**演習問題 1.13**

ガウス分布の分散の推定値（ 1.56 ） において、最尤推定値 $\mu_{\mathrm{ML}}$ を真の平均の値 $\mu$ で置き換えよう。この推定量は、期待値が真の分散 $\sigma^2$ となる性質をもつことを示せ。

$$\sigma_{\mathrm{ML}}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\, x_n - \mu_{\mathrm{ML}}\,)^2 \quad \cdots (\ 1.56\ )$$

$$\mathrm{E}[\,x\,] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{N}(\,x\,|\,\mu\,,\sigma^2\,)\,x\,dx = \mu \quad \cdots (\ 1.49\ )$$

$$\mathrm{E}[\,x^2\,] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{N}(\,x\,|\,\mu\,,\sigma^2\,)\,x^2\,dx = \mu^2 + \sigma^2 \quad \cdots (\ 1.50\ )$$

［ 解 ］

式（ 1.56 ）において、最尤推定値 $\mu_{\mathrm{ML}}$ を真の平均の値 $\mu$ で置き換えた式（ 1.56 ）の期待値は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\,x_n-\mu\,)^2\,\right] &= \frac{1}{N}\,\mathrm{E}\left[\,\sum_{n=1}^{N}(\,x_n^2\,-\,2\,\mu\,x_n\,+\,\mu^2\,)\,\right] \\
&= \frac{1}{N}\left\{\,\mathrm{E}\left[\,\sum_{n=1}^{N}x_n^2\,\right] - 2\,\mu\,\mathrm{E}\left[\,\sum_{n=1}^{N}x_n\,\right] + \mathrm{E}\left[\,\sum_{n=1}^{N}\mu^2\,\right]\right\} \\
&= \frac{1}{N}\left\{\,\mathrm{E}\left[\,\sum_{n=1}^{N}x_n^2\,\right] - 2\,\mu\,\mathrm{E}\left[\,\sum_{n=1}^{N}x_n\,\right] + \mathrm{E}\left[\,\sum_{n=1}^{N}\mu^2\,\right]\right\} \\
&= \frac{1}{N}\,(\,\mathrm{E}[\,x_1^2\,] + \mathrm{E}[\,x_2^2\,] + \cdots + \mathrm{E}[\,x_N^2\,]\,)
\end{aligned}$$

$$-\,2\,\mu\,\frac{1}{N}\,(\,\mathrm{E}[\,x_1\,] + \mathrm{E}[\,x_2\,] + \cdots + \mathrm{E}[\,x_N\,]\,) + \frac{1}{N}\,\mathrm{E}[\,N\mu^2\,]$$

ここで、式（ 1.49 ),（ 1.50 ）より、

$$= \frac{1}{N}\cdot N\,(\,\mu^2+\sigma^2\,) - 2\,\mu\,\frac{1}{N}\cdot N\mu + \frac{1}{N}\,N\mu^2 = \sigma^2$$

よって、真の平均 $\mu$ を用いた場合の分散の期待値は、真の分散 $\sigma^2$ となることが示せた。