演習問題 1.15

この演習問題と次の演習問題では、多項式の独立パラメータの数が多項式の次数 M や入力空間の次元 D に対し、どのように増えるかを考える。まず、D 次元の多項式の M 次の項を書き下すと、

$$\sum_{i_1=1}^{D}\sum_{i_2=1}^{D}\cdots\sum_{i_M=1}^{D} w_{i_1 i_2 \cdots i_M} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_M}$$

… (1.33)

となる。係数 $w_{i_1 i_2 \cdots i_M}$ は D^M 個あるが、そのうち独立なパラメータの数は、$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_M}$ の多くの置換対称性から、それよりもずっと少なくなる。始めに、M 次の項を

$$\sum_{i_1=1}^{D}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_M=1}^{i_{M-1}} \widetilde{w}_{i_1 i_2 \cdots i_M} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_M}$$

… (1.34)

と書き直すことにより、係数の冗長性を取り除けることを示せ。ただし、$\widetilde{w}$ と w の厳密な関係を陽に表す必要はないことに注意せよ。この結果を用いて、M 次における**独立な**パラメータの数 $n(D, M)$ が

$$n(D, M) = \sum_{i=1}^{D} n(i, M-1)$$

… (1.35)

という再帰的な関係を満たすことを示せ。さらに、数学的帰納法により、以下の結果が成り立つことを示せ。

$$\sum_{i=1}^{D} \frac{(i+M-2)!}{(i-1)!(M-1)!} = \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!M!}$$

… (1.36)

これを示すには、まず $D=1$ と任意の M の場合を $0! = 1$ を用いて証明し、次に D 次元で成り立っていると仮定して、$D+1$ 次元でも成り立つことを確かめればよい。最後に、上の 2 つの結果から、数学的帰納法により

$$n(D, M) = \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!\,M!}$$

… (1.37)

を示せ。これを示すには、まず $M=2$ と任意の $D \gg 1$ について正しいことを、演習問題 1.14 の結果との比較によって示し、次に、式 (1.35) と式 (1.36) を用いて、$M-1$ 次で成り立てば、M 次でも成り立つことを示せばよい。

[解]

まず、M 次の項を式 (1.34) のように書き下すことにより、係数の冗長性を取り除けることを示す。置換対称性により、パラメータの数は式 (1.33) よりも少なくなるはずである。

$$\sum_{i_1=1}^{D}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_M=1}^{i_{M-1}}\widetilde{w}_{i_1 i_2 \cdots i_M}\, x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_M} \quad \cdots (1.34)$$

式 (1.34) では、$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_M}$ の並びに対し、$i_m \geq i_n$ ($m < n$) という規則を与えることによって、置換対称性をもつものが排除できていることがわかる。ゆえに、係数の冗長性が排除できていることが保証できる。

[置換対称性]

置換対称性とは、ここでは、$x_i x_j$ と $x_j x_i$ は同値であるということを意味している。例えば、多項式の次数を $M = 2$ 、入力空間の次元を $D = 4$ とした場合、

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_i x_j$$

$$= x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_1 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_2 x_4$$
$$+ x_3 x_1 + x_3 x_2 + x_3^2 + x_3 x_4 + x_4 x_1 + x_4 x_2 + x_4 x_3 + x_4^2$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2 x_1 x_2 + 2 x_1 x_3 + 2 x_1 x_4 + 2 x_2 x_3 + 2 x_2 x_4 + 2 x_3 x_4$$

となり、独立なパラメータの数は、$D^2 = 4^2 = 16$ 個よりもずっと少ない $D + {}_DC_2 = 4 + {}_4C_2 = 10$ 個となっていることがわかる。

さらに、M 次における**独立な**パラメータの数 $n(D, M)$ が、式 (1.35) で表されるような再帰的な関係を満たすことを示す。式 (1.34) から、M 次における**独立な**パラメータの数 $n(D, M)$ は、

$$n(D, M) = \sum_{i_1=1}^{D}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_M=1}^{i_{M-1}} 1$$
$$= \sum_{i_1=1}^{D}\left(\sum_{i_2=1}^{i_1}\sum_{i_3=1}^{i_2}\cdots\sum_{i_M=1}^{i_{M-1}} 1\right)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{D} n(i_1, M-1)$$

となり、式 (1.35) が示せた。

次に、数学的帰納法により、以下の結果が成り立つことを示す。

$$\sum_{i=1}^{D} \frac{(i+M-2)!}{(i-1)!(M-1)!} = \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!M!}$$

