演習問題 1.12

式 (1.49) と式 (1.50) を用いて、

$$\mathrm{E}[\ x_n x_m\ ]\ =\ \mu^2\ +\ I_{nm}\,\sigma^2$$

… (1.130)

を示せ。ただし、x_n と x_m は、平均 μ 、分散 σ^2 のガウス分布から生成されたデータ点を表し、I_{nm} は $n = m$ のとき、$I_{nm} = 1$ であり、それ以外では、$I_{nm} = 0$ であるとする。これから式 (1.57) と式 (1.58) を証明せよ。

$$\mathrm{E}[\,x\,] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{N}(\,x\,|\,\mu\,,\sigma^2\,)\,x\,dx = \mu$$

… (1.49)

$$\mathrm{E}[\,x^2\,] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{N}(\,x\,|\,\mu\,,\sigma^2\,)\,x^2\,dx = \mu^2 + \sigma^2$$

… (1.50)

$$\mathrm{E}[\,\mu_{\mathrm{ML}}\,] = \mu$$

… (1.57)

$$\mathrm{E}[\,\sigma_{\mathrm{ML}}^2\,] = \left(\frac{N-1}{N}\right)\sigma^2$$

… (1.58)

また、証明には、以下の式も使用する。

$$\mu_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

… (1.55)

$$\sigma_{\mathrm{ML}}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\,x_n - \mu_{\mathrm{ML}}\,)^2$$

… (1.56)

$$\mathrm{E}[\,x + z\,] = \mathrm{E}[\,x\,] + \mathrm{E}[\,z\,]$$

… (1.128)

[解]

まず、式 (1.49) と式 (1.50) を用いて、式 (1.130) を証明する。

○ $n = m$ のとき

式 (1.130) の左辺は、

$$\mathrm{E}[\ x_n x_m\ ]\ =\ \mathrm{E}[\ x_n^2\ ]$$

となる。ここで、上記の式に、式 (1.50) を適用すると、

$$=\ \mu^2\ +\ \sigma^2$$

$n = m$ のとき、$I_{nm} = 1$ であるので、

$$= \mu^2 + I_{nm}\,\sigma^2$$

が示せた。

○ $n \neq m$ のとき

x_n と x_m は独立であるから、式 (1.130) の左辺は、

$$\mathrm{E}[\, x_n x_m \,] = \mathrm{E}[\, x_n \,]\,\mathrm{E}[\, x_m \,]$$

となる。ここで、上記の式に、式 (1.49) を適用すると、

$$= \mu \cdot \mu = \mu^2$$

$n \neq m$ のとき、$I_{nm} = 0$ であるので、

$$= \mu^2 + I_{nm}\,\sigma^2$$

以上から、

$$I_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるとき、式 (1.130) が示された。

次に、式 (1.57) を証明する。式 (1.57) の左辺は、式 (1.55) を用いて、

$$\mathrm{E}[\, \mu_{\mathrm{ML}} \,] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \right]$$

$$= \frac{1}{N}\,\mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N} x_n \right]$$

$$= \frac{1}{N}\,\mathrm{E}[\, x_1 + x_2 + \cdots + x_N \,]$$

式 (1.128) の変形により、

$$= \frac{1}{N} \{\, \mathrm{E}[\, x_1 \,] + \mathrm{E}[\, x_2 \,] + \cdots + \mathrm{E}[\, x_N \,] \,\}$$

と書き直せる。ここで、式 (1.49) より、

$$= \frac{1}{N} \cdot N \cdot \mu$$

$$= \mu$$

となる。以上より、式 (1.57) が示せた。

最後に、式 (1.58) を 証明する。式 (1.58) の左辺は、式 (1.55) , (1.56) を用いて、

$$\mathrm{E}[\, \sigma^2_{\mathrm{ML}} \,] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\, x_n - \mu_{\mathrm{ML}} \,)^2 \right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \left(x_n^2 - \frac{2}{N} x_n \sum_{n=1}^{N} x_n + \frac{1}{N^2} \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right) \right\} \right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \frac{2}{N^2} \sum_{n=1}^{N} x_n \sum_{n=1}^{N} x_n + \frac{1}{N^3} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{N} \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \right] - \frac{2}{N^2} \mathrm{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right] + \frac{1}{N^3} \mathrm{E}\left[N \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right]$$

