演習問題 1.17

ガンマ関数は、

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

$$\cdots (1.141)$$

で定義される。部分積分を用いて、関係式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を証明せよ。また、$\Gamma(1) = 1$ を示し、x が整数なら、$\Gamma(x+1) = x!$ となることを示せ。

[解]

まず、部分積分を用いて、関係式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を証明する。式 (1.141) より、

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty u^x e^{-u} du$$

であるから、これは部分積分により、

$$= \int_0^\infty u^x (-e^{-u})' du$$

$$= [u^x(-e^{-u})]_0^\infty - \int_0^\infty (u^x)'(-e^{-u}) du$$

$$= \left[-\frac{u^x}{e^u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x u^{x-1} e^{-u} du$$

となり、ここで $\lim_{u\to\infty}\frac{u^x}{e^u}$ は、分母の方が指数関数的に増えるので、分母の方が大きくなる。ゆえに、$\lim_{u\to\infty}\frac{u^x}{e^u} = 0$ となるので、

$$= (0-0) + x\Gamma(x)$$

$$= x\Gamma(x)$$

と整理できる。よって、関係式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ が示せた。

[部分積分法]

部分積分法は、$g(x) = e^x$ を伴う関数の x に関する積分において、頻繁に用いられる。部分積分は、しばしば煩雑な計算となるが、関数 $f(x)$ が奇関数である場合、部分積分を行わなくて済むことも多い。部分積分法は以下の式で与えられる。

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

特に、

$$\int f(x) dx = x f(x) - \int x f'(x) dx$$

である。

次に、数学的帰納法を用いて、$\Gamma(x+1)=x!$ … ※ を証明する。

(ⅰ) $x=1$ のとき、式 (1.141) より、

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty u^{1-1}e^{-u}\,du=\int_0^\infty e^{-u}\,du=[-e^{-u}]_0^\infty=1$$

となるので、式 ※ は成り立つ。

(ⅱ) $x=x+1$ のとき、式 ※ が成り立つと仮定すると、$x=x+2$ のとき、式 ※ の左辺は、先程証明した式より、

$$\text{式 ※ の左辺}=\Gamma(x+2)=(x+1)\Gamma(x+1)$$

となり、仮定より、

$$=(x+1)x!=(x+1)!$$

となる。ここで、式 ※ の右辺は、

$$\text{式 ※ の右辺}=(x+1)!$$

であるので、式 ※ が示せた。ここで、x が整数でない場合、$x!$ が成り立たないのは明白である。

以上 (ⅰ), (ⅱ) より、x が整数なら、$\Gamma(x+1)=x!$ となることが証明された。