

演習問題 2.22

対称行列の逆行列も対称であることを示せ。

[解]

対称行列を \mathbf{M} と定義すると、当然ながら、 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ が保証される。また、その逆行列は、

$$\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$$

を満たす。上記の式の両辺の転置をとると、

$$(\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{I}^T$$

となり、これは転置行列の基本的性質を用いて、

$$(\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{M}^T = \mathbf{I}^T$$

となる。また、 $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ より、上記の式の右辺は、

$$(\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{M}^T = \mathbf{I}$$

と書き直せる。ここで、 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ であることから、

$$(\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{M} = \mathbf{I}$$

となり、さらに、上記の式の両辺に右側から \mathbf{M}^{-1} を掛けると、

$$(\mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{M}^{-1}$$

となる。上記の式は、対称行列 \mathbf{M} の逆行列 \mathbf{M}^{-1} も $(\mathbf{M}^{-1})^T$ より、対称であることを意味している。よって、対称行列の逆行列も対称であることが示せた。