演習問題 1.39

2 つの 2 値変数 x, y が、表 1.3 の同時分布をもつとしたとき、以下の量を計算せよ。

(a) $\mathrm{H}[x]$

(b) $\mathrm{H}[y]$

(c) $\mathrm{H}[\,y \mid x\,]$

(d) $\mathrm{H}[\,x \mid y\,]$

(e) $\mathrm{H}[\,x, y\,]$

(f) $\mathrm{I}[\,x, y\,]$

x \ y	0	1
0	1/3	1/3
1	0	1/3

表 1.3：2 つの 2 値変数 x, y に対する同時分布 $p(\,x, y\,)$

これらの様々な量の間の関係を示す図を描け。

[エントロピー]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}] = -\int p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

… (1.104)

[**x** に対する **y** の**条件付きエントロピー**]

$$\mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] = -\iint p(\mathbf{y},\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

… (1.111)

[条件付きエントロピーの関係式]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x},\ \mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] + \mathbf{H}[\mathbf{x}]$$

… (1.112)

[相互情報量 (カルバック – ライブラーダイバージェンス)]

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathrm{KL}(p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \| p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})) = -\iint p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ln\left(\frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x},\mathbf{y})}\right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$$

… (1.120)

[相互情報量の関係式]

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{H}[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{y}] - \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}]$$

… (1.121)

[解]

以下 (a) – (f) で表されるエントロピーの値を、それぞれ求める。ここでは、確率分布を見分けやすくするために、$p(x) = p_x(x)$, $p(y) = p_y(y)$, $p(\,x, y\,) = p_{xy}(\,x, y\,)$ と書くこととする。

(a) $\mathrm{H}[x]$

確率の加法定理より、

$$p_x(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x, y)$$

であるから、表 1.3 より、$p_x(0)$, $p_x(1)$ は、

$$p_x(0) = \sum_{y=0}^{1} p(0, y) = p(0, 0) + p(0, 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$p_x(1) = \sum_{y=0}^{1} p(1, y) = p(1, 0) + p(1, 1) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

… ※

となるので、H[x] は、上記の結果と式 (1.104) より、

$$\begin{aligned} \mathrm{H}[x] &= -\sum_{x=0}^{1} p_x(x) \ln p_x(x) \\ &= -(p_x(0) \ln p_x(0) + p_x(1) \ln p_x(1)) \\ &= -\left(\frac{2}{3} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} \right) \\ &= -\frac{2}{3} (\ln 2 - \ln 3) + \frac{1}{3} \ln 3 \\ &= \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

となる。

(b) H[y]

確率の加法定理より、

$$p_y(y) = \sum_{y=0}^{1} p(y, x)$$

であるから、表 1.3 より、$p_y(0)$, $p_y(1)$ は、

$$p_y(0) = \sum_{x=0}^{1} p(x, 0) = p(0, 0) + p(1, 0) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$p_y(1) = \sum_{x=0}^{1} p(x, 1) = p(0, 1) + p(1, 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

… ※※

となるので、H[y] は、上記の結果と式 (1.104) より、

$$\mathrm{H}[\,y\,] = -\sum_{y=0}^{1} p_y(\,y\,)\ \ln p_y(\,y\,)$$

$$= -\left(\ p_y(\,0\,)\ \ln p_y(\,0\,) + p_y(\,1\,)\ \ln p_y(\,1\,)\ \right)$$

$$= -\ \left(\ \frac{1}{3}\ \ln\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ \ln\frac{2}{3}\ \right)$$

$$= \frac{1}{3}\ \ln 3 - \frac{2}{3}\ (\ \ln 2 - \ln 3\ )$$

$$= \ln 3 - \frac{2}{3}\ \ln 2$$

となる。

（c） H[y | x]

式 (1.111) より、H[y | x] は、

$$\mathrm{H}[\ y\ |\ x\ ] = -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p(\ y\,,x\ )\ \ln p(\ y\ |\ x\ )$$

であり、確率の乗法定理を用いると、

$$= -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p(\ y\,,x\ )\ \ln\frac{p(\ y\,,x\ )}{p_y(\,y\,)}$$

$$= -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p_{xy}(\ x\,,y\ )\ \ln\frac{p_{xy}(\ x\,,y\ )}{p_y(\,y\,)}$$

$$= -p_{xy}(\ 0\,,0\ )\ \ln\frac{p_{xy}(\ 0\,,0\ )}{p_y(\,0\,)} - p_{xy}(\ 0\,,1\ )\ \ln\frac{p_{xy}(\ 0\,,1\ )}{p_y(\,1\,)}$$

$$-p_{xy}(\ 1\,,0\ )\ \ln\frac{p_{xy}(\ 1\,,0\ )}{p_y(\,0\,)} - p_{xy}(\ 1\,,1\ )\ \ln\frac{p_{xy}(\ 1\,,1\ )}{p_y(\,1\,)}$$

