0.0079381    -10.456    2.7707e-08

Number of observations: 20, Error degrees of freedom: 15
Root Mean Squared Error: 3.55
R-squared: 0.886,  Adjusted R-Squared 0.856
F-statistic vs. constant model: 29.1, p-value = 6.46e-07
```

Nu er koefficienterne b2 og b12 ikke signifikante, selvom b2 er tæt på med p-værdi = 0.063813. Jeg fjerner leddet for interaktion, da b12 har den største p-værdi, nemlig 0.21322:

```
mdl3 = fitlm([vinkel, rothast], effekt, 'y ~ x1 + x2 + x1^2')
```

```
mdl3 =
Linear regression model:
    y ~ 1 + x1 + x2 + x1^2

Estimated Coefficients:
                   Estimate       SE         tStat       pValue
                   ________    _________    _______    __________

    (Intercept)     6.2447        6.8661     0.9095       0.37658
    x1               5.032       0.49182     10.231    1.9963e-08
    x2              2.0689       0.94247     2.1952      0.043246
    x1^2            -0.083     0.0081074    -10.238    1.9795e-08

Number of observations: 20, Error degrees of freedom: 16
Root Mean Squared Error: 3.63
R-squared: 0.873,  Adjusted R-Squared 0.849
F-statistic vs. constant model: 36.7, p-value = 2.11e-07
```

Nu er alle koefficienter for hældningskoefficienter signfikant forskellige fra 0 på 5 % signifikansniveau. R-squared er kun reduceret fra 0.886 til 0.873 fra den fulde model til denne. Selv om plots fra delopgave a viser meget varians i data, så forklarer modellen altså 87 % af det. Samtidig er Adjusted R-Squared steget en anelse fra 0.846 til 0.849. Den model vælger jeg.

e. Skriv ligningen for din foretrukne model op. Beregn sorteringseffektiviteten, hvis vinklen sættes til theta = 28 og rotationshastigheden til omega = 2.5

Modelforskrift:

effekt = 6.2447 + 5.032*vinkel + 2.0689*rothast - 0.083*(vinkel)^2

```
effekt_est = 6.2447 + 5.032 * 28 + 2.0689 * 2.5 - 0.083 * (28)^2
```

```
effekt_est = 87.2410
```

Alternativt kan ligningen udtrykkes som en MatLab funktion (jeg undgår at bruge navnene effekt, vinkel og rothast, for jeg vil ikke overskrive mine arrays med data, der hedder dette):

```
eff = @(vinkel1, rothast1) 6.2447 + 5.032*vinkel1 + 2.0689*rothast1 - 0.083 * vinkel1.^2
```

```
eff = function_handle with value:

    @(vinkel1,rothast1)6.2447+5.032*vinkel1+2.0689*rothast1-0.083*vinkel1.^2
```

```
effekt_est = eff(28, 2.5)
```

```
effekt_est = 87.2410
```

f. Giv dit mest kvalificerede bud på, hvilken vinkel, der bør vælges for sorterings-maskinen, for at opnå så høj sorteringseffektivitet som muligt.

Der er flere måder at besvare dette delspørgsmål på. En af de mest kvalificerede måder er at finde optimum ved at differentiere modeludtrykket og sætte det lig 0. Modellens forskriftl:

effekt = b0 + b1*vinkel + b2*rothast + b11*(vinkel)^2

Ligningen differentieres partielt mht. vinkel, sættes lig 0 og løses for at bestemme optimal værdi af vinkel:

d(effekt)/d(vinkel) = 0 + b1 + 0 + 2*b11*vinkel = 0 =>

vinkel = -b1/(2*b11)

```
b1 = 5.032
```

```
b1 = 5.0320
```

```
b11 = -0.083
```

```
b11 = -0.0830
```

```
vinkel_opt = -b1/(2*b11)
```

```
vinkel_opt = 30.3133
```

Den optimale vinkel på sorteringsmaskinen er **30.3 grader**.

En alternativ (men mindre kvalificeret) løsning kunne være at aflæse den optimale vinkel i scatterplottet fra delspørgsmål a. Her lader toppunktet til at være cirka midt imellem 25 og 35 grader, altså er vinkel_opt = 30 et godt bud.

Man kan også sætte alle heltallige værdier af vinkel fra 25 til 35 ind i ligningen fra 2.e og bestemme den vinkel med størst effekt. Men så skal man argumentere for, hvilken værdi af rotationshastighed, man kan vælge. Det er dog ligegyldigt, for der er ingen interaktion mellem vinkel og rotationshastighed (jeg har jo fjernet interaktionsleddet i fitlm, for det var ikke signifikant). Derfor er effekten maksimal for en vinkel på ca 30 grader, uanset værdien af rotationshastighed.

g. Undersøg om der er unormale observationer i datasættet (outliers, løftestangs-punkter eller indflydelsespunkter).

