演習問題 1.05

式 (1.38) の定義を使って、$\mathrm{var}[f(x)]$ が式 (1.39) を満たすことを示せ。

$$\mathrm{var}[f] = \mathrm{E}[(f(x) - \mathrm{E}[f(x)])^2] \qquad \cdots (1.38)$$

$$\mathrm{var}[f] = \mathrm{E}[f(x)^2] - \mathrm{E}[f(x)]^2 \qquad \cdots (1.39)$$

[解]

式 (1.38) は、

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[f(x)] &= \mathrm{E}[(f(x) - \mathrm{E}[f(x)])^2] \\ &= \mathrm{E}[f(x)^2 - 2f(x)\mathrm{E}[f(x)] + \mathrm{E}[f(x)]^2] \\ &= \mathrm{E}[f(x)^2] - \mathrm{E}[2f(x)\mathrm{E}[f(x)]] + \mathrm{E}[\mathrm{E}[f(x)]^2] \\ &= \mathrm{E}[f(x)^2] - 2\mathrm{E}[f(x)]\mathrm{E}[\mathrm{E}[f(x)]] + \mathrm{E}[f(x)]^2\end{aligned}$$

と展開でき、$\mathrm{E}[\mathrm{E}[f]] = \int p(x)\mathrm{E}[f]\,dx = \mathrm{E}[f]$ となることから、上記の式はさらに、

$$\begin{aligned}&= \mathrm{E}[f(x)^2] - 2\mathrm{E}[f(x)]\mathrm{E}[f(x)] + \mathrm{E}[f(x)]^2 \\ &= \mathrm{E}[f(x)^2] - 2\mathrm{E}[f(x)]^2 + \mathrm{E}[f(x)]^2 \\ &= \mathrm{E}[f(x)^2] - \mathrm{E}[f(x)]^2\end{aligned}$$

となる。以上より、式 (1.39) が示せた。

[期待値]

$\mathrm{E}[f]$ は期待値を示し、連続関数では以下の式で表される。

$$\mathrm{E}[f] = \int p(x) f(x)\,dx$$

これは、確率分布 $p(x)$ の下での平均値を意味している。また、期待値の期待値は同値となる。

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[f]] = \int p(x)\mathrm{E}[f]\,dx = \mathrm{E}[f]$$