演習問題 1.28

1.6 節で、エントロピー $h(x)$ のアイディアを、確率分布 $p(x)$ をもつ確率変数 x の値を観測することによって増える情報量として導入した。また、変数 x, y が $p(x, y) = p(x)p(y)$ となって独立となるときは、エントロピーは加法的で、$h(x, y) = h(x) + h(y)$ となることを見た。この演習問題では、h と p の間の関数関係 $h(p)$ を導く。まず、$h(p^2) = 2h(p)$ となることを示し、数学的帰納法により、正の整数 n に対し、$h(p^n) = n\,h(p)$ となることを示せ。さらに、正の整数 m に対し、$h\left(p^{n/m}\right) = (n/m)\,h(p)$ が成り立つことを示せ。このことから、x が正の有理数のとき、$h(p^x) = x\,h(p)$ が成り立つが、これは連続性により、正の実数値の場合も成り立つ。最後にこのことから、$h(p) \propto \ln p$ の形をとらなければならないことを示せ。

[利用可能条件]
上記の内容より、利用可能な条件は、
1. $h(x, y) = h(x) + h(y)$
   特に、x, y が独立であるとき
$$h(x, y) = h(\,p(x, y)\,) = h(\,p(x)p(y)\,) = h(xy)$$
2. $h(\cdot)$ の定義域は正の実数である。

の 2 点である。

[解]
まず、$h(p^2) = 2h(p)$ となることを示す。これは、条件 1 より、
$$h(p^2) = h(p) + h(p) = 2h(p)$$
となり、成立する。

次に、正の整数 n に対し、$h(p^n) = n\,h(p)$ … ※ となることを、数学的帰納法を用いて示す。
(i) $n = 1$ のとき、式 ※ が成立するのは自明である。
(ii) $n = k$ のとき、$h(p^k) = k\,h(p)$ が成り立つと仮定すると、$n = k + 1$ のとき、式 ※ の左辺は、
$$\text{式 ※ の左辺} = h(p^{k+1}) = h(p^k p^1) = h(p^k) + h(p^1)$$
仮定より、上記の式は、
$$= n\,h(p) + h(p) = (k+1)\,h(p) = \text{式 ※ の右辺}$$
となり、$n = k + 1$ のときも式 ※ は成立する。
以上 (i), (ii) より、すべての正の整数 n に対し、$h(p^n) = n\,h(p)$ が成り立つことが示せた。

さらに、正の整数 m に対し、$h\left(p^{n/m}\right) = (n/m)\,h(p)$ が成り立つことを示す。ここで

は、$m\,h\left(p^{n/m}\right)$ を考える。先程の証明より、$h(p^n) = n\,h(p)$ が成り立つから、

$$m\,h\left(p^{n/m}\right) = h\left(\left(p^{n/m}\right)^m\right) = h(p^n) = n\,h(p)$$

と解くことができる。$m\,h\left(p^{n/m}\right) = n\,h(p)$ の両辺を m で割ると、

$$h\left(p^{n/m}\right) = (n/m)\,h(p)$$

となる。よって、正の整数 m に対し、$h\left(p^{n/m}\right) = (n/m)\,h(p)$ が成り立つことが示せた。

最後に、$h(p) \propto \ln p$ の形をとらなければならないことを示す。ここで、$p = q^x$ とすると、先程の証明より、

$$\frac{h(p)}{\ln(p)} = \frac{h(q^x)}{\ln(q^x)} = \frac{x\,h(q)}{x\,\ln(q)} = \frac{h(q)}{\ln(q)}$$

となるので、

$$h(p) : h(q) = \ln(p) : \ln(q)$$

が成り立つ。このことより、

$$h(p) \propto \ln p$$

が示せた。