演習問題 2.26

非常に有用な線形代数の結果である「 **Woodbury 行列反転公式**（ Woodbury matrix inversion formula ）」は、

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \quad \cdots (2.289)$$

である。この両辺に（ $\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}$ ）を掛けて、この公式を証明せよ。

［ 解 ］

Woodbury 行列反転公式（ 2.289 ）が成り立つことを証明する。これには、式（ 2.289 ）の左側から($\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}$ ）を掛けることにより、

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})\{\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\}=\mathbf{I} \quad \cdots ※$$

が成立することを証明すればよいので、式 ※ の左辺より、

$$\begin{aligned}
\text{式 ※ の左辺} &= (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})\{\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\}\\
&= \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&\quad +\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&= \mathbf{I}-\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&\quad +\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \quad \cdots ※※
\end{aligned}$$

と整理できる。ここで、上記の式の第 2，4 項を整理していくと、

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \quad -\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&= -\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&= -\mathbf{B}\mathbf{C}\{\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\}\\
&= -\mathbf{B}\mathbf{C}(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&= -\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}
\end{aligned}$$

と整理できる。よって、式 ※※ は、

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{I}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&= \mathbf{I} = \text{式 ※ の右辺}
\end{aligned}$$

となり、式 ※ が成立することが示せたので、Woodbury 行列反転公式（ 2.289 ）が成立することが証明された。