演習問題 1.36

真に凸な関数は、すべての弦が関数の上にあるものとして定義される。これが関数の 2 階微分が正であることと等価であることを示せ。

[凸関数]

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \quad \cdots (1.114)$$

を満たす関数 $f(x)$ のことである。ただし、λ は、$0 \leq \lambda \leq 1$ とする。等式が $\lambda = 0$ と $\lambda = 1$ だけで成立するとき、関数は「 **真に凸** (strictly convex) 」であるという。

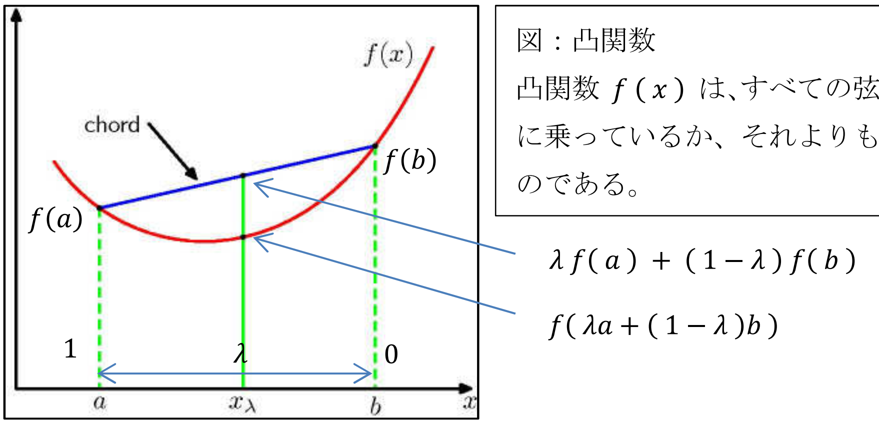


図 : 凸関数
凸関数 $f(x)$ は、すべての弦 (chord) が関数に乗っているか、それよりも上にあるようなものである。

[平均値の定理]

単に「 平均値の定理 」と言った場合には、「 **ラグランジュの平均値の定理** 」を指すことが多い。この他にも、「 **コーシーの平均値の定理** 」、「 **ロピタルの定理** 」、積分の「 **第一平均値定理** 」、「 **第二平均値定理** 」がある。

[ラグランジュの平均値の定理]

$a < b$ とし、$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続で、開区間 (a, b) で微分可能な関数とする。このとき、開区間 (a, b) 上に、ある点 c が存在し、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

が成り立つ。左辺は、グラフにおいて、$(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結ぶ線分 (曲線の弦) の傾き (= 平均変化率) であるから、ラグランジュの平均値の定理は、弦と平行な接線 (= 瞬間の変化率) をもつ点が a と b の間に存在するということが、この定理の主張である。つまり、平均値の定理は、存在型の定理である。

また、ラグランジュの平均値の定理は、$b = a + h$, $c = a + \theta h$ とおくと、

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a + h)$$

とも表せる。ただし、ここで θ の値は、$0 < \theta < 1$ である。

[解]

今、$a < b$, $0 \leq \lambda \leq 1$ とし、区間 $[\ a,\ b\ ]$ を I、凸関数を $f(x)$ で表したとき、真に凸な関数の定義「（閉区間 I における）弦が関数 $f(x)$ の上にある」が、「関数 $f(x)$ の 2 階微分が（閉区間 I において）常に正である」と等価であることを示す。ここで、2 階微分 $f''(x)$ が存在するということは、$f'(x)$ も存在し、閉区間 I において、$f'(x)$, $f''(x)$ が連続であり、開区間 $(\ a,\ b\ )$ で微分が可能であることを示している。また、上記の図の x_λ の位置は、

$$x_\lambda = \lambda a + (1-\lambda)b$$

… ※

と表せる。これらの事実から、「関数 $f(x)$ の 2 階微分が（閉区間 I において）常に正である」という定義が、「（閉区間 I における）弦が関数 $f(x)$ の上にある」という定義に帰着されることを示す。

まず、関数 $f(x)$ の 2 階微分が（閉区間 I において）常に正であることから、関数 $f(x)$ の2 階微分が

$$f''(x) > 0$$

… ※※

で表され、上記の式は、$f'(x)$ が（閉区間 I において）単調増加である事実を示している。ここで、開区間 $(\ a,\ x_\lambda\ )$ 上の点を c_1 、開区間 $(\ x_\lambda,\ b\ )$ 上の点を c_2 とすると、平均値の定理より、

$$\frac{f(x_\lambda) - f(a)}{x_\lambda - a} = f'(c_1) \quad [\ a \leq c_1 \leq x_\lambda\ ]$$

$$\frac{f(b) - f(x_\lambda)}{b - x_\lambda} = f'(c_2) \quad [\ x_\lambda \leq c_2 \leq b\ ]$$

… ※※※

が成り立つ。ここで、式 ※※ より、$f'(x)$ が（区間 I において）単調増加であることから、$c_1 \leq c_2$ より、

$$f'(c_1) \leq f'(c_2)$$

の関係が成り立つ。この関係式は、式 ※※※ より、

$$\frac{f(x_\lambda) - f(a)}{x_\lambda - a} \leq \frac{f(b) - f(x_\lambda)}{b - x_\lambda}$$

