演習問題 1.40

イェンセンの不等式 (1.115) を $f(x) = \ln x$ に適用し、実数集合の算術平均が、幾何平均より決して小さくならないことを示せ。

[イェンセンの不等式]

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

$$\cdots (1.115)$$

ここで、上記のイェンセンの不等式の不等号は、$f(x_i)$ が凸関数である前提で成立することに注意する。$f(x_i)$ が凹関数である場合、上記の不等式の不等号は逆の形となる。また、λ_i は $\lambda_i \ge 0$ および、$\sum_i \lambda_i = 1$ である。

[解]

まず、$f(x)$ のグラフの形を調べる。$f(x)$ を x に関して微分すると、

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

となる。さらに、$f(x)$ を2 次微分すると、

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

となる。このことから、$f(x)$ は凹関数であることがわかる。これにより、式 (1.115) のイェンセンの不等式は、

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i)$$

の形となる。次に、実数集合の算術平均は、λ_i の値を $\frac{1}{M}$ として、$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}x_i$ とすることで求められるから、上記の式は、

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}f(x_i)$$

となる。ここで、上記の式の左辺は実数集合の算術平均を、右辺は幾何平均を示していることに注意する。今、$f(x) = \ln x$ であるから、

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\ln x_i$$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{M}\ln x_i^{\frac{1}{M}}$$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}x_i\right) \ge \ln x_1^{\frac{1}{M}} + \ln x_2^{\frac{1}{M}} + \cdots + \ln x_M^{\frac{1}{M}}$$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}x_i\right) \ge \ln(x_1 x_2 \cdots x_M)^{\frac{1}{M}}$$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\,x_i\right) \geq \ln\left(\prod_{i=1}^{M}x_i\right)^{\frac{1}{M}}$$

と整理でき、両辺の指数関数をとると、上記の式は、

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\,x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{M}x_i\right)^{\frac{1}{M}}$$

となる。よって、上記の式から、実数集合の算術平均（左辺）が、幾何平均（右辺）より決して小さくならないことが示せた。