Løsningsforslag eksamensopgaver M3NUM1 sommer 2021

OPGAVE 1

(1a)

Følgende MATLAB-kode udregner stivhedsmatricen.

```
format short g
% === Data ===
L = [21 32 21 25 28 30]*1e-3;   % m
A = [ 7 13  7 20  7 13]*1e-6;   % m^2
E = 210e9;                      % Pa
% === Stivhedsmatrix ===
k = A*E./L;                     % N/m
K = zeros(7,7);
for i = 1:6
  Kelem = [k(i) -k(i); -k(i) k(i)];
  K(i:i+1,i:i+1) = K(i:i+1,i:i+1) + Kelem;
end
K;                              % N/m
K_MN_pr_m = K/1e6               % MN/m
```

Resultatet bliver følgende:

```
K_MN_pr_m = 7×7
      70      -70        0        0        0        0        0
     -70   155.31  -85.313        0        0        0        0
       0  -85.313   155.31      -70        0        0        0
       0        0      -70      238     -168        0        0
       0        0        0     -168    220.5    -52.5        0
       0        0        0        0    -52.5    143.5      -91
       0        0        0        0        0      -91       91
```

Ovenstående 7×7-matrix udgør den efterspurgte stivhedsmatrix i enheden MN/m.

(1b)

Her følger MATLAB-kode til beregning af forskydningerne af de frie knuder (idet det forudsættes, at stivhedsmatricen, `K`, allerede er udregnet i delopgave (1a)):

```
% === Forskydninger af frie knuder (nr. 2,3,...,7) ===
Pfri = [0 2617 0 -1028 0 -445]';% N (eksterne kræfter på frie knuder)
Kfri = K(2:7,2:7);              % N/m (stivhedsmatrix for frie knuder)
D = Kfri\Pfri;                  % m (forskydning af frie knuder)
D_my = D*1e6                    % mikrometer (forskydn. af frie knuder)
```

Det opnåede resultat:

```
D_my = 6×1
       16.343
       29.752
       8.7095
    -0.058333
      -8.5345
```

```
-13.425
```

De efterspurgte forskydninger er således:

$\underline{\Delta_2 = 16{,}3\ \mu\text{m},\ \Delta_3 = 29{,}8\ \mu\text{m},\ \ \Delta_4 = 8{,}7\ \mu\text{m},\ \ \Delta_5 = -0{,}1\ \mu\text{m},\ \ \Delta_6 = -8{,}5\ \mu\text{m},\ \ \Delta_7 = -13{,}4\ \mu\text{m}}$

PS! Hvis den alternative stivhedsmatrix anvendes, fås:
$\Delta_2 = 14{,}3\ \mu\text{m},\ \Delta_3 = 23{,}8\ \mu\text{m},\ \ \Delta_4 = 5{,}4\ \mu\text{m},\ \ \Delta_5 = -2{,}3\ \mu\text{m},\ \ \Delta_6 = -9{,}7\ \mu\text{m},\ \ \Delta_7 = -13{,}4\ \mu\text{m}$

OPGAVE 2

(2a)

Beholder I bliver tom, når $x(t) = 0 \implies \left(\sqrt{h_0} - \frac{\sqrt{2g}\,A_u}{2A_b}t\right)^2 = 0 \implies \sqrt{h_0} - \frac{\sqrt{2g}\,A_u}{2A_b}t = 0$

$$\implies \sqrt{h_0} = \frac{\sqrt{2g}\,A_u}{2A_b}t \implies t = \frac{2A_b\sqrt{h_0}}{\sqrt{2g}\,A_u} = \frac{A_b\sqrt{4}\sqrt{h_0}}{A_u\sqrt{2g}} = \frac{A_b\sqrt{4h_0}}{A_u\sqrt{2g}} = \frac{A_b}{A_u}\sqrt{\frac{4h_0}{2g}} = \frac{A_b}{A_u}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Dermed er det vist, at $t_I = \frac{A_b}{A_u}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$. Q.E.D.