```
lev = mdl3.Diagnostics.Leverage;     % hat diagonal
rst = mdl3.Residuals.Studentized;    % R-Student
```

```
nr = (1:n)';                              % Observationsnummer
```

Bemærk at jeg skal bruge mdl3, som gælder for min endelige model, til at finde hatdiagonaler og R-Student. Jeg samler det hele til en resultattabel (jeg laver først et array, og dernæst laver jeg arrayet om til en tabel med tabeloverskrifter. På den måde får jeg vist alle rækkerne i rapporten):

```
resarray = [nr, vinkel, rothast, effekt, lev, rst];
resultat = array2table(resarray, ...
    'VariableNames',{'Nr','Vinkel','Rotationshastighed', 'Effekt', 'Leverage', 'RStudent'})
```

resultat = 20×6 table

	Nr	Vinkel	Rotationsha...	Effekt	Leverage	RStudent
1	1	15	0.5000	58.8000	0.2718	-1.8286
2	2	15	1.0000	66.7000	0.2143	0.4801
3	3	15	1.5000	68.6000	0.1907	0.7395
4	4	15	2.0000	69.4000	0.2008	0.6707
5	5	15	3.0000	67.2000	0.3224	-0.6773
6	6	25	0.5000	78.9000	0.1918	-0.6954
7	7	25	1.0000	80.0000	0.1343	-0.6516
8	8	25	1.5000	83.1000	0.1107	-0.0490
9	9	25	2.0000	89.2000	0.1208	1.4934
10	10	25	3.0000	89.5000	0.2424	0.9891
11	11	35	0.5000	88.3000	0.1918	2.2620
12	12	35	1.0000	80.7000	0.1343	-0.5979
13	13	35	1.5000	81.1000	0.1107	-0.7779
14	14	35	2.0000	80.4000	0.1208	-1.3337
15	15	35	3.0000	86.2000	0.2424	-0.2140
16	16	45	0.5000	69.2000	0.2718	1.1617
17	17	45	1.0000	64.8000	0.2143	-0.5721
18	18	45	1.5000	65.4000	0.1907	-0.6977
19	19	45	2.0000	73.0000	0.2008	1.3447
20	20	45	3.0000	68.3000	0.3224	-0.8352

```
k = 3;                    % Der er tre regressorer i min model (nemlig vinkel, rothast og (vinkel
lev_limit = 2*(k+1)/n
```

lev_limit = 0.4000

Bemærk at selv om der kun er to regressorvariable i data, så har jeg 3 i min model, nemlig vinkel, rothast og (vinkel)^2.

Der er ingen løftestangspunkter, for ingen har lev > lev_limit = 0.4.

Der er ingen outliers, for ingen har |rst| > 3.

Dermed er der heller ingen indflydelsespunkter.

Opgave 3 – Belægning på sorteringspladerne

Indlæsning af data

```
clear; close all; clc; format compact;
D = xlsread('Data_M4STI1_2019F.xlsx', 'E:F');
```

```
effekt_opr = D(:,1)     % Sorteringseffekt med oprindelig belægning
```

```
effekt_opr = 24×1
   70.3000
   86.7000
   77.9000
   75.0000
   79.7000
   73.9000
   80.9000
   78.2000
   91.9000
   86.7000
      ⋮
```

```
effekt_ny = D(:,2)      % Sorteringseffekt med ny belægning
```

```
effekt_ny = 24×1
   78.6000
   75.6000
   86.6000
   79.2000
   81.3000
   82.7000
   81.3000
   78.3000
   79.6000
   80.6000
      ⋮
```

```
n = size(D,1)           % Antal sorteringer, dvs. stikprøvestørrelse
```

```
n = 24
```

a. Beregn gennemsnit, varians og standardafvigelse for de to stikprøver

```
y_streg_opr = mean(effekt_opr)
```

```
y_streg_opr = 80.6875
```

```
y_streg_ny = mean(effekt_ny)
```

```
y_streg_ny = 80.3958
```

```
s2_opr = var(effekt_opr)
```

```
s2_opr = 31.8811
```

```
s2_ny = var(effekt_ny)
```

```
s2_ny = 6.6048
```

```
s_opr = std(effekt_opr)
```

```
s_opr = 5.6463
```

```
s_ny = std(effekt_ny)
```

```
s_ny = 2.5700
```

b. Beregn et 95 % konfidensinterval for populationsmiddelværdien for sorteringseffektiviteten af hårdt plastik med hhv. oprindelig og ny belægning.

