

João Oliveira

Apontamentos de
Estabilidade de Voo



Versão de 8 de Outubro de 2019

Imagen da capa: ©André Marta

Conteúdo

1 Conceitos introdutórios e notação	1
1.1 Equilíbrio e estabilidade	1
1.2 Referenciais e convenções	2
1.3 Características geométricas das asas	3
1.4 Resultantes das forças aerodinâmicas	5
1.5 Coeficiente de sustentação e ângulo de ataque	6
2 Equilíbrio, Estabilidade e Controlo Longitudinais	13
2.1 Voo de uma asa: equilíbrio e estabilidade	13
2.2 Sustentação e momento de picada de uma aeronave	18
2.3 Sustentação e momento de picada em função do ângulo de ataque	25
2.4 Equilíbrio, Estabilidade e Controlo Longitudinais	28
3 Estabilidade com Manche Livre e Forças de Controlo	35
3.1 Momento de charneira de superfície de controlo	35
3.2 Sustentação e momento de picada com manche livre	37
3.3 Compensadores e equilíbrio com manche livre	40
3.4 Equilíbrio com deflexão do compensador	41
3.5 Forças de Controlo	42
4 Efeitos de superfícies hiper-sustentadoras e da propulsão na estabilidade longitudinal	46
4.1 Influência de superfícies hiper-sustentadoras	46
4.2 Influência da propulsão no equilíbrio e na estabilidade	48
5 Estabilidade Lateral-Direccional	51
5.1 Estabilidade direccional	51
5.2 Estabilidade lateral	56
6 Equações do Movimento	68
6.1 Referenciais	68
6.2 Ângulos de Euler e matrizes de rotação	69
6.3 Equações de Euler	74
6.4 Rotores em movimento	76
6.5 Sistemas de eixos do corpo	76

7 Estados Estacionários e Manobras	80
7.1 Forças e momentos aplicados a uma aeronave	80
7.2 Estados estacionários longitudinais	84
7.3 Estados estacionários laterais	86
7.4 Manobras	88
7.5 Manobra de descida-subida simétrica	88
7.6 Manobra de Viragem Estacionária	93
8 Teoria para Pequenas Perturbações	99
8.1 Definição do estado estacionário	99
8.2 Linearização das equações	101
8.3 Forma geral das equações	105
9 Derivadas de Estabilidade	107
9.1 Relações entre derivadas de estabilidade dimensionais e adimensionais	107
9.2 Derivadas adimensionais relativas a movimento longitudinal	113
9.3 Derivadas relativas ao movimento lateral	121
10 Estabilidade Dinâmica Longitudinal	130
10.1 Introdução	130
10.2 Sistemas de equações diferenciais ordinárias de 1 ^a ordem	130
10.3 Modos longitudinais: características típicas	134
10.4 Modos longitudinais aproximados	143
10.5 Teoria Geral da Estabilidade Longitudinal Estática	149
10.6 Efeito da posição do centro de massa	150
10.7 Efeito do Vento nos Modos Longitudinais	152
10.8 Modos longitudinais em atmosferas estratificadas	155
11 Estabilidade Dinâmica Lateral	159
11.1 Modos laterais	159
11.2 Modos laterais aproximados	167
12 Resposta à Actuação de Controlo	173
12.1 Matrizes e vectores de controlo	173
12.2 Método das transformadas de Laplace	175
12.3 Resposta longitudinal	181
12.4 Resposta lateral	192
12.5 Resposta transiente a ailerons e rudder	198
13 Qualidades de Voo	204
13.1 Classificação de aeronaves e fases de voo	204
13.2 Níveis de qualidades de voo	204
13.3 Aplicação dos critérios a um Cessna 182	209
A Equilíbrio e estabilidade para configurações <i>canard</i>	210
A.1 Características das configurações <i>canard</i>	210
A.2 Equilíbrio e estabilidade	211
A.3 Condições de equilíbrio	214

B Outra Aproximação ao Modo fugoíde	216
B.1 Resposta ao Controlo	218
Bibliografia	220

Capítulo 1

Conceitos introdutórios e notação

1.1 Equilíbrio e estabilidade

O nosso objectivo será analisar estados de equilíbrio do voo de aeronaves de asa fixa e a sua estabilidade. Comecemos por recordar as noções de equilíbrio e estabilidade de um sistema.

Um sistema num estado de equilíbrio permanece nesse estado se não houver perturbações pela acção de forças ou momentos. Para que um sistema mecânico esteja em equilíbrio, a resultante das forças e a resultante dos momentos aplicados ao sistema devem ser nulos:

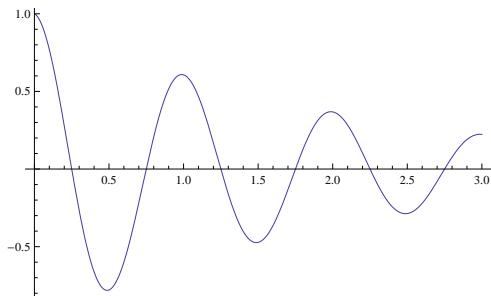
$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= 0 \\ \sum \vec{M} &= 0\end{aligned}$$

A estabilidade de um estado de equilíbrio pode ser estática ou dinâmica. Relativamente à estabilidade estática, um estado de equilíbrio é estável se o sistema voltar ao estado de equilíbrio após dele ser afastado; é instável se o sistema se continuar a afastar do estado de equilíbrio após o afastamento inicial; e é neutro se após um afastamento inicial, o sistema não tende nem a retornar ao equilíbrio nem a dele se afastar.

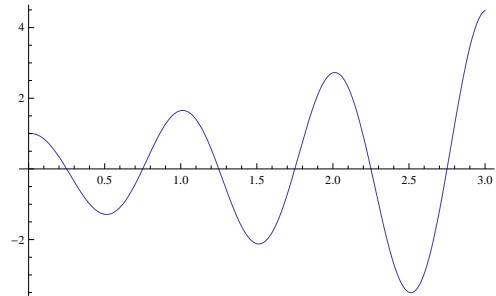
A estabilidade dinâmica diz respeito ao modo como o sistema evolui depois de afastado do estado de equilíbrio: um sistema dinamicamente estável tende assintoticamente para o estado de equilíbrio, enquanto que um sistema dinamicamente instável



Figura 1.1: Estabilidade estática do equilíbrio.



Equilíbrio dinamicamente estável



Equilíbrio dinamicamente instável

Figura 1.2: Estabilidade dinâmica do equilíbrio.

sofre oscilações com amplitude crescente ou afasta-se cada vez mais da posição de equilíbrio.

1.2 Referenciais e convenções

Para se poder analisar o movimento de uma aeronave é necessário definir os referenciais nos quais a análise será realizada. Considerar-se-á como referencial inercial um referencial ligado à Terra. Os efeitos de curvatura da Terra serão desprezados e a força gravítica terá sempre a direcção vertical.

Na figura 1.3 representa-se o referencial ligado à aeronave. Os eixos estão definidos de forma que Cxz é o plano de simetria. O eixo Cx , ao longo da fuselagem, aponta para o nariz da aeronave e Cz está dirigido «para baixo». Finalmente, o eixo Cy é perpendicular ao plano de simetria, formando triedro directo com os outros dois eixos.

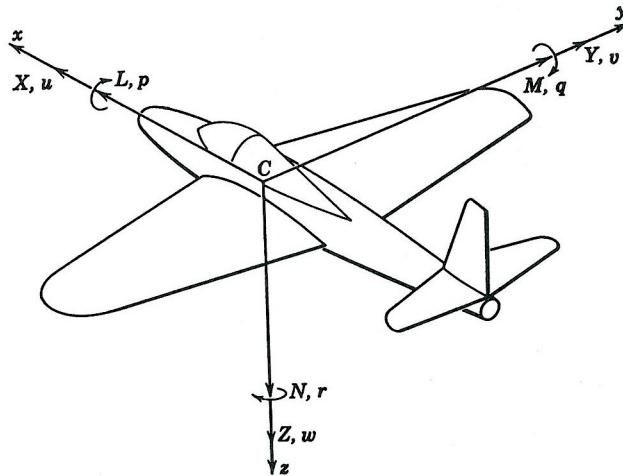


Figura 1.3: Sistema de eixos ligado à aeronave.(Fonte: [1]

As componentes segundo x, y, z da velocidade linear \vec{v} são designadas por $\vec{v} =$

(u, v, w) . As componentes da velocidade angular são $\vec{\omega} = (p, q, r)$. Assim, p é a velocidade angular de rolamento (*roll*), q é a velocidade angular de picada (*pitch*) e r é a velocidade angular de guinada (*yaw*).

Relativamente aos eixos da aeronave as componentes segundo x , y e z das forças aplicadas à aeronave serão designadas simplesmente por $\vec{F} = (X, Y, Z)$, enquanto que as componentes dos momentos são $\vec{M} = (L, M, N)$, sendo L o momento de rolamento, M : momento de picada e N o momento de guinada.

1.3 Características geométricas das asas

1.3.1 Perfil da asa

Uma das principais características de uma asa é o seu perfil, que pode ser simétrico ou ter curvatura.

No caso de um **perfil simétrico**, a linha média entre o intra dorso e o extra dorso da asa é um segmento de recta.

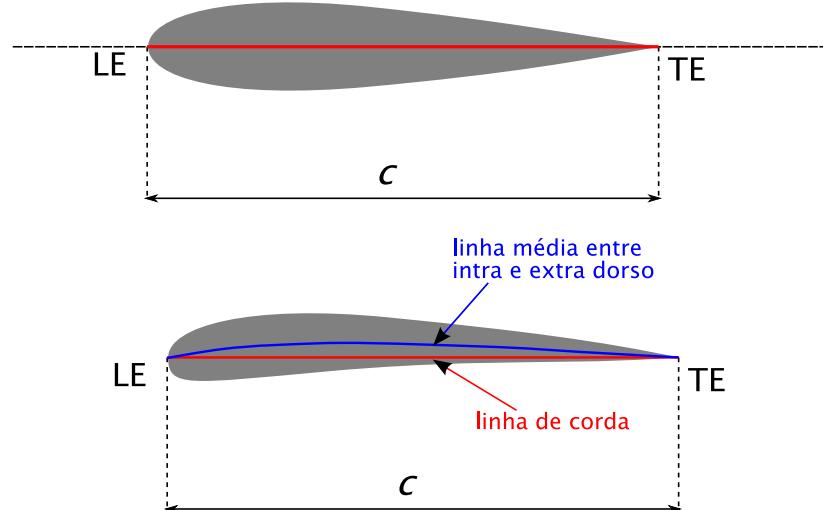


Figura 1.4: Perfil simétrico (em cima) e perfil com curvatura positiva (em baixo). Na figura, LE designa o bordo de ataque (*leading edge*) e TE o bordo de fuga (*trailing edge*).

Para uma asa com **perfil com curvatura**, a linha média entre o intra dorso e o extra dorso da asa é uma linha curva. A curvatura é positiva se a concavidade da linha média está para baixo, e é negativa no caso oposto.

1.3.2 Planta da asa

A envergadura b e a corda c definem-se para uma asa de planta rectangular como mostra a figura 1.5.

- c : corda (*chord*)

- b : envergadura (*span*)
- A : alongamento (*aspect ratio*)
- S : área da asa (em planta)

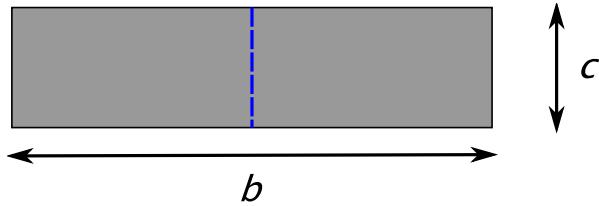


Figura 1.5: Envergadura b e corda c de uma asa de planta rectangular

O alongamento A pode ser definido por $A = b/c$, mas é preferível reescrever a expressão fazendo uso da área da asa S :

$$A = \frac{b^2}{S}. \quad (1.1)$$

Esta definição é válida também para asas não rectangulares.

No caso de uma asa com flecha, como aquela cuja planta está representada na figura 1.6, a corda pode variar ao longo da envergadura. A corda do bordo marginal (*tip chord*) é designada por c_t e a corda da raiz da asa (*root chord*) por c_r . A corda média \bar{c} é calculada a partir da variação $c(y)$ da corda ao longo da envergadura.

O ângulo de flecha (*sweep angle*) é designado por Λ e pode determinar-se para o bordo de ataque, o bordo de fuga, a meia corda ou a qualquer outra fracção da corda.

O afilamento λ (*taper ratio*) é definido por

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r}. \quad (1.2)$$

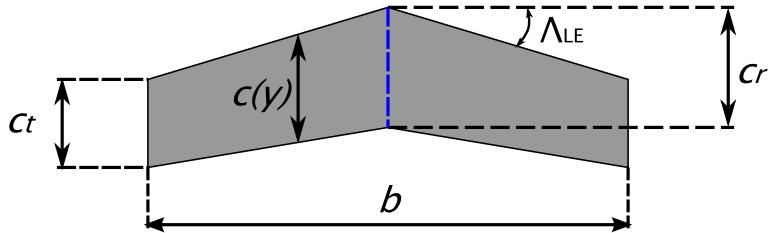


Figura 1.6: Asa de planta trapezoidal. Λ_{LE} é o ângulo de flecha do bordo de ataque (LE: *leading edge*), c_r é a corda da raiz da asa e c_t é a corda do bordo marginal da asa.

1.3.3 Ângulo de diedro

A figura 1.7 representa um avião com asas com ângulo de diedro Γ positivo.

Note-se que em inglês se usa *dihedral* para um ângulo de diedro positivo $\Gamma > 0$ e *anhedral* para um ângulo de diedro negativo $\Gamma < 0$.



Figura 1.7: Ângulo de diedro.

1.4 Resultantes das forças aerodinâmicas

Se existe um escoamento em torno da asa, produzem-se forças e momentos aerodinâmicos, que dependem de vários parâmetros. Um dos principais é o ângulo de ataque do escoamento.

1.4.1 Ângulo de ataque

O **ângulo de ataque**, representado na figura 1.8, é o ângulo entre a linha de referência e a direcção do escoamento incidente. É designado por α .

Podem definir-se vários ângulos de ataque, dependendo da linha de referência que se toma. Se a linha de referência é a linha de corda, temos o ângulo de ataque «geométrico» da asa. Também é frequentemente usada como referência a linha de sustentação nula da asa, definindo o ângulo de ataque «absoluto».

1.4.2 Sustentação, resistência aerodinâmica e momento de picada

As forças aerodinâmicas distribuem-se ao longo de todo o perfil. Este sistema de forças distribuídas é equivalente a uma força resultante e a um momento resultante (ver figura 1.9). Por conveniência, a força resultante é decomposta em duas direcções perpendiculares: a componente na direcção da velocidade do escoamento é a resistência aerodinâmica (*drag*, D), a componente perpendicular à velocidade é a sustentação (*lift*, L).

O centro de pressões é o ponto relativamente ao qual o sistema de forças aerodinâmicas é equivalente apenas a sustentação + resistência, não havendo momento resultante. No entanto, o centro de pressões não é um ponto fixo, depende do escoamento em torno do perfil alar. Em particular, a posição do centro de pressões desloca-se para o bordo de ataque da asa à medida que o ângulo de ataque aumenta (ver figura 1.10). A utilização prática do centro de pressões fica deste modo comprometida porque é

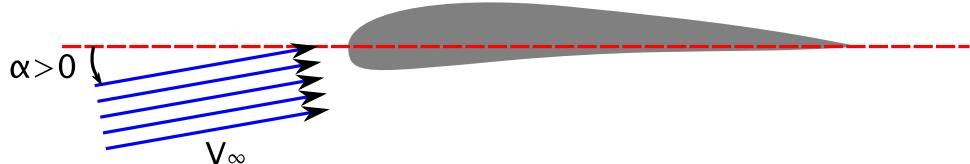
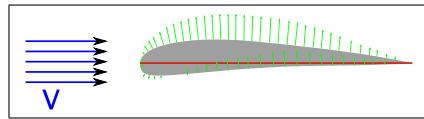
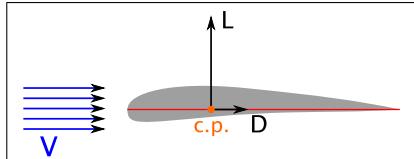


Figura 1.8: Ângulo de ataque

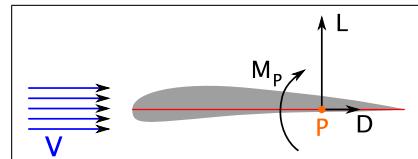


é equivalente a



L e D aplicados no centro de pressões (c.p.)

OU



L , D e M_P aplicados no ponto P (arbitrário)

Figura 1.9: As forças aerodinâmicas são equivalentes a resultante ou a resultante + momento

necessário calcular a sua posição sempre que se altera o ângulo de ataque da asa, o que é deveras inconveniente.

1.4.3 Centro aerodinâmico

De acordo com a teoria aerodinâmica de asas delgadas, existe um ponto fixo relativamente ao qual o momento de picada M não depende do ângulo de ataque, e que se encontra a $1/4$ de corda. A esse ponto dá-se o nome de **centro aerodinâmico**. Numa asa real o centro aerodinâmico não se encontra habitualmente no ponto $x_{ac} = \bar{c}/4$. Porém, esta é uma boa aproximação em muitos casos.

O momento de picada relativamente ao centro aerodinâmico, M_{ac} , é constante, ou seja, é independente do ângulo de ataque. O seu valor depende da curvatura do perfil. Para um perfil simétrico, $M_{ac} = 0$; para um perfil com curvatura positiva, $M_{ac} < 0$; e para um perfil com curvatura negativa, $M_{ac} > 0$.

Podemos finalmente concluir que as forças aerodinâmicas aplicadas numa asa são equivalentes a uma força resultante aplicada no centro aerodinâmico, decomposta em sustentação L (perpendicular à velocidade) e resistência aerodinâmica D (na direcção da velocidade), e um momento de picada M_{ac_w} relativamente ao C.A. (ver figura 1.11).

1.5 Coeficiente de sustentação e ângulo de ataque

1.5.1 Coeficiente de sustentação de perfis

Para um escoamento de um fluido com massa volúmica ρ e velocidade V , a pressão dinâmica define-se como:

$$p_d = \frac{1}{2} \rho V^2. \quad (1.3)$$

Verifica-se experimentalmente que a sustentação e a resistência aerodinâmica de uma asa são (aproximadamente) proporcionais à pressão dinâmica e à área da asa. Os

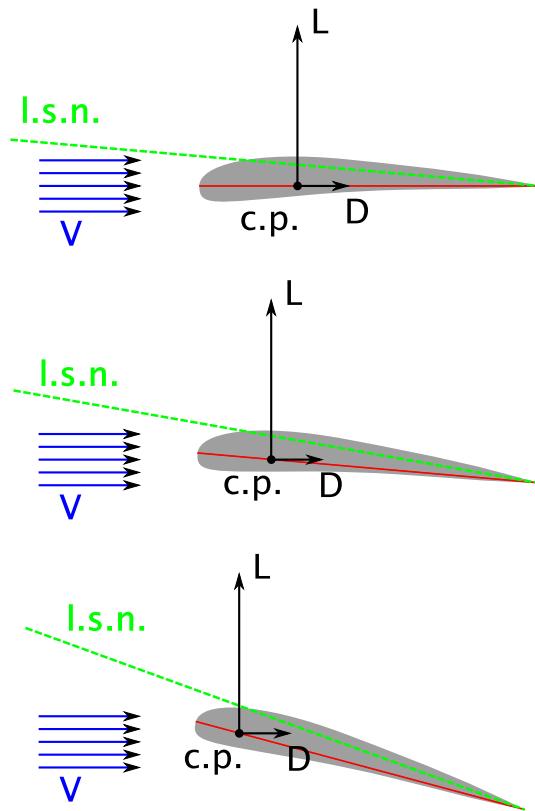


Figura 1.10: O centro de pressões desloca-se para o bordo de ataque à medida que aumenta o ângulo de ataque. Nota: O aumento de L e D com α não está representado.

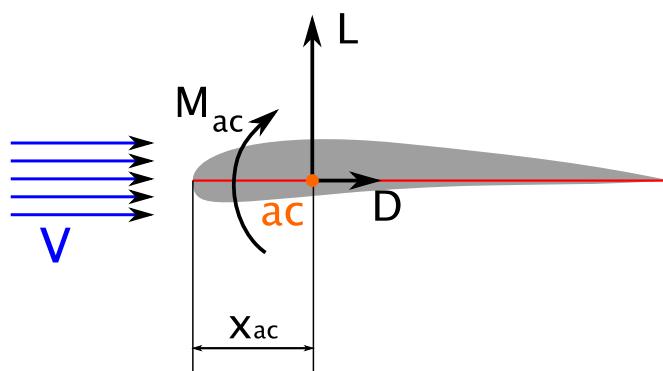


Figura 1.11: Centro aerodinâmico

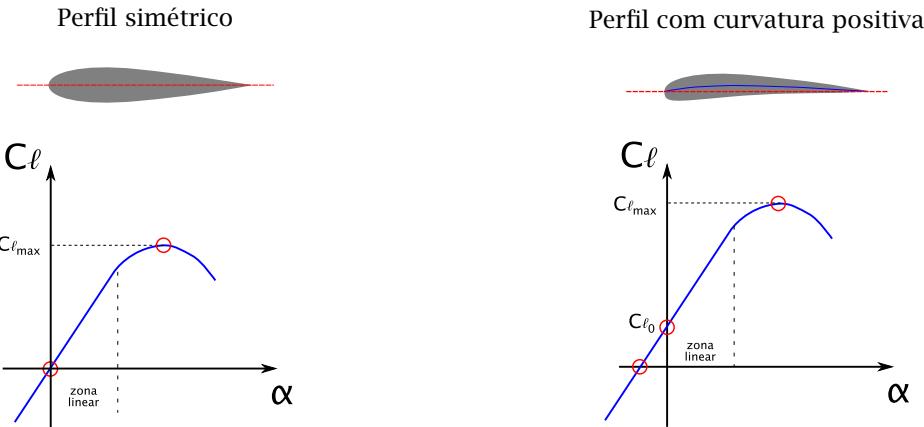


Figura 1.12: Variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque.

outros factores, tais como a geometria da asa (perfil e planta) e o ângulo de ataque, podem ser incluídos num coeficiente adimensional. Definimos coeficiente de sustentação e coeficiente da resistência aerodinâmica como:

$$C_L = \frac{L}{p_d S} = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \quad (1.4)$$

$$C_D = \frac{D}{p_d S} = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \quad (1.5)$$

Habitualmente, convém distinguir os efeitos devidos ao perfil (o que equivale a considerar uma asa de envergadura infinita, em que o escoamento pode ser considerado bidimensional) dos efeitos devidos ao alongamento, forma da asa, etc. Usaremos para isso a notação L e C_L para a sustentação e respectivo coeficiente adimensional para asas finitas e ℓ e C_ℓ para os casos correspondentes a perfis («asas infinitas»). Note-se que C_ℓ se define como

$$C_\ell = \frac{\ell}{\frac{1}{2}\rho V^2 c}.$$

A figura 1.12 mostra a variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque, para asas com perfil simétrico e com curvatura positiva. A forma das curvas é semelhante, mas os valores de $C_{\ell_{\max}}$ e de $C_{\ell_0} = C_\ell(\alpha = 0)$ são diferentes.

Na figura 1.13 mostra-se o efeito da curvatura do perfil na curva C_ℓ vs. α . A forma das curvas é semelhante, sofrendo uma translação para cima quando a curvatura aumenta. Por isso, quanto maior for a curvatura do perfil, maior é o valor de $C_{\ell_{\max}}$ e de $C_{\ell_0} = C_\ell(\alpha = 0)$. As asas com curvatura positiva permitem ter sustentação com ângulos de ataque nulos.

Após atingir o valor $C_{\ell_{\max}}$, se o ângulo de ataque α continuar a aumentar, o coeficiente de sustentação diminui: a asa entra em perda. Habitualmente vamos estar interessados em que o ângulo de ataque esteja dentro da zona de variação linear do C_ℓ com α , bem longe da zona de perda.

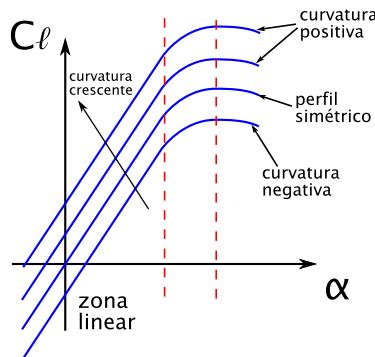


Figura 1.13: Efeito da curvatura do perfil na curva C_ℓ vs. α

O declive da curva do C_ℓ em função do ângulo de ataque, constante na zona linear, é designada por C_{ℓ_α} :

$$C_{\ell_\alpha} = \frac{\partial C_\ell}{\partial \alpha}.$$

De acordo com a teoria de perfis delgados, tem um valor bem determinado: $C_{\ell_\alpha} = 2\pi \text{ rad}^{-1} \approx 0.1097/\text{º}$. Esta aproximação permite ter uma ideia dos valores típicos do C_{ℓ_α} , mas para perfis reais é necessário usar teorias mais exactas.

Em primeira aproximação pode afirmar-se que a sustentação de um perfil é causada pela vorticidade do escoamento em torno do perfil (figura 1.14). Se uma aeronave está inicialmente em repouso num fluido ideal, a vorticidade total é nula. Quando a aeronave começa a voar, forma-se um vórtice que permanece ligado à asa e que provoca sustentação e é libertado um outro vórtice, de vorticidade oposta, de modo que a vorticidade total se mantenha nula, como representado na figura 1.15. Note-se que a jusante da asa o escoamento é deflectido verticalmente para baixo (*downwash*), como consequência do vórtice ligado e portanto do aparecimento da sustentação. O *downwash* será tanto maior quanto maior for a sustentação criada.

1.5.2 Coeficiente de sustentação de asas finitas

Numa asa infinita o escoamento pode ser considerado bidimensional e a única coisa que interessa é o perfil. Numa aeronave real a asa é finita e perto do bordo marginal da asa o escoamento torna-se tridimensional. Como a pressão é superior na parte inferior da asa, o ar tende a deslocar-se da parte inferior para a parte superior e forma-se um vórtice do bordo marginal. Este vórtice cria na asa um campo de velocidades verticais para baixo que tem como efeito uma diminuição do ângulo de ataque efectivo na asa, levando a uma diminuição da sustentação e também a uma diminuição do declive da curva do coeficiente de sustentação vs. α .

A importância dos efeitos tridimensionais é tanto maior quanto menor for o alongamento da asa. Entre os declives das curvas do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque para asas finitas (C_{L_α}) e para perfis ou asas infinitas (C_{ℓ_α}) verifica-se que:

- $C_{L_\alpha} < C_{\ell_\alpha}$
- C_{L_α} decresce mais para A menores

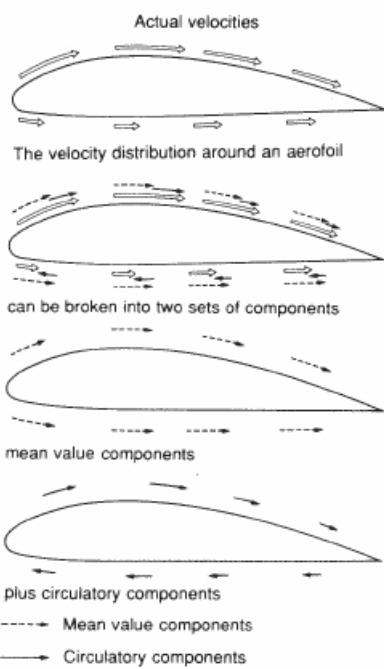


Figura 1.14: A sustentação de um perfil é causada pela vorticidade do escoamento em torno do perfil. Fonte: *Aircraft Flight*, Barnard & Philpott

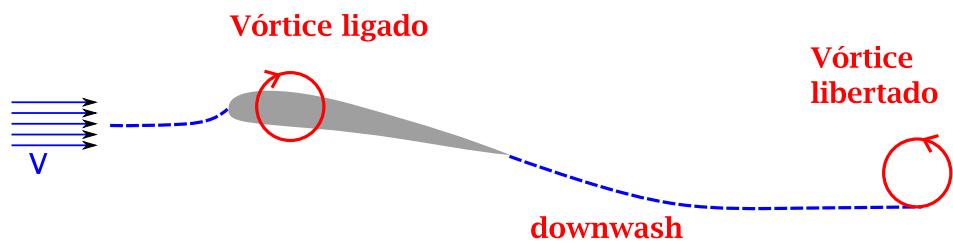


Figura 1.15: Vórtice ligado, vórtice libertado e *downwash*

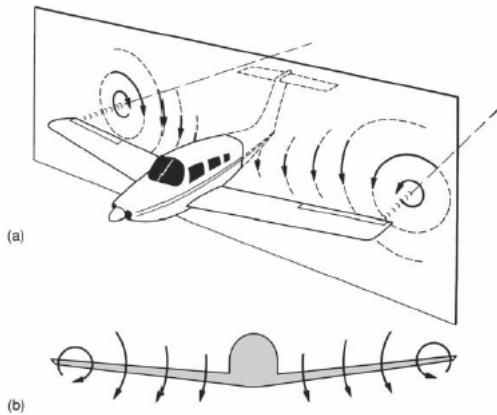


Figura 1.16: Vórtice do bordo marginal. Fonte: *Aircraft Flight*, Barnard & Philpott

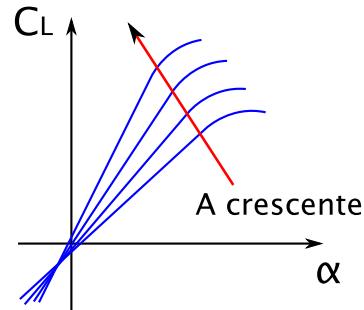


Figura 1.17: Variação do C_L com α para asas com o mesmo perfil e alongamentos diferentes

A figura 1.17 exemplifica a variação do coeficiente de sustentação para asas com o mesmo perfil mas com alongamentos diferentes. É possível estabelecer relações mais explícitas entre C_{L_α} e C_{l_α} em muitas situações. O caso mais simples é o de uma distribuição elíptica de sustentação, em que

$$C_{L_\alpha} = C_{l_\alpha} \frac{A}{A + 2} \quad (1.6)$$

Na zona de linearidade com α , o coeficiente de sustentação é dado por

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha \quad (1.7)$$

O coeficiente de resistência aerodinâmica (*drag*) pode ser dado através da polar:

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} \quad (1.8)$$

$$C_{D_i} = \frac{1}{\pi e A} C_L^2 \quad (\text{coeficiente de resistência induzida}) \quad (1.9)$$

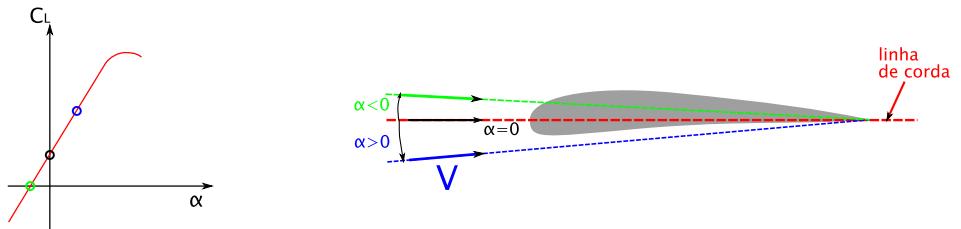


Figura 1.18: Ângulo de ataque em relação à linha de corda

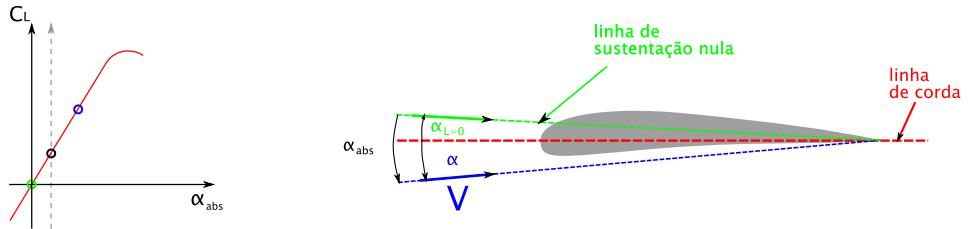


Figura 1.19: Ângulo de ataque absoluto: medido em relação à linha de sustentação nula

1.5.3 Ângulo de ataque absoluto

Na relação (1.7), exemplificada na figura 1.18, aparece o coeficiente de sustentação para ângulo de ataque nulo, C_{L_0} . Normalmente é conveniente medir os ângulos de ataque em relação à linha de sustentação nula (l. s. n.), que é direcção do escoamento correspondente ao ângulo de ataque que torna a sustentação nula ($C_L = 0$), com o se exemplifica na figura 1.19. Nesse caso, temos:

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha \quad (1.10)$$

$$\alpha_{L=0} = -\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} \quad (1.11)$$

$$\alpha_{abs} = \alpha - \alpha_{L=0} \quad (1.12)$$

$$\alpha_{abs} = \alpha + \frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} \quad (1.13)$$

Os ângulo de ataque medidos relativamente à linha de sustentação nula são chamados ângulos de ataque absolutos, α_{abs} , relativamente aos quais se tem simplesmente:

$$C_L = C_{L_\alpha} \alpha_{abs} \quad (1.14)$$

Note-se que o declive C_{L_α} não se altera, porque apenas foi feita uma mudança de origem da curva.

Capítulo 2

Equilíbrio, Estabilidade e Controlo Longitudinais

Neste capítulo pretendem-se estabelecer as condições de equilíbrio e estabilidade para uma aeronave em voo rectilíneo. Trataremos apenas do equilíbrio e da estabilidade longitudinais, isto é, relativos aos movimentos em que a aeronave se mantém no seu plano de simetria. O equilíbrio e estabilidade laterais serão tratados noutra capítulo.

2.1 Voo de uma asa: equilíbrio e estabilidade

Vamos considerar o caso simples de um voo rectilíneo horizontal ($p = q = r = 0$), com velocidade constante ($\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$), e sem derrapagem ($\nu = 0$) de uma asa com perfil com curvatura positiva e sem torção.

2.1.1 Equilíbrio de uma asa voadora

As condições de equilíbrio a verificar são, no referencial da asa,

$$\sum \vec{F} = m \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum \vec{M}_G = \left(\frac{d\vec{H}_G}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{H}_G \right) = 0 \quad (2.2)$$

Supomos que a asa dispõe de um sistema de propulsão que lhe permite vencer a resistência aerodinâmica. Em seguida começaremos por determinar que forças e momentos aerodinâmicos estão aplicados na asa.

Forças aerodinâmicas

As forças e momentos aerodinâmicos aplicados à asa voadora que se desloca com velocidade V com um ângulo de ataque α_w (medido relativamente à sua linha de sustentação nula) estão representados na figura 2.1, onde L designa a sustentação, D a resistência aerodinâmica e M_{ac} o momento de picada relativo ao centro aerodinâmico.

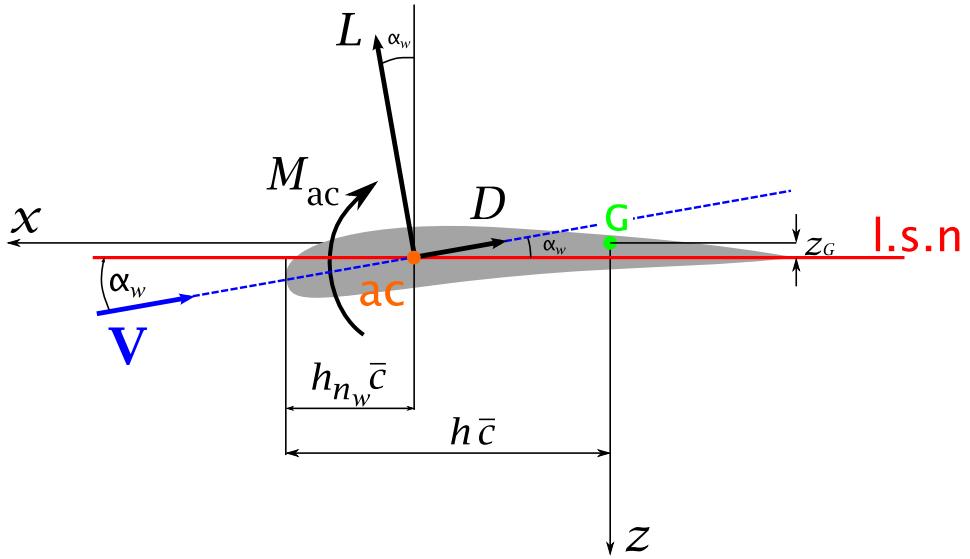


Figura 2.1: Forças e momentos aerodinâmicos aplicados numa asa em voo com velocidade V e ângulo de ataque α_w .

A distância (na direcção x) entre o bordo de ataque da asa e o centro de massa é representada por $h\bar{c}$. Dito doutro modo, h é a distância entre o bordo de ataque da asa e o centro de massa, adimensionalizado pela corda média \bar{c} . A distância (na direcção x) entre o bordo de ataque da asa e o seu centro aerodinâmico, adimensionalizado pela corda média \bar{c} , é representada por $h_{n_w}\bar{c}$.

Para além das forças aerodinâmicas, estão também aplicadas à asa a força de propulsão, cuja linha de acção admitimos ser Gx , e o peso, cuja linha de acção é vertical.

Para pequenos ângulos de ataque α são válidas as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &\approx 1 \\ \sin \alpha &\approx \alpha\end{aligned}$$

Estas aproximações são válidas se $\alpha^2 \ll 1$, com α em radianos. Note-se que $0.3 \text{ rad} \approx 17^\circ$, pelo que esta aproximação é razoável para a maioria dos casos de interesse.

A componente segundo x das forças aerodinâmicas é, pela figura 2.1,

$$(F_A)_x = L \sin \alpha_w - D \cos \alpha_w \approx L\alpha_w - D. \quad (2.3)$$

Supomos que a força de propulsão T é a necessária para garantir o equilíbrio na direcção Cx :

$$T = D \cos \alpha_w - L \sin \alpha_w \approx D - L\alpha_w. \quad (2.4)$$

Uma vez que a força de propulsão é determinada pelo piloto, esta condição pode ser sempre verificada.

A componente segundo z das forças aerodinâmicas é

$$(F_A)_z = L \cos \alpha_w + D \sin \alpha_w. \quad (2.5)$$

Para ângulos de ataque pequenos ($\alpha^2 \ll 1$) e admitindo que, como se verifica habitualmente, a resistência aerodinâmica é muito menor que a sustentação, podemos supor

que $L \cos \alpha_w \gg D \sin \alpha_w$. A condição de equilíbrio para as forças segundo Gz é, para voo rectilíneo horizontal,

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow W = L \cos \alpha_w + D \sin \alpha_w \approx L. \quad (2.6)$$

Concluímos que, de forma aproximada, para haver equilíbrio

$$L = W. \quad (2.7)$$

Em voo rectilíneo horizontal a sustentação tem de igualar o peso da aeronave.

Momento de picada relativamente ao centro de massa

O momento de picada relativamente ao centro de massa é dado por

$$M_G = M_{acw} + (h\bar{c} - h_{n_w}\bar{c}) [L \cos \alpha_w + D \sin \alpha_w] + z_G [L \sin \alpha_w - D \cos \alpha_w] \quad (2.8)$$

Para pequenos valores do ângulo de ataque α ,

$$M_G = M_{acw} + (h\bar{c} - h_{n_w}\bar{c}) [L + D\alpha_w] + z_G [L\alpha_w - D] \quad (2.9)$$

Usando os coeficientes de sustentação (1.4) e de resistência aerodinâmica (1.5),

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S},$$

e definindo o coeficiente do momento de picada relativamente ao centro de massa como

$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c}}, \quad (2.10)$$

obtemos, para pequenos ângulos α_w

$$C_m = C_{m_{acw}} + (h - h_{n_w}) C_{L_w} + \frac{z_G}{\bar{c}} [C_{L_w} \alpha_w - C_{D_w}] \quad (2.11)$$

Supondo agora que o centro de massa da asa voadora se encontra aproximadamente no eixo x , ou seja, que $(z_G/\bar{c}) \ll 1$, e, tendo em conta que α_w é pequeno e que habitualmente em voo de cruzeiro $C_{D_w} \ll C_{L_w}$, o último termo pode ser desprezado face aos outros dois. Obtemos então

$$C_{m_w} = C_{m_{acw}} + (h - h_{n_w}) C_{L_w} \quad (2.12)$$

Sustentação e velocidade de equilíbrio

A condição (2.7) de equilíbrio para as forças segundo z permite encontrar um valor para o coeficiente de sustentação que garante esse equilíbrio se a asa voar a uma velocidade V :

$$L = W \Rightarrow C_{L_w} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}. \quad (2.13)$$

No caso do momento de picada, a condição de equilíbrio é $M = 0 \Rightarrow C_m = 0$, pelo que

$$C_{m_w} = C_{m_{acw}} + (h - h_{n_w}) C_{L_w} = 0. \quad (2.14)$$

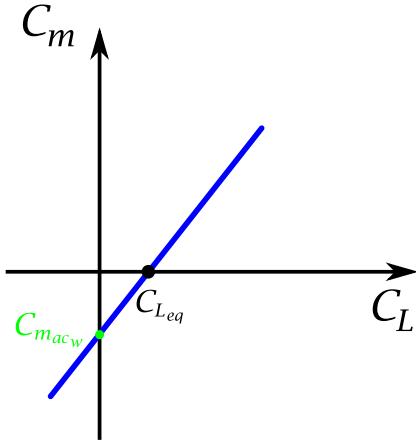


Figura 2.2: Variação de C_m com C_L

Dado que $C_L > 0$ e que, para asas com curvatura positiva, $C_{m_{ac_w}} < 0$, é sempre possível encontrar um valor de C_{L_w} que garante o equilíbrio do momento de picada. Esse valor de equilíbrio é:

$$C_{L_{eq}} = \frac{-C_{m_{ac_w}}}{(h - h_{n_w})},$$

e está representado na figura 2.2. A este valor $C_{L_{eq}}$ corresponde uma velocidade de equilíbrio determinada a partir da definição de C_{L_w} :

$$V_{eq} = \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2}\rho C_{L_{eq}} S}} = \sqrt{\frac{-W(h - h_{n_w})}{\frac{1}{2}C_{m_{ac_w}}\rho S}}. \quad (2.15)$$

Na equação (2.15) os parâmetros que estão fixos em cada situação de voo são W , h_{n_w} , $C_{m_{ac_w}}$, ρ e S . O único parâmetro que é fácil modificar é a posição do centro de massa, h . Logo, na ausência de leme de profundidade ou superfícies de controlo equivalentes, V_{eq} fica determinada por h (posição do CM)!

2.1.2 Estabilidade do ponto de equilíbrio

A variação de C_m com C_L é linear, como mostra a equação (2.12) e o ponto de equilíbrio é aquele para o qual $C_m = 0$. Dado que o coeficiente de sustentação depende do ângulo de ataque, o coeficiente do momento vai também depender de α_w . Na zona de linearidade, $C_{L_w} = C_{L_{\alpha_w}}\alpha_w \Rightarrow C_m = C_{m_{ac_w}} + C_{L_{\alpha_w}}(h - h_{n_w})\alpha_w$, como se representa na figura 2.3. O valor de α_{eq} é o que garante $C_m = 0$, e este valor por sua vez, determina $C_{L_{eq}}$.

Para verificarmos se este ponto de equilíbrio é estável, vejamos o que acontece se por alguma razão o ângulo de ataque for ligeiramente aumentado relativamente a α_{eq} . Como se pode verificar pela figura 2.4, se existir uma perturbação no voo que fizer α aumentar, o coeficiente de sustentação C_L aumentará também, o que leva a uma resultante não nula na vertical, conduzindo a uma aceleração vertical para cima. Esta aceleração faz aparecer uma componente vertical da velocidade da asa, para cima, que provoca uma diminuição do ângulo de ataque, o qual, por sua vez, implica uma

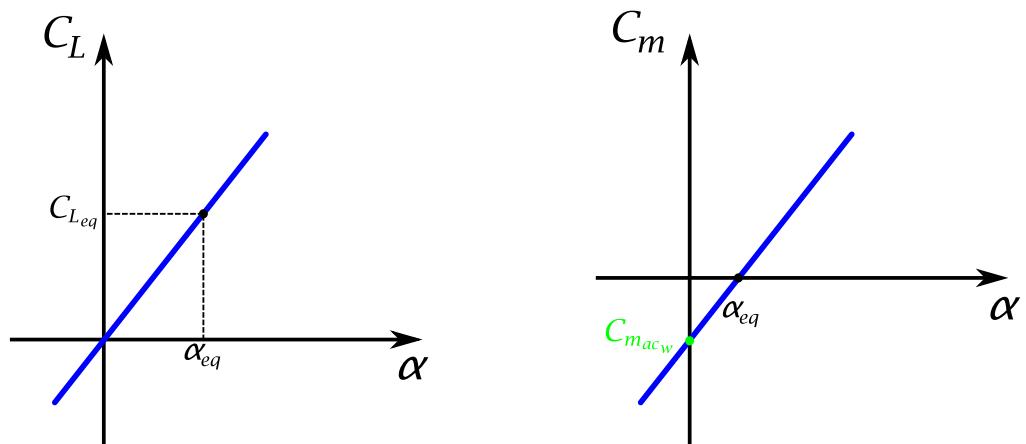


Figura 2.3: Variação de C_L (esquerda) e C_m (direita) com α_w

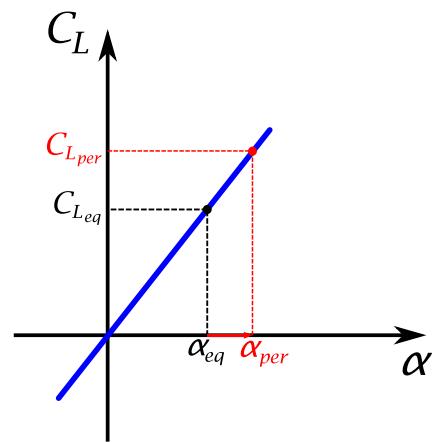


Figura 2.4: Efeito da variação de α no C_L .

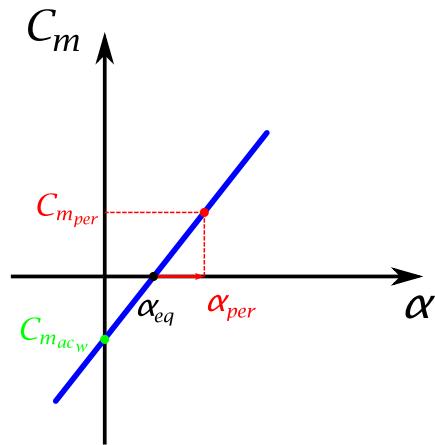


Figura 2.5: Efeito da variação de α no C_m .

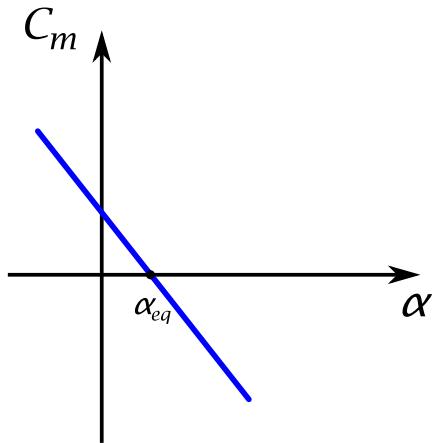


Figura 2.6: Forma da variação de C_m com α desejável para se conseguir um voo em equilíbrio estável.

diminuição do C_L e um retorno à situação inicial. Uma situação em tudo semelhante, mas com os sentidos invertidos, aconteceria se a perturbação no voo fizesse diminuir o ângulo de ataque. Conclui-se que, relativamente ao movimento na direcção vertical, o voo é estável. (Uma análise mais pormenorizada será feita quando tratarmos da estabilidade dinâmica e, em particular, do modo de período curto).

Na figura 2.5 representa-se o efeito sobre o momento de picada de um aumento do ângulo de ataque. Verifica-se que um aumento de α leva a um aumento de C_m , o que conduz a uma aceleração angular de picada $\dot{q} > 0$ e portanto ao aparecimento de uma velocidade angular de picada $q > 0$, de modo que o bordo de ataque da asa levanta; isto leva a um aumento ainda maior de α , que por sua vez faz C_m aumentar ainda mais e o bordo de ataque levantar ainda mais etc. Produz-se um afastamento da situação inicial, pelo que se conclui que o equilíbrio não é estável relativamente ao momento de picada. Chegar-se-ia à mesma conclusão se inicialmente se admitisse uma diminuição do ângulo de ataque.

Em resumo, conclui-se que uma asa pode voar em equilíbrio, mas esse equilíbrio não é estável. Para se ter um ponto de equilíbrio estável a configuração projectada deve conduzir a uma variação do C_m com α como mostrado na figura 2.6, cortando o eixo dos α de modo a garantir o equilíbrio e com um declive negativo de modo a garantir estabilidade. O valor de C_m para $\alpha = 0$ terá então de ser positivo. A maneira mais frequente de conseguir uma variação deste tipo é acrescentar um estabilizador horizontal, e é este tipo de configuração que analisaremos em seguida.

Note-se, finalmente, que é possível projectar asas voadoras, mas é necessário nesse caso usar asas com perfil, flecha e torção não habituais na maioria das aeronaves convencionais.

2.2 Sustentação e momento de picada de uma aeronave

Vimos que uma asa voadora pode voar em equilíbrio, mas esse equilíbrio não é estável. Uma maneira de resolver este problema é acoplar um estabilizador horizontal à asa. Nas configurações convencionais a asa e o estabilizador estão ligados a uma

fuselagem, e o sistema de propulsão pode estar ligado à asa ou à fuselagem.

Note-se que, por enquanto, não nos vamos preocupar com o controlo da velocidade de equilíbrio, que se consegue com um leme de profundidade (*elevator*).

O equilíbrio do voo e a sua estabilidade dependem da sustentação e do momento de picada da aeronave. Por isso, começaremos por determinar as contribuições devidas à asa+fuselagem, ao sistema de propulsão e ao estabilizador horizontal separadamente e usaremos os índices *wb* (de *wing-body*), *P* (de propulsão) e *t* (de *tail*) para indicar as respectivas contribuições.

2.2.1 Contribuição da asa + fuselagem

Os escoamentos em torno da asa e da fuselagem interferem mutuamente. No entanto, a contribuição da asa para a sustentação e o momento de picada é (de longe) a mais importante. Por isso podemos admitir que a contribuição da asa+fuselagem para a sustentação e o momento de picada é semelhante à da asa, variando apenas a posição do centro aerodinâmico, o momento de picada relativamente ao CA e o declive da curva C_L vs. α :

- $h_{n_{wb}} < h_{n_w} \approx 0.25$,
- $C_{L_{\alpha_{wb}}} < C_{L_{\alpha_w}}$,
- $C_{m_{acwb}} < C_{m_{acw}} < 0$.

Para simplificar a escrita vamos usar a seguinte notação para o declive da curva C_L vs. α :

$$\alpha \equiv C_{L_\alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}. \quad (2.16)$$

Por exemplo, $\alpha_w = C_{L_{\alpha_w}}$ e $\alpha_{wb} = C_{L_{\alpha_{wb}}}$.

Como referido acima, admite-se que o coeficiente do momento de picada relativamente ao centro de massa da aeronave tem a mesma forma da contribuição da asa:

$$C_{m_{wb}} = C_{m_{acwb}} + (h - h_{n_{wb}})C_{L_{wb}}. \quad (2.17)$$

Na zona de linearidade de C_L com α podemos escrever

$$C_{L_{wb}} = \alpha_{wb}\alpha_{wb}, \quad (2.18)$$

$$C_{m_{wb}} = C_{m_{acwb}} + (h - h_{n_{wb}})\alpha_{wb}\alpha_{wb}. \quad (2.19)$$

Note-se que α_{wb} é medido relativamente à linha de sustentação nula da asa+fuselagem, que não é a mesma que a linha de sustentação nula apenas da asa.

2.2.2 Contribuição do sistema propulsivo

O sistema propulsivo contribui para o momento de picada quer pelo momento criado pelas forças de propulsão, que é nulo se a linha de propulsão passa pelo CM, quer pela interação aerodinâmica (perturbação no escoamento causada pela propulsão). Dada a grande variedade de sistemas de propulsão, é difícil encontrar expressões gerais. Por isso, admitindo que a linha de propulsão passa pelo centro de massa, sempre que seja necessário pode-se incluir um termo

$$C_{m_P} = \overline{(C_{m_P})_0} + (C_{m_P})_\alpha \alpha_{wb}. \quad (2.20)$$

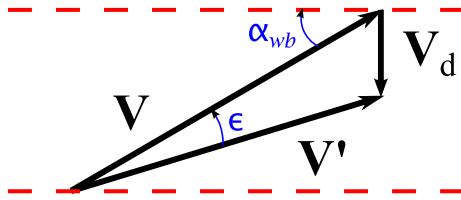


Figura 2.7: Efeito do downwash na velocidade do escoamento incidente no estabilizador

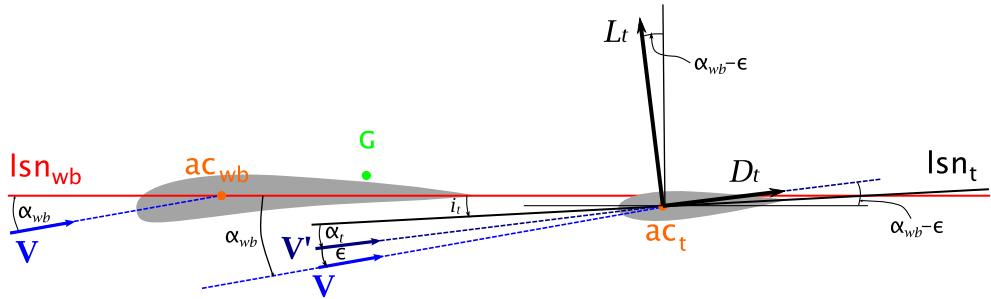


Figura 2.8: Sustentação e resistência aerodinâmica na cauda e ângulos de ataque e de downwash

Como é habitual, admite-se que a variação do C_{m_p} com o ângulo de ataque é linear. Os coeficientes $(C_{m_p})_0$ e $(C_{m_p})_\alpha$ terão de ser determinados em cada caso.

2.2.3 Contribuição do estabilizador

O estabilizador horizontal é uma superfície sustentadora, tendo a cauda isolada um comportamento semelhante a uma asa. Porém, quanto montada numa aeronave, o escoamento incidente no estabilizador é alterado pela interferência da asa e da fuselagem. O aspecto mais importante é o *downwash*.

Na figura 2.7, \vec{V} representa a velocidade do escoamento incidente na asa, \vec{V}' a velocidade efectiva («média») do escoamento na cauda e \vec{V}_d a velocidade induzida pelo *downwash*. A figura 2.7 permite concluir que o *downwash* conduz a uma diminuição do ângulo de ataque efectivo no estabilizador e a uma alteração do módulo da velocidade efectiva («média») do escoamento na cauda.

Sustentação do estabilizador

Definimos o ângulo de *downwash* ϵ como o ângulo que traduz a diminuição média do ângulo de ataque local. Na figura 2.8 a sustentação L_t e a resistência aerodinâmica D_t do estabilizador são definidos relativamente à direcção de \vec{V}' , que é a velocidade efectiva («média») do escoamento na cauda.

A sustentação total é a componente perpendicular a \vec{V} (velocidade incidente na asa) da força aerodinâmica resultante. A contribuição do estabilizador horizontal para a sustentação total é:

$$L_t \cos \epsilon - D_t \sin \epsilon \approx L_t. \quad (2.21)$$

Para a adimensionalização da sustentação da cauda usa-se a pressão dinâmica na cauda ($\frac{1}{2}\rho V'^2$) e a área do estabilizador (S_t). Logo

$$C_{L_t} = \frac{L_t}{\frac{1}{2}\rho V'^2 S_t}. \quad (2.22)$$

No regime linear,

$$C_{L_t} = \alpha_t \alpha_t. \quad (2.23)$$

Note-se que α_t e α_t devem ser medidos *in situ*, não com a cauda isolada. Deste modo α_t inclui já os efeitos da interferência da asa e da fuselagem no escoamento incidente no estabilizador.

A sustentação total da aeronave (L) é a soma da contribuição da asa+fuselagem, L_{wb} e da contribuição da cauda, L_t :

$$L = L_{wb} + L_t. \quad (2.24)$$

Para a adimensionalização da sustentação total convém ter em conta que a asa constitui claramente a contribuição mais importante. Por isso (e porque as contas ficam facilitadas) adimensionaliza-se a sustentação total pela área da asa $S \equiv S_w$.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = \frac{L_{wb}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} + \frac{L_t}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = C_{L_{wb}} + \frac{L_t}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}. \quad (2.25)$$

Mas, tendo em conta (2.22),

$$L_t = \frac{1}{2}\rho V'^2 S_t C_{L_t} = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \frac{S_t}{S} C_{L_t} = \frac{1}{2}\rho V^2 S \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_t} \quad (2.26)$$

em que

$$\eta_t \equiv \left(\frac{V'}{V}\right)^2. \quad (2.27)$$

O módulo da velocidade é habitualmente pouco afectado pelo *downwash*, pelo que se admite normalmente que $\eta_t \approx 1$. A sustentação total é então

$$C_L = C_{L_{wb}} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_t} \approx C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} \quad (2.28)$$

Momento de picada relativo ao CM

A contribuição da cauda para o momento de picada relativamente ao centro de massa da aeronave é (ver figura 2.9):

$$M_t = M_{ac_t} + l_t [-L_t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon) - D_t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon)] + z_t [-D_t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon) + L_t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon)]$$

Consistentemente com a secção anterior, faremos as seguintes aproximações:

- $(\alpha_{wb} - \varepsilon)$ pequeno, logo $\cos(\alpha_{wb} - \varepsilon) \approx 1$ e $\sin(\alpha_{wb} - \varepsilon) \approx \alpha_{wb} - \varepsilon$.
- $D_t \ll L_t$.
- $z_t \ll l_t$.

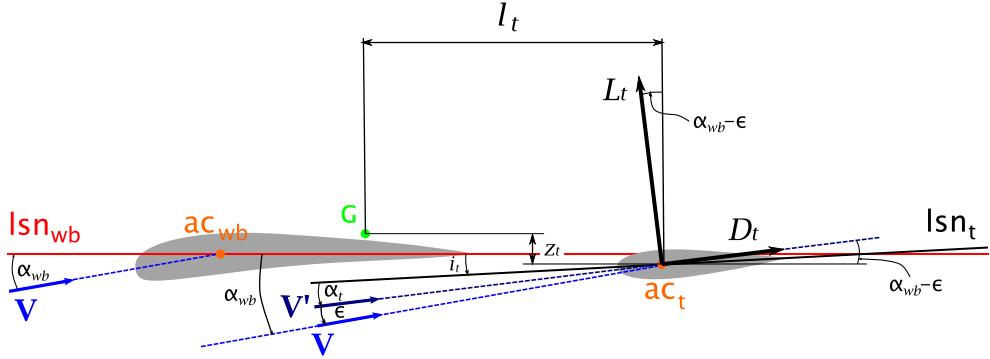


Figura 2.9: Distâncias entre o centro aerodinâmica da cauda e o centro de massa da aeronave.

Além disso, se o perfil do estabilizador for simétrico, como é habitual, $M_{ac_t} = 0$.

Das aproximações anteriores conclui-se que na segunda parcela $L_t \cos(\alpha_{wb} - \epsilon) \gg D_t \sin(\alpha_{wb} - \epsilon)$. Além disso, a última parcela é desprezável face à segunda. Com estas aproximações,

$$M_t = -l_t L_t + M_{ac_t}. \quad (2.29)$$

Mas, como

$$L_t = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) S \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_t}, \quad (2.30)$$

o coeficiente adimensional da contribuição do estabilizador horizontal para o momento de picada total é

$$C_{m_t} = \frac{M_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}} = -\eta_t \frac{l_t}{\bar{c}} \frac{S_t}{S} C_{L_t} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{m_{ac_t}}. \quad (2.31)$$

Define-se razão de volume do estabilizador horizontal como

$$V_H = \frac{l_t S_t}{\bar{c} S}. \quad (2.32)$$

Assim, podemos concluir finalmente que

$$C_{m_t} = -\eta_t V_H C_{L_t} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{m_{ac_t}}. \quad (2.33)$$

O centro de massa (CM) de uma aeronave não é fixo, pelo que V_H depende da posição deste. Convém-nos explicitar a posição do CM nas nossas equações e para isso introduzimos a distância entre os centros aerodinâmicos da asa+fuselagem e do estabilizador horizontal, \bar{l}_t . Pela figura 2.10 vemos que

$$\bar{l}_t = l_t + (h - h_{n_{wb}}) \bar{c}. \quad (2.34)$$

Definindo

$$\bar{V}_H = \frac{\bar{l}_t S_t}{\bar{c} S}, \quad (2.35)$$

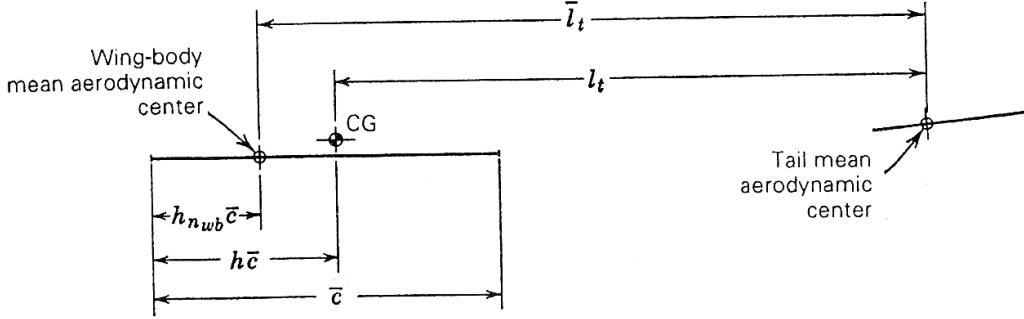


Figura 2.10: Distância entre o centro aerodinâmico do estabilizador e o centro de massa l_t ou o centro aerodinâmica \bar{l}_t da aeronave.(Fonte: [1])

podemos escrever

$$\bar{V}_H = V_H + \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}). \quad (2.36)$$

A equação (2.33) pode então escrever-se numa forma que explicita a dependência da posição do centro de massa:

$$C_{m_t} = -\eta_t \bar{V}_H C_{L_t} + C_{L_t} \eta_t \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{m_{act}}. \quad (2.37)$$

O momento de picada total é dado pela soma das várias contribuições, $C_m = C_{m_{wb}} + C_{m_t} + C_{m_p}$. Substituindo as expressões de cada uma das contribuições, e notando que $C_L = C_{L_{wb}} + \eta_t (S_t/S) C_{L_t}$, obtém-se

$$C_m = C_{m_{ac_{wb}}} + C_L (h - h_{n_{wb}}) - \eta_t \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{m_{act}}. \quad (2.38)$$

Se, como é habitual, $\eta_t \approx 1$ e o perfil dos estabilizadores é simétrico ($C_{m_{act}} = 0$), a expressão acima simplifica-se:

$$C_m = C_{m_{ac_{wb}}} + C_L (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p}. \quad (2.39)$$

C_{m_α} e Ponto neutro

O coeficiente C_{m_α} (*pitch stiffness*) é de grande importância para a estabilidade de uma aeronave. Para o calcular derivamos (2.39):

$$C_{m_\alpha} \equiv \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_{m_{ac_{wb}}}}{\partial \alpha} + C_{L_\alpha} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}. \quad (2.40)$$

Por definição de centro aerodinâmico,

$$\frac{\partial C_{m_{ac_{wb}}}}{\partial \alpha} = 0. \quad (2.41)$$

Logo

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}. \quad (2.42)$$

A condição de estabilidade é $C_{m_\alpha} < 0$. Ora, o valor de C_{m_α} depende da posição do CM. Logo, variando h podemos fazer C_{m_α} positivo ou negativo. A posição do CM que torna $C_{m_\alpha} = 0$ separa regiões de estabilidade e instabilidade.

O ponto neutro h_n pode definir-se como a posição que o CM do avião deveria ter para que $C_{m_\alpha} = 0$. O ponto neutro é então o centro aerodinâmico do avião: o momento de picada calculado relativamente a ele não depende do ângulo de ataque.

Para a determinação do ponto neutro basta colocar $C_{m_\alpha} = 0$ em (2.42), e resolver em ordem a h , obtendo-se

$$h_n = h_{n_{wb}} - \frac{1}{C_{L_\alpha}} \left(\frac{\partial C_{m_{ac\,wb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right). \quad (2.43)$$

Substituindo na expressão de C_{m_α} , obtém-se

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha}(h - h_n). \quad (2.44)$$

A margem estática K_n define-se como a distância (adimensional) entre o centro de massa e o ponto neutro:

$$K_n = h_n - h. \quad (2.45)$$

Logo, podemos escrever

$$C_{m_\alpha} = -C_{L_\alpha} K_n. \quad (2.46)$$

Daqui podemos concluir que

- $K_n < 0 \Rightarrow C_{m_\alpha} > 0$: a aeronave é instável.
- $K_n > 0 \Rightarrow C_{m_\alpha} < 0$: a aeronave é estável.

A condição de estabilidade é portanto $K_n > 0$, o que, de (2.45), implica $h < h_n$. Conclui-se que se o centro de massa está à frente (mais perto do nariz) do ponto neutro, o avião é estável.

Quando mais à frente do ponto neutro estiver o centro de massa, maior será a margem estática e maior a estabilidade estática do avião, mas uma estabilidade estática exagerada diminui manobrabilidade do avião.

Definição alternativa de ponto neutro

Por vezes define-se ponto neutro como a localização do CM para o qual

$$\frac{dC_m}{dC_L} = 0. \quad (2.47)$$

No entanto, esta definição só coincide com a anterior em algumas condições de voo bem definidas (ex: voo de planeio de uma aeronave rígida a baixo número de Mach), pois só nesse caso C_m e C_L dependem apenas de α . Nesse caso,

$$\frac{dC_m}{dC_L} = \frac{\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)}$$

e portanto

$$\frac{dC_m}{dC_L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = 0.$$

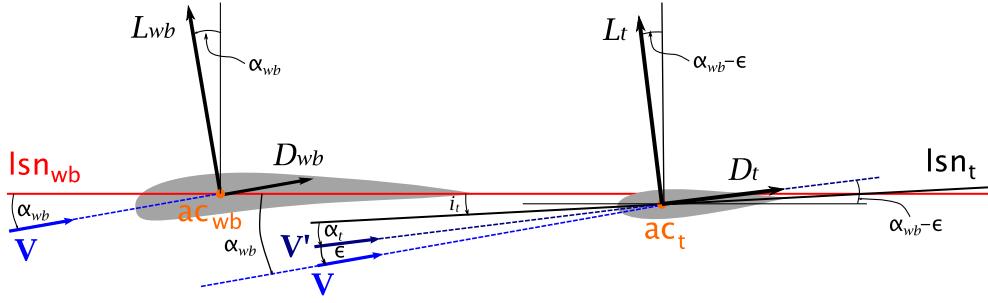


Figura 2.11: Ângulos de ataque e sustentação na asa e no estabilizador.

Mas tanto C_L como C_m dependem não apenas de α mas também do número de Mach (efeitos de compressibilidade) e da pressão dinâmica (efeitos aeroelásticos). A definição da equação (2.47) é por isso, quando muito, uma aproximação (apesar de muito usada e frequentemente útil).

2.3 Sustentação e momento de picada em função do ângulo de ataque

Como habitualmente, vamos admitir que a aeronave está a voar com um ângulo de ataque dentro da zona de linearidade, isto é, que as forças de sustentação e o momento de picada total variam linearmente com o ângulo de ataque. Iremos determinar as expressões para C_L e C_m em função do(s) ângulo(s) de ataque, bem como expressões para a posição do ponto neutro h_n .

2.3.1 Coeficiente de sustentação total

Considere-se uma aeronave numa configuração convencional: asa + fuselagem + estabilizador horizontal. Na figura 2.11 estão representados os ângulos de ataque na asa e no estabilizador (tendo em conta os ângulos de incidência do estabilizador e o ângulo de *downwash*) e as respectivas forças de sustentação. Como admitimos estar na zona de linearidade, os coeficientes de sustentação na asa e na cauda são dados por

$$C_{L_{wb}} = a_{wb} \alpha_{wb}, \quad (2.48)$$

$$C_{L_t} = a_t \alpha_t = a_t (\alpha_{wb} - i_t - \epsilon). \quad (2.49)$$

Na equação (2.49) usou-se a relação entre os ângulos de ataque absolutos na asa+fuselagem α_{wb} e no estabilizador α_t ,

$$\alpha_t = \alpha_{wb} - i_t - \epsilon, \quad (2.50)$$

que se pode obter a partir da figura 2.12.

