Artículos Originales

Recursos tecnológicos en matemática: transparencia, visibilidad e invisibilidad en la resolución de un problema

Technological resources in mathematics: transparency, visibility and invisibility in solving a problem

Nicolás Rosbaco[1], Verónica Parra[2,3], Patricia Sureda[2,3]

[1] Universidad Nacional del Comahue, Centro Regional Zona Atlántica (CURZA), Viedma, Argentina
[2] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Tandil, Argentina
[3] Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), Tandil, Argentina

nicolasrosbaco@curza.com.ar, vparra@exa.unicen.edu.ar, psureda@exa.unicen.edu.ar

Recibido: 15/04/2023 | **Aceptado**: 19/05/2023

Cita sugerida: N. Rosbaco, V. Parra, P. Sureda, "Recursos tecnológicos en matemática: transparencia, visibilidad e invisibilidad en la resolución de un problema," *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 35, pp. 78-87, 2023. doi:10.24215/18509959.35.e9

Resumen

Este trabajo presenta resultados parciales del análisis de un recurso que, no es nada más ni nada menos, que un problema matemático. Se utiliza la acepción de recurso de Adler, particularmente, las nociones de transparencia, visibilidad e invisibilidad de sus usos en la enseñanza de la matemática. Nos centramos aquí en analizar un problema en términos matemáticos y de las potencialidades que tienen algunos recursos tecnológicos tales como wxMaxima, GeoGebra, Scratch y ChatGPT para su resolución. Mostramos cómo el uso de los tres primeros permiten resolver el problema en su forma más general que, de lo contrario no sería posible, y las limitaciones del ChatGPT para proponer una solución. Se trata de un problema que los profesores pueden utilizar para provocar oportunidades de enseñanza en el estudio de funciones en una, dos o más variables y si se quiere también, permite el estudio de funciones poco convencionales (salir de los paraboloides, de las sillas de montar, que recurrentemente aparecen en los textos), estimulando a los profesores hacia la incorporación de nuevos recursos para la matemática escolar. Concluimos en la transparencia de estos recursos, en la potencialidad del problema y en las limitaciones del ChatGPT para su resolución.

Palavras clave: Matemática; GeoGebra; wxMaxima; Scratch; ChatGPT; Transparencia; Visibilidad; Invisibilidad.

Abstract

This paper presents results of the analysis of a resource that is a mathematical problem. We use Adler's definition of resource, particularly the notions of transparency, visibility and invisibility of its uses in mathematics education. We focus on the analysis of the problem based on mathematics and the potential of some technological resources such as wxMaxima, GeoGebra, Scratch and ChatGPT for its resolution. We show how the use of the first three allows us to solve the problem in its most general form that otherwise would not be possible, and the limitations of ChatGPT to solve the problem. This is a problem that teachers can use to promote teaching sequences in the study of functions in one, two or more variables and also allow the study of unconventional functions (different, for example, to paraboloids, saddles, etc., very common in books), stimulating teachers to incorporate new resources for school mathematics in the classroom. We conclude in the transparency of these resources, in the potentiality of the problem and in the limitations of ChatGPT for its resolution.

Keywords: Mathematics; GeoGebra; wxMaximum; Scratch; ChatGPT; Transparency; Visibility; Invisibility.

1. Introducción

En educación matemática, es necesario diferenciar entre un recurso y su uso. Respecto a la noción de recurso como tal, ésta tiene diferentes acepciones. Algunos autores distinguen entre medios, recursos, materiales y contextos que los profesores utilizan para enseñar matemática [1]. Respecto a sus usos, debe cuestionarse su legitimidad, necesidad y funcionalidad. Es decir, preguntarse si el recurso está en el aula como un “adorno” o, si por el contrario, porque es vital para que el saber matemático viva en el aula. A esta última acepción la consideramos como un uso genuino de un recurso. Entonces entendemos al uso genuino de un recurso como aquel que, de no tenerlo dentro del proceso de enseñanza/aprendizaje, la construcción de un determinado saber o saberes o, más aún, la conceptualización por parte de los estudiantes de un campo de conocimientos, o una parte de él, no hubiera sido posible. Un ejemplo cercano y bien pragmático de esto lo aportó la pandemia. En ese contexto, no tan lejano, la única mediación entre profesores, estudiantes y saber fueron recursos de tipo tecnológicos/digitales, pues de no haberlos utilizado, el proceso de enseñanza no hubiese tenido lugar.

Sin ir a este ejemplo tan extremo, cuestionamos el uso que se le da a ciertos softwares, por ejemplo GeoGebra, siendo éste, tal vez, uno de los más habituales en matemática. Cabe preguntarnos entonces si el uso que se hace de él es imprescindible, significativo, vital o simplemente se lo usa como una calculadora gráfica, cuando sabemos sus muchas otras virtudes. Si se lo utiliza con el objeto de realizar la representación gráfica de funciones, bien puede pensarse que su presencia es redundante. Pero si se pretende analizar diferentes variantes de una situación o de una función, la representación con GeoGebra permite, a partir de la modificación de los parámetros (mediante el empleo de deslizadores, por ejemplo) un análisis gráfico dinámico de la curva en estudio, como es el caso presentado por Figueiredo y Contreras [2], para las funciones cuadráticas. En otro orden de resultados, el uso de este recurso también ayuda al estudiante a superar “las dificultades relacionadas con la comprensión y construcción conceptual de la geometría. Tal estructura facilita la descripción de los principios de la mediación didáctica que se presentan durante la práctica del docente” [3]. Perdernos de este recurso significaría realizar una multiplicidad de tareas redundantes en una carpeta o en un pizarrón, y estaríamos perdiendo un tiempo muy valioso del aula en realizar tareas repetitivas. Ahora bien, GeoGebra no es el único software funcional para la enseñanza/aprendizaje de la matemática. Por su parte, wxMaxima como sistema de álgebra computacional, posee grandes potencialidades tanto para el cálculo (incluyendo integración, diferenciación, transformadas de Laplace, expansión en series de Taylor, ecuaciones diferenciales, vectores, matrices, entre otros) como para la representación en 2D y 3D. Así, por ejemplo, García, Álvarez y Barrera [4] implementan una secuencia de tareas con estudiantes de ingeniería a partir del uso de este software, con el objetivo de promover su uso y “que los estudiantes planteen conjeturas y realicen un análisis mediante la comprobación y el autoaprendizaje” [4]. Por otra parte, con el auge de la programación dentro de las aulas, Scratch se ha posicionado en Matemática como un posible recurso para la programación por bloques. De la Hoz Ruiz y Hijón Neira [5] realizaron una revisión bibliográfica con la intención de presentar el estado de la cuestión sobre el uso de Scratch en la enseñanza/aprendizaje de la Matemática. Analizaron un total de 112 artículos y concluyeron en la fundamentación del impacto educativo de lenguajes de programas (en este caso por bloques) y en ciertas limitaciones emergentes de la integración de este software en la enseñanza de la Matemática.

