演習問題 2.27

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ を 2 つの独立な確率ベクトル、すなわち、$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{z})$ であるとする。これらの和の平均が、それぞれの変数 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ について個別に求めた平均の和となることを示せ。同様に、$\mathbf{y}$ の共分散行列が、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ それぞれの共分散行列の和であることを示せ。これが、演習問題 1.10 の結果と一致することを確認せよ。

[解]

まず、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ を 2 つの独立な確率ベクトル、すなわち、$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{z})$ であるとした場合に、これらの和の平均が、それぞれの変数 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ について個別に求めた平均の和となることは、演習問題 1.10 より明らかである。つまり、

$$\mathrm{E}[\mathbf{y}] = \mathrm{E}[\mathbf{x}] + \mathrm{E}[\mathbf{z}] \qquad \cdots ※$$

は成り立つ。

次に、$\mathbf{y}$ の共分散行列が、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ それぞれの共分散行列の和であることを示す。いま、$\mathbf{y}$ の平均について、式 ※ が成り立つので、$\mathbf{y}$ の共分散行列は $\mathrm{E}[\mathbf{x}]$, $\mathrm{E}[\mathbf{z}]$ を用いて以下の式で求められる。

$$\mathrm{cov}[\mathbf{y}] = \mathrm{E}[(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])^{\mathrm{T}}]$$

この式は、以下のような 4 つの項に展開される。

$$= \mathrm{E}[(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}])^{\mathrm{T}}] + \mathrm{E}[(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])^{\mathrm{T}}]$$
$$+ \mathrm{E}[(\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}])^{\mathrm{T}}] + \mathrm{E}[(\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])(\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])^{\mathrm{T}}]$$

ここで、確率変数 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ の独立性から、上記の式の第 2 項と第 3 項は、ともに 0 となるがわかるので、上記の式は以下のようになる。

$$= \mathrm{E}[(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \mathrm{E}[\mathbf{x}])^{\mathrm{T}}] + \mathrm{E}[(\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])(\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])^{\mathrm{T}}]$$
$$= \mathrm{cov}[\mathbf{x}] + \mathrm{cov}[\mathbf{z}]$$

よって、上記の式の第 1 項と第 2 項は、それぞれ $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ に関する 1 変数の共分散なので、結果的にこれらは $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ それぞれに関する分散と等しくなる。以上より、$\mathbf{y}$ の共分散行列が、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ それぞれの共分散行列の和であることを示せた。また、それが演習問題 1.10 の結果と一致することが確認できた。

以下に演習問題 1.10 を紹介する。

演習問題 1.10

2 変数 x , z が統計的に独立であるとする。それらの和の平均と分散が

$$\mathrm{E}[\,x+z\,] = \mathrm{E}[\,x\,] + \mathrm{E}[\,z\,] \qquad \cdots (\,1.128\,)$$

$$\mathrm{var}[\,x+z\,] = \mathrm{var}[\,x\,] + \mathrm{var}[\,z\,] \qquad \cdots (\,1.129\,)$$

を満たすことを示せ。

[解]

式 (1.128) を証明する。2 変数 x , z が独立であることから、式 (1.128) の左辺は、

$$\mathrm{E}[\,x+z\,] = \int\int (\,x+z\,)\,p\,(\,x\,,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int\int (\,x+z\,)\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int\int x\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz \;+\; \int\int z\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int x\,p\,(\,x\,)\,dx \int p\,(\,z\,)\,dz \;+\; \int p\,(\,x\,)\,dx \int z\,p\,(\,z\,)\,dz$$

$$= \mathrm{E}[\,x\,] \;+\; \mathrm{E}[\,z\,]$$

となる。以上より、式 (1.128) が示せた。

上記の変形において、

$$\int p(\,x\,)\,dx = 1\,, \qquad \int x\,p(\,x\,)\,dx \;=\; \mathrm{E}[\,x\,]$$

$$\int p(\,z\,)\,dz = 1\,, \qquad \int z\,p(\,z\,)\,dz \;=\; \mathrm{E}[\,z\,]$$

であることに注意する。

次に、式 (1.129) を証明する。式 (1.129) の左辺を

$$\mathrm{var}[\,x+z\,] \;=\; \int\int \{\,(\,x+z\,) - \mathrm{E}[\,x+z\,]\,\}^2\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

