演習問題 1.19

D 次元の半径 a の球と、同じ中心をもつ一辺 $2a$ の超立方体を考える。球面は、超立方体の各面の中心で接している。演習問題 1.18 の結果を用いて、球の体積と立方体の体積の比が

$$\frac{\text{球の面積}}{\text{立方体の体積}} = \frac{\pi^{D/2}}{D\,2^{D-1}\,\Gamma(D/2)}$$

…（ 1.145 ）

で与えられることを示せ。スターリングの公式

$$\Gamma(x+1) \cong (2\pi)^{1/2} e^{-x} x^{x+1/2}$$

…（ 1.146 ）

が $x \gg 1$ で成り立つことを用いて、$D \to \infty$ の極限で、比の値（ 1.145 ）が 0 に収束することを示せ。また、超立方体の中心から 1 つの頂点までの距離を、中心から側面までの距離で割った比が $\sqrt{D}$ となることを示し、$D \to \infty$ のとき、∞ に発散することを示せ。これらの結果から、高次元空間では、立方体の体積のほとんどはたくさんの頂点に集中し、非常に長い「 スパイク 」になっていることがわかる！

［ 演習問題 1.18 ］

D 次元の単位球の表面積 S_D 、体積 V_D は、以下の式で与えられる。

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

…（ 1.143 ）

$$V_D = \frac{S_D}{D}$$

…（ 1.144 ）

［ 解 ］

まず、演習問題 1.18 の結果を用いて、球の体積と立方体の体積の比が式（ 1.145 ）で与えられることを示す。式（ 1.144 ）から、D 次元の半径 a の球の体積は $\frac{S_D}{D}a^D$ となり、一辺 $2a$ の立方体の体積は $2^D a^D$ となるので、球の体積と立方体の体積の比は、

$$\frac{\text{球の面積}}{\text{立方体の体積}} = \frac{\frac{S_D}{D}a^D}{2^D a^D}$$

となる。ここで、S_D を式（ 1.143 ）で置き換えると、

$$= \frac{\frac{\frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}}{D}a^D}{2^D a^D}$$

$$= \frac{\pi^{D/2}}{D\, 2^{D-1}\, \Gamma(D/2)}$$

となる。よって、式（ 1.145 ）が示せた。

次に、スターリングの公式（ 1.146 ）が $x \gg 1$ で成り立つことを用いて、$D \to \infty$ の極限で、比の値（ 1.145 ）が 0 に収束することを示す。ここでは、式（ 1.145 ）の $\Gamma(D/2)$ をスターリングの公式を用いて置き換える。すると、式（ 1.145 ）は、

$$\frac{\text{球の面積}}{\text{立方体の体積}} = \frac{\pi^{D/2}}{D\, 2^{D-1}\, \Gamma(D/2)}$$

$$\cong \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{D\, 2^{D-1}\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{D}{2}-1\right)} \left(\frac{D}{2}-1\right)^{\left(\frac{D}{2}-1\right)+\frac{1}{2}}}$$

となり、式の形から $D \to \infty$ のとき、どうにか 分母 $\to \infty$ にもっていきたい。そこで、上記の式には、2 の数字が多いので、一旦 2 の数字で式を整理することにする。すると、

$$= \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{D\, 2^{D-1}\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{D-2}{2}} \left(\frac{D-2}{2}\right)^{\frac{D-1}{2}}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{D\, 2^{D-1}\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{D-2}{2}} \frac{(D-2)^{\frac{D-1}{2}}}{2^{\frac{D-1}{2}}}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{D\, 2^{D-1}\, 2^{\frac{1}{2}}\, \pi^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{\frac{D-2}{2}}} (D-2)^{\frac{D-1}{2}}\, 2^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{D-1}{2}}\, e^{\frac{D-2}{2}}}{D\, 2^{D-1+\frac{1}{2}-\frac{D}{2}+\frac{1}{2}} (D-2)^{\frac{D-1}{2}}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{D-1}{2}}\, e^{\frac{D-1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}}{D\, 2^{\frac{D}{2}} (D-2)^{\frac{D-1}{2}}}$$

と整理でき、ここで、指数（$D-1$）でまとめる方向に、上記の式が整理できそうなので、

$$= \frac{\pi^{\frac{D-1}{2}}\, e^{\frac{D-1}{2}}}{D\, 2^{\frac{D}{2}}\, e^{\frac{1}{2}} (D-2)^{\frac{D-1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{D\sqrt{2^D e}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi e}{D-2}}\right)^{D-1}$$

と整理できる。ここで、上記の式の $\frac{1}{D\sqrt{2^D e}}$ については、$D \to \infty$ のとき、0 に収束するのは明らかである。一方、$\left(\sqrt{\frac{\pi e}{D-2}} \right)^{D-1}$ については、今、D が十分に大きい場合を考えているので、$D \gg \pi e$ と考えても問題はない。したがって、$\sqrt{\frac{\pi e}{D-2}} \ll 1$ であるので、$0 < \sqrt{\frac{\pi e}{D-2}} < \sqrt{k} < 1$ となる $\sqrt{k}$ を選ぶことができる。そこで、$0 < \sqrt{\frac{\pi e}{D-2}} < \sqrt{k}$ の両辺を（$D-1$）乗して、

$$0 < \left(\sqrt{\frac{\pi e}{D-2}} \right)^{D-1} < \left(\sqrt{k} \right)^{D-1}$$

と書き直すと、上記の式の右辺 $\left(\sqrt{k} \right)^{D-1}$ は、$D \to \infty$ のとき、0 に収束するので、はさみうちの定理により、$\lim_{D\to\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi e}{D-2}} \right)^{D-1} = 0$ となる。したがって、球の体積と立方体の体積の比（1.145）は、$D \to \infty$ のとき、0 に収束することが示せた。

最後に、超立方体の中心から 1 つの頂点までの距離を、中心から側面までの距離で割った比が $\sqrt{D}$ となることを示し、$D \to \infty$ のとき、∞ に発散することを示す。一辺 $2a$ の超立方体の対角線の長さは、$2a\sqrt{D}$ で表されるので、超立方体の中心から頂点までの距離は、$a\sqrt{D}$ となる。一方で、超立方体の中心から側面までの距離は、a となるので、これら 2 つの比は、

$$\frac{\text{超立方体の中心から頂点までの距離}}{\text{超立方体の中心から側面までの距離}} = \frac{a\sqrt{D}}{a} = \sqrt{D}$$

で表される。したがって、$D \to \infty$ のとき、超立方体の中心から 1 つの頂点までの距離を、中心から側面までの距離で割った比 $\sqrt{D}$ は、∞ に発散することが示せた。

以上の 2 つの結果を比べることにより、$D \to \infty$ のとき、超立方体に内接する球の体積を除いた部分（つまり頂点付近）の体積が大きくなると考えられるので、超立方体の体積は、頂点付近に集まっていると考えることができる。