(2b)

Beholder I bliver tom til tidspunktet $t_I = \frac{A_b}{A_u}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{1{,}85}{0{,}002}\sqrt{\frac{2\times 2{,}1}{9{,}81}} = 605{,}2$ s. Med tidsskridt på 60 s vil tidspunktet nærmest t_I være 600 s. Løsning af differentialligningen vha. Eulers metode bliver derfor som følger (der er anvendt Excel med navngivning af celler):

Talresultater

	A	B	C	D
1	Ab =	1,85	m²	
2	Au =	0,002	m²	
3	g =	9,81	m/s²	
4	h0 =	2,1	m	
5	h =	60	s	
6				
7	i	t	y	dy/dt
8	0	0	2,1	0
9	1	60	2,1	-0,00069
10	2	120	2,058725	-0,00131
11	3	180	1,980287	-0,00186
12	4	240	1,868503	-0,00236
13	5	300	1,727022	-0,00279
14	6	360	1,559427	-0,00317
15	7	420	1,369345	-0,00348
16	8	480	1,160565	-0,00372
17	9	540	0,937201	-0,00389
18	10	600	0,703937	-0,00396

Beregningsformler

	A	B	C	D
1	Ab =	1,85	m²	
2	Au =	0,002	m²	
3	g =	9,81	m/s²	
4	h0 =	2,1	m	
5	h =	60	s	
6				
7	i	t	y	dy/dt
8	0	=A8*h	2,1	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C8))-g*Au/Ab*B8)
9	1	=A9*h	=C8+D8*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C9))-g*Au/Ab*B9)
10	2	=A10*h	=C9+D9*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C10))-g*Au/Ab*B10)
11	3	=A11*h	=C10+D10*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C11))-g*Au/Ab*B11)
12	4	=A12*h	=C11+D11*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C12))-g*Au/Ab*B12)
13	5	=A13*h	=C12+D12*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C13))-g*Au/Ab*B13)
14	6	=A14*h	=C13+D13*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C14))-g*Au/Ab*B14)
15	7	=A15*h	=C14+D14*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C15))-g*Au/Ab*B15)
16	8	=A16*h	=C15+D15*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C16))-g*Au/Ab*B16)
17	9	=A17*h	=C16+D16*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C17))-g*Au/Ab*B17)
18	10	=A18*h	=C17+D17*h	=Au/Ab*(KVROD(2*g)*(KVROD(h0)-KVROD(C18))-g*Au/Ab*B18)

Væskehøjden i beholder II efter 480 s ses at ifølge løsningen at være <u>1,161 m</u>.

(2c)

Som i delopgave (2b) løses differentialligningen frem til tidspunktet $t = 600$ s. Følgende MATLAB-kommandoer anvendes:

```
format short
```

```
Ab = 1.85; Au = 0.002; g = 9.81; h0 = 2.1;
dydt = @(t,y) Au/Ab*(sqrt(2*g)*(sqrt(h0)-sqrt(y))-g*Au/Ab*t);
[t,y] = rk4(dydt,[0 600],h0,60);
disp('   Tid (s)  Væskeh. (m)')
disp([t,y])
```

Resultatet (t- og y-vektor) bliver:

```
   Tid (s)  Væskeh. (m)
         0    2.1000
   60.0000    2.0800
  120.0000    2.0227
  180.0000    1.9316
  240.0000    1.8103
  300.0000    1.6621
  360.0000    1.4906
  420.0000    1.2992
  480.0000    1.0918
  540.0000    0.8726
  600.0000    0.6466
```

Væskehøjden i beholder II efter 480 s ses at ifølge løsningen at være $\underline{\underline{1{,}092\text{ m}}}$.

(2d)
For Runge-Kuttas fjerdeordens metode er fejlen cirka proportional med tidsskridtet i fjerde. Derfor vil fejlen ved et tidsskridt på 120 s forventes at være omkring

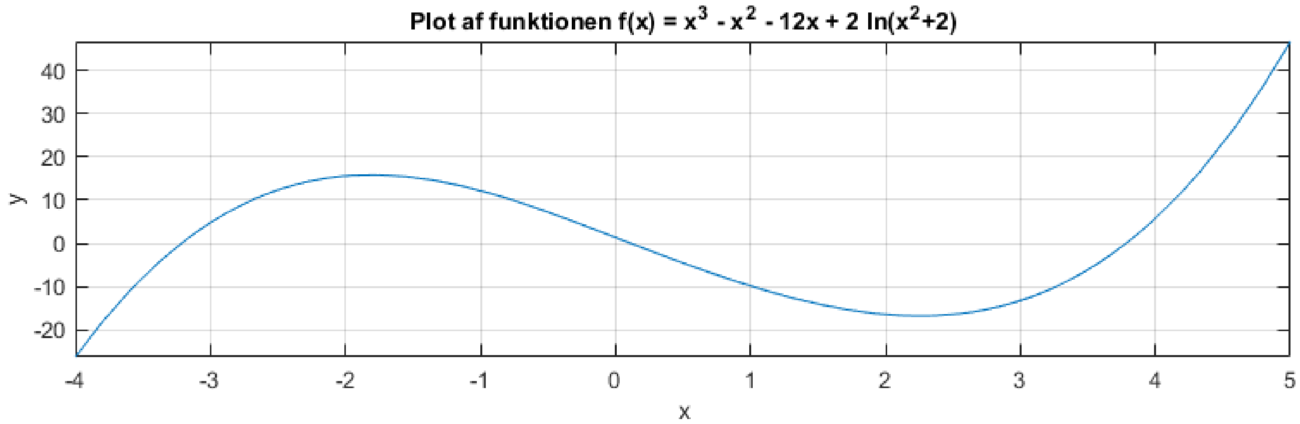
$$\left(\frac{120}{180}\right)^4 \times 0{,}0000807\text{ m} = \underline{\underline{0{,}0000159\text{ m}}}$$

