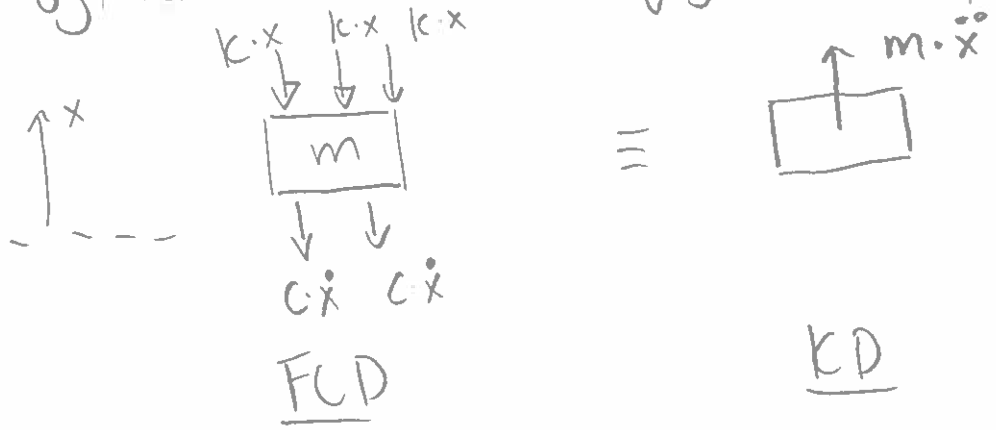
Opgave 3

FLD og KD med masse flyttet i positiv x-retning



$$\uparrow \Sigma F_x = m\cdot\ddot{x} \; : \; -3\cdot k\cdot x - 2\cdot c\cdot\dot{x} = m\cdot\ddot{x}$$

$$m\cdot\ddot{x} + 2\cdot c\cdot\dot{x} + 3\cdot k\cdot x = 0$$

Indfør ω_n og ζ:

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{m}\dot{x} + 3\frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_n^2 = 3\frac{k}{m}$$

$$2\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$$

Alternativt kan de ækvivalente stivheder og dæmpningskoefficienter bestemmes

a) Den naturlige egenfrekvens ω_n

$$\omega_n^2 = \frac{3k}{m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3\cdot k}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 900}{300}} = \sqrt{\frac{2700}{300}} = \sqrt{9} = 3$$

$\underline{\omega_n = 3 \text{ rad/s}}$ eller $\underline{f_n = \frac{3 \text{ rad/s}}{2\pi} = 0{,}477 \text{ Hz}}$

b) Dempningsforholdet ζ:

$$\cancel{2}\frac{c}{m} = \cancel{2}\zeta\omega_n \Rightarrow \zeta = \frac{c}{m\cdot\omega_n} \Rightarrow \underline{\zeta = 1{,}25}$$

$\zeta > 1$ betyder at systemet er overdæmpet.

c) Et overdæmpet system beskrives med ligning 8/10:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{hvor}$$

$$\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \quad \text{og} \quad \lambda_2 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

Rodderne bestemmes.

$$\lambda_1 = 3\left(-1{,}25 + \sqrt{1{,}25^2 - 1}\right)$$

$$\lambda_1 = 3\left(-1{,}25 + 0{,}75\right)$$

$$\lambda_1 = 3\,(-0{,}5)$$

$$\lambda_1 = -1{,}5$$

$$\lambda_2 = 3\left(-1{,}25 - \sqrt{1{,}25^2 - 1}\right)$$

$$\lambda_2 = 3\left(-1{,}25 - 0{,}75\right)$$

$$\lambda_2 = 3\,(-2)$$

$$\lambda_2 = -6$$

Det give to rodder hvor $\lambda_1 \neq \lambda_2$ og $\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 < 0$ som angivet på side 265. for det overdæmpede system.

Konstanterne A_1 og A_2 bestemmes (4)
fra startbetingelserne

1) Position $x(0) = -1{,}0$ indsættes

$$x(0) = A_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + A_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} = -1$$

$$A_1 + A_2 = -1 \qquad (1)$$

2) Hastighed $v(0) = \dot{x}(0) = 18$

Først bestemmes $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \cdot t}$$

startbetingelsen indsættes:

$$\dot{x}(0) = A_1(-1{,}5) e^{-1{,}5 \cdot 0} + A_2(-6) e^{-1{,}5 \cdot 0} = 18$$

$$-1{,}5 A_1 - 6 A_2 = 18$$

$$-A_1 - 4 A_2 = 12 \qquad (2)$$

Konstanter findes ved to ligninger med to ubekendte, f.eks ved substitution

$$(1): \quad A_1 + A_2 = -1 \Rightarrow A_1 = -1 - A_2$$

$$(2): \quad -A_1 - 4A_2 = 12$$, indsæt A_1 fra (1)

