演習問題 1.21

2 つの非負の数 a と b があったとき、$a \leq b$ なら $a \leq (ab)^{1/2}$ であることを示せ。この結果を用いて、2 クラスのクラス分類問題の決定領域を、誤識別率が最小になるように選ぶと、この確率が

$$p(\text{誤り}) \ll \int \{p(\mathbf{x}, C_1)\,p(\mathbf{x}, C_2)\}^{1/2}\, d\mathbf{x}$$

… (1.150)

を満たすことを示せ。

[誤識別率]

$$p(\text{誤り}) = p(\mathbf{x} \in R_1,\ C_2) + p(\mathbf{x} \in R_2,\ C_1)$$
$$= \int_{R_1} p(\mathbf{x}, C_2)\, d\mathbf{x} + \int_{R_2} p(\mathbf{x}, C_1)\, d\mathbf{x}$$

… (1.78)

[解]

まず、2 つの非負の数 a と b があったとき、$a \leq b$ なら $a \leq (ab)^{1/2}$ であることを示す。今、a と b は非負なので、

$$a \leq b$$

の両辺を a 乗しても、上記の不等式の等号の向きは保たれることから、

$$a^2 \leq ab$$

は保証される。上記の不等式の両辺は正の値であるので、平方根をとると、

$$a \leq (ab)^{1/2}$$

となり、題意は示された。

次に、2 クラスのクラス分類問題の決定領域を、誤識別率が最小になるように選ぶと、この確率が式 (1.50) を満たすことを示す。誤りは、C_1 クラスに属する入力ベクトルを C_2 に割り当てた場合、あるいはその逆の場合に起きるので、誤識別率は、式 (1.78) より、

$$p(\text{誤り}) = p(\mathbf{x} \in R_1,\ C_2) + p(\mathbf{x} \in R_2,\ C_1)$$
$$= \int_{R_1} p(\mathbf{x}, C_2)\, d\mathbf{x} + \int_{R_2} p(\mathbf{x}, C_1)\, d\mathbf{x}$$

… ※

となる。ここで、決定領域 R_1 では、 $p(\mathbf{x}, C_2) \leq p(\mathbf{x}, C_1)$ であるので、$a = p(\mathbf{x}, C_2)$, $b = p(\mathbf{x}, C_1)$ とすると、先程証明した $a \leq b$ なら $a \leq (ab)^{1/2}$ が成り立つ関係より、式 ※ の第一項は、

$$\int_{R_1} p(\mathbf{x}, C_2)\, d\mathbf{x} \leq \int_{R_1} \{p(\mathbf{x}, C_1)\,p(\mathbf{x}, C_2)\}^{1/2}\, d\mathbf{x}$$

となり、逆に決定領域 R_2 の場合も、 $p(\mathbf{x},C_1) \leq p(\mathbf{x},C_2)$ であるので、$a = p(\mathbf{x},C_1)$, $b = p(\mathbf{x},C_2)$ とすると、式 ※ の第二項は、

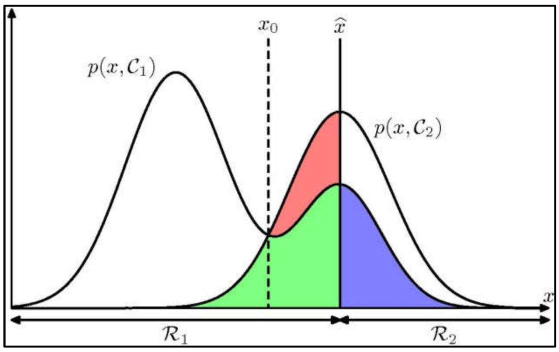
$$\int_{R_2} p(\mathbf{x},C_1)\,d\mathbf{x} \leq \int_{R_2} \{p(\mathbf{x},C_1)\,p(\mathbf{x},C_2)\}^{1/2}\,d\mathbf{x}$$

となる。よって、式 ※ は、

$$\leq \int_{R_1} \{p(\mathbf{x},C_1)\,p(\mathbf{x},C_2)\}^{1/2}\,d\mathbf{x} + \int_{R_2} \{p(\mathbf{x},C_1)\,p(\mathbf{x},C_2)\}^{1/2}\,d\mathbf{x}$$

$$= \int \{p(\mathbf{x},C_1)\,p(\mathbf{x},C_2)\}^{1/2}\,d\mathbf{x}$$

となる。以上より、2 クラスのクラス分類問題の決定領域を、誤識別率が最小になるように選ぶと、この確率が式（ 1.50 ）を満たすことが示せた。



図： $p(\mathbf{x},C_1)$ と $p(\mathbf{x},C_2)$ のグラフ
R_1 では、 $p(\mathbf{x},C_2) \leq p(\mathbf{x},C_1)$ であり、R_2 では、 $p(\mathbf{x},C_1) \leq p(\mathbf{x},C_2)$ であることがわかる。