演習問題 1.14

w_{ij} を成分とする任意の正方行列は、$w_{ij} = w_{ij}^{\mathrm{S}} + w_{ij}^{\mathrm{A}}$ という形に書けることを示せ。ただし、w_{ij}^{S} と w_{ij}^{A} は、それぞれ対称行列と反対称行列の成分であり、$w_{ij}^{\mathrm{S}} = w_{ji}^{\mathrm{S}}$ および $w_{ij}^{\mathrm{A}} = -w_{ji}^{\mathrm{A}}$ がすべての i, j について成り立つ。さて、ここで、D 次元における高次の多項式の 2 次の項

$$\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}\, x_i\, x_j \qquad \cdots (1.131)$$

を考えると、

$$\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}\, x_i\, x_j = \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}^{\mathrm{S}}\, x_i\, x_j \qquad \cdots (1.132)$$

となり、反対称行列の寄与が消えることを示せ。このことから、一般性を失うことなく、係数 w_{ij} は、対称に選んでよく、すべての D^2 の成分の選び方が独立ではないことがわかる。これを用いて、行列 w_{ij}^{S} の独立パラメータの数が $D(D+1)/2$ で与えられることを示せ。

[転置行列]

転置行列とは、ある正方行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ に対し、${}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ を満たす行列のことである。ここで、記号 t は転置を表し、${}^t\mathbf{A}$ は転置行列を表す。

[対称行列]

対称行列とは、$\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$ を満たす正方行列 $\mathbf{A}$ のことである。すなわち、$A_{ij} = A_{ji}$ がすべての i, j について成り立つ。

[反対称行列]

反対称行列とは、$\mathbf{A} = -{}^t\mathbf{A}$ を満たす正方行列 $\mathbf{A}$ のことである。すなわち、$A_{ij} = -A_{ji}$ がすべての i, j について成り立つ。反対称行列は、**交代行列**、または**歪対称行列**とも呼ぶ。

[直交行列]

直交行列とは、${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$ を満たす正方行列 $\mathbf{A}$ のことである。

[解]
まず、w_{ij} を成分とする任意の正方行列は、$w_{ij} = w_{ij}^{\mathrm{S}} + w_{ij}^{\mathrm{A}}$ という形に書けることを示す。これは、

$$w_{ij}^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(w_{ij} + w_{ji}\right), \quad w_{ij}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(w_{ij} - w_{ji}\right)$$

とおくことで、

$$w_{ij} = w_{ij}^{\mathrm{S}} + w_{ij}^{\mathrm{A}}$$

が成立する。

次に、式 (1.131) が式 (1.132) となることを証明し、反対称行列の寄与が消えることを示す。式 (1.131) より、

$$\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}\,x_i\,x_j = \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D}\left(w_{ij}^{\mathrm{S}} + w_{ij}^{\mathrm{A}}\right)x_i\,x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}^{\mathrm{S}}\,x_i\,x_j + \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}^{\mathrm{A}}\,x_i\,x_j$$

… ※

ここで、式 ※ の第二項に注目すると、第二項は、以下のように分解できる。

$$\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}^{\mathrm{A}}\,x_i\,x_j = \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=i}^{D}\left(w_{ij}^{\mathrm{A}} + w_{ji}^{\mathrm{A}}\right)x_i\,x_j$$

上記の式は、$w_{ii}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(w_{ii} - w_{ii}\right) = 0$ であるため、成立している。さらに、上記の式に、$w_{ij}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(w_{ij} - w_{ji}\right)$ を代入すると、

$$\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} w_{ij}^{\mathrm{A}}\,x_i\,x_j = \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=i}^{D}\left(w_{ij}^{\mathrm{A}} + w_{ji}^{\mathrm{A}}\right)x_i\,x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=i}^{D}\left\{\frac{1}{2}\left(w_{ij} - w_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(w_{ji} - w_{ij}\right)\right\}x_i\,x_j$$

のように書き直せる。ここで、

$$\frac{1}{2}\left(w_{ij} - w_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(w_{ji} - w_{ij}\right) = 0$$

となるため、式 ※ の第二項が消えることがわかる。以上より、式 (1.132) が成立し、反対称行列の成分 w_{ij}^{A} が消えたため、反対称行列の寄与が消えることが示せた。

最後に、行列 w_{ij}^{S} の独立パラメータの数が $D(D+1)/2$ で与えられることを示す。
w_{ij}^{S} の対称性から、独立なパラメータ数は、以下の式で求められる。

$$\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=i}^{D} 1 = \sum_{i=1}^{D}\{D-(i-1)\} = D^2 - \frac{D(D+1)}{2} + D = \frac{D(D+1)}{2}$$

以上より、行列 w_{ij}^{S} の独立パラメータの数が $D(D+1)/2$ で与えられることが示せた。

[数列の和の公式]

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$