演習問題 1.10

2 変数 x, z が統計的に独立であるとする。それらの和の平均と分散が

$$\mathrm{E}[\,x+z\,] = \mathrm{E}[\,x\,] + \mathrm{E}[\,z\,] \qquad \cdots\ (\ 1.128\ )$$

$$\mathrm{var}[\,x+z\,] = \mathrm{var}[\,x\,] + \mathrm{var}[\,z\,] \qquad \cdots\ (\ 1.129\ )$$

を満たすことを示せ。

[解]

式 (1.128) を証明する。2 変数 x, z が独立であることから、式 (1.128) の左辺は、

$$\mathrm{E}[\,x+z\,] = \int\int (\,x+z\,)\,p\,(\,x\,,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int\int (\,x+z\,)\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int\int x\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz \;+\; \int\int z\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int x\,p\,(\,x\,)\,dx \int p\,(\,z\,)\,dz \;+\; \int p\,(\,x\,)\,dx \int z\,p\,(\,z\,)\,dz$$

$$= \mathrm{E}[\,x\,] \;+\; \mathrm{E}[\,z\,]$$

となる。以上より、式 (1.128) が示せた。

上記の変形において、

$$\int p(\,x\,)\,dx = 1\,, \qquad \int x\,p(\,x\,)\,dx \;=\; \mathrm{E}[\,x\,]$$

$$\int p(\,z\,)\,dz = 1\,, \qquad \int z\,p(\,z\,)\,dz \;=\; \mathrm{E}[\,z\,]$$

であることに注意する。

次に、式 (1.129) を証明する。式 (1.129) の左辺を

$$\mathrm{var}[\,x+z\,] \;=\; \int\int \{\;(\,x+z\,) - \mathrm{E}[\,x+z\,]\;\}^2\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

と展開する。ここで、式 (1.128) より、

$$= \int\int \{\;(\,x+z\,)\;-\;(\;\mathrm{E}[\,x\,] + \mathrm{E}[\,z\,]\;)\;\}^2\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int\int \{\;(\,x - \mathrm{E}[\,x\,])\;+\;(\;z - \mathrm{E}[\,z\,]\;)\;\}^2\,p\,(\,x\,)\,p\,(\,z\,)\,dx\,dz$$

$$= \int\int (x - \mathrm{E}[x])^2 p (x) p (z) \, dx \, dz$$

$$+ 2 \int\int (x - \mathrm{E}[x])(z - \mathrm{E}[z]) p (x) p (z) \, dx \, dz$$

$$+ \int\int (z - \mathrm{E}[z])^2 p (x) p (z) \, dx \, dz$$

… ※

ここで、式 ※ の各項について整理する。第一項については、

$$\int\int (x - \mathrm{E}[x])^2 p (x) p (z) \, dx \, dz$$

$$= \int (x - \mathrm{E}[x])^2 p (x) \, dx \int p (z) \, dz$$

$$= \int (x - \mathrm{E}[x])^2 p (x) \, dx$$

$$= \mathrm{var}[x]$$

となり、第二項については、

$$2 \int\int (x - \mathrm{E}[x])(z - \mathrm{E}[z]) p (x) p (z) \, dx \, dz$$

$$= 2 \int (x - \mathrm{E}[x]) p (x) \, dx \int (z - \mathrm{E}[z]) p (z) \, dz$$

$$= 2 \left(\int x \, p (x) \, dx - \int \mathrm{E}[x] p (x) \, dx \right) \left(\int z \, p (z) \, dz - \int \mathrm{E}[z] p (z) \, dz \right)$$

$$= 2 (\mathrm{E}[x] - \mathrm{E}[x]) (\mathrm{E}[z] - \mathrm{E}[z]) = 0$$

となり、第三項については、

$$\int\int (z - \mathrm{E}[z])^2 p (x) p (z) \, dx \, dz$$

$$= \int p (x) \, dx \int (z - \mathrm{E}[z])^2 p (z) \, dz$$

$$= \int (z - \mathrm{E}[z])^2 p (z) \, dz$$

$$= \mathrm{var}[z]$$

となる。以上より、式 ※ は、

$$= \mathrm{var}[x] + \mathrm{var}[z]$$

となり、式 (1.129) が示せた。

[別解]

式 (1.129) を証明する。式 (1.129) の左辺を展開して、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}[x+z] &= \mathrm{E}[\{(x+z)-\mathrm{E}[x+z]\}^2] \\
&= \mathrm{E}[(x+z)^2 - 2(x+z)\mathrm{E}[x+z] + (\mathrm{E}[x+z])^2] \\
&= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2\,\mathrm{E}[(x+z)\mathrm{E}[x+z]] + \mathrm{E}[(\mathrm{E}[x+z])^2] \\
&= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2\,\mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]] + \mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[x+z]] \\
&= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2\,\mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[x+z] + \mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]]\mathrm{E}[\mathrm{E}[x+z]] \\
&= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2(\mathrm{E}[x+z])^2 + \mathrm{E}[x+z]\mathrm{E}[x+z] \\
&= \mathrm{E}[(x+z)^2] - 2(\mathrm{E}[x+z])^2 + (\mathrm{E}[x+z])^2 \\
&= \mathrm{E}[(x+z)^2] - (\mathrm{E}[x+z])^2
\end{aligned}
$$

と整理する。ここで、式 (1.128) より、

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}[x^2 + 2xz + z^2] - (\mathrm{E}[x]+\mathrm{E}[z])^2 \\
&= \mathrm{E}[x^2] + 2\,\mathrm{E}[x,z] + \mathrm{E}[z^2] - (\mathrm{E}[x])^2 - 2\,\mathrm{E}[x]\mathrm{E}[z] - (\mathrm{E}[z])^2 \\
&= \mathrm{E}[x^2] - (\mathrm{E}[x])^2 + \mathrm{E}[z^2] - (\mathrm{E}[z])^2 \\
&= \mathrm{var}[x] + \mathrm{var}[z]
\end{aligned}
$$

以上より、式 (1.129) が示せた。

上記の変形において、

$$\mathrm{var}[x] = \mathrm{E}[(x-\mathrm{E}[x])^2]$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[x]] = \mathrm{E}[x]$$

であることに注意する。