O ângulo de *downwash* é proporcional à sustentação criada pela asa. Por isso podemos admitir que varia linearmente com α_{wb} :

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \alpha_{wb} = \epsilon_0 + \epsilon_\alpha \alpha_{wb}. \quad (2.51)$$

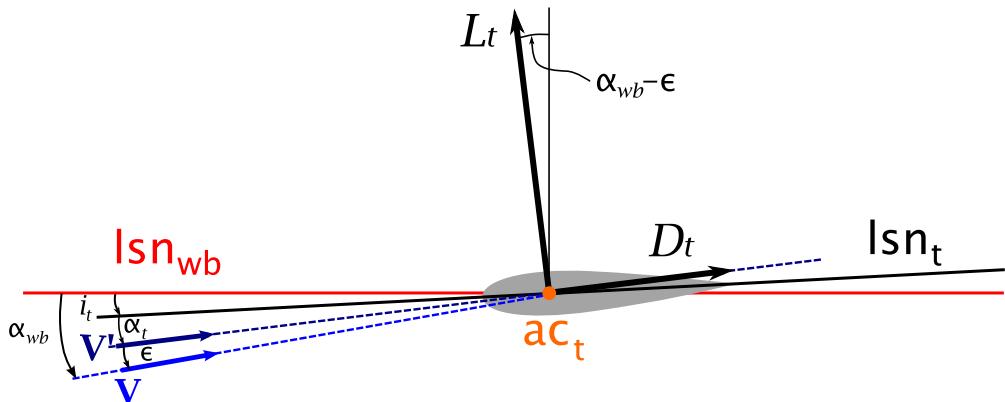


Figura 2.12: Relação entre ângulos de ataque na asa e no estabilizador, e sustentação no estabilizador.

Nesta equação ε_0 é a contribuição do campo de velocidades induzido pela fuselagem e pela torção da asa, não variando com o ângulo de ataque, e ε_α é contribuição da esteira de vórtices do bordo de fuga, cuja intensidade é proporcional a C_L , e portanto a α_{wb} .

Escrevendo agora a equação (2.49) numa forma que explicita os termos constantes e os que dependem de α_{wb} , obtém-se

$$C_{L_t} = \alpha_t [\alpha_{wb}(1 - \varepsilon_\alpha) - (i_t + \varepsilon_0)]. \quad (2.52)$$

Usando (2.48) e (2.52) na equação para o coeficiente de sustentação total (2.28) obtém-se uma expressão em função de α_{wb}

$$\begin{aligned} C_L &= \alpha_{wb}\alpha_{wb} + \alpha_t\alpha_{wb}(1 - \varepsilon_\alpha)\frac{S_t}{S}\eta - \alpha_t(i_t + \varepsilon_0)\frac{S_t}{S}\eta \\ &= \alpha_{wb} \left[1 + \frac{\alpha_t S_t}{\alpha_{wb} S} \eta (1 - \varepsilon_\alpha) \right] \alpha_{wb} - \alpha_t \frac{S_t}{S} \eta (i_t + \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Podemos escrever a expressão anterior na forma

$$C_L = C_{L_0} + \alpha \alpha_{wb}, \quad (2.54)$$

com

$$\alpha = \alpha_{wb} \left[1 + \frac{\alpha_t S_t}{\alpha_{wb} S} (1 - \varepsilon_\alpha) \eta \right], \quad (2.55)$$

$$C_{L_0} = -\alpha_t \frac{S_t}{S} (i_t + \varepsilon_0) \eta. \quad (2.56)$$

Note-se que $C_{L_0} < 0$ e que habitualmente podemos usar a aproximação $\eta \approx 1$.

O ângulo de ataque absoluto da aeronave total, representado simplesmente por α , é o ângulo de ataque do escoamento incidente medido relativamente à linha de sustentação nula da aeronave. Assim,

$$C_L = C_{L_0} + \alpha \alpha_{wb} = \alpha \alpha. \quad (2.57)$$

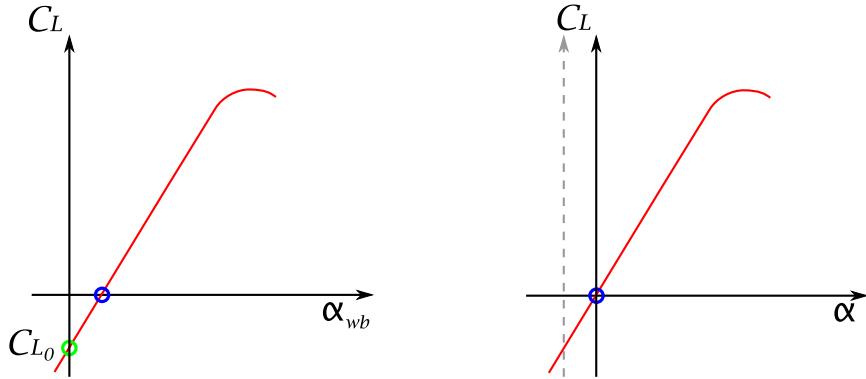


Figura 2.13: Curvas C_L vs. α_{wb} e vs. α absoluto da aeronave.

Daqui podemos deduzir que

$$\alpha = \alpha_{wb} + \frac{C_{L_0}}{a} = \alpha_{wb} - \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} \eta(i_t + \varepsilon_0). \quad (2.58)$$

Como se pode constatar na figura 2.13, usar o ângulo de ataque absoluto implica apenas a mudança da origem do referencial de modo a que a curva C_L vs. α passe pela origem, mas o declive C_{L_α} da curva permanece o mesmo.

2.3.2 Momento de picada total

O momento de picada total é dado pela equação (2.39). Podemos escrever C_L e C_{L_t} em função de α_{wb} . Além disso, o momento de picada devido ao sistema de propulsão pode ser escrito como a soma de um termo constante e um termo que depende de α_{wb} . Admitimos que a variação com α_{wb} é linear, pelo que

$$C_{m_p} = \overline{(C_{m_p})_0} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \alpha_{wb}. \quad (2.59)$$

Habitualmente podemos desprezar esta contribuição. Quando for necessário incluí-la, teremos de determinar $\overline{(C_{m_p})_0}$ e $\frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$.

Substituindo em (2.39) as expressões de C_L , dadas por (2.54), (2.55) e (2.56), de C_{L_t} , dada por (2.52), e de C_{m_p} , dada por (2.59), obtemos

$$C_m = \overline{C_{m_0}} + C_{m_\alpha} \alpha_{wb}, \quad (2.60)$$

em que o termo constante $\overline{C_{m_0}}$ é dado por

$$\overline{C_{m_0}} = C_{m_{ac_{wb}}} + a_t (i_t + \varepsilon_0) V_H + \overline{(C_{m_p})_0},$$

e o declive C_{m_α} (*pitch stiffness*) se pode escrever de duas formas equivalentes,

$$C_{m_\alpha} = a(h - h_{n_{wb}}) - a_t \bar{V}_H (1 - \varepsilon_\alpha) + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \quad (2.61)$$

$$= a_{wb}(h - h_{n_{wb}}) - a_t V_H (1 - \varepsilon_\alpha) + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}. \quad (2.62)$$

Muitas vezes é mais útil escrever C_m em função do ângulo de ataque absoluto α . Para isso começemos por escrever a relação do momento de picada devido ao sistema de propulsão com α , que continua a ser linear mas em que o termo constante é diferente:

$$C_{m_p} = (C_{m_p})_0 + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \alpha_{wb}, \quad (2.63)$$

sendo $(C_{m_p})_0$ determinado em cada caso. Agora podemos substituir em (2.39) as expressões de C_L , (2.57), e de C_{L_t} , (2.52), juntamente com a relação entre ângulos de ataque (2.58), e de C_{m_p} , (2.63), obtendo

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha. \quad (2.64)$$

O coeficiente C_{m_0} é dado por

$$C_{m_0} = C_{m_{acwb}} + a_t(i_t + \varepsilon_0)\bar{V}_H \left[1 - \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} (1 - \varepsilon_\alpha) \right] + (C_{m_p})_0. \quad (2.65)$$

Note-se que C_{m_α} é, tal como no caso anterior, dado por (2.61) ou (2.62).

Ponto neutro

Por definição de ponto neutro, $C_{m_\alpha} = 0$ quando $h = h_n$. Usando (2.61),

$$a(h_n - h_{n_{wb}}) - a_t \bar{V}_H (1 - \varepsilon_\alpha) + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} = 0.$$

Resolvendo em ordem a h_n obtemos

$$h_n = h_{n_{wb}} + \frac{a_t}{a} \bar{V}_H (1 - \varepsilon_\alpha) - \frac{1}{a} \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}. \quad (2.66)$$

Note-se que com frequência a contribuição da propulsão pode ser desprezada.

Como vimos, o coeficiente de sustentação é dado em função do ângulo de ataque absoluto por $C_L = C_{L_\alpha} \alpha$, enquanto que o momento de picada, dado por (2.64), pode tomar uma forma muito útil se usarmos a expressão para o ponto neutro:

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha = C_{m_0} + C_{L_\alpha} (h - h_n) \alpha. \quad (2.67)$$

As forças (de sustentação) e momentos aplicados numa aeronave podem portanto ser descritas através da força de sustentação aplicada no ponto neutro e do momento de picada C_{m_0} relativamente ao ponto neutro, como representado na figura 2.14. Note-se que a configuração analizada não inclui leme de profundidade (*elevator*) pelo que a sua contribuição não foi incluída em (2.67).

2.4 Equilíbrio, Estabilidade e Controlo Longitudinais

2.4.1 Equilíbrio sem leme de profundidade

Para a configuração asa + fuselagem + estabilizador horizontal (fixo), as condições de equilíbrio mantém-se: $L = W$ e $M = 0$. Da primeira condição,

$$L = W \Rightarrow C_{L_{eq}} = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S}, \quad (2.68)$$

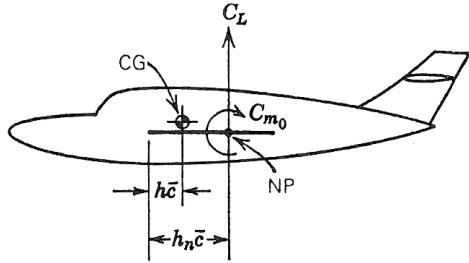


Figura 2.14: As forças e momentos aerodinâmicos aplicados a uma aeronave podem ser decompostos em: sustentação aplicada no ponto neutro e momento de picada relativamente ao ponto neutro. (Fonte: [1])

e a velocidade é

$$V_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2}\rho S C_{L_{\text{eq}}}}} \quad (2.69)$$

Da segunda condição obtemos

$$C_m = C_{m_0} + (h - h_n) C_{L_\alpha} \alpha_{\text{eq}} = 0, \quad (2.70)$$

que define o ângulo de ataque de equilíbrio,

$$\alpha_{\text{eq}} = \frac{-C_{m_0}}{(h - h_n) C_{L_\alpha}}. \quad (2.71)$$

Uma vez que $C_L = \alpha \alpha$, e portanto, em equilíbrio $C_{L_{\text{eq}}} = \alpha \alpha_{\text{eq}}$, a velocidade e o ângulo de ataque em equilíbrio estão relacionados:

$$\alpha \alpha_{\text{eq}} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_{\text{eq}}^2 S}$$

A equação (2.71) mostra que, uma vez que todas as outras grandezas são constantes, α_{eq} só pode variar mudando h ! Podemos alterar o ponto de equilíbrio (α_{eq} e V_{eq}) mudando posição do CM, mas isso é pouco prático e altera também curva C_m vs. α . Uma outra possibilidade é modificar a configuração aerodinâmica. Para isso pode usar-se um estabilizador com ângulo de incidência i_t variável, o que permite modificar o valor de C_{m_0} e desta forma alterar o ângulo de ataque e, consequentemente, a velocidade de equilíbrio. Uma alternativa mais frequente é usar um leme de profundidade (*elevator*) acoplado ao estabilizador.

2.4.2 Leme de profundidade

O efeito da deflexão do leme pode traduzir-se como o aumento da curvatura efectiva do estabilizador. Como se mostra na figura 2.15, define-se a deflexão como positiva se a curvatura do estabilizador aumenta (isto é, torna-se mais positiva), o que conduz a um aumento da sustentação no estabilizador: $\delta_e > 0$ se $\Delta L_t > 0$.

Para garantir que o leme é sempre eficaz a deflexão máxima permitida não deve ultrapassar certos limites. Para deflexões demasiado grandes o estabilizador poderia

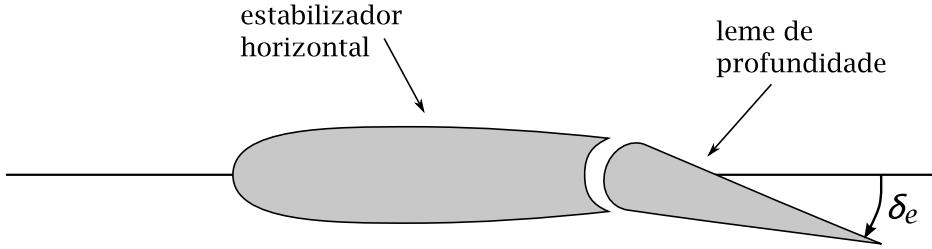


Figura 2.15: A deflexão do leme de profundidade, δ_e , é positiva quando aumenta a curvatura efectiva da cauda, aumentando a sustentação no estabilizador horizontal

entrar em perda e o leme deixaria de ser eficaz. Iremos sempre, além disso, admitir que a relação entre δ_e e ΔL_t é linear (cfr. figura 2.16).

Uma variação da sustentação na cauda conduz a uma variação da sustentação total, dada por

$$\Delta C_L = C_{L_{\delta_e}} \delta_e, \quad (2.72)$$

em que, de acordo com a definição do sinal de δ_e ,

$$C_{L_{\delta_e}} \equiv \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} > 0. \quad (2.73)$$

A variação de sustentação total ΔC_L é pequena quando comparada com C_L . O momento de picada total irá também variar, mas esta variação não é desprezável face ao momento total, o que permite ajustar o ponto de equilíbrio da aeronave. A variação do momento de picada devido a uma deflexão δ_e do leme de profundidade pode ser dada por

$$\Delta C_m = C_{m_{\delta_e}} \delta_e, \quad (2.74)$$

em que o coeficiente de proporcionalidade entre C_m e δ_e é negativo:

$$C_{m_{\delta_e}} \equiv \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e} < 0. \quad (2.75)$$

A sustentação e o momento de picada totais de uma aeronave dependem do ângulo de ataque absoluto e de δ_e , e temos:

$$\begin{cases} C_L = C_L(\alpha) + C_{L_{\delta_e}} \delta_e, \\ C_m = C_m(\alpha) + C_{m_{\delta_e}} \delta_e. \end{cases} \quad (2.76)$$

Na gama de valores de α em que a variação é linear, podemos escrever

$$\begin{cases} C_L = C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e, \\ C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_e}} \delta_e. \end{cases} \quad (2.77)$$

Estas expressões são válidas quer para o caso de asas voadoras ou asas em delta, em que o leme está montado na própria asa, quer quando a aeronave tem o leme de profundidade montado num estabilizador horizontal. Neste último caso podem-se determinar expressões para $C_{L_{\delta_e}}$ e $C_{m_{\delta_e}}$ em função das características do leme, o que faremos em seguida.

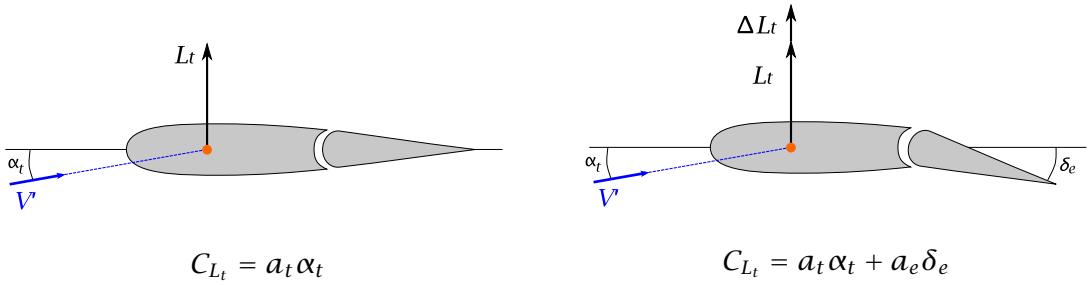


Figura 2.16: Sustentação na cauda sem (esquerda) e com (direita) deflexão δ_e do leme de profundidade.

Eficácia de sustentação do leme de profundidade

A eficácia de sustentação do leme de profundidade, α_e , mede a capacidade que o leme tem para criar sustentação no estabilizador para uma dada deflexão δ_e :

$$\alpha_e = \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta_e}. \quad (2.78)$$

Uma vez que $C_L = C_{L_{wb}} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_t}$, a derivada $C_{L_{\delta_e}}$ é dada por

$$C_{L_{\delta_e}} = \frac{\partial C_{L_{wb}}}{\partial \delta_e} + \eta_t \frac{S_t}{S} \alpha_e. \quad (2.79)$$

Para aeronaves com estabilizador horizontal $\frac{\partial C_{L_{wb}}}{\partial \delta_e} \approx 0$, e supondo $\eta_t \approx 1$,

$$C_{L_{\delta_e}} = \frac{S_t}{S} \alpha_e. \quad (2.80)$$

Para determinar a derivada $C_{m_{\delta_e}}$ para aeronaves com estabilizador partimos de

$$C_m = C_{m_{acwb}} + C_L(h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p},$$

de onde se deduz

$$C_{m_{\delta_e}} = \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \delta_e} + C_{L_{\delta_e}}(h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \underbrace{\frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta_e}}_{\alpha_e} + \underbrace{\frac{\partial C_{m_p}}{\partial \delta_e}}_{\approx 0}. \quad (2.81)$$

Para aeronaves com estabilizador horizontal, $\frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \delta_e} \approx 0$ e $C_{L_{\delta_e}} = \alpha_e \frac{S_t}{S}$. Logo,

$$C_{m_{\delta_e}} = -\alpha_e \left[\bar{V}_H - \frac{S_t}{S}(h - h_{n_{wb}}) \right]. \quad (2.82)$$

2.4.3 Deflexão do leme de profundidade para equilíbrio

A partir do sistema de equações (2.77) podem-se determinar as condições de equilíbrio da aeronave que, para voo horizontal, são

$$\begin{cases} L_{eq} = W, \\ M_{eq} = 0. \end{cases} \quad (2.83)$$

O índice *eq* designa a situação de equilíbrio. Para designar o valor da deflexão do leme de profundidade e ângulo de ataque e correspondente coeficiente de sustentação (e de momento de picada) que permitem à aeronave voar em equilíbrio com uma certa velocidade, usaremos o índice *trim*. (O índice *trim* refere-se ao equilíbrio numa certa situação de voo.)

É conveniente usar as equações de equilíbrio (2.83) na forma adimensional

$$\begin{cases} C_{L_{\text{trim}}} = \frac{L_{\text{eq}}}{\frac{1}{2}\rho V_{\text{trim}}^2 S} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_{\text{trim}}^2 S}, \\ C_{m_{\text{trim}}} = 0, \end{cases} \quad (2.84)$$

que nos permitem escrever, tendo em conta (2.77),

$$\begin{cases} C_{L_{\text{trim}}} = C_{L_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{trim}}}, \\ 0 = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{trim}}}. \end{cases} \quad (2.85)$$

Estas são as equações de equilíbrio para α_{trim} e $\delta_{e_{\text{trim}}}$. Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C_{L_\alpha} & C_{L_{\delta_e}} \\ C_{m_\alpha} & C_{m_{\delta_e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\text{trim}} \\ \delta_{e_{\text{trim}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{L_{\text{trim}}} \\ -C_{m_0} \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

A solução de (2.86) permite obter os valores do ângulo de ataque e da deflexão do leme de profundidade que garantem o voo em equilíbrio à velocidade V_{trim} :

$$\begin{cases} \alpha_{\text{trim}} = \frac{C_{L_{\text{trim}}} C_{m_{\delta_e}} + C_{m_0} C_{L_{\delta_e}}}{\det}, \\ \delta_{e_{\text{trim}}} = -\frac{C_{L_\alpha} C_{m_0} + C_{L_{\text{trim}}} C_{m_\alpha}}{\det}. \end{cases} \quad (2.87)$$

em que \det representa o determinante da matriz do sistema:

$$\det = C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}}. \quad (2.88)$$

Embora o valor do determinante possa ser facilmente calculado conhecidas as derivadas C_{L_α} , C_{m_α} , $C_{L_{\delta_e}}$ e $C_{m_{\delta_e}}$, é muitas vezes útil usar expressões explícitas em função das características da aeronave. Para aeronaves com cauda,

$$\begin{aligned} C_{m_\alpha} &= C_{L_\alpha}(h - h_n), \\ C_{m_{\delta_e}} &= C_{L_{\delta_e}}(h - h_{n_{wb}}) - \alpha_e \bar{V}_H, \\ C_{L_{\delta_e}} &= \alpha_e \frac{S_t}{S}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\det = C_{L_\alpha} \left[C_{L_{\delta_e}}(h_n - h_{n_{wb}}) - \alpha_e \bar{V}_H \right] \quad (2.89)$$

$$= \alpha_e \left[\frac{S_t}{S} (h_n - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right]. \quad (2.90)$$

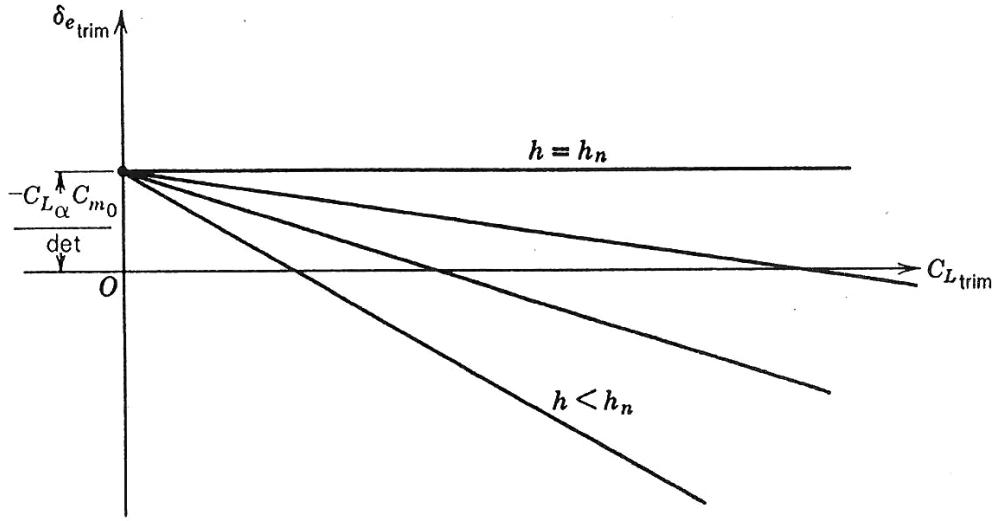


Figura 2.17: Variação de $\delta_{e\text{trim}}$ com $C_{L\text{trim}}$ para vários valores da posição do centro de massa h . (Fonte: [1])

Variação da deflexão do leme com a velocidade

Como vimos,

$$\delta_{e\text{trim}} = -\frac{C_{L\alpha} C_{m_0}}{\det} - \frac{C_{L\text{trim}} C_{m_\alpha}}{\det}.$$

Mantendo constante a posição do centro de massa, h , a deflexão do leme de profundidade necessária para equilíbrio, $\delta_{e\text{trim}}$, é uma função exclusiva de $C_{L\text{trim}}$ (supondo que não há efeitos aeroelásticos, de compressibilidade, etc.). Na figura 2.17 representa-se a variação de $\delta_{e\text{trim}}$ com $C_{L\text{trim}}$ para vários valores de h . Quando $h = h_n$, verifica-se que $\delta_{e\text{trim}}$ não depende de $C_{L\text{trim}}$ e toma um valor constante. Para $h < h_n$ a variação é linear, com declive negativo: $\delta_{e\text{trim}}$ diminui quando $C_{L\text{trim}}$ aumenta, e é negativo para valores elevados de $C_{L\text{trim}}$.

Interessa também estudar como varia a velocidade de equilíbrio com $\delta_{e\text{trim}}$. Para mais facilmente compararmos diferentes situações de voo, é conveniente usarmos a velocidade equivalente (EAS), V_E , definida por

$$V_E = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} V, \quad (2.91)$$

em que ρ é a massa volúmica à altitude de voo e ρ_0 é massa volúmica ao nível do mar (SSL). Em voo horizontal,

$$C_{L\text{trim}} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho_0 V_E^2 S}. \quad (2.92)$$

Em situação de equilíbrio, a variação da deflexão do leme com a velocidade equivalente é então

$$\delta_{e\text{trim}} = -\frac{C_{L\alpha} C_{m_0}}{\det} - \frac{2w C_{m_\alpha}}{\rho_0 \det} \frac{1}{V_E^2}, \quad (2.93)$$

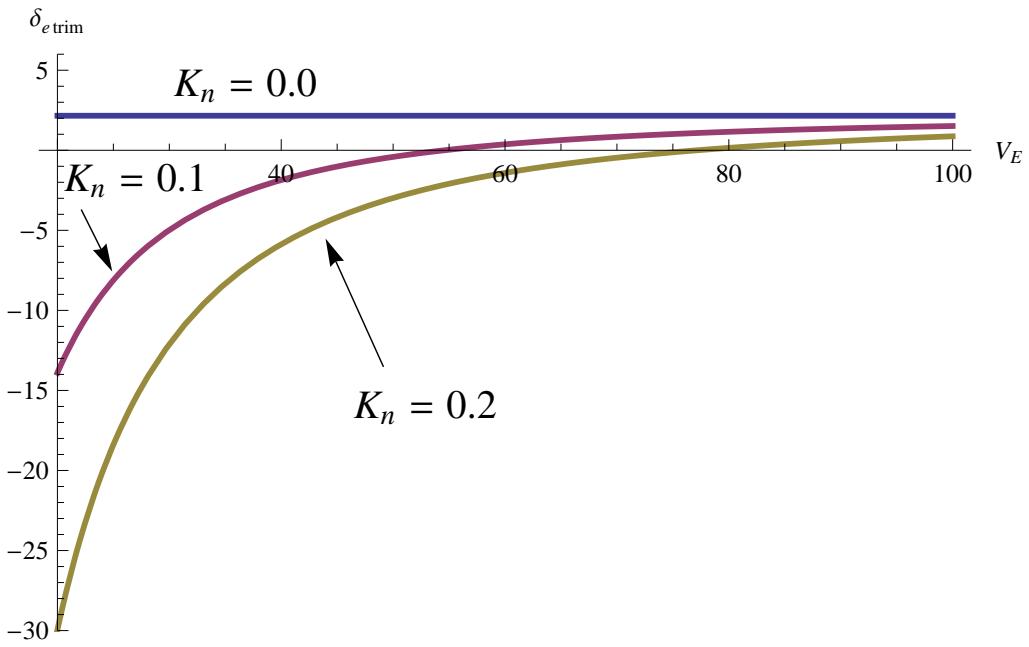


Figura 2.18: Variação de $\delta_{e\text{trim}}$ com V_E para margem estática $K_n = 0, 0.1$ e 0.2 , para uma aeronave com características baseadas num Cessna 182. ($\delta_{e\text{trim}}$ medido em graus e V_E em m/s.)

em que $w = W/S$ é a carga alar.

Na figura 2.18 representa-se a variação de $\delta_{e\text{trim}}$ com V_E para vários valores da margem estática K_n . Quando $h = h_n$, $K_n = 0$ e $\delta_{e\text{trim}}$ é constante, não dependendo de V_E . Neste caso a velocidade de equilíbrio não pode ser determinada pela deflexão do leme de profundidade: não é possível usar esta superfície de controlo para alterar a velocidade. Quando $K_n > 0 \Rightarrow h < h_n$, $\delta_{e\text{trim}}$ é negativo para valores reduzidos da velocidade e aumenta com V_E . O declive da curva é maior para velocidades mais baixas, o que significa que há maior sensibilidade do controlo com V_E reduzido. Pelo contrário, para velocidades maiores, pequenas variações de $\delta_{e\text{trim}}$ correspondem a grandes variações de V_E . À medida que aumenta a margem estática, a curva apresenta uma curvatura maior e os valores de $\delta_{e\text{trim}}$ necessários para um dado valor de V_E vão aumentando (até atingir valores demasiado altos para garantir a eficácia do controlo). Vemos que a manobrabilidade do avião e a sua capacidade de ser controlado diminuem quando aumenta a margem estática.

Capítulo 3

Estabilidade com Manche Livre e Forças de Controlo

3.1 Momento de charneira de superfície de controlo

O controlo longitudinal de uma aeronave faz-se habitualmente por meio do leme de profundidade (*elevator*). O compensador (*trim tab*) usa-se para facilitar a deflexão do leme ou para manter o avião em equilíbrio (*trim*) sem necessidade de actuação do leme. Nesta última função o compensador permite voar em equilíbrio mantendo o manche livre.

Neste capítulo iremos determinar condições de equilíbrio e de estabilidade no caso de voo com manche livre. Note-se que se o manche está livre, o leme também o estará. Iremos também procurar determinar qual a força de controlo necessária para estabelecer certa deflexão no leme ou certa velocidade de equilíbrio.

3.1.1 Momento de charneira

Para manter ou alterar a deflexão de uma superfície de controlo é necessário aplicar um momento na charneira (dobradiça) que permita contrariar os momentos devidos às forças aerodinâmicas.

A figura 3.1 representa uma parte de um estabilizador horizontal com um leme de profundidade e um compensador (*tab*). Definimos S_e como a área da parte do leme a jusante da linha de charneira e \bar{c}_e como a corda média da parte do leme a jusante da linha de charneira. O momento de charneira, isto é, o momento das forças aerodinâmicas exercidas no leme calculado em relação à linha de charneira do leme de profundidade, é designado por H_e . Supondo $\eta \approx 1$, o coeficiente do momento de charneira é

$$C_{he} = \frac{H_e}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_e \bar{c}_e}. \quad (3.1)$$

O sentido positivo de deflexão de $\delta_t > 0$ é definido da mesma forma que para δ_e . Assim, na figura 3.2, $\delta_e < 0$ e $\delta_t > 0$. Admitimos uma relação linear entre C_{he} e α_t , δ_e e δ_t , ou seja,

$$C_{he} = b_0 + b_1 \alpha_t + b_2 \delta_e + b_3 \delta_t. \quad (3.2)$$

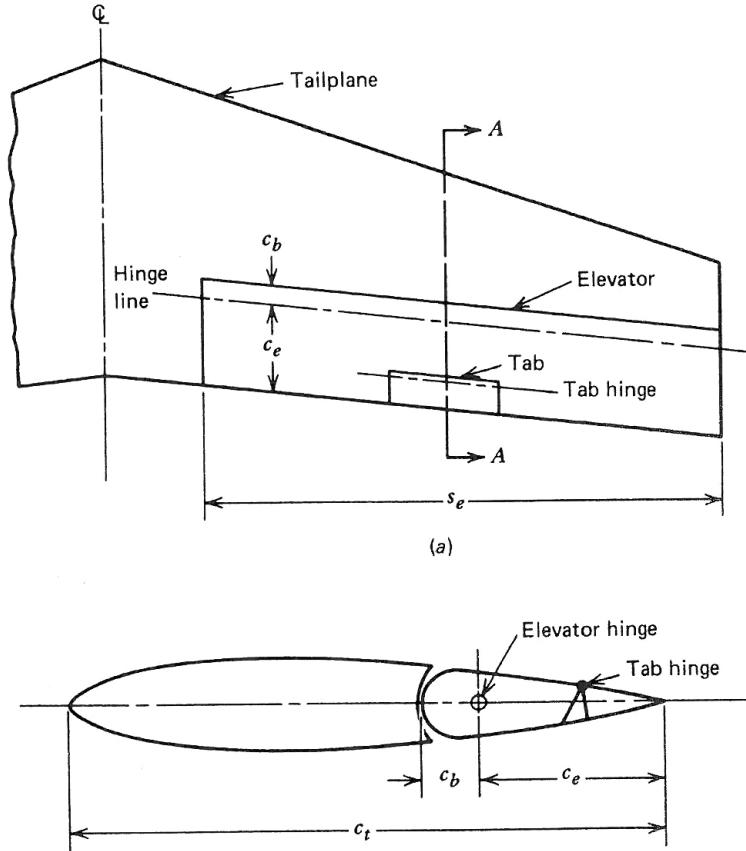


Figura 3.1: Geometria do leme. (Fonte: [1])

Por definição,

$$b_1 = \frac{\partial C_{he}}{\partial \alpha_t}, \quad b_2 = \frac{\partial C_{he}}{\partial \delta_e}, \quad b_3 = \frac{\partial C_{he}}{\partial \delta_t}.$$

Se o perfil do estabilizador for simétrico não há forças ou momentos aerodinâmicos quando $\alpha_t = 0 = \delta_e = \delta_t$, pelo que nesse caso $b_0 = 0$.

Na equação (3.2) e na definição de b_1 o ângulo de ataque considerado é α_t . Dado que $\alpha_t = \alpha_{wb}(1 - \varepsilon_\alpha) - (i_t + \varepsilon_0)$ e que o ângulo de ataque absoluto da aeronave é $\alpha = \alpha_{wb} - \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} (i_t + \varepsilon_0)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} b_1 \alpha_t &= b_1 \left\{ \left[\alpha + \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} (i_t + \varepsilon_0) \right] (1 - \varepsilon_\alpha) - (i_t + \varepsilon_0) \right\} \\ &= b_1 (1 - \varepsilon_\alpha) \alpha - b_1 (i_t + \varepsilon_0) \left[1 - \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} (1 - \varepsilon_\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.2) obtemos uma expressão para o coeficiente do momento de charneira em função do ângulo de ataque absoluto:

$$C_{he} = C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_t, \quad (3.3)$$

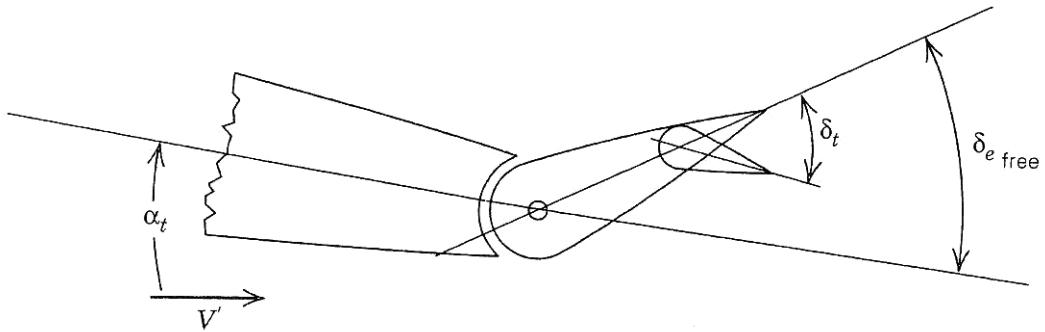


Figura 3.2: Deflexões do leme de profundidade e do compensador. (Fonte: [1])

com

$$C_{he_0} = b_0 - b_1(i_t + \varepsilon_0) \left[1 - \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} (1 - \varepsilon_\alpha) \right], \quad (3.4)$$

$$C_{he_\alpha} = b_1(1 - \varepsilon_\alpha). \quad (3.5)$$

3.2 Sustentação e momento de picada com manche livre

Na situação tratada na secção 2.4 supôs-se que o leme de profundidade estava fixo, isto é, que a deflexão do leme permanecia constante. A condição que vai ser considerada agora é a de leme completamente livre. Neste caso a deflexão do leme é aquela que anula o momento de charneira, ou seja, aquela para a qual $H_e = 0$ ($C_{he} = 0$).

Ambos os casos são ideais. O leme não está nunca completamente fixo tanto porque em muitas aeronaves é difícil manter o manche completamente fixo como porque a estrutura das aeronaves não é totalmente rígida e existem sempre deformações que alteram ligeiramente a posição do leme. Por outro lado o leme nunca está completamente livre porque existe sempre algum atrito, o que leva ao aparecimento de um momento de charneira de atrito. No entanto estes casos ideais estão suficientemente perto da realidade para podermos aplicar os resultados que vamos obter.

3.2.1 Deflexão do leme com manche livre

Como vimos, a condição de manche livre é $H_e = 0 \Leftrightarrow C_{he} = 0$. Vamos supor que δ_t está fixo, mas que o leme está livre, pelo que usamos a notação $\delta_e = \delta_{e\text{free}}$. Da equação (3.3) obtemos, para manche livre,

$$C_{he} = C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_2 \delta_{e\text{free}} + b_3 \delta_t = 0. \quad (3.6)$$

O leme de profundidade deflecte até H_e se anular e o valor de $\delta_{e\text{free}}$ é

$$\delta_{e\text{free}} = -\frac{1}{b_2} (C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_3 \delta_t). \quad (3.7)$$

3.2.2 Sustentação e momento de picada em função do ângulo de ataque

Tendo em conta a contribuição do compensador, a sustentação total é

$$C_L = C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_t}} \delta_t. \quad (3.8)$$

No entanto a contribuição do compensador para a sustentação total é pequena, pelo que $C_{L_{\delta_t}}$ é pequeno quando comparado com as outras derivadas e a última parcela é habitualmente desprezada. Com manche livre a deflexão do leme verifica (3.7), donde se conclui que o coeficiente de sustentação total no caso de voo com manche livre, que vamos designar por C'_L , é dado por

$$C'_L = C_{L_\alpha} \alpha - C_{L_{\delta_e}} \frac{1}{b_2} (C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_3 \delta_t), \quad (3.9)$$

que se pode escrever na forma

$$C'_L = C'_{L_0} + C'_{L_\alpha} \alpha \quad (3.10)$$

com

$$C'_{L_0} = -\frac{C_{L_{\delta_e}}}{b_2} (C_{he_0} + b_3 \delta_t), \quad (3.11)$$

$$a' = C'_{L_\alpha} = C_{L_\alpha} - \frac{C_{L_{\delta_e}}}{b_2} C_{he_\alpha}. \quad (3.12)$$

Num voo com manche livre a relação entre C_L e α continua a ser linear, mas a linha de sustentação nula altera-se ($C'_{L_0} \neq 0$) e o declive da recta diminui ($a' < a$).

Analogamente, para o momento de picada total relativo ao centro de massa temos

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_e}} \delta_e + C_{m_{\delta_t}} \delta_t. \quad (3.13)$$

Dado que o compensador é normalmente pequeno, tanto a sustentação como o momento de picada adicionais criados pela deflexão δ_t são pequenos e, em primeira aproximação, podemos fazer $C_{m_{\delta_t}} \approx 0$ e desprezar o último termo. Usando (3.7), obtemos

$$C'_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha - C_{m_{\delta_e}} \frac{1}{b_2} (C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_3 \delta_t), \quad (3.14)$$

em que C'_m designa o momento de picada total relativamente ao centro de massa para voo com manche livre. A equação anterior tem a forma

$$C'_m = C'_{m_0} + C'_{m_\alpha} \alpha, \quad (3.15)$$

com

$$C'_{m_0} = C_{m_0} - \frac{C_{m_{\delta_e}}}{b_2} (C_{he_0} + b_3 \delta_t), \quad (3.16)$$

$$C'_{m_\alpha} = C_{m_\alpha} - \frac{C_{m_{\delta_e}}}{b_2} C_{he_\alpha}. \quad (3.17)$$

Tendo em conta que $C_{m_{\delta_e}}$, b_2 e C_{he_α} são negativos, $|C'_{m_\alpha}| < |C_{m_\alpha}|$. O declive da curva de C_m com α é menos negativo e isto significa que, com manche livre, há uma diminuição da estabilidade estática.

3.2.3 Sustentação na cauda e factor de manche livre

Pretende-se agora determinar a variação da sustentação na cauda com α_t para uma aeronave com um estabilizador horizontal com perfil simétrico (onde $b_0 = 0$) e munido de um leme de profundidade. Supomos que existe um compensador, mas que a sua contribuição para a sustentação é desprezável. Com manche livre

$$C_{he} = b_0 + b_1 \alpha_t + b_2 \delta_{e\text{free}} + b_3 \delta_t = 0,$$

pelo que

$$\delta_{e\text{free}} = -\frac{1}{b_2} (b_1 \alpha_t + b_3 \delta_t).$$

Então o coeficiente de sustentação na cauda é

$$\begin{aligned} C'_{L_t} &= a_t \alpha_t + a_e \delta_{e\text{free}} + \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta_t} \delta_t \\ &= a_t \alpha_t - a_e \frac{1}{b_2} (b_1 \alpha_t + b_3 \delta_t) + \underbrace{\frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta_t} \delta_t}_{\approx 0} \end{aligned}$$

Logo,

$$C'_{L_t} = \left(a_t - \frac{a_e b_1}{b_2} \right) \alpha_t - \frac{a_e b_3}{b_2} \delta_t.$$

A variação com α_t é linear e o declive da recta é dado por

$$\frac{\partial C'_{L_t}}{\partial \alpha_t} = a_t - \frac{a_e b_1}{b_2} = a_t \left(1 - \frac{a_e b_1}{a_t b_2} \right) = a_t F, \quad (3.18)$$

em que F é designado por factor de manche livre,

$$F = 1 - \frac{a_e b_1}{a_t b_2}. \quad (3.19)$$

3.2.4 Ponto neutro de manche livre

O momento de picada total relativo ao centro de massa depende das contribuições da asa e do estabilizador (ver equação (2.39)),

$$\begin{aligned} C'_m &= C_{m_{acwb}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}}) - \frac{S_t}{S} \frac{l_t}{\bar{C}} C'_{L_t} \\ &= C_{m_{acwb}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}}) + \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) C'_{L_t} - \bar{V}_H C'_{L_t}. \end{aligned}$$

Tendo em conta que (ver equação (2.28))

$$C'_L = C_{L_{wb}} + \eta_t \frac{S_t}{S} C'_{L_t},$$

obtemos finalmente

$$C'_m = C_{m_{acwb}} + C'_L (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C'_{L_t}. \quad (3.20)$$

Derivando (3.20) em ordem a α , obtém-se

$$C'_{m_\alpha} = C'_{L_\alpha}(h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \frac{\partial C'_{L_t}}{\partial \alpha}. \quad (3.21)$$

O ponto neutro de manche livre define-se como o ponto para o qual $C'_{m_\alpha} = 0$. Logo, com $C'_{L_\alpha} \equiv a'$ e tendo em conta que

$$\frac{\partial C'_{L_t}}{\partial \alpha} = a_t F \Rightarrow \frac{\partial C'_{L_t}}{\partial \alpha} = \frac{\partial C'_{L_t}}{\partial \alpha_t} \frac{\partial \alpha_t}{\partial \alpha} = Fa_t(1 - \varepsilon_\alpha),$$

obtemos

$$h'_n = h_{n_{wb}} + \frac{Fa_t}{a'} \bar{V}_H (1 - \varepsilon_\alpha). \quad (3.22)$$

Pode-se obter facilmente uma expressão alternativa usando $C'_{m_\alpha} = C'_{L_\alpha}(h - h'_n)$:

$$\begin{aligned} h - h'_n &= \frac{C'_{m_\alpha}}{C'_{L_\alpha}} = \frac{1}{a'} \left(C_{m_\alpha} - \frac{C_{m_{\delta_e}}}{b_2} C_{he_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{a'} \left(a(h - h_n) - \frac{C_{m_{\delta_e}}}{b_2} C_{he_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Usando as expressões para a' , $C_{L_{\delta_e}}$, $C_{m_{\delta_e}}$ e C_{he_α} , obtemos finalmente

$$h'_n = h_n - \frac{a_e b_1}{a' b_2} (1 - \varepsilon_\alpha) \left[\bar{V}_H - \frac{S_t}{S} (h_n - h_{n_{wb}}) \right]. \quad (3.23)$$

Dado que $h_n = h_{n_{wb}} + \frac{a_t}{a} \bar{V}_H (1 - \varepsilon_\alpha)$, pode-se mostrar sem dificuldade que (3.22) e (3.23) são equivalentes.

A margem estática de manche livre define-se de forma análoga ao caso de manche fixo:

$$K'_n = h'_n - h. \quad (3.24)$$

Habitualmente $h'_n < h_n$ o que implica $K'_n < K_n$. Com manche livre verifica-se portanto uma redução da estabilidade estática.

3.3 Compensadores e equilíbrio com manche livre

A condição de manche livre determina para a deflexão do leme de profundidade um valor $\delta_{e_{free}} \neq \delta_{e_{trim}}$. Sem compensador, a velocidade de equilíbrio fica determinada pela condição de manche livre. O compensador permite alterar velocidade de equilíbrio mantendo livre o leme de profundidade.

As condições de equilíbrio com manche livre são

$$\begin{cases} C_{he} = C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha_{free} + b_2 \delta_{e_{free}} + b_3 \delta_t = 0, \\ C_L = C_{L_\alpha} \alpha_{free} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_{free}} + C_{L_{\delta_t}} \delta_t = C_{L_{trim}}, \\ C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{free} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_{free}} + C_{m_{\delta_t}} \delta_t = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

A velocidade de voo pretendida, V_{trim} , determina o valor de $C_{L_{trim}}$. O sistema de equações (3.25) pode resolver-se para obter os valores de α_{free} , $\delta_{e_{free}}$ e δ_t que satisfazem as

condições de equilíbrio para uma velocidade V_{trim} . O sistema (3.25) pode ser resolvido de forma aproximada supondo $C_{L_{\delta_t}} \approx 0$ e $C_{m_{\delta_t}} \approx 0$, isto é, desprezando a contribuição do compensador para a sustentação total e o momento de picada total. O compensador é importante apenas para garantir a condição de manche livre (primeira equação do sistema (3.25)). Nesta aproximação as duas últimas equações conduzem a

$$\begin{cases} C_{L_\alpha} \alpha_{\text{free}} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{free}}} = C_{L_{\text{trim}}} \\ C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{\text{free}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{free}}} = 0 \end{cases}$$

O sistema (3.3) é idêntico a (2.85), pelo que as soluções serão também idênticas ao caso de manche fixo. Logo, nesta aproximação,

$$\begin{cases} \delta_{e_{\text{free}}} = \delta_{e_{\text{trim}}} \\ \alpha_{\text{free}} = \alpha_{\text{trim}} \end{cases} \quad (3.26)$$

A condição de manche livre é (3.6):

$$C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha_{\text{free}} + b_2 \delta_{e_{\text{free}}} + b_3 \delta_{t_{\text{trim}}} = 0,$$

e permite obter

$$\delta_{t_{\text{trim}}} = -\frac{1}{b_3} (C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + b_2 \delta_{e_{\text{trim}}}). \quad (3.27)$$

Em conclusão, nesta aproximação (3.27) permite obter o valor de $\delta_{t_{\text{trim}}}$ que faz $\delta_{e_{\text{free}}} = \delta_{e_{\text{trim}}}$ e $\alpha_{\text{free}} = \alpha_{\text{trim}}$. Substituindo as expressões para $\delta_{e_{\text{trim}}}$ e α_{trim} , dadas por (2.87), obtém-se

$$\delta_{t_{\text{trim}}} = -\frac{1}{b_3} \left[C_{he_0} + \frac{C_{m_0}}{\det} (C_{he_\alpha} C_{L_{\delta_e}} - b_2 C_{L_\alpha}) - \frac{a' b_2}{\det} (h - h'_n) C_{L_{\text{trim}}} \right]. \quad (3.28)$$

Conclui-se que $\delta_{t_{\text{trim}}}$ varia linearmente com $C_{L_{\text{trim}}}$ (mantendo h cte), e varia linearmente com h .

3.4 Equilíbrio com deflexão do compensador

Note-se que o compensador pode ter uma deflexão não nula δ_t e a aeronave estar a voar com manche fixo. Nesse caso as equações de equilíbrio são apenas

$$\begin{cases} C_L = C_{L_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{trim}}} + C_{L_{\delta_t}} \delta_t = C_{L_{\text{trim}}}, \\ C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{trim}}} + C_{m_{\delta_t}} \delta_t = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

e a condição de manche livre, $C_{he} = 0$, não se verifica. A solução do sistema é

$$\begin{cases} \alpha_{\text{trim}} = \frac{C_{L_{\text{trim}}} C_{m_{\delta_e}} + C_{m_0} C_{L_{\delta_e}} + (C_{L_{\delta_e}} C_{m_{\delta_t}} - C_{L_{\delta_t}} C_{m_{\delta_e}}) \delta_t}{\det}, \\ \delta_{e_{\text{trim}}} = -\frac{C_{L_\alpha} C_{m_0} + C_{L_{\text{trim}}} C_{m_\alpha} + (C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_t}} - C_{L_{\delta_t}} C_{m_\alpha}) \delta_t}{\det}. \end{cases} \quad (3.30)$$

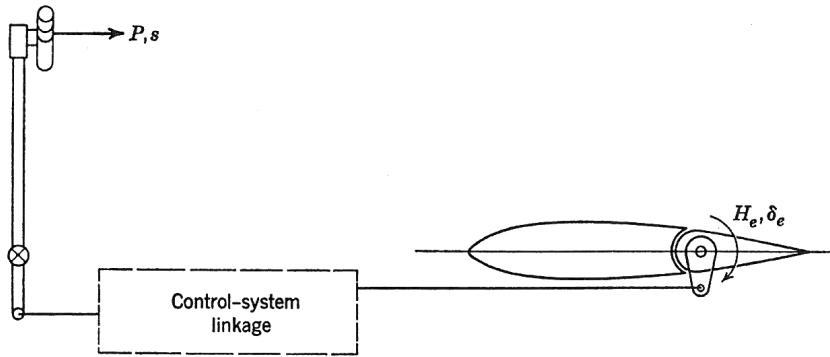


Figura 3.3: Ligações entre manche e leme de profundidade. (Fonte: [1])

Os valores de equilíbrio α_{trim} e $\delta_{e\text{trim}}$ dependem da deflexão do compensador, δ_t . No entanto, se pudermos admitir que o compensador tem uma contribuição desprezável para a sustentação total ($C_{L_{\delta_t}} \approx 0$) e para o momento de picada total ($C_{m_{\delta_t}} \approx 0$), obtemos a seguinte solução aproximada:

$$\begin{cases} \alpha_{\text{trim}} \approx \frac{C_{L_{\text{trim}}} C_{m_0} + C_{m_0} C_{L_{\delta_e}}}{\det} \\ \delta_{e\text{trim}} \approx -\frac{C_{L_\alpha} C_{m_0} + C_{L_{\text{trim}}} C_{m_\alpha}}{\det} \end{cases} \quad (3.31)$$

Nesta aproximação os valores de equilíbrio α_{trim} e $\delta_{e\text{trim}}$ não dependem da deflexão do compensador, δ_t . Esta influencia apenas no coeficiente do momento de charneira e, como veremos, na força de controlo.

3.5 Forças de Controlo

Nesta secção pretende-se determinar a força necessária para deflectir o leme de profundidade em função de $C_{L_{\text{trim}}}$ ou V_{trim} .

3.5.1 Forças de controlo e momento de charneira

Vamos considerar uma aeronave com um estabilizador horizontal com leme de profundidade e compensador. Admitimos que todos os elementos são rígidos e que o atrito é desprezável.

A figura 3.3 representa esquematicamente as ligações entre manche e leme de profundidade. Estas ligações podem ser, como nas aeronaves mais antigas, puramente mecânicas ou podem incluir sistemas hidráulicos, pneumáticos ou electrónicos. Em qualquer dos casos podemos supor que a força que é necessário exercer no manche, P , é proporcional ao momento de charneira H_e , isto é,

$$P = GH_e. \quad (3.32)$$

O coeficiente de proporcionalidade G é chamado factor de engrenagem (*gear factor*, em m^{-1}). O sentido da força P é definido como positivo se está dirigida para a cauda do avião. Tendo em conta a definição (3.1) do coeficiente do momento de charneira,

$$P = G \frac{1}{2} \rho V^2 S_e \bar{c}_e C_{he}. \quad (3.33)$$

Para prosseguir, é necessário encontrar uma expressão para C_{he} em função de $C_{L_{\text{trim}}}$ ou V_{trim} . O coeficiente do momento de charneira pode ser dado pela equação (3.2):

$$C_{he} = C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_t.$$

Como vimos anteriormente (equações (3.6) e (3.27)), quando $\delta_t = \delta_{t_{\text{trim}}}$, o equilíbrio atinge-se com manche livre, e nesse caso a força é nula:

$$P = 0 \Rightarrow C_{he} = 0 \Rightarrow \delta_{t_{\text{trim}}} = -\frac{1}{b_3} (C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + b_2 \delta_{e_{\text{trim}}}). \quad (3.34)$$

Consideremos agora o caso em que, mantendo a mesma velocidade de equilíbrio, $\delta_t \neq \delta_{t_{\text{trim}}}$. Como referido na secção 3.4, o equilíbrio neste caso é ainda definido, pelo menos de forma aproximada, por $\alpha = \alpha_{\text{trim}}$ e $\delta_e = \delta_{e_{\text{trim}}}$, mas agora o momento de charneira não se anula e a força não é nula. O coeficiente do momento de charneira pode então escrever-se

$$C_{he} = C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + b_2 \delta_{e_{\text{trim}}} + b_3 \delta_t \neq 0, \quad (3.35)$$

ou, usando (3.34),

$$C_{he} = b_3 (\delta_t - \delta_{t_{\text{trim}}}). \quad (3.36)$$

Usando a expressão (3.28) para $\delta_{t_{\text{trim}}}$, obtém-se

$$C_{he} = b_3 \delta_t + C_{he_0} + \frac{C_{m_0}}{\det} (C_{he_\alpha} C_{L_{\delta_e}} - b_2 C_{L_\alpha}) - \frac{a' b_2}{\det} (h - h'_n) C_{L_{\text{trim}}}. \quad (3.37)$$

Num voo horizontal o coeficiente de sustentação é dado por

$$C_{L_{\text{trim}}} = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = \frac{w}{\frac{1}{2} \rho V^2}, \quad (3.38)$$

em que $w = W/S$ é a carga alar. Substituindo (3.38) e (3.37) em (3.33) e ordenando os termos de modo a pôr em evidência a dependência de V , obtém-se a expressão para a força de controlo:

$$P = A + B \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (3.39)$$

com

$$A = -G S_e \bar{c}_e w \frac{a' b_2}{\det} (h - h'_n), \quad (3.40)$$

$$B = G S_e \bar{c}_e \left[b_3 \delta_t + C_{he_0} + \frac{C_{m_0}}{\det} (C_{he_\alpha} C_{L_{\delta_e}} - b_2 C_{L_\alpha}) \right] \quad (3.41)$$

A é um termo independente da velocidade (depende de w e K'_n), enquanto que B entra no termo relativo à dependência com a pressão dinâmica (com V^2).

Na figura 3.4 representa-se a variação da força de controlo com a velocidade. Da análise da figura e das equações (3.39), (3.40) e (3.41) podemos concluir que a força

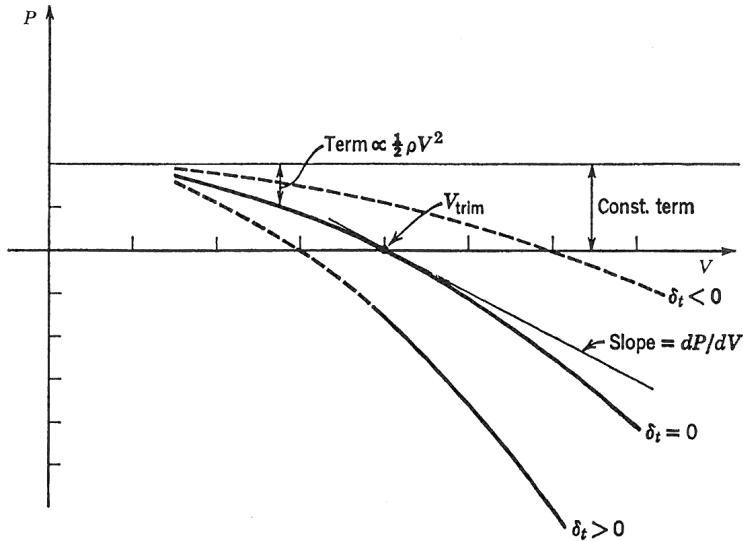


Figura 3.4: Variação da força de controlo com a velocidade. (Fonte: [1])

de controlo P é proporcional a $S_e \bar{c}_e$ (isto é, ao cubo da dimensão linear do avião) e ao factor de engrenagem G . A parte de P que depende da pressão dinâmica aumenta com ρ , diminuindo com altitude, e é proporcional a V^2 (P aumenta com a altitude e com V , mas nada se pode afirmar sobre a variação do módulo da força, $|P|$). A posição do centro de massa afecta apenas o termo constante (se h diminui, P aumenta). A carga alar também afecta apenas o termo constante, de modo que se w aumenta, P aumenta. Finalmente, a variação da deflexão do compensador, δ_t , altera o valor de B . Deste modo altera a curvatura da parábola, controla a intersecção com eixo V e portanto determina V_{trim} , isto é, o valor de V para o qual $P = 0$.

3.5.2 Gradiente da força de controlo

O gradiente da força de controlo traduz a variação de P necessária para alterar a velocidade V . Se o gradiente é grande, o controlo é pesado, ou seja, é preciso variar muito a força para mudar a velocidade; se é pequeno, o controlo é leve e uma pequena variação da força altera muito a velocidade.

O termo A depende da margem estática de manche livre, enquanto que B não depende da posição do centro de massa mas depende da deflexão do compensador. Assim, se alterarmos a posição do centro de massa de $h = h_1$ para $h = h_1 + \Delta h$ (se o CM se deslocar para a cauda do avião) e ao mesmo tempo alterarmos $\delta_{t,trim}$ para manter V_{trim} constante, verifica-se que o gradiente diminui com K'_n , como ilustra a figura 3.5. Quando $K'_n = 0$, A anula-se e o declive também se anula se mantivermos a condição de V_{trim} permanecer constante.

O gradiente da força de controlo obtém-se por derivação de P em ordem a V na equação (3.39):

$$P = A + B \frac{1}{2} \rho V^2 \Rightarrow \frac{dP}{dV} = B \rho V.$$

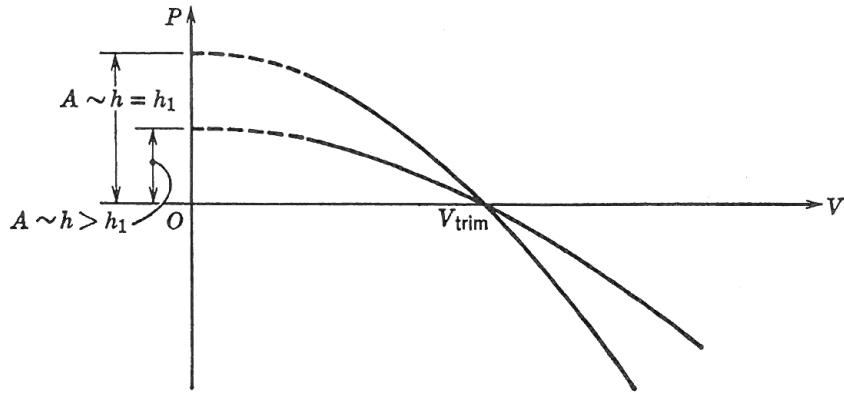


Figura 3.5: Variação da força de controlo com a velocidade V da aeronave para diferentes valores de h , mantendo fixo o valor de V_{trim} . (Fonte: [1])

Para valores típicos das derivadas de estabilidade o gradiente da força de controlo é negativo e varia linearmente com V .

Considere-se agora o caso de manche livre, em que $P = 0$. A deflexão do compensador é $\delta_t = \delta_{t_{\text{trim}}}$ e determina a velocidade de equilíbrio V_{trim} . Da equação (3.39) com $P = 0$ segue-se que

$$B = -\frac{A}{\frac{1}{2}\rho V_{\text{trim}}^2}. \quad (3.42)$$

Logo, obtemos

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{trim}} = -2\frac{A}{V_{\text{trim}}}. \quad (3.43)$$

Usando expressão para A , obtém-se finalmente

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{trim}} = 2G S_e \bar{c}_e w \frac{a' b_2}{\det} (h - h'_n) \frac{1}{V_{\text{trim}}}. \quad (3.44)$$

Conclui-se que quando o avião voa em equilíbrio com manche livre (sendo a força de controlo nula por definição e a velocidade V_{trim} determinada por $\delta_t = \delta_{t_{\text{trim}}}$), o gradiente da força de controlo é proporcional ao cubo da dimensão linear do avião (porque proporcional a $S_e \bar{c}_e$), à carga alar e à margem estática de manche livre K'_n , e é inversamente proporcional a V_{trim} . Logo, o controlo do leme de profundidade é «mais pesado» a baixa velocidade, quando o centro de massa está mais à frente (margem estática maior) e com maior peso.

Capítulo 4

Efeitos de superfícies hiper-sustentadoras e da propulsão na estabilidade longitudinal

4.1 Influência de superfícies hiper-sustentadoras

As superfícies hiper-sustentadoras são elementos que provocam alteração da configuração das asas. Os seus efeitos na estabilidade de uma aeronave decorrem principalmente da modificação dos valores de $h_{n_{wb}}$, $C_{m_{ac_{wb}}}$ e $C_{L_{wb}}$.

4.1.1 Influência dos flaps

Vamos considerar apenas o caso de flaps que cobrem parte da envergadura, no bordo de fuga.

Os efeitos aerodinâmicos dos flaps estão esquematizados na figura 4.1. A distribuição de sustentação na asa é alterada e o ângulo de downwash aumenta (porque a sustentação aumenta). Localmente, o efeito deflexão dos flaps é equivalente a aumentar a curvatura da asa. Como se mostra nas figuras 4.2 e 4.3, isto conduz a variações na sustentação da asa, no coeficiente do momento relativamente ao centro aerodinâmico

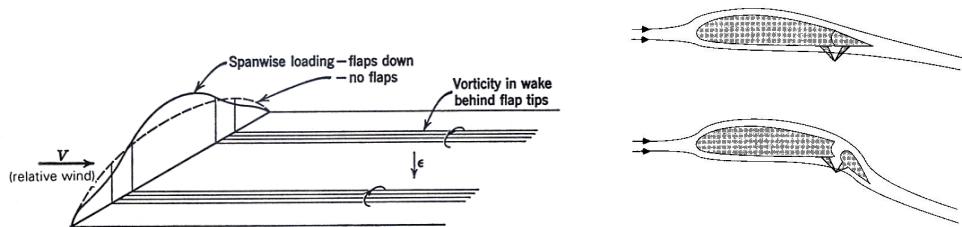


Figura 4.1: Efeitos aerodinâmicos. (Fonte: [1])

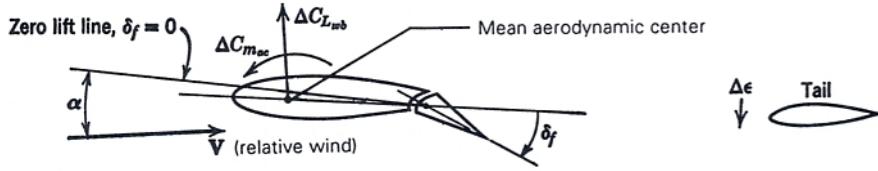


Figura 4.2: Efeitos da deflexão dos *flaps*. (Fonte: [1])

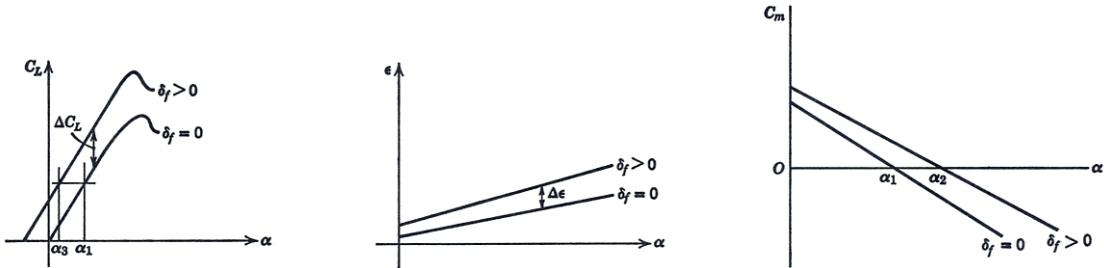


Figura 4.3: Efeito da deflexão dos *flaps* no coeficiente de sustentação (esquerda), ângulo de *downwash* (centro) e coeficiente do momento de picada (direita). (Fonte: [1])

da asa e no ângulo de *downwash*, resultando em

$$\Delta C_{m_{wb}} = \Delta C_{m_{ac_{wb}}} + \Delta C_{L_{wb}}(h - h_{n_{wb}}), \quad (4.1)$$

$$\Delta C_L = \Delta C_{L_{wb}} - a_t \frac{S_t}{S} \Delta \epsilon, \quad (4.2)$$

$$\Delta C_{m_t} = a_t V_H \Delta \epsilon. \quad (4.3)$$

Dado que, como se referiu acima, o efeito da deflexão dos *flaps* é equivalente a aumentar a curvatura do perfil, as variações $\Delta C_{m_{ac_{wb}}}$ e $\Delta C_{L_{wb}}$ não dependem de α mas apenas do ângulo de deflexão dos *flaps*. Admitiremos ainda que $\Delta h_{n_{wb}}$ é desprezável. Neste caso, o único efeito que a deflexão dos *flaps* tem em C_{L_α} e em C_{m_α} é devido à variação do ângulo de *downwash* ϵ .

Recordando que

$$C_{L_\alpha} \equiv a = a_{wb} \left[1 + \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{S_t}{S} (1 - \epsilon_\alpha) \right],$$

$$C_{m_\alpha} = a(h - h_{n_{wb}}) - a_t \bar{V}_H (1 - \epsilon_\alpha),$$

conclui-se que

$$\Delta a \equiv \Delta C_{L_\alpha} = a_{wb} \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{S_t}{S} (-\Delta \epsilon_\alpha) = -a_t \frac{S_t}{S} \Delta \epsilon_\alpha, \quad (4.4)$$

$$\Delta C_{m_\alpha} = (h - h_{n_{wb}}) \Delta a + a_t \bar{V}_H \Delta \epsilon_\alpha \quad (4.5)$$

$$= \left[-(h - h_{n_{wb}}) \frac{S_t}{S} + \bar{V}_H \right] a_t \Delta \epsilon_\alpha. \quad (4.6)$$

Como $\Delta a < 0$ e $\Delta C_{m_\alpha} > 0$, a deflexão dos flaps diminui a estabilidade.

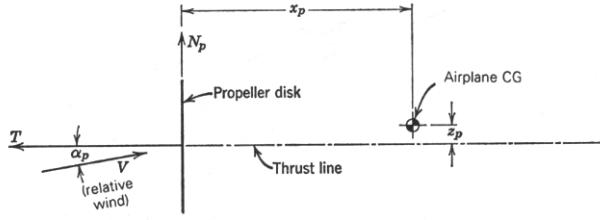


Figura 4.4: Forças laterais no hélice devido a ângulo de ataque. (Fonte: [1])

4.2 Influência da propulsão no equilíbrio e na estabilidade

Há tipos de propulsão muito diversos (hélice, turboprops, jacto, etc.), pelo que é difícil fazer tratamento exaustivo. Faremos uma referência apenas aos tipos de propulsão mais usados e mais estudados: hélice e jacto.

Formalmente, para descrever a influência da propulsão no equilíbrio e na estabilidade de uma aeronave basta introduzir nas equações os termos $C_{m_{0p}}$ e $\partial C_{m_p} / \partial \alpha$ e incluir os efeitos indirectos da propulsão nos coeficientes da asa+fuselagem e da cauda.

4.2.1 Propulsão a hélice

A força resultante da propulsão tem duas componentes: a força de propulsão T , ao longo do eixo (não afecta C_{m_α}), e uma força N_p , no plano do hélice.