と書き直すことができる。また、式 ※ より、上記の式は、

$$\frac{f(\ \lambda a + (1-\lambda)b\ ) - f(a)}{\{\ \lambda a + (1-\lambda)b\ \} - a} \leq \frac{f(b) - f(\ \lambda a + (1-\lambda)b\ )}{b - \{\ \lambda a + (1-\lambda)b\ \}}$$

$$\frac{f(\ \lambda a + (1-\lambda)b\ ) - f(a)}{\lambda a + (1-\lambda)b - a} \leq \frac{f(b) - f(\ \lambda a + (1-\lambda)b\ )}{b - \lambda a - (1-\lambda)b}$$

$$\frac{f(\lambda a + (1-\lambda)b) - f(a)}{(1-\lambda)b + (\lambda-1)a} \leq \frac{f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{b - \lambda a - b + \lambda b}$$

$$\frac{f(\lambda a + (1-\lambda)b) - f(a)}{(1-\lambda)(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{\lambda(b-a)}$$

となるので、両辺に $\lambda(1-\lambda)(b-a)$ を掛けると、

$$\lambda\{ f(\lambda a + (1-\lambda)b) - f(a) \} \leq (1-\lambda)\{ f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b) \}$$

となり、これを展開して整理すると、

$$\lambda f(\lambda a + (1-\lambda)b) - \lambda f(a) \leq (1-\lambda) f(b) - (1-\lambda) f(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

$$\lambda f(\lambda a + (1-\lambda)b) + (1-\lambda) f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq (1-\lambda) f(b) + \lambda f(a)$$

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

となる。よって、上記の式は、式 (1.114) の凸関数の条件式であり、また上記の関係式の状態を図示すると、式 (1.114) の下に示した図のようになる。以上のことから、真に凸な関数は、すべての弦が関数の上にあるものとして定義される。これが関数の 2 階微分が正であることと等価であることを示せた。

[単調増加と単調減少]

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (ただし、a, b, c, d は正の実数とする) があった場合、その微分は $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 、2 階微分は $f''(x) = 6ax + 2b$ と表される。ここで、この関数の停留点は $f'(x) = 0$ より、$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ 、変曲点は $f''(x) = 0$ より、$x = -\frac{b}{3a}$ となるので、増減表とグラフの形は以下のようになる。

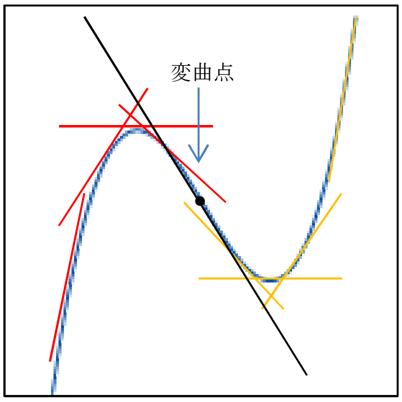
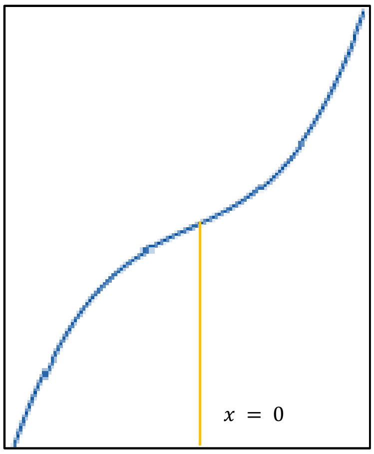


図: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフと増減表
増減表は、$f''(x) < 0$ のとき、$f'(x)$ の値が単調減少となり、$f''(x) > 0$ のとき、$f'(x)$ の値が単調増加となることを表している。グラフを見ると、$x < -\frac{b}{3a}$ で、赤の接線の傾きの値を表す $f'(x)$ の値が次第に減少し、変曲点を境に、$x > -\frac{b}{3a}$ で、オレンジの接線の傾きの値を表す $f'(x)$ の値が次第に増加していることがわかる。

x		$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$		$-\frac{b}{3a}$		$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+

[2 階微分の意義]

1 階微分により、関数 $f(x)$ の停留点を求めることができる。しかし、1 階微分では、この停留点が本当に関数 $f(x)$ の極値点となるかどうかはわからない。なぜなら、以下の図に示す $f(x)=ax^3$ （ただし、a は正の実数とする）のような関数は、停留点 $x=0$ を得るが、実際のグラフでは、$x=0$ は、極値点とならないからである。そこで、2 階微分を施すことにより、その停留点が極値点なのか、鞍点なのかを判定することができる。



図： $f(x)=x^3$ のグラフと増減表

$f'(x) = 3ax^2$

$f''(x) = 6ax$

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	−	0	+

増減表より、停留点と変曲点が $x=0$ で一致していることから、$x=0$ が極値でないとわかる。よって、$x=0$ は鞍点である。

以上のことから、

○　2 階微分の値が正となる停留点 ⇒ 極小点

○　2 階微分の値が負となる停留点 ⇒ 極大点

○　2 階微分の値が 0 となる停留点 ⇒ 鞍点

と判断できる。