演習問題 1.01

関数 $y\,(\,x\,,\,\mathbf{w}\,)$ が多項式（ 1.1 ）で与えられたときの式（ 1.2 ）の二乗和誤差関数を考える。この誤差関数を最小にする係数 $\mathbf{w}=\{\,\boldsymbol{w_i}\,\}$ は、以下の線形方程式の解として与えられることを示せ。

$$\sum_{j\,=\,0}^{M} A_{ij}\,w_j = T_i$$

…（ 1.122 ）

ただし、

$$A_{ij} = \sum_{j\,=\,0}^{N}(\,x_n\,)^{\,i\,+\,j}\,, \qquad T_i = \sum_{j\,=\,0}^{N}(\,x_n\,)^{\,i}\,t_n$$

…（ 1.123 ）

ここで、下付き添え字の i や j は成分を表し、$(x)^i$ は x の j 乗を表す。

$$y\,(\,x\,,\;\mathbf{w}\,)\;=\;w_0\;+\;w_1x\;+\;w_2x^2\;+\;\cdots\;+\;w_Mx^M\;=\;\sum_{j\,=\,0}^{M} w_jx^j$$

…（ 1.1 ）

$$E\,(\,\mathbf{w}\,)\;=\;\frac{1}{2}\sum_{n\,=\,1}^{N}\{\,y\,(\,x_n\,,\;\mathbf{w}\,)\;-\;t_n\,\}^2$$

…（ 1.2 ）

［ 解 ］

式（ 1.1),（ 1.2 ）より

$$E(\,\mathbf{w}\,) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{\,y\,(\,x_n\,,\;\mathbf{w}\,) - t_n\,\}^2$$

$$E(\,\mathbf{w}\,) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{j=0}^{M} w_j\,x_n^j\;-\;t_n\right\}^2$$

ここで、 $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_n^0 \\ x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^M \end{bmatrix}$ とすると、

$$E(\,\mathbf{w}\,) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_n - t_n\,\}^2$$

この式を微分することで、$y\,(\,x_n\,,\mathbf{w}\,)$ が最小となる係数 $\mathbf{w}$ の値を求める。

$$\frac{dE}{d\mathbf{w}} = \frac{2}{2}\sum_{n=1}^{N}(\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_n - t_n\,)\frac{d(\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_n - t_n\,)}{d\mathbf{w}}$$
$$= \sum_{n=1}^{N}(\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_n - t_n\,)\,\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

以上から

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{M} w_j x_n^j \;-\; t_n\right) x_n^i \;=\; \mathbf{0}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{M} w_j(\,x_n\,)^{\,i\,+\,j} \;-\; (\,x_n\,)^{\,i}\,t_n\right) = \;\mathbf{0}$$

$$\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=1}^{N}\, w_j(\,x_n\,)^{\,i\,+\,j} \;=\; \sum_{n=1}^{N}\,(\,x_n\,)^{\,i}\,t_n$$

が得られる。ここで、式（ 1.123 ）より、上記の式を

$$\sum_{j\,=\,0}^{M} A_{ij}\,w_j = T_i$$

と整理できる。よって、式（ 1.122 ）が示せた。