A contribuição devida à força N_p no plano do hélice é

$$\Delta C_m = C_{N_p} \frac{x_p}{\bar{c}} \frac{S_p}{S}, \quad (4.7)$$

em que S_p é a área varrida pelo hélice e

$$C_{N_p} = \frac{N_p}{\frac{1}{2} \rho V^2 S_p}. \quad (4.8)$$

Para pequenos ângulos de ataque podemos admitir que C_{N_p} é proporcional α_p . Logo, N_p contribui para $C_{m_{0p}}$ e para $\partial C_{m_p} / \partial \alpha$. Esta última contribuição pode ser estimada a partir de (4.7):

$$\Delta C_m = C_{N_p} \frac{x_p}{\bar{c}} \frac{S_p}{S} \Rightarrow \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} = \frac{S_p}{S} \frac{x_p}{\bar{c}} \frac{\partial C_{N_p}}{\partial \alpha_p} \frac{\partial \alpha_p}{\partial \alpha} \quad (4.9)$$

Se o hélice se encontra longe da asa, $\frac{\partial \alpha_p}{\partial \alpha} = 1$. A colocação mais comum do hélice é perto da asa, o que induz *upwash* no hélice, caracterizado pelo ângulo de *upwash* ϵ_p . Deste modo,

$$\alpha_p = \alpha + \epsilon_p + \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial \alpha_p}{\partial \alpha} = 1 + \frac{\partial \epsilon_p}{\partial \alpha} \quad (4.10)$$

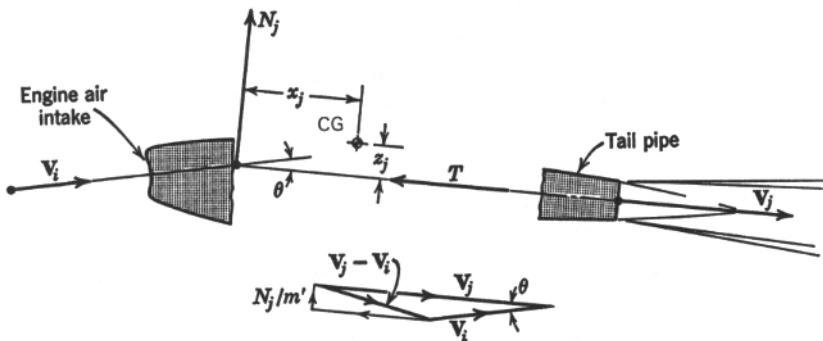


Figura 4.5: A direcção do escoamento incidente o do jacto não são iguais, o que provoca uma força normal à linha de propulsão. (Fonte: [1])

Conclui-se portanto que a contribuição da propulsão para C_{m_α} é

$$\frac{\partial C_{m_P}}{\partial \alpha} = \frac{S_P}{S} \frac{x_P}{\bar{c}} \frac{\partial C_{N_P}}{\partial \alpha_P} \left(1 + \frac{\partial \epsilon_P}{\partial \alpha} \right) \quad (4.11)$$

Outros efeitos que a propulsão pode produzir são:

- Aumento da sustentação na asa (se escoamento a jusante do hélice incide sobre a asa)
- Aumento do valor efectivo de a_t e a_e (depende de quão afectada é a cauda pelo escoamento induzido pelo hélice)
- Aumento do ângulo de *downwash* (difícil de estimar)

4.2.2 Propulsão a jacto

A influência da propulsão a jacto na derivada c_{m_α} decorre de vários efeitos. Dois deles estão representados nas figuras 4.5 e 4.6.

Na figura 4.5 mostra-se que num motor a jacto a direcção do escoamento incidente e a direcção do jacto podem não ser exactamente iguais, havendo uma variação do momento linear do fluido na direcção normal ao escoamento. Como consequência, existe uma força normal, representada na figura por N_j , a qual provoca um momento de picada relativamente ao centro de massa do avião.

Outro efeito está representado na figura 4.6. O jacto, saindo do motor, vai-se progressivamente misturando com o ar circundante, criando uma zona de mistura que vai aumentando de dimensões à medida que a distância à saída do motor aumenta. Para esta zona de mistura contribuem tanto o jacto como o ar circundante. Neste, à medida que parte do ar vai sendo integrado na zona de mistura, gera-se um escoamento na direcção do jacto (designado por *jet induced inflow*) o qual altera o escoamento em torno da cauda e deste modo o ângulo de ataque efectivo na cauda.

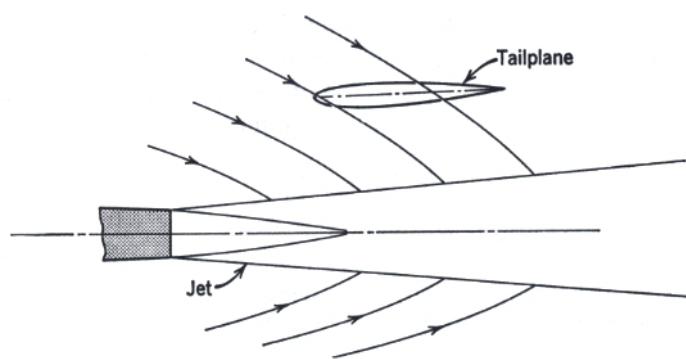


Figura 4.6: *Jet induced flow*: o diâmetro do jacto vai crescendo à custa de um fluxo de ar do meio circundante, o que pode provocar uma alteração do escoamento incidente na cauda. (Fonte: [1])

Capítulo 5

Estabilidade Lateral-Direccional

A maioria dos aviões tem um plano de simetria e é este tipo de aeronaves que iremos ter em conta. Um movimento diz-se «longitudinal» se não altera a posição do plano de simetria e «lateral» se altera o plano de simetria. Portanto, há movimento lateral se existir derrapagem (*sideslip*), isto é, velocidade com componente segundo y , ou velocidade angular de rolamento p (*roll*) ou velocidade angular de guinada r (*yaw*). Habitualmente há acoplamento entre movimentos (e controlo) laterais.

Em voo rectilíneo estacionário simétrico as forças e momentos laterais são nulos. Portanto, há equilíbrio para deflexão nula dos *ailerons* e do *rudder*, o que significa que num voo rectilíneo simétrico o *trim* lateral está garantido. Por esta razão a posição do centro de massa não é importante na estabilidade lateral-direccional.

A estabilidade estática lateral-direccional permite estabelecer condições para que, após uma pequena perturbação que induza uma velocidade de derrapagem ou um ângulo de pranchamento, o avião retorne à posição de voo simétrico com asas niveladas.

5.1 Estabilidade direccional

5.1.1 Condições de estabilidade

O ângulo de derrapagem β é o ângulo entre a velocidade da aeronave (*airspeed*) e o plano de simetria. Como se pode constatar da figura 5.1,

$$\beta = \arcsin \frac{v}{V}. \quad (5.1)$$

Num voo simétrico $v = 0$ e não existe derrapagem nem momento aerodinâmico de guinada. Pelo contrário, num voo com derrapagem existe um momento aerodinâmico de guinada N (ver figura 5.1). Para que um voo simétrico seja estável face a pequenas perturbações da velocidade lateral, é necessário que $N > 0$ para $\beta > 0$. A condição de estabilidade pode escrever-se como

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} > 0 \quad (5.2)$$

O coeficiente do momento de guinada define-se como

$$C_n = \frac{N}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b}, \quad (5.3)$$

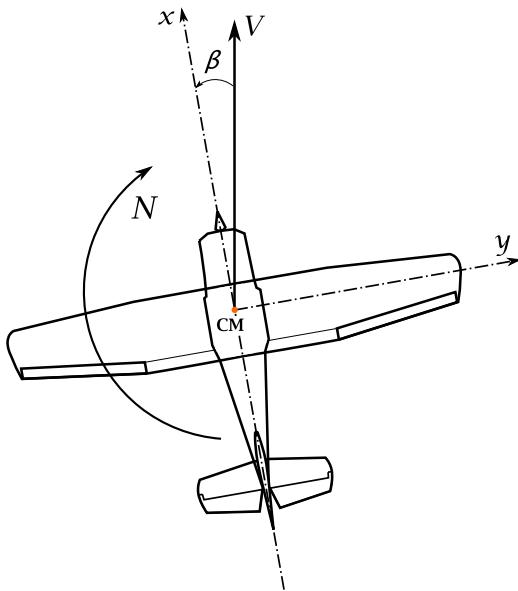


Figura 5.1: Voo com derrapagem.

em que b é a envergadura da asa. A condição de estabilidade para o estado não perturbado é

$$C_{n_\beta}(\beta = 0) \equiv \left(\frac{\partial C_n}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} > 0. \quad (5.4)$$

Para simplificar a notação omitir-se-á a menção a $\beta = 0$ sempre que isso não conduzir a ambiguidades.

A principal contribuição para C_{n_β} provém do estabilizador vertical (*fin*), e tem um efeito estabilizador, isto é, se $\beta > 0$, o momento gerado pelo estabilizador vertical é positivo. A fuselagem tem uma contribuição pequena, frequentemente desprezável, mas tem um efeito desestabilizador. Estas contribuições estão representadas na figura 5.2

A contribuição do estabilizador vertical depende do escoamento que nele incide. O ângulo de ataque efectivo no estabilizador vertical designa-se por α_F e convencionase que $\alpha_F > 0$ se provoca força de sustentação L_F no sentido positivo de y (ver figura 5.3). Desta forma, omitindo a influência do(s) hélice(s), da asa e da fuselagem no escoamento, $\alpha_F = -\beta$. Esta influência pode ser incluída através de um ângulo de *sidewash* σ :

$$\alpha_F = -\beta + \sigma. \quad (5.5)$$

O ângulo de *sidewash* é difícil de estimar, mas, sendo uma correção ao ângulo de derrapagem, podemos supor que é habitualmente bastante inferior a β .

O estabilizador vertical é uma superfície sustentadora, pelo que o coeficiente da força aerodinâmica na empenagem vertical depende linearmente do ângulo de ataque α_F e da deflexão δ_r do leme de direcção (*rudder*),

$$C_{L_F} = a_F \alpha_F + a_r \delta_r = a_F (-\beta + \sigma) + a_r \delta_r. \quad (5.6)$$

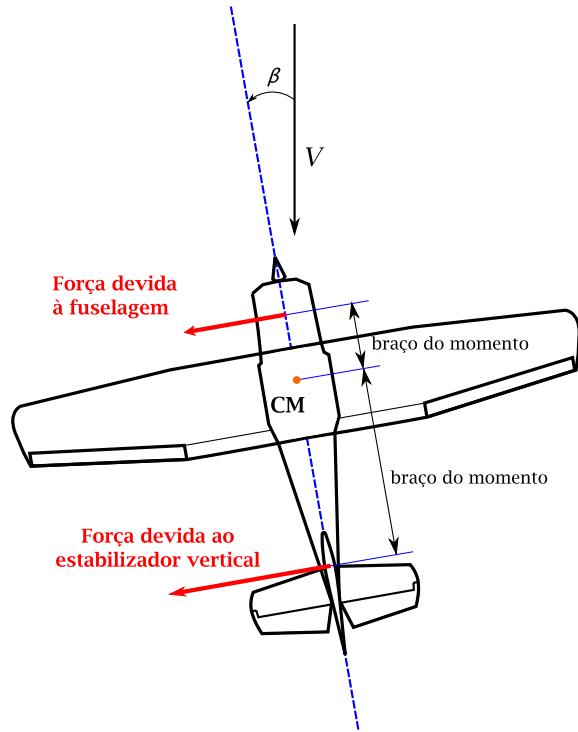


Figura 5.2: Forças aerodinâmicas devido a derrapagem.

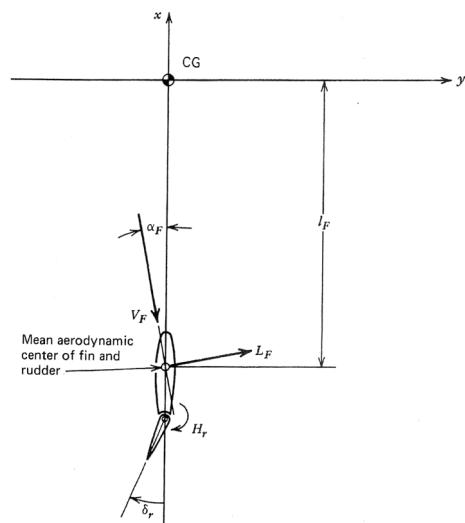


Figura 5.3: Estabilizador vertical. (Fonte: [1])

Aqui, α_F é o declive da curva de C_L com α para o estabilizador vertical, dado por (5.7), e α_r é eficiência do leme de direcção (*rudder*), dado por (5.8):

$$\alpha_F \equiv \frac{\partial C_{L_F}}{\partial \alpha_F}, \quad (5.7)$$

$$\alpha_r \equiv \frac{\partial C_{L_F}}{\partial \delta_r}. \quad (5.8)$$

O momento de guinada devido à força aerodinâmica aplicada no estabilizador vertical é (ver figura 5.3)

$$N_F = -L_F \cdot l_F = -C_{L_F} \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F l_F, \quad (5.9)$$

em que V_F é a velocidade do escoamento incidente no estabilizador vertical, S_F é a área do estabilizador vertical e l_F é distância ao longo da direcção longitudinal entre o centro aerodinâmico do estabilizador e o centro de massa (ou seja, é o módulo da coordenada x do centro aerodinâmico do estabilizador vertical). O coeficiente do momento de guinada é

$$C_{n_F} = \frac{N_F}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} = -\frac{C_{L_F} \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F l_F}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} = -C_{L_F} V_V \left(\frac{V_F}{V} \right)^2. \quad (5.10)$$

em que se usou a razão de volume do estabilizador vertical, V_V , definida por

$$V_V = \frac{S_F l_F}{S b}. \quad (5.11)$$

Recordando a equação (5.6), obtém-se

$$C_{n_F} = -[a_F(-\beta + \sigma) + a_r \delta_r] V_V \left(\frac{V_F}{V} \right)^2. \quad (5.12)$$

Derivando em ordem ao ângulo de derrapagem β , obtemos finalmente

$$\frac{\partial C_{n_F}}{\partial \beta} = a_F V_V \left(\frac{V_F}{V} \right)^2 \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right). \quad (5.13)$$

O factor de sidewash $\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}$ é difícil de estimar pois depende da alteração do escoamento devido à fuselagem e aos hélices. A asa tem também uma contribuição devida ao escoamento assimétrico (importante para asas com alongamento pequeno e com flecha). Note-se, no entanto, que é razoável supor que a variação de σ com β é habitualmente pequena e por essa razão este termo será frequentemente desprezado.

A razão de velocidades do escoamento incidente na asa e no estabilizador vertical é $\left(\frac{V_F}{V}\right) = 1$, excepto se o estabilizador vertical estiver na esteira do hélice. Nesse caso $V_F > V$.

Em conclusão, a contribuição do estabilizador vertical para a derivada C_{n_β} é positiva, pelo que tem um efeito estabilizador, e é proporcional a a_F e V_V .

5.1.2 Controlo de guinada

O controlo de guinada é feito através do leme de direcção (*rudder*), como se mostra na figura 5.4. Num voo simétrico com trajectória rectilínea a deflexão do *rudder* (δ_r) é

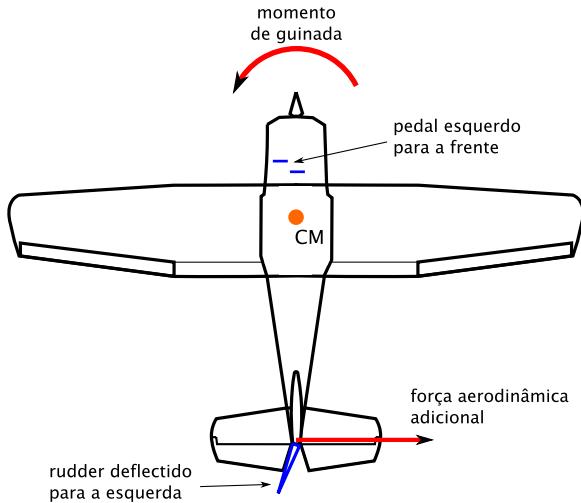


Figura 5.4: A deflexão do leme de direcção *rudder* leva ao aparecimento de uma força aerodinâmica no estabilizador vertical que provoca um momento de guinada.

nula. O *rudder* é importante quando se quer manter $\beta \neq 0$, como nas situações de voo com derrapagem (ex: aproximação à pista), quando um motor deixa de funcionar (OEI: *One Engine Inoperative*) ou em manobras.

Atendendo a que

$$\begin{cases} C_{L_F} = a_F(-\beta + \sigma) + a_r \delta_r, \\ C_{n_F} = -C_{L_F} V_V \left(\frac{V_F}{V} \right)^2, \end{cases}$$

conclui-se que

$$C_{n_{\delta_r}} = \frac{\partial C_{n_F}}{\partial \delta_r} = -a_r V_V \left(\frac{V_F}{V} \right)^2. \quad (5.14)$$

Num voo com ângulo de derrapagem estacionário, $\beta \neq 0$. Se apenas houver deflexão do *rudder* e não existir deflexão dos ailerons,

$$C_n = C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta_r}} \delta_r.$$

Para que o movimento seja estacionário $C_n = 0$. Logo, obtemos

$$\frac{\beta}{\delta_r} = -\frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_\beta}}. \quad (5.15)$$

Esta relação entre o ângulo de derrapagem e o ângulo de deflexão do *rudder* é apenas aproximada porque a deflexão do *rudder* provoca também um momento de rolagem. Este é compensado com os *ailerons*, o que provoca um momento adicional de guinada e a consequente necessidade de alterar de δ_r .

A deflexão do leme de direcção implica um momento de charneira e a correspondente força de controlo do *rudder*. Analogamente ao que acontece com o *elevator*, o momento de charneira é

$$C_{h_r} = b_1 \alpha_F + b_2 \delta_r, \quad (5.16)$$

enquanto que a força de controlo é dada por

$$P = G \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_r \bar{c}_r (b_1 \alpha_F + b_2 \delta_r) \quad (5.17)$$

$$= G \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_r \bar{c}_r [b_1 (-\beta + \sigma) + b_2 \delta_r]. \quad (5.18)$$

No caso de leme de direcção livre, $C_{h_r} = 0 \Rightarrow \delta_{r_{\text{free}}} = -\frac{b_1}{b_2} \alpha_F$.

$$C'_{L_F} = a_F \alpha_F + a_r \left(-\frac{b_1}{b_2} \alpha_F \right) = a_F \underbrace{\left(1 - \frac{a_r b_1}{a_F b_2} \right)}_{\text{fator de rudder livre}} \alpha_F \quad (5.19)$$

5.2 Estabilidade lateral

Os movimentos de rolamento e guinada estão acoplados e a análise da estabilidade deve ser feita considerando os dois movimentos em conjunto. No entanto, pode conseguir-se uma ideia aproximada acerca dos parâmetros de que depende a estabilidade lateral considerando apenas o grau de liberdade de rolamento, como se fosse independente da guinada.

Supomos um voo estacionário rectilíneo, horizontal e de asas niveladas. Existe estabilidade de rolamento se, quando uma pequena perturbação conduzir a um ângulo de pranchamento ϕ , o momento criado fizer a aeronave voltar a voo nivelado, ou seja, $C_{l_\phi} < 0$.

Por si só, o voo com ângulo de pranchamento não produz directamente nenhum momento de rolamento. No entanto, o ângulo de pranchamento conduz ao aparecimento de derrapagem e é esta que é responsável pelo momento de rolamento.

5.2.1 Efeitos que induzem derrapagem num voo com pranchamento

Num voo rectilíneo com ângulo de pranchamento ϕ a derrapagem pode iniciar-se devido a um efeito dinâmico: o peso não se encontra no plano de simetria e tem componente segundo y dada por $W \sin \phi$ (ver figura 5.5). A aceleração lateral causada por esta componente lateral do peso faz aparecer uma velocidade lateral, ou seja, uma velocidade de derrapagem.

Existe também um efeito «geométrico», que decorre de a direcção da velocidade não coincidir com o eixo de rotação do avião. Consideremos um voo rectilíneo horizontal em que o avião tem um ângulo de ataque α_x , como exemplificado na figura 5.6. Nesta situação a velocidade do avião está no plano de simetria e $v_y = 0$. Admitamos agora que uma pequena perturbação faz o avião rolar em torno do eixo x , passando o avião a ter um ângulo de pranchamento ϕ (figura 5.7). Se a perturbação não fez alterar a velocidade linear do avião, então esta deixou de estar no plano de simetria e tem uma componente segundo o novo eixo y , ou seja, existe uma velocidade de derrapagem.

5.2.2 Momento de rolamento para estabilidade

Para existir estabilidade lateral, a derrapagem deve induzir um momento de rolamento que volta a nivelar a aeronave.

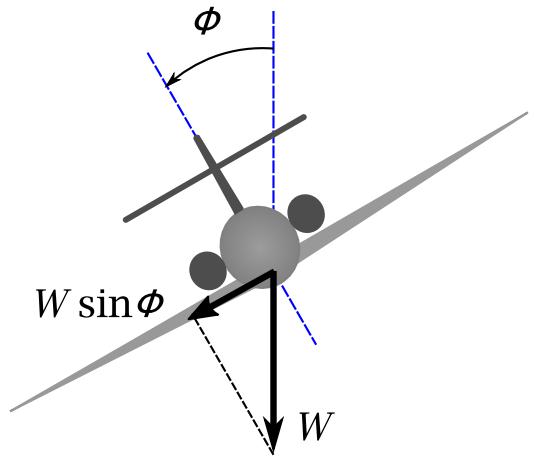


Figura 5.5: Voo com pranchamento: o peso tem componente lateral não compensada pela sustentação, o que induz derrapagem.



Figura 5.6: Voo nivelado: vista de perfil (esquerda) e a partir da cauda (direita). A velocidade do avião encontra-se no plano de simetria.

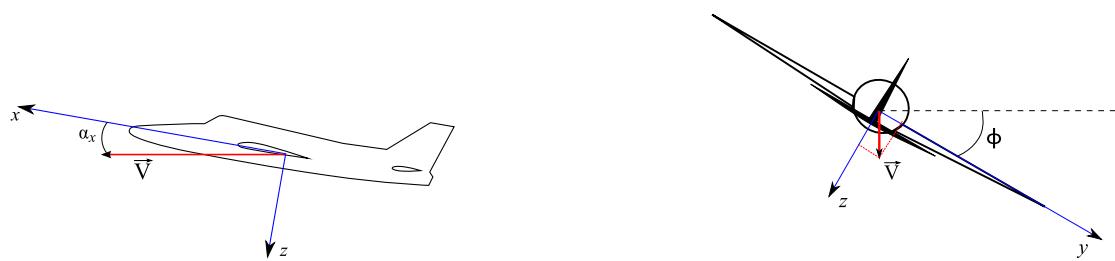


Figura 5.7: Voo com asas não niveladas, com ângulo de pranchamento ϕ . Agora a velocidade não se encontra no plano de simetria e tem componente v segundo y .

Se considerarmos o efeito «dinâmico», a figura 5.5 permite concluir que se $\phi > 0$ a derrapagem induzida é $\beta > 0$ e que o momento a criar para nivelar as asas deve ser $\Delta C_l < 0$. Mas este momento deve depender da derrapagem criada, pelo que, na zona de linearidade, $\Delta C_l = C_{l_\beta} \beta$ e, tendo em conta o sinal pretendido para ΔC_l , conclui-se que a condição para existir estabilidade lateral é $C_{l_\beta} < 0$.

A mesma conclusão se obtém considerando o efeito «geométrico». De facto, num voo nivelado com ângulo de ataque α_x a velocidade do avião tem componentes

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V \cos \alpha_x \\ 0 \\ V \sin \alpha_x \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

enquanto que num voo não nivelado, com ângulo de pranchamento ϕ , tem componentes

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V \cos \alpha_x \\ V \sin \alpha_x \sin \phi \\ V \sin \alpha_x \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Nos novos eixos há componente de \vec{V} segundo y , pelo que

$$\sin \beta = \frac{v}{V} = \frac{V \sin \alpha_x \sin \phi}{V} = \sin \alpha_x \sin \phi, \quad (5.22)$$

isto é, existe um ângulo de derrapagem que depende de ϕ . Esta derrapagem induz um momento de rolamento que é proporcional ao ângulo de derrapagem β ,

$$\Delta C_l = C_{l_\beta} \beta, \quad (5.23)$$

ou, usando (5.22),

$$\Delta C_l = C_{l_\beta} \beta = C_{l_\beta} \arcsin(\sin \alpha_x \sin \phi). \quad (5.24)$$

Logo, quando as asas deixam de estar niveladas e existe um ângulo de pranchamento ϕ é induzido momento de rolamento que é proporcional a

$$\frac{\partial C_l}{\partial \phi} = \frac{\partial C_l}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \phi} = C_{l_\beta} \frac{\sin \alpha_x \cos \phi}{(1 - \sin^2 \alpha_x \sin^2 \phi)^{1/2}}.$$

Se α_x for pequeno, $\sin \beta = \sin \alpha_x \sin \phi \Rightarrow \beta \approx \alpha_x \sin \phi$. Conclui-se que

$$\frac{\partial C_l}{\partial \phi} = C_{l_\beta} \frac{\sin \alpha_x \cos \phi}{(1 - \sin^2 \alpha_x \sin^2 \phi)^{1/2}} \approx C_{l_\beta} \alpha_x \cos \phi$$

e, supondo $\alpha_x > 0$, o momento de rolamento induzido tem sinal de C_{l_β} . Mas para haver estabilidade lateral o momento de rolamento induzido deve contrariar o rolamento, isto é, $\frac{\partial C_l}{\partial \phi}$ deve ser negativo. Conclui-se então que, para haver estabilidade lateral, é necessário que

$$C_{l_\beta} < 0. \quad (5.25)$$

5.2.3 «Efeito diedro»

A asa, a fuselagem e o estabilizador vertical contribuem para a derivada C_{l_β} . A contribuição mais importante é devida ao ângulo de diedro (é tão importante que C_{l_β} é por vezes chamada *efeito diedro*). O alongamento e afilamento da asa, bem como a flecha também são importantes para C_{l_β} . Um outro factor importante é a posição da asa relativamente à fuselagem (asa alta ou asa baixa).

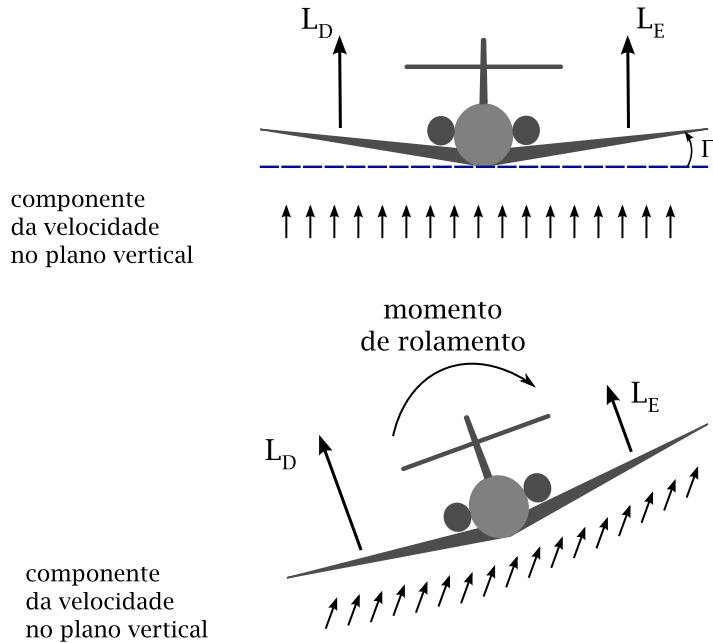


Figura 5.8: Efeito diedro: num voo nivelado sem derrapagem (figura de cima) a sustentação é igual em ambas as asas, enquanto que num voo com ângulo de pranchamento (figura de baixo), para um avião com ângulo de diedro $\Gamma > 0$, a derrapagem induzida leva a uma diferença de sustentação em cada uma das asas, que provoca um momento de rolamento que tende a nivelar as asas.

Contribuição do diedro das asas

Quando as asas têm um ângulo de diedro, a existência de velocidade de derrapagem leva a uma diferença na sustentação nas asas que provoca um momento de rolamento. Este contraria o pranchamento inicial (ver figura 5.8) e tem por isso um efeito estabilizador.

Para determinar uma expressão aproximada para a contribuição do diedro das asas para a derivada $C_{l\beta}$ começemos por notar que o ângulo de ataque numa asa depende da razão entre a componente da velocidade perpendicular à linha de corda do perfil, V_n , e a componente segundo a linha de corda do perfil. De forma aproximada,

$$\alpha \approx \frac{V_n}{V}. \quad (5.26)$$

No caso de asas com diedro, a figura 5.9 permite constatar que a componente normal da velocidade é, para a asa direita,

$$V_n = w \cos \Gamma + v \sin \Gamma \approx w + v\Gamma, \quad (5.27)$$

e para a asa esquerda,

$$V_n = w \cos \Gamma - v \sin \Gamma \approx w - v\Gamma. \quad (5.28)$$

Para pequenos ângulos de derrapagem, $\beta = v/V \Rightarrow v = \beta V$. Tendo em conta (5.26), a variação de ângulo de ataque devido ao ângulo de diedro é, na asa direita $\Delta\alpha = +\beta\Gamma$,

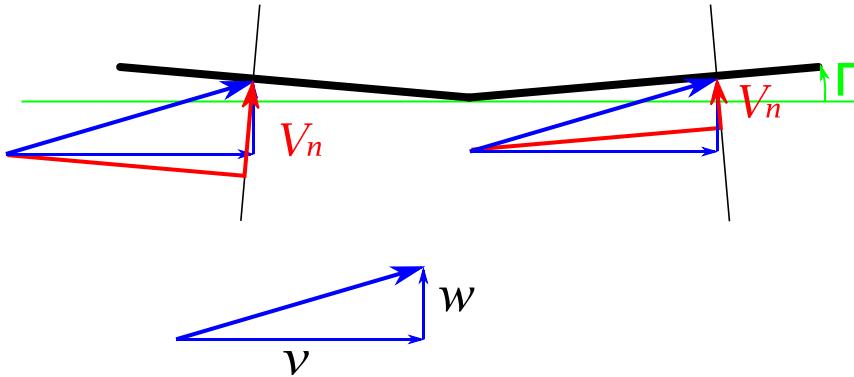


Figura 5.9: Diferença de ângulo de ataque devido ao diedro.

enquanto que na asa esquerda é $\Delta\alpha = -\beta\Gamma$. Esta variação de ângulo de ataque leva a uma diferença de sustentação entre a asa esquerda e a asa direita que gera um momento de rolamento. Para perceber de que depende este momento, consideremos uma pequena secção da asa a uma distância y da raiz (y é positivo para a asa direita e negativo para a asa esquerda), de largura dy e com uma corda c . O perfil da secção é caracterizado pela curva de sustentação com o ângulo de ataque, cujo declive é C_{ℓ_α} , o qual pode depender da posição y pois o perfil pode variar ao longo da asa. A sustentação adicional criada devida à derrapagem pela secção considerada é

$$\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) C_{\ell_\alpha} \Delta\alpha c dy.$$

Como existem duas secções em posições simétricas $\pm y$, para as quais $\delta\alpha = \pm\beta\Gamma$, a contribuição delas para o momento de rolamento criado é

$$-2y \left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) C_{\ell_\alpha} (\beta\Gamma) c dy. \quad (5.29)$$

O momento de rolamento obtém-se integrando estas contribuições para toda a asa. O coeficiente C_l é então

$$C_l = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} (-2) \left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) \beta\Gamma \int_0^{b/2} C_{\ell_\alpha} c y dy. \quad (5.30)$$

Note-se que tanto a corda c como C_{ℓ_α} podem depender de y . A derivada C_{l_β} obtém imediatamente de (5.30) por derivação em ordem a β

$$(C_{l_\beta})_{\text{diedro}} = -\frac{2}{Sb} \Gamma \int_0^{b/2} C_{\ell_\alpha} c y dy. \quad (5.31)$$

Para irmos mais longe, temos de fazer alguma hipóteses sobre a asa. Admitindo uma asa em que C_{ℓ_α} é constante ao longo da envergadura e em que o afilamento é linear, caso em que

$$c(y) = c_{\text{root}} - \frac{(c_{\text{root}} - c_{\text{tip}})}{b/2} y = c_{\text{root}} \left(1 - \frac{(1-\lambda)}{b/2} y\right), \quad (5.32)$$

$$S = c_{\text{root}} \frac{b}{2} (1 + \lambda), \quad (5.33)$$

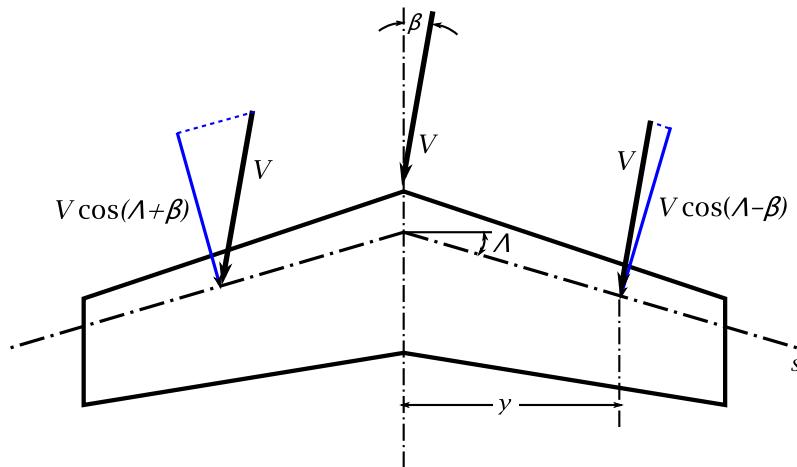


Figura 5.10: Contribuição devida ao ângulo de flecha. Neste caso usamos o ângulo de flecha Λ a 1/4 de corda. A distância medida ao longo da linha de 1/4 de corda é designada por s , enquanto que y é a coordenada habitual.

o integral calcula-se facilmente e obtemos

$$(C_{l_\beta})_{\text{diedro}} = -\frac{1+2\lambda}{6(1+\lambda)} C_{\ell_\alpha} \Gamma, \quad (5.34)$$

que, no caso de asas rectangulares, se reduz a

$$(C_{l_\beta})_{\text{diedro}} = -\frac{C_{\ell_\alpha}}{4} \Gamma. \quad (5.35)$$

Na dedução destas expressões foram desprezados os efeitos tridimensionais do escoamento, que são especialmente importantes para asas com alongamento pequeno. A expressão (5.31) sobrestima a contribuição do diedro das asas para a derivada C_{l_β} e não deve ser usada quando se pretendem valores com alguma exactidão. No entanto, podem-se tirar conclusões importantes, que são válidas em geral: esta contribuição para C_{l_β} é proporcional ao ângulo de diedro Γ e é negativa, como pretendido para garantir a estabilidade.

Contribuição da flecha da asa

A flecha da asa contribui também para a derivada C_{l_β} . A razão é que a sustentação criada depende da velocidade perpendicular à linha de referência (num voo subsónico usa-se a linha a 1/4 de corda). Num voo com derrapagem a componente da velocidade normal à linha de referência é $V \cos(\Lambda - \beta)$ na asa direita e $V \cos(\Lambda + \beta)$ na asa esquerda (cfr. figura 5.10). Considere-se uma secção da asa à distância s da raiz medida ao longo da linha de referência. Sendo o coeficiente de sustentação da secção (com base na velocidade a corda normal à linha de referência) dado por C_{ℓ_n} , a sustentação da secção da asa direita é

$$\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) \cos^2(\Lambda - \beta) c \cos \Lambda C_{\ell_n} ds$$

e a da secção correspondente da asa esquerda é

$$\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) \cos^2(\Lambda + \beta) c \cos \Lambda C_{\ell_n} ds.$$

Esta diferença de sustentações dá origem a um momento de rolamento

$$y \left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) [\cos^2(\Lambda + \beta) - \cos^2(\Lambda - \beta)] c \cos \Lambda C_{\ell_n} ds.$$

Tendo em conta que $y = s \cos \lambda \Rightarrow dy = ds \cos \lambda$, o coeficiente do momento de rolamento é dado por

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{1}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} \left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) [\cos^2(\Lambda + \beta) - \cos^2(\Lambda - \beta)] C_{\ell_n} \int_0^{b/2} c y dy \\ &= -\frac{1}{S b} C_{\ell_n} \sin(2\Lambda) \sin(2\beta) \int_0^{b/2} c y dy. \end{aligned} \quad (5.36)$$

A derivada C_{l_β} é calculada em $\beta = 0$:

$$C_{l_\beta} = \left(\frac{\partial C_l}{\partial \beta}\right)_{\beta=0}. \quad (5.37)$$

Por outro lado a sustentação total obtém-se por integração ao longo da envergadura das contribuições das secções, e para $\beta = 0$ é

$$L = 2 \left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) \cos^2 \Lambda C_{\ell_n} \int_0^{b/2} c dy = 2 \left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) \cos^2 \Lambda C_{\ell_n} \frac{S}{2}, \quad (5.38)$$

onde se conclui que

$$C_L = C_{\ell_n} \cos^2 \Lambda. \quad (5.39)$$

Podemos finalmente escrever

$$(C_{l_\beta})_{\text{flecha}} = - \left[\frac{\int_0^{b/2} c y dy}{S b} \right] \frac{C_L}{\cos^2 \Lambda} \sin(2\Lambda) \cdot 2 = -4C_L \tan \Lambda \left[\frac{\int_0^{b/2} c y dy}{S b} \right]. \quad (5.40)$$

Para uma asa com afilamento linear (5.32), obtém-se

$$(C_{l_\beta})_{\text{flecha}} = -\frac{1+2\lambda}{3(1+\lambda)} C_L \tan \Lambda. \quad (5.41)$$

Estes resultados são apenas qualitativamente correctos, mas permitem concluir que a contribuição da flecha da asa para a derivada C_{l_β} é proporcional a C_L e à tangente de Λ e é negativa, ou seja, tem um efeito estabilizador. É mais importante para velocidades menores, quando C_L é maior e, para dada velocidade, é mais importante para altitudes mais elevadas, quando ρ é menor e portanto C_L maior.

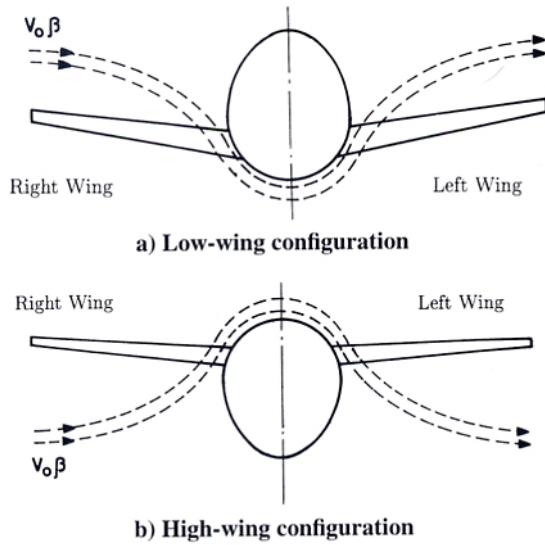


Figura 5.11: Posição da asa na fuselagem

Contribuição da posição da asa na fuselagem

A posição da asa na fuselagem influencia o modo como a componente cruzada do escoamento (devida à componente da velocidade segundo y) altera o ângulo de ataque efectivo na asa. Na figura 5.11 comparam-se as configurações de asa baixa e asa alta.

Para aviões com asa baixa, α é maior na asa esquerda, o que leva a um aumento da sustentação na asa esquerda, e portanto a um momento de rolamento $C_l > 0$. Para aviões com asa alta, α aumenta na asa direita, pelo que a sustentação aumenta na asa direita, o que conduz a $C_l < 0$. Conclui-se que a posição de asa alta contribui para a estabilidade lateral, enquanto que a asa baixa tem um efeito desestabilizador. Habitualmente os aviões de asa baixa necessitam de maiores ângulos de diedro.

Como estimativa para as contribuições da posição da asa na fuselagem podem usarse os seguintes valores [3]:

$$\begin{cases} \text{Asa alta : } (C_{l_\beta})_{\text{pos. asa}} = -0.00016/\circ \\ \text{Asa média : } (C_{l_\beta})_{\text{pos. asa}} = 0 \\ \text{Asa baixa : } (C_{l_\beta})_{\text{pos. asa}} = +0.00016/\circ \end{cases}$$

Evidentemente que estes valores dão apenas uma indicação da ordem de grandeza esperada para o efeito da posição da asa na fuselagem.

Contribuição do estabilizador vertical

A força lateral causada pela derrapagem é dada por:

$$L_F = a_F(-\beta + \sigma) \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F$$

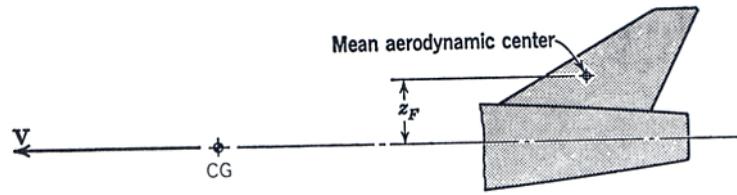


Figura 5.12: Posição do centro aerodinâmico do estabilizador vertical em relação ao eixo x . (Fonte: [1])

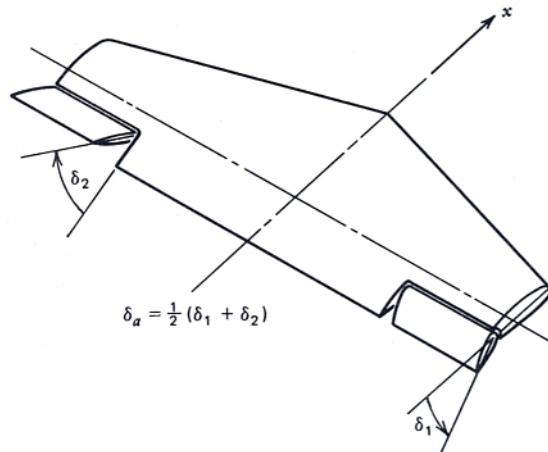


Figura 5.13: Deflexão dos ailerons. (Fonte: [1])

O coeficiente do momento de rolamento respectivo é:

$$(C_l)_{\text{estab. vertical}} = \frac{L_F z_F}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} = a_F (-\beta + \sigma) \frac{S_F z_F}{S b} \left(\frac{V_F}{V} \right)^2.$$

Derivando em ordem a β obtemos a expressão da contribuição do estabilizador vertical para a derivada $C_{l\beta}$:

$$(C_{l\beta})_{\text{estab. vertical}} = -a_F \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \frac{S_F z_F}{S b} \left(\frac{V_F}{V} \right)^2$$

Esta contribuição é negativa, e portanto é estabilizadora, mas normalmente é muito menor que as tratadas anteriormente, uma vez que tanto S_F/S como z_F/b são pequenos.

5.2.4 Controlo de rolamento

O controlo da **velocidade angular de rolamento** é feito pelos ailerons.

Por definição, a deflexão total dos *ailerons* é a média da deflexão de cada um (ver figura 5.13):

$$\delta_a = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2). \quad (5.42)$$

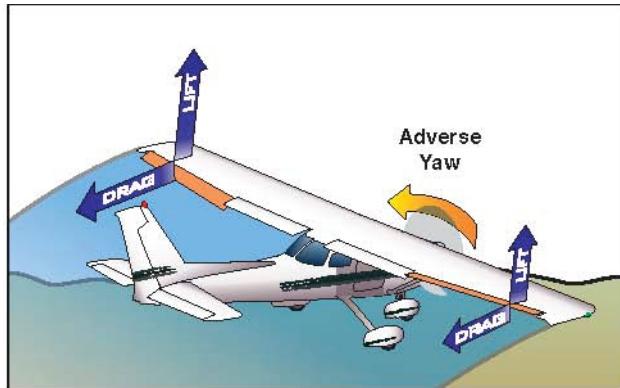


Figura 5.14: Guinada adversa

A deflexão dos ailerons é considerada positiva se o aileron da asa direita é deflectido para baixo e o da asa esquerda deflectido para cima. (Esta é a convenção usada em [1]; muitos autores usam a convenção oposta.) Com esta convenção,

$$\delta_a > 0 \Rightarrow C_l < 0 \Rightarrow C_{l_{\delta_a}} < 0 \quad (5.43)$$

Note-se que a deflexão dos ailerons produz também momento de guinada. Por isso a derivada $C_{n_{\delta_a}}$ não é nula.

Guinada adversa

No caso de ailerons simples (tipo flap), a sua deflexão para baixo leva a um aumento de sustentação e de resistência induzida. Assim, $\delta_a > 0$ leva a um aumento de resistência aerodinâmica na asa direita e a uma diminuição na asa esquerda. O diferencial de resistência aerodinâmica provoca um momento de guinada positivo (*nose-right*). Ora, normalmente $\delta_a > 0$ usa-se para iniciar viragem à esquerda e o momento de guinada provocado tem o efeito inverso, chamando-se por isso **guinada adversa** (*aileron adverse yaw*). O efeito da guinada adversa é mais importante em aeronaves com grande alongamento.

O efeito da guinada adversa é normalmente corrigido usando o *rudder*. Para minimizar a necessidade de correção é possível usar-se *frise ailerons*, *spoilers* ou *ailerons* diferenciais. Também se pode recorrer ao acoplamento de *ailerons* e *rudder*.

Reversão dos ailerons (*aileron reversal*)

A deflexão de uma superfície de controlo (tipo *flap*) faz variar a carga aerodinâmica aplicada. O seu centróide está localizado perto de $c/2$ para velocidades baixas e desloca-se para trás quando velocidade aumenta (especialmente para velocidades supersónicas). Quando o centróide está atrás do eixo de torsão da asa, a deflexão de um *aileron* provoca uma torsão na asa e esta conduz a uma variação do ângulo de ataque, com a consequente variação da sustentação. A torsão na asa, sendo causada pela carga aerodinâmica devida à deflexão do *aileron*, é proporcional à pressão dinâmica. Além disso, para uma deflexão igual nos *ailerons* esquerdo e direito, a torsão na asa

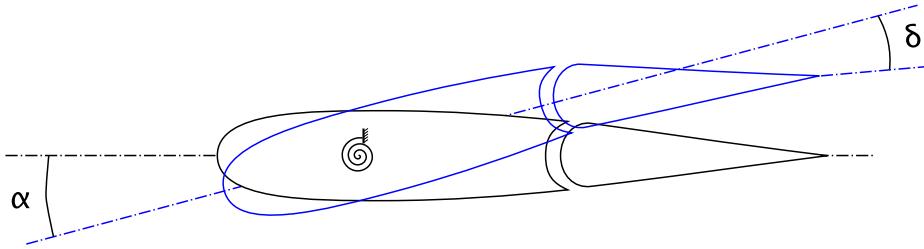


Figura 5.15: Perfil alar simétrico com um flap. A mola de torsão modela a rotação do perfil quando sujeito a momentos aerodinâmicos. Se inicialmente ângulo de ataque é nulo e se o flap for deflectido de um ângulo δ , o momento aerodinâmico criado leva o perfil a rodar de um ângulo α . A mola de torsão provoca um momento contrário $k_\theta \alpha$. Em equilíbrio os dois momentos anulam-se.

deverá ser antissimétrica. Assim, uma deflexão nos *ailerons* provoca um momento de rolamento dado por

$$\Delta C_l = (C_{l_{\delta_a}})_{\text{rígido}} \delta_a + c_{\text{torsão}} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) \delta_a,$$

em que $c_{\text{torsão}}$ é um coeficiente de proporcionalidade positivo nos casos de interesse. A derivada $C_{l_{\delta_a}}$ é então

$$C_{l_{\delta_a}} = (C_{l_{\delta_a}})_{\text{rígido}} + c_{\text{torsão}} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right).$$

Quando a velocidade aumenta, $|C_{l_{\delta_a}}|$ diminui, podendo mesmo anular-se. A velocidade para a qual $C_{l_{\delta_a}} = 0$ é chamada velocidade de reversão V_R ; nessa situação $(C_{l_{\delta_a}})_{\text{rígido}} + c_{\text{torsão}} (\rho V^2 / 2) = 0$ e podemos escrever

$$C_{l_{\delta_a}} = (C_{l_{\delta_a}})_{\text{rígido}} \left(1 - \frac{V^2}{V_R^2} \right). \quad (5.44)$$

Acima da velocidade de reversão, uma deflexão positiva dos ailerons conduz a uma diminuição de sustentação na asa direita, a um aumento de sustentação na asa esquerda, e consequentemente a um momento de rolamento **positivo** (reversão do comportamento habitual dos ailerons).

Para investigar quais as grandezas que influenciam a velocidade de reversão, consideremos um modelo simples de um perfil alar simétrico montado numa mola de torsão com constante k_θ (modelando a torsão da asa real). Quando o flap tem uma deflexão δ , o momento aerodinâmico criado leva o perfil a rodar de um ângulo α (figura 5.15). Em equilíbrio

$$k_\theta \alpha = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) c^2 C_{m_\delta} \delta. \quad (5.45)$$

Note-se que C_{m_δ} é negativo, pelo que uma deflexão positiva do flap dá origem a uma rotação nose-down e a uma diminuição do ângulo de ataque. O coeficiente de sustentação é

$$C_\ell = C_{\ell_\alpha} \alpha + C_{\ell_\delta} \delta, \quad (5.46)$$

e usando (5.45),

$$C_\ell = \left(C_{\ell_\alpha} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) c^2 C_{m_\delta}}{k_\theta} + C_{\ell_\delta} \right) \delta. \quad (5.47)$$

A velocidade de reversão atinge-se quando o coeficiente de sustentação não depende da deflexão do leme, ou seja, quando o termo entre parêntesis em (5.47) se anula. Obtemos então

$$V_R = \sqrt{-\frac{2k_\theta C_{\ell_\delta}}{\rho c^2 C_{\ell_\alpha} C_{m_\delta}}}. \quad (5.48)$$

Conclui-se que o quadrado da velocidade de reversão é proporcional à rigidez da asa (pois k_θ aumenta com a rigidez da asa) e inversamente proporcional à densidade do ar. O *aileron reversal* é mais pronunciado para asas finas e flexíveis e para altitudes mais baixas.

Capítulo 6

Equações do Movimento

Neste capítulo estabelecer-se-ão as equações que regem a dinâmica de um avião, considerado como um corpo rígido. Na realidade um avião é um corpo deformável, mas na maior parte das situações dinâmicas os efeitos da elasticidade não são muito importantes e é possível, quando necessário, tratá-los como pequenas modificações relativamente ao caso rígido.

6.1 Referenciais

Como referencial inercial vamos usar um referencial fixo na Terra (Ox_Eyz_E), designado por \mathcal{F}_E . Uma vez que pretendemos analisar apenas o voo durante intervalos de tempo relativamente curtos (da ordem de minutos), podemos desprezar a curvatura da Terra e considerar a aceleração da gravidade \hat{g} como vertical. O eixo Oz_E é escolhido segundo a direcção e sentido da gravidade (é vertical e aponta para baixo). O referencial ($Cxyz$) fixo no avião é designado por \mathcal{F}_B . Tem origem no centro de massa da aeronave e move-se solidário com ela. A figura 6.1 representa os dois referenciais.

Qualquer dos referenciais pode ser usado para medir grandezas físicas. Assim, podemos medir a velocidade do ar relativamente ao avião ou relativamente à Terra. Por outro lado, os eixos e os vectores de base de qualquer dos referenciais pode ser usado para escrever qualquer vector. Podemos, por exemplo, escrever a velocidade do ar relativamente ao avião tanto no referencial do avião como no referencial da Terra. Sempre que possa haver ambiguidades usaremos a notação

$$\vec{V}_b^a$$

em que o expoente a identifica o referencial relativamente ao qual medimos o vector e o índice b identifica o referencial no qual escrevemos as componentes do vector. Exemplificando o uso da notação, a velocidade relativamente à Terra é \vec{V}^E , e tanto pode ser escrita no referencial da Terra, $\vec{V}_E^E = (\dot{x}^E, \dot{y}^E, \dot{z}^E)$, como no referencial do avião, $\vec{V}_B^E = (u^E, v^E, w^E)$. A velocidade do avião relativamente ao ar (*airspeed*), pode ser designada simplesmente por $\vec{V}_B = (u, v, w)$, escrita no referencial do avião. Note-se que, se o vento tiver velocidade \vec{W} relativamente à Terra,

$$\vec{V}^E = \vec{V} + \vec{W}.$$

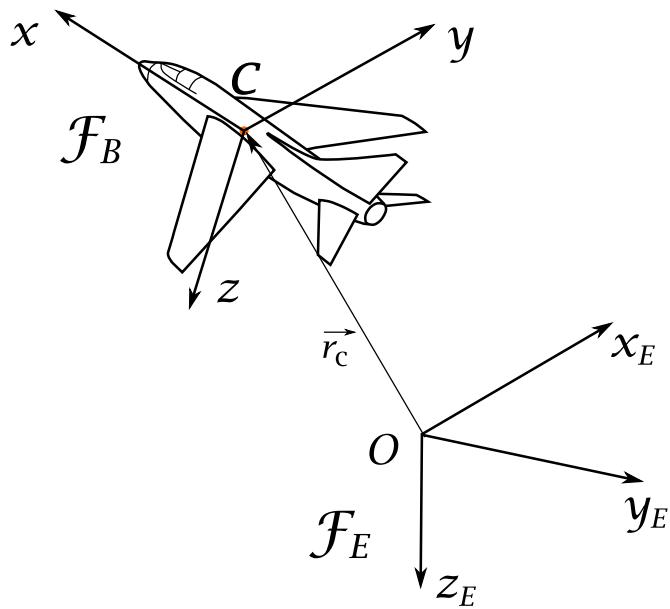


Figura 6.1: Referencial inercial ligado à Terra, \mathcal{F}_E , de eixos ($Ox_Ey_Ez_E$) e referencial ligado ao avião, \mathcal{F}_B , de eixos ($Cxyz$).

6.2 Ângulos de Euler e matrizes de rotação

6.2.1 Definição dos Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler permitem descrever a orientação relativa dos dois referenciais (\mathcal{F}_E fixo na Terra e \mathcal{F}_B solidário com o avião). Existem muitas definições possíveis para os ângulos de Euler, mas em aeronáutica são usados os ângulos de guinada (*yaw*), picada/cabragem (*pitch*) e pranchamento ou rolamento (*bank/roll*) que definem três rotações sucessivas.

A primeira rotação, em torno do eixo vertical fixo Cz_E , define o ângulo de guinada ψ , como se mostra na figura 6.2. A segunda rotação, representada na figura 6.3, é feita em torno do eixo Cy_2 obtido após a rotação anterior, e define o ângulo de picada (usa-se também «cabragem» quando o ângulo é positivo), θ . A terceira rotação faz-se em torno do eixo Cx_3 , como se mostra na figura 6.4 e define o ângulo de pranchamento (ou rolamento) ϕ .

6.2.2 Matrizes de rotação

Para relacionar as componentes de um vector no sistema de eixos da Terra e no sistema de eixos do avião temos de introduzir a matriz de rotação entre os dois sistemas de eixos. Uma matriz de rotação relaciona as componentes de um vector nos sistemas de eixos antes e depois da rotação. Como os ângulos de Euler são definidos como rotações em torno de sucessivos eixos coordenados, definiremos em primeiro lugar as matrizes para rotações em torno de cada um dos eixos coordenados para os ângulos mostrados na figura 6.5. Para uma rotação de um ângulo α em torno do eixo

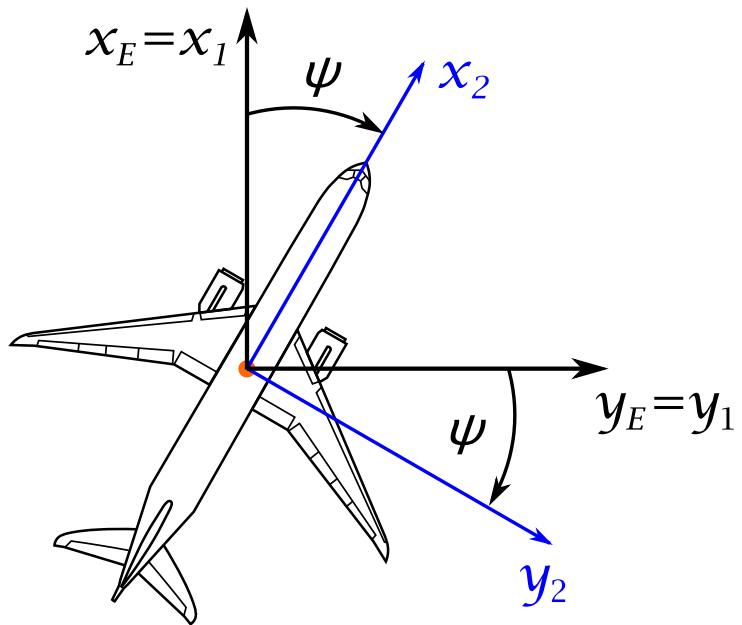


Figura 6.2: Rotação que define o ângulo de guinada, em torno do eixo fixo vertical Cz_E .

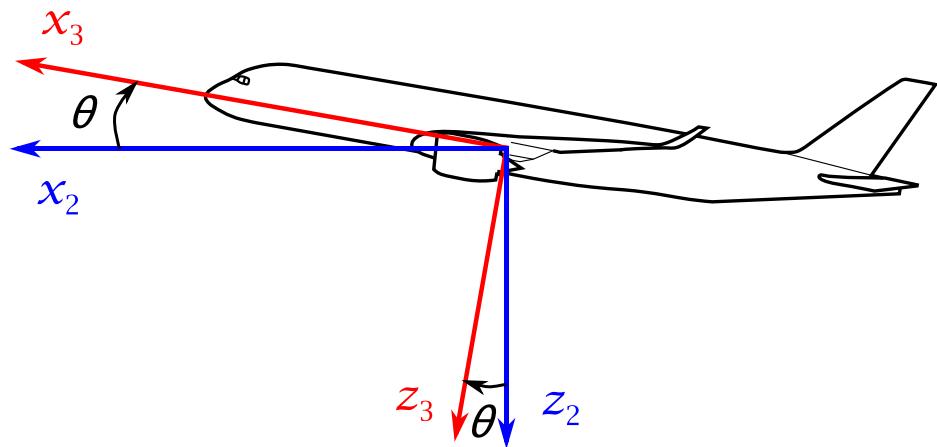


Figura 6.3: Rotação que define o ângulo de picada, em torno do eixo Cy_2 .

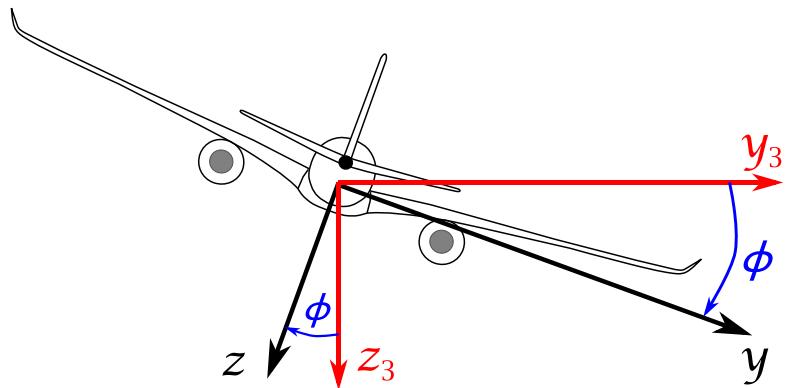


Figura 6.4: Rotação que define o ângulo de rolamento, em torno do eixo $Cx_3 \equiv Cx$.

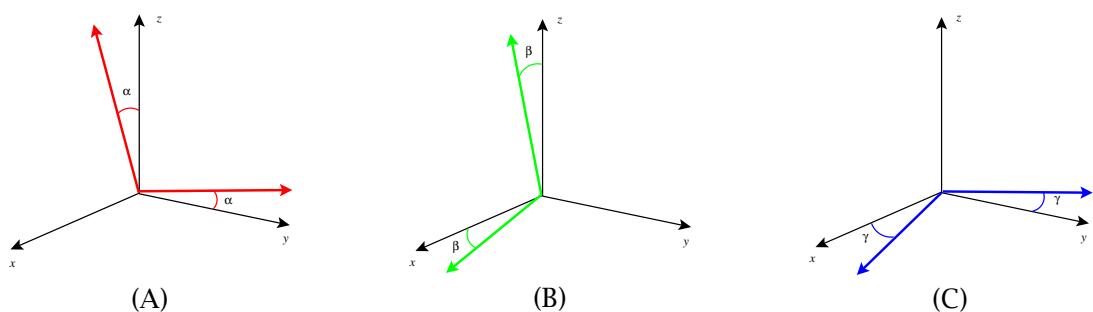


Figura 6.5: Rotações em torno de cada um dos eixos coordenados: (A) rotação em torno de Ox ; (B) rotação em torno de Oy ; (C) rotação em torno de Oz .

Ox , a matriz de rotação é

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad (6.1)$$

para uma rotação de um ângulo β em torno do eixo Oy a matriz de rotação é

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad (6.2)$$

finalmente, para uma rotação de um ângulo γ em torno do eixo Oz a matriz de rotação é dada por

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Para obtermos a matriz de rotação do referencial fixo na Terra \mathcal{F}_E para o referencial fixo na aeronave \mathcal{F}_B basta-nos aplicar multiplicar (da direita para a esquerda) as matrizes correspondentes às rotações de guinada, picada e pranchamento:

$$R_{BE} = R_x(\phi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(\psi). \quad (6.4)$$

Para transformar as componentes de um vector escritas no referencial da Terra para as componentes do mesmo vector escritas no referencial do avião basta-nos multiplicar pela matriz de rotação:

$$\vec{V}_B = R_{BE} \vec{V}_E. \quad (6.5)$$

A matriz R_{BE} de rotação do referencial fixo na Terra \mathcal{F}_E para o referencial fixo na aeronave \mathcal{F}_B que se obtém a partir de (6.4) e das matrizes (6.1), (6.2) e (6.3) é

$$\begin{aligned} R_{BE} &= R_x(\phi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(\psi) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (6.6) \end{aligned}$$

Como exemplo, vamos determinar as componentes do peso no referencial do avião. No referencial da Terra o peso é $(m\vec{g})_E = (0, 0, mg)$. Para obtermos as suas componentes no referencial do avião usamos (6.5):

$$\begin{aligned} (m\vec{g})_B &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Também é possível definir a matriz de rotação inversa, do referencial fixo na aeronave \mathcal{F}_B para o referencial fixo na Terra \mathcal{F}_E :

$$R_{EB} = R_{BE}^{-1} = R_z(-\psi) \cdot R_y(-\theta) \cdot R_x(-\phi).$$

Agora as rotações devem ser feitas pela ordem inversa e os ângulos são simétricos dos ângulos da rotação inicial. A relação entre as componentes dos vectores nos dois referenciais é

$$\vec{V}_E = R_{EB} \vec{V}_B, \quad (6.7)$$

sendo a matriz R_{EB} de rotação do referencial fixo na aeronave \mathcal{F}_B para o referencial fixo na Terra \mathcal{F}_E dada por

$$\begin{aligned} R_{EB} &= R_{BE}^{-1} = R_z(-\psi) \cdot R_y(-\theta) \cdot R_x(-\phi) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.2.3 Velocidade e frequências angulares

A velocidade angular de um avião é habitualmente referida a partir das componentes ao longo dos eixos coordenados do avião:

$$\vec{\omega} = p \hat{i}_B + q \hat{j}_B + r \hat{k}_B. \quad (6.9)$$

Por outro lado, da definição dos ângulos de Euler deduz-se que a velocidade angular se pode escrever em função das frequências angulares $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$. Para relacionar p , q e r com as frequências angulares começemos por notar que

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{k}_{1_B} + \dot{\theta} \hat{j}_{2_B} + \dot{\phi} \hat{i}_{3_B}. \quad (6.10)$$

Mas, pela definição dos ângulos de Euler:

$$\begin{cases} \hat{i}_{3_B} = \hat{i}_B, \\ \hat{j}_{2_B} = \cos \phi \hat{j}_B - \sin \phi \hat{k}_B, \\ \hat{k}_{1_B} = \cos \theta (\sin \phi \hat{j}_B + \cos \phi \hat{k}_B) - \sin \theta \hat{i}_B. \end{cases} \quad (6.11)$$

Substituindo (6.11) em (6.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\psi} \hat{k}_{1_B} + \dot{\theta} \hat{j}_{2_B} + \dot{\phi} \hat{i}_{3_B} \\ &= \dot{\psi} [\cos \theta (\sin \phi \hat{j}_B + \cos \phi \hat{k}_B) - \sin \theta \hat{i}_B] + \dot{\theta} [\cos \phi \hat{j}_B - \sin \phi \hat{k}_B] + \dot{\phi} \hat{i}_B \\ &= (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \hat{i}_B + (\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \hat{j}_B + (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) \hat{k}_B. \end{aligned}$$

Por comparação com (6.9), constata-se facilmente que

$$\begin{cases} p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta, \\ q = \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi. \end{cases} \quad (6.12)$$

Destas equações se vê que as velocidades angulares não se identificam com as correspondentes taxas de variação dos ângulos de Euler: a velocidade angular de rolamento não é igual à taxa de variação do ângulo de rolamento/pranchamento, e o mesmo se pode dizer relativamente à picada e à guinada.

6.3 Equações de Euler

6.3.1 Equações do movimento

Considerando o avião como um corpo rígido e sendo \vec{F} a resultante das forças exteriores aplicadas ao avião, \vec{M}_C o momento resultante relativo ao centro de massa C do avião e \vec{H}_C o momento angular total relativamente a C , as equações do movimento no referencial inercial \mathcal{F}_E são

$$\vec{F} = m \left[\frac{d}{dt} (\vec{V}^E) \right]_{\mathcal{F}_E} \quad (6.13)$$

$$\vec{M}_C = \left[\frac{d}{dt} (\vec{H}_C) \right]_{\mathcal{F}_E} \quad (6.14)$$

respectivamente para a dinâmica de translação e para a dinâmica de rotação.

O referencial do avião é um referencial em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$. Por isso, se os vectores \vec{V}^E e \vec{H}_C estiverem escritos no referencial do avião, a equação da dinâmica de translação é

$$(\vec{F})_B = m \left[\frac{d}{dt} (\vec{V}^E) \right]_{\mathcal{F}_E} = m \left[(\dot{\vec{V}}^E)_B + (\vec{\omega})_B \times (\vec{V}^E)_B \right], \quad (6.15)$$

enquanto que para a dinâmica de rotação temos

$$(\vec{M}_C)_B = \left[\frac{d}{dt} (\vec{H}_C) \right]_{\mathcal{F}_E} = \left[(\dot{\vec{H}}_C)_B + (\vec{\omega})_B \times (\vec{H}_C)_B \right]. \quad (6.16)$$

São estas equações, em que as grandezas vectoriais estão expressas no referencial do avião, que vamos procurar desenvolver e resolver.

6.3.2 Equações do movimento no referencial do avião

As forças externas aplicadas a uma aeronave incluem a força gravítica $m(\vec{g})_B$, as forças aerodinâmicas, aqui designadas genericamente por \vec{A} , e a força de propulsão \vec{T} .

Como vimos, no referencial do avião a força gravítica pode escrever-se

$$m(\vec{g})_B = mg(-\sin \theta \hat{i}_B + \cos \theta \sin \phi \hat{j}_B + \cos \theta \cos \phi \hat{k}_B) \quad (6.17)$$

Por outro lado, podemos por enquanto agrupar as forças aerodinâmicas e de propulsão sob uma designação genérica,

$$(\vec{A})_B + (\vec{T})_B = X \hat{i}_B + Y \hat{j}_B + Z \hat{k}_B. \quad (6.18)$$

Note-se que, uma vez que as forças aerodinâmicas dependem tanto da velocidade como da velocidade angular do avião, as forças X , Y e Z dependem das variáveis dinâmicas (\vec{V} e $\vec{\omega}$). Teremos também de incluir em X , Y e Z as forças de controlo.

Tendo em conta que no referencial do avião

$$\begin{cases} (\vec{\omega})_B = p \hat{i}_B + q \hat{j}_B + r \hat{k}_B \\ (\vec{V}^E)_B = u^E \hat{i}_B + v^E \hat{j}_B + w^E \hat{k}_B \end{cases}$$

as componentes segundo x , y e z da equação da dinâmica de translação (6.15) são

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta = m(\dot{u}^E + qw^E - rv^E), \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi = m(\dot{v}^E + ru^E - pw^E), \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi = m(\dot{w}^E + pv^E - qu^E). \end{cases} \quad (6.19)$$

O momento resultante das forças externas relativamente ao centro de massa C da aeronave é

$$(\vec{M}_C)_B = L \hat{i}_B + M \hat{j}_B + N \hat{k}_B, \quad (6.20)$$

em que L , M , e N são chamados respectivamente momentos de rolamento, picada e guinada. O momento angular relativamente a C é dado por

$$[(\vec{H}_C)_B] = [I_B][(\vec{\omega})_B]. \quad (6.21)$$

A matriz de inércia é

$$[I_B] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

sendo os momentos de inércia definidos por $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$, $I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$ e $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$; e os produtos de inércia definidos como $I_{xy} = \int xy dm$, $I_{xz} = \int xz dm$ e $I_{yz} = \int yz dm$.

