演習問題 2.07

μ の事前分布がベータ分布（ 2.13 ）である二項分布（ 2.9 ）に従う確率変数 x を考える。ここで、$x = 1$ の事象が m 回、$x = 0$ の事象が l 回生じたとする。このとき、μ の事後平均が、事前平均と μ の最尤推定量の間の値になることを示せ。これには、事前平均の λ 倍、最尤推定量の（ $1 - \lambda$ ）倍の和で、事後平均が書けることを示せばよい。ただし、$0 \leq \lambda \leq 1$ である。よって、事後分布が、事前分布と最尤推定解との間のものになることが分かる。

[二項分布]

$$\mathrm{Bin}(\,m \mid N,\ \mu\,) = \binom{N}{m} \mu^{m} (\,1 - \mu\,)^{N-m}$$

…（ 2.9 ）

ただし、

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{(\,N - m\,)!\,m!}$$

…（ 2.10 ）

は総数 N 個の同じ対象から、m 個の対象を選ぶ場合の数である。ここで、

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{(\,N - m\,)!\,m!} = {}_N C_m$$

より、式（ 2.9 ）は、以下のように書き直せる。

$$\mathrm{Bin}(\,m \mid N,\ \mu\,) = {}_N C_m\, \mu^{m} (\,1 - \mu\,)^{N-m}$$

…（ 2.9 ）′

[ベータ分布]

$$\mathrm{Beta}(\,\mu \mid a,\ b\,) = \frac{\Gamma(\,a + b\,)}{\Gamma(\,a\,)\,\Gamma(\,b\,)} \mu^{a-1} (\,1 - \mu\,)^{b-1}$$

…（ 2.13 ）

[ベータ分布の平均]

$$\mathrm{E}[\,\mu\,] = \frac{a}{a + b}$$

…（ 2.15 ）

[ベータ分布の事後平均]

$$p(\,x = 1 \mid \mathbf{D}\,) = \frac{m + a}{m + a + l + b}$$

…（ 2.20 ）

[解]

μ の事後平均が、事前平均と μ の最尤推定量の間の値になること、すなわち、事前平均の

λ 倍、最尤推定量の ($1 - \lambda$) 倍の和で、事後平均が書けることを示す。 μ の事前分布はベータ分布であるため、その事前平均は式 (2.15) より、

$$\text{事前平均} = \frac{a}{a + b}$$

となる。また、m, l に対する事後平均は

$$\text{事後平均} = \frac{m + a}{m + a + l + b}$$

となる。さらに、最尤推定量は、

$$\text{最尤推定量} = \frac{m}{m + l}$$

となる。題意より、事前平均の λ 倍、最尤推定量の ($1 - \lambda$) 倍の和で、事後平均を表すと、

$$\lambda \frac{a}{a + b} + (1 - \lambda) \frac{m}{m + l} = \frac{m + a}{m + a + l + b}$$

… ※

であるから、このときに λ の値が

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

… ※※

を満たすことを確認できれば、事後分布が、事前分布と最尤推定解との間のものになることが示されたことになる。式 ※ を λ について解くと、

$$\lambda \frac{a}{a + b} + (1 - \lambda) \frac{m}{m + l} = \frac{m + a}{m + a + l + b}$$

$$\lambda \frac{a}{a + b} - \lambda \frac{m}{m + l} = \frac{m + a}{m + a + l + b} - \frac{m}{m + l}$$

$$\lambda \left(\frac{a}{a + b} - \frac{m}{m + l} \right) = \frac{m + a}{m + a + l + b} - \frac{m}{m + l}$$

$$\lambda \frac{a (m + l) - m (a + b)}{(a + b) (m + l)} = \frac{(m + a) (m + l) - m (m + a + l + b)}{(m + a + l + b) (m + l)}$$

$$\frac{al - bm}{(a + b) (m + l)} \lambda = \frac{al - bm}{(m + a + l + b) (m + l)}$$

… ※※※

と整理できる。ここで、λ の係数について考慮する。

(i) $\frac{al - bm}{(a + b) (m + l)} = 0 \Leftrightarrow al = bm$ のとき、この場合は、右辺の値も 0 となるため、式 ※※※ は成立する。

（ii） $\frac{al-bm}{(a+b)(m+l)} \neq 0$ のとき、この場合は両辺を $\frac{al-bm}{(a+b)(m+l)}$ で割ることができ、

式 ※※※ は、

$$\lambda = \frac{a+b}{m+a+l+b}$$

となる。このとき、a, b, m, l はいずれも非負の値であるため、

$$0 \leq \frac{a+b}{m+a+l+b} \leq 1$$

となり、λ の値は範囲 ※※ を満たす。μ の事後平均が、事前平均と μ の最尤推定量の間の値になることを示されたので、事後分布が、事前分布と最尤推定解との間のものになることが判明した。