Den faktiske fejl er $1{,}4905551 - 1{,}4905421 = 0{,}0000130$ m, så størrelsesordnerne på den forventede og den faktiske fejl er den samme.

OPGAVE 3

(3a)
Her følger kode anvendt til frembringelse af plottet samt det opnåede resultat:

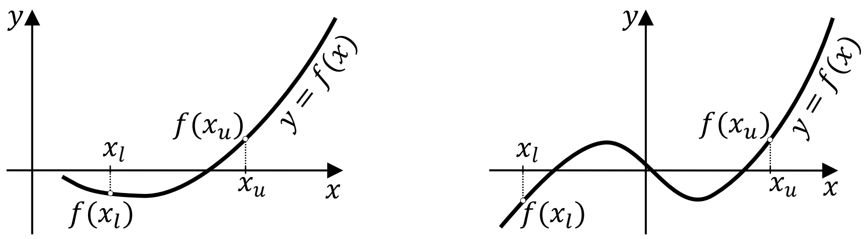
```
f = @(x) x.^3 - x.^2 - 12*x + 2*log(x.^2+2);
fplot(f,[-4 5])
title('Plot af funktionen f(x) = x^3 - x^2 - 12x + 2 ln(x^2+2)')
xlabel('x'), ylabel('y'), grid
```



Polynomiets rødder er de x-værdier, hvor $f(x) = 0$, dvs. ca. $\underline{\underline{x = -3}}$, $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = 4}}$.

(3b)

i)
Følgende to skitser illustrerer to forskellige situationer, hvor der for den kontinuerte funktion $f(x)$ gælder, at $x_l < x_u$, $f(x_l) < 0$ og $f(x_u) > 0$.



Da $f(x_l) < 0$ og $f(x_u) > 0$, vil funktionens graf mindst én gang krydse x-aksen mellem x_l og x_u, hvorfor der mindst for én x-værdi i intervallet $[x_l; x_u]$ vil gælde, at $f(x) = 0$. Således vil der være mindst én rod i intervallet.

ii)
Inden for intervallet $[x_l; x_u]$, vil en rod have størst afstand til intervalmidtpunktet, hvis den ligger ved ét af intervalendepunkterne. Hvis roden ligger i det nedre intervalendepunkt, x_l, bliver afstanden mellem roden og intervalmidtpunktet, x_r, lig med $x_r - x_l = \frac{x_u + x_l}{2} - x_l = \frac{x_u - x_l}{2}$, og af symmetrigrunde fås samme afstand, hvis roden ligger i øvre intervalendepunkt, x_u. Således er $\frac{x_u - x_l}{2}$ den største afstand, der kan være mellem en rod og intervalmidtpunktet.

iii)
I bisektionsmetoden vil man i hver iteration halvere intervallet inden for hvilket, der søges en rod. Fra start er intervallængden lig med $x_u - x_l$, efter første iteration er længden lig med $\frac{1}{2}(x_u - x_l)$, og efter n iterationer er længden $\left(\frac{1}{2}\right)^n (x_u - x_l) = \frac{x_u - x_l}{2^n}$.

(3c)
Betingelsen for, at et givet interval kan anvendes som udgangspunkt for bisektionsmetoden, er, at funktionen har forskellig fortegn i de to intervalendepunkter. Det undersøges, om denne betingelse er opfyldt for det angivne interval:

```
f = @(x) x.^3 - x.^2 - 12*x + 2*log(x.^2+2);
Funktionvaerdier = [f(-2) f(5)]
```

```
Funktionvaerdier = 1×2
   15.5835   46.5917
```

Intervallet *kan ikke* anvendes, da funktionen ikke skifter fortegn fra x_l til x_u.

PS! Denne konklusion kan også begrundes ud fra funktionens graf.

