演習問題 2.04

二項分布の平均が式（ 2.11 ）であることを示せ。これには、正規化条件（ 2.264 ）の両辺を μ で微分し、変形して n の平均を求めよ。同様に、式（ 2.264 ）の両辺を、 μ について 2 階微分し、二項分布の平均（ 2.11 ）も用いて、二項分布の分散の結果（ 2.12 ）を証明せよ。

［ 二項分布 ］

$$\mathrm{Bin}(\ m\mid N,\ \mu\ )=\binom{N}{m}\mu^{m}(\ 1-\mu\ )^{N-m}$$

…（ 2.9 ）

ただし、

$$\binom{N}{m}=\frac{N!}{(\ N-m\ )!\,m!}$$

…（ 2.10 ）

は総数 N 個の同じ対象から、m 個の対象を選ぶ場合の数である。ここで、

$$\binom{N}{m}=\frac{N!}{(\ N-m\ )!\,m!}={}_{N}C_{m}$$

より、式（ 2.9 ）は、以下のように書き直せる。

$$\mathrm{Bin}(\ m\mid N,\ \mu\ )={}_{N}C_{m}\,\mu^{m}(\ 1-\mu\ )^{N-m}$$

…（ 2.9 ）′

［ 二項分布の平均 ］

$$\mathrm{E}[\ m\ ]\equiv\sum_{m=0}^{N}m\,\mathrm{Bin}(\ m\mid N,\ \mu\ )=N\mu$$

…（ 2.11 ）

［ 二項分布の分散 ］

$$\mathrm{var}[\ m\ ]\equiv\sum_{m=0}^{N}(\ m-\mathrm{E}[\ m\ ]\ )^{2}\,\mathrm{Bin}(\ m\mid N,\ \mu\ )=N\mu(\ 1-\mu\ )$$

…（ 2.12 ）

［ 二項分布の正規化条件 ］

$$\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m}(\ 1-\mu\ )^{N-m}=1$$

…（ 2.264 ）

［ 解 ］

まず、二項分布の平均が式（ 2.11 ）であることを示す。このために、正規化条件（ 2.264 ）の両辺を μ で微分し、変形して n の平均を求める。式（ 2.264 ）の両辺を μ で偏微分すると、

$$\frac{\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m} (1-\mu)^{N-m}}{\delta \mu}$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} [(\mu^{m})' (1-\mu)^{N-m} + \mu^{m} \{ (1-\mu)^{N-m} \}']$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \{ m \mu^{m-1} (1-\mu)^{N-m} - \mu^{m} (N-m)(1-\mu)^{N-m-1} \}$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m-1} (1-\mu)^{N-m-1} \{ m(1-\mu) - \mu(N-m) \}$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m-1} (1-\mu)^{N-m-1} (m - \mu N) = 0$$

… ※

より、両辺を $\mu(1-\mu)$ 倍し、

$$\frac{1}{\mu(1-\mu)} \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m} (1-\mu)^{N-m} (m - \mu N) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m} (1-\mu)^{N-m} (m - \mu N) = 0$$

… ※

$$\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} m \mu^{m} (1-\mu)^{N-m} - \mu N \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m} (1-\mu)^{N-m} = 0$$

… ※※

と整理できる。ここで、

$$\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} m \mu^{m} (1-\mu)^{N-m} = \mathrm{E}[m]$$

$$\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m} (1-\mu)^{N-m} = 1$$

となるから、式 ※※ は、

$$\mathrm{E}[m] - \mu N = 0$$

$$\mathrm{E}[m] = \mu N$$

となる。よって、n の平均が求められた。

同様に、式 (2.264) の両辺を、μ について 2 階微分し、二項分布の平均 (2.11) も用いて、二項分布の分散の結果 (2.12) を証明する。式 (2.264) の両辺を μ について偏微分すると、式 ※ が得られたから、これの両辺を μ についてもう一度偏微分すると、

$$\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \{ \mu^{m-1} (1-\mu)^{N-m-1} \}' (m - \mu N)$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m-1}(m-\mu N)'$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\left[(\mu^{m-1})'(1-\mu)^{N-m-1}+\mu^{m-1}\{(1-\mu)^{N-m-1}\}'\right](m-\mu N)$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m-1}(m-\mu N)'$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}(m-1)\mu^{m-2}(1-\mu)^{N-m-1}(m-\mu N)$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}(N-m-1)\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m-2}(m-\mu N)$$

$$-N\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m-1}$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m-2}(1-\mu)^{N-m-2}\{(m-1)(1-\mu)(m-\mu N)$$

$$+\mu(N-m-1)(m-\mu N)-\mu N(1-\mu)\}$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m-2}(1-\mu)^{N-m-2}\{(m+m\mu-1+\mu)(m-\mu N)$$

$$+(\mu N-m\mu-\mu)(m-\mu N)-\mu N+\mu^2 N\}$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m-2}(1-\mu)^{N-m-2}(m^2-m\mu N+m^2\mu-m\mu^2 N-m+\mu N+m\mu$$

$$-\mu^2 N+m\mu N-\mu^2 N^2-m^2\mu+m\mu^2 N-m\mu+\mu^2 N-\mu N+\mu^2 N)$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m-2}(1-\mu)^{N-m-2}(m^2-m-\mu^2 N^2+\mu^2 N)=0$$

より、ここで、両辺を $\mu^2(1-\mu)^2$ 倍し、

$$\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m}(1-\mu)^{N-m}(m^2-m-\mu^2 N^2+\mu^2 N)=0$$

… ※※※

と整理できる。ここで、

$$\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}m^2\mu^{m}(1-\mu)^{N-m}=\mathrm{E}[m^2]$$

$$\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}m\mu^{m}(1-\mu)^{N-m}=\mathrm{E}[m]$$

$$\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\mu^{m}(1-\mu)^{N-m}=1$$

であるから、式 ※※※ は、さらに

$$\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^{m} (1 - \mu)^{N-m} (m^2 - m - \mu^2 N^2 + \mu^2 N) = 0$$

$$\mathrm{E}[m^2] - \mathrm{E}[m] - \mu^2 N^2 + \mu^2 N = 0$$

$$\mathrm{E}[m^2] = \mathrm{E}[m] + \mu^2 N^2 - \mu^2 N$$

と整理でき、式 (2.11) より、最終的に上記の式は

$$\mathrm{E}[m^2] = N\mu + \mu^2 N^2 - \mu^2 N$$

… ※※※※

となる。この結果を用いて、二項分布の分散を求める。二項分布の分散の式 (2.12) は、

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[m] &\equiv \sum_{m=0}^{N} (m - \mathrm{E}[m])^2 \,\mathrm{Bin}(m \mid N , \mu) \\ &= \sum_{m=0}^{N} m^2 \,\mathrm{Bin}(m \mid N , \mu) \\ &\quad - 2\,\mathrm{E}[m] \sum_{m=0}^{N} m \,\mathrm{Bin}(m \mid N , \mu) \\ &\quad + \mathrm{E}[m]^2 \sum_{m=0}^{N} \mathrm{Bin}(m \mid N , \mu) \\ &= \mathrm{E}[m^2] - 2\,\mathrm{E}[m]^2 + \mathrm{E}[m]^2 \\ &= \mathrm{E}[m^2] - \mathrm{E}[m]^2\end{aligned}$$

だから、式 ※※※※ と式 (2.11) より、

$$\begin{aligned}&= (N\mu + \mu^2 N^2 - \mu^2 N) - (N\mu)^2 \\ &= N\mu (1 - \mu)\end{aligned}$$

と書き直せる。よって、二項分布の分散の結果 (2.12) が示せた。