演習問題 1.31

2 つの変数 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ を考え、同時分布 $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ をとする。この変数の組の微分エントロピーが

$$\mathrm{H}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \leq \mathrm{H}[\mathbf{x}] + \mathrm{H}[\mathbf{y}]$$

…（ 1.52 ）

を満たし、等号は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が統計的に独立なとき、またそのときに限ることを示せ。

[エントロピー]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}] = -\int p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

…（ 1.104 ）

[条件付きエントロピー]

$$\mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] = -\iint p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

…（ 1.111 ）

[条件付きエントロピーの関係式]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] + \mathbf{H}[\mathbf{x}]$$

…（ 1.112 ）

[相互情報量（ カルバック – ライブラーダイバージェンス ）]

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathrm{KL}(p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \| p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})) = -\iint p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ln\left(\frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x},\mathbf{y})}\right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$$

…（ 1.120 ）

[相互情報量の関係式]

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{H}[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{y}] - \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}]$$

…（ 1.121 ）

[解]

式（ 1.52 ）は、左辺を右辺に移行すると、

$$\mathrm{H}[\mathbf{x}] + \mathrm{H}[\mathbf{y}] - \mathrm{H}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \geq 0$$

…（ 1.52)′

と変形できるので、以後、これを証明する。上記の式の左辺は、条件付きエントロピーの関係式（ 1.112 ）より、

$$\begin{aligned} \text{式（ 1.52)′ の左辺} &= \mathrm{H}[\mathbf{x}] + \mathrm{H}[\mathbf{y}] - (\mathrm{H}[\mathbf{y} | \mathbf{x}] + \mathrm{H}[\mathbf{x}]) \\ &= \mathrm{H}[\mathbf{y}] - \mathrm{H}[\mathbf{y} | \mathbf{x}] \end{aligned}$$

となり、これは相互情報量の関係式（ 1.121 ）より、相互情報量 $\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ で以下のように書き表すことができる。

$$= \mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$$

上記の式は、カルバック－ライブラーダイバージェンス（ 1.113 ）の性質から、必ず正の値となることがわかる。

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \geq 0$$

以上より、式（ 1.52)′ の関係式が満たせたので、2 つの変数 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の組の微分エントロピーが、式（ 1.52 ）を満たすことが示せた。

最後に、式（ 1.52 ）の等号は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が統計的に独立なとき、またそのときに限ることを示す。式（ 1.120 ）より、

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathrm{KL}(p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \| p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})) = -\int\int p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ln\left(\frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x},\mathbf{y})}\right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$$

となり、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が統計的に独立なとき、$p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})$ となるので、上記の式は、

$$= -\int\int p(\mathbf{x})p(\mathbf{y}) \ln\left(\frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})}\right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$$

$$= -\int\int p(\mathbf{x})p(\mathbf{y}) \ln 1 \, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = 0$$

となる。よって、式（ 1.52 ）の等号は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が統計的に独立なとき、またそのときに限ることを示せた。