演習問題 2.06

式 (2.265) の結果を用いて、ベータ分布 (2.13) の平均、分散、およびモードがそれぞれ

$$\mathrm{E}[\mu] = \frac{a}{a+b}$$

… (2.267)

$$\mathrm{var}[\mu] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

… (2.268)

$$\mathrm{mode}[\mu] = \frac{a-1}{a+b-2}$$

… (2.269)

になることを示せ。

[期待値]

ある関数 $f(x)$ の確率分布 $p(x)$ の下での平均値のこと。

$$\mathrm{E}[f] = \int p(x) f(x)\,dx$$

… (1.34)

[分散]

$f(x)$ がその平均値 $\mathrm{E}[f(x)]$ の周りでどれぐらいバラつくかを表す尺度のこと。

$$\mathrm{var}[f] = \mathrm{E}[(f(x) - \mathrm{E}[f(x)])^2]$$

… (1.38)

$$= \mathrm{E}[f(x)^2] - \mathrm{E}[f(x)]^2$$

… (1.39)

[ガンマ関数]

階乗の概念を一般化した特殊関数である。ここで、x は任意の正実数である。

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

… (1.141)

基本的性質として、ガンマ関数は、自然数 n について、

$$\Gamma(n+1) = n!$$

が成立する。また、非整数でのガンマ関数の値のうち、最も有名であるのは、ガウス積分になる $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ である

[ベータ分布]

$$\mathrm{Beta}(\ \mu \mid a,\ b\ ) = \frac{\Gamma(\ a + b\ )}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,\mu^{a-1}(\ 1 - \mu\ )^{b-1}$$

… (2.13)

[正規化条件]

$$\int_0^1 \mu^{a-1}(\ 1 - \mu\ )^{b-1} d\mu = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(\ a + b\ )}$$

… (2.265)

[解]

まず、ベータ分布 (2.13) の平均 (2.267) を示す。式 (1.34) より、平均 $\mathrm{E}[\mu]$ は、

$$\mathrm{E}[\mu] = \int_0^1 \mu\,\mathrm{Beta}(\ \mu \mid a,\ b\ )\,d\mu$$

と書き表せる。また、ベータ分布は式 (2.13) であるので、

$$= \int_0^1 \mu\,\frac{\Gamma(\ a + b\ )}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,\mu^{a-1}(\ 1 - \mu\ )^{b-1}\,d\mu$$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma(\ a + b\ )}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,\mu^{a}(\ 1 - \mu\ )^{b-1}\,d\mu$$

… ※

となる。ここで、式 (2.265) より、

$$\int_0^1 \mu^{a}(\ 1 - \mu\ )^{b-1} d\mu = \frac{\Gamma(\ a + 1\ )\Gamma(b)}{\Gamma(\ a + b + 1)}$$

であるから、式 ※ は、

$$= \frac{\Gamma(\ a + b\ )}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,\frac{\Gamma(\ a + 1\ )\Gamma(b)}{\Gamma(\ a + b + 1\ )}$$

となる。ガンマ関数の基本特性より、自然数 n について、$\Gamma(\ n + 1\ ) = n!$ が成り立つので、最終的に上記の式は、

$$= \frac{\Gamma(\ a + b\ )}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,\frac{a\,\Gamma(\ a\ )\Gamma(b)}{(\ a + b\ )\Gamma(\ a + b)}$$

$$= \frac{a}{a + b}$$

となり、式 (2.267) が示せた。

次に、ベータ分布 (2.13) の分散 (2.268) を示す。式 (1.39) より、分散 $\mathrm{var}[\mu]$ は、

$$\mathrm{var}[\mu] = \mathrm{E}[\mu^2] - \mathrm{E}[\mu]^2$$

… ※※

と表される。ここで、式（ 1.34 ）より、$\mathrm{E}[\,\mu^2\,]$ は、

$$\mathrm{E}[\,\mu^2\,] = \int_0^1 \mu^2\,\mathrm{Beta}(\,\mu \mid a,\ b\,)\,d\mu$$

