演習問題 1.23

一般の場合に、損失行列とクラスに対する事前確率が与えられたときに、期待損失を最小にする基準を導け。

[期待損失]

$$\sum_k L_{kj}\, p\,(\,C_k\,|\,\mathbf{x}\,) \qquad \cdots\,(\,1.81\,)$$

[解]

クラス j を選択した場合の期待損失は、式 (1.81) で与えられる。これに対し、ベイズの定理を適用すると、$p\,(\,C_k\,|\,\mathbf{x}\,)$ は、

$$p\,(\,C_k\,|\,\mathbf{x}\,) = \frac{p\,(\,\mathbf{x}\,|\,C_k\,)\,p\,(\,C_k\,)}{p\,(\,\mathbf{x}\,)}$$

となる。ここで、$p\,(\,\mathbf{x}\,)$ は、k , j に依存しないため、期待損失を最小化する基準としては除去しても構わない。したがって、式 (1.81) は、

$$\sum_k L_{kj}\, p\,(\,\mathbf{x}\,|\,C_k\,)\,p\,(\,C_k\,)$$

のように書き直すことができ、これを最小化するクラス j を選択すればよい。損失行列とクラスに対する事前確率が与えられたとき、期待損失を最小にする基準は、以下のように一般化される。

$$j = \arg\min_l \sum_k L_{kl}\, p\,(\,\mathbf{x}\,|\,C_k\,)\,p\,(\,C_k\,)$$

[arg max と arg min]

数学において、arg max (argument of the maximum) とは、関数値が最大になるような定義域の元の集合を意味する。また逆に、arg max (argument of the minimum) とは、関数値が最小になるような定義域の元の集合を意味する。つまり、関数 $y = f(\,x\,)$ があった場合に、

$$\arg\max_x y = \arg\max_x f(\,x\,)$$

とは、関数 $f(\,x\,)$ を最大にする x を求めることを意味する。