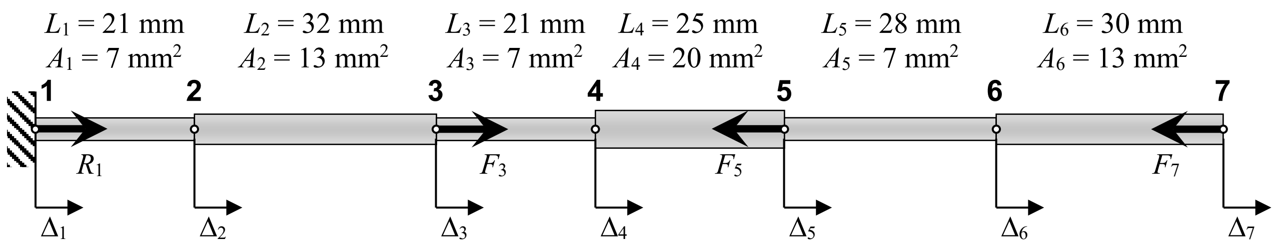
Bemærk følgende:

Bilagsfiler: `Bisektion.m, MinimalTotDst.m, rk4.m, TotDst.p` og `TransporterOgAfstande.m` (kan downloades fra Digital Eksamen).

Plot: Hvis besvarelsen af en given delopgave inkluderer et plot, skal dette forsynes med passende titel og aksetekster (inkl. enhed hvis relevant) samt *grid*. I den enkelte delopgave kan der være anført yderligere krav til et givet plot, og disse skal naturligvis også efterkommes.

OPGAVE 1

Figur 1 viser et stålemne, der består af seks sammenføjede stålstænger (stangelementer) med de angivne længder ($L_1, L_2, \dots, L_6$) og tværsnitsarealer ($A_1, A_2, \dots, A_6$) samt et E-modul på $E = 210$ GPa.



Figur 1: Kraftpåvirket stålemne.

I knude **3** er stålemnet påvirket af en ekstern kraft mod højre på $F_3 = 2617$ N, mens det i knuderne **5** og **7** er påvirket er eksterne kræfter mod venstre på henholdsvis $F_5 = 1028$ N og $F_7 = 445$ N. I den fikserede knude **1** virker der en reaktionskraft på R_1. Kraftpåvirkningerne bevirker, at knuderne **2**, **3**, …, **7** udsættes for vandrette forskydninger ($\Delta_2, \Delta_3, \dots\ \Delta_7$), mens den fikserede knude **1** ikke forskydes ($\Delta_1 = 0$). Der regnes positiv retning mod højre.

PS! Det er ikke et krav, at denne opgave løses ved anvendelse af MATLAB.

(1a)

Bestem stivhedsmatricen, K, for det sammensatte stålemne (inkludér enhed i svaret).

PS! Hvis delopgave (1a) ikke besvares, kan man fremefter anvende følgende stivhedsmatrix (er dog ikke det korrekte svar på delopgave (1a)):

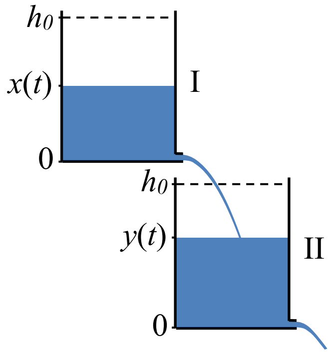
$$K = \begin{bmatrix} 80 & -80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -80 & 200 & -120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 200 & -80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -80 & 272 & -192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -192 & 252 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & 180 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 120 \end{bmatrix} \mathrm{MN/m}$$

(1b)

Beregn forskydningerne Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6 og Δ_7 (inkludér enhed i svaret).

OPGAVE 2

Der betragtes to cylindriske beholdere, I og II, som er placeret forskudt over hinanden (fig. 2). Begge har vandret tværsnitsareal på A_b, og er i udgangspunktet fyldt op med væske til en højde af h_0. Til tidspunktet $t = 0$ åbnes udløbshuller ved bunden af begge beholdere, hvorved væsken strømmer ud under indflydelse af tyngdekraften. Udløbshullerne har tværsnitsareal A_u. Den indbyrdes placering af beholderne gør, at væsken fra beholder I løber ned i beholder II, mens væsken fra beholder II blot løber væk.



