演習問題 1.38

数学的帰納法により、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せ。

[凸関数に関する不等式]

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \quad \cdots (1.114)$$

ここで、λ のとり得る範囲は、$0 \leq \lambda \leq 1$ である。

[イェンセンの不等式]

$$f\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i) \quad \cdots (1.115)$$

ここで、$\lambda_i \geq 0$ および $\sum_i \lambda_i = 1$ である。

[解]

数学的帰納法を用いて、凸関数 $f(x)$ に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示す。

(i) $M = 1$ のとき、$\lambda_1 = 1$, $x_i = a$ とおけることから、

$$\text{式 (1.115) の左辺} = f\left(\sum_{i=1}^{1} \lambda_i x_i\right) = f(\lambda_1 x_1) = f(a)$$

$$\text{式 (1.115) の右辺} = \sum_{i=1}^{1} \lambda_i f(x_i) = \lambda_1 f(x_1) = f(a)$$

となり、式 (1.115) は満たせた。

(ii) $M = k$ のとき、式 (1.115) が成り立つと仮定すると、$M = k + 1$ のとき、式 (1.115) の左辺は、

$$\text{式 (1.115) の左辺} = f\left(\sum_{i=1}^{M+1} \lambda_i x_i\right)$$

$$= f\left(\lambda_{M+1} x_{M+1} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i\right)$$

ここで、$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$ とおくと、上記の式は、

$$= f\left(\lambda_{M+1} x_{M+1} + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i\right)$$

となる。上記の式は式 (1.114) において、$\lambda = \lambda_{M+1}$, $a = x_{M+1}$, $b = \sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i$ に対応することから、

$$\leq \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) f\left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i\right)$$

$$\cdots ※$$

となる。ここで、仮定より、

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\eta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)$$

が成り立つので、式 ※ は、

$$\leq \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)$$

となり、$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$ だから、

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{M+1}} f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \frac{1}{1 - \lambda_{M+1}} \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i f(x_i)$$

$$= 式 (1.115) の左辺$$

よって、$M = k + 1$ のときも式 (1.115) は成り立つ。

以上 (i) , (ii) より、数学的帰納法において、$M \geq 1$ の整数において、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せた。

演習問題 1.38

数学的帰納法により、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せ。

[凸関数に関する不等式]

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

… (1.114)

ここで、λ のとり得る範囲は、$0 \leq \lambda \leq 1$ である。

[イェンセンの不等式]

$$f\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i)$$

… (1.115)

ここで、$\lambda_i \geq 0$ および $\sum_i \lambda_i = 1$ である。

[解]

数学的帰納法を用いて、凸関数 $f(x)$ に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示す。

(i) $M = 1$ のとき、$\lambda_1 = 1$, $x_i = a$ とおけることから、

$$式 (1.115) の左辺 = f\left(\sum_{i=1}^{1} \lambda_i x_i\right) = f(\lambda_1 x_1) = f(a)$$

$$式 (1.115) の右辺 = \sum_{i=1}^{1} \lambda_i f(x_i) = \lambda_1 f(x_1) = f(a)$$

となり、式 (1.115) は満たせた。

(ii) $M = k$ のとき、式 (1.115) が成り立つと仮定すると、$M = k + 1$ のとき、式 (1.115) の左辺は、

$$式 (1.115) の左辺 = f\left(\sum_{i=1}^{M+1} \lambda_i x_i\right)$$

$$= f\left(\lambda_{M+1} x_{M+1} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i\right)$$

ここで、$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$ とおくと、上記の式は、

$$= f\left(\lambda_{M+1} x_{M+1} + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i\right)$$

となる。上記の式は式 (1.114) において、$\lambda = \lambda_{M+1}$, $a = x_{M+1}$, $b = \sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i$ に対応することから、

$$\leq \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) f\left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i\right)$$

$\cdots$ ※

となる。ここで、仮定より、

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\eta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)$$

が成り立つので、式 ※ は、

$$\leq \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)$$

となり、$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$ だから、

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{M+1}} f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \frac{1}{1 - \lambda_{M+1}} \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i f(x_i)$$

= 式 (1.115) の左辺

よって、$M = k + 1$ のときも式 (1.115) は成り立つ。

以上 (i), (ii) より、数学的帰納法において、$M \geq 1$ の整数において、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せた。

演習問題 1.38

数学的帰納法により、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せ。

[凸関数に関する不等式]

$$f\,(\,\lambda a + (\,1 - \lambda\,) b\,) \,\leq\, \lambda f\,(\,a\,) + (\,1 - \lambda\,) f\,(\,b\,) \qquad \cdots (\,1.114\,)$$

ここで、λ のとり得る範囲は、$0 \,\leq\, \lambda \,\leq\, 1$ である。

[イェンセンの不等式]

$$f\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i\, x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i\, f\,(\,x_i\,) \qquad \cdots (\,1.115\,)$$

ここで、$\lambda_i \,\geq\, 0$ および $\sum_i \lambda_i = 1$ である。

[解]

数学的帰納法を用いて、凸関数 $f\,(\,x\,)$ に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示す。