$\cdots$ (1.36)

まず $D=1$ と任意の M の場合を $0!=1$ を用いて証明し、次に D 次元で成り立っていると仮定して、$D+1$ 次元でも成り立つことを確かめる。

(i) $D=1, \forall M$ のとき、式 (1.36) に $D=1$ を代入すると、

$$\text{式の (1.36) の左辺} = \sum_{i=1}^{1} \frac{(i+M-2)!}{(i-1)!(M-1)!} = \frac{(M-1)!}{0!(M-1)!} = 1$$

$$\text{式の (1.36) の右辺} = \frac{(1+M-1)!}{(1-1)!M!} = \frac{M!}{0!M!} = 1$$

より、式 (1.36) は成り立つ。

(ii) $D=D, \forall M$ のとき、式 (1.36) が成り立つと仮定した場合、$D=D+1, \forall M$ のとき、式 (1.36) が成り立つことを証明する。式 (1.36) の左辺に $D=D+1$ を代入すると、

$$\text{式の (1.36) の左辺} = \sum_{i=1}^{D+1} \frac{(i+M-2)!}{(i-1)!(M-1)!}$$

$$= \frac{\{(D+1)+M-2\}!}{\{(D+1)-1\}!(M-1)!} + \sum_{i=1}^{D} \frac{(i+M-2)!}{(i-1)!(M-1)!}$$

ここで、式 (1.36) より、

$$= \frac{\{(D+1)+M-2\}!}{D!(M-1)!} + \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!M!}$$

$$= \frac{M\{(D+1)+M-2\}! + D(D+M-1)!}{D!M!}$$

$$= \frac{M(D+M-1)! + D(D+M-1)!}{D!M!}$$

$$= \frac{(D+M)\{(D+M)-1\}!}{D!M!}$$

$$= \frac{(D+M)!}{D!M!}$$

$$= \frac{\{(D+1)+M-1\}!}{\{(D+1)-1\}!M!}$$

$$= \text{式の (1.36) の右辺}$$

よって、$D=D+1, \forall M$ のときも式 (1.36) は成り立つ。

以上 (i), (ii) より、数学的帰納法を用いて、 $D \gg 1$ と任意の M において、式 (1.36) が成り立つことを証明できた。

最後に、式 (1.35) , (1.36) が成り立つという結果から、数学的帰納法により、

$$n(D,\ M) = \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!\,M!}$$

… (1.37)

を示す。まず $M=2$ と任意の $D \gg 1$ について正しいことを、演習問題 1.14 の結果との比較によって示し、次に、式 (1.35) と式 (1.36) を用いて、$M-1$ 次で成り立てば、M 次でも成り立つことを示す。

(i) $D \gg 1$, $M=2$ のとき、式 (1.37) に $M=2$ を代入すると、

$$n(D,\ M) = \frac{(D+2-1)!}{(D-1)!\,2!} = \frac{(D+1)D}{2}$$

となり、これは演習問題 1.14 の結果と一致している。

(ii) $D \gg 1$, $M=M-1$ のとき、式 (1.37) が成り立つと仮定した場合、$D \gg 1$, $M=M$ のときも式 (1.37) が成り立つことを証明する。式 (1.37) に $M=M-1$ を代入すると、

$$n(D,\ M-1) = \frac{(D+M-2)!}{(D-1)!\,(M-1)!}$$

… ※

となる。これを仮定とする。$D \gg 1$, $M=M$ のとき、式 (1.35) により、$n(D,\ M)$ は、

$$n(D,\ M) = \sum_{i=1}^{D} n(i,\ M-1)$$

となり、仮定 ※ より、

$$= \sum_{i=1}^{D} \frac{(D+M-2)!}{(D-1)!\,(M-1)!}$$

と変形でき、最終的に、式 (1.36) により、

$$= \frac{(D+M-1)!}{(D-1)!\,M!}$$

となる。よって、$D \gg 1$, $M=M$ のときも式 (1.37) が成り立つ。

以上 (i) , (ii) より、数学的帰納法を用いて、 $D \gg 1$ と $M \gg 2$ において、式 (1.37) が成り立つことを証明できた。

[全称記号 … ∀]

全称記号とは、数理論理学において、「 全ての 」(全称量化) を表す記号である。全称量化子、全称限定子、不偏量化子、普通限定子とも呼ばれる。