```
alfa = 0.05          % Signifikansniveau
```

```
alfa = 0.0500
```

```
df = n - 1           % Antal frihedsgrader
```

```
df = 23
```

```
t_alfahalve = -tinv(alfa/2, df)
```

```
t_alfahalve = 2.0687
```

```
% alternativt: t_alfahalve = tinv(1 - alfa/2, df)
```

95% konfidensinterval for oprindelig belægning:

```
KI_bredde_opr = t_alfahalve*s_opr/sqrt(n)
```

```
KI_bredde_opr = 2.3842
```

```
KI_min_opr = y_streg_opr - KI_bredde_opr
```

```
KI_min_opr = 78.3033
```

```
KI_max_opr = y_streg_opr + KI_bredde_opr
```

```
KI_max_opr = 83.0717
```

95% konfidensinterval for oprindelig belægning: **[78.3033; 83.0717]**

95% konfidensinterval for ny belægning:

```
KI_bredde_ny = t_alfahalve*s_ny/sqrt(n)
```

```
KI_bredde_ny = 1.0852
```

```
KI_min_ny = y_streg_ny - KI_bredde_ny
```

```
KI_min_ny = 79.3106
```

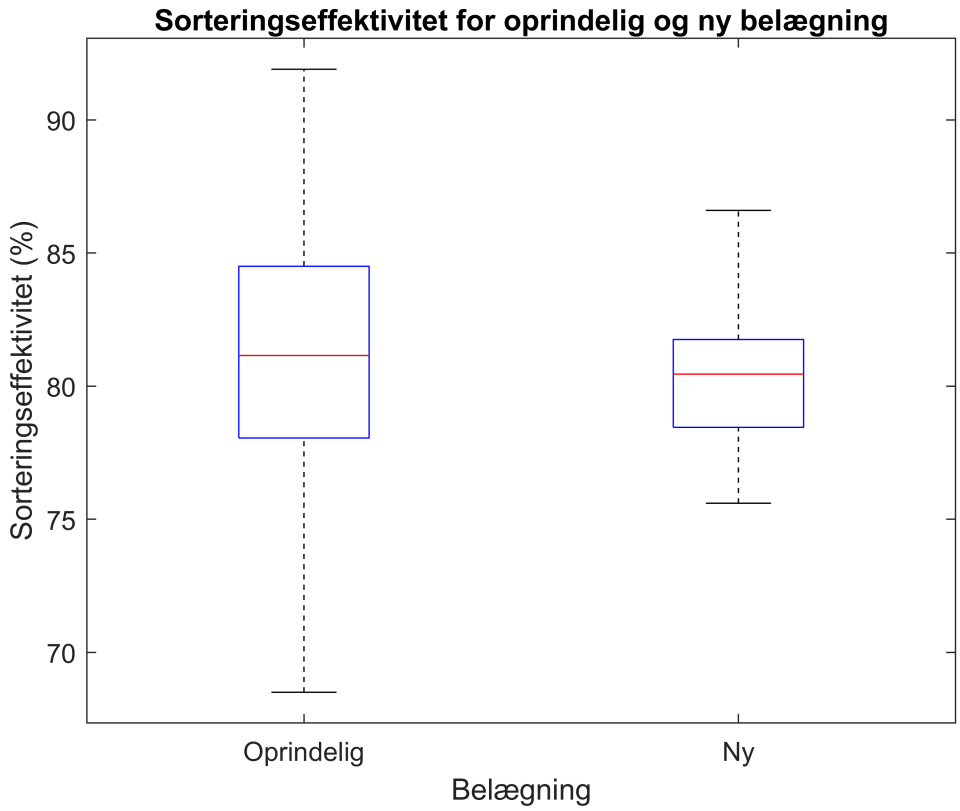
```
KI_max_ny = y_streg_ny + KI_bredde_ny
```

```
KI_max_ny = 81.4810
```

% 95% konfidensinterval for ny belægning: **[79.3106; 81.4810]**

c. Lav et parallelt boksplot af de to stikprøver. Hvad fortæller dine resultater fra delspørgsmål a., b. og c. dig om forskelle på de to belægninger?

