演習問題 1.22

L_{kj} を要素とする損失行列が与えられたとき、期待リスクが最小になるのは、各 $\mathbf{x}$ に対し、式 (1.81) を最小にするクラスを選んだときである。損失行列が $L_{kj} = 1 - I_{kj}$ で与えられたとき、これが最大事後確率のクラスを選ぶ基準に帰着されることを確かめよ。ただし、I_{kj} は単位行列の成分を表す。また、この損失行列はどのように解釈できるか。

[期待損失]

クラスを選択した場合の期待損失は、

$$\sum_k L_{kj}\, p\left(C_k \,|\, \mathbf{x}\right) \quad \cdots (1.81)$$

で与えられる。これを最小にする。⇒ 損失の最小化

ここでは、$\mathbf{x}$ の新たな値に対して、真のクラスが C_k で、$\mathbf{x}$ をクラス C_j に当てはめたとしている。ただし、j は k と異なる場合も同じである場合もあるとする。その際に被る損失の値が L_{kj} である。

[解]

損失行列が $L_{kj} = 1 - I_{kj}$ で与えられたとき、これが最大事後確率のクラスを選ぶ基準に帰着されることを確かめるために、この損失行列を式 (1.81) に代入する。すると、式 (1.81) は、

$$\sum_k L_{kj}\, p\left(C_k \,|\, \mathbf{x}\right) = \sum_k \left(1 - I_{kj}\right) p\left(C_k \,|\, \mathbf{x}\right)$$

$$= \sum_k \left\{ p\left(C_k \,|\, \mathbf{x}\right) - I_{kj}\, p\left(C_k \,|\, \mathbf{x}\right) \right\}$$

となる。ここで、周辺確率の和が 1 であることを用いると、

$$= 1 - p\left(C_j \,|\, \mathbf{x}\right)$$

となる。結果として、期待損失の最小化が $1 - p\left(C_j \,|\, \mathbf{x}\right)$ の最小化に帰着された。これは、期待損失の最小化が $p\left(C_j \,|\, \mathbf{x}\right)$ の最大化に帰着されたことを意味するため、最大事後確率のクラスを選ぶ基準に帰着されることを示している。

この損失行列の解釈であるが、この損失行列は、正しいクラスに分類されれば損失はなく、誤ったクラスに分類されれば、1 の損失がすべての誤分類に対して課されることを意味している。