演習問題 1.06

2 つの変数 x, y が独立なら、それらの共分散は 0 になることを示せ。

[共分散]

$$\mathrm{cov}[x, y] = \mathrm{E}_{x,y}[\{x - \mathrm{E}[x]\}\{y - \mathrm{E}[y]\}] = \mathrm{E}_{x,y}[xy] - \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y]$$

… (1.41)

[解]

変数 x と y の共分散は、式 (1.41) より、以下のように表され、これを展開して整理すると、

$$\mathrm{cov}[x, y] = \mathrm{E}_{x,y}[\{x - \mathrm{E}[x]\}\{y - \mathrm{E}[y]\}]$$

$$= \int\int \{x - \mathrm{E}[x]\}\{y - \mathrm{E}[y]\}\, p(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int\int x\, y\, p(x, y)\, dx\, dy - \mathrm{E}[x] \int\int y\, p(x, y)\, dx\, dy$$

$$- \mathrm{E}[y] \int\int x\, p(x, y)\, dx\, dy + \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y] \int\int p(x, y)\, dx\, dy$$

… ※

となる。今、x と y は独立なので、$p(x, y) = p(x)\,p(y)$ の関係が成り立つので、上記の式の各項を変形すると、第一項については、

$$\int\int x\, y\, p(x, y)\, dx\, dy = \int\int x\, y\, p(x)\, p(y)\, dx\, dy$$

$$= \int x\, p(x)\, dx \int y\, p(y)\, dy = \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y]$$

となり、第二項については、

$$\mathrm{E}[x] \int\int y\, p(x, y)\, dx\, dy = \mathrm{E}[x] \int\int y\, p(x)\, p(y)\, dx\, dy$$

$$= \mathrm{E}[x] \int p(x)\, dx \int y\, p(y)\, dy = \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y]$$

となり、第三項については、

$$\mathrm{E}[y] \int\int x\, p(x, y)\, dx\, dy = \mathrm{E}[y] \int\int x\, p(x)\, p(y)\, dx\, dy$$

$$= \mathrm{E}[y] \int x\, p(x)\, dx \int p(y)\, dy = \mathrm{E}[y]\,\mathrm{E}[x]$$

となり、第四項については、

$$\mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y] \int\int p(x, y)\, dx\, dy = \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y] \int\int p(x)\, p(y)\, dx\, dy$$

$$= \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y] \int p(x)\,dx \int p(y)\,dy = \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y]$$

となる。この結果から、最終的に式 ※ は、

$$= \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y] - \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y] - \mathrm{E}[y]\,\mathrm{E}[x] + \mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[y] = 0$$

となる。以上より、独立な変数の共分散は、0 となる。

上記の変形において、

$$\int p(x)\,dx = 1, \qquad \int x\,p(x)\,dx = \mathrm{E}[x]$$

$$\int p(y)\,dy = 1, \qquad \int y\,p(y)\,dy = \mathrm{E}[y]$$

であることに注意する。