Finalmente, mencionar el florecimiento del ChatGPT en el sistema escolar, que tal como alude el emprendedor, tecnólogo y autor argentine Bilinkis [6], ha causado un “terremoto en la educación”. Nuevamente aquí, la cuestión no es la aparición del ChatGPT sino los usos que se hacen de él y con él dentro (y fuera) de las aulas. Este tecnólogo [6], en varias entrevistas, se ha manifestado sobre cómo aprovechar al máximo el ChatGPT en Educación sin perderse en el intento. Al respecto, hay otros investigadores, como por ejemplo Campello de Souza, Andrade Neto y Roazzi [7], que en una reciente publicación, describen de forma general el ChatGPT en términos de qué es, cómo funciona, sus capacidades, desarrollos, el fenómeno de su veloz difusión, para luego adentrarse en presentar su influencia en el trabajo, en la educación y en la vida en general.

Ahora bien, volviendo a nuestra idea del uso “genuino” de un recurso, la pregunta que nos formulamos aquí es ¿qué tipo de uso hacemos los profesores y los estudiantes de este tipo de software? ¿Es un uso “maquillado”, es decir; un uso como una aplicación de algo que ya se estudió? o ¿acaso es un uso vital en términos de que sin la presencia del GeoGebra, WvMaxima, Scratch, ChatGP, entre otros, tal saber o la manera de aprender ese saber no hubiera sido posible? Estos cuestionamientos sobre los recursos y sus usos nos remiten a pensar en la aproximación instrumental [8]. Este enfoque, proveniente del campo de la didáctica profesional [8], adopta entre otras nociones claves, la de artefacto, esquema de uso, instrumentos, procesos de instrumentalización y de instrumentación, y las implicancias que pueden tener en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Rabardel [8] define un instrumento como la combinación entre un artefacto y un esquema de uso de ese artefacto. En consecuencia, un mismo artefacto puede disponer de diferentes esquemas de uso y entonces, dar por resultado diferentes instrumentos. Y es aquí donde ubicamos la problemática de los usos genuinos de lo que consideramos un recurso. Rabardel [9] aseguraba que los instrumentos eran considerados, erróneamente, como simples auxiliares, neutros, en la construcción de saberes. Afirmaba además que los instrumentos tenían un doble uso en educación: del lado de los estudiantes y del lado de los profesores. Para los primeros, en términos de influencias profundas de los instrumentos en la construcción del saber y en los procesos de conceptualización. Para los profesores, implicancias de los instrumentos considerados como variables potentes sobre las que pueden actuar para el diseño y control de situaciones de enseñanza. Se presenta aquí la idea de mediación instrumental como un concepto central en la construcción del saber.

Siguiendo esta línea, adoptamos la noción de recurso proveniente del enfoque documental de lo didáctico (ADD) [10]. Este enfoque, que describiremos en la sección correspondiente al marco teórico, toma sus bases en el enfoque instrumental, considerando, en vez de artefactos e instrumentos, a los recursos y documentos. Nos proponemos presentar un tipo particular de recurso que, no es nada más ni nada menos, que un problema matemático. Formulamos el problema, algunas de sus posibles variantes, su potencial en términos de saberes matemáticos a abordar y de recursos digitales a utilizar. Mostramos cómo el uso genuino de recursos digitales permite abordar este problema que, de otra forma, no sería posible. Realizamos, además, un breve análisis en términos de transparencia, visibilidad e invisibilidad de esos recursos digitales. Se trata de un problema dirigido a los usos por parte de los profesores, que puede provocar oportunidades de enseñanza no sólo del estudio de funciones en una, dos o más variables sino también, conducir al estudio de funciones poco convencionales (salir de los paraboloides, de las sillas de montar, que recurrentemente aparecen en los textos), estimulando a los profesores hacia la incorporación de nuevos recursos para el trabajo matemático escolar en el aula. El problema matemático que se analizará supone una dificultad de operatoria algebraica y aritmética que lo convertiría en inapropiado (por poco económico). Sin embargo, esta dificultad constituye también una gran oportunidad: la de incorporar a las prácticas de estudio y de enseñanza recursos digitales significativos, no por su mera presencia, sino por su valor instrumental (que se evidencia en el empleo).

2. Marco teórico

El enfoque documental de lo didáctico (ADD) [10] es un enfoque en didáctica de las matemáticas que toma sus bases en el enfoque instrumental de Pierre Rabardel. Entre los conceptos claves del enfoque ADD se define el de *documento*: la combinación entre un *recurso* [11] y un *esquema* [12] *de uso* de ese recurso. La primera componente es tomada de Adler [13], quien define a un recurso como todo aquello que puede nutrir, revitalizar, aportar nuevos elementos, alimentar de nuevo o de manera diferente la práctica matemática escolar. Adopta una doble dimensión haciendo referencia a los recursos “tanto como sustantivo y como verbo, como objeto y como acción que realizamos en nuestra práctica” [13]. Además propone una clasificación de recursos agrupándolos en tres grandes categorías: *humanos*, *materiales* y *culturales*.

Para la primera categoría, distingue entre herramientas tecnológicas; material para las matemáticas escolares; objetos matemáticos y; objetos cotidianos o no matemáticos. Un problema matemático, como el que presentamos aquí, se ubica dentro de la categoría de tipo *material*, específico de la *matemática escolar*. A su vez, este recurso (el problema) va a nutrirse (en el sentido de “verbo”) de otros recursos que son GeoGebra, Scratch, WvMáxima y ChatGPT. Los tres primeros son vitales tanto en la interpretación como en la resolución del problema. Sin ellos sería imposible abordarlo en su mayor grado de generalidad. Es decir, a lápiz y papel, sólo lograríamos acotar el problema a su menor nivel de generalidad y resolver sólo una pequeña parte de él. Por su parte, el ChatGPT tiene serias limitaciones para la parte de la resolución, no así, para la programación de una posible representación de la situación. Además de esta clasificación, Adler [13] propone tres características de los usos de los recursos dentro de las clases de matemática: *visibilidad*, *invisibilidad* y *transparencia*. Un recurso es visible si la intención de los estudiantes y del profesor, está centrada en este recurso. Tal visibilidad puede ocultar (tapar) conceptos matemáticos, por ejemplo, en el caso de un software, el estudiante puede centrarse en aspectos de familiarización con funcionalidades técnicas y olvidar las matemáticas. Inversamente, un recurso se dice invisible si el trabajo en clase se desarrolla sin prestar atención a la presencia del recurso y a las posibilidades que él ofrece. La transparencia de un recurso designa el equilibrio entre visibilidad e invisibilidad: el potencial del recurso es reconocido y explorado, pero el objetivo matemático se mantiene central [13].

