演習問題 2.03

この演習問題では、二項分布 (2.9) が正規化されていることを証明する。まず、全部で N 個ある対象から m 個の同じものを選ぶ組み合わせの数の定義 (2.10) を用いて、

$$\binom{N}{m} + \binom{N}{m-1} = \binom{N+1}{m}$$

… (2.262)

を示せ。この結果を用い、帰納法で次の結果を証明せよ。

$$(1 + x)^N = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} x^m$$

… (2.263)

これは、「 **二項定理** (binomial theorem) 」として知られ、すべての実数値 x について成り立つ。最後に、二項分布が次のように正規化されていることを、$(1 - \mu)^N$ を和の外に出してから、二項定理を用いることで示せ。

$$\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^m (1 - \mu)^{N-m} = 1$$

… (2.264)

[二項分布]

$$\mathrm{Bin}(m \mid N, \mu) = \binom{N}{m} \mu^m (1 - \mu)^{N-m}$$

… (2.9)

ただし、

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{(N - m)!\,m!}$$

… (2.10)

は総数 N 個の同じ対象から、m 個の対象を選ぶ場合の数である。ここで、

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{(N - m)!\,m!} = {}_N C_m$$

より、式 (2.9) は、以下のように書き直せる。

$$\mathrm{Bin}(m \mid N, \mu) = {}_N C_m\, \mu^m (1 - \mu)^{N-m}$$

… (2.9)′

[解]

まず、全部で N 個ある対象から m 個の同じものを選ぶ組み合わせの数の定義 (2.10) を用いて、式 (2.262) を示す。式 (2.262) の左辺より、

$$\text{式 (2.262) の左辺} = \binom{N}{m} + \binom{N}{m-1}$$

だから、ここで、組み合わせの数の定義（2.10）を用いて、

$$= \frac{N!}{(N-m)!m!} + \frac{N!}{\{N-(m-1)\}!(m-1)!}$$

$$= N!\left\{\frac{1}{(N-m)!m!} + \frac{1}{\{N-(m-1)\}!(m-1)!}\right\}$$

$$= N!\left\{\frac{1}{(N-m)!m!} + \frac{m}{\{(N+1)-m\}!\,m!}\right\}$$

$$= N!\left\{\frac{(N+1)-m}{\{(N+1)-m\}!\,m!} + \frac{m}{\{(N+1)-m\}!\,m!}\right\}$$

$$= N!\left\{\frac{N+1}{\{(N+1)-m\}!\,m!}\right\}$$

$$= \frac{(N+1)!}{\{(N+1)-m\}!\,m!}$$

$$= \binom{N+1}{m} = \text{式（2.262）の右辺}$$

となる。よって、式（2.262）が示せた。

次に、式（2.263）を、数学的帰納法を用いて証明する。

（i）$N = 0$ のとき、

$$\text{式（2.263）の左辺} = (1+x)^0 = 1$$

$$\text{式（2.263）の右辺} = \sum_{m=0}^{0}\binom{0}{m}x^m = \binom{0}{0}x^0 = \frac{0!}{(0-0)!0!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

となるので、式（2.263）は成立する。

（ii）$N = k$ のとき、式（2.263）が成立すると仮定すると、$N = k+1$ のとき、式（2.263）の左辺は、

$$\text{式（2.263）の左辺} = (1+x)^{k+1}$$
$$= (1+x)(1+x)^k$$

となり、仮定より、上記の式は、

$$= (1+x)\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m$$
$$= \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m + x\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m$$
$$= \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m + \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^{m+1}$$

と整理できる。ここで、式（2.262）を用いるために、上記の式の形を変形していくと、

$$= \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m-1} x^m + \sum_{m=1}^{k+1} \binom{k+1}{m-1} x^m$$

$$= x^0 + \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} x^m + \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m-1} x^m + x^{k+1}$$

$$= x^0 + \sum_{m=1}^{k} \left\{ \binom{k}{m} + \binom{k}{m-1} \right\} x^m + x^{k+1}$$

$$= x^0 + \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} x^m + x^{k+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} x^m$$

$=$ 式 (2.263) の右辺

となり、$N = k + 1$ のときも、式 (2.263) も成り立つ。

以上 (i) , (ii) より、任意の自然数 N について、式 (2.263) が成立することが証明された。

最後に、二項分布が正規化されていることを示す。式 (2.264) の左辺より、

$$\text{式 (2.264) の左辺} = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^m (1 - \mu)^{N-m}$$

$$= (1 - \mu)^N \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \mu^m (1 - \mu)^{-m}$$

$$= (1 - \mu)^N \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right)^m$$

と整理できる。ここで、式 (2.263) より、

$$= (1 - \mu)^N \left(1 + \frac{\mu}{1 - \mu} \right)^N$$

$$= (1 - \mu)^N \left(\frac{1}{1 - \mu} \right)^N$$

$$= 1$$

$=$ 式 (2.264) の右辺

となる。よって、二項分布が式 (2.264) のように正規化されていることが示せた。