(3d)

Her følger beregningsresultater opnået i forbindelse med rodfinding vha. bisektionsmetoden:

	A	B	C	D	E	F	G	H
3	i	x_l	$f(x_l)$	x_u	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	$\|\varepsilon_a\|$, %
4	1	1	-9,80278	6	115,275	3,5	-6,06149	
5	2	3,5	-6,06149	6	115,275	4,75	34,0118	26,3158
6	3	3,5	-6,06149	4,75	34,0118	4,125	9,56435	15,1515
7	4	3,5	-6,06149	4,125	9,56435	3,8125	0,7411	8,19672
8	5	3,5	-6,06149	3,8125	0,7411	3,65625	-2,90122	4,2735
9	6	3,65625	-2,90122	3,8125	0,7411	3,73438	-1,14176	2,09205
10	7	3,73438	-1,14176	3,8125	0,7411	3,77344	-0,21593	1,0352
11	8	3,77344	-0,21593	3,8125	0,7411	3,79297	0,25866	0,51493
12	9	3,77344	-0,21593	3,79297	0,25866	3,7832	0,02039	0,25813
13	10	3,77344	-0,21593	3,7832	0,02039	3,77832	-0,09802	0,12923
14	11	3,77832	-0,09802	3,7832	0,02039	3,78076	-0,03888	0,06457

Formlerne bag tallene er som følger:

	A	B	C	D
3	i	x_l	$f(x_l)$	x_u
4	1	1	=B4^3 - B4^2 - 12*B4 + 2*LN(B4^2+2)	6
5	=A4+1	=HVIS(C4*G4>0;F4;B4)	=B5^3 - B5^2 - 12*B5 + 2*LN(B5^2+2)	=HVIS(E4*G4>0;F4;D4)
6	=A5+1	=HVIS(C5*G5>0;F5;B5)	=B6^3 - B6^2 - 12*B6 + 2*LN(B6^2+2)	=HVIS(E5*G5>0;F5;D5)
7	=A6+1	=HVIS(C6*G6>0;F6;B6)	=B7^3 - B7^2 - 12*B7 + 2*LN(B7^2+2)	=HVIS(E6*G6>0;F6;D6)
8	=A7+1	=HVIS(C7*G7>0;F7;B7)	=B8^3 - B8^2 - 12*B8 + 2*LN(B8^2+2)	=HVIS(E7*G7>0;F7;D7)
9	=A8+1	=HVIS(C8*G8>0;F8;B8)	=B9^3 - B9^2 - 12*B9 + 2*LN(B9^2+2)	=HVIS(E8*G8>0;F8;D8)
10	=A9+1	=HVIS(C9*G9>0;F9;B9)	=B10^3 - B10^2 - 12*B10 + 2*LN(B10^2+2)	=HVIS(E9*G9>0;F9;D9)
11	=A10+1	=HVIS(C10*G10>0;F10;B10)	=B11^3 - B11^2 - 12*B11 + 2*LN(B11^2+2)	=HVIS(E10*G10>0;F10;D10)
12	=A11+1	=HVIS(C11*G11>0;F11;B11)	=B12^3 - B12^2 - 12*B12 + 2*LN(B12^2+2)	=HVIS(E11*G11>0;F11;D11)
13	=A12+1	=HVIS(C12*G12>0;F12;B12)	=B13^3 - B13^2 - 12*B13 + 2*LN(B13^2+2)	=HVIS(E12*G12>0;F12;D12)
14	=A13+1	=HVIS(C13*G13>0;F13;B13)	=B14^3 - B14^2 - 12*B14 + 2*LN(B14^2+2)	=HVIS(E13*G13>0;F13;D13)