と展開する。ここで、式 (1.128) より、

$$= \int\int \{\,(\,x+z\,) \;-\; (\,\mathrm{E}[\,x\,] + \mathrm{E}[\,z\,]\,)\,\}^2\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int\int \{ (x - \mathrm{E}[x]) + (z - \mathrm{E}[z]) \}^2 p(x) p(z)\, dx\, dz$$

$$= \int\int (x - \mathrm{E}[x])^2 p(x) p(z)\, dx\, dz$$

$$+ 2\int\int (x - \mathrm{E}[x])(z - \mathrm{E}[z]) p(x) p(z)\, dx\, dz$$

$$+ \int\int (z - \mathrm{E}[z])^2 p(x) p(z)\, dx\, dz$$

$\cdots$ ※

ここで、式 ※ の各項について整理する。第一項については、

$$\int\int (x - \mathrm{E}[x])^2 p(x) p(z)\, dx\, dz$$

$$= \int (x - \mathrm{E}[x])^2 p(x)\, dx \int p(z)\, dz$$

$$= \int (x - \mathrm{E}[x])^2 p(x)\, dx$$

$$= \mathrm{var}[x]$$

となり、第二項については、

$$2\int\int (x - \mathrm{E}[x])(z - \mathrm{E}[z]) p(x) p(z)\, dx\, dz$$

$$= 2\int (x - \mathrm{E}[x]) p(x)\, dx \int (z - \mathrm{E}[z]) p(z)\, dz$$

$$= 2\left(\int x\, p(x)\, dx - \int \mathrm{E}[x] p(x)\, dx\right)\left(\int z\, p(z)\, dz - \int \mathrm{E}[z] p(z)\, dz\right)$$

$$= 2(\mathrm{E}[x] - \mathrm{E}[x])(\mathrm{E}[z] - \mathrm{E}[z]) = 0$$

となり、第三項については、

$$\int\int (z - \mathrm{E}[z])^2 p(x) p(z)\, dx\, dz$$

$$= \int p(x)\, dx \int (z - \mathrm{E}[z])^2 p(z)\, dz$$

$$= \int (z - \mathrm{E}[z])^2 p(z)\, dz$$

$$= \mathrm{var}[z]$$

となる。以上より、式 ※ は、

$$= \mathrm{var}[x] + \mathrm{var}[z]$$

となり、式 (1.129) が示せた。

[別解]

式 (1.129) を証明する。式 (1.129) の左辺を展開して、

$$\mathrm{var}[x+z] = \mathrm{E}[\{(x+z)-\mathrm{E}[x+z]\}^2]$$
$$= \mathrm{E}[(x+z)^2 - 2(x+z)\mathrm{E}[x+z] + (\mathrm{E}[x+z])^2]$$
$$= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2\,\mathrm{E}[(x+z)\mathrm{E}[x+z]] + \mathrm{E}[(\mathrm{E}[x+z])^2]$$
$$= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2\,\mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]] + \mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[x+z]]$$
$$= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2\,\mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[x+z] + \mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]]\mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]]$$
$$= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2(\mathrm{E}[x+z])^2 + \mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[x+z]$$
$$= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2(\mathrm{E}[x+z])^2 + (\mathrm{E}[x+z])^2$$
$$= \mathrm{E}[(x+z)^2] - (\mathrm{E}[x+z])^2$$

と整理する。ここで、式 (1.128) より、

$$= \mathrm{E}[x^2 + 2xz + z^2] - (\mathrm{E}[x]+\mathrm{E}[z])^2$$
$$= \mathrm{E}[x^2] + 2\,\mathrm{E}[x,z] + \mathrm{E}[z^2] - (\mathrm{E}[x])^2 - 2\,\mathrm{E}[x]\mathrm{E}[z] - (\mathrm{E}[z])^2$$
$$= \mathrm{E}[x^2] - (\mathrm{E}[x])^2 + \mathrm{E}[z^2] - (\mathrm{E}[z])^2$$
$$= \mathrm{var}[x] + \mathrm{var}[z]$$

以上より、式 (1.129) が示せた。

上記の変形において、

$$\mathrm{var}[x] = \mathrm{E}[(x-\mathrm{E}[x])^2]$$
$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[x]] = \mathrm{E}[x]$$

であることに注意する。