演習問題 1.33

2 つの離散確率変数 x, y の間の条件付きエントロピー $\mathbf{H}[y|x]$ が 0 であるとする。すると、$p(x) > 0$ なるすべての x の値に対し、変数 y は x の関数でなければならない、すなわち、各 x に対して、$p(y|x) \neq 0$ である y が唯一つ存在することを示せ。

[**エントロピー**]

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}] = -\int p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

… (1.104)

[$\mathbf{x}$ に対する $\mathbf{y}$ の**条件付きエントロピー**]

$$\mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}] = -\iint p(\mathbf{y},\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}$$

… (1.111)

[**相互情報量 (カルバック – ライブラーダイバージェンス)**]

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathrm{KL}(p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \| p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})) = -\iint p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ln\left(\frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x},\mathbf{y})}\right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$$

… (1.120)

[相互情報量の関係式]

$$\mathbf{I}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{H}[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \mathbf{H}[\mathbf{y}] - \mathbf{H}[\mathbf{y}|\mathbf{x}]$$

… (1.121)

[解]

各 x に対して、$p(y|x) \neq 0$ である y が唯一つ存在することを示す。相互情報量の関係式 (1.121) より、

$$\mathbf{I}[x, y] = \mathbf{H}[y] - \mathbf{H}[y|x]$$

が成り立つ。また、前提として、2 つの離散確率変数 x, y の間の条件付きエントロピー $\mathbf{H}[y|x]$ が 0 であるとしているため、上記の式から、

$$\mathbf{I}[x, y] = \mathbf{H}[y]$$

となることがわかる。式 (1.104) と式 (1.120) を用いて、上記の式を解くと、

$$-\sum_x \sum_y p(x,y) \ln\left(\frac{p(x)p(y)}{p(x,y)}\right) = -\sum_y p(y) \ln p(y)$$

$$\sum_x \sum_y p(x,y) \ln\left(\frac{p(x)p(y)}{p(x,y)}\right) = \sum_x \sum_y p(x)p(y) \ln p(y)$$

となり、さらに確率の乗法定理を用いて、

$$\sum_x \sum_y p(x,y) \ln\left(\frac{p(x)p(y)}{p(y|x)p(x)}\right) = \sum_x \sum_y p(x)p(y) \ln p(y)$$

$$\sum_x \sum_y p(x,y) \ln\left(\frac{p(y)}{p(y|x)}\right) = \sum_x \sum_y p(x)p(y) \ln p(y)$$

と整理できる。このことから、上記の式を満たすためには、

$$p(x,y) = p(x)p(y) \text{ かつ } \frac{p(y)}{p(y|x)} = p(y) \Leftrightarrow p(y|x) = 1$$

でなければならないことがわかる。以上より、各 x に対して、$p(y|x) = 1$ となることより、$p(y|x) \neq 0$ である y が唯一つ存在することが示せた。