```
boxplot(D, 'Labels', {'Oprindelig', 'Ny'})
title('Sorteringseffektivitet for oprindelig og ny belægning')
ylabel('Sorteringseffektivitet (%)')
xlabel('Belægning')
```



Forskelle på oprindelig og ny belægning:

I a. så vi at middelværdierne er sammenlignelige for de to stikprøver (hhv. 80.7 og 80.4), men der lader til at være forskel på standardafvigelserne (hhv. 5.6 og 2.6) og dermed på varianserne.

I b. så vi samme billede, at 95 % konfidensintervallet for oprindelig belægning var bredere end for ny (hhv. [78.3; 83.1] og [79.3; 81.5]).

I c. viser det parallelle boksplot at medianerne er på samme niveau, men de interkvartile ranges og kostene er større for den oprindelige belægning.

Alt i alt lader den nye belægning til at have gjort sorteringen mere ensartet og dermed mere uafhængig af fordelingen af hårdt og blødt plastik i kasserne. Det lader til at problemet med at sortere fladt, hårdt plastik er blevet løst.

d. Projektgruppen vurderer, at der ikke er signifikant forskel på den gennemsnitlige sorteringseffektivitet. Derimod vil de gerne foretage en hypotesetest for, om der på 5 % signifikansniveau er forskel på varianserne. Opskriv nulhypotese og alternativhypotese for denne hypotesetest.

Nul- og alternativhypotese:

H_0: sigma2_opr = sigma2_ny

H_a: sigma2_opr <> sigma2_ny,

hvor sigma2_opr og sigma2_ny er populationsvariansen for sorteringseffektivitet af hårdt plastik med hhv. oprindelig og ny belægning

e. Opstil formlen for teststørrelsen og angiv, hvilken fordeling den følger.

Formel for teststørrelsen:

F_0 = s2_opr / s2_ny,

hvor s2_opr og s2_ny er stikprøvevarianserne for sorteringseffektiviteten med hhv. oprindelig og ny belægning.

Teststørrelsen er F-fordelt med n-1 frihedsgrader i både tæller og nævner (da vi har samme stikprøvestørrelse i de to stikprøver, nemlig n = 24).

f. Beregn den kritiske region for testen, beregn teststørrelsen og konkludér på hypotesetesten.

Kritisk region:

Det er en to-sidet test (vi tester blot, om der er forskel på varianserne i de to stikprøver), så nulhypotesen forkastes, hvis teststørrelsen er under F_alfahalve_nedre eller over F_alfahalve_oevre, som beregnes sådan:

```
alfa = 0.05
```

```
alfa = 0.0500
```

```
F_alfahalve_nedre = finv(alfa/2, n-1, n-1)
```

```
F_alfahalve_nedre = 0.4326
```

```
F_alfahalve_oevre = finv(1-alfa/2, n-1, n-1)
```

```
F_alfahalve_oevre = 2.3116
```

Teststørrelsens værdi:

```
F_0 = s2_opr / s2_ny
```

```
F_0 = 4.8270
```

Konklusion:

Da F_0 > F_alfahalve_oevre forkastes nulhypotesen.

Med andre ord viser stikprøverne, at der på 5 % signifikansniveau er forskel på variansen af sorteringseffektiviteten med de to belægninger.

Da teststørrelsen beregnes som forholdet mellem stikprøvernes varians kunne den lige så godt beregnes sådan:

