演習問題 1.29

M 状態の離散確率変数 x を考え、イェンセンの不等式（ 1.15 ）を用いて、確率分布 $p(x)$ のエントロピーが $\mathbf{H}[x] \leq \ln M$ を満たすことを示せ。

[エントロピー]

$$\mathrm{H} = -\sum_i p(x_i) \ln p(x_i)$$

…（ 1.98 ）

[イェンセンの不等式]

$$f\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i)$$

…（ 1.115 ）

ここで、上記のイェンセンの不等式の不等号は、$f(x_i)$ が凸関数である前提で成立することに注意する。$f(x_i)$ が凹関数である場合、上記の不等式の不等号は逆の形となる。また、λ_i は $\lambda_i \geq 0$ および、$\sum_i \lambda_i = 1$ である。

[解]

エントロピー $\mathbf{H}[x]$ は、式（ 1.98 ）より、

$$\mathbf{H}[x] = -\sum_i p(x_i) \ln p(x_i) = \sum_i p(x_i) \ln \frac{1}{p(x_i)}$$

… ※

となる、イェンセンの不等式を用いるにあたり、$\lambda_i = p(x_i)$, $x_i = \frac{1}{p(x_i)}$, $f(x_i) = \ln \frac{1}{p(x_i)} = \ln x_i$ と置くこととする。ここで、$f(x) = \ln x$ のグラフの形を調べるために、$f(x)$ を x について微分すると、$f'(x) = \frac{1}{x}$ となる。さらに、2 次微分を行うと、$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ となり、$f(x) = \ln x$ は凹関数となることがわかる。イェンセンの不等式は、凹関数に対して、

$$f\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i)$$

となるので、これに、$\lambda_i = p(x_i)$, $x_i = \frac{1}{p(x_i)}$, $f(x_i) = \ln \frac{1}{p(x_i)} = \ln x_i$ と対応させると、式 ※ は、

$$\leq f\left(\sum_{i=1}^{M} p(x_i) \frac{1}{p(x_i)}\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{M} 1\right)$$

$$= f(M)$$
$$= \ln M$$
となる。よって、確率分布 $p(x)$ のエントロピーが $\mathbf{H}[x] \leq \ln M$ を満たすことが示せた。