演習問題 1.08

変数変換を使って、1 変数ガウス分布 (1.46) が式 (1.49) を満たすことを確かめよ。次に、規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} N\,(\,x \mid \mu,\ \sigma^2\,)\,dx = 1$$

$$\cdots\ (\ 1.127\ )$$

の周辺を σ^2 に関して積分し、ガウス分布が式 (1.50) を満たすことを確かめよ。最後に式 (1.51) が成り立つことを示せ。

$$N\,(\,x \mid \mu,\ \sigma^2\,) = \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2\right\}$$

$$\cdots\ (\ 1.46\ )$$

$$\mathrm{E}[\,x\,] = \int_{-\infty}^{\infty} N\,(\,x \mid \mu,\ \sigma^2\,)\,x\,dx = \mu$$

$$\cdots\ (\ 1.49\ )$$

[解]

式 (1.46) を式 (1.49) に代入した後、$y = x - \mu$ と置き、変数変換を行うと、

$$\mathrm{E}[\,x\,] = \int_{-\infty}^{\infty} N\,(\,x \mid \mu,\ \sigma^2\,)\,x\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2\right\}\,x\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2\right\}(\,y+\mu\,)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2\right\}\mathrm{y}\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2\right\}\mu\,dy$$

$$\cdots\ ※$$

と整理できる。ここで、式 ※ の第二項に関しては、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2\right\}\mu\,dy$$

$$= \mu\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2\right\}dy$$

$$= \mu \times 1 = \mu$$

となる。また、式 ※ の第一項に関しては、奇関数となっているため、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2\right\}\mathrm{y}\,dy = 0$$

となる。よって、式 ※ は μ となるので、式 (1.49)

$$\mathrm{E}[\,x\,] = \int_{-\infty}^{\infty} N\,(\,x\,|\,\mu,\ \ \sigma^2\,)\,x\,dx = \mu$$

が満たせた。

次に、以下の式（ 1.127 ）の両辺を σ^2 に関して積分し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} N\,(\,x\,|\,\mu,\ \ \sigma^2\,)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2\right\}dx = 1$$

…（ 1.127 ）

以下の式（ 1.150 ）が成立することを証明する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} N\,(\,x\,|\,\mu,\ \ \sigma^2\,)\,x^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2\right\}x^2\,dx = \mu^2+\sigma^2$$

…（ 1.150 ）

式（ 1.127 ）を展開し、正則化項の逆数を両辺にかけると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2}\,dx = (\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\,x-\mu\,)^2}{2}\sigma^{-2}}\,dx = (\,2\pi\,)^{1/2}\,\sigma$$

両辺を σ に関して微分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-3}\,(\,x-\mu\,)^2\,e^{-\frac{(\,x-\mu\,)^2}{2}\sigma^{-2}}\,dx = (\,2\pi\,)^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\,x-\mu\,)^2\,e^{-\frac{(\,x-\mu\,)^2}{2}\sigma^{-2}}\,dx = (\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}\,\sigma^2$$

この式の左辺を展開し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-\frac{(\,x-\mu\,)^2}{2}\sigma^{-2}}\,dx - 2\,\mu\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\frac{(\,x-\mu\,)^2}{2}\sigma^{-2}}\,dx + \ \mu^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\,x-\mu\,)^2}{2}\sigma^{-2}}\,dx$$

$$= (\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}\,\sigma^2$$

両辺を $(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}$ で割ると、

$$\frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-\frac{(\,x-\mu\,)^2}{2}\sigma^{-2}}\,dx - 2\,\mu\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2\right\}x\,dx$$

$$+\ \mu^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2\right\}dx = \sigma^2$$

… ※※

となる。ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\,2\pi\sigma^2\,)^{1/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\,x-\mu\,)^2\right\}x\,dx = \mu$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx = 1$$

がすでに示されているから、式 ※※ は、

$$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\sigma^{-2}}\, dx - 2\mu^2 + \mu^2 = \sigma^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\sigma^{-2}}\, x^2\, dx = \sigma^2 + \mu^2$$

となる。以上より、

$$\mathrm{E}[\, x^2 \,] = \int_{-\infty}^{\infty} N(x \mid \mu,\ \sigma^2)\, x^2\, dx = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\cdots\ (\ 1.150\ )$$

が満たせた。