演習問題 2.05

この演習問題では、ベータ分布 (2.13) が、式 (2.14) が成立するように、正しく正規化されていることを証明する。これは

$$\int_0^1 \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1} d\mu = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

… (2.265)

を示すことと等価である。ガンマ関数の定義 (1.141) より、

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \exp(-x)\, x^{a-1} dx \int_0^\infty \exp(-y)\, y^{b-1} dy$$

… (2.266)

を得る。この式を用いて、次のようにして式 (2.265) を証明せよ。まず、y についての積分を、x についての積分の被積分関数の中に移す。次に、x を固定して $t = y + x$ と置換し、x と t の積分の順序を交換する。最後に、t を固定して $x = t\mu$ と置換する。

[ベータ分布]

$$\mathrm{Beta}(\mu \mid a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1}$$

… (2.13)

$$\int_0^1 \mathrm{Beta}(\mu \mid a, b)\, du = 1$$

… (2.14)

[ガンマ関数]

階乗の概念を一般化した特殊関数である。ここで、x は任意の正実数である。

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty \mu^{x-1} e^{-u} du$$

… (1.141)

基本的性質として、ガンマ関数は、自然数 n について、

$$\Gamma(n+1) = n!$$

が成立する。また、非整数でのガンマ関数の値のうち、最も有名であるのは、ガウス積分になる $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ である。

[解]

式 (2.266) を用いて、式 (2.265) を証明する。式 (2.266) より、

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{b-1} dy$$

である。ここで、y についての積分を、x についての積分の被積分関数の中に移すと、

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} e^{-y} y^{b-1} dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{a-1} y^{b-1} dy\, dx$$

となり、x を固定して $t = y + x$ と置換すると、$\frac{dt}{dy} = 1$ より、上記の式は、

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} x^{a-1} (t - x)^{b-1} dt\, dx$$

と変数変換され、x と t の積分の順序を交換すると、

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} x^{a-1} (t - x)^{b-1} dx\, dt$$

となる。最後に、t を固定して $x = t\mu$ と置換すると、$\frac{dx}{d\mu} = t$ より、

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} (t\mu)^{a-1} (t - t\mu)^{b-1} t\, d\mu\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} \mu^{a-1} t^{b-1} (1 - \mu)^{b-1} t\, d\mu\, dt$$

$$= \int_0^\infty \mu^{a-1} (1 - \mu)^{b-1} d\mu \int_0^\infty t^{a-1} t^{b-1} dt$$

… ※

となる。ここで、ガンマ関数の定義 (1.41) より、

だから、式 ※ は、

$$= \int_0^\infty \mu^{a-1} (1 - \mu)^{b-1} d\mu\, \Gamma(a + b)$$

となる。以上より、

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = \int_0^\infty \mu^{a-1} (1 - \mu)^{b-1} d\mu\, \Gamma(a + b)$$

が示され、この両辺を $\Gamma(a + b)$ で割ると、

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)} = \int_0^\infty \mu^{a-1} (1 - \mu)^{b-1} d\mu$$

となり、またベータ分布では、μ は確率を表すパラメータなので、 $0 \leq \mu \leq 1$ の範囲をとることとなる。ゆえに、上記の式の積分区間は、以下のようになる。

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)} = \int_0^1 \mu^{a-1} (1 - \mu)^{b-1} d\mu$$

よって、式 (2.265) が示せた。

[ベータ分布の正規化条件]

$$\int_0^1 \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1}d\mu = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$\cdots$ (2.265)

これは、以下のように変形すると、ベータ分布の積分となる。

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1}d\mu = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1}d\mu = 1$$

$$\int_0^1 \mathrm{Beta}(\mu \mid a, b)\,d\mu = 1$$

$\cdots$ (2.265)$'$

このことから、$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ は、ベータ分布の正規化係数となっている。⇒ 演習問題 2.05 の証明より、係数 $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ がないと、ベータ分布が正規化されないことがわかる。