Figur 2: Tømning af to beholdere.

Væskehøjden, $x(t)$, i beholder I som funktion af tiden, t, kan beregnes som (ud fra Torricellis lov):

$$x(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{\sqrt{2g}\,A_u}{2A_b}t\right)^2, \quad 0 \le t \le t_I \qquad (1)$$

hvor g betegner tyngdeaccelerationen, og t_I er det tidspunkt, hvor beholder I bliver tom.

Ligeledes baseret på Torricellis lov gælder der, at væskehøjden, $y(t)$, i beholder II som funktion af tiden kan bestemmes ud fra differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{A_u}{A_b}\left(\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{y}\right) - \frac{gA_u}{A_b}t\right), \quad y(0) = h_0, \quad 0 \le t \le t_I \qquad (2)$$

(2a)

Vis, at det tidspunkt, t_I, hvor beholder I bliver tom, kan udregnes som $t_I = \frac{A_b}{A_u}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

Fremefter regnes med følgende værdier af konstanterne i ligning (1) og (2):

$$A_b = 1{,}85\ \mathrm{m}^2, \quad A_u = 0{,}002\ \mathrm{m}^2, \quad g = 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2, \quad h_0 = 2{,}1\ \mathrm{m}$$

(2b)

Løs differentialligningen i ligning (2) ved brug af Eulers metode fra $t = 0$ til det nærmeste man kan komme på tidspunktet t_I, når der anvendes tidsskridt på 60 s. I besvarelsen skal både talresultater og beregningsformler anføres for hver iteration (på tabelform vha. fx Excel). Hvad bliver ifølge løsningen væskehøjden i beholder II efter 480 s?

(2c)

Løs differentialligningen i ligning (2) ved brug af en fjerdeordens Runge-Kuttametode fra $t = 0$ til det nærmeste man kan komme på tidspunktet t_I, når der anvendes tidsskridt på 60 s. Løsningen skal findes ved brug af MATLAB-funktionen `rk4`, som har været anvendt i undervisningen (kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `rk4.m`). I besvarelsen ønskes såvel anvendte MATLAB-kommandoer som beregnet `t`- og `y`-vektor anført. Hvad bliver ifølge løsningen væskehøjden i beholder II efter 480 s?

(2d)

Hvis man løser differentialligningen i ligning (2) ved brug af Runge-Kuttas fjerdeordens metode (RK4) med tidsskridt på henholdsvis $\Delta t = 180$ s og 120 s, estimeres y efter 360 s til de i tabel 1 viste værdier. Tabellen viser desuden den korrekte y-værdi efter 360 s (med syv decimaler).

Tabel 1: Korrekt resultat vs. fjerdeordens Runge-Kuttaresultater.

	$y(360\ \mathrm{s})$, m
Korrekt	1,4905551
RK4, $\Delta t = 180$ s	1,4904744
RK4, $\Delta t = 120$ s	1,4905421

Ved et tidsskridt på 180 s giver Runge-Kuttas fjerdeordens metode altså et resultat, der afviger $1{,}4905551 - 1{,}4904744 = 0{,}0000807$ m fra det korrekte. Hvad ville man på den baggrund forvente, at afvigelsen blev ved et tidsskridt på 120 s? Svarer den forventede afvigelse størrelsesordensmæssigt til den faktiske afvigelse ved tidsskridt på 120 s?

OPGAVE 3

Lad der være givet en kontinuert funktion, $f(x) = x^3 - x^2 - 12x + 2\ln(x^2 + 2)$.

(3a)

Anvend MATLAB til at plotte funktionen i intervallet fra $x = -4$ til 5. Bestem funktionens omtrentlige rødder i dette interval ud fra plottet. Besvarelsen skal indeholde anvendt MATLAB-kode samt plottet og de aflæste rødder afrundet til nærmeste heltal.

(3b)

Antag, at der er givet to x-værdier, x_l og x_u, for hvilke der gælder, at $x_l < x_u$, $f(x_l) < 0$ og $f(x_u) > 0$. Antag desuden, at bisektionsmetoden ønskes anvendt til at bestemme en rod i $f(x)$, og at rodsøgningen tager udgangspunkt i intervallet fra x_l til x_u.

