演習問題 2.12

連続関数 x の一様分布は、

$$\mathrm{U}(\,x\mid a,\ b\,)=\frac{1}{b-a}\,,\qquad a\le x\le b$$

… (2.278)

で定義される。この分布が正規化されていることを確かめ、この分布の平均と分散の式を求めよ。

[期待値]

ある関数 $f(x)$ の確率分布 $p(x)$ の下での平均値のこと。

$$\mathrm{E}[f]=\int p(x)f(x)\,dx$$

… (1.34)

[分散]

$f(x)$ がその平均値 $\mathrm{E}[f(x)]$ の周りでどれぐらいバラつくかを表す尺度のこと。

$$\mathrm{var}[f]=\mathrm{E}[\,(f(x)-\mathrm{E}[f(x)])^2\,]$$

… (1.38)

$$=\mathrm{E}[f(x)^2]-\mathrm{E}[f(x)]^2$$

… (1.39)

[解]

まず、連続関数 x の一様分布 (2.278) が正規化されていること、すなわち、

$$\int_a^b \mathrm{U}(\,x\mid a,\ b\,)\,dx=1$$

を満たすことを確かめる。これには、式 (2.278) より、

$$\int_a^b \mathrm{U}(\,x\mid a,\ b\,)\,dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}\,dx=\left[\frac{1}{b-a}\,x\right]_a^b=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=1$$

となることが簡単にわかる。よって、連続関数 x の一様分布 (2.278) が正規化されているが示せた。

次に、連続関数 x の一様分布 (2.278) の平均を求める。式 (1.34) より、平均 $\mathrm{E}[x]$ は、

$$\mathrm{E}[x]=\int_a^b x\,\mathrm{U}(\,x\mid a,\ b\,)\,dx$$

$$=\int_a^b\frac{x}{b-a}\,dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{b-a}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

と計算できる。よって、連続関数 x の一様分布 (2.278) の平均が求められた。

最後に、連続関数 x の一様分布 (2.278) の分散を求める。式 (1.39) より、分散 var[x] は、

$$\mathrm{var}[\,x\,] = \mathrm{E}[\,x^2\,] - \mathrm{E}[\,x\,]^2$$

… ※

と書き表せる。ここで、上記の式の第一項 E[x^2] は、

$$\mathrm{E}[\,x^2\,] = \int_a^b x^2\,\mathrm{U}(\,x \mid a,\ b\,)\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b - a}\,dx = \left[\,\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{b - a}\,\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3\,(\,b - a\,)} = \frac{(\,b - a\,)(\,b^2 + ba + a^2\,)}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

となるので、式 ※ は、求められた E[x] と E[x^2] より、

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\,\frac{a + b}{2}\,\right)^2$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{4\,(\,a^2 + ab + b^2\,) - 3\,(\,a^2 + 2ab + b^2\,)}{12}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(\,a + b\,)^2}{12}$$

と計算できる。よって、連続関数 x の一様分布 (2.278) の分散が求められた。