La incorporación de recursos tales como GeoGebra, Scratch, wxMaxima y ChatGPT, entre otros, en los procesos de enseñanza y aprendizaje supone un riesgo: extraviar en ese camino la centralidad de la matemática que se pretende enseñar, lo que puede ocurrir debido a dos factores: por un lado, la visibilidad del recurso: es decir, el empleo de programas que demandan una gran experticia y/o especificidad para su uso. Esto puede provocar que el entrenamiento que requiere su correcta utilización oculte los conceptos matemáticos que se desean estudiar. Por el otro, su invisibilidad: en ocasiones se emplean programas que no conducen a ningún tipo de reflexión en los usuarios (estudiantes y profesores), se operan con tal automatismo, con tal hermetismo, que mágicamente emergen supuestos resultados. Por el contrario, en este trabajo se propone aportar recursos que resulten transparentes, es decir: que aporten un equilibrio entre la visibilidad e invisibilidad. Esto es, entre el uso (que denominamos al inicio) “genuino” y los saberes matemáticos utilizados y emergentes de la resolución.

3. El problema de la zona despejada

Hemos trabajado sobre una adaptación del problema presentado por Marín del Moral [14]. Proponemos pequeñas adaptaciones en los términos del enunciado del problema, pero avanzamos en un profundo estudio de sus potencialidades matemática, su encuadre como recurso y la necesidad de incorporar en su tratamiento recursos tecnológicos. En la figura 1 se puede observar una ilustración del problema:

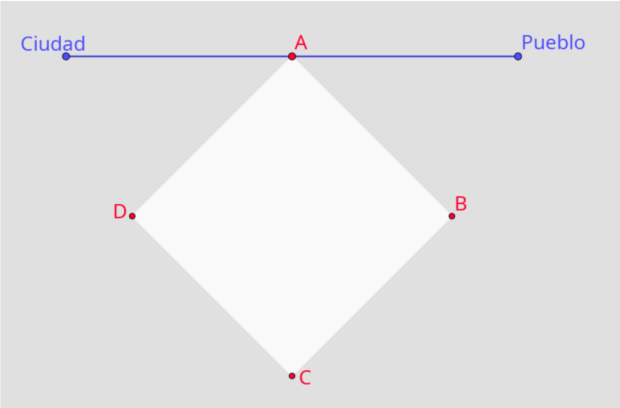

Figura 1. Ilustración del problema

- En color gris oscuro una región boscosa y de dificultoso tránsito, en la que se puede desplazar a la velocidad de 1km/h.
- En color gris claro se identifica una *zona despejada*, en esta región la velocidad de desplazamiento es de 5km/h. La *zona despejada* es un cuadrado de 7 kilómetros de lado que está ubicado del siguiente modo:

  (a) el vértice A es el punto medio del segmento definido por El Pueblo y La Ciudad.

  (b) la diagonal del cuadrado, que contiene a los vértices A y C, es perpendicular con el segmento referido.

La situación a resolver: una persona se encuentra en la Ciudad y necesita llegar al Pueblo. La distancia que separa las dos ubicaciones es de 14 kilómetros (en línea recta): Determinar y describir el camino que se debe recorrer con el objetivo de insumir la menor cantidad de tiempo.

4. Análisis matemático del problema

Al momento de realizar una representación cartesiana emergen dos alternativas. Presentamos dos interpretaciones posibles que, asumimos, son complementarias. Una la titulamos: la forma general, a la otra: la forma menos general. En ambos casos hay lo que llamamos el camino directo entre la ciudad y el pueblo: es el que se realiza en línea recta atravesando el bosque. Y también tendremos un recorrido alternativo: que supone ingresar y transitar por la *zona despejada*, en alguna parte del camino.

4.1. Forma menos general

Esta forma supone asumir que en el recorrido alternativo, la porción del recorrido que se haga dentro de la *zona despejada,* es necesariamente paralela al camino directo (Figura 2).

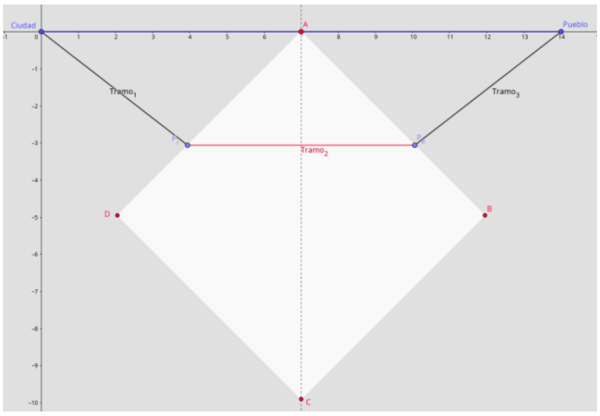

Figura 2. Representación cartesiana de la forma menos general

Este enfoque del problema hace emerger el estudio de una función (será la función de tiempo de recorrido) en una variable. Apropiado para tratarlo en los últimos años de la escuela secundaria, o en cursos de Matemática I, Análisis I, ya que permite estudiar extremos de una función real.

4.2. Forma general de análisis

Ante la imposibilidad de establecer una afirmación objetiva que permita sostener la interpretación anterior, abandonando todo impulso del sentido común, emerge esta segunda mirada del problema. Considerar que el camino que se realiza dentro de la región despejada *no necesariamente* es paralelo con el eje de abscisas (Figura 3).

