演習問題 1.07

この演習問題では、1 変数ガウス分布に関する規格化条件（ 1.48 ）を証明する。このために、積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)dx$$

…（ 1.124 ）

を考え、その 2 乗を

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{1}{2\sigma^2}y^2\right)dx\,dy$$

…（ 1.125 ）

の形で書いて評価する。直交座標系（ x , y ）から極座標系（ r , θ ）に変換し、$u = r^2$ を代入する。θ と u に関する積分を実行し、両辺の平方根をとることにより、

$$I = (\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}$$

…（ 1.126 ）

が得られることを示せ。最後に、この結果からガウス分布 $N(\,x\,|\,\mu,\,\sigma^2\,)$ が規格化されていることを示せ。

［ 解 ］

式（ 1.125 ）に対して、$x = r\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$ と置き、I^2 を極座標系に変数変換すると、

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r\,dr\,d\theta$$

となる。（ ⇒ ［直交座標系 – 極座標系間の変数変換］ 参照 ）ここで、

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r\,dr$$

と整理して、$u = r^2$ と置き、再び変数変換すると、$\frac{du}{dr} = 2r$ より、

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) r\,\frac{1}{2r}\,du$$

$$= \pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) du$$

と整理できる。$\left(e^{f(x)}\right)' = f(x)\,e^{f(x)} \cdot (\,f(x)\,)'$ を用いて、これを解いて、

$$I^2 = \pi\left[-2\sigma^2\,\exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \pi \left[\frac{-2\sigma^2}{e^{\frac{u}{2\sigma^2}}} \right]_0^\infty$$

$$= \pi (0 + 2\sigma^2)$$

$$= 2\pi\sigma^2$$

以上より、

$$I = (2\pi\sigma^2)^{1/2}$$

が示せた。また、上記の結果から、

$$N(x \mid \mu , \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\}$$

に対し、$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\} dx = (2\pi\sigma^2)^{1/2}$ と評価できるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x \mid \mu , \sigma^2)\, dx = 1$$

に規格化（正規化）されていることがわかる。

[変数変換]

$$\int f (x)\, dx$$

で $x = g (y)$ とすると、$dx = g' (y)\, dy$ より、

$$\int f (g (y))\, g' (y)\, dy$$

[多変数関数の変数変換]

多変数関数の場合は、上記の $g' (y)$ の部分がヤコビ行列の行列式（ヤコビアン）になる。
ヤコビアンは、変数変換した際のある点における微小区間の拡大率を意味する。
$x_i = g_i (y_1 , \cdots , y_n)\ for\ i = 1 , \cdots , n$ とすると、ヤコビアンは、

$$\det \mathbf{J} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_i} \right) = \det \left(\frac{\partial (x_1 , \cdots , x_n)}{\partial (y_1 , \cdots , y_n)} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

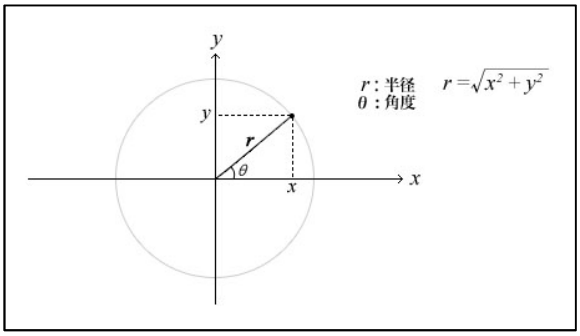
よって、多変数関数の変数変換は、適当な条件の下で

$$\int \cdots \int f (x_1 , \cdots , x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int \cdots \int f (g_1 (y_1 , \cdots , y_n) , \cdots , g_n (y_1 , \cdots , y_n)) \det \mathbf{J}\, dy_1 \cdots dy_n$$

となる。

[直交座標系 − 極座標系間の変数変換]



直交座標系 − 極座標系間では、次の関係を満たす。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

ここで、r と θ の範囲は、$0 \le r \le \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$ となる。

ここで、I^2 は x と y の多変数関数なので、変数変換にはヤコビアンを用いる。$x = r\cos\theta$ と $y = r\ \sin\theta$ について、パラメータ r, θ で、それぞれ偏微分を行うと、

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

となる。すると、ヤコビ行列 $\mathbf{J}$ は、

$$\mathbf{J} = \frac{D_{(x,\ y)}}{D_{(r,\ \theta)}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。このヤコビ行列の行列式（ヤコビアン）は、

$$\det \mathbf{J} = \left| \frac{D_{(x,\ y)}}{D_{(r,\ \theta)}} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となる。よって、I^2 の式は、

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{1}{2\sigma^2}y^2\right) dx\, dy$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx\, dy$$

$$I^2 = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \det \mathbf{J}\ dr\, d\theta$$

$$I^2 = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r\ dr\, d\theta$$