(i) $M = 1$ のとき、$\lambda_1 \,=\, 1$, $x_i \,=\, a$ とおけることから、

$$\text{式 (1.115) の左辺} \,=\, f\left(\sum_{i=1}^{1} \lambda_i\, x_i\right) = f\,(\,\lambda_1 x_1\,) \,=\, f\,(\,a\,)$$

$$\text{式 (1.115) の右辺} \,=\, \sum_{i=1}^{1} \lambda_i\, f\,(\,x_i\,) \,=\, \lambda_1\, f\,(\,x_1\,) \,=\, f\,(\,a\,)$$

となり、式 (1.115) は満たせた。

(ii) $M = k$ のとき、式 (1.115) が成り立つと仮定すると、$M = k + 1$ のとき、式 (1.115) の左辺は、

$$\begin{aligned}\text{式 (1.115) の左辺} \,&=\, f\left(\sum_{i=1}^{M+1} \lambda_i\, x_i\right) \\ &=\, f\left(\lambda_{M+1}\, x_{M+1} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i\, x_i\right)\end{aligned}$$

ここで、$\eta_i \,=\, \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{M+1}}$ とおくと、上記の式は、

$$=\, f\left(\lambda_{M+1}\, x_{M+1} + (\,1 \,-\, \lambda_{M+1}\,) \sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i\right)$$

となる。上記の式は式 (1.114) において、$\lambda \,=\, \lambda_{M+1}$, $a \,=\, x_{M+1}$, $b \,=\, \sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i$ に対応することから、

$$\leq\, \lambda_{M+1}\, f(\,x_{M+1}\,) + (\,1 \,-\, \lambda_{M+1}\,)\, f\left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i\right)$$

$\cdots$ ※

となる。ここで、仮定より、

$$f\left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M} \eta_i f(x_i)$$

が成り立つので、式 ※ は、

$$\leq \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M} \eta_i f(x_i)$$

となり、$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$ だから、

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{M+1}} f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \frac{1}{1 - \lambda_{M+1}} \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{M+1} \lambda_i f(x_i)$$

$=$ 式 (1.115) の左辺

よって、$M = k + 1$ のときも式 (1.115) は成り立つ。

以上 (i), (ii) より、数学的帰納法において、$M \geq 1$ の整数において、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せた。

演習問題 1.38

数学的帰納法により、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せ。

[凸関数に関する不等式]

$$f\,(\,\lambda a + (\,1-\lambda\,)b\,)\ \leq\ \lambda f\,(\,a\,) + (\,1-\lambda\,)\,f\,(\,b\,) \qquad \cdots (\,1.114\,)$$

ここで、λ のとり得る範囲は、$0 \leq \lambda \leq 1$ である。

[イェンセンの不等式]

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\lambda_i\,x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M}\lambda_i\,f\,(\,x_i\,) \qquad \cdots (\,1.115\,)$$

ここで、$\lambda_i \geq 0$ および $\sum_i \lambda_i = 1$ である。

[解]

数学的帰納法を用いて、凸関数 $f\,(\,x\,)$ に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示す。

(i) $M = 1$ のとき、$\lambda_1 = 1$, $x_i = a$ とおけることから、

$$\text{式 (1.115) の左辺} = f\left(\sum_{i=1}^{1}\lambda_i\,x_i\right) = f\,(\,\lambda_1 x_1\,) = f\,(\,a\,)$$

$$\text{式 (1.115) の右辺} = \sum_{i=1}^{1}\lambda_i\,f\,(\,x_i\,) = \lambda_1\,f\,(\,x_1\,) = f\,(\,a\,)$$

となり、式 (1.115) は満たせた。

(ii) $M = k$ のとき、式 (1.115) が成り立つと仮定すると、$M = k + 1$ のとき、式 (1.115) の左辺は、

$$\text{式 (1.115) の左辺} = f\left(\sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i\,x_i\right)$$

$$= f\left(\lambda_{M+1}\,x_{M+1} + \sum_{i=1}^{M}\lambda_i\,x_i\right)$$

ここで、$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$ とおくと、上記の式は、

$$= f\left(\lambda_{M+1}\,x_{M+1} + (\,1 - \lambda_{M+1}\,)\sum_{i=1}^{M}\eta_i x_i\right)$$

となる。上記の式は式 (1.114) において、$\lambda = \lambda_{M+1}$, $a = x_{M+1}$, $b = \sum_{i=1}^{M}\eta_i x_i$ に対応することから、

$$\leq \lambda_{M+1}\,f(\,x_{M+1}\,) + (\,1 - \lambda_{M+1}\,)\,f\left(\sum_{i=1}^{M}\eta_i x_i\right)$$

$\cdots$ ※

となる。ここで、仮定より、

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\eta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)$$

が成り立つので、式 ※ は、

$$\leq \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)$$

となり、$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$ だから、

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}} f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + (1 - \lambda_{M+1}) \frac{1}{1-\lambda_{M+1}} \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

$$= \lambda_{M+1} f(x_{M+1}) + \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i f(x_i)$$

= 式 (1.115) の左辺

よって、$M = k + 1$ のときも式 (1.115) は成り立つ。

以上 (i) , (ii) より、数学的帰納法において、$M \geq 1$ の整数において、凸関数に関する不等式 (1.14) から式 (1.15) が導かれることを示せた。