Substituindo todas estas expressões na equação da dinâmica de rotação (6.16) as componentes segundo x , y e z são

$$\begin{cases} L = I_{xx}\dot{p} - I_{yz}(q^2 - r^2) - I_{zx}(\dot{r} + pq) - I_{xy}(\dot{q} - rp) - (I_{yy} - I_{zz})qr, \\ M = I_{yy}\dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - I_{xy}(\dot{p} + qr) - I_{yz}(\dot{r} - pq) - (I_{zz} - I_{xx})rp, \\ N = I_{zz}\dot{r} - I_{xy}(p^2 - q^2) - I_{yz}(\dot{q} + rp) - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_{xx} - I_{yy})pq. \end{cases} \quad (6.23)$$

Em resumo, temos nove equações diferenciais não lineares acopladas: três equações (6.19) para a dinâmica de translação, três equações (6.23) para a dinâmica de rotação e três equações (6.12) que relacionam as velocidades angulares com as frequências de Euler.

As incógnitas são também nove: as três componentes da velocidade linear, as três componentes da velocidade angular e os três ângulos de Euler: $(u, v, w, p, q, r, \psi, \theta, \phi)$. A resolução das equações permite obter cada uma destas incógnitas em função do tempo, dadas as necessárias condições iniciais.

Para a resolução das equações, uma simplificação que é válida na maior parte dos casos é a de considerar que a aeronave é simétrica, o que implica $I_{xy} = 0 = I_{yz}$.

Note-se que só é possível separar completamente o movimento longitudinal do movimento lateral se $p = 0 = r$, e isto exige $\phi = 0$ (pois pelas equações (6.12) se vê que, se $\phi \neq 0$, então $q \neq 0 \Rightarrow \dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow r \neq 0$). Portanto, se as asas não estiverem niveladas não é possível um voo com movimento apenas longitudinal.

6.3.3 Equações da trajectória

A trajectória (*flight path*) é definida no referencial solidário com a Terra, \mathcal{F}_E . Neste referencial $\vec{V}_E^E = (\dot{x}^E, \dot{y}^E, \dot{z}^E)$ e $\vec{V}_B^E = (u^E, v^E, w^E)$. As velocidades u^E , v^E e w^E são obtidas pelas equações do movimento, e os vectores velocidade estão relacionados por $[\vec{V}_E^E] = [R_{EB}][\vec{V}_B^E]$. Daqui se obtém o sistema de equações diferenciais para as coordenadas da trajectória.

$$\begin{aligned}\dot{x}^E &= u^E \cos \theta \cos \psi + v^E (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + \\ &\quad w^E (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \dot{y}^E &= u^E \cos \theta \sin \psi + v^E (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + \\ &\quad w^E (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \dot{z}^E &= -u^E \sin \theta + v^E \sin \phi \cos \theta + w^E \cos \phi \cos \theta\end{aligned}$$

Conhecidas as velocidades e os ângulos de Euler em função do tempo, estas equações podem facilmente ser integradas para se obterem as coordenadas da trajectória em função do tempo.

6.4 Rotores em movimento

Mesmo desprezando os efeitos de elasticidade, um avião não é um corpo rígido. No caso de propulsão a hélice, as hélices dos motores são partes em movimento rotativo, como o são as turbinas e compressores no caso de propulsão a jacto. Quando estabelecemos as equações de Euler, admitimos que o avião era um corpo rígido, mas não é difícil introduzir o efeito dos rotores nas equações, bastando somar ao momento angular do avião o termo correspondente o momento angular dos rotores:

$$[(\vec{H}_C)_B] = [I_B][(\vec{\omega})_B] + [\vec{h}_B^{\text{rot}}], \quad (6.24)$$

em que \vec{h}_B^{rot} é momento angular dos rotores (devido ao seu movimento de rotação relativo ao avião) e $[I_B][(\vec{\omega})_B]$ é momento angular do avião, já anteriormente considerado. É este momento angular total que deve ser usado na equação para a dinâmica de rotação (6.16)

$$(\vec{M}_C)_B = \left[\frac{d}{dt} (\vec{H}_C) \right]_{\mathcal{F}_E} = \left[(\dot{\vec{H}}_C)_B + (\vec{\omega})_B \times (\vec{H}_C)_B \right]$$

Quando a velocidade dos rotores é constante, é necessário apenas acrescentar os seguintes termos adicionais na equação dos momentos:

$$\begin{aligned}&\text{na equação segundo } x, \quad qh_z^{\text{rot}} - rh_y^{\text{rot}}; \\ &\text{na equação segundo } y, \quad rh_x^{\text{rot}} - ph_z^{\text{rot}}; \\ &\text{na equação segundo } z, \quad ph_y^{\text{rot}} - qh_x^{\text{rot}}.\end{aligned}$$

6.5 Sistemas de eixos do corpo

Qualquer sistema de eixos solidários com o corpo pode ser usado como referencial \mathcal{F}_B . Na prática, os sistemas de eixos com utilidade seguem as seguintes regras:

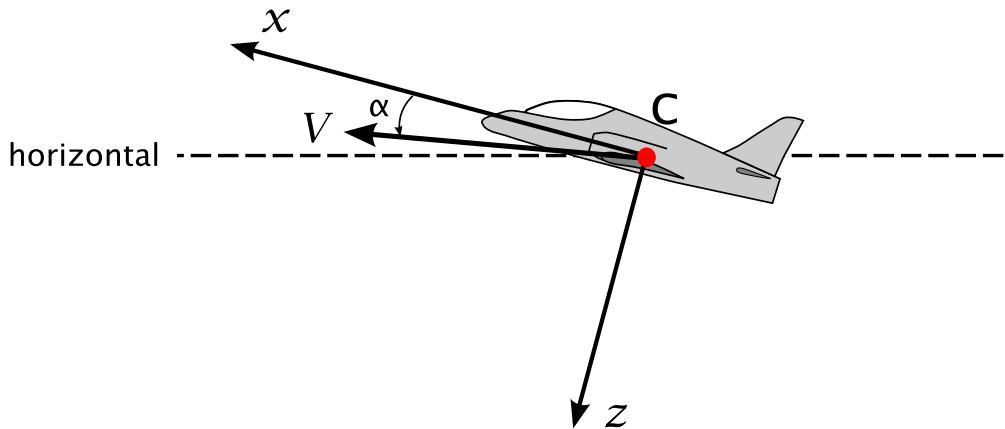


Figura 6.6: Sistema de eixos em que o eixo Cx é a linha de sustentação nula do avião. O ângulo α entre a velocidade e a linha de sustentação nula é o ângulo de ataque absoluto do avião.

- Os eixos Cx e Cz encontram-se no plano de simetria do avião,
- Cx aponta «para a frente»,
- Cz aponta «para baixo», e
- Cy forma com os anteriores um triedro directo.

O eixo Cy é portanto o eixo que é perpendicular ao plano de simetria e passa pelo centro de massa. Quanto aos eixos Cx e Cz , existem muitas possibilidades de escolha.

Uma das possibilidades é escolher o eixo Cx na direcção da linha de sustentação nula do avião, como se mostra na figura 6.6. Nesse caso, o ângulo de ataque do eixo Cx é o ângulo de ataque da aeronave e o ângulo de subida (ou de rota) γ é dado por $\gamma = \theta - \alpha$.

Uma outra escolha que apresenta vantagens, representada na figura 6.7, é a de usar como Cx e Cz os eixos principais de inércia (num avião simétrico, a nossa escolha para Cy garante que é sempre um eixo principal de inércia). Assim, $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, e o momento angular do avião (excluindo rotores) é apenas

$$\begin{cases} H_x = I_x p \\ H_y = I_y q \\ H_z = I_z r \end{cases}$$

o que traz simplificações consideráveis nas equações do movimento de rotação. Agora, porém, $\alpha_x \neq \alpha$. O ângulo de subida é $\gamma = \theta - \alpha_x$, mas é necessário conhecer a relação entre α e α_x , ou, equivalentemente, é necessário saber a relação entre o eixo dos x e a linha de sustentação nula da aeronave.

Em estudos de estabilidade é frequente usar um outro sistema de eixos, conhecido precisamente como sistema de eixos de estabilidade (x_s, y_s, z_s) e que se apresenta na figura 6.8. O eixo Cx é aqui escolhido segundo a direcção do vector velocidade. A grande vantagem é que por definição, $w = 0$, e portanto $\alpha_x = 0$. Este é o sistema de eixos que iremos usar mais frequentemente no estudo da estabilidade dinâmica.

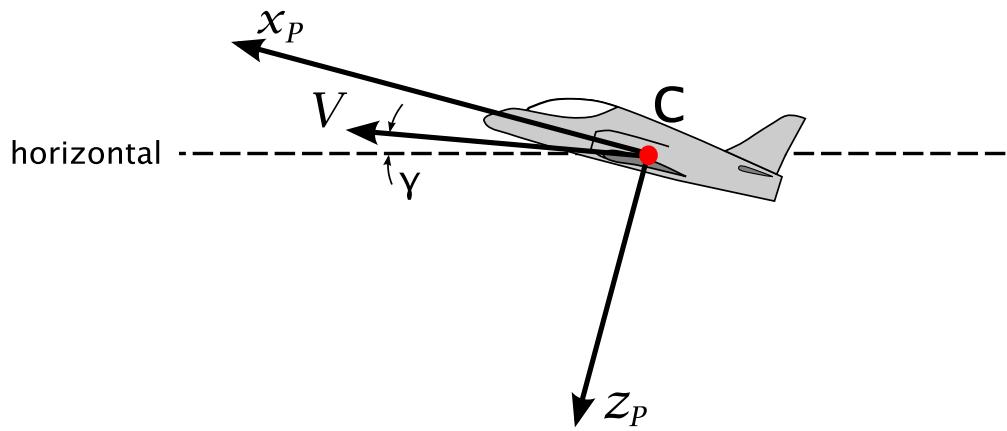


Figura 6.7: Sistema de eixos em que os eixos Cx e Cz são eixos principais de inércia do avião. O ângulo γ entre a velocidade e a horizontal é o ângulo de subida do avião.

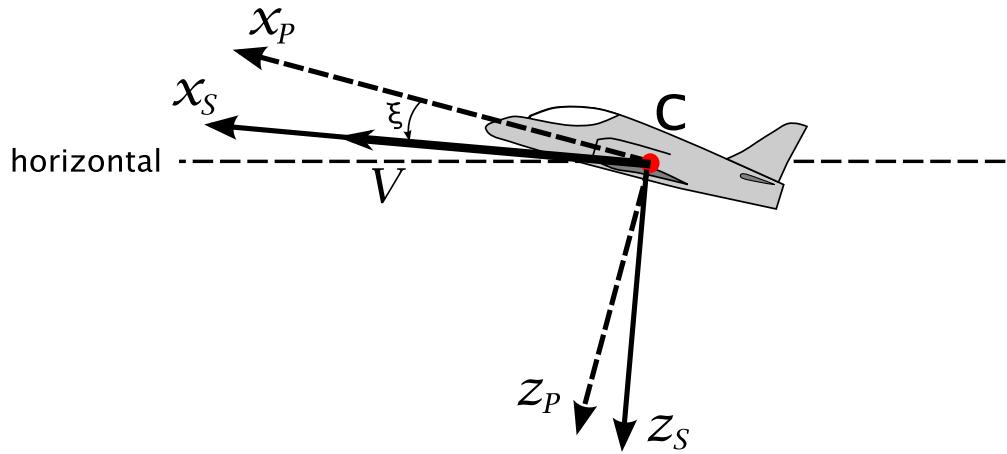


Figura 6.8: Sistema de eixos de estabilidade: o eixo Cx_S coincide com a direcção da velocidade do avião. Por definição $\alpha_x = 0$. O ângulo ξ é o ângulo entre o sistema de eixos principal de inércia e o sistema de eixos de estabilidade.

Designando por ξ o ângulo entre os eixos de estabilidade e os eixos principais de inércia, os novos momentos e produtos de inércia são

$$\begin{aligned} I_{x_s} &= I_{x_p} \cos^2 \xi + I_{z_p} \sin^2 \xi, \\ I_{z_s} &= I_{x_p} \sin^2 \xi + I_{z_p} \cos^2 \xi, \\ I_{x_s z_s} &= \frac{1}{2} (I_{z_p} - I_{x_p}) \sin 2\xi. \end{aligned}$$

Neste sistema de eixos o ângulo de subida coincide com o ângulo de picada: $\gamma = \theta$.

Capítulo 7

Estados Estacionários e Manobras

Num voo típico, um avião encontra-se habitualmente num estado estacionário: subida ou descida com ângulo constante, voo de cruzeiro, volta coordenada, etc. Interessa-nos caracterizar estes estados estacionários, que serão a base para o estudo da estabilidade dinâmica para pequenas perturbações.

Alguns estados estacionários podem caracterizar-se por ser apenas longitudinais, enquanto outros entram também em jogo variáveis laterais. Vamos procurar caracterizar estes tipos de movimentos. Além disso trataremos de manobras estacionárias: volta coordenada e manobra de descida-subida simétrica (*pull-up*).

Começaremos por caracterizar um pouco melhor as forças e momentos aplicados a uma aeronave.

7.1 Forças e momentos aplicados a uma aeronave

Para além do peso, as forças e momentos aplicados a uma aeronave podem ter origem aerodinâmica (sustentação, resistência aerodinâmica) ou ser forças e momentos de controlo. Estes podem ser devidos à propulsão ou a modificação das forças e momentos aerodinâmicos pela deflexão de superfícies de controlo, como o leme de profundidade (*elevator*, ou em alternativa, *stabilator*), o leme de direcção (*rudder*) ou os *ailerons*.

Para as forças e momentos usamos a seguinte notação: X_A , Z_A , Z_A designam as componentes aerodinâmicas das forças e L_A , M_A , N_A designam as componentes aerodinâmicas dos momentos. As componentes devidas ao controlo são designadas por um índice C : ΔX_C , ΔY_C , ΔZ_C para as forças e ΔL_C , ΔM_C , ΔN_C para os momentos. As forças totais são então

$$\begin{cases} X = X_A + \Delta X_C, \\ Y = Y_A + \Delta Y_C, \\ Z = Z_A + \Delta Z_C, \end{cases} \quad (7.1)$$

e os momentos totais

$$\begin{cases} L = L_A + \Delta L_C, \\ M = M_A + \Delta M_C, \\ N = N_A + \Delta N_C. \end{cases} \quad (7.2)$$

7.1.1 Variáveis dinâmicas e sua adimensionalização

Os momentos e forças aerodinâmicos dependem das variáveis dinâmicas: as velocidades lineares u , v e w , e as velocidades angulares p , q e r . Com frequência é conveniente usar estas variáveis na sua versão adimensional. As velocidades lineares adimensionalizam-se dividindo pelo módulo da velocidade, isto é,

$$\hat{u} = \frac{u}{V}, \quad \hat{v} = \frac{v}{V}, \quad \hat{w} = \frac{w}{V}. \quad (7.3)$$

As velocidades angulares adimensionalizam-se de modo diferente consoante são variáveis laterais (p e r) ou longitudinal (q):

$$\hat{p} = p \frac{b}{2V}, \quad (7.4)$$

$$\hat{q} = q \frac{\bar{c}}{2V}, \quad (7.5)$$

$$\hat{r} = r \frac{b}{2V}. \quad (7.6)$$

Note-se que se os ângulos de derrapagem e de ataque são pequenos, então são válidas as aproximações

$$\beta = \arcsin \frac{v}{V} \approx \frac{v}{V} = \hat{v}, \quad (7.7)$$

$$\alpha = \arctan \frac{w}{V} \approx \frac{w}{V} = \hat{w}. \quad (7.8)$$

Normalmente admite-se que as forças e momentos aerodinâmicos não dependem das derivadas das variáveis dinâmicas, com uma excepção: podem depender de \dot{w} , ou seja, de $\dot{\alpha}$. A adimensionalização da derivada temporal é feita dividindo pelo factor $2V/\bar{c}$, isto é,

$$\hat{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} \frac{\bar{c}}{2V}. \quad (7.9)$$

7.1.2 Forças e momentos aerodinâmicos para o movimento longitudinal

Relativamente ao movimento longitudinal, isto é, o que não altera a posição do plano de simetria do avião, as forças e momentos aerodinâmicos relevantes são X_A , Z_A e M_A . Se o movimento é verdadeiramente longitudinal, dependem apenas das variáveis dinâmicas longitudinais, isto é, de u , w , q e \dot{w} :

$$\begin{cases} X_A = X_u u + X_w w + X_q q + X_{\dot{w}} \dot{w}, \\ Z_A = Z_u u + Z_w w + Z_q q + Z_{\dot{w}} \dot{w}, \\ M_A = M_u u + M_w w + M_q q + M_{\dot{w}} \dot{w}, \end{cases} \quad (7.10)$$

Por definição, as derivadas (dimensionais) da força segundo x são

$$X_u \equiv \frac{\partial X}{\partial u}, \quad X_w \equiv \frac{\partial X}{\partial w}, \quad X_q \equiv \frac{\partial X}{\partial q}, \quad X_{\dot{w}} \equiv \frac{\partial X}{\partial \dot{w}},$$

com definições análogas para as derivadas da força segundo z e do momento de pí- cida.

Com frequência é preferível usar coeficientes adimensionais em vez de forças e momentos dimensionais. Para o movimento longitudinal, os coeficientes adimensionais das forças e momentos aerodinâmicos são

$$X_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{x_A}, \quad (7.11)$$

$$Z_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{z_A}, \quad (7.12)$$

$$M_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_{m_A}. \quad (7.13)$$

A versão adimensionalizada de (7.10) é

$$\begin{cases} C_{x_A} = C_{x_u} \hat{u} + C_{x_\alpha} \alpha + C_{x_q} \hat{q} + C_{x_{\hat{\alpha}}} \hat{\alpha}, \\ C_{z_A} = C_{z_u} \hat{u} + C_{z_\alpha} \alpha + C_{z_q} \hat{q} + C_{z_{\hat{\alpha}}} \hat{\alpha} \\ C_{m_A} = C_{m_u} \hat{u} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \hat{q} + C_{m_{\hat{\alpha}}} \hat{\alpha}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Note-se que as derivadas são obtidas derivando os coeficientes adimensionais em or- dem às variáveis adimensionais, isto é,

$$C_{x_u} \equiv \frac{\partial C_{x_A}}{\partial \hat{u}}, \quad C_{x_\alpha} \equiv \frac{\partial C_{x_A}}{\partial \alpha}, \quad C_{x_q} \equiv \frac{\partial C_{x_A}}{\partial \hat{q}}, \quad C_{x_{\hat{\alpha}}} \equiv \frac{\partial C_{x_A}}{\partial \hat{\alpha}}, \quad \text{etc.}$$

Forças e momentos de controlo longitudinal

Para controlo longitudinal dispomos habitualmente de uma superfície de controlo (leme de profundidade ou equivalente, cuja deflexão é δ_e) e podemos também controlar a potência desenvolvida pelo motor, sendo a posição relativa da manete de potência dada por δ_T . Assim, temos

$$\begin{cases} \Delta X_C = X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T, \\ \Delta Z_C = Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_T} \delta_T, \\ \Delta M_C = M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_T} \delta_T. \end{cases} \quad (7.15)$$

Os coeficientes das forças e momentos de controlo longitudinal obtém-se por adimen- sionalização das equações acima:

$$\begin{cases} \Delta C_x = C_{x_{\delta_e}} \delta_e + C_{x_{\delta_T}} \delta_T, \\ \Delta C_z = C_{z_{\delta_e}} \delta_e + C_{z_{\delta_T}} \delta_T, \\ \Delta C_m = C_{m_{\delta_e}} \delta_e + C_{m_{\delta_T}} \delta_T. \end{cases} \quad (7.16)$$

Tendo em conta (7.1) e (7.2), os coeficientes das forças e momento longitudinais totais, incluindo controlo, são

$$\begin{cases} C_x = C_{x_u} \hat{u} + C_{x_\alpha} \alpha + C_{x_q} \hat{q} + C_{x_{\hat{\alpha}}} \hat{\alpha} + C_{x_{\delta_e}} \delta_e + C_{x_{\delta_T}} \delta_T, \\ C_z = C_{z_u} \hat{u} + C_{z_\alpha} \alpha + C_{z_q} \hat{q} + C_{z_{\hat{\alpha}}} \hat{\alpha} + C_{z_{\delta_e}} \delta_e + C_{z_{\delta_T}} \delta_T, \\ C_m = C_{m_u} \hat{u} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \hat{q} + C_{m_{\hat{\alpha}}} \hat{\alpha} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e + C_{m_{\delta_T}} \delta_T. \end{cases} \quad (7.17)$$

7.1.3 Forças e momentos aerodinâmicos para o movimento lateral

Para o movimento lateral, em que a posição do plano de simetria do avião é alterada, as forças e momentos aerodinâmicos relevantes são Y_A , L_A e N_A , que dependem apenas das variáveis dinâmicas longitudinais, isto é, de v , p e r :

$$\begin{cases} Y_A = Y_v v + Y_p p + Y_r r, \\ L_A = L_v v + L_p p + L_r r, \\ N_A = N_v v + N_p p + N_r r. \end{cases} \quad (7.18)$$

As derivadas (dimensionais) da força segundo y são

$$Y_v \equiv \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad Y_p \equiv \frac{\partial Y}{\partial p}, \quad Y_r \equiv \frac{\partial Y}{\partial r},$$

com definições análogas para as derivadas dos momentos de rolamento e de guinada.

Para o movimento lateral, os coeficientes adimensionais das forças e momentos aerodinâmicos são

$$Y_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{y_A}, \quad (7.19)$$

$$L_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{l_A}, \quad (7.20)$$

$$N_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{n_A}. \quad (7.21)$$

A versão adimensionalizada de (7.18) é

$$\begin{cases} C_{y_A} = C_{y_\beta} \beta + C_{y_p} \hat{p} + C_{y_r} \hat{r}, \\ C_{l_A} = C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \hat{p} + C_{l_r} \hat{r}, \\ C_{n_A} = C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \hat{p} + C_{n_r} \hat{r}. \end{cases} \quad (7.22)$$

Note-se que, tal como anteriormente, as derivadas são obtidas derivando os coeficientes adimensionais em ordem às variáveis adimensionais, isto é,

$$C_{y_\beta} \equiv \frac{\partial C_{y_A}}{\partial \beta}, \quad C_{y_p} \equiv \frac{\partial C_{y_A}}{\partial \hat{p}}, \quad C_{y_r} \equiv \frac{\partial C_{y_A}}{\partial \hat{r}}, \quad \text{etc.}$$

Forças e momentos de controlo lateral

Para controlo lateral as superfícies de controlo habitualmente disponíveis são o leme de direcção (*rudder*, cuja deflexão é δ_r) e os *ailerons*, cuja deflexão é dada por δ_a .

Assim, temos

$$\begin{cases} \Delta Y_C = Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r, \\ \Delta L_C = L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r, \\ \Delta N_C = N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r. \end{cases} \quad (7.23)$$

Estas equações podem facilmente adaptar-se a outras configurações (como, por exemplo, um par adicional de *ailerons*). Note-se também que frequentemente se faz a aproximação $Y_{\delta_a} = 0$, pois a força lateral devido à deflexão dos *ailerons* é praticamente nula.

Os coeficientes das forças e momentos de controlo lateral obtêm-se facilmente pela adimensionalização das equações acima:

$$\begin{cases} \Delta C_Y = C_{y_{\delta_a}} \delta_a + C_{y_{\delta_r}} \delta_r, \\ \Delta C_l = C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r, \\ \Delta C_n = C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r. \end{cases} \quad (7.24)$$

Tendo em conta (7.1) e (7.2), os coeficientes das forças e momento laterais totais, incluindo controlo, são

$$\begin{cases} C_Y = C_{y_\beta} \beta + C_{y_p} \hat{p} + C_{y_r} \hat{r} + C_{y_{\delta_a}} \delta_a + C_{y_{\delta_r}} \delta_r, \\ C_l = C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \hat{p} + C_{l_r} \hat{r} + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r, \\ C_n = C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \hat{p} + C_{n_r} \hat{r} + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r. \end{cases} \quad (7.25)$$

7.2 Estados estacionários longitudinais

Estamos agora em condições de abordar alguns estados estacionários. Começaremos por verificar em que condições é que podem existir estados estacionários longitudinais «puros».

Por definição, num estado estacionário as derivadas temporais são nulas, isto é, $\dot{u} = 0 = \dot{v} = \dot{w}$, $\dot{p} = 0 = \dot{q} = \dot{r}$ e $\dot{\psi} = 0 = \dot{\theta} = \dot{\phi}$. Se o estado estacionário é longitudinal, são nulas as velocidades angulares laterais $p = r = 0$, bem como a velocidade lateral (de derrapagem) $v = 0$, donde $\beta = 0$. Adicionalmente, se o estado estacionário corresponder a um voo rectilíneo, não existe velocidade angular de picada, $q = 0$. As equações do movimento de translação (6.19) reduzem-se então a

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta = 0, \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi = 0, \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi = 0, \end{cases} \quad (7.26)$$

e as equações do movimento de rotação (6.23) a

$$\begin{cases} L = 0, \\ M = 0, \\ N = 0. \end{cases} \quad (7.27)$$

Dado que

$$\begin{cases} L = L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r, \\ N = N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r, \end{cases}$$

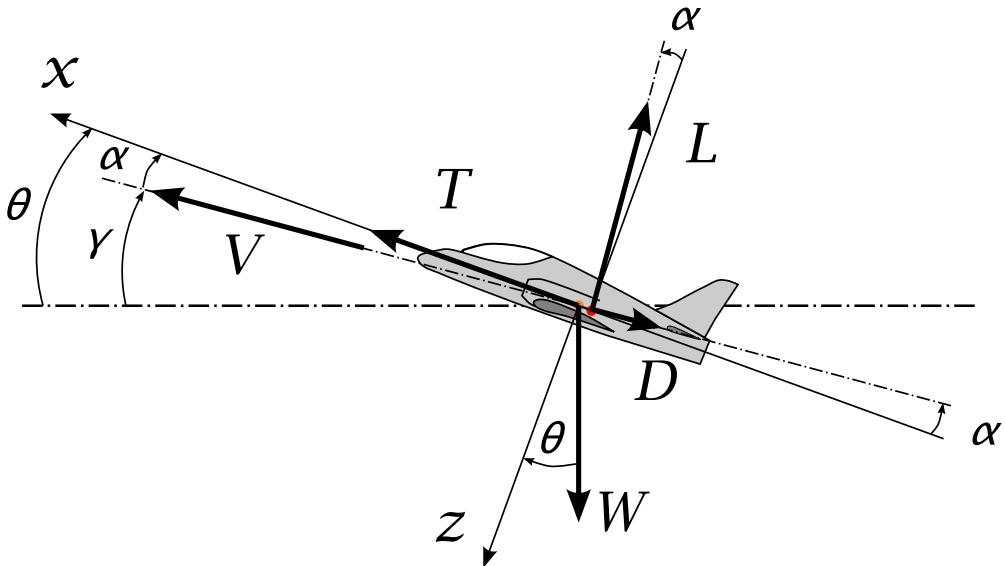


Figura 7.1: Voo rectilíneo com ângulo de subida constante.

e que $v = p = r = 0$, conclui-se que $\delta_a = 0 = \delta_r$. Logo $Y = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r = 0$. Da segunda equação de (7.26) segue-se finalmente que $\sin \phi = 0$.

Em conclusão, só pode haver estados (estacionários) longitudinais para voo com asas niveladas, i.e., com ângulo de pranchamento nulo. Se $\phi \neq 0$, passa a existir acoplamento entre movimento longitudinal e lateral. Os estados estacionários longitudinais possíveis são voos simultaneamente rectilíneos e com asas niveladas e podem ser horizontais ou com ângulo de subida.

7.2.1 Voo com ângulo de subida constante

O estado estacionário longitudinal mais simples é o voo horizontal rectilíneo com asas niveladas. No entanto, este já foi tratado anteriormente com pormenor. O estado estacionário longitudinal que iremos tratar agora é o de um voo rectilíneo com ângulo de subida constante. Como se afirmou acima, para ser estado estacionário longitudinal, este voo terá de ser nivelado, ou seja, é necessário que $\phi = 0$.

O eixo Cx é escolhido segundo a direcção da linha de sustentação nula do avião. Suporemos que a linha de propulsão coincide com o eixo Cx (no caso mais geral existe um ângulo constante entre a linha de propulsão e o eixo Cx , que aqui supomos nulo).

As forças aplicadas no avião estão representadas na figura 7.1. As componentes das segundo x e z das forças aerodinâmicas e de propulsão são dadas por

$$\begin{cases} X = T + L \sin \alpha - D \cos \alpha, \\ Z = -L \cos \alpha - D \sin \alpha. \end{cases} \quad (7.28)$$

De (7.26) com $\phi = 0$ e de (7.27), as equações do movimento neste caso são

$$\begin{cases} T + L \sin \alpha - D \cos \alpha - mg \sin \theta = 0, \\ -L \cos \alpha - D \sin \alpha + mg \cos \theta = 0, \\ M = 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

Se α for suficientemente pequeno para podermos desprezar os termos em $\sin \alpha$, a primeira equação é

$$T = D + mg \sin \theta \quad (7.30)$$

e a intensidade da força de propulsão determina θ e deste modo o ângulo de subida $\gamma = \theta - \alpha$. Esta é uma aproximação um pouco grosseira, mas permite perceber que o ângulo de subida é determinado principalmente pela força de propulsão.

Numa aproximação menos grosseira, em que $\sin \alpha \approx \alpha$ e $\cos \alpha \approx 1$, teríamos

$$\begin{cases} T + L\alpha - D - mg \sin \theta = 0, \\ -L + mg \cos \theta = 0, \\ M = 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

Na segunda equação o termo $D \sin \alpha$ foi desprezado face aos outros dois. Adimensionalizando (7.31), obtém-se

$$\begin{cases} C_T + C_L \alpha - C_D - C_W \sin \theta = 0, \\ C_L = C_W \cos \theta, \\ C_m = 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

As duas últimas equações são idênticas às equações de equilíbrio habituais para voo rectilíneo horizontal, mas com $C_{L_{\text{trim}}} = C_W \cos \theta$. Os valores de α e de δ_e resultam da solução de

$$\begin{cases} C_W \cos \theta = C_{L_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{trim}}}, \\ 0 = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{\text{trim}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_{\text{trim}}}, \end{cases} \quad (7.33)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \alpha_{\text{trim}} = \frac{(C_W \cos \theta) C_{m_{\delta_e}} + C_{m_0} C_{L_{\delta_e}}}{\det}, \\ \delta_{e_{\text{trim}}} = -\frac{C_{L_\alpha} C_{m_0} + (C_W \cos \theta) C_{m_\alpha}}{\det}. \end{cases} \quad (7.34)$$

Como $C_{L_{\text{trim}}} = C_W \cos \theta < C_W$ (que é o valor de $C_{L_{\text{trim}}}$ para voo horizontal), o valor de α_{trim} será menor e o de $\delta_{e_{\text{trim}}}$ será maior (isto é, mais positivo ou menos negativo) que para voo horizontal para a mesma velocidade. Isto deve-se a que agora a sustentação tem de equilibrar apenas uma parte do peso, sendo a outra parte equilibrada por um acréscimo da força de propulsão. A primeira equação de (7.32) é agora

$$C_T = C_D + C_W \sin \theta - C_L \alpha_{\text{trim}} = C_D + C_W (\sin \theta - \alpha_{\text{trim}} \cos \theta), \quad (7.35)$$

e usando o valor de α_{trim} obtido acima (e calculando C_D a partir de C_L ou do ângulo de ataque), o valor de C_T necessário para garantir um ângulo de subida θ pode ser determinado.

Em conclusão, a velocidade e o ângulo de subida são determinados pelo sistema (7.32) e controlados por δ_e e pela força de propulsão.

7.3 Estados estacionários laterais

O estado estacionário lateral que vamos tratar é a derrapagem estacionária. A volta coordenada é também um estado estacionário lateral, mas iremos descrevê-la como manobra estacionária.

7.3.1 Derrapagem estacionária

Tal como anteriormente, «estacionária» implica que as derivadas temporais são nulas. Num voo apenas de derrapagem, as velocidades angulares devem também ser nulas:

$$p = 0 = q = r. \quad (7.36)$$

As equações do movimento lateral são (para aeronaves simétricas):

$$\begin{cases} Y + mg \cos \theta \sin \phi = m(\dot{v} + ru - pw) = 0, \\ L = I_{xx}\dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) - (I_{yy} - I_{zz})qr = 0, \\ N = I_{zz}\dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_{xx} - I_{yy})pq = 0. \end{cases}$$

Tendo em conta (7.36) e o anulamento das derivadas temporais, obtemos

$$\begin{cases} Y + mg \sin \phi \cos \theta = 0, \\ L = 0, \\ N = 0. \end{cases}$$

Recordando (7.18) e (7.23), as forças e momentos aerodinâmicos são dados por

$$\begin{cases} Y = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_r} \delta_r = Y_v v + Y_{\delta_r} \delta_r, \\ L = L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_r} \delta_r + L_{\delta_a} \delta_a = L_v v + L_{\delta_r} \delta_r + L_{\delta_a} \delta_a, \\ N = N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_r} \delta_r + N_{\delta_a} \delta_a = N_v v + N_{\delta_r} \delta_r + N_{\delta_a} \delta_a. \end{cases}$$

Obtem-se então o sistema de equações para a derrapagem estacionária:

$$\begin{cases} Y_v v + Y_{\delta_r} \delta_r + mg \cos \theta \sin \phi = 0 \\ L_v v + L_{\delta_r} \delta_r + L_{\delta_a} \delta_a = 0 \\ N_v v + N_{\delta_r} \delta_r + N_{\delta_a} \delta_a = 0 \end{cases}$$

Este sistema pode escrever-se na forma matricial. Dada a velocidade de derrapagem, obtemos os valores das deflexões dos *ailerons* e do leme de direcção, bem como do ângulo de pranchamento necessários para a manobra.

$$\begin{bmatrix} Y_{\delta_r} & 0 & mg \cos \theta \\ L_{\delta_r} & L_{\delta_a} & 0 \\ N_{\delta_r} & N_{\delta_a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \\ \sin \phi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y_v \\ L_v \\ N_v \end{bmatrix} v. \quad (7.37)$$

Note-se que as equações (7.37) podem também ser escritas na forma adimensional:

$$\begin{bmatrix} C_{y_{\delta_r}} & 0 & C_w \cos \theta \\ C_{l_{\delta_r}} & C_{l_{\delta_a}} & 0 \\ C_{n_{\delta_r}} & C_{n_{\delta_a}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \\ \sin \phi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{y_\beta} \\ C_{l_\beta} \\ C_{n_\beta} \end{bmatrix} \beta. \quad (7.38)$$

A relação entre as derivadas dimensionais e as derivadas dos coeficientes adimensionais será tratada mais à frente.

Alguns casos particulares de especial interesse são os de voo com vento lateral e de voo na situação de *One engine inoperative* (OEI). No caso de *One engine inoperative* (OEI) a propulsão não é simétrica e há forças adicionais de resistência do(s) motor(es) parado(s). Por este motivo gera-se um momento de guinada devido à propulsão, N_T , que é necessário adicionar às equações acima. O momento total de guinada passa a ser não nulo: $N = N_T$.

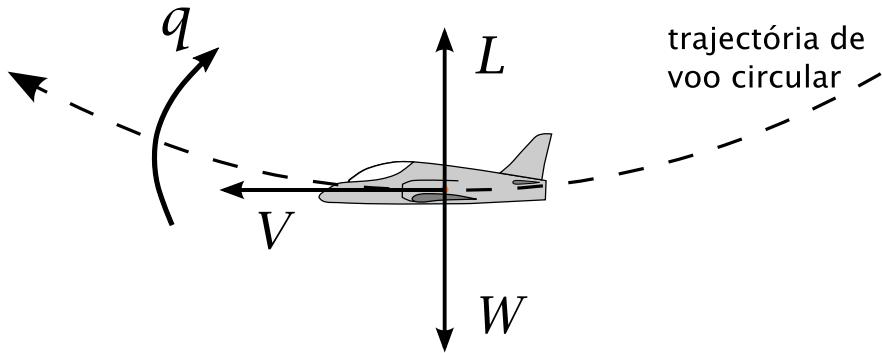


Figura 7.2: Manobra de *pull-up* simétrico.

7.4 Manobras

As manobras efectuadas pelos aviões são em geral não estacionárias. Com frequência nas manobras os efeitos aerodinâmicos transientes são importantes e os ângulos de guinada e rolamento (e até de picada) podem ser elevados. Como não são estados de equilíbrio, também não faz sentido falar de estabilidade das manobras, embora a estabilidade da aeronave seja relevante para a capacidade de efectuar manobras facilmente e com segurança.

Existem, porém, algumas manobras que podem ser consideradas estacionárias e que iremos considerar em seguida: a manobra de descida-subida simétrica, ou *pull-up* simétrico, que é uma manobra longitudinal, e a viragem estacionária, ou volta coordenada, que é uma manobra lateral.

7.5 Manobra de descida-subida simétrica

A manobra longitudinal que vamos considerar é a manobra de descida-subida (*pull-up*) simétrica. A figura 7.2 representa esta manobra na situação em que o avião se encontra no ponto mais baixo da trajectória. A trajectória de voo é circular num plano vertical, pelo que existe uma aceleração normal. Além disso, existe uma velocidade angular de picada q . Em rigor esta manobra não é estacionária porque as componentes do peso quer segundo a velocidade quer perpendicular a ela não são constantes durante o movimento. No entanto, considerando uma vizinhança próxima do ponto mais baixo da trajectória podemos desprezar essa variação da direcção das forças e considerar a manobra como simétrica.

Define-se factor de carga n como a razão entre a sustentação e o peso da aeronave:

$$n = \frac{L}{W} \Leftrightarrow L = nW. \quad (7.39)$$

Logo, na direcção vertical $L - W = (n - 1)W = (n - 1)mg$, e a aceleração normal é

$$a_n = \frac{L - W}{m} = (n - 1)g. \quad (7.40)$$

Seja δ_e a deflexão do leme necessária para um voo rectilíneo estacionário com velocidade V . Na manobra de *pull-up* a deflexão deverá ser diferente: $\delta_e + \Delta\delta_e$. Por outro

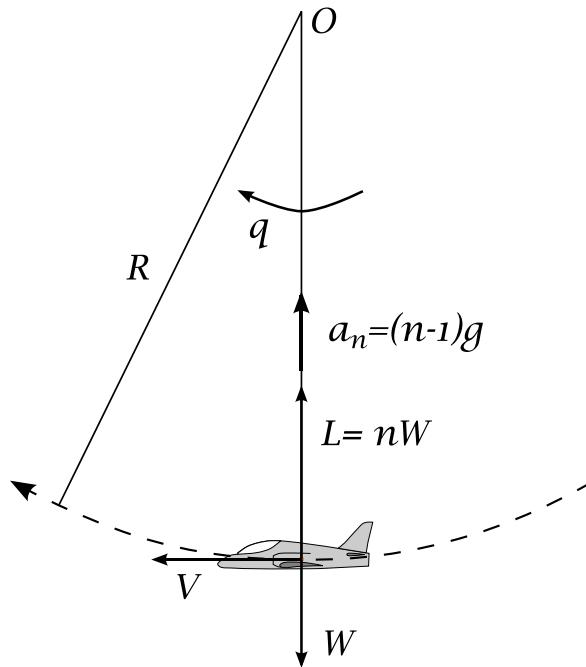


Figura 7.3: Manobra de *pull-up* simétrico: aceleração normal e factor de carga n .

lado, se a força de controlo que é necessário exercer para equilibrar o avião é P num voo rectilíneo estacionário, numa manobra de *pull-up* deverá ser $P + \Delta P$. Pretendemos determinar os valores dos acréscimos $\Delta\delta_e$ e ΔP . Normalmente estes acréscimos expressam-se em função da aceleração normal, medida em g . Define-se assim deflexão do leme de profundidade por g como

$$\frac{\Delta\delta_e}{n - 1}, \quad (7.41)$$

e força de controlo por g como

$$\frac{\Delta P}{n - 1}. \quad (7.42)$$

A aceleração numa manobra de *pull-up* é a aceleração centrípeta do movimento circular com velocidade V e raio R (ver figura 7.3):

$$a_n = \frac{V^2}{R} = q^2 R \Rightarrow q = \frac{V}{R} \Rightarrow a_n = qV \quad (7.43)$$

Logo, a velocidade angular de picada é dada por

$$q = \frac{a_n}{V} = \frac{(n - 1)g}{V}. \quad (7.44)$$

7.5.1 Equações de equilíbrio dinâmico

Como existe velocidade angular de picada q , o escoamento visto pela aeronave é curvo, o que provoca alteração no campo de pressões e nas forças e momentos aerodinâmicos relativamente à situação em que $q = 0$. Representando por ΔC_L e ΔC_m

a variação dos coeficientes de sustentação e do momento de picada quando $q \neq 0$, podemos escrever

$$\begin{cases} C_{L_{\text{total}}} = C_{L_{\text{voo horizontal}}} + \Delta C_L, \\ C_{m_{\text{total}}} = C_{m_{\text{voo horizontal}}} + \Delta C_m. \end{cases} \quad (7.45)$$

Se q , $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta_e$ forem «pequenos», os coeficientes C_L e C_m dependem linearmente das variáveis dinâmicas, que neste caso incluem a velocidade angular de picada:

$$\begin{cases} C_{L_{\text{total}}} = C_{L_\alpha}(\alpha + \Delta\alpha) + C_{L_q}\hat{q} + C_{L_{\delta_e}}(\delta_e + \Delta\delta_e), \\ C_{m_{\text{total}}} = C_{m_0} + C_{m_\alpha}(\alpha + \Delta\alpha) + C_{m_q}\hat{q} + C_{m_{\delta_e}}(\delta_e + \Delta\delta_e), \end{cases}$$

sendo

$$C_{L_q} = \frac{\partial C_L}{\partial \hat{q}}, \quad C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{\partial \hat{q}}.$$

Tendo em conta que num voo horizontal $C_{L_{\text{voo horizontal}}}$ e $C_{m_{\text{voo horizontal}}}$ devem verificar (2.77), obtemos

$$\begin{cases} \Delta C_L = C_{L_\alpha}\Delta\alpha + C_{L_q}\hat{q} + C_{L_{\delta_e}}\Delta\delta_e, \\ \Delta C_m = C_{m_\alpha}\Delta\alpha + C_{m_q}\hat{q} + C_{m_{\delta_e}}\Delta\delta_e. \end{cases} \quad (7.46)$$

A equação (7.44) permite escrever a velocidade angular de picada \hat{q} como

$$\hat{q} = \frac{q\bar{c}}{2V} = \frac{(n-1)g\bar{c}}{2V^2} = (n-1)\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SV^2}\frac{\frac{1}{2}\rho S\bar{c}}{2m} = (n-1)\frac{C_W}{2\mu}, \quad (7.47)$$

tendo sido usados o coeficiente adimensional do peso, C_W , e a razão de massa, μ , definidos respectivamente por

$$C_W = \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad (7.48)$$

$$\mu = \frac{m}{\frac{1}{2}\rho S\bar{c}}. \quad (7.49)$$

Na descida-subida estacionária não há aceleração angular. Por isso, $C_{m_{\text{total}}} = 0$ implica $\Delta C_m = 0$. Por outro lado, os coeficientes de sustentação verificam

$$C_{L_{\text{total}}} = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad (7.50)$$

$$C_{L_{\text{voo horizontal}}} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = C_W, \quad (7.51)$$

$$\Delta C_L = \frac{L - W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = \frac{(n-1)W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = (n-1)C_W. \quad (7.52)$$

Das equações de equilíbrio dinâmico deduz-se portanto que

$$\begin{cases} \Delta C_L = (n-1)C_W = C_{L_\alpha}\Delta\alpha + C_{L_q}(n-1)\frac{C_W}{2\mu} + C_{L_{\delta_e}}\Delta\delta_e \\ \Delta C_m = 0 = C_{m_\alpha}\Delta\alpha + C_{m_q}(n-1)\frac{C_W}{2\mu} + C_{m_{\delta_e}}\Delta\delta_e \end{cases} \quad (7.53)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C_{L_\alpha} & C_{L_{\delta_e}} \\ C_{m_\alpha} & C_{m_{\delta_e}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Delta\alpha}{n-1} \\ \frac{\Delta\delta_e}{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_W \left(1 - \frac{C_{L_q}}{2\mu}\right) \\ -C_W \frac{C_{m_q}}{2\mu} \end{bmatrix}. \quad (7.54)$$

A deflexão adicional do *elevator* necessária para que se dê a manobra de *pull-up* é

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_W}{\det} \left[C_{m_\alpha} - \frac{1}{2\mu} (C_{L_q} C_{m_\alpha} - C_{L_\alpha} C_{m_q}) \right]. \quad (7.55)$$

O acréscimo no ângulo de ataque pode ser dado por

$$\frac{\Delta\alpha}{n-1} = \frac{1}{C_{L_\alpha}} \left[C_W - C_{L_q} \frac{C_W}{2\mu} - C_{L_{\delta_e}} \frac{\Delta\delta_e}{n-1} \right], \quad (7.56)$$

ou ainda por

$$\frac{\Delta\alpha}{n-1} = \frac{C_W}{\det} \left[C_{m_{\delta_e}} - \frac{1}{2\mu} (C_{L_q} C_{m_{\delta_e}} - C_{L_{\delta_e}} C_{m_q}) \right]. \quad (7.57)$$

7.5.2 Ponto e margem de manobra

O acréscimo de deflexão $\Delta\delta_e$ depende da posição do centro de massa por via das derivadas C_{m_α} , C_{L_q} e C_{m_q} . Explicitando apenas a contribuição de C_{m_α} e fazendo uso de (2.44) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\delta_e}{n-1} &= -\frac{C_W}{\det} \left[C_{L_\alpha} (h - h_n) \left(1 - \frac{1}{2\mu} C_{L_q}\right) + \frac{C_{L_\alpha} C_{m_q}}{2\mu} \right] \\ &= -\frac{C_W C_{L_\alpha} (2\mu - C_{L_q})}{2\mu \det} \left(h - h_n + \frac{C_{m_q}}{2\mu - C_{L_q}} \right). \end{aligned} \quad (7.58)$$

Define-se ponto de manobra (h_m) como a posição do centro de massa para a qual $\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = 0$. Assim, de (7.58) conclui-se que o ponto de manobra é dado por

$$h_m = h_n - \frac{C_{m_q}(h_m)}{2\mu - C_{L_q}(h_m)}. \quad (7.59)$$

Na equação (7.59) explicitou-se a dependência de C_{L_q} e C_{m_q} relativamente à posição do centro de massa. Na maioria dos casos pode-se simplicar a equação (7.59) pois $C_{L_q} \ll 2\mu$. Além disso, em aeronaves com cauda a variação de C_{m_q} com h é pequena. A variação de $\Delta\delta_e$ com h é aproximadamente linear e a posição do ponto de manobra pode ser approximada por

$$h_m = h_n - \frac{C_{m_q}}{2\mu}. \quad (7.60)$$

Em função do ponto de manobra, a deflexão (adicional) do leme por g vem dada por

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_W C_{L_\alpha} (2\mu - C_{L_q})}{2\mu \det} (h - h_m). \quad (7.61)$$

Define-se margem de manobra com controlo fixo como $(h_m - h)$. Na hipótese de que a variação de C_{L_q} e C_{m_q} com h pode ser desprezada, a deflexão do leme por g varia linearmente com a margem de manobra. O declive da recta é proporcional a C_W .

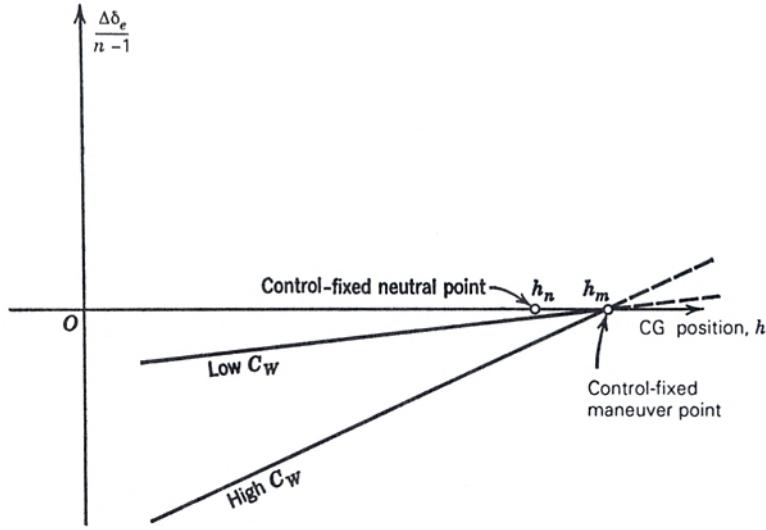


Figura 7.4: Variação da deflexão adicional do leme por g em função da posição do contro de massa. (Fonte: [1])

7.5.3 Força de controlo por g e ponto de manobra de manche livre

Como vimos, para realizar a manobra de *pull-up* é necessária uma deflexão adicional de leme de profundidade. A esta deflexão adicional corresponderá uma força de controlo adicional, que vamos determinar de seguida.

A força de controlo depende do momento de charneira, pelo que

$$P = GS_e \bar{c}_e \frac{1}{2} \rho V^2 C_{he} \Rightarrow \Delta P = GS_e \bar{c}_e \frac{1}{2} \rho V^2 \Delta C_{he} \quad (7.62)$$

Mas, em voo rectilíneo e estacionário,

$$C_{he_{\text{voo rectilíneo}}} = C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_t.$$

na manobra de *pull-up* teremos

$$C_{he_{\text{total}}} = C_{he_{\text{voo rectilíneo}}} + \Delta C_{he}, \quad (7.63)$$

em que ΔC_{he} depende não apenas de α e δ_e , mas também da velocidade angular de picada \hat{q} , dado que esta modifica o escoamento em torno do avião:

$$\Delta C_{he} = C_{he_\alpha} \Delta \alpha + C_{he_q} \hat{q} + b_2 \Delta \delta_e. \quad (7.64)$$

Usando as expressões (7.56) e (7.47) para substituir $\Delta \alpha$ e \hat{q} , respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C_{he}}{n - 1} &= \frac{C_{he_\alpha}}{C_{L_\alpha}} \left[C_W - C_{L_q} \frac{C_W}{2\mu} - C_{L_{\delta_e}} \frac{\Delta \delta_e}{n - 1} \right] + C_{he_q} \frac{C_W}{2\mu} + b_2 \frac{\Delta \delta_e}{n - 1} \\ &= \frac{C_W}{2\mu C_{L_\alpha}} \left[(2\mu - C_{L_q}) C_{he_\alpha} + C_{he_q} C_{L_\alpha} \right] + \frac{\Delta \delta_e}{n - 1} \left(b_2 - \frac{C_{he_\alpha} C_{L_{\delta_e}}}{C_{L_\alpha}} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, usando (7.61) e tendo em conta que

$$a' = C_{L_\alpha} - \frac{C_{he_\alpha} C_{L_{\delta_e}}}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a' b_2}{C_{L_\alpha}} = b_2 - \frac{C_{he_\alpha} C_{L_{\delta_e}}}{C_{L_\alpha}},$$

conclui-se que

$$\frac{\Delta C_{he}}{n-1} = -\frac{C_W}{2\mu} \frac{a' b_2}{\det} (2\mu - C_{L_q})(h - h'_m). \quad (7.65)$$

Na equação (7.65) introduziu-se o ponto de manobra com manche livre, h'_m , definido por

$$h'_m = h_m + \frac{\det}{a' b_2} \left(\frac{C_{he_\alpha}}{C_{L_\alpha}} + \frac{C_{he_q}}{2\mu - C_{L_q}} \right) \quad (7.66)$$

A equação (7.62) permite determinar a força de controlo por g , representada por Q :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Delta P}{n-1} = GS_e \bar{c}_e \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{\Delta C_{he}}{n-1} \\ &= -GS_e \bar{c}_e \frac{1}{2} \rho V^2 C_W \frac{1}{2\mu} \frac{a' b_2}{\det} (2\mu - C_{L_q})(h - h'_m) \\ &= -GS_e \bar{c}_e \frac{W}{S} \frac{a' b_2}{2\mu \det} (2\mu - C_{L_q})(h - h'_m) \end{aligned}$$

Em função da carga alar (*wing loading*) $w = W/S$, a força de controlo por g vem dada por

$$Q = -GS_e \bar{c}_e w \frac{a' b_2}{2\mu \det} (2\mu - C_{L_q})(h - h'_m). \quad (7.67)$$

Podemos concluir que Q aumenta linearmente com h à medida que o CG se desloca para a frente, é proporcional à carga alar w , é proporcional a $(S_e \bar{c}_e)$, i.e., ao cubo das dimensões lineares da aeronave, e é independente da velocidade do avião, V .

Na figura 7.5 mostra-se a dependência da força de controlo por g com a posição do centro de massa da aeronave.

7.6 Manobra de Viragem Estacionária

Volta coordenada é uma manobra de viragem em que a velocidade angular de viragem é vertical e constante e em que a força resultante não tem componente lateral (no referencial do avião). Note-se que por vezes se considera que numa volta coordenada a derrapagem é nula, o que é apenas aproximadamente verdade.

Habitualmente ϕ é grande, pelo que existe acoplamento entre equações longitudinais e laterais. As outras variáveis (ângulos de ataque, ângulo de subida, etc.) são pequenas e podemos linearizar as equações nessas variáveis. Por exemplo, são válidas as aproximações $\cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx \theta$.

As componentes da velocidade angular obtém-se aplicando a matriz de rotação ao vector $\vec{\omega}$:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R_{BE} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & & \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \end{bmatrix} \omega \quad (7.68)$$

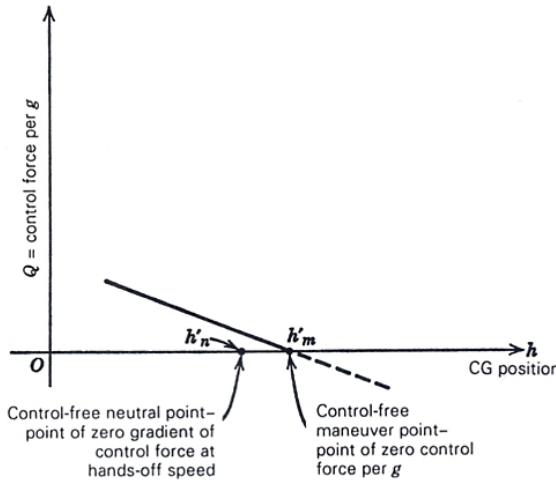


Figura 7.5: Força de controlo por g : dependência da posição do centro de massa. (Fonte: [1])

ou seja,

$$\begin{cases} p = -\omega \sin \theta \\ q = \omega \sin \phi \cos \theta \\ r = \omega \cos \phi \cos \theta \end{cases} \quad (7.69)$$

Comecemos por determinar as equações do movimento de translação segundo y e z , que dependem das forças aerodinâmicas aplicadas. O sistema de eixos de estabilidade é o mais adequado neste problema. O eixo Gx é definido como estando na direcção da projecção da velocidade no plano de simetria e portanto $\alpha_x = 0 = w$. Admitiremos também que não há vento. As equações do movimento de translação segundo y e z são então

$$\begin{cases} Y + mg \cos \theta \sin \phi = m(\dot{v} + ur - pw) = mur \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi = m(\dot{w} + vp - qu) = m(vp - qu) \end{cases}$$

Numa volta coordenada o ângulo de derrapagem é quase nulo, pelo que podemos supor v pequeno, e portanto $u \approx V$. Além disso, se v e p são pequenos, podemos desprezar o produto vp . Logo, o sistema pode aproximar-se por

$$\begin{cases} Y \approx -mg \sin \phi \cos \theta + mrV = 0 \\ Z \approx -mg \cos \phi \cos \theta - mqV \end{cases} \quad (7.70)$$

Note-se que $Y = 0$ pela definição de volta coordenada, e que $Y = 0 \Rightarrow C_y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -mg \sin \phi \cos \theta + mrV \Rightarrow \sin \phi = \frac{rV}{g \cos \theta} \\ r = \omega \cos \phi \cos \theta \Rightarrow \cos \phi = \frac{r}{\omega \cos \theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \tan \phi = \frac{\omega V}{g}.$$

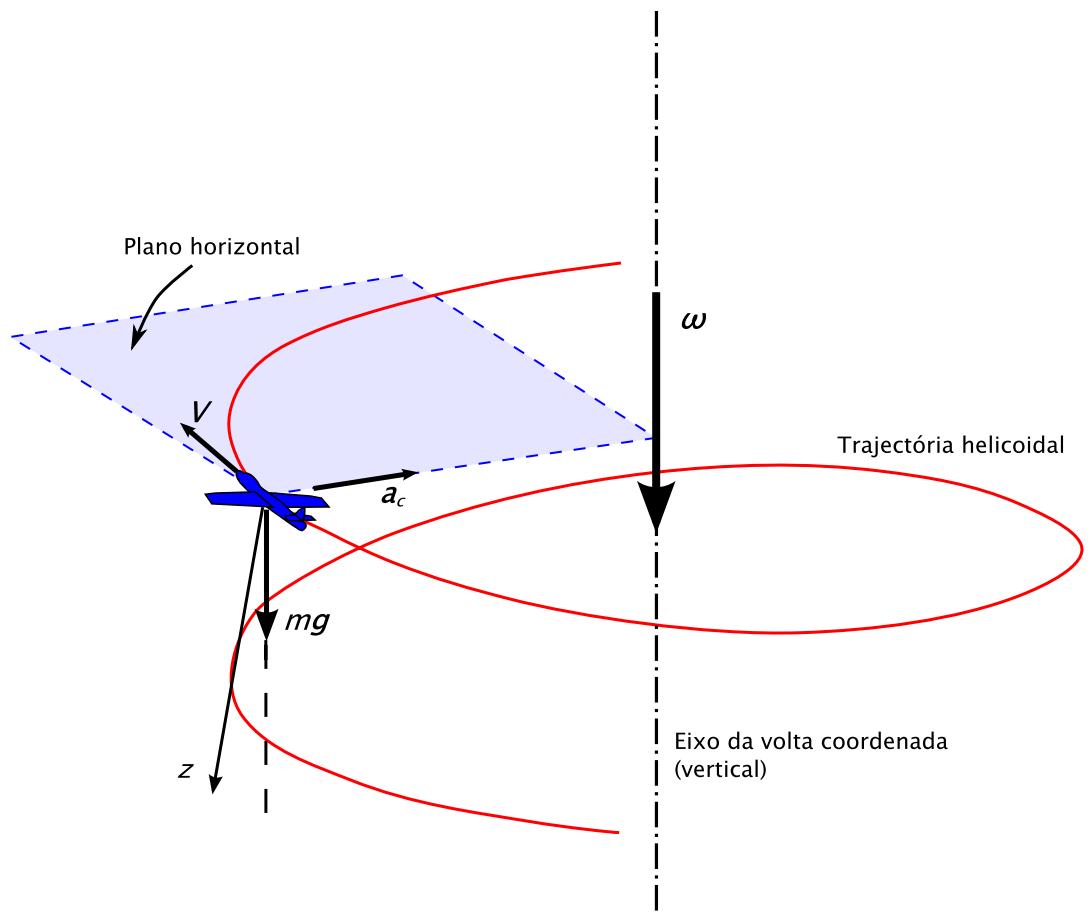


Figura 7.6: Viragem estacionária com subida. A velocidade angular $\vec{\omega}$ é vertical e a aceleração centrípeta está no plano horizontal.

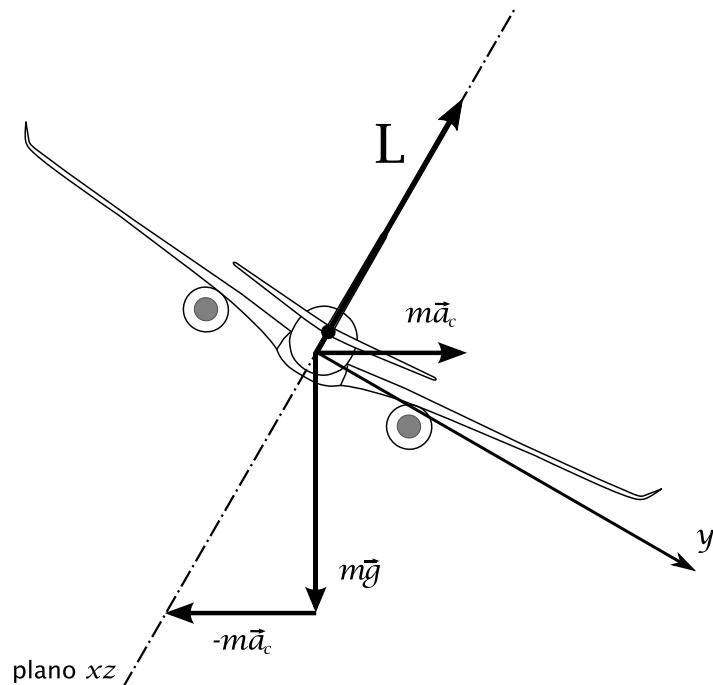


Figura 7.7: Forças numa manobra de viragem estacionária. No plano yz a resultante da sustentação e do peso é a aceleração centrípeta.

O factor de carga (vertical) n_z é a razão entre a força vertical e o peso, donde

$$\begin{aligned} n_z &= -\frac{Z}{mg} = \cos \phi \cos \theta + \frac{qV}{g} = \cos \phi \cos \theta + \frac{(\omega \sin \phi \cos \theta)V}{g} = \\ &= \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \tan \phi \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\cos \phi} = \cos \theta \sec \phi \end{aligned}$$

Para eixos de estabilidade $Z = -L$, pelo que

$$n = \frac{L}{W} = n_z = \cos \theta \sec \phi \quad (7.71)$$

O incremento do coeficiente de sustentação relativamente ao valor necessário para um voo estacionário rectilíneo é

$$\Delta C_L = \frac{L - mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = (n - 1)C_W. \quad (7.72)$$

Este incremento é conseguido à custa da contribuição da velocidade angular de picada e dos incrementos $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta_e$ relativamente aos valores de equilíbrio para voo rectilíneo horizontal.

Consideremos agora as equações para o movimento de rotação. Para uma aeronave

simétrica as equações dos momentos são

$$\begin{cases} L = I_x \dot{p} - I_{zx} \dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{zx} pq + qh'_z - rh'_y \\ M = I_y \dot{q} + rp(I_x - I_z) + I_{zx}(p^2 - r^2) + rh'_x - ph'_z \\ N = I_z \dot{r} - I_{zx} \dot{p} + pq(I_y - I_x) - I_{zx} qr + ph'_y - qh'_x \end{cases}$$

Num estado estacionário as derivadas temporais são nulas. Por outro lado as velocidades angulares sopõem-se pequenas e pode-se desprezar os termos quadráticos (qr , pq , rp , p^2 e r^2). Finalmente, desprezam-se as contribuições dos rotores. Conclui-se portanto que $L = M = N = 0 \Rightarrow C_l = C_m = C_n = 0$.

Tendo em conta (7.25), as equações para o movimento lateral direccional são

$$\begin{cases} 0 = C_l = C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \hat{p} + C_{l_r} \hat{r} + C_{l_{\delta_r}} \delta_r + C_{l_{\delta_a}} \delta_a \\ 0 = C_n = C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \hat{p} + C_{n_r} \hat{r} + C_{n_{\delta_r}} \delta_r + C_{n_{\delta_a}} \delta_a \\ 0 = C_y = C_{y_\beta} \beta + C_{y_p} \hat{p} + C_{y_r} \hat{r} + C_{y_{\delta_r}} \delta_r \end{cases}$$

Para o movimento longitudinal as equações são

$$\begin{cases} \Delta C_L = C_{L_\alpha} \Delta \alpha + C_{L_q} \hat{q} + C_{L_{\delta_e}} \Delta \delta_e = (n - 1) C_W \\ C_m = C_{m_\alpha} \Delta \alpha + C_{m_q} \hat{q} + C_{m_{\delta_e}} \Delta \delta_e = 0 \end{cases}$$

em que, tal como no caso da manobra de *pull-up*, $\Delta \alpha$ e $\Delta \delta_e$ são os incrementos do ângulo de ataque e da deflexão do *elevator* relativamente ao caso de voo rectilíneo estacionário (em equilíbrio).

Usando (7.69) para escrever todas as velocidades angulares em função de ω , as equações na forma matricial para as variáveis laterais são

$$\begin{bmatrix} C_{y_\beta} & C_{y_{\delta_r}} & 0 \\ C_{l_\beta} & C_{l_{\delta_r}} & C_{l_{\delta_a}} \\ C_{n_\beta} & C_{n_{\delta_r}} & C_{n_{\delta_a}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \delta_r \\ \delta_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{y_p} & C_{y_r} \\ C_{l_p} & C_{l_r} \\ C_{n_p} & C_{n_r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \times \frac{\omega b}{2V}, \quad (7.73)$$

e para as variáveis longitudinais são

$$\begin{bmatrix} C_{L_\alpha} & C_{L_{\delta_e}} \\ C_{m_\alpha} & C_{m_{\delta_e}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \delta_e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{L_q} \\ C_{m_q} \end{bmatrix} \times \frac{\omega \bar{c}}{2V} \sin \phi \cos \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ (n - 1) C_W \end{bmatrix}. \quad (7.74)$$

O incremento da deflexão do leme de profundidade pode obter-se resolvendo a equação (7.74), obtendo-se

$$\begin{aligned} \Delta \delta_e &= \frac{1}{\det} \left\{ C_{m_\alpha} \left[-C_{L_q} \frac{\omega \bar{c}}{2V} \sin \phi \cos \theta + (n - 1) C_W \right] + C_{L_\alpha} \left(C_{m_q} \frac{\omega \bar{c}}{2V} \sin \phi \cos \theta \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\det} \left\{ \frac{\omega \bar{c}}{2V} \sin \phi \cos \theta (C_{m_q} C_{L_\alpha} - C_{m_\alpha} C_{L_q}) + (n - 1) C_W C_{m_\alpha} \right\} \\ &= \frac{1}{\det} \left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \frac{C_W}{2\mu} \cos \theta (C_{m_q} C_{L_\alpha} - C_{m_\alpha} C_{L_q}) + (n - 1) C_W C_{m_\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Nas equações acima usou-se

$$\begin{aligned} \frac{\omega \bar{c}}{2V} \sin \phi &= \frac{(g \tan \phi / V) \bar{c}}{2V} \sin \phi = \frac{mg}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \frac{\rho S \bar{c}}{2 \times 2m} \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} = \\ &= \frac{C_W}{2\mu} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) n = \frac{C_W}{2\mu} \frac{n^2 - 1}{n}. \end{aligned}$$

A expressão para $\Delta\delta_e$ pode também escrever-se como

$$\Delta\delta_e = -(n - 1)C_W \frac{C_{m_\alpha} + \frac{n+1}{2\mu n} \cos \theta (C_{m_q} C_{L_\alpha} - C_{m_\alpha} C_{L_q})}{C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{L_{\delta_e}} C_{m_\alpha}}. \quad (7.75)$$

Note-se a semelhança desta expressão com a obtida para o caso da manobra de *pull-up*.

Resolvendo o sistema (7.73) podem-se encontrar os valores da deflexão dos *ailerons* e do *rudder* necessários para que se realize a volta coordenada, bem como o valor do ângulo de derrapagem (que é habitualmente quase nulo).

Capítulo 8

Teoria para Pequenas Perturbações

No capítulo 6 deduziram-se as equações gerais do movimento de uma aeronave. Estas equações são não lineares, mas é possível encontrar soluções particulares para alguns estados estacionários, como foi feito no capítulo 7. Interessa saber se esses estados estacionários são estáveis para pequenas perturbações das variáveis dinâmicas. Para isso é necessário estabelecer as equações que regem a evolução temporal dessas pequenas perturbações. Começaremos por linearizar as equações do movimento e em seguida tendo em conta as equações do movimento do estado estacionário, obteremos um sistema de equações diferenciais lineares para as pequenas perturbações.