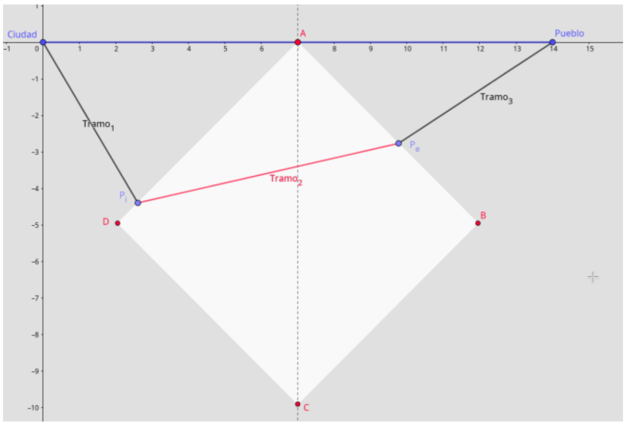

Figura 3. Representación Cartesiana más general del problema

Esta segunda interpretación del problema conduce al estudio de una función en dos variables.

4.3. Resolución general del problema, solución a dos variables

En la Figura 4 podemos observar una representación cartesiana del problema. En él los puntos característicos del problema han sido renombrados: asociaremos a la Ciudad con el punto $P_0=(0,0)$, al Pueblo con $P_3=(14,0)$; y los puntos de ingreso y egreso de la zona despejada se denominan P_1, P_2 respectivamente.

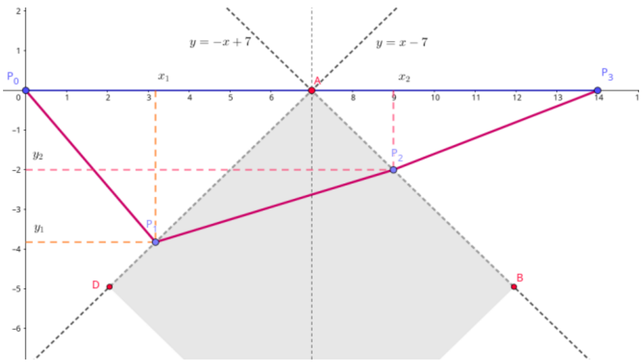

Figura 4. Representación cartesiana, análisis general del problema y la función tiempo

Decíamos que este tratamiento del problema supone el estudio de una función en dos variables. Nos referimos a la función que determina el tiempo del recorrido y sus variables independientes: x_1 y x_2, son las abscisas de los puntos de ingreso y egreso a la región despejada. En la Figura 5 presentamos a la función y su Dominio.

Sean: $A=\left[7-\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2},7\right)$; $B=\left(7,7+\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$, y el conjunto $D=\{(x_1,x_2)/x_1\in A\wedge x_2\in B\}$

para x_1 y x_2 (abscisas de los puntos de ingreso y egreso a la zona despejada), determina el tiempo que insume el recorrido (alternativo), y esta será:

$$t:D\to\mathbb{R}/t(x_1,x_2)=\sqrt{2x_1^2-14x_1+49}+\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(-x_2-x_1+14)^2}}{5}+\sqrt{2\cdot x_2^2-42\cdot x_2+245}$$

Figura 5. La Función tiempo y su Dominio

En pos de honrar las limitaciones espaciales que impone esta publicación, omitiremos las consideraciones necesarias para determinar tanto la función como su dominio. Obtenida la función de tiempo resta el trabajo matemático de su estudio: determinar, si existe, el mínimo de esta función.

Una primera aproximación al estudio de la función podría ser a partir de su gráfica: proponemos hacerlo y analizar la función tiempo. Para ello empleamos GeoGebra. De este modo nos anticipamos a lo que luego intentaremos algebraicamente.

En la Figura 6 podemos observar la gráfica realizada con GeoGebra y un punto sobre la superficie que podría ser una forma de explorar ese punto que minimiza la función. Nos resulta muy evidente la utilidad de este programa para realizar esta tarea, de hecho no tendría sentido pensar en el gráfico como un instrumento de análisis si no contáramos con el software. Ausente el programa de computadoras, la gráfica de la función sería una carga, no un instrumento. Al momento de iniciar el trabajo algebraico, tendiente a la determinación analítica de la solución del problema, se dispara, producto de la dificultad algebraica del trabajo, la *necesidad* de emplear software.

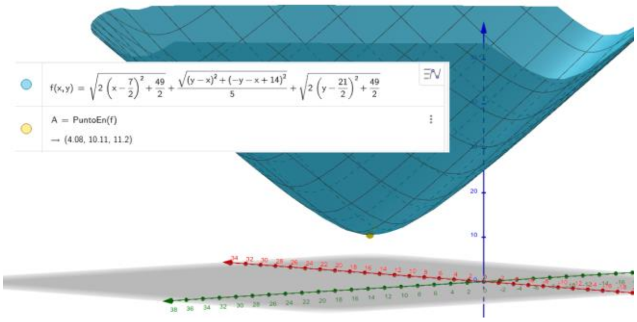

Figura 6. Representación gráfica 3D con GeoGebra

Hemos decidido utilizar wxMaxima. Entendemos es un programa apropiado para el trabajo algebraico y aritmético (no así para realizar representaciones gráficas), garantiza encuadrarse (en el contexto de las actividades que proponemos) dentro de lo que [13] denomina como un recurso transparente y además es software libre y multiplataforma. Contamos ya con la función[1] (Figura 5), por lo que necesitamos obtener las primeras derivadas parciales, con el objeto de hallar posibles puntos críticos.

Definimos la función en wxMaxima (Figura 7) y luego (Figura 8) obtenemos las primeras derivadas parciales.

```
(%i1) f(x,y):=sqrt(2 · ( x−7 / 2 )^2+49 / 2)+sqrt( (y−x)^2+(−y−x+14)^2 )/( 5 )+sqrt(2 · (y − 21 / 2 )^2 + 49 / 2);
```

(%o1) $f(x,y):=\sqrt{2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}+\frac{\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}{5}+\sqrt{2\left(y-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}$

Figura 7: Definimos la función en wxMaxima

```
(%i2) define(deri_1_x(x,y),diff(f(x,y),x));
```

(%o2) $\text{deri\_1\_x}(x,y):=\frac{-2(y-x)-2(-y-x+14)}{10\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}+\frac{2\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}}$

```
(%i3) define(deri_1_y(x,y),diff(f(x,y),y));
```

(%o3) $\text{deri\_1\_y}(x,y):=\frac{2(y-x)-2(-y-x+14)}{10\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}+\frac{2\left(y-\frac{21}{2}\right)}{\sqrt{2\left(y-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}}$

Figura 8. Primeras derivadas parciales wxMaxima

Establecido que las derivadas no se indeterminan en su dominio (se omite) resta encontrar el punto en el que se anulan simultáneamente. Definimos las ecuaciones correspondientes (las llamaremos ec1 y ec2, que resultan de anular las derivadas de primer orden respecto de x e y respectivamente). Intentamos resolver, mediante el empleo de la función solve de wxMaxima (Figura 9), el sistema de ecuaciones que resulta de ec1 y ec2, pero el programa devolverá un error proveniente de la imposibilidad de convertir las ecuaciones a polinómicas. De modo que se sugiere operar las ecuaciones, con el objeto de eliminar las expresiones radicales.