	E	F	G	H
3	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	$\|\varepsilon_a\|$, %
4	=D4^3 - D4^2 - 12*D4 + 2*LN(D4^2+2)	=(B4+D4)/2	=F4^3 - F4^2 - 12*F4 + 2*LN(F4^2+2)	
5	=D5^3 - D5^2 - 12*D5 + 2*LN(D5^2+2)	=(B5+D5)/2	=F5^3 - F5^2 - 12*F5 + 2*LN(F5^2+2)	=ABS((F5-F4)/F5)*100
6	=D6^3 - D6^2 - 12*D6 + 2*LN(D6^2+2)	=(B6+D6)/2	=F6^3 - F6^2 - 12*F6 + 2*LN(F6^2+2)	=ABS((F6-F5)/F6)*100
7	=D7^3 - D7^2 - 12*D7 + 2*LN(D7^2+2)	=(B7+D7)/2	=F7^3 - F7^2 - 12*F7 + 2*LN(F7^2+2)	=ABS((F7-F6)/F7)*100
8	=D8^3 - D8^2 - 12*D8 + 2*LN(D8^2+2)	=(B8+D8)/2	=F8^3 - F8^2 - 12*F8 + 2*LN(F8^2+2)	=ABS((F8-F7)/F8)*100
9	=D9^3 - D9^2 - 12*D9 + 2*LN(D9^2+2)	=(B9+D9)/2	=F9^3 - F9^2 - 12*F9 + 2*LN(F9^2+2)	=ABS((F9-F8)/F9)*100
10	=D10^3 - D10^2 - 12*D10 + 2*LN(D10^2+2)	=(B10+D10)/2	=F10^3 - F10^2 - 12*F10 + 2*LN(F10^2+2)	=ABS((F10-F9)/F10)*100
11	=D11^3 - D11^2 - 12*D11 + 2*LN(D11^2+2)	=(B11+D11)/2	=F11^3 - F11^2 - 12*F11 + 2*LN(F11^2+2)	=ABS((F11-F10)/F11)*100
12	=D12^3 - D12^2 - 12*D12 + 2*LN(D12^2+2)	=(B12+D12)/2	=F12^3 - F12^2 - 12*F12 + 2*LN(F12^2+2)	=ABS((F12-F11)/F12)*100
13	=D13^3 - D13^2 - 12*D13 + 2*LN(D13^2+2)	=(B13+D13)/2	=F13^3 - F13^2 - 12*F13 + 2*LN(F13^2+2)	=ABS((F13-F12)/F13)*100
14	=D14^3 - D14^2 - 12*D14 + 2*LN(D14^2+2)	=(B14+D14)/2	=F14^3 - F14^2 - 12*F14 + 2*LN(F14^2+2)	=ABS((F14-F13)/F14)*100

Tallet i celle F14, dvs. 3,78076, udgør estimatet af roden efter 11 iterationer. Estimatet er lig med estimatet efter 10 iterationer med op til to decimaler afrundet. Roden med sikre afrundede decimaler er derfor 3,78.

(3e)
Her følger det færdiggjorte script samt output efter kørsel af det:

```
clear, format long
f = @(x) x^3 - x^2 - 12*x + 2*log(x^2+2);
es = 0.01;
xl = -6; xu = -1;
while 1
  xr = (xl+xu)/2;
  Ea = (xu-xl)/2;
  ea = abs(Ea/xr*100);
  if (f(xl)<0 && f(xr)<0) || (f(xl)>0 && f(xr)>0)
    xl = xr;
  elseif (f(xu)<0 && f(xr)<0) || (f(xu)>0 && f(xr)>0)
    xu = xr;
  end
  if ea <= es, break, end
end
xr, ea % Vis fundne rod og approks. procentisk fejl
```

```
xr =   -3.216491699218750

ea =    0.009487846069185
```

Efter udskiftning af linje fire med `xl = -3; xu = 3;` og efterfølgende kørsel af scriptet fås outputtet:

```
xr =    0.115642547607422

ea =    0.009896091044038
```

OPGAVE 4

(4a)
Det vises ikke, hvordan funktionen `TotDst` kan programmeres, da det vil afsløre for meget om, hvordan gruppeafleveringen kan løses.

```
function TD = TotDst(Pl,Tr,Dst)
% Kode ikke vist.
```

Følgende data er givet:

```
% Daglige antal transporter fra afdeling til afdeling
Tr = [0    40     0    19    34
      7     0     0    23    22
      1    38     0    16     0
      0     0     0     0     0
     18    31     0    28     0];

% Transportafstande (m) fra lokale til lokale
Dst = [ 0   104    45   132    44
```

```
       83     0   135    28   125
       45    77     0    13    51
       81    28    65     0    33
       44    35    51    33     0];

% Placeringer af afdelinger
Pl1 = [1 2 3 4 5];
Pl2 = [4 2 5 1 3];
```

Funktionen afprøves:

```
TotDst(Pl1,Tr,Dst)
```

```
ans =        18119
```

```
TotDst(Pl2,Tr,Dst)
```

```
ans =        15892
```

Ved de to givne placeringer af afdelingerne bliver de samlede tilbagelagte afstande dagligt i forbindelse med produkttransport mellem afdelingerne altså henholdsvis 18119 m og 15892 m.

(4b)

Det vises ikke, hvordan scriptet `MinimalTotDst` kan programmeres, da det vil afsløre for meget om, hvordan gruppeafleveringen kan løses.

Ved kørsel af scriptet opnås følgende output:

```
PlMinTotDst = 1×5
     4     3     1     2     5
MinTotDst =        11853
```

Resultatet viser, at hvis man i lokale A, B, C, D og E placerer henholdsvis afdeling 4, 3, 1, 2 og 5 vil man opnå den mindst mulige værdi af den samlede tilbagelagte transportafstand, nemlig 11853 m.