8.1 Definição do estado estacionário

As variáveis dinâmicas vão ser decompostas na soma do valor que assumem no estado estacionário com o valor da pequena perturbação. Usaremos o índice 0 para identificar as variáveis do estado estacionário.

O estado estacionário relativamente ao qual vamos procurar estabelecer as equações de evolução das pequenas perturbações é o correspondente a um movimento rectilíneo uniforme sem derrapagem e com asas niveladas. Logo, são nulas a aceleração linear ($\dot{u}_0 = \dot{v}_0 = \dot{w}_0 = 0$), a velocidade angular ($p_0 = q_0 = r_0 = 0$), a velocidade lateral ($v_0 = 0$) e o ângulo de pranchamento ($\phi_0 = 0$). Além disso, sem perda de generalidade consideraremos o ângulo de rumo nulo ($\psi = 0$).

Usaremos um sistema de eixos de estabilidade, pelo que o eixo Cx tem a direcção de \vec{V}_0 (o que é sempre possível porque $v_0 = 0$). Logo, $w_0 = 0$, o que implica que $\alpha_x = 0$, pelo que θ_0 coincide com o ângulo de subida.

Admitiremos que o efeito dos rotores é desprezável. Esta hipótese é válida se o avião está em voo planado ou se o momento angular de cada rotor é pequeno ou ainda se os rotores são simétricos e rodam em sentidos opostos.

Se existir vento com velocidade constante, a velocidade do avião relativamente à Terra é $\vec{V}^E = \vec{V} + \vec{W}$. A influência do vento na dinâmica será tratada mais à frente. Por enquanto admitir-se-á que não existe vento, pelo que $\vec{V}^E = \vec{V}$, ou seja, $u^E = u$, $v^E = v$ e $w^E = w$.

Finalmente, no estado estacionário temos $\delta_a = 0$ e $\delta_r = 0$ (mas, evidentemente, $\delta_e \neq 0$).

8.1.1 Notação para estado estacionário e perturbação

As variáveis dinâmicas vão ser decompostas na soma do valor que assumem no estado estacionário com o valor da pequena perturbação. Por exemplo, representando por x o valor total de uma determinada variável, o seu valor no estado estacionário é x_0 e o valor da perturbação é Δx . Logo, $x = x_0 + \Delta x$. No caso em que $x_0 = 0$, a variável total é $x = \Delta x$. Neste caso usaremos apenas x para a perturbação.

Tendo em conta o estado estacionário definido acima, a velocidade linear é

$$\begin{cases} u = u_0 + \Delta u, \\ v \equiv \Delta v, \\ w \equiv \Delta w. \end{cases} \quad (8.1)$$

Por sua vez, a velocidade angular é

$$\begin{cases} p \equiv \Delta p \quad (p_0 = 0), \\ q \equiv \Delta q \quad (q_0 = 0), \\ r \equiv \Delta r \quad (r_0 = 0), \end{cases} \quad (8.2)$$

e os ângulos de Euler são

$$\begin{cases} \psi \equiv \Delta \psi \quad (\psi_0 = 0), \\ \theta = \theta_0 + \Delta \theta, \\ \phi \equiv \Delta \phi \quad (\phi_0 = 0). \end{cases} \quad (8.3)$$

Dado que, por hipótese, $\Delta \theta$ é pequeno, podemos usar as aproximações habituais: $\cos \Delta \theta \approx 1$ e $\sin \Delta \theta \approx \Delta \theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0 + \Delta \theta) &= \sin \theta_0 \cos \Delta \theta + \cos \theta_0 \sin \Delta \theta \approx \sin \theta_0 + \Delta \theta \cos \theta_0, \\ \cos(\theta_0 + \Delta \theta) &= \cos \theta_0 \cos \Delta \theta - \sin \theta_0 \sin \Delta \theta \approx \cos \theta_0 - \Delta \theta \sin \theta_0. \end{aligned}$$

8.1.2 Equações para o estado estacionário

Substituindo as definições do estado estacionário nas equações gerais do movimento (6.19), (6.23) e (6.12), obtemos para a dinâmica de translação as equações

$$\begin{cases} X_0 - mg \sin \theta_0 = 0, \\ Y_0 = 0, \\ Z_0 + mg \cos \theta_0 = 0. \end{cases}$$

Para as equações da dinâmica de rotação temos

$$\begin{cases} L_0 = 0, \\ M_0 = 0, \\ N_0 = 0. \end{cases}$$

Por sua vez, as equações da trajectória do estado estacionário são simplesmente

$$\begin{cases} \dot{x}_{E_0} = u_0 \cos \theta_0, \\ \dot{y}_{E_0} = 0, \\ \dot{z}_{E_0} = -u_0 \sin \theta_0. \end{cases}$$

8.2 Linearização das equações

Como foi visto acima, supomos que as perturbações são pequenas e por isso podemos desprezar os termos quadráticos (isto é, todos aqueles em que aparecem produtos das variáveis da perturbação) face aos termos lineares.

Para linearizar as equações do movimento para pequenas perturbações é necessário substituir todas as variáveis de estado pela soma da contribuição do estado estacionário com a da perturbação. Em seguida usamos as equações do estado estacionário para eliminar os termos que contenham apenas contribuições deste. Finalmente, desprezamos os termos quadráticos nas pequenas perturbações.

8.2.1 Forças e momentos aerodinâmicos

As forças e os momentos aerodinâmicos são função das variáveis de estado. Para pequenas perturbações, as variáveis de estado longitudinais são Δu , w , q e a derivada temporal \dot{w} ($\Delta \dot{u}$ e \dot{q} não são relevantes). As variáveis de estado laterais são v , p e r .

Supomos que as perturbações nas forças e momentos dependem linearmente das variáveis de estado. Admitimos ainda que em configurações simétricas as forças e momentos laterais só dependem das variáveis laterais e desprezamos a contribuição das variáveis laterais (assimétricas) para as forças e momentos longitudinais (simétricas). Assim, admitimos que as forças e momentos longitudinais dependem linearmente de Δu , w , q , \dot{w} e que as forças ou momentos laterais dependem linearmente de v , p , r .

$$\Delta X = X_u \Delta u + X_w w + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_q q + \Delta X_c \quad (8.4)$$

$$\Delta Y = Y_v v + Y_p p + Y_r r + \Delta Y_c \quad (8.5)$$

$$\Delta Z = Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + \Delta Z_c \quad (8.6)$$

$$\Delta L = L_v v + L_p p + L_r r + \Delta L_c \quad (8.7)$$

$$\Delta M = M_u \Delta u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + \Delta M_c \quad (8.8)$$

$$\Delta N = N_v v + N_p p + N_r r + \Delta N_c \quad (8.9)$$

Habitualmente a dependência da força segundo x em q e \dot{w} pode ser desprezada. Isso significa que $X_{\dot{w}} \approx 0$ e $X_q \approx 0$. Também não vamos considerar a variação da densidade ρ com a altitude.

8.2.2 Linearização das equações longitudinais

O movimento longitudinal é aquele em que o plano de simetria do avião não se altera. As equações longitudinais a linearizar são as equações de translação segundo x e z e a equação do movimento de rotação segundo y .

Equação do movimento de translação segundo x

Comecemos pela linearização da equação do movimento de translação segundo x ,

$$X - mg \sin \theta = m(\dot{u}^E + qw^E - rv^E).$$

Substituindo todas as variáveis como a soma da contribuição do estado estacionário com a da perturbação, obtém-se

$$(X_0 + \Delta X) - mg \sin(\theta_0 + \Delta\theta) = m(\dot{u}_0 + \Delta\dot{u} + qw - rv) \quad (8.10)$$

Dado que $\sin(\theta_0 + \Delta\theta) \approx \sin \theta_0 + \Delta\theta \cos \theta_0$ e tendo em conta as equações do estado estacionário,

$$\underbrace{(X_0 - mg \sin \theta_0)}_{=0 \text{ (Est. estacionário)}} + \Delta X - mg \cos \theta_0 \Delta\theta = m(\underbrace{\dot{u}_0}_{=0} + \Delta\dot{u} + qw - rv). \quad (8.11)$$

A linearização implica que $qw \approx 0$ e que $rv \approx 0$, pelo que

$$\Delta X - mg \cos \theta_0 \Delta\theta = m\Delta\dot{u}. \quad (8.12)$$

Por outro lado, desprezando os termos que incluem as derivadas X_q e $X_{\dot{w}}$, a equação (8.4) reduz-se a

$$\Delta X = X_u \Delta u + X_w w + \Delta X_c, \quad (8.13)$$

onde:

$$X_u \Delta u + X_w w + \Delta X_c - mg \cos \theta_0 \Delta\theta = m\Delta\dot{u}$$

ou, resolvendo para a aceleração $\Delta\dot{u}$,

$$\Delta\dot{u} = \frac{X_u}{m} \Delta u + \frac{X_w}{m} w - g \cos \theta_0 \Delta\theta + \frac{\Delta X_c}{m}. \quad (8.14)$$

Equação do movimento de translação segundo z

De forma análoga, usando as equações do estado estacionário e linearizando a equação segundo z

$$Z + mg \cos \theta \cos \phi = m(\dot{w}^E + p v^E - qu^E),$$

se chega a:

$$\dot{w} = \frac{\Delta Z}{m} - g \sin \theta_0 \Delta\theta + u_0 q. \quad (8.15)$$

Desenvolvendo ΔZ de acordo com (8.6) obtém-se

$$\dot{w} = \frac{Z_u}{m} \Delta u + \frac{Z_w}{m} w + \frac{Z_{\dot{w}}}{m} \dot{w} + \frac{Z_q}{m} q - g \sin \theta_0 \Delta\theta + u_0 q + \frac{\Delta Z_c}{m}, \quad (8.16)$$

e resolvendo em ordem a \dot{w} , obtém-se finalmente:

$$\dot{w} = \frac{Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} \Delta u + \frac{Z_w}{m - Z_{\dot{w}}} w + \frac{(mu_0 + Z_q)}{m - Z_{\dot{w}}} q - \frac{mg \sin \theta_0}{m - Z_{\dot{w}}} \Delta\theta + \frac{\Delta Z_c}{m - Z_{\dot{w}}}. \quad (8.17)$$

Equação do movimento de rotação segundo y

A equação do movimento de rotação em torno de y é

$$M = I_{yy}\dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - I_{xy}(\dot{p} + qr) - I_{yz}(\dot{r} - pq) - (I_{zz} - I_{xx})rp.$$

No caso de uma aeronave com um plano de simetria $I_{xy} = 0 = I_{yz}$ e a sua linearização conduz a

$$\dot{q} = \frac{\Delta M}{I_y}. \quad (8.18)$$

Usando (8.8) e (8.17), obtém-se finalmente

$$\begin{aligned} \dot{q} = \frac{1}{I_y} & \left[\left(M_u + \frac{M_{\dot{w}} Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} \right) \Delta u + \left(M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m - Z_{\dot{w}}} \right) w + \right. \\ & \left. \left(M_q + \frac{M_{\dot{w}}(mu_0 + Z_q)}{m - Z_{\dot{w}}} \right) q - \frac{M_{\dot{w}} mg \sin \theta_0}{m - Z_{\dot{w}}} \Delta \theta + \Delta M_c + \frac{M_{\dot{w}} \Delta Z_c}{m - Z_{\dot{w}}} \right]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Fecho do sistema de equações

Obtivemos até ao momento três equações, mas temos como variáveis Δu , w , q e $\Delta \theta$. A quarta equação pode obter-se da linearização de

$$q = \psi \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi,$$

sendo simplesmente

$$\Delta \dot{\theta} = q. \quad (8.20)$$

Resumo das equações longitudinais para pequenas perturbações

Escrevendo o sistema de equações (8.14), (8.19), (8.17) e (8.20) na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \cos \theta_0 \\ \frac{Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_w}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{(mu_0 + Z_q)}{m - Z_{\dot{w}}} & -\frac{mg \sin \theta_0}{m - Z_{\dot{w}}} \\ \frac{1}{I_y} \left(M_u + \frac{M_{\dot{w}} Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} \right) & \frac{1}{I_y} \left(M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m - Z_{\dot{w}}} \right) & \left(\frac{M_d}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}}(mu_0 + Z_q)}{I_y(m - Z_{\dot{w}})} \right) & \frac{-M_{\dot{w}} mg \sin \theta_0}{I_y(m - Z_{\dot{w}})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix}. \quad (8.21)$$

No sistema de equações acima omitiu-se o vector das variáveis de controlo, dado por

$$\left[\frac{\Delta X_c}{m}, \frac{\Delta Z_c}{m - Z_{\dot{w}}}, \frac{1}{I_y} \left(\Delta M_c + \frac{M_{\dot{w}} \Delta Z_c}{m - Z_{\dot{w}}} \right), 0 \right]^T \quad (8.22)$$

As equações linearizadas para o «flight path» são

$$\Delta \dot{x}_E = \Delta u \cos \theta_0 + w \sin \theta_0 - u_0 \Delta \theta \sin \theta_0, \quad (8.23)$$

$$\Delta \dot{z}_E = -\Delta u \sin \theta_0 + w \cos \theta_0 - u_0 \Delta \theta \cos \theta_0. \quad (8.24)$$

8.2.3 Linearização das equações laterais

O processo de linearização das equações laterais é idêntico ao das equações longitudinais. Da equação para o movimento de translação segundo y obtemos a aceleração \ddot{v} , enquanto que \dot{p} e \dot{r} se obtêm das equações para o movimento de rotação segundo x e z , respectivamente. A quarta equação, necessária para fechar o sistema de equações, pode obter-se da linearização da primeira e terceira equações de (6.12), que conduz a $\dot{\phi} = p + r \tan \theta_0$.

Para exemplificar o procedimento vamos obter a equação para \dot{p} . partimos da primeira equação do sistema (6.23):

$$L = I_{xx}\dot{p} - I_{yz}(q^2 - r^2) - I_{zx}(\dot{r} + pq) - I_{xy}(\dot{q} - rp) - (I_{yy} - I_{zz})qr.$$

Recordando que, para aviões com plano de simetria, $I_{xy} = 0 = I_{yz}$ e que no estado estacionário se tem $L_0 = 0$, a linearização desta equação conduz a

$$\Delta L = I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r}. \quad (8.25)$$

Esta equação depende de \dot{r} , pelo que necessitamos de usar simultaneamente a equação que resulta de linearizar a terceira equação do sistema (6.23), ou seja,

$$\Delta N = I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p}.$$

Tendo em conta (8.9), podemos escrever

$$\dot{r} = \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\dot{p} + \frac{N_v}{I_{zz}}v + \frac{N_p}{I_{zz}}p + \frac{N_r}{I_{zz}}r + \frac{\Delta N_c}{I_{zz}}. \quad (8.26)$$

Substituindo em (8.25) e tendo em conta que ΔL é dado por (8.7), vem

$$\left(I_{xx} - \frac{I_{xz}^2}{I_{zz}} \right) \dot{p} = \left(L_v + \frac{I_{xz}N_v}{I_{zz}} \right) v + \left(L_p + \frac{I_{xz}N_p}{I_{zz}} \right) p + \left(L_r + \frac{I_{xz}N_r}{I_{zz}} \right) r + \left(\Delta L_c + \frac{I_{xz}\Delta N_c}{I_{zz}} \right).$$

Para simplificar a escrita desta equação definimos

$$I'_x = I_{xx} - \frac{I_{xz}^2}{I_{zz}} = \frac{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{zz}}, \quad (8.27)$$

$$I'_{xz} = \frac{I_{xz}}{I_{zz}I'_x} = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}. \quad (8.28)$$

Note-se que para eixos principais de inércia $I_{xz} = 0$, então $I'_x = I_{xx}$ e $I'_{xz} = 0$. Com estas definições a equação pode escrever-se

$$\dot{p} = \left(\frac{L_v}{I'_x} + I'_{xz}N_v \right) v + \left(\frac{L_p}{I'_x} + I'_{xz}N_p \right) p + \left(\frac{L_r}{I'_x} + I'_{xz}N_r \right) r + \left(\frac{\Delta L_c}{I'_x} + I'_{xz}\Delta N_c \right). \quad (8.29)$$

De forma análoga procederíamos para deduzir a equação para \dot{r} , sendo conveniente definir igualmente

$$I'_z = \frac{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{xx}}. \quad (8.30)$$

Para eixos principais de inércia teríamos $I'_z = I_{zz}$.

Resumindo na forma matricial o sistema de equações diferenciais de primeira ordem para a evolução das pequenas perturbações laterais, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \left(\frac{Y_r}{m} - u_0\right) & g \cos \theta_0 \\ \left(\frac{L_v}{I_x} + I'_{zx} N_v\right) & \left(\frac{L_p}{I_x} + I'_{zx} N_p\right) & \left(\frac{L_r}{I_x} + I'_{zx} N_r\right) & 0 \\ \left(I'_{zx} L_v + \frac{N_v}{I_z}\right) & \left(I'_{zx} L_p + \frac{N_p}{I_z}\right) & \left(I'_{zx} L_r + \frac{N_r}{I_z}\right) & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

O vector das variáveis de controlo

$$\left[\frac{\Delta Y_c}{m}, \left(\frac{\Delta L_c}{I'_x} + I'_{zx} \Delta N_c \right), \left(I'_{zx} \Delta L_c + \frac{\Delta N_c}{I'_z} \right), 0 \right]^T \quad (8.32)$$

foi omitido também aqui.

Para completar as equações para o «flight path», a equação linearizada para Δy_E é

$$\Delta \dot{y}_E = u_0 \psi \cos \theta_0 + v. \quad (8.33)$$

Esta equação só é necessária para perturbações laterais e para perturbações longitudinais reduz-se a $\Delta \dot{y}_E = 0$.

Finalmente, a linearização da equação de (6.12) que se refere à velocidade angular de guinada, $r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi$, leva a

$$\dot{\psi} = r \sec \theta_0. \quad (8.34)$$

8.3 Forma geral das equações

Como vimos, podem existir perturbações puramente longitudinais se o avião tiver um plano de simetria, se não houver efeitos giroscópicos do rotor. As condições para a existência de perturbações puramente laterais são as referidas, mas é necessário ainda que não existam acoplamentos aerodinâmicos cruzados, isto é, se as forças e momentos longitudinais não dependerem das variáveis laterais e se as forças e momentos laterais não dependerem das variáveis longitudinais.

As equações para as pequenas perturbações têm, em ambos os casos, a mesma forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bc}. \quad (8.35)$$

Esta equação matricial representa um sistema de equações diferenciais lineares de 1ª ordem, em que a matriz do sistema \mathbf{A} é determinada a partir de (8.21) para perturações

longitudinais,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \cos \theta_0 \\ \frac{Z_u}{m-Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_w}{m-Z_{\dot{w}}} & \frac{(mu_0+Z_q)}{m-Z_{\dot{w}}} & -\frac{mg \sin \theta_0}{m-Z_{\dot{w}}} \\ \frac{1}{I_y} \left(M_u + \frac{M_{\dot{w}} Z_u}{m-Z_{\dot{w}}} \right) & \frac{1}{I_y} \left(M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m-Z_{\dot{w}}} \right) & \frac{1}{I_y} \left(M_q + \frac{M_{\dot{w}} (mu_0+Z_q)}{m-Z_{\dot{w}}} \right) & -\frac{M_{\dot{w}} mg \sin \theta_0}{I_y (m-Z_{\dot{w}})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.36)$$

e a partir de (8.31) para perturbações laterais,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \left(\frac{Y_p}{m} - u_0 \right) & g \cos \theta_0 \\ \left(\frac{L_v}{I'_x} + I'_{zx} N_v \right) & \left(\frac{L_p}{I'_x} + I'_{zx} N_p \right) & \left(\frac{L_r}{I'_x} + I'_{zx} N_r \right) & 0 \\ \left(I'_{zx} L_v + \frac{N_v}{I'_z} \right) & \left(I'_{zx} L_p + \frac{N_p}{I'_z} \right) & \left(I'_{zx} L_r + \frac{N_r}{I'_z} \right) & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.37)$$

A matriz \mathbf{B} e o vector \mathbf{c} são a matriz e o vector de controlo, a determinar a partir das mesmas equações. O vector de estado \mathbf{x} é, para perturbações longitudinais, $\mathbf{x} = [\Delta u \ w \ q \ \Delta \theta]^T$, e para perturbações laterais, $\mathbf{x} = [v \ p \ r \ \phi]^T$.

O nosso objectivo é resolver o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bc}$ em ambos os casos, mas para isso temos de saber determinar todos os termos das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} e do vector \mathbf{c} .

Capítulo 9

Derivadas de Estabilidade

Neste capítulo pretende-se calcular as derivadas de estabilidade que figuram nas equações para pequenas perturbações. Em primeiro lugar estabelecer-se-ão as relações entre as derivadas dimensionais e as adimensionais, para em seguida se procurar encontrar expressões que permitam calcular ou, pelo menos, obter uma estimativa, para as derivadas de estabilidade adimensionais.

9.1 Relações entre derivadas de estabilidade dimensionais e adimensionais

As equações do movimento (para pequenas perturbações) foram escritas na forma dimensional, usando as derivadas de estabilidade na forma dimensional. Porém, as derivadas são normalmente obtidas na forma adimensional, por exemplo, por meio de testes de modelos em túnel aerodinâmico. Torna-se por isso necessário relacionar as derivadas de estabilidade dimensionais com as adimensionais.

9.1.1 Derivadas de estabilidade dimensionais e adimensionais

As forças e momentos longitudinais correspondentes a pequenas perturbações são dados por (8.4), (8.6) e (8.8), sendo as derivadas calculadas no estado estacionário. Exemplificando com a equação (8.6),

$$\Delta Z = Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + \Delta Z_c,$$

se usarmos o índice 0 para identificar o estado estacionário, as derivadas de estabilidade são

$$Z_u = \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)_0, \quad Z_w = \left(\frac{\partial Z}{\partial w} \right)_0, \quad Z_q = \left(\frac{\partial Z}{\partial q} \right)_0, \quad Z_{\dot{w}} = \left(\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \right)_0.$$

As forças e momentos laterais correspondente à pequena perturbação são dados por (8.5), (8.7) e (8.9), sendo também aqui as derivadas calculadas no estado estacionário.

As variáveis dinâmicas são adimensionalizadas, no caso de pequenas perturbações, usando a velocidade do estado estacionário, isto é, $V = u_0$. Logo, as velocidades

adimensionais são

$$\hat{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \hat{v} = \frac{v}{u_0}, \quad \hat{w} = \frac{w}{u_0},$$

e as velocidades angulares adimensionais são

$$\hat{p} = \frac{p}{\frac{2u_0}{b}}, \quad \hat{q} = \frac{q}{\frac{2u_0}{c}}, \quad \hat{r} = \frac{r}{\frac{2u_0}{b}}.$$

Finalmente, adimensionaliza-se a derivada temporal do ângulo de ataque, tendo em conta (7.9), como

$$\hat{\alpha} = \frac{\dot{\alpha}}{\frac{2u_0}{c}}.$$

Os coeficientes adimensionais longitudinais são definidos por (7.11), (7.12) e (7.13). Em termos das variáveis dinâmicas, os coeficientes C_x , C_z e C_m são dados por (7.14), sendo as derivadas calculadas no estado estacionário. Assim, por exemplo,

$$C_z = C_{z_u} \hat{u} + C_{z_\alpha} \alpha + C_{z_q} \hat{q} + C_{z_{\dot{\alpha}}} \hat{\alpha},$$

em que

$$C_{z_u} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{u}} \right)_0, \quad C_{z_\alpha} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right)_0, \quad C_{z_q} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{q}} \right)_0, \quad C_{z_{\dot{\alpha}}} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{\alpha}} \right)_0.$$

Os coeficientes adimensionais laterais são definidos, por sua vez, por (7.19), (7.20) e (7.21) e são dados, em termos das variáveis dinâmicas adimensionais laterais, por (7.22). De novo, as derivadas são calculadas no estado estacionário.

De seguida vamos estabelecer a relação entre as derivadas dimensionais e adimensionais.

9.1.2 Derivadas longitudinais

Derivadas da força segundo z

A relação entre a força segundo Z e o respectivo coeficiente é $Z = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_z$. A velocidade da aeronave é

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

No estado estacionário, $u = u_0$, $v = 0$, e $w = 0$. Logo,

$$\left(\frac{\partial V^2}{\partial u} \right)_0 = 2u_0, \quad \left(\frac{\partial V^2}{\partial v} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial V^2}{\partial w} \right)_0 = 0.$$

A derivada relativamente a u é

$$\begin{aligned} Z_u &\equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} \rho V^2 S C_z \right]_0 = \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right) \right]_0 (C_z)_0 + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial u} \right)_0 \\ &= \frac{1}{2} \rho (2u_0) S (C_z)_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial u} \right)_0 = \rho u_0 S (C_z)_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial u} \right)_0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

No estado estacionário: $Z_0 = -mg \cos \theta_0$. Logo:

$$(C_z)_0 = \frac{Z_0}{\frac{1}{2}\rho S u_0^2} = \frac{-mg \cos \theta_0}{\frac{1}{2}\rho S u_0^2} = -C_{W_0} \cos \theta_0. \quad (9.2)$$

Por outro lado,

$$C_{z_u} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial u} \right)_0 = \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{u}} \right)_0 = \left(\frac{\partial \frac{u}{u_0}}{\partial u} \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{u}} \right)_0 = \frac{1}{u_0} C_{z_u}. \quad (9.3)$$

Finalmente, substituindo (9.2) e (9.3) em (9.1), obtém-se

$$Z_u = -\rho u_0 S \cos \theta_0 C_{W_0} + \frac{1}{2} \rho S u_0 C_{z_u}. \quad (9.4)$$

A derivada relativamente a w calcula-se de forma semelhante:

$$\begin{aligned} Z_w &\equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial w} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1}{2} \rho V^2 S C_z \right]_0 = \left[\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right) \right]_0 (C_z)_0 + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial w} \right)_0 \\ &= \frac{1}{2} \rho (2 \underbrace{w_0}_0) S (C_z)_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial w} \right)_0 = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial w} \right)_0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Note-se que

$$\left(\frac{\partial C_z}{\partial w} \right)_0 = \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial w} \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{w}} \right)_0 = \left(\frac{\partial \frac{w}{u_0}}{\partial w} \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{w}} \right)_0 = \frac{1}{u_0} \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{w}} \right)_0.$$

Por outro lado, para pequenas perturbações $\hat{w} = \alpha$, pelo que $\left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{w}} \right)_0 \equiv C_{z_\alpha}$. Por substituição em (9.5) conclui-se de que

$$Z_w = \frac{1}{2} \rho S u_0 C_{z_\alpha}. \quad (9.6)$$

O cálculo da derivada relativamente a \dot{w} faz-se da mesma forma.

$$\begin{aligned} Z_{\dot{w}} &\equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial \dot{w}} \left[\frac{1}{2} \rho V^2 S C_z \right]_0 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \dot{w}} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right) \right]_0 (C_z)_0 + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial \dot{w}} \right)_0 = 0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial \dot{w}} \right)_0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Para pequenas perturbações $\hat{w} = w/u_0 = \alpha_x$, donde $\dot{w} = u_0 \dot{\alpha}_x$. Por outro lado, $\hat{\alpha}_x = \dot{\alpha}_x \bar{c}/(2u_0)$. Logo,

$$\left(\frac{\partial C_z}{\partial \dot{w}} \right)_0 = \frac{1}{u_0} \left(\frac{\partial C_z}{\partial \dot{\alpha}_x} \right)_0 = \frac{1}{u_0} \frac{\bar{c}}{2u_0} \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{\alpha}_x} \right)_0 = \frac{\bar{c}}{2u_0^2} C_{z_\alpha},$$

obtendo-se finalmente

$$Z_{\dot{w}} = \frac{1}{4} \rho S \bar{c} C_{z_\alpha}. \quad (9.8)$$

Por fim, calcula-se a derivada relativamente a q :

$$Z_q \equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial q} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \rho V^2 S C_z \right]_0 = \\ \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right) \right]_0 (C_z)_0 + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right)_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial q} \right)_0 = 0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial q} \right)_0. \quad (9.9)$$

Tendo em conta que $\hat{q} = q \bar{c} / (2u_0)$, tem-se

$$\left(\frac{\partial C_z}{\partial q} \right)_0 = \frac{\bar{c}}{2u_0} \left(\frac{\partial C_z}{\partial \hat{q}} \right)_0 = \frac{\bar{c}}{2u_0} C_{z_a}, \quad (9.10)$$

pelo que facilmente se obtém

$$Z_q = \frac{1}{4} \rho u_0 S \bar{c} C_{z_a}. \quad (9.11)$$

Derivadas da força segundo x

Para o cálculo das derivadas da força segundo x procede-se de forma idêntica ao caso anterior, mas agora $X = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x$.

A derivada relativamente a u é:

$$X_u \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} \rho V^2 S C_x \right]_0 = \\ \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right) \right]_0 (C_x)_0 + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \right)_0 \left(\frac{\partial C_x}{\partial u} \right)_0 = \rho u_0 S (C_x)_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \left(\frac{\partial C_x}{\partial u} \right)_0.$$

Note-se que agora $X_0 = mg \sin \theta_0$, o que implica $C_{x_0} = C_{W_0} \sin \theta_0$, e por outro lado,

$$\left(\frac{\partial C_x}{\partial u} \right)_0 = \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \right)_0 \left(\frac{\partial C_x}{\partial \hat{u}} \right)_0 = \left(\frac{\partial \frac{u}{u_0}}{\partial u} \right)_0 \left(\frac{\partial C_x}{\partial \hat{u}} \right)_0 = \frac{1}{u_0} C_{x_u}.$$

O resultado final é

$$X_u = \rho u_0 S \sin \theta_0 C_{W_0} + \frac{1}{2} \rho S u_0 C_{x_u}. \quad (9.12)$$

Para as outras derivadas procede-se exactamente como para o caso das derivadas da força segundo z , obtendo-se:

$$X_w = \frac{1}{2} \rho S u_0 C_{x_\alpha}, \quad (9.13)$$

$$X_{\dot{w}} = \frac{1}{4} \rho S \bar{c} C_{x_\alpha}, \quad (9.14)$$

$$X_q = \frac{1}{4} \rho u_0 S \bar{c} C_{x_q}. \quad (9.15)$$

Derivadas do momento de picada

Para o cálculo das derivadas do momento de picada, partimos de $M = \frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c} C_m$. A única diferença face aos cálculos anteriores é que o momento de picada no estado estacionário $M_0 = 0$, donde $(C_m)_{\text{estado estacionário}} = 0$, obtendo-se agora

$$M_u = \frac{1}{2}\rho S u_0 \bar{c} C_{m_u}, \quad (9.16)$$

$$M_w = \frac{1}{2}\rho S u_0 \bar{c} C_{m_\alpha}, \quad (9.17)$$

$$M_q = \frac{1}{4}\rho S u_0 \bar{c}^2 C_{m_q}, \quad (9.18)$$

$$M_{\dot{w}} = \frac{1}{4}\rho S \bar{c}^2 C_{m_\alpha}. \quad (9.19)$$

9.1.3 Derivadas laterais

Derivadas do momento de rolamento

A relação entre o momento de rolamento L e o seu coeficiente adimensional C_l é $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l$. No estado estacionário, as variáveis dinâmicas são nulas: $v_0 = 0$ e $p_0 = r_0 = 0$. Além disso, o momento de rolamento no estado estacionário é nulo, $L_0 = 0$, e portanto $C_{l_0} = 0$.

Começamos por calcular a derivada em ordem a v .

$$\begin{aligned} L_v &\equiv \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l \right]_0 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2}\rho V^2 S b \right) \right]_0 C_{l_0} + \left(\frac{1}{2}\rho V^2 S b \right)_0 \left(\frac{\partial C_l}{\partial v} \right)_0 = 0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2 S b \left(\frac{\partial C_l}{\partial v} \right)_0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Recorde-se que, para pequenas perturbações

$$\beta = \arcsin \frac{v}{V} \approx \frac{v}{u_0} = \hat{v},$$

pelo que

$$\left(\frac{\partial C_l}{\partial v} \right)_0 = \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial v} \right)_0 \left(\frac{\partial C_l}{\partial \hat{v}} \right)_0 = \frac{1}{u_0} C_{l_\beta}.$$

Por substituição em (9.20), deduz-se facilmente que

$$L_v = \frac{1}{2}\rho u_0 S b C_{l_\beta}. \quad (9.21)$$

O cálculo da derivada em ordem a p é semelhante:

$$L_p \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2}\rho V^2 S b \right) \right]_0 C_{l_0} + \left(\frac{1}{2}\rho V^2 S b \right)_0 \left(\frac{\partial C_l}{\partial p} \right)_0 = 0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2 S b \left(\frac{\partial C_l}{\partial p} \right)_0,$$

mas agora $\hat{p} = p/(2u_0/b)$, pelo que

$$\left(\frac{\partial C_l}{\partial p}\right)_0 = \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial p}\right)_0 \left(\frac{\partial C_l}{\partial \hat{p}}\right)_0 = \frac{b}{2u_0} C_{l_p}.$$

O resultado final é então

$$L_p = \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{l_p}. \quad (9.22)$$

Finalmente, para a derivada em ordem a r temos

$$L_r \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S b\right)\right]_0 C_{l_0} + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S b\right)_0 \left(\frac{\partial C_l}{\partial r}\right)_0 = 0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S b \left(\frac{\partial C_l}{\partial r}\right)_0,$$

e, como $\hat{r} = r/(2u_0/b)$,

$$\left(\frac{\partial C_l}{\partial r}\right)_0 = \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial r}\right)_0 \left(\frac{\partial C_l}{\partial \hat{r}}\right)_0 = \frac{b}{2u_0} C_{l_r},$$

obtendo-se por fim

$$L_r = \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{l_r}. \quad (9.23)$$

Derivadas do momento de guinada

Para as derivadas do momento de guinada partimos de $N = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_n$. No estado estacionário $N_0 = 0 \Rightarrow C_{n_0} = 0$.

De forma análoga ao caso do momento de rolamento, obtém-se

$$N_v = \frac{1}{2} \rho u_0 S b C_{n_\beta}, \quad (9.24)$$

$$N_p = \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{n_p}, \quad (9.25)$$

$$N_r = \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{n_r}. \quad (9.26)$$

Derivadas da força lateral

Finalmente, para as derivadas da força lateral usamos $Y = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_y$. No estado estacionário $Y_0 = 0 \Rightarrow C_{y_0} = 0$. De forma análoga aos casos anteriores obtemos

$$Y_v = \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{y_\beta}, \quad (9.27)$$

$$Y_p = \frac{1}{4} \rho u_0 S b C_{y_p}, \quad (9.28)$$

$$Y_r = \frac{1}{4} \rho u_0 S b C_{y_r}. \quad (9.29)$$

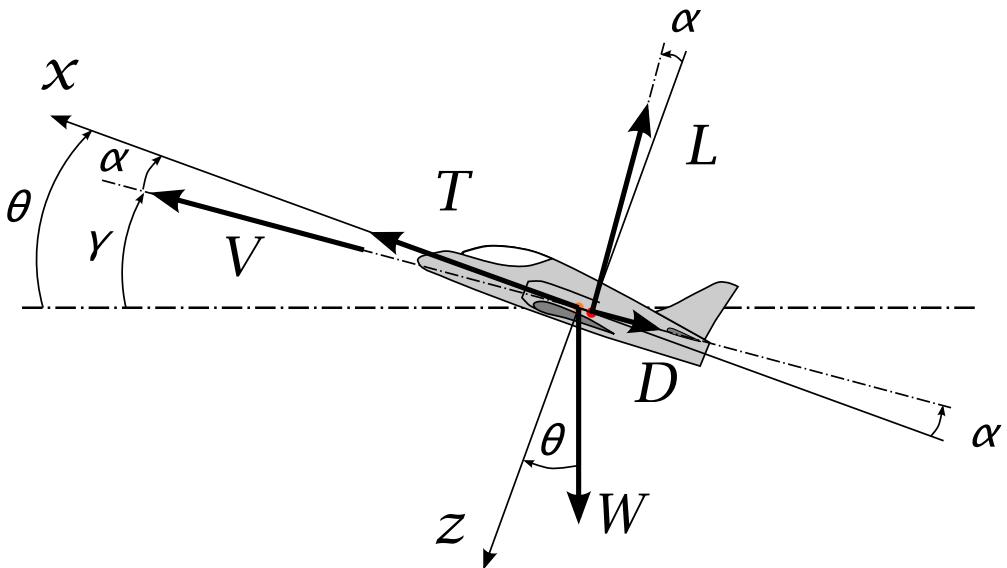


Figura 9.1: Voo rectilíneo com ângulo de subida constante.

9.2 Derivadas adimensionais relativas a movimento longitudinal

Na fase de projecto é importante dispor de expressões aproximadas para as derivadas de estabilidade adimensionais em função das características das aeronaves. Procuraremos encontrar estas expressões tratando separadamente, como é habitual, os casos de movimento longitudinal e movimento lateral.

Recorde-se que as derivadas são calculadas no estado estacionário e que este é definido aqui como um voo rectilíneo uniforme, donde $p_0 = 0 = q_0 = r_0$, e sem derrapagem, isto é, com $v_0 = 0$. Usamos eixos de estabilidade, pelo que $w_0 = 0$, ou seja, $(\alpha_x)_0 = 0$.

Num movimento puramente longitudinal, interessam-nos apenas as forças segundo x e z e o momento de picada. As forças e momentos longitudinais dependem da sustentação L , da resistência aerodinâmica D e da força de propulsão T .

Admitimos que a linha de propulsão coincide com o eixo x . Por outro lado, como usamos eixos de estabilidade, $(\alpha_x)_0 = 0$. As perturbações ao estado estacionário são, por hipótese, pequenas, pelo que a velocidade segundo w será pequena ou seja $\alpha_x \ll 1$. Logo, $\cos \alpha_x \approx 1$ e $\sin \alpha_x \approx \alpha_x$. As equações para as forças segundo x e z no caso de um voo rectilíneo, nivelado e com ângulo de subida são dadas por (7.28). Usando as aproximações acima e adimensionalizando as equações, obtemos

$$\begin{cases} C_x = C_T + C_L \alpha_x - C_D, \\ C_z = -(C_L + C_D \alpha_x). \end{cases} \quad (9.30)$$

9.2.1 Derivadas em ordem ao ângulo de ataque

Pretendemos encontrar expressões para as derivadas C_{x_α} , C_{z_α} e C_{m_α} .

Por definição, a derivada C_{x_α} , calculada no estado estacionário, é

$$C_{x_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right)_0.$$

Mas, da primeira equação de (9.30),

$$\left(\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (C_T + C_L \alpha_x - C_D) \right)_0 = \underbrace{\left(\frac{\partial C_T}{\partial \alpha} \right)_0}_{=0} + (C_L)_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (\alpha_x)_0 \right)_0}_{=0 \Leftrightarrow (\alpha_x)_0=0} - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right)_0.$$

Para evitar ambiguidades usaremos a notação $C_{L_1} \equiv (C_L)_0$ para o coeficiente de sustentação no estado estacionário. De igual forma, designaremos por C_{D_1} o coeficiente da resistência aerodinâmica no estado estacionário. Obtém-se então

$$C_{x_\alpha} = C_{L_1} - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right)_0 \equiv C_{L_1} - C_{D_\alpha}. \quad (9.31)$$

Se o coeficiente de resistência estiver relacionado com o coeficiente de sustentação através da polar $C_D = C_{D_0} + C_L^2 / (\pi A e)$, então

$$C_{D_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right)_0 = \frac{2C_{L_0}}{\pi A e} C_{L_\alpha},$$

e este valor de C_{D_α} pode ser usado em (9.31).

Para calcular a derivada C_{z_α} no estado estacionário partimos da definição

$$C_{z_\alpha} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right)_0$$

e da segunda equação de (9.30), o que leva a

$$\left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right)_0 = - \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (C_L + C_D \alpha_x) \right)_0 = - (C_{L_\alpha} + C_{D_\alpha} \alpha_x + C_D)_0 = - (C_{L_\alpha} + C_{D_1}).$$

Em conclusão, pode-se escrever

$$C_{z_\alpha} = - (C_{L_\alpha} + C_{D_1}). \quad (9.32)$$

Resta-nos determinar a derivada C_{m_α} . Mas o seu valor é dado, como se sabe, por

$$C_{m_\alpha} = \alpha (h - h_n).$$

9.2.2 Derivadas em ordem à velocidade longitudinal

As derivadas em ordem a u traduzem as alterações de forças e momentos quando varia a velocidade horizontal, supondo α , T , etc. constantes.

Os coeficientes C_L e C_D dependem de u devido a efeitos de compressibilidade (isto é, dependem do número de Mach Ma), a efeitos aeroelásticos (isto é, dependem da pressão dinâmica $p_d = 1/2\rho V^2$) e à interacção da propulsão com a *airframe* (asa e fuselagem), especialmente no caso de propulsão a hélice.

Se C_{L_u} e C_{D_u} forem conhecidos, as derivadas calculam-se facilmente a partir de (9.30):

$$C_{x_u} = C_{T_u} - C_{D_u} \quad (9.33)$$

$$C_{z_u} = -C_{L_u} \quad (9.34)$$

Caso contrário, é necessário determinar todas as contribuições separadamente. Por exemplo, para a derivada C_{x_u} teríamos

$$C_{x_u} \equiv \left(\frac{\partial C_x}{\partial \hat{u}} \right)_0 = \left(\frac{\partial C_x}{\partial Ma} \right)_0 \left(\frac{\partial Ma}{\partial \hat{u}} \right)_0 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial p_d} \right)_0 \left(\frac{\partial p_d}{\partial \hat{u}} \right)_0 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial C_T} \right)_0 \underbrace{\left(\frac{\partial C_T}{\partial \hat{u}} \right)_0}_{C_{T_u}}.$$

As derivadas $\left(\frac{\partial Ma}{\partial \hat{u}} \right)_0$ e $\left(\frac{\partial p_d}{\partial \hat{u}} \right)_0$ podem calcular-se facilmente, mas não as derivadas de C_x em ordem a Ma , p_d e C_T .

Derivada C_{T_u}

A derivada C_{T_u} é necessária para calcular C_{x_u} a partir de (9.33). De acordo com a definição, $C_T = \frac{T}{1/2 \rho V^2 S}$, donde

$$\frac{\partial C_T}{\partial u} = \frac{\frac{\partial T}{\partial u}}{1/2 \rho V^2 S} - \frac{2T}{1/2 \rho V^3 S} \frac{\partial V}{\partial u}.$$

Ora, tendo em conta que $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ e que no estado estacionário $V = u_0$,

$$C_{T_u} = \left(\frac{\partial C_T}{\partial \hat{u}} \right)_0 = u_0 \left(\frac{\partial C_T}{\partial u} \right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_0}{1/2 \rho u_0 S} - \frac{2T}{1/2 \rho u_0^2 S},$$

e chegamos finalmente a

$$C_{T_u} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_0}{1/2 \rho u_0 S} - 2C_{T_0}$$

O cálculo da derivada $\frac{\partial T}{\partial u}$ depende do tipo de voo. Para voo planado, $T = 0$ pelo que

$$C_{T_u} = 0. \quad (9.35)$$

Para voo com propulsão constante (boa aproximação para aviões a jacto em voo de cruzeiro),

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0,$$

e conclui-se imediatamente que

$$C_{T_u} = -2C_{T_0}. \quad (9.36)$$

Para voo com potência constante (boa aproximação para aviões com propulsão a hélice com velocidade constante, em voo de cruzeiro),

$$TV = \text{cte} = T_0 V_0 \Rightarrow T = \frac{T_0 V_0}{V}.$$

Logo

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_0 = -\left(\frac{T_0 V_0}{V^2}\right)_0 = -\frac{T_0}{V_0} \Rightarrow C_{T_u} = \frac{-T_0}{1/2 \rho u_0^2 S} - 2C_{T_0}.$$

Conclui-se portanto que

$$C_{T_u} = -3C_{T_0}. \quad (9.37)$$

Resta-nos calcular C_{T_0} . Se admitirmos que no estado estacionário a força de propulsão e a velocidade são aproximadamente colineares, e usando eixos de estabilidade, o equilíbrio na direcção x exige

$$C_{T_0} = C_{D_0} + C_{W_0} \sin \theta_0.$$

Para voo horizontal, em que $\theta_0 = 0$, obtemos simplesmente $C_{T_0} = C_{D_0}$.

9.2.3 Derivadas em ordem à velocidade angular de picada

As derivadas em ordem a q são calculadas mantendo constantes α e as outras variáveis.

A contribuição mais importantes é a da cauda; a contribuição da asa é menos importante e mais difícil de estimar. É prática corrente estimar a contribuição da asa como 10% da contribuição da cauda (i.e., a derivada total $\approx 1.1 \times$ contribuição da cauda).

Recorde-se que, de acordo com (9.10),

$$C_{z_q} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \left(\frac{\partial C_z}{\partial q} \right)_0.$$

Por outro lado, (9.30) permite relacionar C_{z_q} com C_{L_q} :

$$C_z = -(C_L + C_D \alpha_x) \Rightarrow \left(\frac{\partial C_z}{\partial q} \right)_0 = - \left(\frac{\partial C_L}{\partial q} \right)_0, \quad (9.38)$$

e portanto

$$C_{z_q} = -C_{L_q}. \quad (9.39)$$

Contribuição da cauda

As contribuições da cauda para as derivadas em ordem a q devem-se principalmente à variação do ângulo de ataque efectivo na cauda, $\Delta\alpha_t$, causada pela velocidade angular de picada q .

Admitimos que a sustentação na cauda L_t se altera instantaneamente quando α_t varia. A figura 9.2 permite concluir que $\Delta\alpha_t = ql_t/u_0$. A variação do coeficiente de sustentação da cauda devida à velocidade angular de picada é

$$\Delta C_{L_t} = a_t \Delta\alpha_t = a_t \frac{ql_t}{u_0} \Rightarrow \Delta C_L = \frac{S_t}{S} \Delta C_{L_t} = \frac{S_t}{S} a_t \frac{ql_t}{u_0}.$$

A contribuição da cauda para a derivada de C_L em ordem a q é então

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial q} \right)_{tail} = \frac{S_t}{S} a_t \frac{l_t}{u_0}.$$

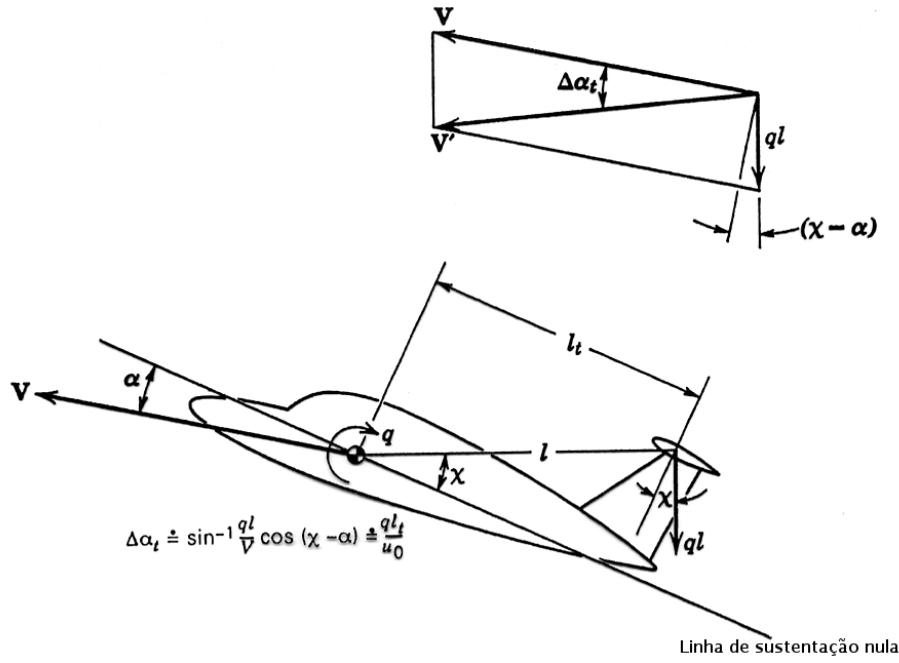


Figura 9.2: Variação do ângulo de ataque na cauda devido à velocidade angular de picada. (Fonte: [1])

Usando (9.38) conclui-se que

$$(C_{L_q})_{\text{tail}} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \left(\frac{\partial C_L}{\partial q} \right)_{\text{tail}} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{S_t}{S} a_t \frac{l_t}{u_0},$$

que se pode escrever na forma mais compacta $(C_{L_q})_{\text{tail}} = 2V_H a_t$. A contribuição da cauda para a derivada C_{z_q} é portanto

$$(C_{z_q})_{\text{tail}} = -2V_H a_t. \quad (9.40)$$

Para determinar a contribuição da cauda para C_{m_q} , partimos de

$$\Delta C_m = -V_H \Delta C_{L_t} = -a_t V_H q \frac{l_t}{u_0} \Rightarrow \frac{\partial C_m}{\partial q} = -a_t V_H \frac{l_t}{u_0}.$$

Tendo em conta a adimensionalização da velocidade angular de picada,

$$(C_{m_q})_{\text{tail}} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial q} = -\frac{2u_0}{\bar{c}} a_t V_H \frac{l_t}{u_0}.$$

Conclui-se finalmente que

$$(C_{m_q})_{\text{tail}} = -2V_H a_t \frac{l_t}{\bar{c}}. \quad (9.41)$$

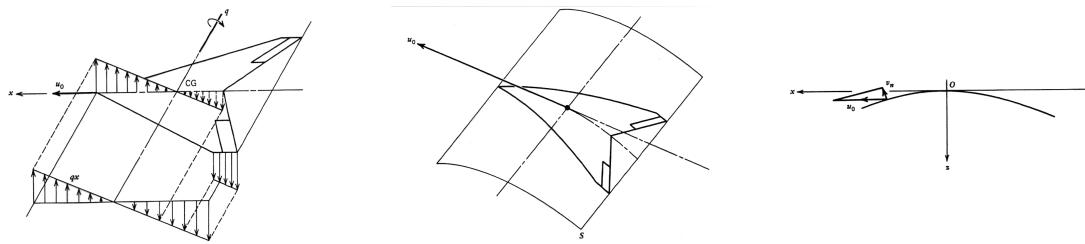


Figura 9.3: A velocidade angular produz uma distribuição de velocidades normais à asa que é equivalente a ter uma curvatura adicional na asa. (Fonte: [1])

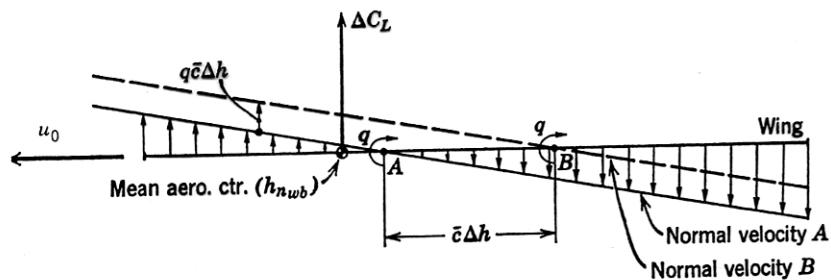


Figura 9.4: Dependência do centro de massa. (Fonte: [1])

Contribuição da asa

Como se afirmou acima, é frequente estimar a contribuição da asa como 10% da contribuição da cauda. No entanto, especialmente para asas com flecha elevada ou alongamento pequeno esta contribuição pode ser mais importante e nesse caso é necessário uma estimativa mais exacta.

Como se ilustra na figura 9.3, a velocidade angular é equivalente a uma curvatura adicional da asa. Para determinarmos essa curvatura, impomos a condição de que a componente normal à asa da velocidade do escoamento deve igualar a velocidade adicional induzida por q na asa real:

$$u_0 \frac{\partial z}{\partial x} = qx \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{qx}{u_0} \Rightarrow z = \frac{q}{2u_0}x^2.$$

Asa equivalente, que produz uma distribuição de velocidades normais equivalente, tem pois um arco parabólico.

A velocidade angular q é definida relativamente ao centro de massa do avião. Por isso, como se ilustra na figura 9.4, a contribuição da asa para C_{L_q} e C_{m_q} depende da posição do centro de massa. Se o centro de massa se desloca de A para B, o ângulo de ataque efectivo na asa induzido pela velocidade angular de picada varia:

$$\Delta\alpha = -\frac{q\bar{c}}{u_0}\Delta h.$$

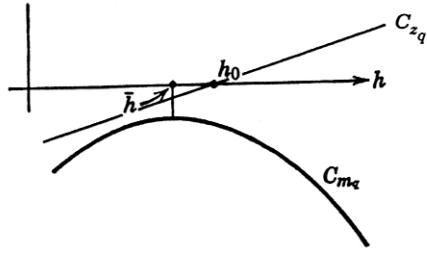


Figura 9.5: Variação de C_{m_q} com h . (Fonte: [1])

A esta variação corresponde uma variação do coeficiente de sustentação:

$$\Delta C_L = C_{L\alpha} \Delta \alpha = -C_{L\alpha} \frac{q\bar{c}}{u_0} \Delta h = -2C_{L\alpha} \hat{q} \Delta h.$$

Derivando em ordem a h obtemos

$$\frac{\partial C_L}{\partial h} = \frac{\Delta C_L}{\Delta h} = -2C_{L\alpha} \hat{q} \Rightarrow \frac{\partial^2 C_L}{\partial h \partial \hat{q}} = -2C_{L\alpha} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial h} C_{Lq} = -2C_{L\alpha} \Rightarrow C_{Lq} = -2C_{L\alpha}(h - h_0).$$

A contribuição da asa para o coeficiente do momento de picada é

$$C_m = C_{m_{ac}} + C_L(h - h_{n_w}).$$

Derivando em ordem a h obtém-se

$$C_{m_q} = \frac{\partial C_{m_{ac}}}{\partial \hat{q}} + C_{Lq}(h - h_{n_w}) \Rightarrow C_{m_q} = \frac{\partial C_{m_{ac}}}{\partial \hat{q}} - 2C_{L\alpha}(h - h_0)(h - h_{n_w})$$

A variação de C_{m_q} com h é quadrática e está representada na figura 9.5. Pode-se escrever na forma

$$C_{m_q} = \overline{C_{m_q}} - 2C_{L\alpha}(h - \bar{h})^2.$$

Na aproximação da teoria linear bi-dimensional de asas finas, para voo supersónico, $h_0 = \bar{h} = 1/2$, e $\overline{C_{m_q}} = 2/(3\sqrt{Ma^2 - 1})$, enquanto que para voo subsónico: $h_0 = 3/4$, $\bar{h} = 1/2$ e $\overline{C_{m_q}} = 0$.

9.2.4 Derivadas em ordem a $\dot{\alpha}$

Os coeficientes de sustentação e do momento de picada dependem de $\dot{\alpha}$ porque, quando o ângulo de ataque varia, a distribuição de pressões na asa e na cauda não se ajusta instantaneamente ao valor de equilíbrio (enquanto α varia o escoamento deixa de ser estacionário).

A contribuição da asa para as derivadas pode ser calculada a partir da resposta em frequência de uma asa com movimento oscilatório harmônico. No entanto, pode também estimar-se como sendo 10% da contribuição da cauda. Para esta última, o efeito mais importante é o de *lag-of-downwash*.

Contribuição da cauda (atraso no *downwash*)

Quando o ângulo de ataque α se modifica, o escoamento em torno de todas as superfícies do avião altera-se. Esta alteração não é instantânea e só se faz sentir na cauda passado algum tempo porque a vorticidade do bordo de fuga é convectada pelo escoamento. O atraso é da ordem de $\Delta t \approx l_t/u_0$. O ângulo de downwash na cauda no instante t , $\varepsilon(t)$, corresponde ao ângulo de ataque que existia na asa no instante $(t - \Delta t)$. Dado que $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_\alpha \alpha_{wb}$, a diferença $\Delta\varepsilon$ entre o ângulo de downwash que existe no instante t e o que existiria se α_{wb} fosse constante é dado por

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= [\varepsilon_0 + \varepsilon_\alpha \alpha_{wb}(t - \Delta t)] - [\varepsilon_0 + \varepsilon_\alpha \alpha_{wb}(t)] = \varepsilon_\alpha [\alpha_{wb}(t - \Delta t) - \alpha_{wb}(t)] \\ &\approx -\varepsilon_\alpha \dot{\alpha} \Delta t = -\varepsilon_\alpha \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0}\end{aligned}$$

Devido ao atraso no *downwash* o ângulo de ataque na cauda, $\alpha_t = \alpha_{wb} - \varepsilon - i_t$, tem uma variação

$$\Delta\alpha_t = -\Delta\varepsilon = \varepsilon_\alpha \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0},$$

do qual resulta uma variação no coeficiente de sustentação da cauda

$$\Delta C_{L_t} = a_t \Delta\alpha_t = a_t \varepsilon_\alpha \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0}$$

e a correspondente variação no coeficiente de sustentação total,

$$\Delta C_L = \frac{S_t}{S} \Delta C_{L_t} = a_t \varepsilon_\alpha \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0} \frac{S_t}{S}.$$

Tendo em conta que $\hat{\alpha} = \dot{\alpha} \bar{c}/(2u_0)$,

$$C_{z_{\hat{\alpha}}} = \frac{\partial C_z}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_z}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial (-C_L)}{\partial \dot{\alpha}}.$$

A contribuição da cauda para a derivada em ordem a $\hat{\alpha}$ é então

$$(C_{z_{\hat{\alpha}}})_{tail} = -2a_t \varepsilon_\alpha V_H. \quad (9.42)$$

Contribuição da cauda para $C_{m_{\hat{\alpha}}}$

A contribuição da cauda para $C_{m_{\hat{\alpha}}}$ deduz-se facilmente da variação do coeficiente de sustentação da cauda devido ao atraso no *downwash*,

$$\Delta C_m = -V_H \Delta C_{L_t} = -V_H a_t \varepsilon_\alpha \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0}$$

Devido à adimensionalização,

$$\hat{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2u_0} \Rightarrow C_{m_{\hat{\alpha}}} = \frac{\partial C_m}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}},$$

de que resulta

$$(C_{m_{\hat{\alpha}}})_{tail} = -2a_t \varepsilon_\alpha V_H \frac{l_t}{\bar{c}}. \quad (9.43)$$

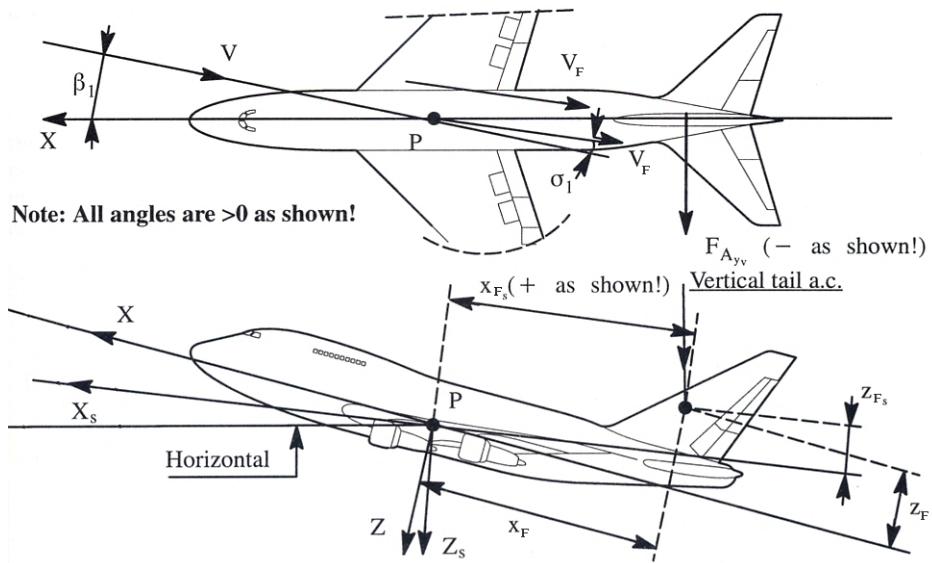


Figura 9.6: Geometria e forças laterais devidas à derrapagem. (Fonte: [5])

9.3 Derivadas relativas ao movimento lateral

9.3.1 Derivadas em ordem ao ângulo de derrapagem

As derivadas $C_{l\beta}$ e $C_{n\beta}$ já foram tratadas nas secções 5.2.3 e 5.1.1, respectivamente. As estimativas obtidas para as contribuições da cauda são razoavelmente exactas, mas para as contribuições da asa e da fuselagem os resultados que se obtém com as expressões deduzidas são menos exactos. Quando é necessário ter estimativas precisas é preferível usar resultados obtidos em ensaios em túnel aerodinâmica ou usando [2]. Resta-nos determinar a derivada $C_{y\beta}$.

Derivada $C_{y\beta}$

Normalmente a derivada $C_{y\beta}$ é negativa e pequena. As contribuições mais importantes são da fuselagem e do estabilizador vertical.

A contribuição da cauda deve-se à força de sustentação no estabilizador vertical gerada pela derrapagem, dada por

$$(C_y)_{\text{cauda}} = -\alpha_F(\beta - \sigma) \frac{S_F}{S} \left(\frac{V_F}{V} \right)^2.$$

Admitindo que $V_F/V = 1$, obtém-se

$$(C_{y\beta})_{\text{cauda}} = -\alpha_F \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \frac{S_F}{S}. \quad (9.44)$$

Note-se que $\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}$ é difícil de estimar.

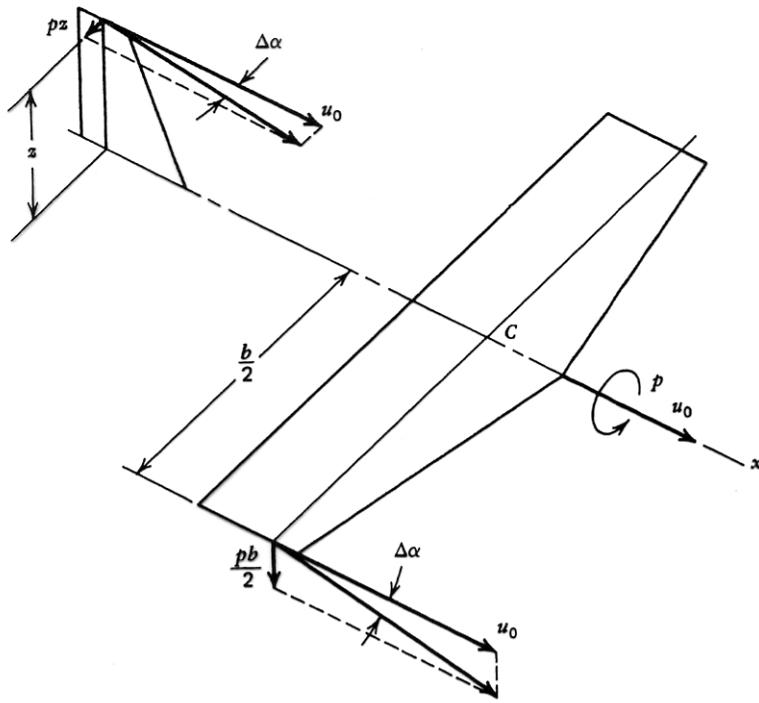


Figura 9.7: Variação do ângulo de ataque local devido à velocidade angular de rolamamento. (Fonte: [1])

9.3.2 Derivadas em ordem a p

Devido ao rolamamento, o escoamento em torno de todas as superfícies aerodinâmicas é afectado. Dá-se uma alteração do ângulo de ataque local, que conduz a uma alteração na distribuição de pressões, e uma modificação da esteira de vórtices atrás da asa. A distribuição de vorticidade passa a ser assimétrica relativamente a x , o que provoca o aparecimento de *sidewash* no estabilizador vertical.

A figura 9.7 mostra a variação do ângulo de ataque local devido à velocidade angular de rolamamento. Na cauda essa variação é

$$\Delta\alpha_F = -\frac{pz}{u_0} + p \frac{\partial\sigma}{\partial p}.$$

Na asa, a variação é nula na raiz. Ao longo da asa, na coordenada y , toma o valor

$$\Delta\alpha = \frac{py}{u_0}, \quad (9.45)$$

e atinge o valor máximo

$$\Delta\alpha = \frac{pb}{2u_0} \quad (9.46)$$

na ponta da asa.

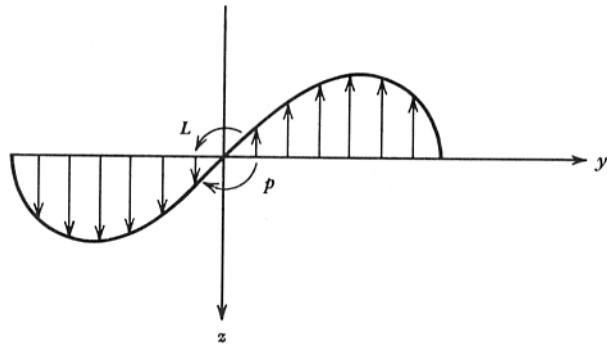


Figura 9.8: Distribuição de sustentação devido à velocidade angular de rolamento. (Fonte: [1])

Derivada C_{y_p}

Usando a altura «média» do estabilizador z_F , e $p = \frac{2u_0}{b}\hat{p}$,

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_F &= -\frac{2u_0}{b}\hat{p}\frac{z_F}{u_0} + \hat{p}\frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}} = \left(-\frac{2z_F}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}}\right)\hat{p} \\ \Delta C_{y_F} &= a_F\Delta\alpha_F = a_F\left(-\frac{2z_F}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}}\right)\hat{p} \end{aligned} \quad (9.47)$$

Para a aeronave completa:

$$\begin{aligned} \Delta C_Y &= \frac{S_F}{S}\Delta C_{y_F} = a_F\frac{S_F}{S}\left(-\frac{2z_F}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}}\right)\hat{p} \\ (C_{y_p})_{tail} &= -a_F\frac{S_F}{S}\left(\frac{2z_F}{b} - \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}}\right) \end{aligned} \quad (9.48)$$

Derivada C_{l_p} (*damping in roll*)

Para a derivada C_{l_p} a contribuição mais significativa é a da asa. Devido ao rolamento a distribuição de sustentação na asa é assimétrica porque o ângulo de ataque aumenta na asa direita e diminui na asa esquerda. Consequentemente, é criado um momento de rolamento L que é proporcional a \hat{p} e tem o sinal negativo (faz subir a asa direita).

Pode obter-se uma estimativa da derivada C_{l_p} a partir da distribuição de sustentação ao longo da envergadura. Considere-se uma aeronave a voar com velocidade longitudinal u_0 e velocidade angular de rolamento p . Desprezando os efeitos tridimensionais, a variação devida a p da sustentação numa secção arbitrária da asa a uma distância y do centro de massa e de largura dy é

$$C_{\ell_\alpha}\Delta\alpha\left(\frac{1}{2}\rho u_0^2\right)c(y)dy.$$

A variação do ângulo de ataque $\Delta\alpha$ é dada por (9.45), a derivada C_{ℓ_α} é a correspondente ao perfil da secção da asa em consideração e $c(y)$ é a respectiva corda. A contribuição desta secção para o momento de rolamento é

$$dL = -y C_{\ell_\alpha} \left(\frac{p y}{u_0} \right) \left(\frac{1}{2} \rho u_0^2 \right) c(y) dy.$$

O momento total obtém-se por integração ao longo de toda a envergadura da asa:

$$L = \int dL = 2 \int_0^{b/2} -y d(\text{Sustentação}) = - \int_0^{b/2} C_{\ell_\alpha} p y^2 u_0 c(y) dy.$$

O coeficiente do momento de rolamento é dado por

$$C_l = -\frac{2p}{u_0 S b} \int_0^{b/2} C_{\ell_\alpha} y^2 u_0 c(y) dy.$$

Confirma-se que C_l é negativo e proporcional a p , correspondendo a um amortecimento do movimento de rolamento. Segue-se que a derivada C_{l_p} é dada por

$$C_{l_p} = \frac{\partial C_l}{\partial p} = \frac{2u_0}{b} \frac{\partial C_l}{\partial p} = -\frac{4}{Sb^2} \int_0^{b/2} C_{\ell_\alpha} y^2 c(y) dy.$$

Se aproximarmos C_{ℓ_α} de cada perfil pelo valor da derivada para a asa inteira, isto é, admitindo que $C_{\ell_\alpha} \approx (C_{L_\alpha})_w = a_w$, obtém-se

$$C_{l_p} = -\frac{4a_w}{Sb^2} \int_0^{b/2} y^2 c(y) dy. \quad (9.49)$$

Na dedução destas expressões desprezaram-se os efeitos tridimensionais devidos ao vórtice de bordo marginal e efeitos induzidos, que para esta derivada são importantes. É possível calcular o integral admitindo uma forma determinada da asa, mas os resultados obtidos serão pouco exactos. Por exemplo, para uma asa com afilamento linear, o integral pode exprimir-se em termos do afilamento λ , obtendo-se

$$C_{l_p} = -\frac{a_w}{12} \frac{1+3\lambda}{1+\lambda}. \quad (9.50)$$

Para asas rectangulares a expressão anterior reduz-se a $C_{l_p} = -a_w/6$. Para se obterem melhores aproximações podem usar-se os métodos recomendados em [2].