と書き表せる。また、ベータ分布は式（ 2.13 ）であるので、

$$= \int_0^1 \mu^2\,\frac{\Gamma(\,a + b\,)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\mu^{a-1}(\,1 - \mu\,)^{b-1}\,d\mu$$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma(\,a + b\,)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\mu^{a+1}(\,1 - \mu\,)^{b-1}\,d\mu$$

… ※※※

となる。ここで、式（ 2.265 ）より、

$$\int_0^1 \mu^{a+1}(\,1 - \mu\,)^{b-1}\,d\mu = \frac{\Gamma(\,a + 2\,)\,\Gamma(b)}{\Gamma(\,a + b + 2\,)}$$

であるから、式 ※※※ は、

$$= \frac{\Gamma(\,a + b\,)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\frac{\Gamma(\,a + 2\,)\,\Gamma(b)}{\Gamma(\,a + b + 2\,)}$$

となる。ガンマ関数の基本特性より、自然数 n について、$\Gamma(\,n + 1\,) = n!$ が成り立つので、上記の式は、

$$= \frac{\Gamma(\,a + b\,)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\frac{(\,a + 1\,)\,\Gamma(\,a + 1\,)\,\Gamma(b)}{(\,a + b + 2\,)\,\Gamma(\,a + b + 1\,)}$$

$$= \frac{\Gamma(\,a + b\,)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\frac{(\,a + 1\,)\,a\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{(\,a + b + 1\,)(\,a + b\,)\,\Gamma(\,a + b\,)}$$

$$= \frac{a(\,a + 1\,)}{(\,a + b\,)(\,a + b + 1\,)}$$

となる。これを用いて、式 ※※ は、

$$= \frac{a(\,a + 1\,)}{(\,a + b\,)(\,a + b + 1\,)} - \left(\frac{a}{a + b}\right)^2$$

$$= \frac{a(\,a + 1\,)(\,a + b\,) - a^2(\,a + b + 1\,)}{(\,a + b\,)^2(\,a + b + 1\,)}$$

$$= \frac{(\,a^3 + a^2 b + a^2 + ab\,) - (\,a^3 + a^2 b + a^2\,)}{(\,a + b\,)^2(\,a + b + 1\,)}$$

$$= \frac{ab}{(\,a + b\,)^2(\,a + b + 1\,)}$$

となり、式（ 2.268 ）が示せた。

最後に、ベータ分布（ 2.13 ）のモード（ 2.269 ）を示す。ここで、ベータ分布のモードとは、ベータ分布が最大となる μ の値のことである。 式（ 2.13 ）を μ で微分することで、

$$\frac{d\,\mathrm{Beta}(\mu \mid a, b)}{d\mu} = \frac{d\left\{ \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1} \right\}}{d\mu}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{d\{ \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1} \}}{d\mu}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \{ (\mu^{a-1})'(1-\mu)^{b-1} + \mu^{a-1}((1-\mu)^{b-1})' \}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \{ (a-1)\mu^{a-2}(1-\mu)^{b-1} - (b-1)\mu^{a-1}(1-\mu)^{b-2} \}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mu^{a-2}(1-\mu)^{b-2}\{ (a-1)(1-\mu) - (b-1)\mu \}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mu^{a-2}(1-\mu)^{b-2}\{ (a-1) - (a-1)\mu - (b-1)\mu \}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mu^{a-2}(1-\mu)^{b-2}\{ (a-1) - (a+b-2)\mu \}$$

が得られ、この導関数が 0 となる μ の値が $\mathrm{mode}[\mu]$ である。上記の式より、

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mu^{a-2}(1-\mu)^{b-2}\{ (a-1) - (a+b-2)\mu \} = 0$$

となる μ の値は、

$$\mu = 0,\ 1,\ \frac{a-1}{a+b-2}$$

であるが、$\mu = 0, 1$ のとき、ベータ分布 (2.13) は最小となるので、$\mathrm{mode}[\mu]$ は、

$$\mathrm{mode}[\mu] = \frac{a-1}{a+b-2}$$

に定まる。よって、式 (2.269) が示せた。