

演習問題 2.21

大きさが $D \times D$ の実対称行列の独立なパラメータは、 $D(D+1)/2$ 個であることを示せ。

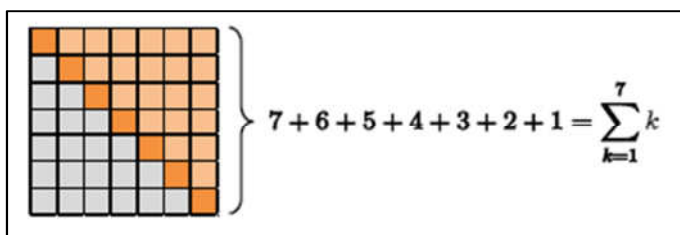
[解]

$D \times D$ の正方行列 \mathbf{A} は、 D^2 個の成分をもつが、実対称行列の場合は、正方行列の対角成分 A_{ij} ($i = j$) は完全に独立なパラメータであるが、それ以外の成分は、 $A_{ij} = A_{ji}$ ($i \neq j$) となり、非対角成分の独立パラメータ数は、 $D \times D$ の正方行列の独立パラメータ数 D^2 から対角成分の独立パラメータ数 D を引いた数 $D^2 - D$ の半分となる。よって、独立なパラメータ数は、

$$D + \frac{D^2 - D}{2} = \frac{D(D+1)}{2}$$

個となるので、大きさが $D \times D$ の実対称行列の独立なパラメータは、 $D(D+1)/2$ 個であることが示せた。

以下の図より、対角成分と非対角成分の独立パラメータ数は、 $\sum_{i=1}^D i$ 個となるので、



図： $D = 7$ 次元の実対称行列の場合

$$\sum_{i=1}^D i = \frac{D(D+1)}{2}$$

が導ける。