A discussão anterior sobre a relação entre C_l e p pressupõe que a velocidade angular de rolamento é suficientemente pequena para que a variação do ângulo de ataque não leve parte da asa a entrar em perda. Para velocidades angulares de rolamento suficientemente elevadas, a parte da asa mais perto da ponta entra em perda (ver figura 9.9), a assimetria na distribuição de sustentação diminui, o momento de rolamento L diminui e $|C_{l_p}|$ diminui. Se uma parte importante da asa está em perda, C_{l_p} pode até mudar de sinal, situação que leva à autorrotação da asa (cfr. *spin*).

Derivada C_{n_p}

A derivada C_{n_p} é uma derivada cruzada e conduz a acoplamento entre rolamento e guinada. As principais contribuições são da asa e da empunhadura vertical.

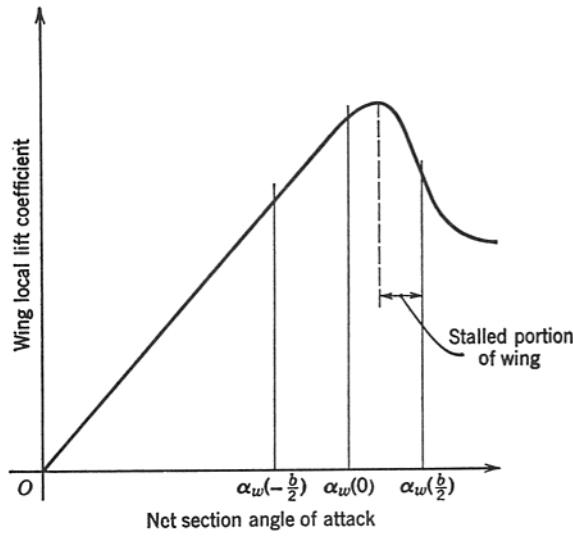


Figura 9.9: Distribuição do coeficiente de sustentação quando parte da asa entrou em perda. (Fonte: [1])

A contribuição da asa deve-se a dois factores. O primeiro é a variação do perfil de resistência com o ângulo de ataque local da asa (se $p > 0$, na asa direita α aumenta, o que implica um aumento da resistência aerodinâmica induzida, enquanto que na asa esquerda α diminui e em consequência a resistência aerodinâmica diminui também, o que em conjunto leva a um momento de guinada $N > 0$ (nose-right) e portanto a $\Delta C_{n_p} > 0$). O outro factor é a variação da inclinação da sustentação nas asas, que se ilustra na figura 9.10. Se $p > 0$, devido à variação do ângulo de ataque local, na asa direita a força de sustentação inclina para a frente, enquanto que na asa esquerda a inclinação da força de sustentação é para trás. Logo existe um momento de guinada $N < 0$ e esta contribuição para C_{n_p} é proporcional ao coeficiente de sustentação da asa. Em [4] sugere-se a seguinte aproximação: $(C_{n_p})_{\text{asa}} \approx -C_L/8$. Evidentemente que melhores aproximações se conseguem usando os métodos sugeridos em [2].

A contribuição da cauda depende da força lateral que o rolamento provoca no estabilizador vertical,

$$(\Delta C_n)_{\text{tail}} = -\Delta C_{y_F} \frac{S_F}{S} \frac{l_F}{b}$$

e ΔC_{y_F} pode obter-se de (9.47), pelo que

$$(\Delta C_n)_{\text{tail}} = +\alpha_F \left(\frac{2z_F}{b} - \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{p}} \right) \hat{p} V_V.$$

A contribuição da cauda para a derivada C_{n_p} é então

$$(C_{n_p})_{\text{tail}} = \alpha_F \left(\frac{2z_F}{b} - \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{p}} \right) V_V. \quad (9.51)$$

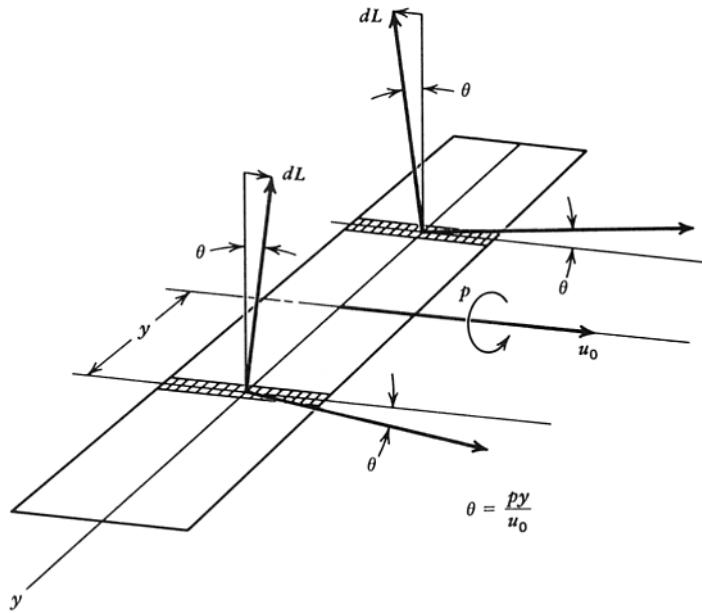


Figura 9.10: Variação da inclinação da sustentação nas asas quando há rolagem, devido à variação do ângulo de ataque. (Fonte: [1])

9.3.3 Derivadas em ordem a r

A velocidade angular de guinada provoca alterações no escoamento que são grandes se a asa tem ângulo de flecha elevado. A componente normal a 1/4 de corda da velocidade varia da raiz para a ponta da asa e aumenta na asa esquerda enquanto que diminui na asa direita, como se ilustra na figura 9.11. Portanto, as forças e momentos aumentam na asa esquerda e diminuem na asa direita. Existe também o efeito de *sidewash*.

Contribuição da cauda para a derivada da força lateral

A variação do ângulo de ataque efectivo na cauda devido à velocidade angular de guinada é

$$\Delta\alpha_F = \frac{rl_F}{u_0} + r\frac{\partial\sigma}{\partial r} = r\left(\frac{l_F}{u_0} + \frac{\partial\sigma}{\partial r}\right).$$

Em função da velocidade angular de guinada adimensional, \hat{r} ,

$$\Delta\alpha_F = \hat{r}\frac{2u_0}{b}\left(\frac{l_F}{u_0} + \frac{b}{2u_0}\frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}}\right) = \hat{r}\left(\frac{2l_F}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}}\right).$$

A força lateral devida a esta variação do ângulo de ataque é

$$(C_y)_{tail} = \alpha_F \Delta\alpha_F \frac{S_F}{S} = \alpha_F \hat{r} \frac{S_F}{S} \left(2\frac{l_F}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}}\right),$$

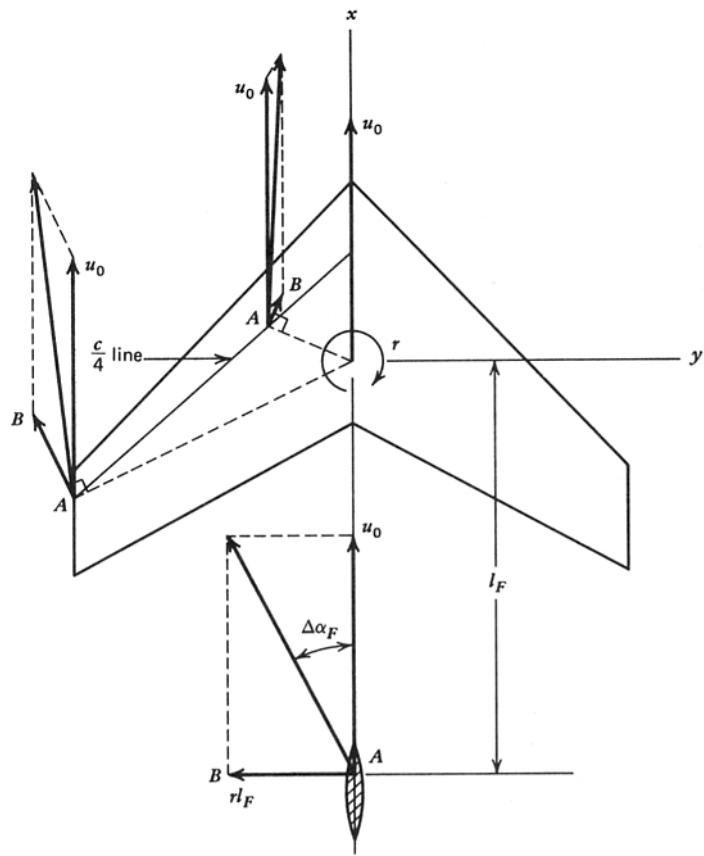


Figura 9.11: Variação da componente da velocidade perpendicular a uma asa com flecha. (Fonte: [1])

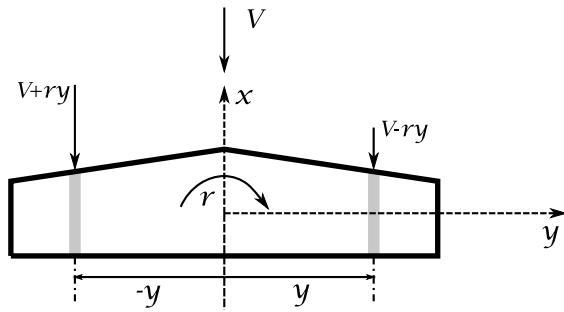


Figura 9.12: Devido à velocidade angular de guinada, a velocidade do escoamento incidente na asa direita é diminuída e na asa esquerda é aumentada (para $r > 0$).

onde se deduz a contribuição da cauda para C_{y_r} ,

$$(C_{y_r})_{\text{tail}} = a_F \frac{S_F}{S} \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right). \quad (9.52)$$

Derivada C_{l_r}

A derivada C_{l_r} é uma derivada cruzada e por isso contribui para o acoplamento entre guinada e rolamento.

A contribuição da asa deve-se ao diferencial de sustentação entre as duas asas causado pela diferente velocidade efectiva. Como se ilustra na figura 9.12, para $r > 0$ a velocidade efectiva na secção de largura dy que se encontra a uma distância y da raiz é $V - ry$ na asa direita e $V + ry$ na asa esquerda. Como a sustentação é proporcional à pressão dinâmica (e por isso ao quadrado da velocidade), a sustentação será maior na asa esquerda e menor na asa direita, o que conduz a um momento de rolamento

$$y C_L \left[\frac{1}{2} \rho (V + ry)^2 - \frac{1}{2} \rho (V - ry)^2 \right] c(y) dy.$$

(aproximando o coeficiente de sustentação do perfil, C_ℓ , pelo coeficiente de sustentação da asa, C_L , isto é, $C_\ell \approx C_L$). O coeficiente do momento de rolamento obtém-se integrando em y e adimensionalizando:

$$C_l = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} \int_0^{b/2} C_L y \frac{1}{2} \rho (4Vry) c(y) dy = \frac{4r}{VSb} C_L \int_0^{b/2} c(y) y^2 dy. \quad (9.53)$$

Dado que $\hat{r} = (rb)/(2V)$,

$$C_l = \frac{8\hat{r}}{Sb^2} C_L \int_0^{b/2} c(y) y^2 dy,$$

a contribuição da asa para a derivada C_{l_r} é

$$(C_{l_r})_{\text{asa}} = \frac{8}{Sb^2} C_L \int_0^{b/2} c(y) y^2 dy. \quad (9.54)$$

Esta contribuição é positiva e proporcional a C_L . Se a asa tiver um afilamento linear, o integral calcula-se facilmente e obtém-se

$$(C_{l_r})_{\text{asa}} = \frac{C_L}{6} \frac{1 + 3\lambda}{1 + \lambda}. \quad (9.55)$$

Como habitualmente, esta expressão não é exacta devido às aproximações realizadas na sua dedução, mas permite estabelecer o sinal da derivada e a sua proporcionalidade com o coeficiente de sustentação.

A contribuição da cauda é devida à força lateral na cauda que o movimento de guinada provoca, e pode estimar-se de forma semelhante às outras contribuições da cauda, obtendo-se

$$(C_{l_r})_{\text{tail}} = a_F \frac{S_F}{S} \frac{z_F}{b} \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right). \quad (9.56)$$

Esta contribuição é também positiva.

Derivada C_{n_r} (*damping-in-yaw*)

A derivada C_{n_r} deve ser sempre negativa para existir amortecimento do movimento de guinada.

A contribuição da asa deve-se ao aumento da resistência induzida na asa esquerda, que resulta do aumento da sustentação já discutido acima, e à sua diminuição na asa direita, e provoca $N < 0$. A contribuição da cauda deve-se à força lateral na cauda que o movimento de guinada provoca e pode determinar-se a partir do momento de guinada que esta força gera, obtendo-se

$$(C_{n_r})_{\text{tail}} = -a_F V_V \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right). \quad (9.57)$$

Ambas as contribuições são negativas, como pretendido para que exista amortecimento em guinada.

Capítulo 10

Estabilidade Dinâmica Longitudinal

10.1 Introdução

Neste capítulo dar-se-á início ao estudo da estabilidade dinâmica de uma aeronave. Abordar-se-ão métodos de resolução das equações para pequenas perturbações (sem controlo). Em seguida estudar-se-ão as características habituais das soluções e, a partir destas, definir-se-ão os «modos» típicos para perturbações longitudinais. Por fim, pretende-se encontrar expressões aproximadas para os modos longitudinais. Os modos laterais serão tratados no capítulo seguinte.

As equações do movimento para pequenas perturbações foram deduzidas no capítulo 8 supondo que o estado estacionário é um voo rectilíneo uniforme (com aceleração linear e velocidade angular nulas, sem derrapagem e com asas niveladas) e foram usados eixos de estabilidade, em que o eixo Cx é paralelo à velocidade da aeronave.

Por enquanto não vamos estar interessados na resposta à actuação das superfícies de controlo. Por isso o sistema de equações (8.35), que pretendemos resolver, toma a forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (10.1)$$

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de 1^a ordem com coeficientes constantes.

Recorde-se que para o movimento longitudinal a matriz \mathbf{A} é dada por (8.36) e que o vector de estado é $\mathbf{x} = [\Delta u \ w \ q \ \Delta\theta]^T$.

10.2 Sistemas de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem

Uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$\dot{x} = ax \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = a dt \quad (10.2)$$

tem soluções da forma:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \quad (10.3)$$

desde que $\lambda = \alpha$. Note-se que x_0 é o valor de x para $t = 0$. No caso de um sistemas de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (10.4)$$

as soluções são da forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}, \quad (10.5)$$

sendo \mathbf{x}_0 o vector de estado inicial, isto é, para $t = 0$. Dado que a derivada temporal do vector de estado é

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}_0 e^{\lambda t},$$

substituindo em (10.4) temos

$$\lambda \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \mathbf{x}_0.$$

Esta última equação pode escrever-se

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x}_0 = 0 \quad (10.6)$$

que é a equação aos valores próprios da matriz \mathbf{A} e que equação só tem soluções não triviais (isto é, não identicamente nulas) se

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (10.7)$$

Esta é a equação característica do sistema e permite determinar os valores próprios λ da matriz \mathbf{A} .

Uma matriz $N \times N$ tem N valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. A cada valor próprio λ_k corresponde um vector próprio \mathbf{x}_{0_k} , que se obtém por meio de (10.6). Admitindo que todos os vectores próprios são diferentes, a solução geral de (10.4) é sobreposição das soluções correspondentes a cada valor/vector próprio:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_{0_k} e^{\lambda_k t}. \quad (10.8)$$

(Este resultado pode generalizar-se ao caso degenerado de dois ou mais valores próprios iguais, mas nas situações que nos interessam isto não se verifica.) Uma matriz 4×4 tem 4 valores próprios, pelo que a solução geral vai ser

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{0_1} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}_{0_2} e^{\lambda_2 t} + \mathbf{x}_{0_3} e^{\lambda_3 t} + \mathbf{x}_{0_4} e^{\lambda_4 t}.$$

Note-se que, como (10.6) é uma equação homogénea, os vectores próprios determinam apenas uma direção, isto é, estão definidos a menos de uma constante multiplicativa. Essas constantes (uma para cada vector próprio) podem ser definidas à custa das condições iniciais.

10.2.1 Modos do sistema

A matriz do sistema, \mathbf{A} , é uma matriz real (todos os seus elementos são números reais). Pode mostrar-se que os valores próprios de uma matriz real são ou números reais ou pares de valores próprios complexos conjugados. Para uma matriz 4×4 temos as seguintes possibilidades: 4 valores próprios reais, ou 2 valores próprios reais e um par de complexos conjugados, ou 2 pares de valores próprios complexos conjugados.

Cada par de valores próprios complexos conjugados, representados aqui por λ_1 e λ_2 , podem ser escritos como

$$\lambda_1 = n + i\omega \Rightarrow x_1 = a_1 e^{\lambda_1 t} = a_1 e^{(n+i\omega)t} \quad (10.9)$$

$$\lambda_2 = n - i\omega \Rightarrow x_0 = a_2 e^{\lambda_2 t} = a_2 e^{(n-i\omega)t} \quad (10.10)$$

As constantes a_1 e a_2 são complexas conjugadas porque correspondem a vectores próprios de valores próprios complexos conjugados. Podemos por isso escrevê-las como

$$a_1 = a e^{i\varphi}, \\ a_2 = a e^{-i\varphi}.$$

A soma dos modos correspondentes a um par de valores próprios complexos conjugados é

$$x_1 + x_2 = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \\ = a e^{i\varphi} e^{(n+i\omega)t} + a e^{-i\varphi} e^{(n-i\omega)t} \\ = a e^{nt} (e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}) \\ = 2a e^{nt} \cos(\omega t + \varphi).$$

Conclui-se que a soma das duas soluções complexas conjugadas correspondentes a valores próprios complexos conjugados é afinal um único modo real oscilatório.

Em resumo, podemos afirmar que os modos possíveis no caso presente, em que a matriz do sistema é real são os seguintes: se dois valores próprios são complexos conjugados, obtemos um *modo oscilatório* com frequência angular ω , período $T = 2\pi/\omega$ e amplitude variando exponencialmente (aumenta se $n > 0$, o que corresponde a um modo instável, diminui se $n < 0$, o que corresponde a um modo estável); se um valor próprio é real, obtemos um modo $a e^{\lambda t}$ cuja «amplitude» aumenta se $\lambda > 0$ (instável) e diminui se $\lambda < 0$ (estável). A figura 10.1 ilustra os modos descritos.

Em qualquer dos casos um modo é dinamicamente estável se a sua amplitude diminui ao longo do tempo, ou seja, se $\text{Re}(\lambda) < 0$. Pelo contrário, se $\text{Re}(\lambda) > 0$ a amplitude aumenta ao longo do tempo e o modo é instável.

Alguns parâmetros importantes que caracterizam os modos são o tempo necessário para a amplitude passar a metade/dobro ($t_{1/2}$ ou t_2) e, quando o modo é oscilante, o período (T) e o número de ciclos necessário para a amplitude passar a metade/dobro ($N_{1/2}$ ou N_2).

$$e^{n t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\log 1/2}{n} = \frac{\log 2}{|n|} \quad (10.11)$$

$$e^{n t_2} = 2 \Rightarrow t_2 = \frac{\log 2}{n} = \frac{\log 2}{|n|} \quad (10.12)$$

$$N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T} \quad \text{ou} \quad N_2 = \frac{t_2}{T} \quad (10.13)$$

Outros parâmetros importantes são a frequência natural, definida por

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 + n^2}, \quad (10.14)$$

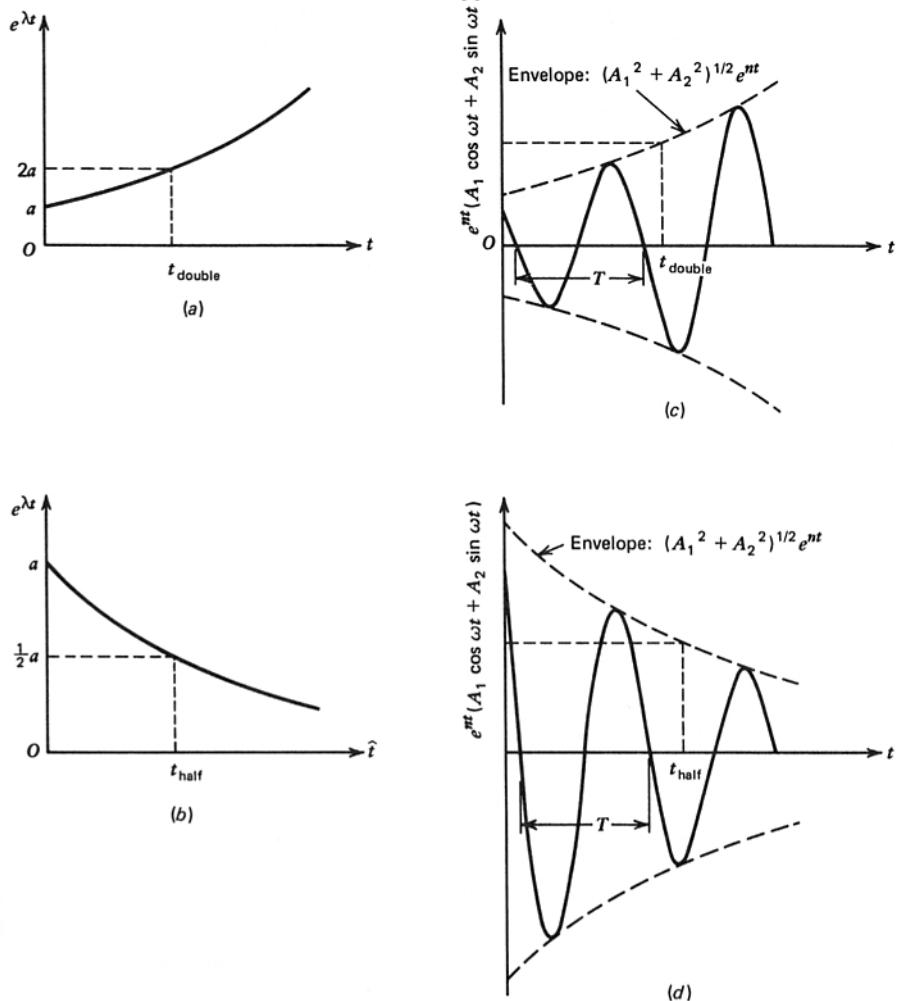


Figura 10.1: Modos com valor próprio real: instável (a) e estável (b); Modos correspondentes a pares de valores próprios complexos conjugados: instável (c) e estável (d).
Fonte: [1].

e o factor de amortecimento, dado por

$$\zeta = -\frac{n}{\omega_n}. \quad (10.15)$$

No caso de modos estáveis,

$$t_{1/2} = \frac{\log 2}{|\zeta| \omega_n},$$

$$N_{1/2} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\log 2}{|\zeta| \omega_n} = \frac{\log 2}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{|\zeta|}.$$

10.2.2 Critério de estabilidade de Routh

Um sistema tem modos instáveis se a equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ tiver pelo menos uma raiz com parte real positiva. Para sistemas de 4ª ordem, como no caso vertente, a equação característica é um polinómio de grau 4, que podemos escrever como

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0. \quad (10.16)$$

Existem formas de determinar se uma equação característica tem todas as raízes com parte real negativa (isto é, se o sistema é estável) sem ter de as calcular. Uma dessas formas é a utilização do critério de Routh-Hurwitz: aplicado a sistemas de 4ª ordem, afirma que uma condição necessária e suficiente para que todas as raízes tenham parte real negativa é que se verifique simultaneamente

- $B > 0$,
- $D > 0$,
- $E > 0$,
- $R = D(BC - AD) - B^2E > 0$ (R é o discriminante de Routh).

Estas condições são válidas se $A > 0$ e delas se deduz que $C > 0$.

Com frequência em aeronáutica $E > 0$ e $R > 0$ representam casos críticos significativos. Se uma configuração de uma aeronave é estável e um parâmetro de projecto é alterado de forma que passa a haver uma instabilidade, se apenas E passa a negativo, uma raiz real passa de negativa a positiva; se apenas R passa a negativo, a parte real de um par de raízes complexas conjugadas passa de negativa a positiva. As superfícies $E = 0$ e $R = 0$ definem fronteiras entre regiões de estabilidade e instabilidade.

10.3 Modos longitudinais: características típicas

Começaremos por determinar os modos longitudinais num caso concreto e usar as propriedades dos modos obtidos para definir características típicas para estes modos.

Os passos a seguir na determinação dos modos de uma aeronave são:

1. Cálcular as derivadas dimensionais (conhecidas as adimensionais)
2. Cálcular os elementos da matriz \mathbf{A}

Tabela 10.1: Características do Cessna 182

$S = 16.17 \text{ m}^2$	$\bar{c} = 1.49 \text{ m}$	$W = 11787 \text{ N}$
$I_x = 1285.0 \text{ kg m}^2$	$I_y = 1824.4 \text{ kg m}^2$	$I_z = 2666.2 \text{ kg m}^2$
$I_{xz} = 0 \text{ kg m}^2$		

Tabela 10.2: Derivadas adimensionais do Cessna 182

	C_D	C_L	C_T	C_m
\hat{u}	0	0	-0.096	0
α	0.121	4.41	-	-0.613
\hat{q}	0	3.9	-	-12.4
$\hat{\alpha}$	0	1.7	-	-7.27

(Fonte: [5])

3. Determinar as soluções da equação característica (valores próprios de A)
4. Para cada valor próprio determinar o respectivo vector próprio (a menos de uma constante multiplicativa)

10.3.1 Exemplo: Cessna 182 Skylane

Para exemplificar a aplicação dos passos referidos, vamos determinar os modos longitudinais de um Cessna 182 Skylane que se encontra em voo horizontal a 5000 ft, com velocidade $u_0 = 67.08 \text{ m/s}$ ($\text{Ma} = 0.201$). O estado estacionário caracteriza-se por $\theta_0 = 0$, $C_{L_1} = 0.307$ e $C_{D_1} = 0.032$. De acordo com a atmosfera padrão, $\rho = 1.055 \text{ kg/m}^3$.

Na tabela 10.1 apresenta-se algumas características do Cessna 182 usado neste exemplo e na tabela 10.2 apresentam-se as derivadas de estabilidade adimensionais. Com estes valores e usando as expressões deduzidas no capítulo 9, podemos determinar o valor das derivadas adimensionais segundo os eixos x e z :

$$\begin{aligned} C_{x_u} &= C_{T_u} - C_{D_u} = -0.096, \\ C_{x_\alpha} &= C_{L_1} - C_{D_\alpha} = 0.186, \\ C_{x_q} &= 0, \\ C_{x_{\dot{\alpha}}} &= 0, \\ C_{z_u} &= -C_{L_u} = 0, \\ C_{z_\alpha} &= -(C_{L_\alpha} + C_{D_1}) = -4.442, \\ C_{z_q} &= -C_{L_q} = -3.9, \\ C_{z_{\dot{\alpha}}} &= -C_{L_{\dot{\alpha}}} = -1.7. \end{aligned}$$

As derivadas dimensionais podem agora ser calculadas:

$$\begin{aligned}
X_u &= \rho u_0 S C_{W_0} \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{x_u} = -54.9456 \text{ Nsm}^{-1}, \\
Z_u &= -\rho u_0 S C_{W_0} \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z_u} = -351.485 \text{ Nsm}^{-1}, \\
M_u &= \frac{1}{2} \rho u_0 \bar{c} S C_{m_u} = 0, \\
X_w &= \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{x_\alpha} = 106.457 \text{ Nsm}^{-1}, \\
Z_w &= \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z_\alpha} = -2542.38 \text{ Nsm}^{-1}, \\
M_w &= \frac{1}{2} \rho u_0 S \bar{c} C_{m_\alpha} = -524.002 \text{ Ns}, \\
X_q &= \frac{1}{4} \rho u_0 S \bar{c} C_{x_q} = 0, \\
Z_q &= \frac{1}{4} \rho u_0 S \bar{c} C_{z_q} = -1666.89 \text{ Ns}, \\
M_q &= \frac{1}{4} \rho u_0 S \bar{c}^2 C_{m_q} = -7915.44 \text{ Nms}, \\
X_{\dot{w}} &= \frac{1}{4} \rho S \bar{c} C_{x_{\dot{\alpha}}} = 0, \\
Z_{\dot{w}} &= \frac{1}{4} \rho S \bar{c} C_{z_{\dot{\alpha}}} = -10.8307 \text{ Nm}^{-1} \text{s}^2, \\
M_{\dot{w}} &= \frac{1}{4} \rho S \bar{c}^2 C_{m_{\dot{\alpha}}} = -69.1756 \text{ Ns}^2.
\end{aligned}$$

Estamos agora em condições de calcular todos os elementos da matriz do sistema, que neste caso é dada por (8.36). Nas condições de voo indicadas,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.0457289 & 0.0885998 & 0 & -9.81 \\ -0.289913 & -2.09701 & 65.1123 & 0 \\ 0.0109923 & -0.207702 & -6.80735 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

estando todos os termos calculados no Sistema Internacional de unidades.

A equação característica, $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, é agora

$$\lambda^4 + 8.95009\lambda^3 + 28.2319\lambda^2 + 1.4905\lambda + 0.816844 = 0.$$

Tendo em conta que A , B e D são positivos, e que

$$E = 0.816844 > 0,$$

$$R = D(BC - AD) - B^2 E = 308.96 > 0,$$

os critérios de estabilidade permitem afirmar que todos os modos vão ser estáveis.

Tabela 10.3: Vectores próprios obtidos para o Cessna 182

	Fugóide		Período curto	
	Módulo	Fase (φ)	Módulo	Fase (φ)
$\Delta\hat{u}$	1.0	0°	0.0065	-37.7°
$\alpha = \hat{u}$	0.045	179.1°	1.0	0°
\hat{q}	0.0030	-1.8°	0.0564	129.8°
$\Delta\theta$	0.0175	-99.2°	0.0107	-17.8°

As raízes da equação característica, que são os valores próprio de A , são

$$\lambda_{1,2} = -0.0220954 \pm 0.169956i \quad (\text{modo fugóide})$$

$$\lambda_{3,4} = -4.45295 \pm 2.82492i \quad (\text{modo de período curto})$$

Obtemos dois pares de raízes complexas conjugadas, pelo que vamos ter dois modos oscilatórios, normalmente conhecidos por modo fugóide e modo de período curto.

Podemos determinar a frequência, o período, $t_{1/2}$ e $N_{1/2}$ para ambos os modos. Para o modo fugóide temos

$$\omega_f = |\text{Im}(\lambda_{1,2})| = 0.17 \text{ rad/s}, \quad T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} = 37.0 \text{ s}, \quad t_{1/2} = \frac{\log 2}{|n|} = 31.4 \text{ s},$$

$$n_f = \text{Re}(\lambda_{1,2}) = -0.022 \text{ s}^{-1}, \quad N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T_f} = 0.85.$$

Por sua vez, para o modo de período curto obtém-se

$$\omega_{pc} = |\text{Im}(\lambda_{2,3})| = 2.82 \text{ rad/s}, \quad T_{pc} = \frac{2\pi}{\omega_{pc}} = 2.22 \text{ s}, \quad t_{1/2} = \frac{\log 2}{|n|} = 0.156 \text{ s},$$

$$n_{pc} = \text{Re}(\lambda_{2,3}) = -4.45 \text{ s}^{-1}, \quad N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T_{pc}} = 0.07.$$

Verifica-se que o modo fugóide tem um período mais longo, da ordem das dezenas de segundos, e é fracamente amortecido. Pelo contrário, o modo de período curto tem um período de poucos segundos, fazendo jus ao nome, e é muito amortecido. Estas características são típicas destes modos e são comuns para muitas aeronaves e condições de voo.

Determinação dos vectores próprios

Como se viu anteriormente, os vectores próprios x_0 são as soluções da equação $(A - \lambda I)x_0 = 0$ e são determinados a menos de uma constante multiplicativa. Na tabela 10.3 apresentam-se os valores próprios obtidos no exemplo presente para os dois modos oscilatórios (normalizando os resultados obtidos de forma que o valor inicial do modo com maior amplitude seja 1).

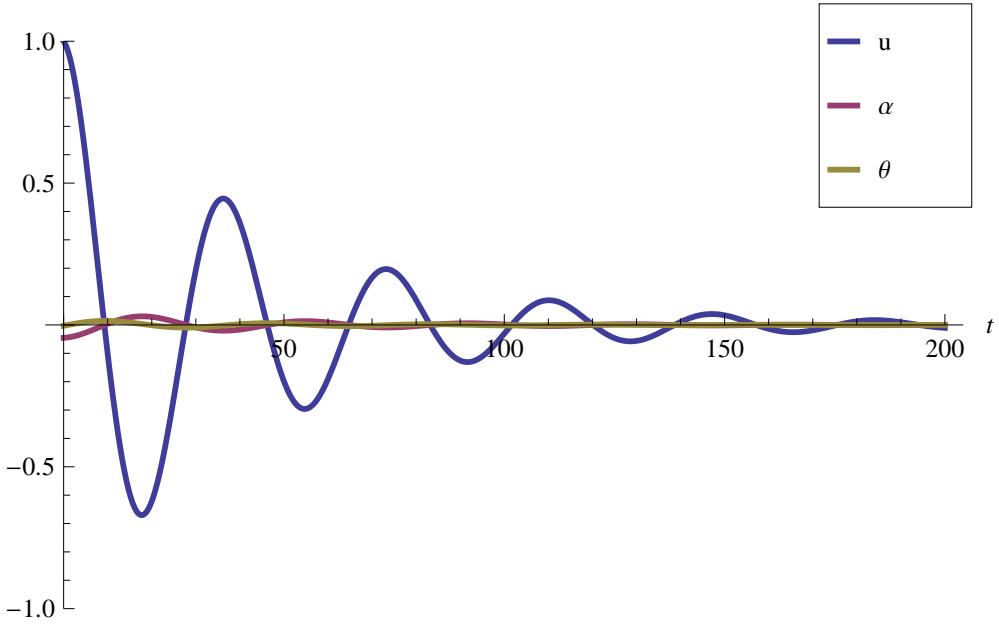


Figura 10.2: Oscilações do modo fugóide para um Cessna 182 nas condições de voo descritas no texto.

10.3.2 Modo fugóide

Os dados da tabela 10.3 permitem obter a evolução temporal de cada uma das variáveis dinâmicas longitudinais no modo fugóide:

$$\Delta\hat{u} = (\Delta\hat{u})_{\text{inicial}} e^{-0.022t} \cos(0.17t) \quad (10.17)$$

$$\alpha = (\Delta\hat{u})_{\text{inicial}} \times 0.045 e^{-0.022t} \cos(0.17t - 179.1^\circ \times (\pi/180^\circ)) \quad (10.18)$$

$$\hat{q} = (\Delta\hat{u})_{\text{inicial}} \times 0.0030 e^{-0.022t} \cos(0.17t + 1.8^\circ \times (\pi/180^\circ)) \quad (10.19)$$

$$\Delta\theta = (\Delta\hat{u})_{\text{inicial}} \times 0.0175 e^{-0.022t} \cos(0.17t + 99.2^\circ \times (\pi/180^\circ)) \quad (10.20)$$

A figura 10.2 apresenta esta mesma evolução de forma gráfica. Pode-se constatar que o modo fugóide apresenta variações grandes da velocidade longitudinal u , e variações desprezáveis do ângulo de ataque α , da velocidade angular de picada q e do ângulo de picada θ . O ângulo de ataque oscila aproximadamente em oposição de fase com a velocidade longitudinal, enquanto que as oscilações do ângulo de picada estão atrasadas de aproximadamente 90° .

Para se obter a trajectória do avião, parte-se das equações linearizadas para o «flight path», que neste caso são

$$\Delta\dot{x}_E = \Delta u \quad (10.21)$$

$$\Delta\dot{z}_E = w - u_0\Delta\theta = u_0\alpha - u_0\Delta\theta \quad (10.22)$$

Após a substituição de (10.17) em (10.21) e de (10.18) e (10.20) na equação (10.22), a

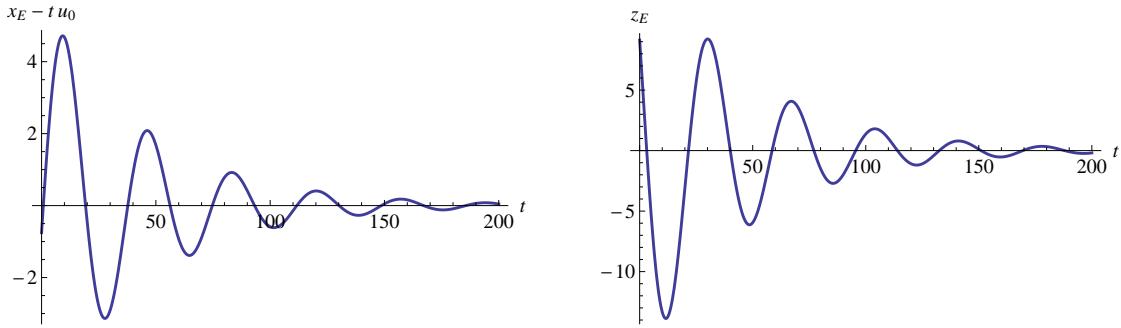


Figura 10.3: Variações da posição em x_E e z_E relativamente ao estado estacionário no modo fugóide, para o exemplo do Cessna 182.

integração das equações conduz a

$$\Delta x_E = (\Delta \hat{u})_{\text{inicial}} \frac{e^{nt} [n \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)]}{n^2 + \omega^2} \quad (10.23)$$

para a perturbação na coordenada x_E devida ao modo fugóide, e a

$$\begin{aligned} \Delta z_E = \frac{u_0}{n^2 + \omega^2} e^{nt} (\Delta \hat{u})_{\text{inicial}} \times & \left[0.045n \cos(\omega t + \varphi_\alpha) + 0.045\omega \sin(\omega t + \varphi_\alpha) \right. \\ & \left. - 0.0175n \cos(\omega t + \varphi_\theta) - 0.0175\omega \sin(\omega t + \varphi_\theta) \right] \end{aligned} \quad (10.24)$$

para a correspondente perturbação na coordenada z_E (φ_α e φ_θ são os valores da tabela 10.3). Note-se que $x_E = (x_E)_0 + \Delta x_E$, sendo $(x_E)_0 = u_0 t$. Por outro lado, $z_E = (z_E)_0 + \Delta z_E$, mas a cota $(z_E)_0$ é constante no estado estacionário e podemos escolher a origem do sistema de eixos de forma a tornar $(z_E)_0 = 0$.

A variação de Δx_E e Δz_E está representada na figura 10.3. Neste exemplo as variações na altitude do avião estão desfazidas das variações na posição longitudinal de aproximadamente 90°. O período das oscilações é o do modo fugóide e elas são pouco amortecidas. A figura 10.4 representa a posição do centro de massa do avião num referencial centrado no sistema de eixos de estabilidade do estado estacionário (e que se desloca com velocidade $(u_0, 0, 0)$ relativamente à Terra). Pode observar-se que quando o avião desce a sua velocidade aumenta, enquanto que quando ele sobe a sua velocidade diminui. O mesmo se pode observar na figura 10.5, em que se mostra a variação da velocidade longitudinal total u_E , comparando-a com a variação na altitude do avião. Como o modo é pouco amortecido, esta conversão entre energia cinética e potencial é feita mantendo a energia mecânica total do avião aproximadamente constante. Esta constatação está na base da aproximação mais simples ao modo fugóide, a aproximação de Lanchester, como veremos mais à frente.

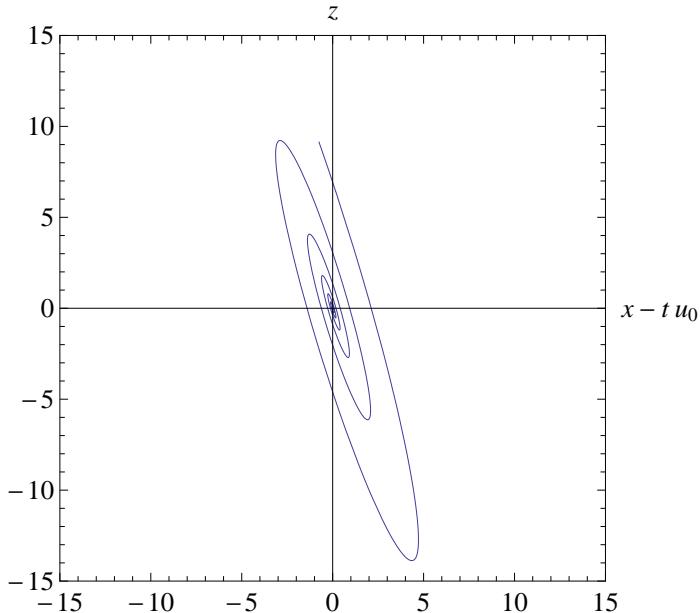


Figura 10.4: Modo fugóide: posição do centro de massa do avião no referencial do estado estacionário.

10.3.3 Modo de período curto

Com os dados da tabela 10.3 pode-se obter a evolução temporal de cada uma das variáveis dinâmicas longitudinais no modo de período curto:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{u} &= \alpha_{\text{inicial}} \times 0.0065 e^{-4.45t} \cos\left(2.82t - 37.7^\circ \frac{\pi}{180}\right) \\ \alpha &= \alpha_{\text{inicial}} e^{-4.45t} \cos(2.82t) \\ \hat{q} &= \alpha_{\text{inicial}} \times 0.0564 e^{-4.45t} \cos\left(2.82t + 129.8^\circ \frac{\pi}{180}\right) \\ \Delta\theta &= \alpha_{\text{inicial}} \times 0.0107 e^{-4.45t} \cos\left(2.82t - 17.8^\circ \frac{\pi}{180}\right)\end{aligned}$$

Na figura 10.6 esta mesma evolução é representada de forma gráfica. Pode-se constatar que o modo de período curto apresenta variações grandes do ângulo de ataque α , e variações muito pequenas ou desprezáveis da velocidade angular de picada q e do ângulo de picada θ . A variação da velocidade longitudinal Δu é também desprezável e toma valores tão pequenos que nem foi representada na figura.

As equações da trajectória podem obter-se de forma semelhante à descrita para o modo fugóide. A figura 10.7 apresenta as variações da posição em x_E e z_E relativamente ao estado estacionário. As variações na posição longitudinal são desprezáveis, tal como as variações na velocidade longitudinal representadas na figura 10.8. As únicas variações importantes são da altitude do avião, mas as oscilações são fortemente amortecidas, como é próprio deste modo.

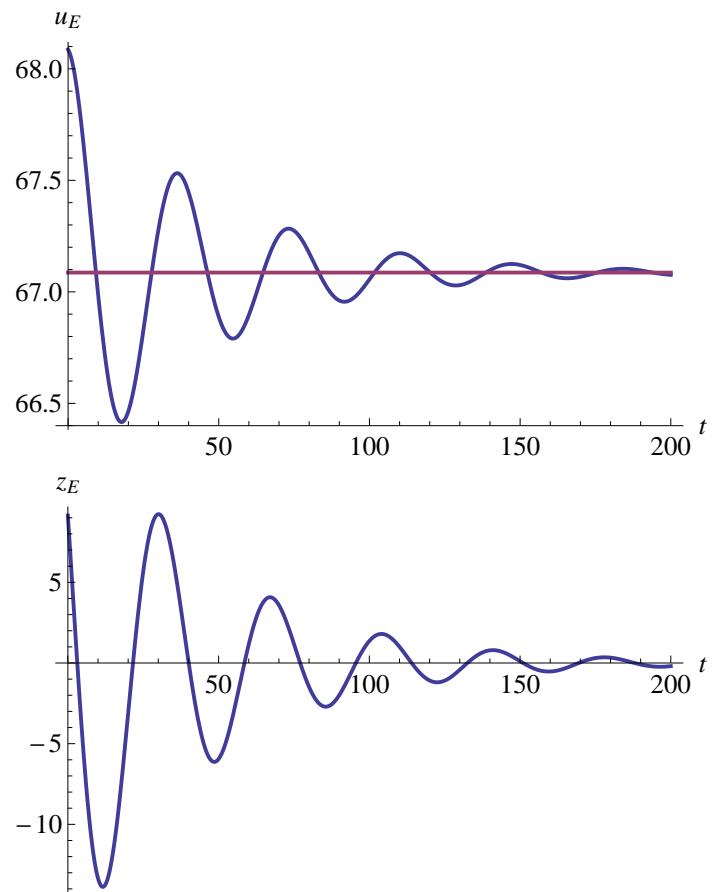


Figura 10.5: Variação da velocidade longitudinal total u_E para o modo fugóide, comparando-a com a variação na altitude do avião, já mostrada na figura 10.3. Indica-se a velocidade do estado estacionário, $u_0 = 67.08 \text{ m/s}$.

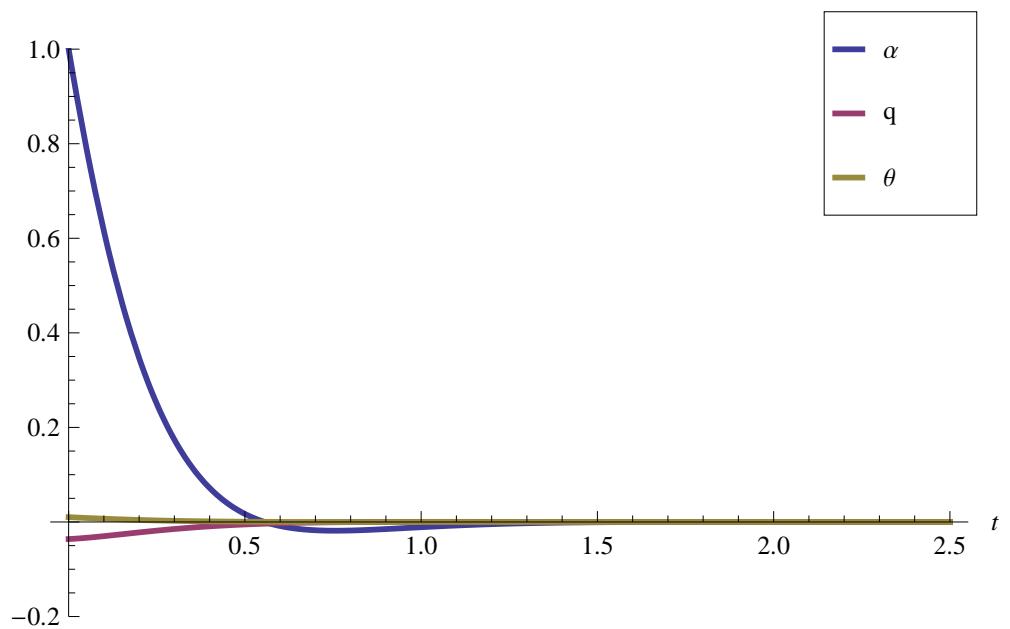


Figura 10.6: Oscilações das variáveis dinâmicas no modo de período curto.

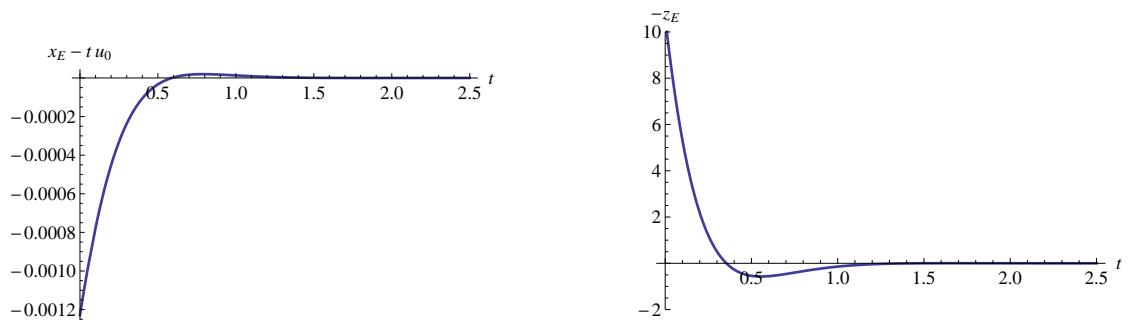


Figura 10.7: Variações da posição em x_E e z_E relativamente ao estado estacionário no modo de período curto, para o exemplo do Cessna 182.

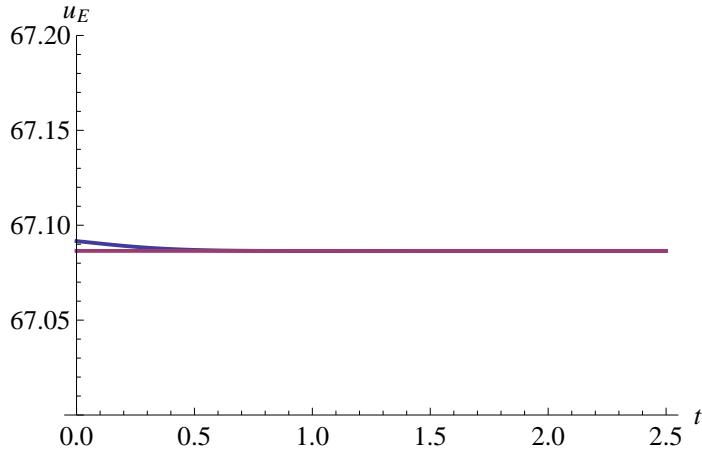


Figura 10.8: Variações da velocidade longitudinal u_E relativamente ao estado estacionário no modo de período curto, para o exemplo do Cessna 182.

10.4 Modos longitudinais aproximados

Nesta secção procuraremos deduzir expressões aproximadas para os modos longitudinais. Estas expressões facilitam os cálculos para a obtenção dos valores próprios e permitem perceber mais facilmente quais são os factores mais importantes que determinam os valores do período e factor de amortecimento de cada modo.

10.4.1 Modo fugóide aproximado

Como vimos, o modo fugóide caracteriza-se por oscilações de Δu com pequena variação de α , q e $\Delta\theta$.

Aproximação de Lanchester

A aproximação mais simples ao modo fugóide foi desenvolvida por Lanchester logo no início do séc. XX.

Nesta aproximação admite-se que as perturbações do ângulo de ataque são nulas. Usando eixos de estabilidade, $\alpha = 0$. Além disso admite-se que a linha de acção da força de propulsão é o eixo Cx , ou seja, $\alpha_T = 0$; e que $T = D$, o que garante o equilíbrio das forças em x .

Uma vez que L é perpendicular à velocidade e por isso não realiza trabalho, que, se $T = D$, o trabalho das forças tangenciais não conservativas se anula, e que a única força que produz trabalho (o peso) é conservativa, conclui-se que nesta aproximação há conservação da energia mecânica. A origem do referencial \mathcal{F}_E é definida de forma que $V = u_0$ quando $z_E = 0$ (isto é, a altitude de referência é a correspondente ao estado estacionário). Pela conservação de energia mecânica,

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - mgz_E = \text{cte} = \frac{1}{2}mu_0^2 \Rightarrow V^2 = u_0^2 + 2gz_E. \quad (10.25)$$

Mas, como $\alpha = 0$, $C_L = C_{L_1} = C_{W_0}$. Note-se que no modo fugóide q é suficientemente pequeno para não alterar significativamente o valor de C_L . Então,

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{W_0} = \frac{1}{2}\rho u_0^2 S C_{W_0} + \frac{1}{2}\rho 2g z_E S C_{W_0} = W + kz_E, \quad (10.26)$$

em que se define $k = \rho S g C_{W_0}$.

A equação do movimento segundo z pode escrever-se $W - L \cos \theta = m\ddot{z}_E$. Mas, dado que $\theta_0 = 0$ e que no modo fugóide as oscilações $\Delta\theta$ são desprezáveis, $\theta \ll 1$, $\cos \theta \approx 1$. Usando (10.26) a equação do movimento toma a forma de uma equação de movimento harmónico simples,

$$m\ddot{z}_E + kz_E = 0, \quad (10.27)$$

para oscilações verticais de frequência

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.28)$$

Pela conservação de energia conclui-se que há também oscilações em $V = u_0 + \Delta u$.

O período das oscilações é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho S g C_{W_0}}}. \quad (10.29)$$

Usando $C_{W_0} = mg/(\frac{1}{2}\rho u_0^2 S)$, obtém-se finalmente

$$T = \pi\sqrt{2}\frac{u_0}{g}. \quad (10.30)$$

O período depende apenas de u_0 e não depende nem das características da aeronave, nem de ρ (nem, por isso, da altitude).

Para verificarmos até que ponto a aproximação de Lanchester dá resultados fiáveis, comparemos o valor do período obtido usando esta aproximação com o valor exacto obtido anteriormente para o Cessna 182:

- $T_{\text{exacto}} = 37 \text{ s}$,
- $T_{\text{aprox}} = 30.3 \text{ s}$.

Constatamos que a aproximação de Lanchester permite obter valores razoavelmente aproximados para o período (o erro é, neste caso, inferior a 20%), mas não há amortecimento das oscilações. Necessitamos, pois, de outra aproximação que nos permita determinar de forma aproximada o factor de amortecimento.

Modo fugóide aproximado com amortecimento

Para esta aproximação usar-se-á uma abordagem diferente: fazemos as aproximações directamente nas equações do movimento para pequenas perturbações de modo a obter um sistema de ordem inferior à inicial.

Recorde-se que as equações longitudinais para pequenas perturbações são

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u} &= \frac{X_u}{m} \Delta u + \frac{X_w}{m} w - g \cos \theta_0 \Delta \theta + \frac{\Delta X_c}{m} \\ \dot{w} &= \frac{Z_u}{m - Z_w} \Delta u + \frac{Z_w}{m - Z_w} w + \frac{(mu_0 + Z_q)}{m - Z_w} q - \frac{mg \sin \theta_0}{m - Z_w} \Delta \theta + \frac{\Delta Z_c}{m - Z_w} \\ \dot{q} &= \frac{1}{I_y} \left(M_u + \frac{M_w Z_u}{m - Z_w} \right) \Delta u + \frac{1}{I_y} \left(M_w + \frac{M_u Z_w}{m - Z_w} \right) w + \frac{1}{I_y} \left(M_q + \frac{M_w (mu_0 + Z_q)}{m - Z_w} \right) q \\ &\quad - \frac{1}{I_y} \left(\frac{M_w mg \sin \theta_0}{m - Z_w} \right) \Delta \theta + \frac{1}{I_y} \left(\Delta M_c + \frac{M_w \Delta Z_c}{m - Z_w} \right). \\ \Delta \dot{\theta} &= q.\end{aligned}$$

Dado que o modo fugóide pode ser descrito como oscilações da velocidade longitudinal, desprezar-se-ão as variações no ângulo de ataque. Consequentemente, $w \approx 0$ e $\dot{w} \approx 0$. Tendo em conta que no estado estacionário $\theta_0 = 0$, a segunda equação permite escrever

$$q = -\frac{Z_u}{(mu_0 + Z_q)} \Delta u - \frac{\Delta Z_c}{(mu_0 + Z_q)} \quad (10.31)$$

e, substituindo na quarta equação, obtém-se

$$\Delta \dot{\theta} = -\frac{Z_u}{(mu_0 + Z_q)} \Delta u - \frac{\Delta Z_c}{(mu_0 + Z_q)}. \quad (10.32)$$

Esta equação juntamente com a primeira equação do sistema constituem um sistema de equações diferenciais diferenciais de primeira ordem em Δu e $\Delta \theta$.

Com a simplificação adicional de considerar $mu_0 \gg Z_q$ (como exemplo, compare-se os valores obtidos para o Cessna 182), o sistema pode escrever-se, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta \ddot{u} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & -g \\ -\frac{Z_u}{mu_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_c}{m} \\ -\frac{\Delta Z_c}{mu_0} \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

Não considerando, por enquanto, os termos de controlo, a equação homogénea resolve-se admitindo soluções na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}$. Deste modo, $\Delta \ddot{u} = \lambda \Delta \dot{u}$ e $\Delta \dot{\theta} = \lambda \Delta \theta$ e obtemos

$$\begin{bmatrix} \lambda \Delta u \\ \lambda \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & -g \\ -\frac{Z_u}{mu_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & -g \\ -\frac{Z_u}{mu_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

e finalmente

$$\begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} - \lambda & -g \\ -\frac{Z_u}{mu_0} & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

Esta equação homogénea só tem soluções não triviais se o determinante da matriz for nulo, obtendo-se a equação característica para o modo fugóide aproximado:

$$\lambda^2 - \frac{X_u}{m} \lambda - g \frac{Z_u}{mu_0} = 0 \quad (10.36)$$

Num sistema de 2^a ordem, a frequência natural e factor de amortecimento de um modo oscilante podem obter-se facilmente a partir da equação característica. Se $\lambda_1 = n + i\omega$ e $\lambda_1^* = n - i\omega$ são soluções de

$$\lambda^2 + (B/A)\lambda + (C/A) = 0, \quad (10.37)$$

então

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1^*) = \lambda^2 + (B/A)\lambda + (C/A).$$

Mas

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1^*) &= 0 \Rightarrow (\lambda - (n + i\omega))(\lambda - (n - i\omega)) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 2n\lambda + (n^2 + \omega^2) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0, \end{aligned}$$

em que se usou $n = -\zeta\omega_n$ e $\omega_n = (n^2 + \omega^2)$. Por comparação com (10.37), obtém-se

$$\omega_n^2 = \frac{C}{A}, \quad (10.38)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{B}{A}. \quad (10.39)$$

Conclui-se então imediatamente que para o modo fugóide aproximado

$$\omega_n^2 = -\frac{gZ_u}{mu_0} \quad (10.40)$$

$$2\zeta\omega_n = -\frac{X_u}{m} \Rightarrow \zeta = -\frac{X_u}{2} \sqrt{-\frac{u_0}{mgZ_u}} \quad (10.41)$$

Note-se que estas expressões são válidas apenas quando o modo fugóide é oscilatório. Em certas situações este modo pode degenerar em 2 modos de 1^a ordem. Nesse caso, admitindo que a aproximação continua válida, teríamos de resolver a equação característica (10.36) directamente para obter as raízes.

Para compararmos esta aproximação com a anterior, começemos por notar que, se $C_{z_u} \approx 0$, e sendo $\theta_0 = 0$,

$$Z_u = -\rho u_0 S C_{W_0} \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z_u} = -\rho u_0 S C_{W_0}$$

A frequência natural será nesta aproximação dada por

$$\omega_n^2 = -\frac{g(-\rho u_0 S C_{W_0})}{mu_0} = \frac{2g^2}{u_0^2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \frac{g}{u_0}.$$

Note-se que recuperamos a aproximação de Lanchester para o período:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \sqrt{2}\pi \frac{u_0}{g}.$$

Para se verificar de que depende o factor de amortecimento consideremos o caso de um jacto. Sendo a propulsão aproximadamente constante, tem-se $C_{T_u} = -2C_{T_0}$. Por outro lado $C_{T_0} \approx C_{D_1}$. Desprezando as derivadas de C_D , C_L e C_m em ordem a u ,

$$C_{x_u} \approx C_{T_u} = -2C_{T_0} = -2C_{D_1}.$$

Tabela 10.4: Comparação entre as aproximações e o valor exacto para o modo fugóide

	Período (T)	Factor de amortecimento (ζ)
Valor exacto	37.0 s	0.129
Aproximação de Lanchester	30.4 s	—
Aproximação com amortecimento	30.6 s	0.111

Supondo $\theta_0 = 0$, de (9.12) e (9.4) obtém-se

$$X_u = 1/2 \rho u_0 S C_{x_u} = -\rho u_0 S C_{D_1}, \\ Z_u = -\rho u_0 S C_{W_0} = -\rho u_0 S C_{L_1}.$$

O factor de amortecimento é então:

$$\zeta = -\frac{X_u}{2} \sqrt{-\frac{u_0}{mgZ_u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C_{D_1}}{C_{L_1}},$$

ou seja, é proporcional ao inverso da razão de planeio L/D :

$$\zeta \sim \frac{1}{L/D}.$$

Conclui-se que o amortecimento da fugóide se degrada quando melhora a eficiência aerodinâmica pelo aumento de L/D . Um amortecimento da fugóide demasiado baixo pode dificultar a pilotagem do avião, especialmente se o piloto está a voar por instrumentos. Os sistemas de aumento de estabilidade permitem eliminar este problema.

Na tabela 10.4 comparam-se os valores exactos obtidos para o período e o factor de amortecimento do modo fugóide com os valores obtidos para a aproximação de Lanchester e a segunda aproximação feita. Em ambas as aproximações o valor do período é semelhante e apresenta um erro relativo inferior a 20% relativamente ao valor exacto. O factor de amortecimento só pode ser calculado mediante a segunda aproximação, e o valor obtido tem um erro relativo da ordem dos 14%. Isto mostra que estas aproximações são razoáveis desde que não seja necessário grande precisão.

10.4.2 Modo de período curto aproximado

O modo de período curto caracteriza-se por $\Delta u \approx 0$. Por isto para se obter o modo aproximado ignorar-se-á a equação em x , que determina a evolução de Δu . Admitir-se-á ainda que $Z_w \ll m$, pelo que $(m - Z_w) \approx m$, e também que $Z_q \ll mu_0$, donde $(Z_q + mu_0) \approx mu_0$. Finalmente, usar-se-á o facto de que o estado estacionário corresponde a um voo horizontal, pelo que $\theta_0 = 0$.

Aplicando as aproximações indicadas acima nas equações para o movimento longi-

tudinal (8.14), (8.19), (8.17) e (8.20), temos

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u} &= \frac{X_u}{m} \Delta u + \frac{X_w}{m} w + -g \cos \theta_0 \Delta \theta + \frac{\Delta X_c}{m} \quad [\text{equação ignorada}], \\ \dot{w} &= \frac{Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} \underbrace{\Delta u}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{Z_w}{m - Z_{\dot{w}}}}_{\approx Z_w/m} w + \underbrace{\left(\frac{(mu_0 + Z_q)}{m - Z_{\dot{w}}} \right)}_{\approx u_0} q - \underbrace{\frac{mg \sin \theta_0}{m - Z_{\dot{w}}}}_{\approx 0 (\theta_0 \approx 0)} \Delta \theta + \underbrace{\frac{\Delta Z_c}{m - Z_{\dot{w}}}}_{\approx \Delta Z_c/m}, \\ \dot{q} &= \frac{1}{I_y} \left[\left(M_u + \frac{M_{\dot{w}} Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} \right) \underbrace{\Delta u}_{\approx 0} + \left(M_w + \underbrace{\frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m - Z_{\dot{w}}}}_{\approx M_{\dot{w}} Z_w/m} \right) w + \left(M_q + \underbrace{\frac{M_{\dot{w}} (mu_0 + Z_q)}{m - Z_{\dot{w}}}}_{\approx M_{\dot{w}} u_0} \right) q \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\frac{M_{\dot{w}} mg \sin \theta_0}{m - Z_{\dot{w}}} \Delta \theta}_{\approx 0 (\theta_0 \approx 0)} \right] + \underbrace{\frac{1}{I_y} \left(\Delta M_c + \frac{M_{\dot{w}}}{m - Z_{\dot{w}}} \Delta Z_c \right)}_{\approx \frac{1}{I_y} (\Delta M_c + M_{\dot{w}} \frac{\Delta Z_c}{m})}, \\ \Delta \dot{\theta} &= q.\end{aligned}$$

Com as aproximações indicadas, a 2^a e a 3^a equações dependem apenas de w e q e suas derivadas. Desta forma, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_w}{m} & u_0 \\ \frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right] & \frac{1}{I_y} \left[M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta Z_c}{m} \\ \Delta M_c + M_{\dot{w}} \frac{\Delta Z_c}{m} \end{bmatrix}. \quad (10.42)$$

Omitindo os termos de controlo, a equação característica do sistema é

$$\begin{vmatrix} \frac{Z_w}{m} - \lambda & u_0 \\ \frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right] & \frac{1}{I_y} \left[M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right] - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, a equação característica toma a forma

$$\lambda^2 - \underbrace{\left[\frac{Z_w}{m} + \frac{1}{I_y} (M_q + M_{\dot{w}} u_0) \right]}_B \lambda - \underbrace{\frac{1}{I_y} \left[M_w u_0 - \frac{Z_w}{m} M_q \right]}_C = 0. \quad (10.43)$$

De (10.38) e de (10.39) com $A = 1$, obtém-se

$$\omega_n = \sqrt{C} = \sqrt{-\frac{1}{I_y} \left(M_w u_0 - \frac{Z_w}{m} M_q \right)}, \quad (10.44)$$

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{C}} = -\frac{\frac{Z_w}{m} + \frac{1}{I_y} (M_q + M_{\dot{w}} u_0)}{2\sqrt{-\frac{1}{I_y} \left(M_w u_0 - \frac{Z_w}{m} M_q \right)}}. \quad (10.45)$$

As expressões (10.44) e (10.45) são válidas se o período curto for um modo oscilatório. Nesse caso as soluções da equação característica (10.43) são um par de raízes complexas conjugadas, e como o modo é oscilatório existe ω_n e ζ . No entanto, para certos

Tabela 10.5: Comparação entre os valores exactos e aproximados obtidos para o modo de período curto.

	λ	T (s)	ζ	$t_{1/2}$ (s)	$N_{1/2}$
Exacto	$-4.45295 \pm 2.82492i$	2.2242	0.844	0.156	0.07
Aproximado	$-4.49906 \pm 2.8647i$	2.1933	0.8435	0.154	0.07

valores das derivadas de estabilidade a equação (10.43) pode ter duas raízes reais. Os modos deixam de ser oscilatórios, não se define ω_n nem ζ e é necessário calcular as raízes da equação.

Na tabela 10.5 apresentam-se os resultados obtidos por intermédio da aproximação acima e comparam-se com os valores exactos anteriormente obtidos para o modo de período curto. Os resultados da aproximação são muito satisfatórios neste caso. Geralmente esta aproximação de período curto dá resultados muito aproximados do valor exacto para uma grande gama de aeronaves e de condições de voo.

10.5 Teoria Geral da Estabilidade Longitudinal Estática

Embora a estabilidade dinâmica pressuponha a existência de estabilidade estática, podemos tentar usar os critérios de estabilidade dinâmica para deduzir os critérios de estabilidade estática.

Para existir estabilidade dinâmica é necessário que a parte real das raízes da equação característica seja negativa. A equação característica é, como vimos, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0$.

Pelo critério de Routh, uma das condições de estabilidade é $E > 0$. Mas E obtém-se do polinómio característico fazendo $\lambda = 0$, pelo que $E = \det \mathbf{A}$. Supondo que o voo é horizontal, $\theta_0 = 0$. Faremos ainda a simplificação adicional de admitir que $Z_{\dot{w}}$ e Z_q são desprezáveis. Então,

$$E = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & u_0 & 0 \\ \frac{1}{I_y} \left(M_u + \frac{M_{\dot{w}} Z_u}{m} \right) & \frac{1}{I_y} \left(M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right) & \frac{1}{I_y} \left(M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = \frac{g}{m I_y} [Z_u M_w - Z_w M_u].$$

A condição de estabilidade dinâmica implica então que

$$E = \frac{g}{m I_y} [Z_u M_w - Z_w M_u] > 0 \Rightarrow Z_u M_w - Z_w M_u > 0.$$

Mas, tendo em conta que

$$\begin{aligned} Z_u &= -\rho u_0 S C_{W_0} + \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z_u}, \\ Z_w &= \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z_\alpha}, \\ M_u &= \frac{1}{2} \rho u_0 \bar{c} S C_{m_u}, \\ M_w &= \frac{1}{2} \rho u_0 \bar{c} S C_{m_\alpha}, \end{aligned}$$

a condição de estabilidade é

$$(C_{z_u} - 2C_{W_0})C_{m_\alpha} - C_{m_u}C_{z_\alpha} > 0.$$

Se $C_{z_u} \approx 0 \approx C_{m_u}$, a condição acima é apenas

$$-2C_{W_0}C_{m_\alpha} > 0 \Rightarrow C_{m_\alpha} < 0. \quad (10.46)$$

Obtemos assim uma das condições de estabilidade estática como consequência das condições necessárias e suficientes para estabilidade dinâmica.