$$-(-1 - A_2) - 4A_2 = 12$$

$$+1 + A_2 - 4A_2 = 12$$

$$-3A_2 = 11$$

$$A_2 = \frac{-11}{3} \approx -3{,}667$$

(1) A_2 indsættes

$$A_1 = -1 - \left(-\frac{11}{3}\right)$$

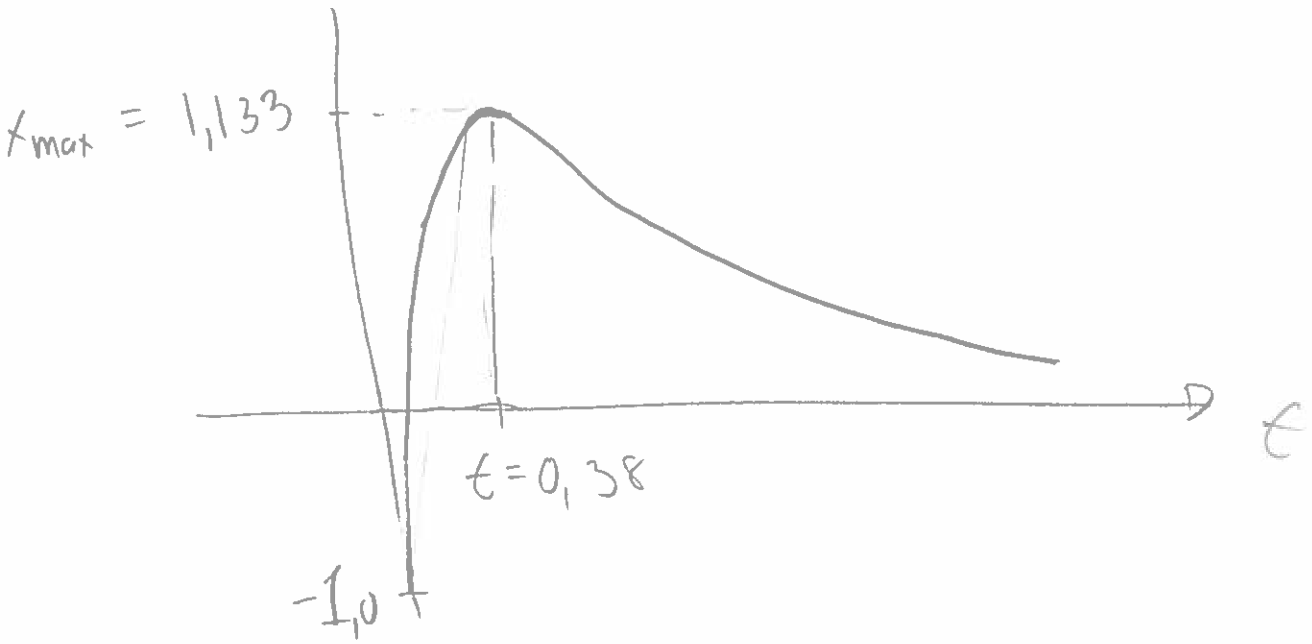
$$A_1 = -\frac{3}{3} + \frac{11}{3} = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = \frac{8}{3} \approx 2{,}667$$

Den samlede forskrift er derfor

$$x(t) = \frac{8}{3} e^{-1,5 \cdot t} - \frac{11}{3} e^{-6 \cdot t}$$

d) Plot af bevægelsen, se mathcad



e) Max udsving når $v = 0$

$$v(t) = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = 0$$

$$\frac{8}{3}\underset{-\frac{3}{2}}{(-1{,}5)}\, e^{-1{,}5 \cdot t} = -\left(\frac{-11}{3}\right)(-6)\, e^{-6 \cdot t}$$

$$\frac{-24}{6} e^{-1{,}5 \cdot t} = \frac{-66}{3} e^{-6t}$$

$$4 e^{-1{,}5 \cdot t} = 22 e^{-6 \cdot t}$$

$$2 e^{-1{,}5 t} = 11 e^{-6 \cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{e^{-1{,}5 \cdot t}}{e^{-6 \cdot t}}\right) = \ln\left(\frac{11}{2}\right)$$

$$\ln\left(e^{-1{,}5 \cdot t}\right) - \ln\left(e^{-6 \cdot t}\right) = \ln(11) - \ln(2)$$

$$-1{,}5 \cdot t \cdot \ln(e) - (-6)\, t \cdot \ln(e) = \ln(11) - \ln(2)$$

8

$$-1{,}5 \cdot t + 6 \cdot t = \ln(11) - \ln(2)$$

$$t(6-1{,}5) = \ln(11) - \ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(11) - \ln(2)}{6-1{,}5}$$

$$t_{max} \approx 0{,}379$$

max udsving ved t_{max} som indsættes i positionsligningen

$$x_{max} = A_1 e^{\lambda_1 \cdot t_{max}} + A_2 e^{\lambda_2 \cdot t_{max}}$$

$\underline{x_{max} \approx 1{,}133}$, se mathcad.