… ※

と書き直せる。ここで、上記の式の各項を解いていく。第一項については、式（ 1.50 ）と式（ 1.128 ）より、

$$\frac{1}{N} \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \right] = \frac{1}{N} \mathrm{E}[\ x_1^2 + x_1^2 + \cdots + x_N^2\ ]$$

$$= \frac{1}{N} (\mathrm{E}[\ x_1^2\ ] + \mathrm{E}[\ x_2^2\ ] + \cdots + \mathrm{E}[\ x_N^2\ ]) = \frac{1}{N} \cdot N (\mu^2 + \sigma^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

となる。第二項については、

$$\frac{2}{N^2} \mathrm{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right]$$

$$= \frac{2}{N^2} \mathrm{E}[\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\ ]$$

$$= \frac{2}{N^2} \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N} x_n^2 + 2 \underbrace{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n + \cdots + x_{N-1} x_N)}_{\text{多項定理より、}{}_N C_2\ \text{個}} \right]$$

$$\left(= \frac{2}{N^2} \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N} x_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i x_j \right] \right)$$

$$\left(= \frac{2}{N^2} \left\{ \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \right] + 2\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i x_j \right] \right\} \right)$$

と整理でき、式（ 1.130 ）より、

$$= \frac{2}{N^2} \{ N (\mu^2 + \sigma^2) + 2 \cdot {}_N C_2 \, \mu^2 \}$$

$$= \frac{2}{N^2} \{ N (\mu^2 + \sigma^2) + 2 N (N - 1) \mu^2 \}$$

$$= \frac{2}{N} (N \sigma^2 - \sigma^2)$$

となる。第三項については、第二項と同じように整理でき、

$$\frac{1}{N^3} \mathrm{E}\left[N \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right] = \frac{1}{N^2} \mathrm{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right] = \frac{1}{N} (N \sigma^2 - \sigma^2)$$

となる。よって、式 ※ は、以下のように整理でき、

$$(※) = \mu^2 + \sigma^2 - \frac{2}{N} (N \sigma^2 - \sigma^2) + \frac{1}{N} (N \sigma^2 - \sigma^2)$$

$$= \frac{N - 1}{N} \sigma^2$$

となる。以上から、式 (1.58) が示せた。

[二項定理]

$(a + b)^n$ を展開したとき、$a^{n-r} b^r$ の係数は、${}_n C_r$ となる。ゆえに、一般項は ${}_n C_r \, a^{n-r} b^r$ となり、$r = 0 \sim n$ を満たす。展開式を全部記述すると、

$$(a + b)^n = {}_n C_0 \, a^n b^0 + {}_n C_1 \, a^{n-1} b^1 + {}_n C_2 \, a^{n-2} b^2 + \cdots$$
$$+ {}_n C_r \, a^{n-r} b^r + \cdots + {}_n C_{n-1} \, a^1 b^{n-1} + {}_n C_r \, a^0 b^n$$

となり、展開式をシグマ表記すると、

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n C_r \, a^{n-r} b^r$$

で表される。

[多項定理]

$(a + b + c)^n$ を展開したとき、$a^p b^q c^r$ の係数は、$\frac{n!}{p!q!r!}$ となる。ゆえに、一般項は

$\frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$ となり、$p + q + r = n, \ 0 \leq p, q, r \leq n$ を満たす。展開式をシグマ表記すると、

$$(a + b + c)^n = \sum_{\substack{p+q+r=n \\ 0 \leq p,\, q,\, r \leq n}} \frac{n!}{p!\,q!\,r!} a^p b^q c^r$$

で表される。