(%i4) ec1:(-2·(y-x)-2·(-y-x+14))/(10·sqrt((y-x)^2+(-y-x+14)^2))+(2·(x-7/2))/sqrt(2·(x-7/2)^2+49/2)=0;

$$(\%o4)\quad \frac{-2\,(y-x)-2\,(-y-x+14)}{10\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}+\frac{2\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}}=0$$

(%i5) ec2:(2·(y-x)-2·(-y-x+14))/(10·sqrt((y-x)^2+(-y-x+14)^2))+(2·(y-21/2))/sqrt(2·(y-21/2)^2+49/2)=0;

$$(\%o5)\quad \frac{2\,(y-x)-2\,(-y-x+14)}{10\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}+\frac{2\left(y-\frac{21}{2}\right)}{\sqrt{2\left(y-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}}=0$$

(%i6) solve([ec1,ec2],[x,y]);

algsys: Couldn't reduce system to a polynomial in one variable.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Figura 9. Primer intento resolución ecuaciones

La recomendación sería operar con cada una de las ecuaciones del siguiente modo: restar en ambos miembros de la ecuación el segundo término (Figura 10). Renombramos a las ecuaciones obtenidas con el objeto de preservar las originales (ec11 es la que resultó de operar en ec1; y ec21 es la que resultó de operar sobre ec2)

(%i13) ec11:ec1-(2·(x-7/2))/sqrt(2·(x-7/2)^2+49/2);

$$(\%o13)\quad \frac{-2\,(y-x)-2\,(-y-x+14)}{10\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}=-\frac{2\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}}$$

(%i14) ec21:ec2-(2·(y-21/2))/sqrt(2·(y-21/2)^2+49/2);

$$(\%o14)\quad \frac{2\,(y-x)-2\,(-y-x+14)}{10\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}=-\frac{2\left(y-\frac{21}{2}\right)}{\sqrt{2\left(y-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}}$$

Figura 10. Restamos en ambos miembros de la ecuación

Luego procedemos a elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones obtenidas (Figura 11). Este procedimiento modifica el grado de las ecuaciones y en consecuencia amplía el conjunto de soluciones. Las soluciones que se obtengan del sistema derivado deberán ser evaluadas en el sistema primigenio.

(%i14) ec21:ec2-(2·(y-21/2))/sqrt(2·(y-21/2)^2+49/2);

$$(\%o14)\quad \frac{2\,(y-x)-2\,(-y-x+14)}{10\sqrt{(y-x)^2+(-y-x+14)^2}}=-\frac{2\left(y-\frac{21}{2}\right)}{\sqrt{2\left(y-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}}$$

(%i15) ec12:ec11^2;

$$(\%o15)\quad \frac{(-2\,(y-x)-2\,(-y-x+14))^2}{100\,((y-x)^2+(-y-x+14)^2)}=\frac{4\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}{2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}$$

(%i16) ec22:ec21^2;

$$(\%o16)\quad \frac{(2\,(y-x)-2\,(-y-x+14))^2}{100\,((y-x)^2+(-y-x+14)^2)}=\frac{4\left(y-\frac{21}{2}\right)^2}{2\left(y-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}$$

Figura 11. Elevamos al cuadrado cada ecuación

Teníamos el sistema formado por ec1 y ec2 (que son las ecuaciones que resultan de anular las primeras derivadas) que no podíamos resolver con el empleo de la función solve de wxMaxima, las transformamos en ec12 y ec22 y podemos proceder a operar, nuevamente, con la función solve (Figura 12).

(%i17) solve([ec12,ec22],[x,y]);

(%o17) [[x=7,y=7],[x=3.365610692705412-2.37048913374278 %i,y=3.706345992033819 %i+4.557701609552682],
[x=2.37048913374278 %i+3.365610692705414,y=4.557701609552682-3.706345992033819 %i],
[x=2.934442763489662,y=10.0746561886051],
[x=2.305706179484253 %i+4.762197932286924,y=2.305706179422626 %i+9.23780206777063],
[x=4.762197932287036-2.305706179484239 %i,y=9.23780206777063-2.305706179422626 %i],
[x=9.442298390364176-3.706345992008827 %i,y=2.370489133657159 %i+10.63438930725618],
[x=3.706345992008857 %i+9.442298390364137,y=10.63438930725618-2.370489133657159 %i],
$[x=3.925343320848938,y=11.06555671175858],\left[x=-\frac{7\,\%i-7}{2},y=-\frac{7\,\%i-21}{2}\right],\left[x=\frac{7\,\%i+7}{2},y=\frac{7\,\%i+21}{2}\right],[x=4,y=10],[x=3,y=11]]$

Figura 12. Soluciones del sistema de ecuaciones

Obtenemos un gran número de soluciones, eliminamos las que no pertenecen al dominio, que es (7,7), las complejas no reales (la unidad imaginaria se indica con %i) y solo nos quedan 4 candidatos a solución del sistema original (recordemos que al elevar al cuadrado las ecuaciones modificamos el conjunto de soluciones). Para determinar cuál o cuáles de ellas son soluciones del sistema original (el formado por ec1 y ec2, las ecuaciones que anulan las primeras derivadas) debemos probar a cada una en las ecuaciones originales. Empleamos para ello el comando ev de wxMaxima (solo se ilustran algunas pruebas en la figura 13)

(%i20) ev(ec1,x=3,y=11);ev(ec2,x=3,y=11);

$$(\%o19)\quad -\frac{2}{5}=0$$

$$(\%o20)\quad \frac{2}{5}=0$$

(%i22) ev(ec1,x=4,y=10);ev(ec2,x=4,y=10);

(%o21) 0=0

(%o22) 0=0

Figura 13. Evaluamos las soluciones en ec1 y ec2

Con esto probamos que el único punto crítico de nuestra función (tiempo) es en (4,10). Resta determinar la naturaleza del mismo ¿se trata efectivamente de un mínimo? (la observación del gráfico realizado nos indica que si, pero debemos proceder al cálculo. Para determinar extremos en una función de dos variables empleamos la matriz Hessiana. Para ello debemos obtener las derivadas de segundo orden, definir la Matriz y luego obtener su determinante. En la Figura 14 podemos observar como wxMaxima hace posible tan ardua tarea. Simplemente ilustramos una porción del trabajo: determinar la derivada de orden dos respecto de *x* dos veces; la definición de la Matriz Hessiana, su evaluación en el punto crítico y el cálculo del determinante.