```
F_0 = s2_ny / s2_opr
```

```
F_0 = 0.2072
```

I så fald forkastes nulhypotesen ligeledes, da F_0 < F_alfahalve_nedre

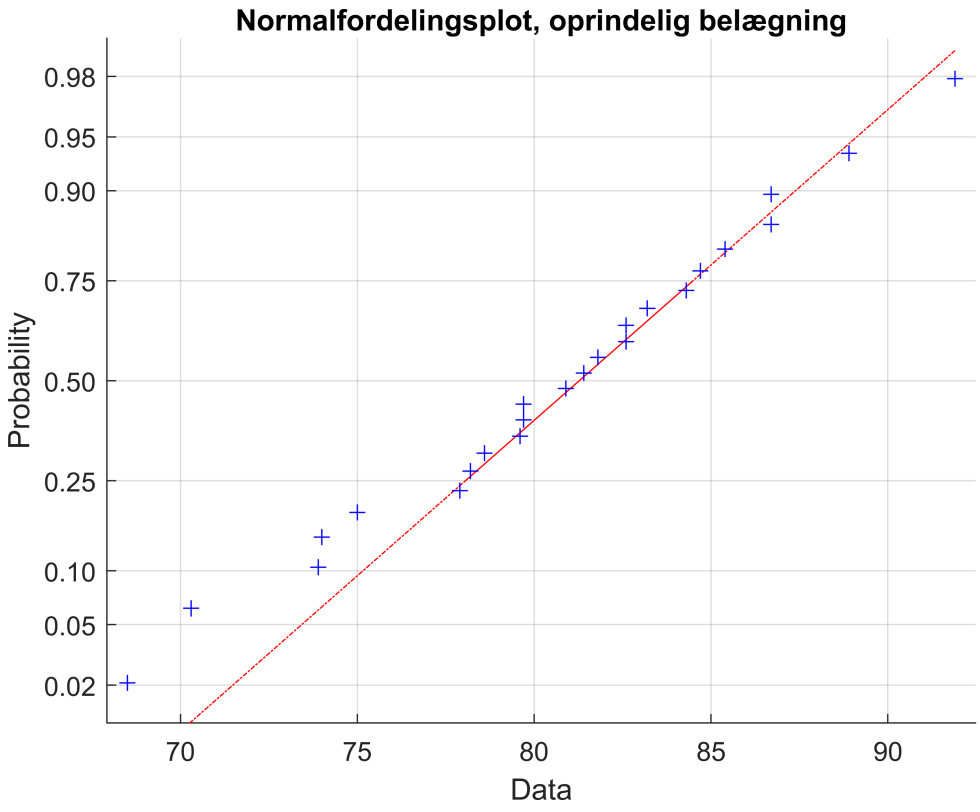
g. Oplys hvilke antagelser, der er gjort i hypotesetesten, og om antagelserne er rimelige på baggrund af data.

Hypotesetesten for varianser bygger på antagelsen, at observationerne i de to stikprøver begge er normalfordelte. Det er en stærkere antagelse end den Centrale Grænseværdisætning, hvor det blot antages, at data kommer fra en 'pæn' fordelingen, med mindre stikprøvestørrelsen er stor.

Vi kan teste antagelsen med normalfordelingsplot:

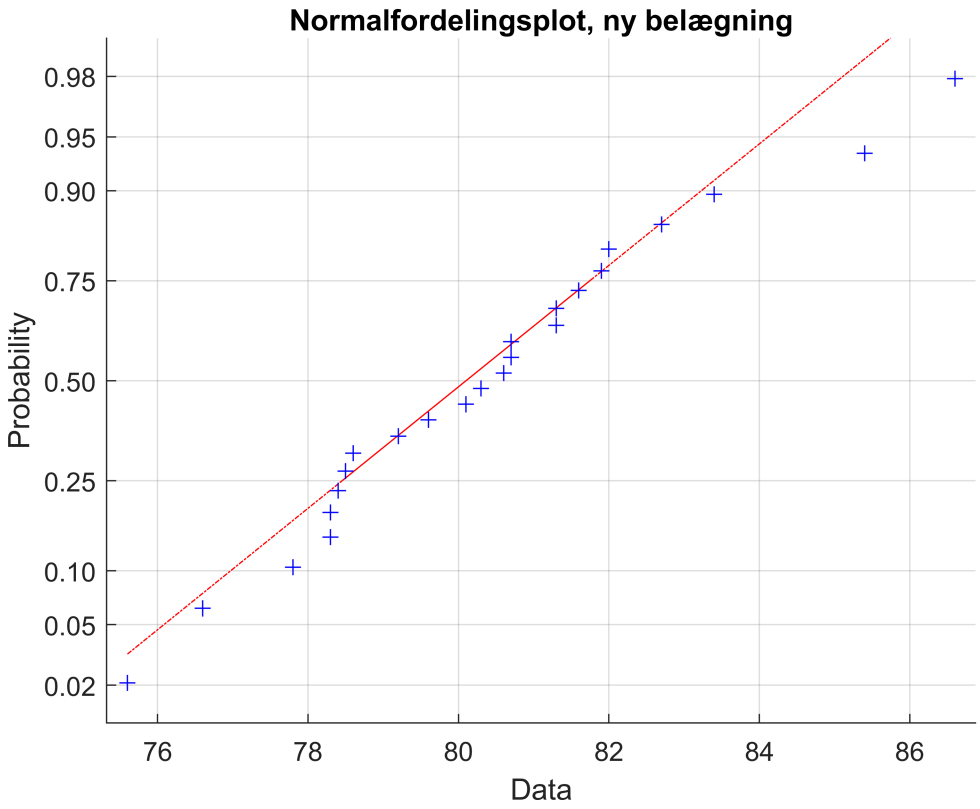
Stikprøve med oprindelig belægning:

```
figure(1)
normplot(effekt_opr)
title('Normalfordelingsplot, oprindelig belægning')
```



Stikprøve med ny belægning:

```
figure(2)
normplot(effekt_ny)
title('Normalfordelingsplot, ny belægning')
```



Begge normalfordelingsplots er nogenlunde lineære, så det lader til, at antagelsen holder.