Forklar, evt. ud fra en skitse,

i) hvorfor man kan være sikker på, at $f(x)$ har mindst én rod i intervallet $[x_l; x_u]$,

ii) hvorfor enhver rod i intervallet ligger højest afstanden $\frac{x_u - x_l}{2}$ fra intervallets midtpunkt, x_r ($x_r = \frac{x_u + x_l}{2}$), og

iii) hvorfor man efter n iterationer med bisektionsmetoden har reduceret længden af intervallet, inden for hvilket der med sikkerhed findes en rod, til $\frac{x_u - x_l}{2^n}$.

(3c)

Kan intervallet fra $x_l = -2$ til $x_u = 5$ anvendes som udgangspunkt for bestemmelse af en rod i $f(x)$ ved hjælp af bisektionsmetoden? Begrund svaret.

(3d)

Bestem en rod i funktionen $f(x)$ ved benyttelse af bisektionsmetoden, idet der anvendes et startinterval med endepunkter $x_l = 1$ og $x_u = 6$, og idet der foretages 11 iterationer. Besvarelsen skal indeholde beregningsresultater og beregningsformler for de enkelte iterationer (på tabelform vha. fx Excel). Anfør som facit den fundne rod med sikre decimaler (afrundet).

(3e)

Følgende ufærdige MATLAB-script har til formål at bestemme en rod i funktionen $f(x)$ ved benyttelse af bisektionsmetoden, idet der først anvendes startintervallet $[-6; -1]$ og derefter startintervallet $[-3; 3]$, og idet der i begge tilfælde foretages så mange iterationer, at den approksimative procentiske fejl bliver højest $\varepsilon_s = 0{,}01\%$:

```
clear, format long
f = @(x) x^3 - x^2 - 12*x + 2*log(x^2+2);
es = 0.01;
xl = -6; xu = -1;
while 1
  xr = (xl+xu)/2;
  Ea = (xu-xl)/2;
  ea = abs(Ea/xr*100);
```

```
    if (f(xl)<0 && <UDFYLD>) || (<UDFYLD> && <UDFYLD>)
      xl = xr;
    elseif (f(xu)<0 && f(xr)<0) || (<UDFYLD> && <UDFYLD>)
      xu = <UDFYLD>;
    end
    if ea <= es, break, end
  end
  xr, ea % Vis fundne rod og approks. procentisk fejl
```

Scriptet kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `Bisektion.m`.

Erstat tekstangivelserne **<UDFYLD>** med MATLAB-kode, der får scriptet til at fungere efter dets formål, og kør så scriptet. Erstat derefter linje fire i scriptet med

```
xl = -3; xu = 3;
```

(uden at ændre andet), og kør scriptet igen.

Besvarelsen skal indeholde det færdiggjorte script samt dets output (værdier af `xr` og `ea`) ved de to kørsler.

OPGAVE 4

En produktionsvirksomhed har et bygningskompleks til rådighed, hvori den skal placere fem forskellige afdelinger (1, 2, 3, 4, 5) i fem forskellige lokaler (A, B, C, D, E), en afdeling i hvert lokale. De fem afdelinger varetager forskellige led i produktionen af virksomhedens produkter, og i den forbindelse foregår der dagligt et antal transporter af produktdele mellem afdelingerne. Tabel 2 viser det daglige antal transporter fra den ene afdeling til den anden. Tabel 3 viser transportafstandene (m) mellem de fem lokaler. Bemærk, at transportafstanden mellem to afdelinger ikke nødvendigvis er ens i begge transportretninger, hvilket skyldes ensretning i visse af bygningskompleksets transportkorridorer. Eksempelvis er der længere transportafstand fra A til B, end der er fra B til A.

Tabel 2: Dagligt antal transporter fra afdeling til afdeling.

Fra \ Til	1	2	3	4	5
1	0	40	0	19	34
2	7	0	0	23	22
3	1	38	0	16	0
4	0	0	0	0	0
5	18	31	0	28	0

Tabel 3: Transportafstande (m) fra lokale til lokale.

