演習問題 2.24

式 (2.76) の両辺に次の行列式を掛け、また、式 (2.77) の定義を用いることで、式 (2.76) の恒等式を証明せよ。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

… (2.287)

[ブロック行列の逆行列]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

… (2.76)

ただし、$\mathbf{M}$ は次のように定義される。

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$$

… (2.77)

これは、ブロック行列の逆行列であり、多変量ガウス分布の共分散行列やその逆行列 (精度行列) を求めるときに用いられる。

[**シューア補行列** (Schur complement matrix)]

$\mathbf{M}^{-1}$ を、式 (2.76) の左辺の、部分行列 $\mathbf{D}$ に関する「 シューア補行列 」という。

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$$

[解]

$\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$ とするとき、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{ul} & \mathbf{E}_{ur} \\ \mathbf{E}_{ll} & \mathbf{E}_{lr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

… ※

が成り立つことを示せばよい。これについて、ブロック行列を左上 $\mathbf{E}_{ul}$ 、右上 $\mathbf{E}_{ur}$ 、左下 $\mathbf{E}_{ll}$ 、右下 $\mathbf{E}_{lr}$ の 4 つの要素に分けて考えていく。

(i) ブロック行列の左上の要素 $\mathbf{E}_{ul}$

$$\mathbf{E}_{ul} = \mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$$
$$= \mathbf{M}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})$$

ここで、$\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$ であることから、上記の式は、

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) = \mathbf{I}$$

（ ii ）ブロック行列の右上の要素 $\mathbf{E}_{ur}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{ur} &= \mathbf{MB} - \mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D} \\ &= \mathbf{MB} - \mathbf{M}\,\mathbf{B} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

（ iii ）ブロック行列の左下の要素 $\mathbf{E}_{ll}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{ll} &= -\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{A} + (\,\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,)\mathbf{C} \\ &= -\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{A} + \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C} + \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C} \\ &= \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}(\,-\mathbf{M}\,\mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,) \\ &= \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\{\,\mathbf{I} - \mathbf{M}(\,\mathbf{A} + \mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,)\,\}\end{aligned}$$

ここで、$\mathbf{M} = (\,\mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,)^{-1}$ であることから、上記の式は、

$$\begin{aligned}&= \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\{\,\mathbf{I} - (\,\mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,)^{-1}(\,\mathbf{A} + \mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,)\,\} \\ &= \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}(\,\mathbf{I} - \mathbf{I}\,) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

（ iv ）ブロック行列の右下の要素 $\mathbf{E}_{lr}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{lr} &= -\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B} + (\,\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,)\mathbf{D} \\ &= -\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D} + \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D} \\ &= -\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B} + \mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}\,\mathbf{B} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

以上（ i ），（ ii ），（ iii ），（ iv ）より、式 ※ が示せた。

よって、式（ 2.76 ）の両辺に次の行列式を掛け、式（ 2.77 ）の定義を用いることで、式（ 2.76 ）の恒等式が証明できた。