と展開できるから、表 1.3 と式 ※※ より、

$$= -\ \frac{1}{3}\ \ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\ \ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} - 0\cdot\ln\frac{0}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\ \ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$= -\ \frac{1}{3}\ \ln 1 - \frac{1}{3}\ \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ \ln\frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{3}\ \ln 2$$

となる。

(d) H[x | y]
式 (1.111) より、H[x | y] は、

$$\mathrm{H}[\, x \mid y \,] = -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p(\, x, y \,) \ln p(\, x \mid y \,)$$

であり、確率の乗法定理を用いると、

$$= -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p(\, x, y \,) \ln \frac{p(\, x, y \,)}{p(x)}$$

$$= -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p_{xy}(\, x, y \,) \ln \frac{p_{xy}(\, x, y \,)}{p_x(x)}$$

$$= -p_{xy}(\, 0, 0 \,) \ln \frac{p_{xy}(\, 0, 0 \,)}{p_x(0)} - p_{xy}(\, 0, 1 \,) \ln \frac{p_{xy}(\, 0, 1 \,)}{p_x(0)}$$

$$-p_{xy}(\, 1, 0 \,) \ln \frac{p_{xy}(\, 1, 0 \,)}{p_x(1)} - p_{xy}(\, 1, 1 \,) \ln \frac{p_{xy}(\, 1, 1 \,)}{p_x(1)}$$

と展開できるから、表 1.3 と式 ※ より、

$$= -\frac{1}{3} \ln \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \ln \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} - 0 \cdot \ln \frac{0}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \ln \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= -\frac{2}{3} \ln \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \ln 2$$

となる。

(e) H[x, y]
式 (1.104) より、H[x, y] は、

$$\mathrm{H}[\, x, y \,] = -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p(\, x, y \,) \ln p(\, x, y \,)$$

$$= -p(0, 0) \ln p(0, 0) - p(0, 1) \ln p(0, 1)$$

$$-p(1, 0) \ln p(1, 0) - p(1, 1) \ln p(1, 1)$$

$$= -\frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} - 0 \ln 0 - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3}$$

$$= -\ln\frac{1}{3} = \ln 3$$

となる。

（f） I[x , y]

式 (1.120) より、相互情報量 I[x , y] は、

$$\mathbf{I}[x, y] = -\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p(x, y) \ln\left(\frac{p(x)p(y)}{p(x, y)}\right)$$

$$= -p_{xy}(0,0)\ln\left(\frac{p_x(0)p_y(0)}{p_{xy}(0,0)}\right) - p_{xy}(0,1)\ln\left(\frac{p_x(0)p_y(1)}{p_{xy}(0,1)}\right)$$

$$-p_{xy}(1,0)\ln\left(\frac{p_x(1)p_y(0)}{p_{xy}(1,0)}\right) - p_{xy}(1,1)\ln\left(\frac{p_x(1)p_y(1)}{p_{xy}(1,1)}\right)$$

であるから、表 1.3 と式 ※，※※ より、

$$= -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right) - 0 - p_{xy}(1,1)\ln\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{4}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) - \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 3)$$

$$= -\frac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) - \frac{1}{3}(2\ln 2 - \ln 3)$$

$$= -\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{3}\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3$$

$$= \ln 3 - \frac{4}{3}\ln 2$$

となる。

以上の結果をまとめると、

（a）　$\mathrm{H}[x] = \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$

（b）　$\mathrm{H}[y] = \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$

(c)　$H[y \mid x] = \frac{2}{3}\ln 2$

(d)　$H[x \mid y] = \frac{2}{3}\ln 2$

(e)　$H[x, y] = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3$

(f)　$I[x, y] = \ln 3 - \frac{4}{3}\ln 2$

である。また、上記の結果から、少なくとも

$$H[x, y] = H[y|x] + H[x] = H[x|y] + H[y]$$

$$I[x,y] = H[x] - H[x|y] = H[y] - H[y|x] = H[x, y] - H[x|y] - H[y|x]$$

の関係がわかる。(関係図省略)