Fra \ Til	A	B	C	D	E
A	0	104	45	132	44
B	83	0	135	28	125
C	45	77	0	13	51
D	81	28	65	0	33
E	44	35	51	33	0

Tabeldata kan downloades fra Digital Eksamen via M-filen `TransporterOgAfstande.m`, hvori tabellernes transport- og afstandsdata er defineret som henholdsvis matricen `Tr` og matricen `Dst`.

(4a)

Skriv en MATLAB-funktion, `TotDst`, der for en given placering af afdelingerne i de fem lokaler kan udregne den samlede tilbagelagte afstand dagligt (`TD`) i forbindelse med transporter mellem afdelingerne, dvs. beregne

$$\mathrm{TD} = \sum_{\substack{\text{Alle kombinationer} \\ \text{af fra og til lokale}}} (\text{antal transporter fra lokale til lokale}) \times (\text{afstand fra lokale til lokale})$$

Funktionens første linje skal være

```
function TD = TotDst(Pl,Tr,Dst)
```

hvor inputargumenterne `Tr` og `Dst` er matricer svarende til transportantal og afstande i henholdsvis tabel 2 og 3, mens `Pl` er en vektor, der angiver placeringen af afdelingerne (eksempelvis svarer `Pl = [4 2 5 1 3]` til, at afdeling 4, 2, 5, 1 og 3 er placeret i henholdsvis lokale A, B, C, D og E). Besvarelsen skal indeholde den færdiggjorte funktion `TotDst` samt det opnåede resultat, når funktionen afprøves med dels kommandoen `TotDst(Pl1,Tr,Dst)` og dels kommandoen `TotDst(Pl2,Tr,Dst)`, hvor `Pl1 = [1 2 3 4 5]` og `Pl2 = [4 2 5 1 3]`, mens `Tr` og `Dst` er matricer indeholdende transport- og afstandsdata fra henholdsvis tabel 2 og 3 (kan som tidligere nævnt downloades fra Digital Eksamen).

(4b)

Virksomheden ønsker at placere afdelingerne, så den samlede tilbagelagte afstand dagligt i forbindelse med transporterne bliver mindst mulig. Her følger et delvist færdigt MATLAB-script, der har til formål at finde en sådan placering (forudsætter at filen `TransporterOgAfstande.m` er downloadet fra Digital Eksamen):

```
clear
TransporterOgAfstande;          % Opret matricer Tr og Dst
MuligePl = perms(<UDFYLD>);     % Generér alle placeringsmuligheder
AntalPlIalt = <UDFYLD>;         % Antal placeringmuligheder i alt
MinTotDst = <UDFYLD>;
for i = <UDFYLD>
  Pl = MuligePl(i,:);
  TD = TotDst(Pl,Tr,Dst);       % Kald af funktionen TotDst fra delopgave (a)
  if <UDFYLD> < <UDFYLD>
    PlMinTotDst = Pl;
    MinTotDst = TD;
  end
end
PlMinTotDst % Vis plac. svarende t. minimum samlet tilbagel. transportafst.
MinTotDst   % Vis minimum samlet tilbagelagt transportafstand
```

Scriptet kan downloades fra Digital Eksamen under navnet `MinimalTotDst.m` og har to resultatvariabler, `PlMinTotDst` og `MinTotDst`. `PlMinTotDst` er placeringen, der giver mindst mulig samlet tilbagelagt transportafstand, og `MinTotDst` er den tilsvarende minimalt tilbagelagte transportafstand (m). Det kan oplyses, at den minimale transportafstand højest er 25000 m.

Bring scriptet til at fungere ifølge formålet ved at erstatte tekstangivelserne **<UDFYLD>** med passende MATLAB-kode. Besvarelsen skal indeholde det færdige script samt det output, scriptet genererer, når det køres.

PS! Hvis delopgave (4a) ikke er besvaret, vil man i denne delopgave mangle funktionen `TotDst`. Hvis det er tilfældet, kan man i stedet fra Digital Eksamen downloade filen `TotDst.p`, som indeholder en "krypteret", men fungerende version af funktionen `TotDst`.