演習問題 1.04

連続変数 x 上で定義された確率変数 $p_x(x)$ を考える。$x = g(y)$ により、非線形変換を施すと、密度は式 (1.27) の変換を受ける。式 (1.27) を微分して、 y に関する密度を最大にする位置 $\hat{y}$ と x に関する密度を最大にする位置 $\hat{x}$ とが、ヤコビ因子の影響により、一般には単純な $\hat{x} = g(\hat{y})$ という関係にないことを示せ。これは、確率密度の最大値が、(通常の関数と異なり) 変数の選択に依存することを示している。線形変換の場合には、最大値の位置が変数自身と同じ変換を受けることを確かめよ。

$$p_y(y) = p_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$
$$= p_x(g(y))\,|g'(y)| \qquad \cdots (1.27)$$

[解]

式 (1.27) を微分すると、

$$p_y{}'(y) = \{p_x(g(y))\,|g'(y)|\}'$$
$$= p_x{}'(g(y))\,g'(y)\,|g'(y)| + p_x(g(y))\,|g''(y)| \qquad \cdots ※$$

となる。ここで、式 ※ に、y に関する密度を最大にする位置である $y = \hat{y}$ を代入し、式 ※ が 0 になるかどうかを検証する。式 ※ の第一項については、y に関する密度を最大にする位置 $\hat{y}$ としているので、$g'(\hat{y}) = 0$ となり、

$$p_x{}'(g(\hat{y}))\,g'(\hat{y})\,|g'(\hat{y})| = 0$$

となるが、式 ※ の第二項については、非線形変換であるため、

$$p_x(g(\hat{y}))\,|g''(\hat{y})|$$

の $g''(\hat{y})$ が 0 とならない。よって、y に関する密度を最大にする位置 $\hat{y}$ と x に関する密度を最大にする位置 $\hat{y}$ とが、ヤコビ因子の影響により、一般には単純な $\hat{x} = g(\hat{y})$ という関係にないということが示せた。

例えば、$g(y) = ay^2$ (a は定数) のような非線形変換の場合、関数 $g(y)$ の y に関する微分は、

$$g'(y) = 2ay$$

であり、さらに 2 階微分は、

$$g''(y) = 2a$$

となる。これは、$g''(y) = 0$ ではないため、式 ※ は 0 にならないことがわかる。

関数 $x = g(y)$ が線形変換、つまり $x = ay$ (a は定数) のような場合は、$g''(y) = 0$ となるので、式 ※ の第二項も 0 となる。