10.6 Efeito da posição do centro de massa

Várias derivadas longitudinais dependem da posição do centro de massa, como por exemplo, C_{m_α} , C_{m_q} e C_{L_q} . Consequentemente, os modos longitudinais dependem de h . Para exemplificar essa dependência calcularam-se as raízes da equação característica completa para os modos longitudinais de um Cessna 182 nas condições de voo anteriormente descritas, para várias posições do centro de massa.

Habitualmente a variação das derivadas C_{m_q} e C_{L_q} com h é menos importante que a variação de C_{m_α} . Por isso neste exemplo supomos que apenas C_{m_α} depende de h , e usamos a bem conhecida expressão $C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha}(h - h_n) = -C_{L_\alpha}K_n$.

As raízes da equação característica longitudinal exacta de um Cessna 182 foram calculadas para margens estáticas no intervalo $-0.1 < K_n < 0.5$. Na figura 10.9 apresenta-se a localização das raízes, e o comportamento perto da origem. Verifica-se que para $K_n < 0$ existem raízes com parte real positiva, que correspondem a modos instáveis.

Na figura 10.10 mostra-se a localização das raízes para margem estática positiva e distinguindo o modo fugóide do modo de período curto. Para $0.5 \geq K_n \geq 0.08$ as raízes correspondem às características habituais dos modos: o modo fugóide é oscilatório (pares de raízes complexas conjugadas) e pouco amortecido (a parte real das raízes está próximo da origem); o modo de período curto é oscilatório (pares de raízes complexas conjugadas), é muito amortecido (parte real negativa de valor elevado) e tem frequência elevada. No entanto, para o modo de período curto a sua frequência diminui à medida que a margem estática diminui, e anula-se para $K_n = 0.08$. Nessa altura passamos a ter duas raízes reais positivas e o modo deixa de ser oscilatório. Para margem estática na gama $0.08 > K_n \geq 0.0019$ o modo fugóide continua a ser oscilatório mas a frequência vai-se aproximando de zero; por sua vez, as raízes reais correspondentes ao modo de período curto afastam-se, uma delas aumentando e a outra diminuindo de valor. Finalmente, para $0.0019 > K_n \geq 0$ o modo fugóide deixa

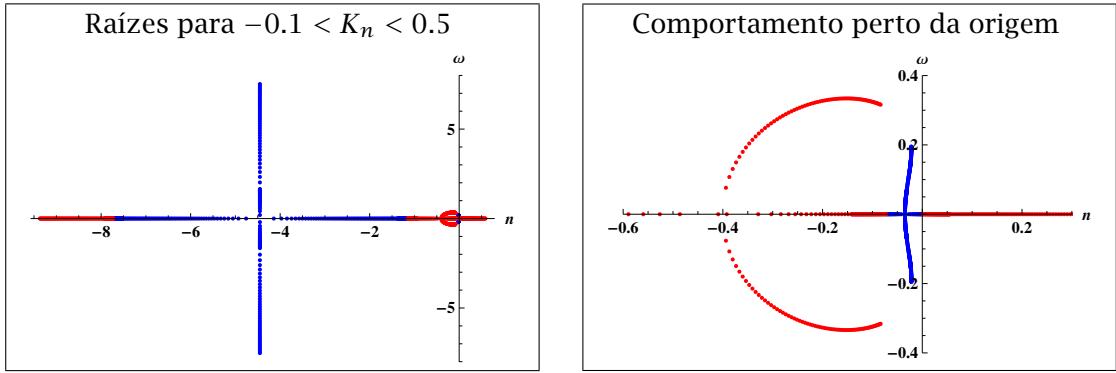


Figura 10.9: Localização das raízes $\lambda = n + i\omega$ da equação característica longitudinal exacta de um Cessna 182. A vermelho: raízes para $-0.1 < K_n < 0$; a azul: raízes para $0 < K_n < 0.5$.

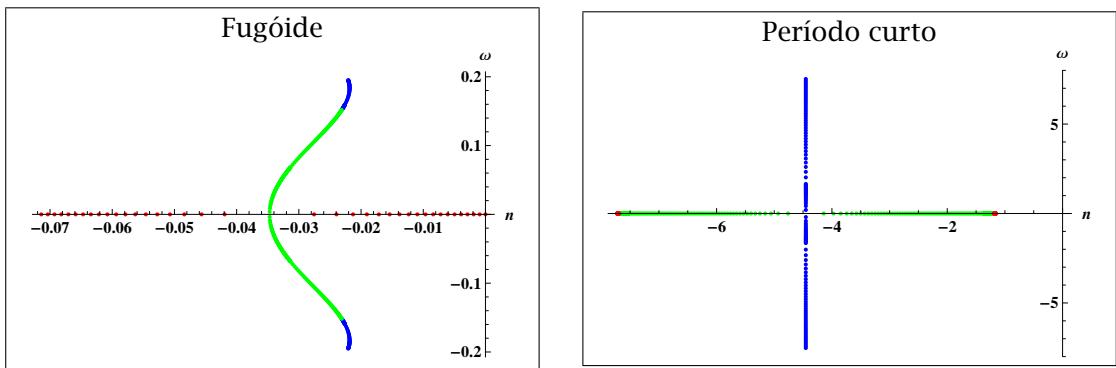


Figura 10.10: Localização das raízes da equação característica longitudinal exacta de um Cessna 182 para $0 < K_n < 0.5$, para o modo fugóide (esquerda) e o modo de período curto (direita). A azul: raízes para $0.5 \geq K_n \geq 0.08$; a verde: raízes para $0.08 > K_n \geq 0.0019$; a vermelho: raízes para $0.0019 > K_n \geq 0$.

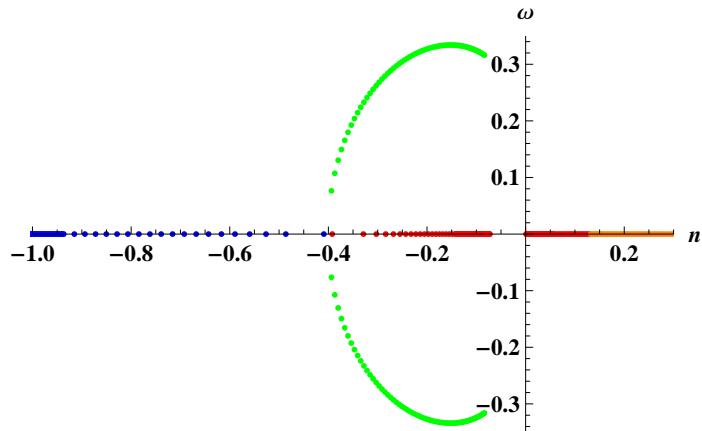


Figura 10.11: Localização das raízes da equação característica longitudinal exacta de um Cessna 182 para $K_n < 0$. Para $0 > K_n > -0.03$: a vermelho, «modo fugóide»; a azul, «modo de período curto». Para $-0.03 \geq K_n \geq -0.1$, a verde, modo oscilatório; a laranja, raiz real.

de ser oscilatório e passamos a ter duas raízes reais, aproximando-se uma delas da origem.

Finalmente, na figura 10.11 mostra-se a localização das raízes para margem estática negativa. Observa-se que, à medida que a margem estática se torna mais negativa, a raiz real positiva, que corresponde a um modo instável, se torna mais positiva. Por outro lado, uma das raízes reais correspondente ao modo fugóide e uma das raízes reais correspondente ao modo de período curto aproximam-se e tornam-se iguais para $K_n \approx -0.03$. Para valores mais negativos de K_n estas raízes passam a ser um par de raízes complexas conjugadas, correspondendo a um modo oscilatório. A quarta raiz, não mostrada na figura, é real e toma valores crescentemente negativos à medida que K_n se torna mais negativo.

10.7 Efeito do Vento nos Modos Longitudinais

O vento pode influenciar a dinâmica de uma aeronave de várias formas, especialmente se existe turbulência atmosférica ou se o vento apresenta gradientes espaciais. Entre estes incluem-se as correntes verticais ascendentes (térmicas), os *downbursts* e os gradientes devido à camada limite atmosférica. No que se segue abordar-se-á apenas efeito do vento de frente ou vento de cauda num voo horizontal na camada limite atmosférica.

Supomos que o vento é horizontal, isto é, que no referencial \mathcal{F}_E fixo na Terra \vec{W} só tem componente horizontal. Na camada limite atmosférica a variação da velocidade do vento com a altitude tem a forma $W = kh^n$, em que W é a velocidade do vento, h é altura acima do solo e k e n são constantes que dependem das características do terreno. A velocidade do vento aumenta com a altitude, e por isso $n > 0$.

10.7.1 Equações do movimento para pequenas perturbações na presença de vento

O estado estacionário é o definido na secção 8.1, isto é, um voo horizontal nivelado com velocidade u_0 . Assim, $\dot{u}_0 = \dot{v}_0 = \dot{w}_0 = 0$, $p_0 = q_0 = r_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ e $\phi = 0$. Além disso, supomos sem perda de generalidade que $\psi_0 = 0$. Usaremos um sistema de eixos de estabilidade, pelo que $w_0 = 0$, ou seja, $\alpha_x = 0$ no estado estacionário.

A diferença relativamente ao caso tratado no capítulo 8 é que agora a velocidade do vento não é nula.

$$\vec{V}^E = \vec{V} + \vec{W} \Rightarrow \begin{cases} u^E = u + W_x \\ v^E = v + W_y \\ w^E = w + W_z \end{cases}$$

Assim, as equações linearizadas (8.12), (8.15), e (8.24) dependem agora da velocidade relativa à Terra e não apenas da velocidade relativa ao ar. As equações (8.18) e (8.20) permanecem iguais. O sistema de equações no referencial do avião é agora

$$\begin{cases} \Delta X - mg\Delta\theta = m(\Delta\dot{u}^E + qW_z - rW_y) \\ \Delta Z = m(\dot{w}^E + pW_y - qu_0^E) \\ \Delta M = I_y\dot{q} \\ \Delta\dot{\theta} = q \\ \Delta\dot{z}_E = w^E - u_0^E\Delta\theta \end{cases} \quad (10.47)$$

A última equação é importante porque as velocidades relativas a \mathcal{F}_E dependem da velocidade do vento e este depende da altitude, e portanto da coordenada z_E . De facto, como a velocidade do vento depende da altitude, as componentes $W_i = W_i(z_E)$ dependem também da altitude.

Vamos tratar apenas o caso de vento na direcção do movimento do avião (vento de frente ou de cauda) e em que não existe vento lateral. No referencial da terra

$$\vec{W}_E = (W(z_E), 0, 0). \quad (10.48)$$

Definindo a posição vertical da aeronave no estado estacionário por z_{E_0} e supondo que durante a fase de voo em consideração z_E não varia muito relativamente a z_{E_0} , podemos desenvolver $W(z_E)$ em série de Taylor e tomar apenas o termo linear:

$$W(z_E) = W_0 + \frac{dW}{dz_e}\Delta z_E = W_0 + \Gamma \Delta z_E, \quad (10.49)$$

em que $W_0 = W(z_{E_0})$ e

$$\Gamma \equiv \frac{dW}{dz_e}. \quad (10.50)$$

No referencial fixo na Terra, a velocidade do vento é então

$$\vec{W}_E = \begin{bmatrix} W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0 + \Gamma \Delta z_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e no referencial do avião $\vec{W}_B = [W_x, W_y, W_z]^T$ vem dado por

$$\vec{W}_B = \mathbf{L}_{BE} \vec{W}_E = \begin{bmatrix} W \cos \theta \\ 0 \\ W \sin \theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} W_0 + \Gamma \Delta z_E \\ 0 \\ (W_0 + \Gamma \Delta z_E) \Delta \theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} W_0 + \Gamma \Delta z_E \\ 0 \\ W_0 \Delta \theta \end{bmatrix}. \quad (10.51)$$

Usando (10.51) podemos escrever

$$\dot{u}^E = \frac{d}{dt}[u + W_x] = \frac{d}{dt}[(u_0 + \Delta u) + (W_0 + \Gamma \Delta z_E)] = \Delta \dot{u} + \Gamma \Delta \dot{z}_E \quad (10.52)$$

$$\dot{w}^E = \frac{d}{dt}[w + W_z] = \frac{d}{dt}[w + (W_0 \Delta \theta)] = \dot{w} + W_0 \Delta \dot{\theta} \quad (10.53)$$

Substituindo (10.52) na primeira equação de (10.47) e (10.53) na segunda e na quinta equações de (10.47), obtém-se

$$\begin{cases} \Delta X - mg \Delta \theta = m(\Delta \dot{u} + \Gamma \Delta \dot{z}_E) \\ \Delta Z = m(\dot{w} + W_0 \Delta \dot{\theta} - qu_0^E) \\ \Delta M = I_y \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} = q \\ \Delta \dot{z}_E = (w + W_0 \Delta \theta) - u_0^E \Delta \theta = w + (W_0 - u_0^E) \Delta \theta \end{cases}$$

Mas $u_0^E = u_0 + W_0 \Rightarrow W_0 - u_0^E = -u_0$, pelo que se pode simplificar o sistema:

$$\begin{cases} \Delta X - mg \Delta \theta = m(\Delta \dot{u} + \Gamma \Delta \dot{z}_E) = m[\Delta \dot{u} + \Gamma(w - u_0 \Delta \theta)] \\ \Delta Z = m(\dot{w} + W_0 \Delta \dot{\theta} - qu_0^E) = m(\dot{w} - qu_0) \\ \Delta M = I_y \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} = q \\ \Delta \dot{z}_E = w + (W_0 - u_0^E) \Delta \theta = w - u_0 \Delta \theta \end{cases}$$

Conclui-se que o sistema de equações se pode escrever como

$$\begin{cases} \frac{\Delta X}{m} - \Gamma w - (g - \Gamma u_0) \Delta \theta = \Delta \dot{u} \\ \frac{\Delta Z}{m} + qu_0 = \dot{w} \\ \frac{\Delta M}{I_y} = \dot{q} \\ q = \Delta \dot{\theta} \end{cases} \quad (10.54)$$

Comparando estas equações com (8.12), (8.15), (8.18) e (8.20), constata-se que a única diferença ocorre na primeira equação: o 2º termo é novo e no 3º termo aparece uma parcela adicional. Desenvolvendo ΔX , ΔZ e ΔM e procedendo como no capítulo 8, chega-se a um novo sistema de equações diferenciais em que a única diferença relativamente ao sistema (8.21) é o aparecimento dos termos referidos. Logo, o novo

sistema de equações é

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \left(\frac{X_w}{m} - \Gamma \right) & 0 & (-g + \Gamma u_0) \cos \theta_0 \\ \frac{Z_u}{m - Z_w} & \frac{Z_w}{m - Z_w} & \frac{(m u_0 + Z_q)}{m - Z_w} & -\frac{m g \sin \theta_0}{m - Z_w} \\ \frac{1}{I_y} \left(M_u + \frac{M_w Z_u}{m - Z_w} \right) & \frac{1}{I_y} \left(M_w + \frac{M_u Z_w}{m - Z_w} \right) & \frac{1}{I_y} \left(M_q + \frac{M_w (m u_0 + Z_q)}{m - Z_w} \right) & -\frac{M_w m g \sin \theta_0}{I_y (m - Z_w)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix},$$

em que se omitiu o vector das variáveis de controlo por questão de espaço.

Alterações na dinâmica da aeronave

As contribuições explícitas do vento nos modos longitudinais são apenas as indicadas. No entanto, existem muitas alterações à dinâmica longitudinal devidas ao gradiente de vento que não estão explícitas e que se devem à variação da pressão dinâmica quando a aeronave altera a sua atitude. Por exemplo, se α varia e a cauda desce, a velocidade na cauda diminui, e L_t diminui, donde $|C_{m_\alpha}|$ diminui; ou se $\phi \neq 0$ e a asa direita desce, a sustentação da asa direita diminui e a da asa esquerda aumenta o que provoca um aparecimento de C_{l_ϕ} e C_{n_ϕ} .

Excluindo as contribuições implícitas, a única alteração que se verifica é na matriz do sistema para o movimento longitudinal. A matriz é semelhantes, com as alterações:

$$\begin{aligned} \frac{X_w}{m} &\text{ é substituído por } \left(\frac{X_w}{m} - \Gamma \right) \\ -g &\text{ é substituído por } (-g + \Gamma u_0) \end{aligned}$$

Logo, para os modos longitudinais aproximados apenas o modo fugóide é afectado pelo gradiente de vento, bastando usar os novos termos da matriz na determinação das raízes da equação características ou da frequência natural e do factor de amortecimento.

10.8 Modos longitudinais em atmosferas estratificadas

Numa atmosfera estratificada a densidade varia com a altitude, isto é, $\rho = \rho(z_E)$. Dado que no modo fugóide há variações apreciáveis de z_E , os gradientes de ρ influenciam este modo. Quando o avião desce, a densidade aumenta e há um acréscimo de sustentação, acontecendo o inverso quando o avião sobe. Esta variação da sustentação e das outras forças aerodinâmicas com z_E influencia principalmente as características da fugóide, sendo modo de período curto menos afectado.

10.8.1 Modificação das Equações do Movimento

Numa atmosfera estratificada um estado estacionário tem de ser um voo horizontal (altitude constante). A sustentação, bem como a resistência aerodinâmica e o momento de picada, dependem de ρ e portanto da altitude. Para incluir este efeito nas equações

para pequenas perturbações é necessário incluir a equação para \dot{z}_E nas equações da dinâmica e explicitar a dependência de forças e momentos em z_E .

Das equações para o *flight path*, a equação linearizada para z_E é:

$$\Delta\dot{z}_E = -\Delta u \sin \theta_0 + w \cos \theta_0 - u_0 \Delta \theta \cos \theta_0.$$

Num voo horizontal:

$$\Delta\dot{z}_E = w - u_0 \Delta \theta.$$

Explicitando a dependência das forças e momentos longitudinais com z_E , obtém-se

$$\begin{aligned}\Delta X &= X_u \Delta u + X_w w + X_z z_E + \Delta X_c, \\ \Delta Z &= Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + Z_z z_E + \Delta Z_c, \\ \Delta M &= M_u \Delta u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_z z_E + \Delta Z_c,\end{aligned}$$

onde

$$X_z = \frac{\partial X}{\partial z_E} \Big|_0, \quad Z_z = \frac{\partial Z}{\partial z_E} \Big|_0, \quad M_z = \frac{\partial M}{\partial z_E} \Big|_0.$$

Comecemos por calcular a derivada Z_z . Dado que $Z = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_z$,

$$\frac{\partial Z}{\partial z_E} = \frac{\partial Z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z_E} = \frac{1}{2} V^2 S \left[C_z + \rho \frac{\partial C_z}{\partial \rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial z_E}$$

Admitindo que a densidade varia exponencialmente com a altitude (exacto para atmosfera isotérmica):

$$\rho = \rho_0 e^{\kappa z_E} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial z_E} = \kappa \rho \quad (10.55)$$

Desprezando as variações de C_z com ρ (isto é, supondo que C_L não depende de ρ),

$$\frac{\partial Z}{\partial z_E} = \frac{1}{2} V^2 S C_z \kappa \rho.$$

A derivada é calculada no estado estacionário, donde

$$Z_z = \frac{\partial Z}{\partial z_E} \Big|_0 = \kappa \frac{1}{2} \rho u_0^2 S (C_z)_0 = \kappa Z_0 = -\kappa m g.$$

Procedendo de forma análoga, mostrar -se-ia que

$$\begin{aligned}X_z &= \kappa X_0, \\ M_z &= \kappa M_0.\end{aligned}$$

Mas, no estado estacionário, $X_0 - mg \sin \theta_0 = 0$, pelo que, num voo horizontal, $X_0 = 0 \Rightarrow X_z = 0$. Por outro lado, $M_z = \kappa M_0 = 0$.

As equações longitudinais para pequenas perturbações a um voo horizontal numa atmosfera estratificada são então

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g & 0 \\ \frac{Z_u}{m-Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_w}{m-Z_{\dot{w}}} & \frac{(mu_0+Z_q)}{m-Z_{\dot{w}}} & 0 & \frac{Z_z}{m} \\ Q_u & Q_w & Q_q & 0 & \frac{1}{I_y} \left(\frac{M_{\dot{w}} Z_z}{m-Z_{\dot{w}}} \right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta\theta \\ z_E \end{bmatrix}, \quad (10.56)$$

em que se omitiram os termos de controlo e se usaram as seguintes abreviaturas:
 $Q_u = \frac{1}{I_y} \left(M_u + \frac{M_{\dot{w}} Z_u}{m-Z_{\dot{w}}} \right)$; $Q_w = \frac{1}{I_y} \left(M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m-Z_{\dot{w}}} \right)$; $Q_q = \frac{1}{I_y} \left(M_q + \frac{M_{\dot{w}} (mu_0+Z_q)}{m-Z_{\dot{w}}} \right)$

10.8.2 Estimativa para a variação do período do modo fugóide

Do sistema de equações (10.56) é possível calcular a frequência e factor de amortecimento do modo fugóide usando os métodos habituais. Para que se possa saber em que circunstâncias é importante usar esta correcção convém começar por obter uma estimativa da variação do período. A estimativa mais simples é a baseada na aproximação de Lanchester.

Nas hipóteses da aproximação de Lanchester há conservação de energia e verifica-se (10.25), pelo que $V^2 = u_0^2 + 2gz_E$. A equação (10.26) tem de ser modificada, porque agora a sustentação é

$$L = \frac{1}{2} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) V^2 SC_W. \quad (10.57)$$

Mas, usando (10.55),

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\rho}{\partial z_E} z_E = \kappa z_E.$$

Logo, tendo em conta (10.25), após linearização das equações obtém-se

$$L = W + k z_E + \kappa W z_E. \quad (10.58)$$

Daqui, obtém-se

$$m\ddot{z}_E = W - L = -(k + k')z_E, \quad (10.59)$$

em que $k' = \kappa W$ e $k = \rho g S C_{W_0}$. Esta equação corresponde a um movimento harmónico simples com período $T' = 2\pi\sqrt{m/(k + k')}$. O período T do modo fugóide que se obtém na aproximação de Lanchester é dado pela equação (10.29). Assim, obtemos

$$\frac{T'}{T} = F, \quad \text{com } F = \sqrt{\frac{k}{k + k'}} = \sqrt{\frac{1}{1 + k'/k}}$$

Mas, usando os valores de k e k' ,

$$\frac{k'}{k} = \frac{\kappa W}{C_{W_0} \rho_0 g S} = \frac{\kappa u_0^2}{2g} \Rightarrow F = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa u_0^2}{2g}}}$$

O factor de correcção F depende apenas de κ e u_0 . O período é menor do que para uma atmosfera uniforme e a correcção é mais importante para maiores velocidades.

10.8.3 Exemplos de variação do modo fugóide

Exemplo 1: Cessna 182

Voo horizontal a 5000 ft, com velocidade $u_0 = 67\text{m/s}$.

Determinação de uma estimativa para κ :

$$h_1 = 1200 \text{ m} \quad \rho_1 = 1.0900 \text{ kg/m}^3;$$

$$h = 1500 \text{ m} \quad \rho_0 = 1.0900 \text{ kg/m}^3;$$

$$h_2 = 1800 \text{ m} \quad \rho_2 = 1.0269 \text{ kg/m}^3.$$

Logo, obtém-se

$$\kappa = \frac{\rho_2 - \rho_1}{-(h_2 - h_1)\rho_0} = 9.9392 \times 10^{-5} / \text{m}$$

	T'/T	ζ'/ζ
Aprox. Lanchester	0.98881	—
Cálculo exacto	0.99466	0.98472

Exemplo 2: Boeing 747

Voo horizontal a 40000 ft, com velocidade $u_0 = 265.5\text{m/s}$.

Determinação de uma estimativa para κ :

$$h_1 = 12000 \text{ m} \quad \rho_1 = 0.31194 \text{ kg/m}^3$$

$$h_2 = 12300 \text{ m} \quad \rho_2 = 0.29758 \text{ kg/m}^3;$$

$$\kappa = \frac{\rho_2 - \rho_1}{-(h_2 - h_1)\rho_1} = 1.53448 \times 10^{-4} / \text{m}$$

Estimativa com base na aproximação de Lanchester: $F = T'/T = 0.802756$.

Comparando estes dois exemplos constata-se que para voos a maior altitude e, principalmente, a maior velocidade, a correcção é maior e os efeitos da estratificação da atmosfera são importantes. Quando a velocidade é baixa a estratificação da atmosfera não altera significativamente nem o período nem o factor de amortecimento da fugóide.

Capítulo 11

Estabilidade Dinâmica Lateral

11.1 Modos laterais

A determinação dos modos laterais de uma aeronave faz-se da mesma forma que para os modos longitudinais: em primeiro lugar calculam-se as derivadas dimensio- nais (conhecidas as adimensionais), em seguida calculam-se os elementos da matriz \mathbf{A} (neste caso, a matriz para as equações do movimento lateral) e determinam-se as soluções da equação característica, que são os valores próprios de \mathbf{A} ; finalmente, para cada valor próprio determina-se o respectivo vector próprio (a menos de uma constante multiplicativa).

O sistema de equações que rege a evolução das pequenas perturbações do movimento lateral, na ausência de controlo, pode ser escrito na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, sendo o vector de estado $\mathbf{x} = [v \ p \ r \ \phi]^T$ e a matriz do sistema dada por (8.37). Tal como no caso de modos longitudinais, supõe-se que a solução da equação do movimento é da forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$ e, substituindo na equação, obtém-se $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_0 = 0$. Os valores próprios da matriz, λ , são obtidos pela equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, e \mathbf{x}_0 são os vectores próprios correspondentes. Como exemplo, vamos em seguida determinar os modos laterais de um Cessna 182.

11.1.1 Exemplo: modos laterais de um Cessna 182

Os modos laterais de um Cessna 182 serão determinados para a mesma situação de voo para o qual se calcularam os modos longitudinais: voo horizontal a 5000 ft, com velocidade $u_0 = 67.08\text{m/s}$ ($\text{Ma} = 0.201$).

As características geométricas do Cessna 182 estão resumidas na tabela 10.1. Na tabela 11.1 apresentam-se as derivadas adimensionais da força lateral e do momento de rolamento e de guinada em ordem a β , p e r .

Tabela 11.1: Derivadas adimensionais laterais (por radiano). Fonte: [5]

	C_y	C_l	C_n
β	-0.393	-0.0923	0.0587
\hat{p}	-0.075	-0.484	-0.0278
\hat{r}	0.214	0.0798	-0.0937

As derivadas dimensionais laterais, calculadas no Sistema Internacional, são:

$$\begin{aligned}
 Y_v &= \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{y\beta} = -224.9 \text{ kg s}^{-1} \\
 Y_p &= \frac{1}{4} \rho u_0 S b C_{y_p} = -235.5 \text{ kg m s}^{-1} \\
 Y_r &= \frac{1}{4} \rho u_0 S b C_{y_r} = 671.99 \text{ kg m s}^{-1} \\
 L_v &= \frac{1}{2} \rho u_0 S b C_{l\beta} = -579.67 \text{ kg m s}^{-1} \\
 L_p &= \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{l_p} = -16676.8 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \\
 L_r &= \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{l_r} = 2749.6 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \\
 N_v &= \frac{1}{2} \rho u_0 S b C_{n\beta} = 368.6 \text{ kg m s}^{-1} \\
 N_p &= \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{n_p} = -957.88 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \\
 N_r &= \frac{1}{4} \rho u_0 S b^2 C_{n_r} = -3228.54 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Usando as derivadas acima, determinam-se todos os termos da matriz do sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.1872 & -0.1960 & -67.27 & 9.81 \\ -0.4511 & -12.978 & 2.1398 & 0 \\ 0.13827 & -0.3593 & -1.211 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

calculada em SI. A equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$ conduz a uma equação de 4ª ordem:

$$\lambda^4 + 14.3764\lambda^3 + 28.3543\lambda^2 + 139.089\lambda + 2.45636 = 0.$$

Mais uma vez podemos recorrer aos critérios de estabilidade, e como

$$\begin{aligned}
 E &= 2.45636 > 0, \\
 R &= D(BC - AD) - B^2E = 36843.8 > 0,
 \end{aligned}$$

concluímos que todos os modos vão ser estáveis.

Tabela 11.2: Características de cada modo

Modo	Período (s)	$t_{1/2}$ (s)	$N_{1/2}$
Espiral	—	39.1	—
Rolamento	—	0.053	—
Rolamento holandês	1.967	1.03	0.525

Tabela 11.3: Vectores próprios laterais obtidos para o Cessna 182. representa-se também o ângulo de guinada ψ , que se obtém a partir de (8.34)

	Espiral	Rolamento	Rolamento holandês	
			Módulo	Fase
$\beta = \hat{v}$	1	0.22004	1	0°
\hat{p}	-0.0149	1	0.035	178.2°
\hat{r}	0.12038	0.02785	0.046	-80.5°
ϕ	0.84249	-0.0768	0.0107	76.3°
ψ	-83.049	-0.0262	0.849	99.5°

As raízes da equação característica são os valores próprio de A:

$$\lambda_1 = -0.0177239 \text{ s}^{-1} \quad (\text{modo espiral})$$

$$\lambda_2 = -13.018 \text{ s}^{-1} \quad (\text{modo de rolamento})$$

$$\lambda_{3,4} = -0.670368 \pm 3.19323 \text{ i} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (\text{modo de rolamento holandês})$$

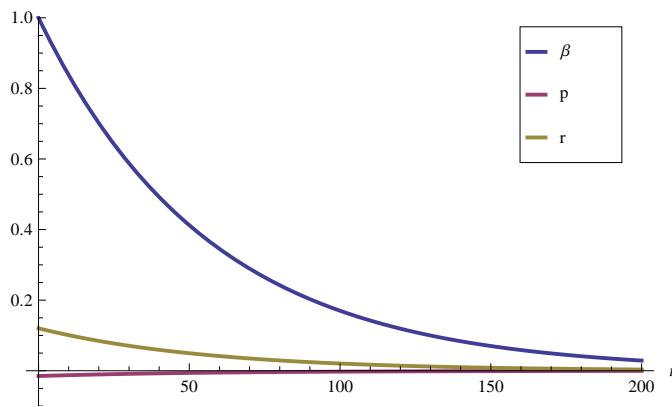
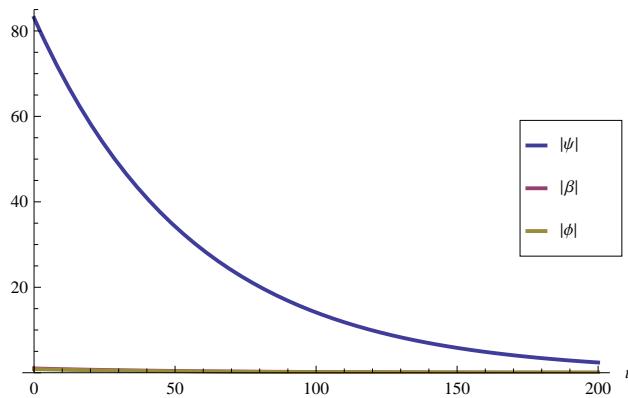
Dois dos valores próprios são reais e negativos, pelo que os modos correspondentes são estáveis. O modo correspondente à raiz mais perto da origem é chamado de modo espiral e o outro modo é chamado de modo de rolamento, por razões que veremos mais à frente. Os outros dois valores próprios constituem um par de raízes complexas conjugadas, e o modo correspondente é oscilante. Como a parte real destas raízes é negativa, este modo, habitualmente chamado de rolamento holandês, é também estável. Na tabela 11.2 apresentam-se as características dos modos laterais do Cessna 182 e na tabela 11.3 apresentam-se os resultados obtidos para os vectores próprios correspondentes, considerando que o valor mais elevado é unitário.

11.1.2 Características típicas de cada modo

A análise das soluções obtidas permite determinar as características típicas dos modos laterais.

Modo espiral

A figura 11.1 representa a variação dos ângulos de guinada, derrapagem e pranchamento no modo espiral do Cessna 182, obtidos a partir da tabela 11.3. Constatata-se facilmente que o ângulo de guinada tem a variação mais importante. O modo espiral é



caracterizado por ter derrapagem «pequena» e ângulo de rolamento «pequeno» comparados com ψ , pelo que é uma viragem com pranchamento (*banked turn*) com raio variável.

As variáveis importantes para a determinação das forças e momentos aerodinâmicos são β , p e r , que estão representadas graficamente para o modo espiral na figura 11.2. Da tabela 11.3 vem $\beta : \hat{p} : \hat{r} = 1 : -0.0149 : 0.120$. Ora, β já tinha módulo «pequeno» (comparado com ψ). Conclui-se portanto que todas as variáveis dinâmicas envolvidas têm módulo pequeno e as forças e momentos por elas criados têm intensidade pequena; daí que o modo seja «fraco», com constantes de tempo grandes. Se for estável, o modo espiral converge lentamente; se for instável, o modo espiral diverge lentamente.

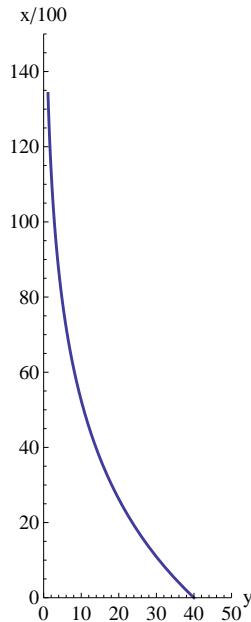


Figura 11.3: Trajectória no modo espiral, no exemplo do Cessna 182 e com ângulo de guinada inicial $\psi_{\text{inicial}} = 20^\circ$.

As equações para a trajectória (*flight path*) relevantes para modos laterais são

$$\Delta \dot{x}_E = \Delta u \cos \theta_0 + w \cos \theta_0 - u_0 \Delta \theta \sin \theta_0, \quad (11.1)$$

$$\Delta \dot{y}_E = u_0 \psi \cos \theta_0 + v. \quad (11.2)$$

Para o modo espiral,

$$\begin{aligned} \psi &= (\psi)_{\text{inicial}} e^{\lambda_s t}, \\ v &= u_0 \beta = u_0 \left(\frac{\beta}{\psi} \right) (\psi)_{\text{inicial}} e^{\lambda_s t}, \end{aligned}$$

e sendo $\Delta u = 0 = w$ e $\theta_0 = 0$, obtém-se $\Delta \dot{x}_E = 0$, donde $x_E = u_0 t$. Por outro lado, recordando que no estado estacionário $y_E = 0$, a integração de (11.2) conduz a

$$y_E = \frac{u_0 \left[1 + \left(\frac{\beta}{\psi} \right) \right] (\psi)_{\text{inicial}}}{\lambda_s} e^{\lambda_s t}.$$

A trajectória no modo espiral do Cessna 182, em que o valor próprio é $\lambda_s = -0.0177239 \text{ s}^{-1}$ e supondo um ângulo de guinada inicial de $\psi_{\text{inicial}} = 20^\circ$, está representada na figura 11.3 para os primeiros 180 s. Neste exemplo este modo é estável, pelo que se observa uma lenta aproximação do avião à trajectória não perturbada, isto é, com $y_E = 0$ (note-se a diferença de escalas nas abcissas e nas ordenadas).

Convergência de rolamento

O modo de rolamento tem um valor próprio real e habitualmente negativo e com valor absoluto grande, sendo a constante de tempo associada, $\tau = -1/\lambda$, pequena. É

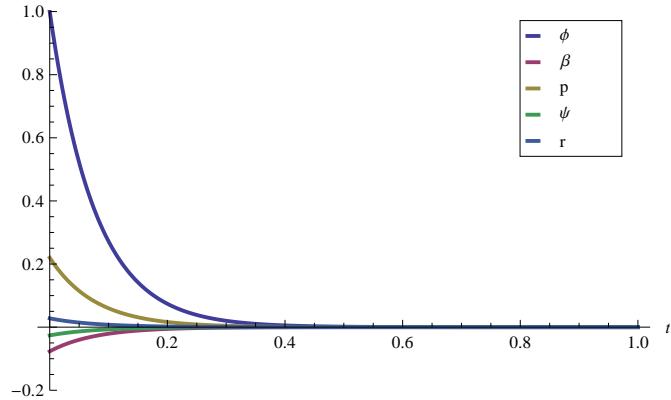


Figura 11.4: Modo de rolamento: representação da evolução temporal das variáveis dinâmicas e dos ângulos de pranchamento e guinada.

por isso um modo estável, com grande atenuação, e é chamado de convergência de rolamento.

A partir da tabela 11.3 determinam-se facilmente as relações entre ângulos (β , ϕ e ψ) e entre variáveis dinâmicas (β, \hat{p} e \hat{r}) e a sua evolução temporal está representada na figura 11.4. Verifica-se que o modo de rolamento é caracterizado aproximadamente por derrapagem «pequena» e um ângulo e velocidade angular de guinada «pequenos». A principal variável dinâmica é a velocidade angular de rolamento, o que justifica o nome dado ao modo.

A componente mais importante para as forças aerodinâmicas é $C_{l_p} \hat{p}$ (e é estabilizadora porque $C_{l_p} < 0$). A contribuição de $C_{l_r} \hat{r}$ é desprezável. Este modo é estável, com constantes de tempo pequenas e muito atenuado.

Modo de rolamento holandês

O terceiro modo que se obteve para o Cessna 182 é uma oscilação lateral e corresponde ao modo conhecido como *dutch roll*.

Na figura 11.5 pode ver-se a evolução temporal das variáveis dinâmicas e dos ângulos de pranchamento e de guinada. Embora neste exemplo β seja a variável predominante, como se pode confirmar na tabela 11.3, habitualmente no modo de rolamento holandês todas as variáveis dinâmicas têm ordem de grandeza semelhante e contribuem para o movimento.

A figura 11.6 representa a trajectória seguida pelo centro de massa do avião no exemplo em estudo para o modo de rolamento holandês. Observa-se que a trajectória seguida é oscilatória, mas centrada em torno de $y_E = 0$. O centro de massa do avião segue uma trajectória aproximadamente rectilínea.

Na figura 11.7 apresenta-se um gráfico paramétrico da variação de ϕ e ψ , a que corresponde o movimento da ponta da asa do avião. Neste exemplo as oscilações em ϕ são muito menores que as oscilações em ψ , mas observa-se que a ponta da asa vai descrevendo uma elipse cada vez mais apertada, com oscilações amortecidas de amplitude cada vez menor.

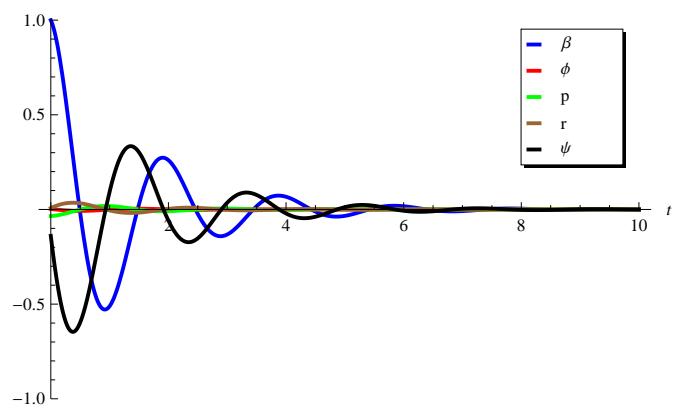


Figura 11.5: Variáveis dinâmicas no modo de rolamento holandês.

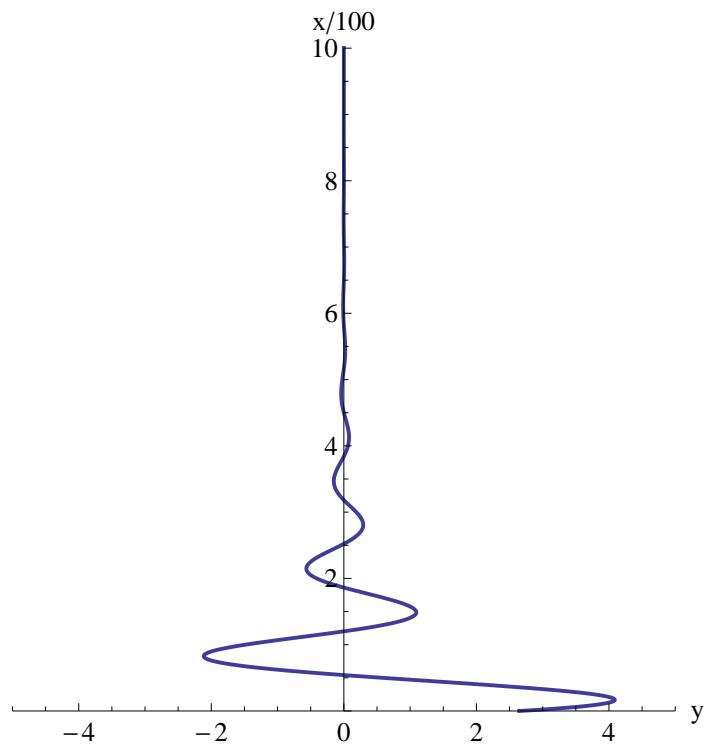


Figura 11.6: Modo *dutch roll*: trajectória

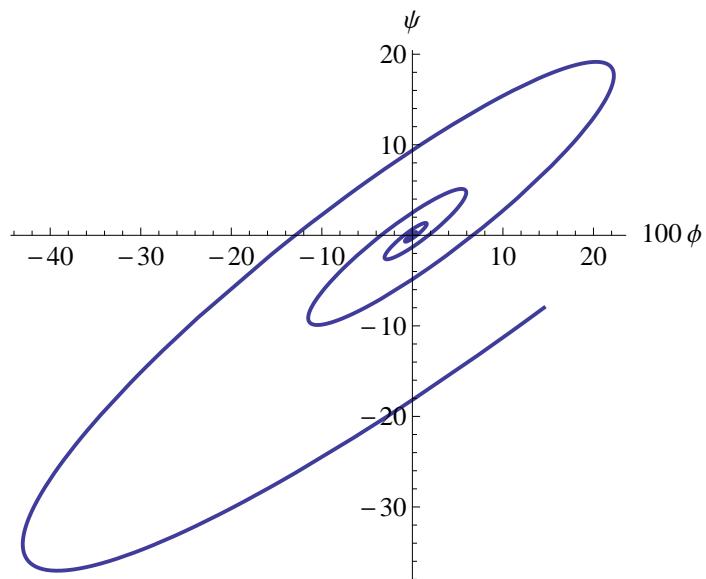


Figura 11.7: Modo *dutch roll*: gráfico paramétrico da variação de ϕ e ψ (movimento da ponta da asa).

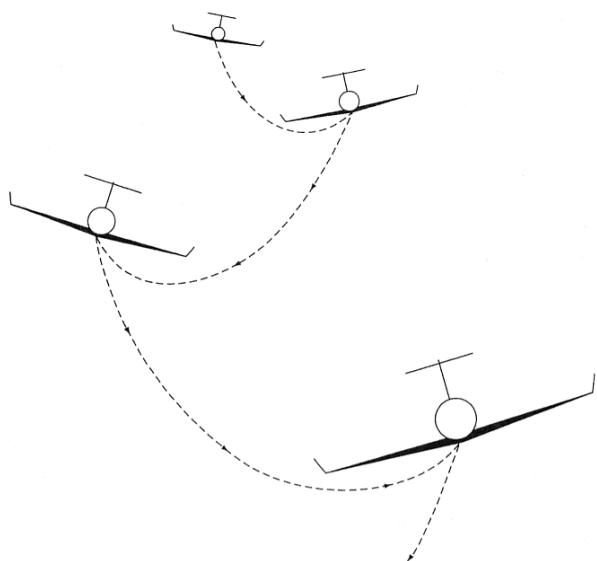


Figura 11.8: Movimento esquemático de um avião no modo de rolamento holandês. (Fonte: [4])

O movimento de um avião no modo de rolamento holandês está esquematizado na figura 11.8.

11.2 Modos laterais aproximados

Como se sabe, a matriz do sistema (para modos laterais) é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \left(\frac{Y_r}{m} - u_0\right) & g \cos \theta_0 \\ \left(\frac{L_v}{I'_x} + I'_{zx}N_v\right) & \left(\frac{L_p}{I'_x} + I'_{zx}N_p\right) & \left(\frac{L_r}{I'_x} + I'_{zx}N_r\right) & 0 \\ \left(I'_{zx}L_v + \frac{N_v}{I'_z}\right) & \left(I'_{zx}L_p + \frac{N_p}{I'_z}\right) & \left(I'_{zx}L_r + \frac{N_r}{I'_z}\right) & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para simplificar a escrita das expressões vamos usar as seguintes abreviaturas:

$$\mathcal{Y}_v = \frac{Y_v}{m}, \quad (11.3)$$

$$\mathcal{Y}_p = \frac{Y_p}{m}, \quad (11.4)$$

$$\mathcal{Y}_r = \frac{Y_r}{m} - u_0, \quad (11.5)$$

$$\mathcal{L}_v = \frac{L_v}{I'_x} + I'_{xz}N_v, \quad (11.6)$$

$$\mathcal{L}_p = \frac{L_p}{I'_x} + I'_{xz}N_p, \quad (11.7)$$

$$\mathcal{L}_r = \frac{L_r}{I'_x} + I'_{xz}N_r, \quad (11.8)$$

$$\mathcal{N}_v = I'_{xz}L_v + \frac{N_v}{I'_z}, \quad (11.9)$$

$$\mathcal{N}_p = I'_{xz}L_p + \frac{N_p}{I'_z}, \quad (11.10)$$

$$\mathcal{N}_r = I'_{xz}L_r + \frac{N_r}{I'_z}. \quad (11.11)$$

A matriz \mathbf{A} pode então escrever-se como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_v & \mathcal{Y}_p & \mathcal{Y}_r & g \cos \theta \\ \mathcal{L}_v & \mathcal{L}_p & \mathcal{L}_r & 0 \\ \mathcal{N}_v & \mathcal{N}_p & \mathcal{N}_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Tendo em conta que se pode normalmente fazer a aproximação $\mathcal{Y}_p \approx 0$,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_v - \lambda & 0 & \mathcal{Y}_r & g \cos \theta \\ \mathcal{L}_v & \mathcal{L}_p - \lambda & \mathcal{L}_r & 0 \\ \mathcal{N}_v & \mathcal{N}_p & \mathcal{N}_r - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta & -\lambda \end{pmatrix},$$

e a equação característica do sistema completo, no caso de modos laterais, é dada por

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0, \quad (11.12)$$

em que os coeficientes do polinómio são definidos por

$$\begin{aligned} B &= -\mathcal{L}_p - \mathcal{N}_r - \mathcal{Y}_v, \\ C &= -\mathcal{L}_r\mathcal{N}_p + \mathcal{L}_p\mathcal{N}_r - \mathcal{N}_v\mathcal{Y}_r + \mathcal{L}_p\mathcal{Y}_v + \mathcal{N}_r\mathcal{Y}_v, \\ D &= -\mathcal{L}_v\mathcal{N}_p\mathcal{Y}_r + \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v\mathcal{Y}_r + \mathcal{L}_r\mathcal{N}_p\mathcal{Y}_v - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_r\mathcal{Y}_v - g\mathcal{L}_v \cos \theta - g\mathcal{N}_v \sin \theta, \\ E &= g(\mathcal{L}_v\mathcal{N}_r \cos \theta - \mathcal{L}_r\mathcal{N}_v \cos \theta - \mathcal{L}_v\mathcal{N}_p \sin \theta + \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v \sin \theta). \end{aligned}$$

Com base nestas expressões pode-se encontrar uma aproximação para o modo espiral.

11.2.1 Aproximação para o modo espiral

No modo espiral a raiz real está perto da origem ($\lambda_s \ll 1$). Por isso, na equação característica podemos desprezar os termos em λ^2 , λ^3 e λ^4 , obtendo

$$D\lambda + E = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_s = -\frac{E}{D}.$$

O coeficiente D pode ser escrito como

$$D = (-\mathcal{L}_v\mathcal{N}_p + \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v)\mathcal{Y}_v + (\mathcal{L}_r\mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_r)\mathcal{Y}_r - g(\mathcal{L}_v \cos \theta + \mathcal{N}_v \sin \theta).$$

Tendo em conta a definição (11.5) e os valores típicos para uma aeronave, $\mathcal{Y}_r = Y_r/m - u_0 \approx -u_0$. Por outro lado, comparando os valores numéricos, $|\mathcal{Y}_v| = |Y_v|/m \ll |\mathcal{Y}_r| \approx u_0$ (usando o exemplo do Cessna 182, $\mathcal{Y}_v = -0.187203/\text{s}$, $\mathcal{Y}_r = -67.2737 \text{ m/s} \approx -u_0 = -67.05 \text{ m/s}$). Logo, o termo $(\mathcal{L}_r\mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_r)\mathcal{Y}_v$ pode ser desprezado na expressão de D , obtendo-se

$$D \approx (\mathcal{L}_v\mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v)u_0 - g(\mathcal{L}_v \cos \theta + \mathcal{N}_v \sin \theta),$$

e obter então a raiz aproximada do modo espiral:

$$\lambda_s = -\frac{g(\mathcal{L}_v\mathcal{N}_r \cos \theta_0 - \mathcal{L}_r\mathcal{N}_v \cos \theta_0 - \mathcal{L}_v\mathcal{N}_p \sin \theta_0 + \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v \sin \theta_0)}{(\mathcal{L}_v\mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v)u_0 - g(\mathcal{L}_v \cos \theta_0 + \mathcal{N}_v \sin \theta_0)}. \quad (11.13)$$

Se o estado estacionário corresponde a um voo horizontal, em que $\theta_0 = 0$, a expressão anterior simplifica-se:

$$\lambda_s = -\frac{g(\mathcal{L}_v\mathcal{N}_r - \mathcal{L}_r\mathcal{N}_v)}{(\mathcal{L}_v\mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v)u_0 - g\mathcal{L}_v}. \quad (11.14)$$

Para aplicar o resultado desta aproximação ao exemplo do Cessna 182, começemos

por usar as definições (8.27)–(8.28) e (11.3)–(11.11), obtendo-se

$$\begin{aligned}
I'_x &= \frac{I_x I_z - I_{zx}^2}{I_z} = 1284.97 \text{ kg m}^2, \\
I'_z &= \frac{I_x I_z - I_{zx}^2}{I_x} = 2666.18 \text{ kg m}^2, \\
I'_{xz} &= \frac{I_{zx}}{I_x I_z - I_{zx}^2} = 0, \\
\mathcal{Y}_v &= \frac{Y_v}{m} = -0.187203 \text{ s}^{-1}, \\
\mathcal{Y}_p &= \frac{Y_p}{m} = -0.196006 \text{ m s}^{-1}, \\
\mathcal{Y}_r &= \frac{Y_r}{m} - u_0 = -67.2737 \text{ m s}^{-1}, \\
\mathcal{L}_v &= \frac{L_v}{I'_x} + I'_{xz} N_v = -0.451115 \text{ m}^{-1} \text{s}^{-1}, \\
\mathcal{L}_p &= \frac{L_p}{I'_x} + I'_{xz} N_p = -12.978 \text{ s}^{-1}, \\
\mathcal{L}_r &= \frac{L_r}{I'_x} + I'_{xz} N_r = 2.1398 \text{ s}^{-1}, \\
\mathcal{N}_v &= I'_{xz} L_v + \frac{N_v}{I'_z} = 0.13827 \text{ m}^{-1} \text{s}^{-1}, \\
\mathcal{N}_p &= I'_{xz} L_p + \frac{N_p}{I'_z} = -0.359271 \text{ s}^{-1}, \\
\mathcal{N}_r &= I'_{xz} L_r + \frac{N_r}{I'_z} = -1.21092 \text{ s}^{-1}.
\end{aligned}$$

A raiz aproximada do modo espiral, que se obtém de (11.14), pode comparar-se com o valor exacto obtido anteriormente:

$$\begin{aligned}
\lambda_S(\text{exacto}) &= -0.0177239 \text{ s}^{-1}, \\
\lambda_S(\text{aprox}) &= -0.0176542 \text{ s}^{-1},
\end{aligned}$$

concluindo-se que, neste caso, esta é uma boa aproximação para o modo espiral. Esta conclusão pode generalizar-se, porque esta aproximação do modo espiral conduz habitualmente a resultados muito próximos do valor exacto obtido por cálculo dos valores próprios da matriz total do sistema.

O modo espiral é com frequência instável. Habitualmente isso não causa dificuldades no voo, porque este é um modo lento e não é difícil ao piloto efectuar as correcções necessárias. No entanto, interessa usar os critérios de estabilidade para determinar condições a verificar caso se pretenda que o modo seja estável. Como se referiu atrás, uma condição necessária para a estabilidade no caso de uma equação característica de 4ª ordem, como (11.12), é $E > 0$:

$$E = g \left[(\mathcal{L}_v \mathcal{N}_r - \mathcal{L}_r \mathcal{N}_v) \cos \theta + (\mathcal{L}_p \mathcal{N}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{N}_p) \sin \theta \right] > 0$$

Substituindo na equação acima as expressões para os termos (11.3) a (11.11) e as expressões para as derivadas de estabilidade obtemos a condição de estabilidade:

$$(C_{l_\beta} C_{n_r} - C_{l_r} C_{n_\beta}) \cos \theta_0 + (C_{l_p} C_{n_\beta} - C_{l_\beta} C_{n_p}) \sin \theta_0 > 0. \quad (11.15)$$

No caso em que o estado estacionário é um voo horizontal, $\theta_0 = 0$ e a condição simplifica-se:

$$C_{l_\beta} C_{n_r} - C_{l_r} C_{n_\beta} > 0. \quad (11.16)$$

11.2.2 Aproximação para o modo de rolamento

Modo de rolamento aproximado

No modo de rolamento a principal variável dinâmica é p . É um movimento quase unidimensional de rolamento em torno de x . Por isso, a aproximação mais simples consiste em considerar $v = 0 = r$. A 2ª equação do sistema é então

$$\dot{p} = \mathcal{L}_p p. \quad (11.17)$$

Logo, o valor próprio para o modo de rolamento nesta aproximação é

$$\lambda_R = \mathcal{L}_p = \frac{L_p}{I_x'} + I_{xy}' N_p. \quad (11.18)$$

Comparando com o valor exato anteriormente obtido para o exemplo do Cessna 182, esta aproximação, apesar de muito simples, dá resultados bastante aproximados:

$$\begin{aligned} \lambda_R(\text{aprox}) &= -12.9783 \text{ s}^{-1}, \\ \lambda_R(\text{exato}) &= -13.018 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

No entanto, noutras situações e para outras aeronaves os resultados não são tão satisfatórios e é necessário recorrer a outras aproximações.

Aproximação para os modos de rolamento e espiral

Nesta aproximação pretende-se encontrar um sistema de 2ª ordem cujas raízes sejam os valores próprios correspondentes aos modos espiral e rolamento.

Admitiremos que o estado estacionário é um voo horizontal, pelo que $\theta_0 = 0$. Para simplificar a primeira equação lateral faremos a hipótese de que a força lateral total é apenas devida à derrapagem ($m\dot{v} = Y_v v$) e que a força lateral devida ao rolamento é desprezável (ou seja, desprezamos Y_p/m). Logo, a componente lateral do peso deve ser anulada pela força lateral produzida pela taxa de guinada r . Admitindo que $Y_r/m \ll u_0$, a equação

$$\dot{v} = \frac{Y_v}{m} v + \frac{Y_p}{m} p + \left(\frac{Y_r}{m} - u_0 \right) r + g \cos \theta_0 \phi$$

reduz-se a

$$-u_0 r + g \phi = 0. \quad (11.19)$$

Logo, o sistema de equações é:

$$\begin{cases} 0 = -u_0 r + g \phi \\ \dot{p} = \mathcal{L}_v v + \mathcal{L}_p p + \mathcal{L}_r r \\ \dot{r} = \mathcal{N}_v v + \mathcal{N}_p p + \mathcal{N}_r r \\ \dot{\phi} = p \end{cases}$$

Na forma matricial, escreve-se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u_0 & g \\ \mathcal{L}_v & \mathcal{L}_p & \mathcal{L}_r & 0 \\ \mathcal{N}_v & \mathcal{N}_p & \mathcal{N}_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (11.20)$$

A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -u_0 & g \\ \mathcal{L}_v & (\mathcal{L}_p - \lambda) & \mathcal{L}_r & 0 \\ \mathcal{N}_v & \mathcal{N}_p & (\mathcal{N}_r - \lambda) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (11.21)$$

que se pode escrever como uma equação de 2^a grau,

$$C_{SR}\lambda^2 + D_{SR}\lambda + E_{SR} = 0, \quad (11.22)$$

sendo os coeficientes de (11.22) dados por

$$C_{SR} = u_0 \mathcal{N}_v, \quad (11.23)$$

$$D_{SR} = u_0 (\mathcal{L}_v \mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p \mathcal{N}_v) - g \mathcal{L}_v, \quad (11.24)$$

$$E_{SR} = g (\mathcal{L}_v \mathcal{N}_r - \mathcal{L}_r \mathcal{N}_v). \quad (11.25)$$

Comparando os resultados exactos para o exemplo do Cessna 182 com os obtidos com este modo «rolamento + espiral» e com as aproximações anteriores, temos, para o modo espiral,

$$\lambda_S(\text{exacto}) = -0.0177239 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_S(\text{aprox. S}) = -0.0176542 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_S(\text{aprox. S+R}) = -0.0181258 \text{ s}^{-1}$$

e para o modo de rolamento,

$$\lambda_R(\text{exacto}) = -13.018 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_R(\text{aprox. R}) = -12.9783 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_R(\text{aprox. S+R}) = -14.6094 \text{ s}^{-1}$$

Ambas as raízes aproximadas têm valores próximos dos exactos. Em geral esta aproximação (S+R) dá resultados aceitáveis para ambos os modos e frequentemente constitui uma melhoria face à aproximação de rolamento mais simples anteriormente apresentada. Neste exemplo esta aproximação não melhora os resultados anteriores.

11.2.3 Modo de rolamento holandês aproximado

Este modo é difícil de aproximar porque todas as variáveis são importantes. No entanto, tendo em conta que no exemplo do Cessna 182 as variáveis com menor amplitude eram \dot{p} e $\dot{\phi}$, podemos simplificar as equações admitindo que um movimento

Tabela 11.4: Valores próprios, período e $N_{1/2}$ exactos e aproximados para o modo de rolamento holandês.

	λ_{DR}	T (s)	$N_{1/2}$ (ciclos)
Valor Exacto	$-0.670368 \pm i3.19323$	1.97	0.525
Aproximação	$-0.699063 \pm i3.00234$	2.09	0.47

de guinada/derrapagem sem rolamento (movimento «plano»), com $p = 0 = \phi$. Além disso, admitimos Y_r desprezável. As equações do movimento são então

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{Y_v}{m}v + \frac{Y_p}{m} \underbrace{p}_{\approx 0} + \underbrace{\left(\frac{Y_r}{m} - u_0\right)r}_{\approx 0} + g \cos \theta_0 \underbrace{\phi}_{\approx 0}, \\ \dot{p} &= \left(\frac{L_v}{I_x'} + I_{zx}'N_v\right)v + \left(\frac{L_p}{I_x'} + I_{zx}'N_p\right)p + \left(\frac{L_r}{I_x'} + I_{zx}'N_r\right)r, \\ \dot{r} &= \left(I_{zx}'L_v + \frac{N_v}{I_z'}\right)v + \left(I_{zx}'L_p + \frac{N_p}{I_z'}\right)p + \left(I_{zx}'L_r + \frac{N_r}{I_z'}\right)r, \\ \dot{\phi} &= p + \tan \theta_0 r.\end{aligned}$$

A segunda equação pode ser ignorada pois, com as aproximações anteriores, a primeira e a terceira equação constituem um sistema fechado:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{Y_v}{m}v - u_0r, \\ \dot{r} = \left(I_{zx}'L_v + \frac{N_v}{I_z'}\right)v + \left(I_{zx}'L_r + \frac{N_r}{I_z'}\right)r. \end{cases}$$

Usando (11.3), (11.9) e (11.11), temos

$$\begin{cases} \dot{v} = \mathcal{Y}_v v - u_0 r, \\ \dot{r} = \mathcal{N}_v v + \mathcal{N}_r r. \end{cases} \quad (11.26)$$

A equação característica do sistema aproximado é

$$\lambda^2 - (\mathcal{Y}_v + \mathcal{N}_r)\lambda + (\mathcal{Y}_v \mathcal{N}_r + u_0 \mathcal{N}_v) = 0. \quad (11.27)$$

A comparação para o exemplo do Cessna 182 dos valores próprios exactos para o modo de rolamento holandês com as raízes de (11.27) encontra-se na tabela 11.4. Constatamos que neste caso esta aproximação é razoável tanto para o período como para o factor de amortecimento. Note-se, no entanto, que esta aproximação nem sempre dá valores aceitáveis para o factor de amortecimento.

Capítulo 12

Resposta à Actuação de Controlo

12.1 Matrizes e vectores de controlo

As equações do movimento para pequenas perturbações têm a mesma forma tanto para perturbações longitudinais como para perturbações laterais:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}.$$

Aqui \mathbf{x} é o vector de estado, \mathbf{A} é a matriz do sistema, \mathbf{B} é a matriz de controlo e \mathbf{c} é o vector de controlo, diferentes para movimento longitudinal e movimento lateral.

O vector de controlo é dado por $\mathbf{c}_{\text{long}} = [\Delta\delta_e \Delta\delta_p]^T$ para o movimento longitudinal e $\mathbf{c}_{\text{lat}} = [\Delta\delta_a \Delta\delta_r]^T$ para o movimento lateral. A matriz de controlo \mathbf{B} não foi ainda determinada para nenhum dos dois casos.

Para encontrar os elementos da matriz \mathbf{B} para um movimento longitudinal parte-se da definição (8.22):

$$\mathbf{B}_{\text{long}} \cdot \mathbf{c}_{\text{long}} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_c}{m} \\ \frac{\Delta Z_c}{m - Z_w} \\ \frac{1}{I_y} \left[\Delta M_c + \frac{M_w \Delta Z_c}{m - Z_w} \right] \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que

$$\begin{cases} \Delta X_C = X_{\delta_e} \Delta\delta_e + X_{\delta_p} \Delta\delta_p, \\ \Delta Z_C = Z_{\delta_e} \Delta\delta_e + Z_{\delta_p} \Delta\delta_p, \\ \Delta M_C = M_{\delta_e} \Delta\delta_e + M_{\delta_p} \Delta\delta_p. \end{cases}$$

Como é habitual, supôs-se que a relação entre as variáveis de controlo e as forças e momentos é linear. Fazendo as substituições necessárias, obtém-se:

$$\mathbf{B}_{\text{long}} \cdot \mathbf{c}_{\text{long}} = \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_e}}{m} & \frac{X_{\delta_p}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{m - Z_w} & \frac{Z_{\delta_p}}{m - Z_w} \\ \frac{M_{\delta_e}}{I_y} + \frac{M_w Z_{\delta_e}}{I_y(m - Z_w)} & \frac{M_{\delta_p}}{I_y} + \frac{M_w Z_{\delta_p}}{I_y(m - Z_w)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_e \\ \Delta\delta_p \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz \mathbf{B} para o movimento longitudinal é

$$\mathbf{B}_{\text{long}} = \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_e}}{m} & \frac{X_{\delta_p}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{m-Z_w} & \frac{Z_{\delta_p}}{m-Z_w} \\ \frac{M_{\delta_e}}{I_y} + \frac{M_w Z_{\delta_e}}{I_y(m-Z_w)} & \frac{M_{\delta_p}}{I_y} + \frac{M_w Z_{\delta_p}}{I_y(m-Z_w)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.1)$$

As derivadas de controlo são obtidas a partir das derivadas adimensionais por:

$$\begin{aligned} X_{\delta_e} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{x_{\delta_e}}, & X_{\delta_p} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{x_{\delta_p}}, \\ Z_{\delta_e} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{z_{\delta_e}}, & Z_{\delta_p} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{z_{\delta_p}}, \\ M_{\delta_e} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \bar{c} C_{m_{\delta_e}}, & M_{\delta_p} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \bar{c} C_{m_{\delta_p}}. \end{aligned}$$

A matriz \mathbf{B} para o movimento lateral obtém-se de forma análoga. Da definição do vector das variáveis de controlo para perturbações laterais (8.32) obtém-se

$$\mathbf{B}_{\text{lat}} \cdot \mathbf{c}_{\text{lat}} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta Y_c}{m} \\ \frac{\Delta L_c}{I'_x} + I'_{zx} \Delta N_c \\ I'_{zx} \Delta L_c + \frac{\Delta N_c}{I'_z} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado:

$$\begin{cases} \Delta Y_c = Y_{\delta_a} \Delta \delta_a + Y_{\delta_r} \Delta \delta_r, \\ \Delta L_c = L_{\delta_a} \Delta \delta_a + L_{\delta_r} \Delta \delta_r, \\ \Delta N_c = N_{\delta_a} \Delta \delta_a + N_{\delta_r} \Delta \delta_r. \end{cases}$$

Fazendo as substituições necessárias, obtém-se:

$$\mathbf{B}_{\text{lat}} \cdot \mathbf{c}_{\text{lat}} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_a}}{m} & \frac{Y_{\delta_r}}{m} \\ \frac{L_{\delta_a}}{I'_x} + I'_{zx} N_{\delta_a} & \frac{L_{\delta_r}}{I'_x} + I'_{zx} N_{\delta_r} \\ I'_{zx} L_{\delta_a} + \frac{N_{\delta_a}}{I'_z} & I'_{zx} L_{\delta_r} + \frac{N_{\delta_r}}{I'_z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz \mathbf{B} para o movimento lateral é

$$\mathbf{B}_{\text{lat}} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_a}}{m} & \frac{Y_{\delta_r}}{m} \\ \frac{L_{\delta_a}}{I'_x} + I'_{zx} N_{\delta_a} & \frac{L_{\delta_r}}{I'_x} + I'_{zx} N_{\delta_r} \\ I'_{zx} L_{\delta_a} + \frac{N_{\delta_a}}{I'_z} & I'_{zx} L_{\delta_r} + \frac{N_{\delta_r}}{I'_z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12.2)$$

sendo as derivadas dimensionais de controlo dadas por

$$Y_\delta = 1/2 \rho u_0^2 S C_{y_\delta}, \quad (12.3)$$

$$L_\delta = 1/2 \rho u_0^2 S b C_{l_\delta}, \quad (12.4)$$

$$N_\delta = 1/2 \rho u_0^2 S b C_{n_\delta}, \quad (12.5)$$

em que δ designa genericamente δ_a ou δ_r .

12.2 Resolução de equações diferenciais ordinárias não homogéneas: método das transformadas de Laplace

12.2.1 Transformadas de Laplace

A Transformada de Laplace $\mathcal{L}x(t)$ de uma função $x(t)$ define-se como

$$\bar{x}(s) \equiv \mathcal{L}x(t) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

A notação $\bar{x}(s)$ é muitas vezes usada em vez de $\mathcal{L}x(t)$. Se $x e^{-st} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, mostra-se facilmente que

$$\mathcal{L}\dot{x}(t) = -x(0) + s\bar{x}(s).$$

A transformada de Laplace inversa é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{st} \bar{x}(s) ds$$

onde γ é um número real maior que a parte real qualquer dos pólos de $\bar{x}(s)$. Habitualmente a transformada de Laplace inversa é calculada não pela definição mas por outros métodos incluindo o método das fracções parciais, a aplicação do teorema da expansão de Heaviside e o uso de tabelas.

Pelo Teorema da expansão de Heaviside afirma-se que, se $\bar{x}(s)$ pode ser escrito como o quociente de dois polinómio na forma

$$\bar{x}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (12.6)$$

em que $D(s)$ é um polinómio de grau n e $N(s)$ é um polinómio de grau inferior a n , e designando por a_r ($r = 1, \dots, n$) as raízes de $D(s)$, de modo que

$$D(s) = (s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n),$$

então a transformada de Laplace inversa de $\bar{x}(s)$ é

$$x(t) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{(s - a_r)N(s)}{D(s)} \right]_{s=a_r} e^{a_r t}. \quad (12.7)$$

12.2.2 Resolução de sistemas de equações diferenciais não homogéneas e funções de transferência

Comecemos por considerar uma equação diferencial ordinária não homogénea

$$\dot{x} = ax(t) + bc(t), \quad (12.8)$$

em que a e b são constantes e $c(t)$ é uma função dada. Se a condição inicial é $x(0) = 0$, a aplicação da transformada de Laplace conduz a

$$s\bar{x}(s) = a\bar{x}(s) + b\bar{c}(s) \Rightarrow \bar{x}(s) = \frac{b}{s-a}\bar{c}(s), \quad (12.9)$$

e a solução obtém-se por inversão da transformada de Laplace.

