演習問題 1.18

D 次元の単位球の表面積 S_D 、体積 V_D を導くために、式 (1.126) を利用することができる。これにはまず、直交座標から極座標への変換から導かれる

$$\prod_{i=1}^{D}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2}\,dx_i = S_D\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{D-1}\,dr$$

… (1.142)

という事実を考える。ガンマ関数 (1.141) の定義と式 (1.126) から、この式の両辺を評価し、

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

… (1.143)

を示せ。次に、半径 0 から 1 まで積分し、D 次元単位球の体積が

$$V_D = \frac{S_D}{D}$$

… (1.144)

で与えられることを示せ。最後に、$\Gamma(1) = 1$ および $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ から、式 (1.143) と式 (1.144) が $D = 2$ および $D = 3$ の通常の表現に帰着されることを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)dx = (2\pi\sigma^2)^{1/2}$$

… (1.126)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u}\,du$$

… (1.141)

[解]

まず、ガンマ関数 (1.141) の定義と式 (1.126) から、式 (1.142) の両辺を評価し、式 (1.143) を示す。式 (1.142) の左辺は、式 (1.126) により、

$$\text{式 (1.142) の左辺} = \prod_{i=1}^{D}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2}\,dx_i = \prod_{i=1}^{D}\pi^{1/2} = \left(\pi^{1/2}\right)^D = \pi^{\frac{D}{2}}$$

となる。また、式 (1.142) の右辺は、$u = r^2$ と置くと、$\frac{du}{dr} = 2r$ より、

$$S_D\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{D-1}\,dr = S_D\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{D-2}\,r\,dr$$

$$= S_D\int_0^{\infty} e^{-r^2}(r^2)^{\frac{D-2}{2}}\,r\,dr$$

と変形してから、ここで、$r^2 = u$, $r\,dr = \frac{1}{2}du$ を代入し、

$$= \frac{1}{2} S_D \int_0^{\infty} e^{-r^2} u^{\frac{D-2}{2}} du$$

と置換できる。ここで、式（ 1.141 ）を適用し、

$$= \frac{1}{2} S_D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

と変形する。すると、式（ 1.142 ）の両辺は、

$$\pi^{\frac{D}{2}} = \frac{1}{2} S_D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

と書き直せるので、これを S_D について解くと、

$$S_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$$

が導かれる。よって、式（ 1.143 ）が示せた。

次に、半径 0 から 1 まで積分し、D 次元単位球の体積が式（ 1.144 ）で与えられることを示す。D 次元の単位球の V_D は次式によって求められる。

$$V_D = S_D \int_0^1 r^{D-1} dr$$

$$= S_D \left[\frac{1}{D} \cdot r^D \right]_0^1$$

$$= \frac{S_D}{D}$$

よって、式（ 1.144 ）が示せた。

最後に、$\Gamma(1) = 1$ および $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ から、式（ 1.143 ）と式（ 1.144 ）が $D = 2$ および $D = 3$ の通常の表現に帰着されることを示す。

（i） $D = 2$ のとき、

$$S_2 = \frac{2\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$V_2 = \frac{S_2}{2} = \pi$$

（ii） $D = 3$ のとき、

$$S_3 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 4\pi$$

$$V_3 = \frac{S_3}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

以上より、式（1.143）と式（1.144）が、$D = 2$ および $D = 3$ の通常の表現に帰着されることが示せた。