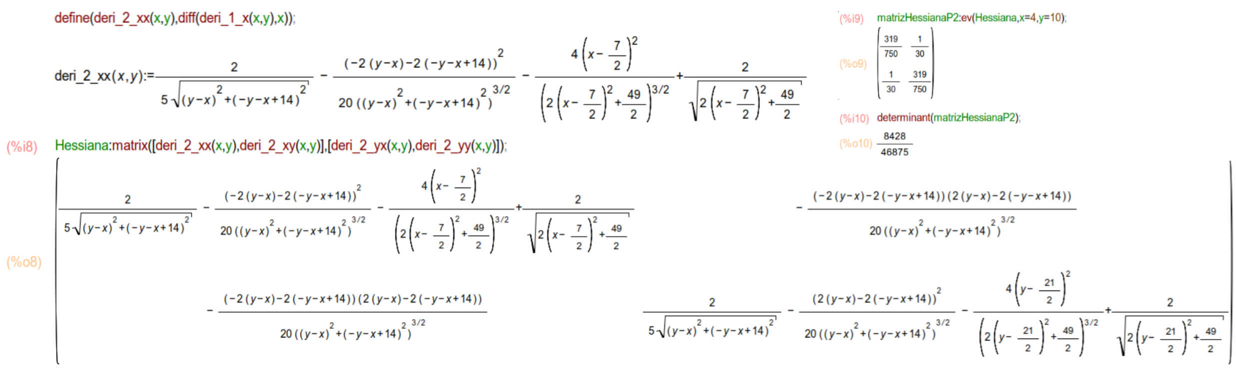

Figura 14. Operaciones varias en wxMaxima

Acabamos de establecer que en (4,10) la función tiempo admite un mínimo local. Esto significa que ingresando en la zona despejada cuando x=4 y saliendo de ella cuando x=10 el tiempo de recorrido es mínimo. Para determinarlo es tan simple como calcular la función en el punto (figura 15).

Figura 15. Evaluamos función en el punto

Nótese la gran cantidad y dificultad de trabajo algebraico y aritmético necesario para llevar adelante este trabajo. Realmente es difícil pensar en trasladar este problema a un aula, sin la asistencia de los programas empleados, y poder lograr de este un recurso transparente para la enseñanza de la matemática.

4.4. Análisis menos general del problema, solución en una variable

Como ya hemos sugerido, incorporamos al problema una nueva condición: “Los puntos de ingreso y egreso a la región despejada deben ser simétricos con la diagonal $\overline{AC}$”. Con esto garantizamos el hecho de que el recorrido realizado dentro de la región despejada debe ser paralelo al camino directo entre Ciudad y Pueblo. De modo que: el recorrido alternativo se simplifica mucho. El tramo 1 y 3 son iguales; y el tramo 2 (el que ocurre dentro de la región despejada) queda expresado en función de la abscisa de su punto de ingreso. En la Figura 16 podemos observar la representación de la situación.

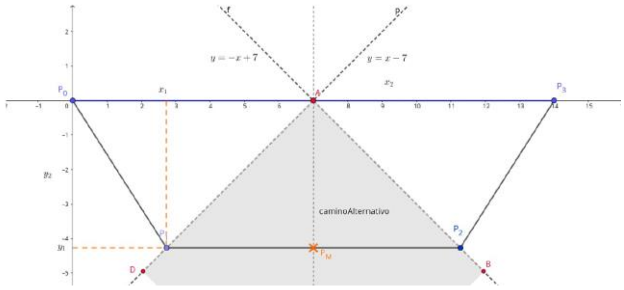

Figura 16. Camino alternativo en la solución menos general del problema

De modo que la función que determina el tiempo que insume el recorrido alternativo, y su dominio, las podemos observar en la Figura 17, donde la variable independiente representa la abscisa del punto de ingreso a la región despejada:

$$\text{Sea } D=\left[7-\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2},7\right),\ t:D\to \mathbb{R}/t(x)=2\cdot\left(\sqrt{2\cdot x^2-14\cdot x+49}+\frac{7-x}{5}\right)$$

Figura 17. Función de tiempo y su dominio

Se propone, nuevamente, una aproximación gráfica de la solución. Explorar mediante GeoGebra la representación gráfica de esta función. En la Figura 18 podemos observar la representación gráfica (GeoGebra) destacando en los ejes su dominio. Esta gráfica permite a los estudiantes tener una primera idea, aproximada, respecto del mínimo de la función.

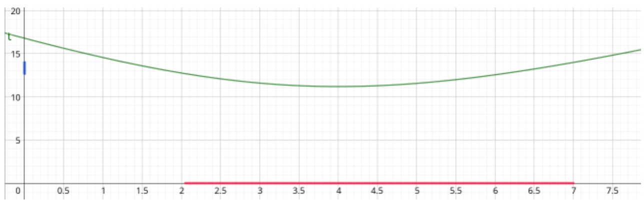

Figura 18. Representación gráfica de la función tiempo y su dominio

Para arribar a la solución algebraica de la función volvemos a recurrir a wxMaxima. Omitimos el trabajo, es muy similar al que se describió en el apartado anterior.

4.5. Scratch y el problema

También iniciamos un análisis del problema con Scratch, no con la profundidad que se ha trabajado como con los otros softwares, pero se avanzó en la programación de un simulador de una carrera por caminos posibles (Figura 19). El aplicativo se puede visitar en el sitio de Scratch.[2]

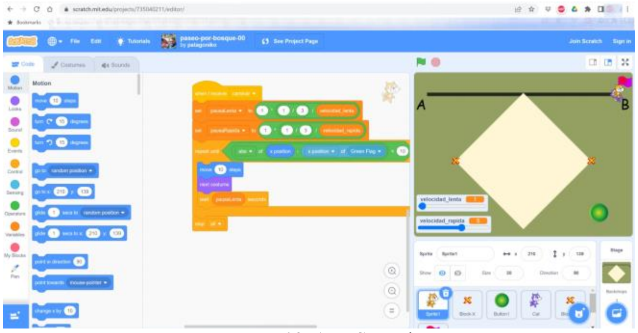

Figura 19. App Scratch

Consideramos que, en términos de transparencia, visibilidad e invisibilidad, Scratch resulta ser bastante visible, por no decir, demasiado pues requiere conocimientos de programación que no son mínimos y entonces se desvía la resolución del problema hacia una tarea de aprender a programar. Sin embargo, Scratch permitiría que el profesor proponga a sus estudiantes la App ya diseñada con el objetivo de hacer emerger la necesidad de verificar el resultado de la carrera. Sin dudas hay aquí otro ejemplo clave del uso y no del software propiamente dicho.

