演習問題 1.35

式 (1.106) と式 (1.107) を用いて、1 変数ガウス分布 (1.109) のエントロピーが式 (1.110) で与えられることを示せ。

[エントロピー]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}] = -\int p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

… (1.104)

[ガウス分布の 1 次のモーメント]

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx = \mu$$

… (1.106)

[ガウス分布の 2 次のモーメント]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)\, dx = \sigma^2$$

… (1.107)

[ガウス分布]

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

… (1.109)

[1 変数ガウス分布のエントロピー]

$$\mathbf{H}[x] = \frac{1}{2}\{ 1 + \ln(2\pi\sigma^2) \}$$

… (1.110)

[解]

式 (1.104) より、1 変数ガウス分布 (1.109) のエントロピーは、

$$\mathbf{H}[x] = -\int p(x) \ln p(x)\, dx$$

$$= -\int p(x) \ln\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \right) dx$$

$$= -\int p(x) \left\{ \ln \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} + \ln e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right\} dx$$

$$= -\int p(x) \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int p(x) \ln(2\pi\sigma^2)\, dx + \int p(x) \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int p(x)\ln(2\pi\sigma^2)\,dx + \frac{1}{\sigma^2}\int p(x)(x-\mu)^2\,dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2}\int p(x)(x-\mu)^2\,dx \right\}$$

と整理できる。ここで、上記の式の第二項に式（1.107）を適用すると、

$$= \frac{1}{2}\left\{ \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{ 1 + \ln(2\pi\sigma^2) \}$$

となる。よって、1 変数ガウス分布（1.109）のエントロピーが式（1.110）で与えられることを示せた。