演習問題 1.37

式 (1.111) の定義と確率の乗法定理から、式 (1.112) を証明せよ。

[微分エントロピー]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}] = -\int p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

… (1.104)

[**x** に対する **y** の**条件付きエントロピー**]

$$\mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] = -\int\int p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

… (1.111)

[条件付きエントロピーの関係式]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] + \mathbf{H}[\mathbf{x}]$$

… (1.112)

[解]

式 (1.112) の左辺は、式 (1.104) より、

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -\int\int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln p(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

となり、確率の乗法定理から、

$$= -\int\int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

$$= -\int\int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \ln p(\mathbf{x}) \}\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

$$= -\int\int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x} - \int\int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

と展開できる。ここで、式 (1.111) より、

$$= \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] - \int\int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] - \int \ln p(\mathbf{x}) \int p(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

となり、確率の加法定理から、

$$= \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] - \int p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

となり、式 (1.104) より、最終的に上記の式は、

$$= \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] - \mathbf{H}[\mathbf{x}]$$

となる。よって、式（1.111）の定義と確率の乗法定理から、式（1.112）が成り立つことが示せた。

［確率の加法定理］

$$p(x) = \sum_{y} p(x, y)$$

［確率の乗法定理］

$$p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x)$$