4.6. ChatGPT Proof

El título de esta sección pretende dar indicios de los alcances y limitaciones del ChatGPT en y para la interpretación y resolución de este problema. En líneas con la problemática mencionada en la Introducción, este apartado pretende cuestionar los vínculos entre el ChatGPT y la enseñanza de la Matemática a partir de la pregunta que formulamos a continuación: ¿Cuál será el destino de nuestros recursos en esta incipiente era de la IA? Así, hemos puesto a prueba nuestro recurso contra las bondades de ChatGPT. Los resultados obtenidos nos sorprendieron y a la vez nos tranquilizaron. Iniciamos, con el intérprete, una pormenorizada descripción de las condiciones del problema (ilustramos una parte de la charla en la Figura 20):

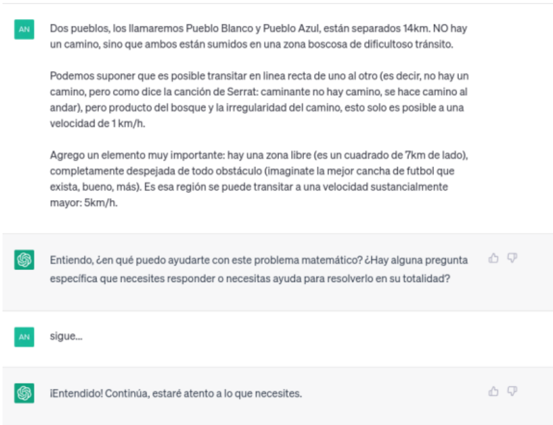

Figura 20. Segmento de charla con ChatGPT

Si bien el chat no logra devolver imágenes convencionales, inicialmente intenta la devolución de representaciones del problema mediante el empleo de codificación ASCII (Figura 21):

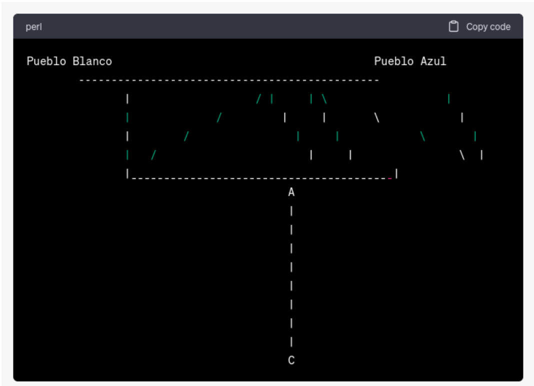

Figura 21. Representación mediante carácteres ASCII

Notamos cierta desconexión entre lo que se representaba y las condiciones que le habíamos indicado al intérprete. Hasta que intentamos comunicarnos gráficamente de otro modo: le solicitamos nos devuelva la representación gráfica mediante alguna librería Python. ChatGPT nos comienza a devolver código Python (Figura 22):

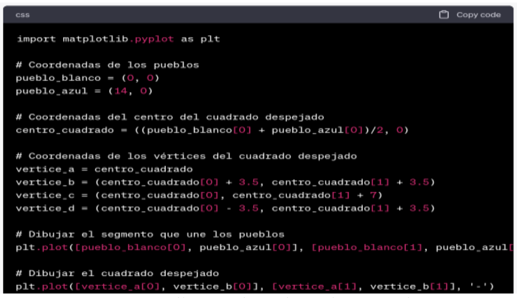

Figura 22. Código Python devuelto por ChatGPT

Este código lo ejecutamos en nuestra computadora, obteniendo la siguiente representación (Figura 23):

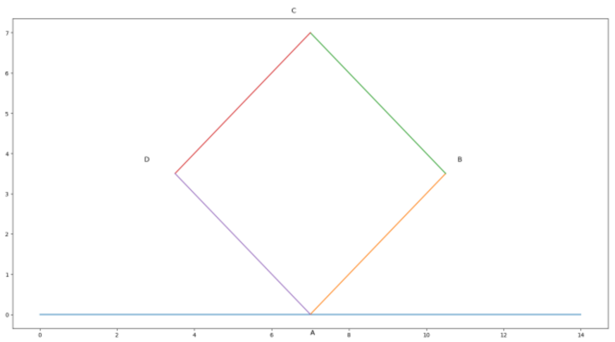

Figura 23. Gráfico Python

Cuando intentamos avanzar en la resolución del problema: *obtener y describir el recorrido que minimiza el tiempo*, nos encontramos con que el ChatGPT intentaba sugerir algunos recorridos posibles (Figura 24):

Figura 24. Segmento de charla con ChatGPT

Nuestro autómata daba señales de desconexión con el problema, debíamos reiterar supuestos y condiciones ya establecidos y no pudimos avanzar de este punto. Propuso algún recorrido (incluso sin sentido: transitando el perímetro del cuadrado despejado) y determinó el tiempo que insumió, pero nada más. En ningún momento intentó definir una función para minimizar, tampoco se lo hemos sugerido. Si bien a esta altura ya se ha comentado que esta IA no es especialmente creativa para resolver problemas de matemática, tal como se indicó en la charla denominada *La inteligencia artificial, ChatGPT y su posible impacto en la enseñanza de la matemática* realizada por realizada por la Universidad de Lima (Perú) [15], podemos asegurar, que por lo menos este problema está blindado a sus habilidades.

Conclusiones

Sin duda el problema que presentamos, en estas breves páginas, tiene un gran potencial tanto desde el punto de vista matemático como de sus usos en diferentes aulas de matemática y utilizando de forma genuina otros recursos digitales.

En términos de visibilidad, invisibilidad y transparencia, estamos convencidos que tanto GeoGebra como wxMaxima resultan transparentes en el contexto de uso propuesto. Mientras que Scratch pareciera ser visibles. Recordemos que estas ideas remiten a la cracteristicas de un recurso cuando se lo emplea en el aula y que refieren al costo de manipular el recurso digital y a cuanto opaca (o no) el saber matemático que se pretende construir/estudiar con él.

Respecto al ChatGPT, si bien estamos avanzando en el análisis del problema con este intérprete, los ensayos realizados hasta el momento, nos permiten concluir en las ventajas del Chat desde el lado de la programación pero no tan así en la resolución propiamente dicha del problema. Si ChatGPT hubiese representado gráficamente y resuelto el problema con el solo hecho de haberlo ingresado en su interfaz, esto lo descartaría como recurso de enseñanza, dado que calificaría como *invisible:* inconducente a cualquier reflexión significativa respecto del objeto de estudio que se pretendía abordar. Sin embargo, el extenso debate que necesitamos mantener con el Chat, para lograr una representación gráfica adecuada del problema; lo aleja de cualquier vestigio de *invisibilidad* como recurso para la enseñanza (en algún contexto y propósito específico).

Si aceptamos la idea de que el interlocutor del ChatGPT tiene mínimos conocimientos informáticos que le permitan: (a) copiar el código que le entrega la IA, (b) pegarlo en un editor de textos, (c) ejecutarlo mediante un intérprete de Python; estaríamos en condiciones de recomendar este recurso para generar una representación gráfica del problema tratado. Incluso al analizar el debate necesario con el Chat, en ese infructuoso camino de intentar hallar la solución al problema, se puede apreciar que estamos en presencia de un recurso valioso, con el nivel de transparencia necesario, para realizar una primera aproximación de nuestro problema.

Con todo lo antes mencionado, nos atrevemos a asegurar que nuestro recurso, el problema de la zona despejada, necesita usos genuinos de otros recursos digitales y a su vez (de momento), está blindado al ChatGPT. Esto no significa que desestimamos el uso de Chat dentro de las clases de matemática, sino por el contrario, animamos a los profesor a indagar en él y poner a prueba sus problemas para aprovechar las potenciales del mismo.

Finalmente, queremos mencionar que tanto GeoGebra, wxMaxima y Scratch son libres y multiplataformas y que hemos pretendido presentar en este trabajo, una síntesis de una tesis de grado en realización.

Notas

[1]Omitimos gran parte del trabajo de resolución por una cuestión de espacio.

[2]https://scratch.mit.edu/projects/735040211/fullscreen/

Referencias

[1] W. Castro, H. Velásquez-Echavarría, J. López-Sora, "Recursos Didácticos y Contextos Usados por Futuros Profesores de Matemáticas," *Bolema, Rio Claro (SP)*, vol. 35, no. 69, pp. 432-458, 2021.

[2] C. A. Figueiredo, L. C. Contreras, "A função quadrática: variação, transparência e duas tipologias de exemplos," *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, no. 3, pp. 45-68, 2013.

[3] R. Carvalho de Sousa, F. Régis Vieira Alves, F. C. Fernandes Fontenele, "Engenharia didática de formação (EDF): uma proposta de situação didática do ENEM com o uso do software GeoGebra para professores de matemática no Brasil," *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 26, pp. 90-99, 2020.

[4] L. García, A. Álvarez, J. Barrera, "wxMaxima en la enseñanza de las Matemáticas. Caso de las sumas de Riemann," *Revista de Sistemas y Gestión Educativa*, vol. 3, no. 9, pp. 20-26, 2016.

[5] A. de la Hoz Ruiz, R. Hijón Neira, "Enseñanza de las Matemáticas a través del Uso de Scratch (Transversalidad STEM)," *Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, no. 36, pp. 14-34, 2022.

[6] S. Bilinkis. (2023, Marzo 23). ¿Qué vale la pena aprender? La educación en la era de la IA [Online]. Disponible: https://bilinkis.com/

[7] B. Campello de Souza, A. S. de Andrade Neto, A. Roazzi. (2023, Abril 6). ChatGPT, the Cognitive Mediation Networks Theory and the emergence of sophotechnic thinking: how natural language AIs will bring a new step in collective cognitive evolution [Online]. Disponible: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4405254

[8] P. Rabardel, *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin, 1995.

[9] P. Rabardel, "Le langage comme instrument ? Éléments pour une théorie instrumentale élargie," in Proceedings of Avec Vygotski, Paris, La Dispute, 1999, pp. 241-265.

[10] G. Gueudet, L. Trouche, "Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques," *Education et didactique*, vol. 2, no. 3, pp. 7-33, 2008.

[11] J. Adler, "Resources as a verb: Recontextualizing resources in and for school mathematics practice," in Proceedings of the 22nd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, Stellenbosch, South Africa, 1998, pp. 1-18.

[12] G. Vergnaud, "La théorie des champs conceptuels," *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, no. 23, pp. 133-170, 1990.

[13] J. Adler, "Conceptualising resources as a theme for teacher education," *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 3, pp. 205-224, 2000.

[14] A. Marín del Moral, "Experiencias y reflexiones en torno al desarrollo de la competencia de modelización matemática en secundaria con apoyo de las nuevas tecnologías," en *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas,* R. Romero, Ed. Secretaría General Técnica: Subdirección General de Documentación y Publicaciones, 2012, pp. 77-122.

[15] Universidad de Lima, Perú. (2023, abril 11). La inteligencia artificial, ChatGPT y su posible impacto en la enseñanza de la matemática [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=U2eWHp1XTMI&t=1433s

Información de Contacto de los Autores:

Nicolás Rosbaco
M. Esandi y R. Balbín
Viedma
Argentina
nicolasrosbaco@curza.com.ar
https://orcid.org/0009-0008-9282-4360

Verónica Parra
Pinto 399
Tandil
Argentina
vparra@exa.unicen.edu.ar
https://orcid.org/0000-0002-6956-0052

Patricia Sureda
Pinto 399
Tandil
Argentina
psureda@exa.unicen.edu.ar
https://orcid.org/0009-0004-6223-4424

Nicolás Rosbaco
Profesor de Matemática (ISFDT 25), Técnico Superior en desarrollo de Aplicaciones Web (UNC-CURZA). Estudiante de la Licenciatura en Educación Matemática (UNCPBA).

Verónica Parra
Investigadora asistente del CONICET. Profesora de Matemática, Licenciada en Educación Matemática y Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, mención matemática (UNCPBA). Post-doc por la UBO (Francia).

Patricia Sureda
Investigadora asistente del CONICET. Profesora de Matemática, Licenciada en Educación Matemática y Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, mención matemática (UNCPBA).