Analogamente, se a um sistema de equações

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}(t)$$

aplicarmos a transformada de Laplace, obtemos

$$s\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{c}}(s), \quad (12.10)$$

e a transformada de Laplace do vector de estado $\mathbf{x}(t)$ é dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{c}}(s).$$

Logo, obtemos

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \bar{\mathbf{c}}(s), \quad (12.11)$$

em que a matriz $\mathbf{G}(s)$, de elementos $G_{ij}(s)$, é dada por

$$\mathbf{G}(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}. \quad (12.12)$$

As soluções do sistema são obtidas por inversão da transformada de Laplace:

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{\mathbf{x}}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{G}(s) \cdot \bar{\mathbf{c}}(s)]. \quad (12.13)$$

De (12.11) obtém-se a resposta da i -ésima variável de estado:

$$\bar{x}_i(s) = \sum_j G_{ij}(s) \bar{c}_j(s).$$

A resposta a uma «soma» de entradas é a soma das respostas individuais a cada uma das entradas.

Quando dois sistemas estão em série, a entrada do segundo é a resposta do primeiro. Conclui-se portanto que

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= G_1(s)\bar{c}(s), \\ \bar{x}_2 &= G_2(s)\bar{x}_1(s) = G_2(s)G_1(s)\bar{c}(s). \end{aligned}$$

Logo, a função de transferência total é o produto das funções de transferência

$$G(s) = \frac{\bar{x}_2(s)}{\bar{c}(s)} = G_2(s)G_1(s).$$

Pode-se generalizar este resultado para um número arbitrário de sistemas em série.

Matriz das funções de transferência

A matriz das funções de transferência \mathbf{G} é dada por (12.12). Mas

$$(sI - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - \mathbf{A})}{\det(sI - \mathbf{A})}, \quad (12.14)$$

em que $\text{adj}(sI - \mathbf{A})$ é a matriz adjunta de $(sI - \mathbf{A})$, isto é, a transposta da matriz dos cofactores. Sendo $f(s) = \det(\mathbf{A} - sI)$ o polinómio característico do sistema e n a sua dimensão, $\det(sI - \mathbf{A}) = (-1)^n f(s)$. Logo

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{(-1)^n f(s)} \text{adj}(sI - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}. \quad (12.15)$$

Os elementos da matriz das funções de transferência são então dados por

$$G_{ij}(s) = \frac{(-1)^n [\text{adj}(sI - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}]_{ij}}{f(s)} = \frac{N_{ij}(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)}.$$

Aqui, $N_{ij}(s)$ representa um polinómio em s e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios do sistema. Os valores próprios podem ser reais e nesse caso aparece um termo $(s - \lambda_k)$ no polinómio característico (o que leva a sistema de 1ª ordem); ou pares de raízes complexas conjugadas $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$, que conduzem a termos $(s - \lambda_k)(s - \lambda_{k+1}) = (s^2 + a_k s + b_k)$ no polinómio característico (e portanto o sistema é de 2ª ordem). Os elementos da matriz das funções de transferência são produtos de termos de 1ª ordem e de 2ª ordem.

Podemos analisar separadamente a resposta de cada um dos subsistemas. Habitualmente analisam-se respostas a entradas do tipo impulso e escalão ou a resposta em frequência.

12.2.3 Resposta a impulso e a escalão

Resposta a impulso

Se a função $c_j(t)$ é um impulso, pode ser representada por um delta de Dirac:

$$c_j(t) = \delta(t). \quad (12.16)$$

Mas pode mostrar-se que $\tilde{\delta}(s) = 1$. Por isso

$$\tilde{x}_{i,j}(s) = G_{ij}(s) \tilde{c}_j(s) = G_{ij}(s) \tilde{\delta}(s) = G_{ij}(s). \quad (12.17)$$

Designamos por $h(t)$ a resposta a impulso, isto é,

$$h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1} \tilde{x}_{i,j}(s) = \mathcal{L}^{-1} G_{ij}(s).$$

Mas

$$h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1} G_{ij}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C G_{ij}(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (12.18)$$

Se o sistema é estável, os pólos de G_{ij} estão no semi-plano esquerdo e o contorno C do integral pode ser o eixo imaginário ($s = i\omega$), o que justifica a última igualdade.

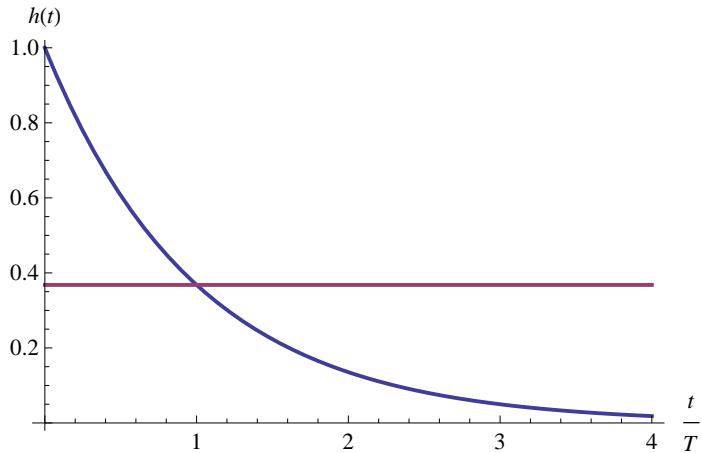


Figura 12.1: Sistemas de 1^a ordem: resposta a impulso.

Para um sistema de 1^a ordem,

$$G(s) = \frac{1}{s - \lambda}.$$

Neste caso, o integral pode calcular-se facilmente,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\omega - \lambda} e^{i\omega t} d\omega = e^{\lambda t}.$$

Se o sistema é estável, λ é negativo e, com $T = -1/\lambda$,

$$h(t) = e^{-t/T}. \quad (12.19)$$

Na figura 12.1 representa-se a função $h(t)$ de (12.19), isto é, a resposta a um impulso unitário de um sistema de 1^a ordem, para $0 < t < 4T$. Está também indicado o valor $1/e$, que se atinge para $t = T$.

Para um sistema de 2^a ordem:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \begin{cases} \frac{1}{(s - n)^2 + \omega^2} & \text{se } \zeta < 1 \\ \frac{1}{(s - n)^2 - \omega^2} & \text{se } \zeta > 1 \end{cases}$$

em que $\omega = \omega_n \sqrt{|1 - \zeta^2|}$ e $n = -\zeta\omega_n$. A resposta a impulso pode também aqui calcular-se facilmente, obtendo-se

$$h(t) = \frac{1}{\omega} e^{nt} \sin(\omega t) \quad \text{se } \zeta < 1, \quad (12.20)$$

$$h(t) = \frac{1}{\omega} e^{nt} \sinh(\omega t) \quad \text{se } \zeta > 1. \quad (12.21)$$

As funções (12.20) e (12.21), que correspondem à resposta a um impulso unitário de um sistema de 2^a ordem, estão representadas na figura 12.2 para factores de amortecimento $\zeta = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 1.2; 2.0$. Para $\zeta < 1$ a resposta é oscilatória, enquanto que para $\zeta > 1$, apesar de um aumento inicial a função tende para 0 sem oscilar.

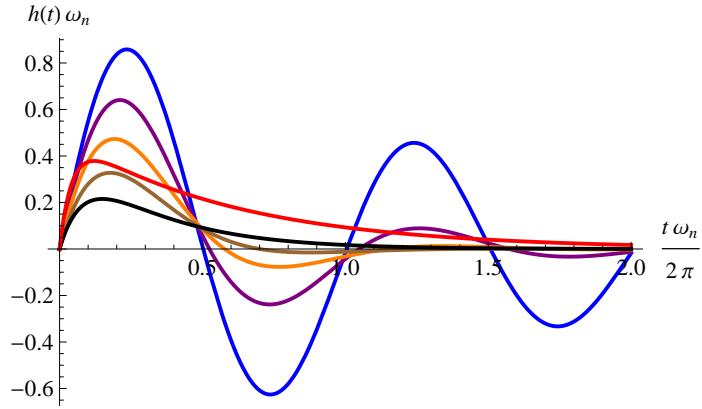


Figura 12.2: Sistemas de 2^a ordem: resposta a impulso (azul: $\zeta = 0.1$; roxo: $\zeta = 0.3$; laranja: $\zeta = 0.5$; castanho: $\zeta = 0.7$; preto: $\zeta = 1.2$; vermelho: $\zeta = 2.0$).

Resposta a escalão

Um escalão corresponde à função de entrada $c_j(t)$ ser uma função de Heaviside,

$$c_j(t) = H(t).$$

Tendo em conta a transformada de Laplace da função de Heaviside, obtemos

$$\bar{c}_j(s) = \bar{H}(s) = 1/s.$$

Designando por $\mathcal{A}_{ij}(t)$ a resposta a escalão,

$$\bar{\mathcal{A}}_{ij}(s) \equiv \bar{\mathcal{A}}_{ij}(s) = G_{ij}(s)\bar{H}(s) = \frac{G_{ij}(s)}{s}.$$

Mas, como $h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}G_{ij}(s)$ tem-se que $\bar{h}_{ij}(s) = G_{ij}(s)$, donde

$$\bar{\mathcal{A}}_{ij}(s) = \frac{\bar{h}_{ij}(s)}{s}.$$

Logo, pelas propriedades da transformada de Laplace

$$\mathcal{A}_{ij}(t) = \int_0^t h_{ij}(\tau) d\tau.$$

Note-se que para $t \leq 0$, se tem $h_{ij}(t) = 0$ e $\mathcal{A}_{ij}(t) = 0$.

Para um sistema de 1^a ordem, usando (12.19) obtém-se

$$\mathcal{A}_{ij}(t) = T \left(1 - e^{-t/T} \right). \quad (12.22)$$

Na figura 12.3 representa-se a função $\mathcal{A}(t)$ de (12.22), que corresponde à resposta de um sistema de 1^a ordem a um escalão unitário.

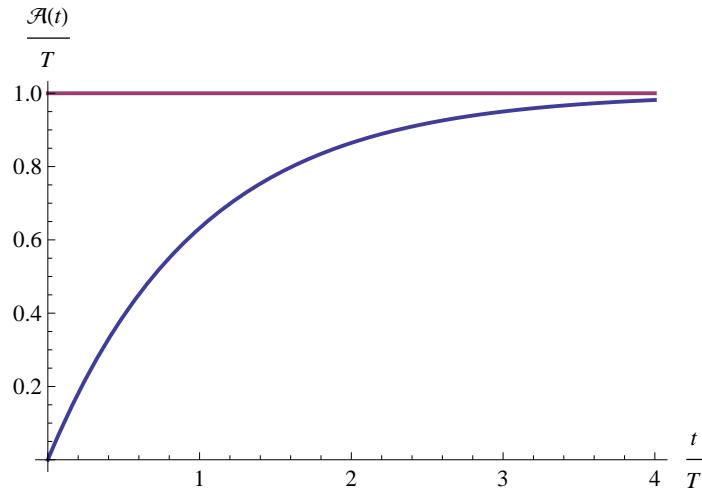


Figura 12.3: Sistemas de 1^a ordem: resposta a escalão

Para um sistema de 2^a ordem, usando (12.20) se $\zeta < 1$ e (12.21) se $\zeta > 1$, obtém-se

$$\mathcal{A}_{ij}(t) = \frac{1}{\omega_n^2} \left[1 - e^{nt} \left(\cos(\omega t) - \frac{n}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right] \quad \text{se } \zeta < 1, \quad (12.23)$$

$$\mathcal{A}_{ij}(t) = \frac{1}{\omega_n^2} \left[1 + \frac{n-\omega}{2\omega} e^{(n+\omega)t} - \frac{n+\omega}{2\omega} e^{(n-\omega)t} \right] \quad \text{se } \zeta > 1. \quad (12.24)$$

As funções (12.23) e (12.24), que correspondem à resposta a um escalão unitário de um sistema de 2^a ordem, estão representadas na figura 12.2 para vários factores de amortecimento. Para $\zeta < 1$ a resposta é oscilatória, enquanto que para $\zeta > 1$, a função tende sem oscilar para o valor limite.

O ganho estático K é o valor assimptótico de \mathcal{A} quando $t \rightarrow \infty$. Pelo teorema do valor final,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{\mathcal{A}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s), \quad (12.25)$$

concluindo-se que

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s). \quad (12.26)$$

Resposta em frequência

Neste caso, a entrada é uma função oscilatória. A representação complexa de uma entrada com frequência ω é

$$c_j(t) = A_j e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{c}_j = \frac{A_j}{s - i\omega}.$$

A resposta da variável x_i será dada por

$$\bar{x}_i(s) = \frac{A_j}{s - i\omega} G_{ij}(s).$$

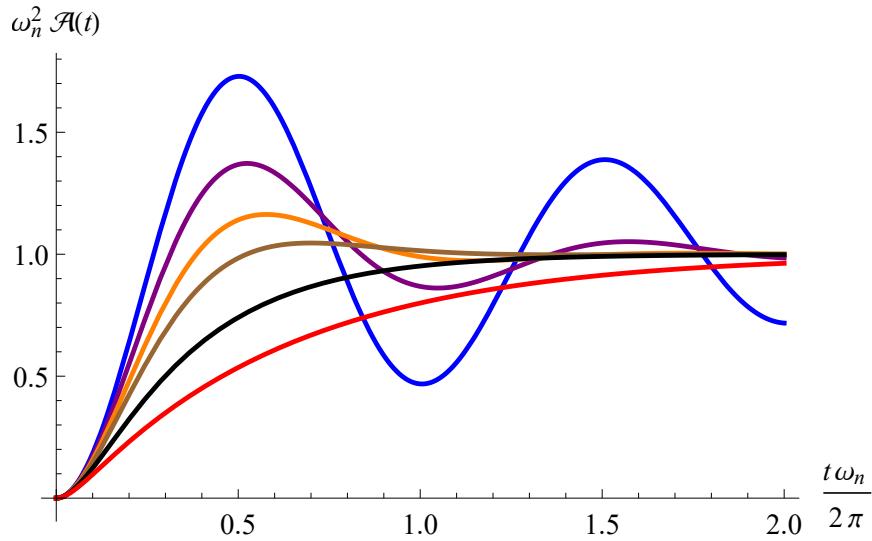


Figura 12.4: Sistemas de 2^a ordem: resposta a escala (azul: $\zeta = 0.1$; roxo: $\zeta = 0.3$; laranja: $\zeta = 0.5$; castanho: $\zeta = 0.7$; preto: $\zeta = 1.2$; vermelho: $\zeta = 2.0$).

Pode mostrar-se que a resposta estacionária (para $t \rightarrow \infty$) é dada por

$$x_i(t) = G_{ij}(i\omega) A_j e^{i\omega t} = G_{ij}(i\omega) c_j(t) = |G_{ij}(i\omega)| e^{i\varphi} c_j(t).$$

Aqui usou-se a forma polar,

$$G_{ij}(i\omega) = |G_{ij}(i\omega)| e^{i\varphi},$$

em que $|G_{ij}(i\omega)|$ é o ganho total e φ é a diferença de fase entre a entrada e a resposta em frequência do sistema.

12.3 Resposta longitudinal

12.3.1 Funções de transferência

Como vimos, a resposta do sistema a uma entrada obtém-se por inversão de (12.11). Para o movimento longitudinal a matriz das funções de transferência (12.12) pode ser representada por

$$\mathbf{G}_{\text{long}}(s) = (sI - \mathbf{A}_{\text{long}})^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\text{long}} = \begin{bmatrix} G_{u\delta_e}(s) & G_{u\delta_p}(s) \\ G_{w\delta_e}(s) & G_{w\delta_p}(s) \\ G_{q\delta_e}(s) & G_{q\delta_p}(s) \\ G_{\theta\delta_e}(s) & G_{\theta\delta_p}(s) \end{bmatrix},$$

e portanto

$$\bar{\mathbf{x}}_{\text{long}}(s) = \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(s) \\ \bar{w}(s) \\ \bar{q}(s) \\ \bar{\theta}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{u\delta_e}(s) & G_{u\delta_p}(s) \\ G_{w\delta_e}(s) & G_{w\delta_p}(s) \\ G_{q\delta_e}(s) & G_{q\delta_p}(s) \\ G_{\theta\delta_e}(s) & G_{\theta\delta_p}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\delta}_e(s) \\ \Delta\bar{\delta}_p(s) \end{bmatrix}.$$

Resposta longitudinal: resposta ao *elevator*

Como já vimos, devido à linearidade do sistema, resposta a uma «soma» de entradas é a soma das respostas individuais a cada uma das entradas. Vamos por isso analisar separadamente a resposta a uma variação da deflexão do leme de profundidade e a uma variação da força de propulsão.

Começando pela resposta do sistema a uma variação da deflexão do leme de profundidade, em que $\Delta\delta_P = 0$ e portanto $\Delta\bar{\delta}_P = 0$,

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(s) \\ \bar{w}(s) \\ \bar{q}(s) \\ \bar{\theta}(s) \end{bmatrix} = G_{\text{long}}(s) \begin{bmatrix} \Delta\bar{\delta}_e(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{u\delta_e}(s) \\ G_{w\delta_e}(s) \\ G_{q\delta_e}(s) \\ G_{\theta\delta_e}(s) \end{bmatrix} \Delta\bar{\delta}_e(s). \quad (12.27)$$

As funções de transferência podem ser representadas genericamente na forma

$$\frac{\Delta\bar{u}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{u\delta_e}(s) = \frac{N_{u\delta_e}(s)}{f(s)},$$

$$\frac{\bar{w}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{w\delta_e}(s) = \frac{N_{w\delta_e}(s)}{f(s)},$$

$$\frac{\bar{q}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{q\delta_e}(s) = \frac{N_{q\delta_e}(s)}{f(s)},$$

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{\theta\delta_e}(s) = \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{f(s)},$$

em que $N_{u\delta_e}(s)$, $N_{w\delta_e}(s)$, $N_{q\delta_e}(s)$ e $N_{\theta\delta_e}(s)$ são polinómios que se obtém em cada caso mediante a equação (12.27).

Resposta à variação na propulsão

A resposta à variação na propulsão *throttle* obtém-se fazendo $\Delta\bar{\delta}_e = 0$:

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(s) \\ \bar{w}(s) \\ \bar{q}(s) \\ \bar{\theta}(s) \end{bmatrix} = (sI - A_{\text{long}})^{-1} B_{\text{long}} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\bar{\delta}_P(s) \end{bmatrix}. \quad (12.28)$$

As funções de transferência obtém-se de forma análoga ao caso anterior.

12.3.2 Resposta longitudinal: exemplo do Cessna 182

Como exemplo, vamos determinar a resposta longitudinal de um Cessna 182 nas condições de voo já referidas em exemplos anteriores: voo horizontal a 5000 ft com velocidade $u_0 = 67\text{m/s}$. As características da aeronave neste voo já foram referidas

Tabela 12.1: Derivadas adimensionais

	C_D	C_L	C_T	C_m
\hat{u}	0	0	-0.096	0
α	0.121	4.41	-	-0.613
\hat{q}	0	3.9	-	-12.4
$\hat{\alpha}$	0	1.7	-	-7.27
δ_e	0	0.43	-	-1.122

anteriormente. Na tabela 12.1 apresentam-se as derivadas adimensionais, incluindo as derivadas de controlo longitudinal.

A partir dos dados fornecidos podemos calcular as derivadas adimensionais segundo os eixos e as respectivas derivadas dimensionais:

$$\begin{aligned} C_{x_{\delta_e}} &= C_{T_{\delta_e}} - C_{D_{\delta_e}} = 0 \Rightarrow X_{\delta_e} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{x_{\delta_e}} = 0, \\ C_{Z_{\delta_e}} &= -C_{L_{\delta_e}} = -0.43, \Rightarrow Z_{\delta_e} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{z_{\delta_e}} = -16510.7 \text{ N/rad} \\ C_{m_{\delta_e}} &= -1.122, \Rightarrow M_{\delta_e} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \bar{c} C_{m_{\delta_e}} = -64342.9 \text{ Nm/rad} \end{aligned}$$

A matriz do sistema é a mesma que foi calculada anteriormente,

$$\mathbf{A}_{\text{long}} = \begin{bmatrix} -0.0457289 & 0.0885998 & 0 & -9.81 \\ -0.289913 & -2.09701 & 65.1123 & 0 \\ 0.0109923 & -0.207702 & -6.80735 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e a matriz de controlo é

$$\mathbf{B}_{\text{long}} = \begin{bmatrix} 0 & 2.943 \\ -13.6184 & 0 \\ -34.7508 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para a determinação dos elementos da matriz de controlo admitimos que

$$\begin{aligned} X_{\delta_p} &= 0.3mg, \\ Z_{\delta_p} &= 0 = M_{\delta_p}. \end{aligned}$$

Note-se que os elementos das matrizes estão calculadas em SI.

A equação característica é

$$\det(sI - \mathbf{A}_{\text{long}}) = 0 \Rightarrow f(s) = s^4 + 8.950s^3 + 28.232s^2 + 1.490s + 0.8168 = 0,$$

cujas raízes, já calculadas anteriormente, são

$$s_{1,2} = -0.0220954 \pm 0.169956i; \quad s_{3,4} = -4.45295 \pm 2.82492i$$

Uma vez que:

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 0.04419s + 0.0293734,$$

$$(s - s_3)(s - s_4) = s^2 + 8.9059s + 27.809,$$

o polinómio característico escreve-se:

$$f(s) = (s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809) \quad (12.29)$$

As funções de transferência relativamente a δ_e são obtidas fazendo $\delta_P = 0$ e resolvendo

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(s) \\ \bar{w}(s) \\ \bar{q}(s) \\ \bar{\theta}(s) \end{bmatrix} = (sI - A_{\text{long}})^{-1} \cdot B_{\text{long}} \quad \begin{bmatrix} \Delta\bar{\delta}_e(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{u\delta_e}(s) \\ G_{w\delta_e}(s) \\ G_{q\delta_e}(s) \\ G_{\theta\delta_e}(s) \end{bmatrix} \cdot \Delta\bar{\delta}_e(s),$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta\bar{u}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} \\ \frac{\bar{w}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} \\ \frac{\bar{q}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} \\ \frac{\bar{\theta}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{u\delta_e}(s) \\ G_{w\delta_e}(s) \\ G_{q\delta_e}(s) \\ G_{\theta\delta_e}(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s + 0.0457289 & -0.0885998 & 0 & 9.81 \\ 0.289913 & s + 2.09701 & -65.1123 & 0 \\ -0.0109923 & 0.207702 & s + 6.80735 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -13.6184 \\ -34.7508 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

obtendo-se

$$\frac{\Delta\bar{u}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{u\delta_e}(s) = \frac{N_{u\delta_e}(s)}{f(s)} = \frac{687.134 + 132.216s - 1.20659s^2}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}, \quad (12.30)$$

$$\frac{\bar{w}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{w\delta_e}(s) = \frac{N_{w\delta_e}(s)}{f(s)} = \frac{-100.301 - 107.71s - 2356.03s^2 - 13.6184s^3}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}, \quad (12.31)$$

$$\frac{\bar{q}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{q\delta_e}(s) = \frac{N_{q\delta_e}(s)}{f(s)} = \frac{s(-4.10893 - 71.6334s - 34.7508s^2)}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}, \quad (12.32)$$

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = G_{\theta\delta_e}(s) = \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{f(s)} = \frac{-4.10893 - 71.6334s - 34.7508s^2}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}. \quad (12.33)$$

Para se obter a função de transferência do ângulo de ataque, note-se que $\alpha = w/u_0$, pelo que

$$G_{\alpha\delta_e}(s) = \frac{\bar{\alpha}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = \frac{1}{u_0} \frac{\bar{w}(s)}{\Delta\bar{\delta}_e(s)} = \frac{1}{u_0} G_{w\delta_e}(s). \quad (12.34)$$

Outras funções de transferência importantes são as do ângulo de subida,

$$\Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha \Rightarrow G_{\gamma\delta_e} = G_{\theta\delta_e} - G_{\alpha\delta_e}, \quad (12.35)$$

e do factor de carga. Este é definido por $n_z = -Z/W$, e a variação do factor de carga para pequenas perturbações é

$$\Delta n_z = -\frac{\Delta Z}{W} = -\frac{1}{W} (Z_u \Delta u + Z_w w + Z_q q + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_{\delta_e} \Delta \delta_e).$$

Logo, a função de transferência para o factor de carga é

$$G_{n\delta_e} = \frac{\Delta \bar{n}_z}{\Delta \bar{\delta}_e} = -\frac{1}{W} (Z_u G_{u\delta_e} + Z_w G_{w\delta_e} + Z_q G_{q\delta_e} + Z_{\dot{w}} G_{\dot{w}\delta_e} + Z_{\delta_e}). \quad (12.36)$$

As funções de transferência relativas a δ_P podem ser calculadas de maneira análoga a partir de (12.28), obtendo-se neste caso

$$\frac{\Delta \bar{u}(s)}{\Delta \bar{\delta}_P(s)} = G_{u\delta_P}(s) = \frac{N_{u\delta_P}(s)}{f(s)} = \frac{81.8126s + 26.2055s^2 + 2.943s^3}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}, \quad (12.37)$$

$$\frac{\bar{w}(s)}{\Delta \bar{\delta}_P(s)} = G_{w\delta_P}(s) = \frac{N_{w\delta_P}(s)}{f(s)} = \frac{-3.70171s - 0.853214s^2}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}, \quad (12.38)$$

$$\frac{\bar{q}(s)}{\Delta \bar{\delta}_P(s)} = G_{q\delta_P}(s) = \frac{N_{q\delta_P}(s)}{f(s)} = \frac{0.245053s + 0.0323505s^2}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}, \quad (12.39)$$

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\Delta \bar{\delta}_P(s)} = G_{\theta\delta_P}(s) = \frac{N_{\theta\delta_P}(s)}{f(s)} = \frac{0.245053 + 0.0323505s}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)}. \quad (12.40)$$

De igual modo, $G_{\alpha\delta_P}(s) = G_{w\delta_P}(s)/u_0$ e $G_{\gamma\delta_P} = G_{\theta\delta_P} - G_{\alpha\delta_P}$.

Resposta a um variação da deflexão do leme de profundidade do tipo escalão

Comecemos por determinar a resposta a uma variação da deflexão do leme de profundidade do tipo escalão, admitindo que δ_e aumenta de 1° , isto é, que $\Delta\delta_e = 1^\circ = 0.01745$ rad.

Dado que $\Delta \bar{u}(s) = G_{u\delta_e} \Delta \bar{\delta}_e(s)$ e que neste caso $\Delta \bar{\delta}_e(s) = \frac{\Delta\delta_e}{s} = \frac{0.01745}{s}$ rad,

$$\Delta \bar{u}(s) = \frac{687.134 + 132.216s - 1.20659s^2}{(s^2 + 0.04419s + 0.0293734)(s^2 + 8.9059s + 27.809)} \frac{0.01745 \text{ rad}}{s} \quad (12.41)$$

Aplicando a transformada inversa a (12.41) obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= 14.6818 + e^{-4.45295t} [-0.001338 \cos(2.82492t) + 0.01744 \sin(2.82492t)] \\ &\quad - e^{-0.0220954t} [14.68 \cos(0.169956t) + 2.234 \sin(0.169956t)], \end{aligned} \quad (12.42)$$

calculado em SI. O primeiro termo oscilatório tem a frequência e amortecimento do modo de período curto, enquanto que o segundo termo oscilatório tem a frequência e amortecimento do modo fugóide.

Do mesmo modo se procede para determinar as outras variáveis em função de t .

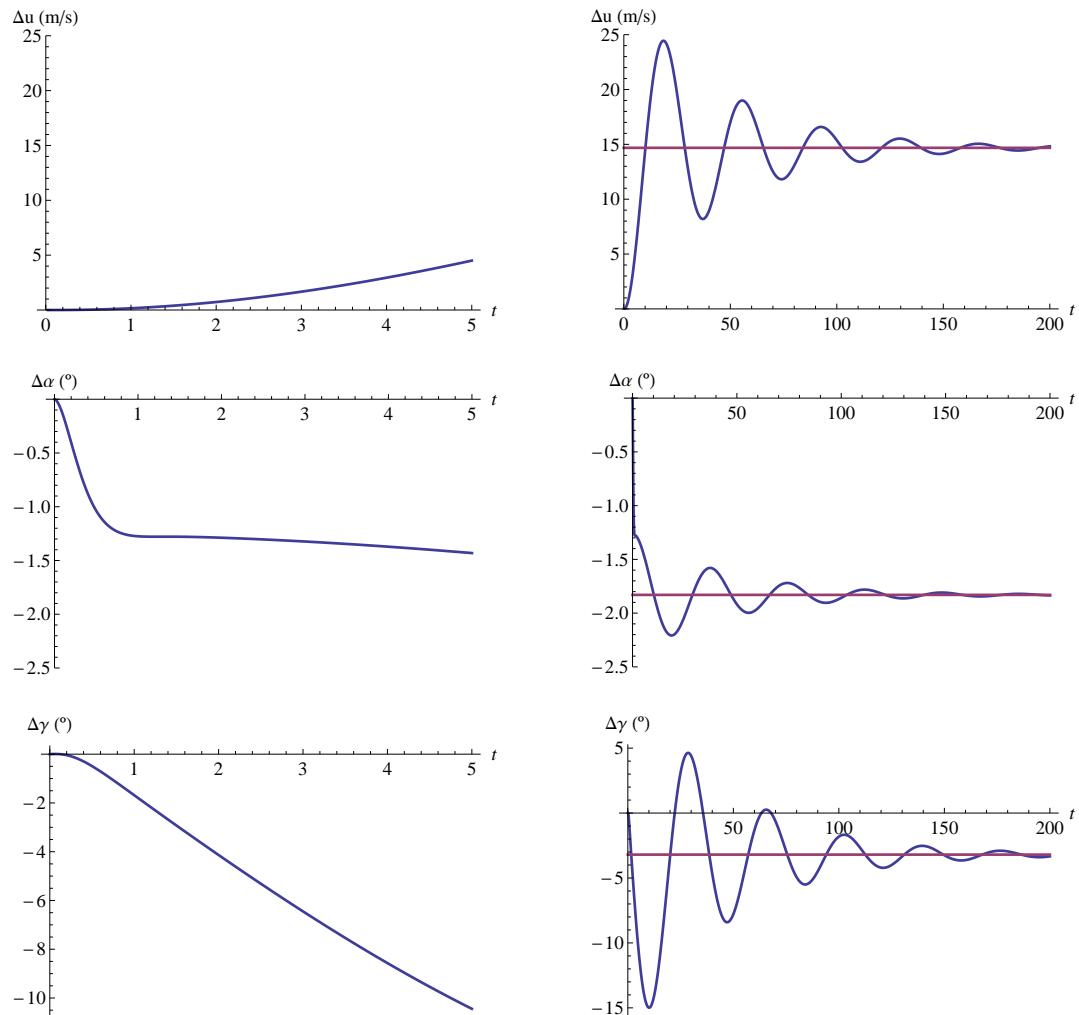


Figura 12.5: Resposta longitudinal a escalão: evolução da velocidade longitudinal, do ângulo de ataque e do ângulo de subida após uma variação da deflexão do leme de profundidade de $\Delta\delta_e = 1^\circ$ para os primeiros 5 s (esquerda) e para os primeiros 200 s (direita).

Na figura 12.5 está representada a evolução da velocidade longitudinal, do ângulo de ataque e do ângulo de subida após uma variação da deflexão do leme de profundidade de $\Delta\delta_e = 1^\circ$. Está representada a evolução inicial, para os primeiros 5 s, e a evolução para os primeiros 200 s. Na evolução inicial verifica-se que só α varia significativamente, sendo as oscilações amortecidas rapidamente. Constatase portanto que o movimento inicial é dominado pelo modo de período curto. Após os primeiros segundos subsistem oscilações de u (e de α , com menos amplitude). Estas oscilações são pouco amortecidas: o movimento é dominado pelo modo fugóide.

O novo estado estacionário atinge-se após um tempo suficientemente grande para todas as oscilações serem amortecidas. Relativamente ao estado estacionário inicial, as variações da velocidade longitudinal, do ângulo de ataque e do ângulo de subida são

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta u &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_{u\delta_e}(s) \Delta\delta_e(s) = 14.68 \text{m/s} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta\alpha &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_{\alpha\delta_e}(s) \Delta\delta_e(s) = -1.83^\circ \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta\gamma &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_{\gamma\delta_e}(s) \Delta\delta_e(s) = -3.20^\circ\end{aligned}$$

A variação da deflexão do leme de profundidade resulta, neste exemplo, em variações significativa de u , de α e do ângulo de subida. A variação tanto da velocidade longitudinal como do ângulo de ataque são típicos, mas a variação do ângulo de subida pode ser mais ou menos acentuada, dependendo da aeronave e da situação de voo.

Resposta à actuação do *throttle*

Para determinar a resposta a uma variação da força de propulsão procede-se de forma análoga, usando agora as funções de transferência (12.37)-(12.40). Na figura 12.6 representa-se a evolução da velocidade longitudinal, do ângulo de ataque e do ângulo de subida após uma variação da força de propulsão correspondente a $\Delta\delta_P = 1/6$ (incremento na força de propulsão de $0.05W$). Observam-se oscilações de u com valor médio nulo, com a frequência do modo fugóide e pouco amortecidas, sendo α aproximadamente constante. O ângulo de subida γ oscila e tende para valor estacionário $\gamma = 2.86^\circ$. Verifica-se, pois, que o principal efeito da variação da força de propulsão é a alteração do ângulo de subida.

Resposta em frequência

Na figura 12.7 apresenta-se a resposta em frequência para os modos longitudinais do Cessna 182. A resposta nas variáveis Δu e γ , que definem a trajectória da aeronave, são dominadas pelo pico nas baixas frequências devido ao modo fugóide — recorde-se que as frequências naturais para este exemplo do Cessna 182 são $\omega_n = 0.17 \text{ rad/s}$ para o modo fugóide e $\omega_n = 5.27 \text{ rad/s}$. Devido ao fraco amortecimento deste modo o pico é bem marcado. Pelo contrário, o pico correspondente ao modo de período curto é pouco pronunciado, quase imperceptível, nas respostas de Δu e γ . Para frequências maiores o ganho decresce rapidamente e a resposta torna-se desprezável. A fase $\varphi_{u\delta_e}$ é aproximadamente nula para baixas frequências, decresce rapidamente de cerca de 180° perto da frequência natural do modo fugóide (o que é típico para um modo pouco amortecido, cuja raiz tem parte real negativa mas pequena) e volta a decrescer, embora menos, perto da frequência natural do modo de período curto (o que também é típico

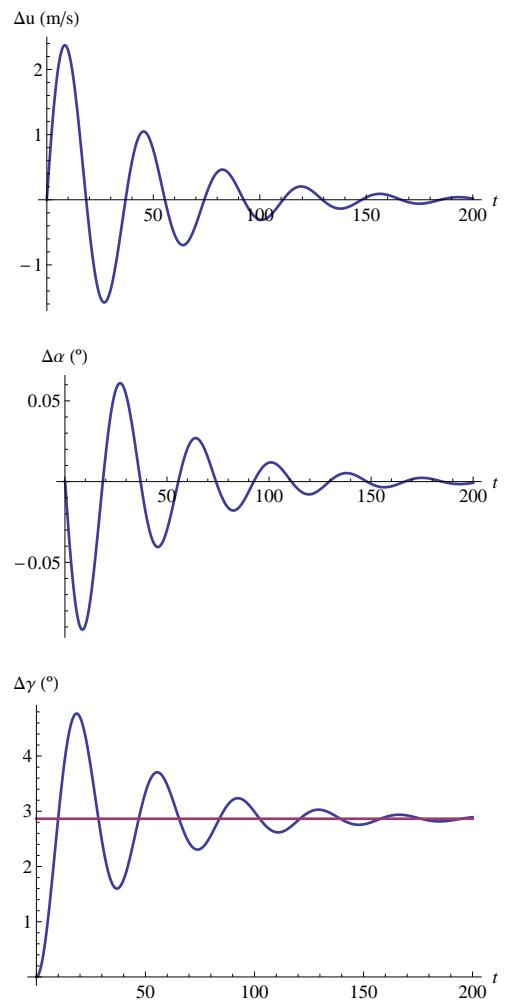


Figura 12.6: Evolução do velocidade longitudinal, do ângulo de ataque e do ângulo de subida após uma variação tipo escalão da força de propulsão.

para modos muito amortecidos, cuja raiz está longe do eixo real). A fase $\varphi_{\gamma\delta_e}$ tem um comportamento semelhante embora para frequências baixas tome valores perto de -150° .

As respostas das variáveis w e q , relacionadas com a atitude do avião, tomam valores grandes quer para frequências próximas da frequência natural do modo fugóide, quer para frequências maiores, próximas da frequência natural do modo de período curto. O comportamento de $|G_{w\delta_e}|$ para ω entre 0.1 e 0.3 ilustra a situação em que a função de transferência tem um polo e um zero próximos. A variação da fase, com uma diminuição abrupta seguida de um crescimento igualmente rápido, é igualmente típico dessa situação. Para frequências acima da frequência natural do modo de período curto o ganho diminui rapidamente também neste caso.

12.3.3 Resposta longitudinal: modos aproximados

Pretende-se, para cada um dos modos aproximados (fugóide e de período curto), resolver as equações do movimento (com controlo) pelo método das transformadas de Laplace e determinar as funções de transferência. Começamos pela aproximação ao modo de período curto, que permite determinar a resposta inicial aproximada à deflexão do leme de profundidade.

Modo de período curto aproximado

O sistema de equações para o modo aproximado de período curto (incluindo termos de controlo) é (10.42):

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_w}{m} & u_0 \\ \frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right] & \frac{1}{I_y} \left[M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta Z_c \\ \Delta M_c + M_{\dot{w}} \frac{\Delta Z_c}{m} \end{bmatrix}.$$

Considerando apenas a variação da deflexão do leme de profundidade, e aplicando a transformada de Laplace, obtemos, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} s \Delta \bar{w} \\ s \Delta \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_w}{m} & u_0 \\ \frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right] & \frac{1}{I_y} \left[M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{w} \\ \Delta \bar{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Z_{\delta_e}}{m} \\ \frac{M_{\delta_e}}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}}}{I_y} \frac{Z_{\delta_e}}{m} \end{bmatrix} \Delta \bar{\delta}_e,$$

ou, deixando no 2º membro apenas a parte de controlo,

$$\begin{bmatrix} s - \frac{Z_w}{m} & -u_0 \\ -\frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right] & s - \frac{1}{I_y} \left[M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{w} \\ \Delta \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{\delta_e}}{m} \\ \frac{M_{\delta_e}}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}}}{I_y} \frac{Z_{\delta_e}}{m} \end{bmatrix} \Delta \bar{\delta}_e. \quad (12.43)$$

Tendo em conta que

$$\begin{bmatrix} s - \frac{Z_w}{m} & -u_0 \\ -\frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right] & s - \frac{1}{I_y} \left[M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right] \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{f(s)} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{I_y} \left[M_q + M_{\dot{w}} u_0 \right] & u_0 \\ \frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m} \right] & s - \frac{Z_w}{m} \end{bmatrix}, \quad (12.44)$$

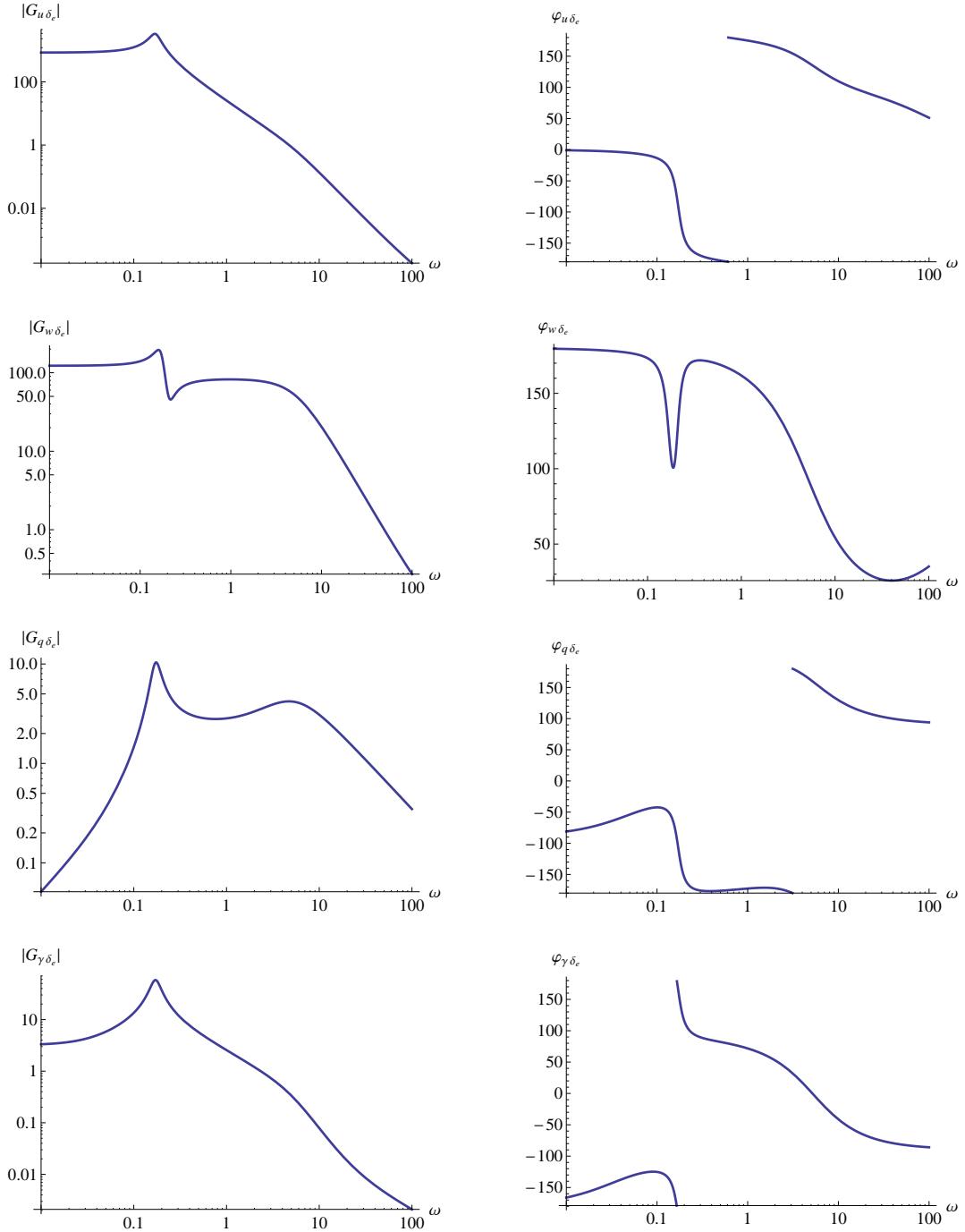


Figura 12.7: Resposta longitudinal em frequência: ganho total $|G(i\omega)|$ (esquerda) e fase φ (direita) da velocidade longitudinal, da velocidade w segundo z , da velocidade angular q e do ângulo de subida γ em função da frequência angular ω .

em que

$$f(s) = s^2 - \left[\frac{Z_w}{m} + \frac{1}{I_y} (M_q + M_{\dot{w}} u_0) \right] s + \frac{1}{I_y} \left(\frac{Z_w}{m} M_q - u_0 M_w \right) \quad (12.45)$$

é o polinómio característico do modo de período curto, obtemos

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{w} \\ \Delta \bar{q} \end{bmatrix} = \frac{1}{f(s)} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{I_y} [M_q + M_{\dot{w}} u_0] & u_0 \\ \frac{1}{I_y} [M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{m}] & s - \frac{Z_w}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Z_{\delta_e}}{m} \\ \frac{M_{\delta_e}}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}}{m} \end{bmatrix} \Delta \bar{\delta}_e = \frac{1}{f(s)} \begin{bmatrix} s \frac{Z_{\delta_e}}{m} + \left(u_0 \frac{M_{\delta_e}}{I_y} - \frac{Z_{\delta_e} M_q}{m} \right) \\ s \left(\frac{M_{\delta_e}}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}}{m} \right) + \left(\frac{Z_{\delta_e} M_w}{m} - \frac{Z_w M_{\delta_e}}{I_y} \right) \end{bmatrix} \Delta \bar{\delta}_e. \quad (12.46)$$

As funções de transferência para o modo aproximado são então:

$$\frac{\bar{w}(s)}{\Delta \bar{\delta}_e(s)} = G_{w\delta_e} = \frac{s \frac{Z_{\delta_e}}{m} + \left(u_0 \frac{M_{\delta_e}}{I_y} - \frac{Z_{\delta_e} M_q}{m} \right)}{f(s)}, \quad (12.47)$$

e

$$\frac{\Delta \bar{q}(s)}{\Delta \bar{\delta}_e(s)} = G_{q\delta_e} = \frac{s \left(\frac{M_{\delta_e}}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}}{m} \right) + \left(\frac{Z_{\delta_e} M_w}{m} - \frac{Z_w M_{\delta_e}}{I_y} \right)}{f(s)}. \quad (12.48)$$

Recorde-se que, para pequenas perturbações, $\alpha \approx w/u_0$. Por outro lado, $q = \dot{\theta}$, pelo que $\bar{q} = s\bar{\theta}$. As funções de transferência para o ângulo de ataque e para o ângulo de picada obtém-se então pelas expressões

$$\begin{aligned} G_{\alpha\delta_e} &= \frac{G_{w\delta_e}}{u_0}, \\ G_{\theta\delta_e} &= \frac{G_{q\delta_e}}{s}. \end{aligned}$$

Modo fugóide

Para o modo fugóide aproximado é possível proceder de forma semelhante. No entanto, as funções de transferência obtidas conduzem a resultados pouco condizentes com a realidade. Habitualmente, é preferível usar o sistema completo para obter tanto as funções de transferência ou como a resposta da aeronave fora dos primeiros segundos. Porém, nalgumas situações pode ser útil ter funções de transferência apenas para o modo fugóide, sendo então necessário realizarem-se aproximações mais elaboradas do que se usou até aqui. Uma dessas aproximações está descrita no Apêndice B. As funções de transferência estão descritas pelas equações (B.8) a (B.19).

12.4 Resposta lateral

As funções de transferência para o movimento lateral obtêm-se da mesma forma que para o movimento longitudinal, resolvendo a equação das transformadas de Laplace:

$$(sI - A) \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{p}(s) \\ \bar{r}(s) \\ \bar{\phi}(s) \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} \bar{\delta}_a(s) \\ \bar{\delta}_r(s) \end{bmatrix}.$$

A matriz das funções da transferência é

$$G(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} G_{v\delta_a}(s) & G_{v\delta_r}(s) \\ G_{p\delta_a}(s) & G_{p\delta_r}(s) \\ G_{r\delta_a}(s) & G_{r\delta_r}(s) \\ G_{\phi\delta_a}(s) & G_{\phi\delta_r}(s) \end{bmatrix}, \quad (12.49)$$

e portanto

$$\bar{x}(s) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{v}(s) \\ \bar{p}(s) \\ \bar{r}(s) \\ \bar{\phi}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{v\delta_a}(s) & G_{v\delta_r}(s) \\ G_{p\delta_a}(s) & G_{p\delta_r}(s) \\ G_{r\delta_a}(s) & G_{r\delta_r}(s) \\ G_{\phi\delta_a}(s) & G_{\phi\delta_r}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\delta}_a(s) \\ \Delta \bar{\delta}_r(s) \end{bmatrix}.$$

A matriz de controlo para o movimento lateral é dada por (12.2).

As funções de transferência podem escrever-se na forma genérica

$$\begin{aligned} G_{v\delta_a} &= \frac{N_{v\delta_a}(s)}{f(s)} & G_{r\delta_a} &= \frac{N_{r\delta_a}(s)}{f(s)} \\ G_{v\delta_r} &= \frac{N_{v\delta_r}(s)}{f(s)} & G_{r\delta_r} &= \frac{N_{r\delta_r}(s)}{f(s)} \\ G_{p\delta_a} &= \frac{N_{p\delta_a}(s)}{f(s)} & G_{\phi\delta_a} &= \frac{N_{\phi\delta_a}(s)}{f(s)} \\ G_{p\delta_r} &= \frac{N_{p\delta_r}(s)}{f(s)} & G_{\phi\delta_r} &= \frac{N_{\phi\delta_r}(s)}{f(s)} \end{aligned}$$

em que no numerador está um polinómio em s e em denominador se encontra o polinómio característico do sistema (lateral), $f(s)$.

12.4.1 Exemplo do Cessna 182

Na tabela 12.2 encontram-se as derivadas adimensionais relativas às variáveis de controlo lateral do Cessna 182 na situação de voo descrita anteriormente. O polinómio característico é dado neste caso por

$$f(s) = s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636 \quad (12.50)$$

Tabela 12.2: Derivadas adimensionais relativas às variáveis de controlo lateral do Ces-sna 182 (em rad⁻¹)

	C_y	C_l	C_n
δ_a	0	0.229	-0.0216
δ_r	0.187	0.0147	-0.0645

A partir de (12.49) podemos determinar os numeradores das funções de transferência, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 N_{v\delta_a} &= 820.301 + 5515.15s + 214.91s^2, \\
 N_{v\delta_r} &= -156.702 + 9164.55s + 769.54s^2 + 5.97581s^3, \\
 N_{p\delta_a} &= s(610.505 + 97.675s + 75.0855s^2), \\
 N_{p\delta_r} &= s(-268.978 - 17.7672s + 4.8199s^2), \\
 N_{r\delta_a} &= 86.7425 - 15.0761s - 71.9142s^2 - 3.41333s^3, \\
 N_{r\delta_r} &= -38.5688 - 12.6251s - 135.096s^2 - 10.1926s^3, \\
 N_{\phi\delta_a} &= 610.505 + 97.675s + 75.0855s^2, \\
 N_{\phi\delta_r} &= -268.978 - 17.7672s + 4.8199s^2.
 \end{aligned}$$

Resposta a uma deflexão tipo escalão dos ailerons

Neste caso $\bar{\delta}_a(s) = \frac{\delta_a}{s}$. Pelo teorema do valor final,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{i\delta_a} \bar{\delta}_a(s) = G_{i\delta_a} \delta_a. \quad (12.51)$$

Daqui podemos determinar os valores estacionários para que tendem as variáveis dinâmicas laterais após a deflexão dos ailerons de $\delta_a = 1^\circ$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{820.301 + 5515.15s + 214.91s^2}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = 5.83 \text{m/s} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(610.505 + 97.675s + 75.0855s^2)}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = 0 \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{86.7425 - 15.0761s - 71.9142s^2 - 3.41333s^3}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = 0.616 \text{rad/s} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{610.505 + 97.675s + 75.0855s^2}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = 4.34 \text{rad}
 \end{aligned}$$

Na figura 12.8 encontra-se a resposta do ângulo de derrapagem, das velocidades angulares de rolamento e guinada e do ângulo de pranchamento à aplicação de ailerons ($\delta_a = 1^\circ$) nos segundos iniciais (gráficos da esquerda) e a evolução posterior, nos primeiros 200 s (gráficos da direita). Nos segundos iniciais as variáveis de estado oscilam com um período perto de 2 s, que corresponde ao período do modo de

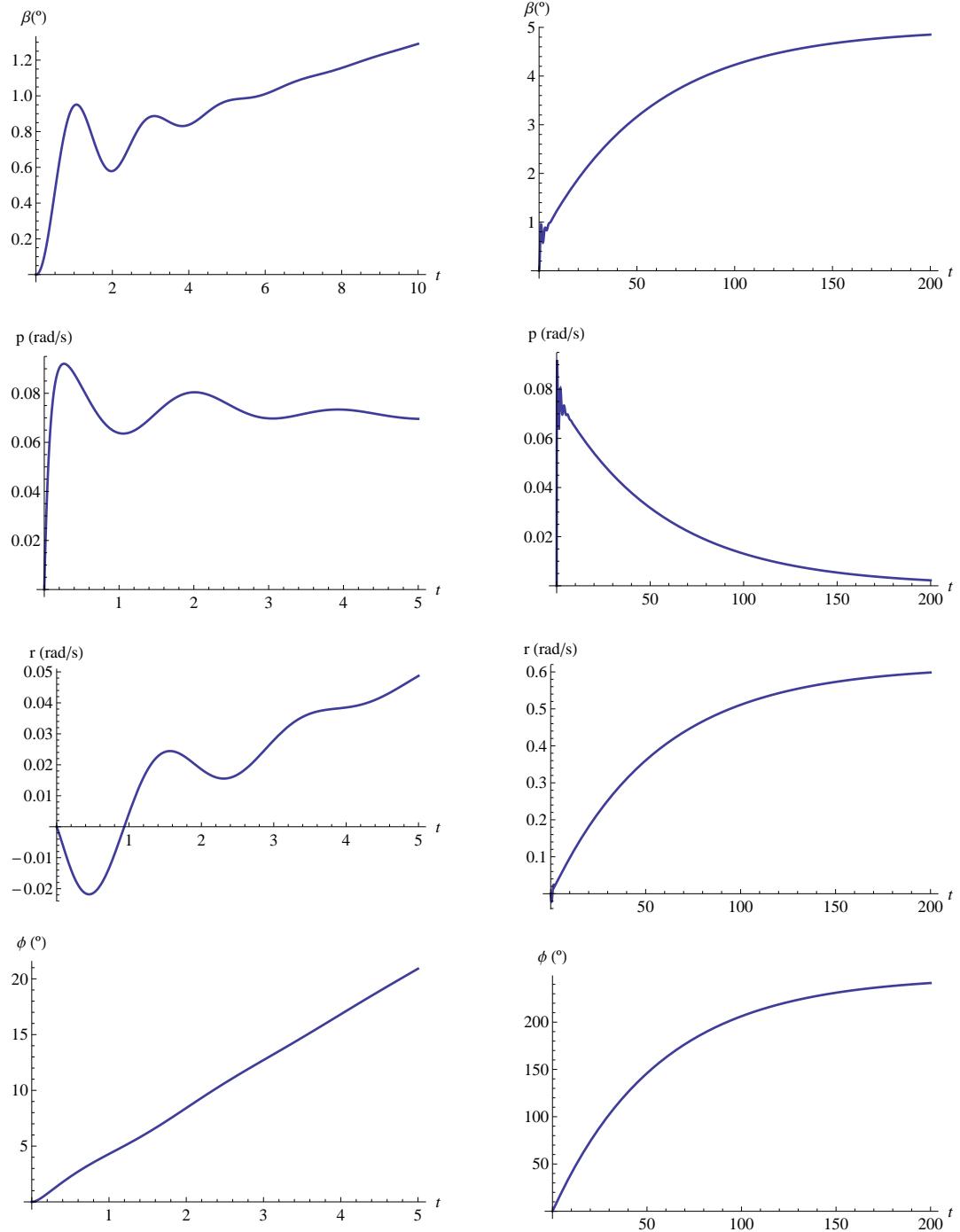


Figura 12.8: Resposta à aplicação de ailerons ($\delta_a = 1^\circ$) nos primeiros segundos (esquerda) e evolução posterior, nos primeiros 200 s (direita). Estão representadas as evoluções do ângulo de derrapagem, das velocidades angulares de rolamento e guinada e do ângulo de pranchamento.

rolamento holandês. Após os primeiros segundos as oscilações são amortecidas e a resposta passa a ser dominada pelo modo espiral. A velocidade angular de rolamento tende para zero e as outras variáveis tendem para valores fixos seguindo uma evolução aproximadamente exponencial.

Resposta a uma deflexão tipo escalão do *rudder*

Daqui podemos determinar os valores estacionários para que tendem as variáveis dinâmicas laterais após a deflexão dos ailerons de $\delta_a = 1^\circ$:

Dado que $\bar{\delta}_r(s) = \frac{\delta_r}{s}$, e que pelo teorema do valor final,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{i\delta_r} \bar{\delta}_r(s) = G_{i\delta_r} \delta_r, \quad (12.52)$$

os valores dos estados estacionários para que tendem as variáveis de estado após deflexão do *rudder* de $\delta_r = 1^\circ$ são

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{156.702 + 9164.55s + 769.54s^2 + 5.97581s^3}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = -1.11 \text{ m/s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(268.978 - 17.7672s + 4.8199s^2)}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{38.5688 - 12.6251s - 135.096s^2 - 10.1926s^3}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = -0.274 \text{ rad/s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{268.978 - 17.7672s + 4.8199s^2}{s^4 + 14.3764s^3 + 28.3543s^2 + 139.089s + 2.45636} \delta_a = -1.91 \text{ rad}$$

Na figura 12.9 encontra-se a resposta do ângulo de derrapagem, das velocidades angulares de rolamento e guinada e do ângulo de pranchamento à aplicação do *rudder* ($\delta_r = 1^\circ$) nos segundos iniciais (gráficos da esquerda) e a evolução posterior, nos primeiros 200 s (gráficos da direita). Também neste caso nos segundos iniciais a resposta é oscilatória com um período de cerca de 2 s, ou seja, o período do modo de rolamento holandês. A evolução posterior das variáveis de estado segue uma variação aproximadamente exponencial negativa; p tende para zero e as outras variáveis tendem para valores fixos.

Analizando os estados estacionários que se obtém após aplicação de um escalão quer nos *ailerons* quer no leme de direcção, podemos concluir que em ambos os casos $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$ e que β , r e ϕ tendem para valores finitos. Para valores «normais» de δ , esses limites são elevados e por isso a teoria linear só é válida para δ muito reduzidos. Além disso, para valores elevados de ϕ há acoplamento entre movimento lateral e longitudinal. Por estas razões a resposta para t grande não pode ser tratada convenientemente pela teoria linear.

12.4.2 Funções de transferência para os modos laterais aproximados

Vamos obter as funções de transferência para os modos aproximados espiral + rolamento e rolamento holandês. Trata-se em ambos os casos de resolver

$$(sI - \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_a(s) \\ \bar{\delta}_r(s) \end{bmatrix}$$

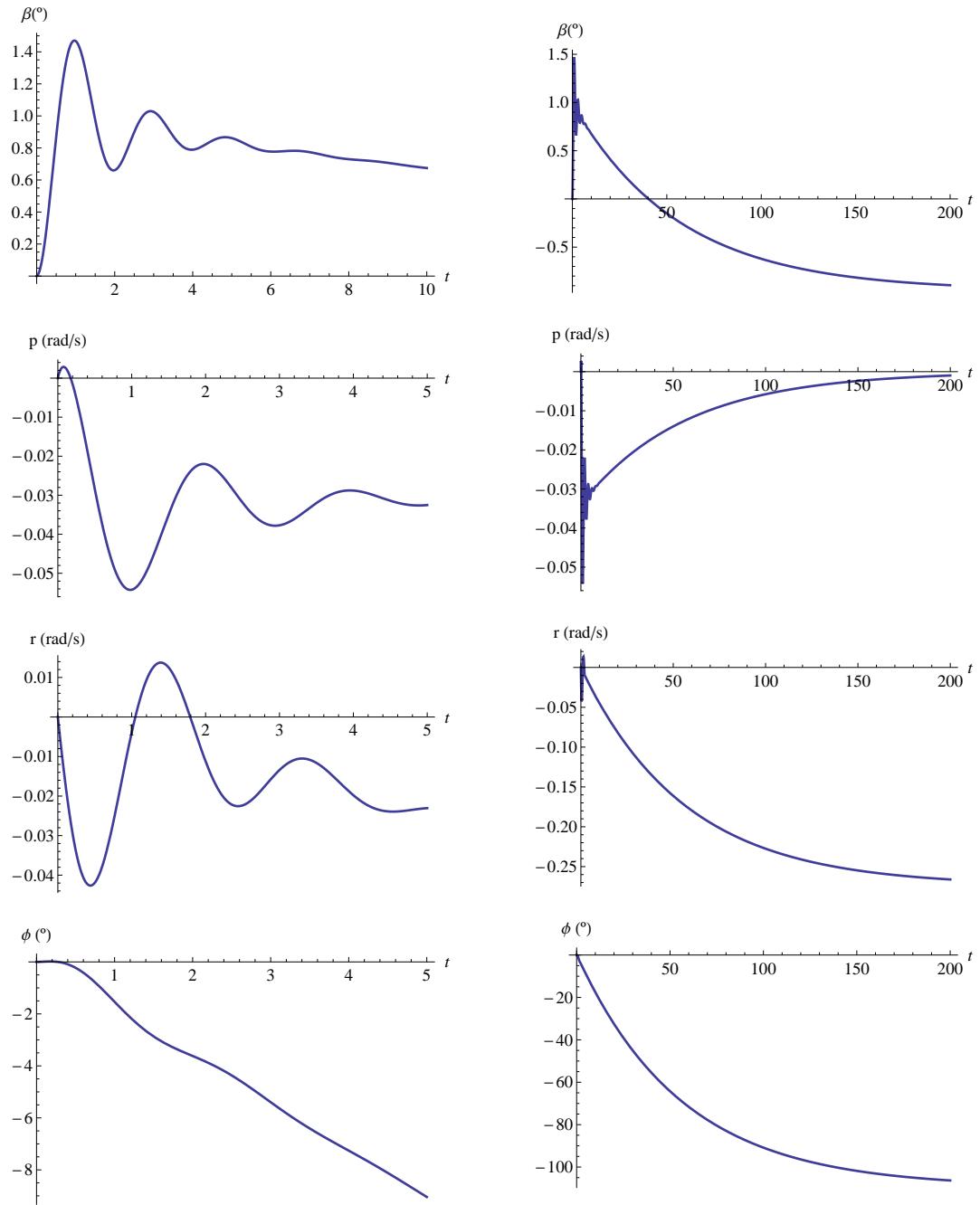


Figura 12.9: Resposta à aplicação do leme de direcção ($\delta_r = 1^\circ$) nos primeiros segundos (esquerda) e evolução posterior, nos primeiros 200 s (direita). Estão representadas as evoluções do ângulo de derrapagem, das velocidades angulares de rolamento e guinada e do ângulo de pranchamento.

para as aproximações espiral+rolamento e rolamento holandês.

Usar-se-ão as abreviaturas

$$y_\delta = \frac{Y_\delta}{m} \quad (12.53)$$

$$\mathcal{L}_\delta = \frac{L_\delta}{I'_x} + I'_{zx}N_\delta \quad (12.54)$$

$$\mathcal{N}_\delta = I'_{zx}L_\delta + \frac{N_\delta}{I'_z} \quad (12.55)$$

em que $\delta = \delta_a$ ou δ_r , conforme o caso.

Modo de rolamento aproximado

Incluíndo os termos de controlo, presentes em (8.29), a equação (11.17) toma a forma

$$\dot{p} = \mathcal{L}_p p + \mathcal{L}_{\delta_a} \delta_a + \mathcal{L}_{\delta_r} \delta_r. \quad (12.56)$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se:

$$\bar{p} = \frac{\mathcal{L}_{\delta_a}}{s - \mathcal{L}_p} \bar{\delta}_a + \frac{\mathcal{L}_{\delta_r}}{s - \mathcal{L}_p} \bar{\delta}_r. \quad (12.57)$$

As funções de transferência podem escrever-se simplesmente como

$$\frac{\bar{p}(s)}{\bar{\delta}(s)} = G_{p\delta} = \frac{\mathcal{L}_\delta}{s - \mathcal{L}_p} \bar{\delta}, \quad (12.58)$$

em que δ representa δ_a ou δ_r , consoante o caso em estudo.

Aproximação espiral+rolamento

Nesta aproximação, incluíndo os termos de controlo na equação (11.20) e aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & u_0 & -g \\ -\mathcal{L}_v & (s - \mathcal{L}_p) & -\mathcal{L}_r & 0 \\ -\mathcal{N}_v & -\mathcal{N}_p & (s - \mathcal{N}_r) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{p}(s) \\ \bar{r}(s) \\ \bar{\phi}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{\delta_a} & y_{\delta_r} \\ \mathcal{L}_{\delta_a} & \mathcal{L}_{\delta_r} \\ \mathcal{N}_{\delta_a} & \mathcal{N}_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_a(s) \\ \bar{\delta}_r(s) \end{bmatrix} \quad (12.59)$$

O polinómio característico é

$$f(s) = C_{SR}s^2 + D_{SR}s + E_{SR}$$

em que as constantes C_{SR} , D_{SR} e E_{SR} são dadas por

$$\begin{aligned} C &= u_0 \mathcal{N}_v, \\ D &= u_0(\mathcal{L}_v \mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p \mathcal{N}_v) - g \mathcal{L}_v, \\ E &= g(\mathcal{L}_v \mathcal{N}_r - \mathcal{L}_r \mathcal{N}_v). \end{aligned}$$

As funções de transferência são obtidas a partir de (12.59), resultando

$$\begin{aligned} G_{v\delta} &= N_{v\delta}/f(s), & N_{v\delta} &= a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \\ G_{\phi\delta} &= N_{\phi\delta}/f(s), & N_{\phi\delta} &= b_1s + b_0, \\ G_{r\delta} &= N_{r\delta}/f(s), & N_{r\delta} &= d_2s^2 + d_1s + d_0, \\ G_{p\delta} &= N_{p\delta}/f(s), & N_{p\delta} &= sN_{\phi\delta}, \end{aligned}$$

com os coeficientes das equações anteriores dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= g(\mathcal{L}_r\mathcal{N}_\delta - \mathcal{L}_\delta\mathcal{N}_r), \\ a_1 &= \mathcal{Y}_\delta(\mathcal{L}_p\mathcal{N}_r - \mathcal{L}_r\mathcal{N}_p) - u_0(\mathcal{L}_\delta\mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_\delta) + \mathcal{L}_\delta g, \\ a_2 &= -\mathcal{Y}_\delta(\mathcal{L}_p + \mathcal{N}_r) - u_0\mathcal{N}_\delta, \\ a_3 &= \mathcal{Y}_\delta \\ b_0 &= u_0(\mathcal{L}_\delta\mathcal{N}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{N}_\delta) + \mathcal{Y}_\delta(\mathcal{L}_v\mathcal{N}_r - \mathcal{L}_r\mathcal{N}_v), \\ b_1 &= \mathcal{Y}_\delta\mathcal{L}_v \\ d_0 &= g(\mathcal{L}_\delta\mathcal{N}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{N}_\delta), \\ d_1 &= \mathcal{Y}_\delta(\mathcal{L}_v\mathcal{N}_p - \mathcal{L}_p\mathcal{N}_v), \\ d_2 &= \mathcal{Y}_\delta\mathcal{N}_v. \end{aligned}$$

Aproximação de rolamento holandês

O sistema de equações para o modo aproximado de rolamento holandês é, incluindo os termos de controlo,

$$\begin{bmatrix} (s - \mathcal{Y}_v) & u_0 \\ -\mathcal{N}_v & (s - \mathcal{N}_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{r}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{Y}_{\delta_r} \\ \mathcal{N}_{\delta_a} & \mathcal{N}_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_a(s) \\ \bar{\delta}_r(s) \end{bmatrix}, \quad (12.60)$$

O polinómio característico é

$$f(s) = s^2 - (\mathcal{Y}_v + \mathcal{N}_r)s + (\mathcal{Y}_v\mathcal{N}_r + u_0\mathcal{N}_v)$$

e as funções de transferência são

$$\begin{aligned} G_{v\delta_a} &= N_{v\delta_a}/f(s), & N_{v\delta_a} &= -u_0\mathcal{N}_{\delta_a}, \\ G_{r\delta_a} &= N_{r\delta_a}/f(s), & N_{r\delta_a} &= \mathcal{N}_{\delta_a}s - \mathcal{Y}_v\mathcal{N}_{\delta_a}, \\ G_{v\delta_r} &= N_{v\delta_r}/f(s), & N_{v\delta_r} &= \mathcal{Y}_{\delta_r}s - (\mathcal{Y}_{\delta_r}\mathcal{N}_r + u_0\mathcal{N}_{\delta_r}), \\ G_{r\delta_r} &= N_{r\delta_r}/f(s), & N_{r\delta_r} &= \mathcal{N}_{\delta_r}s - (\mathcal{N}_{\delta_r}\mathcal{Y}_v - \mathcal{Y}_{\delta_r}\mathcal{N}_v). \end{aligned}$$

12.5 Resposta transiente a ailerons e rudder

Os estados estacionários laterais são pouco frequentes. Por outro lado, é importante estudar a resposta transiente, que aparece em manobras, etc.

Começaremos por estudar resposta a escalão (*ailerons* ou *rudder*) imediatamente após a sua aplicação, isto é, para $t = 0^+$.

12.5.1 Resposta Inicial

Em $t = 0$, todas as variáveis laterais são nulas. Logo, as equações do movimento são apenas

$$\begin{cases} \dot{v} = Y_{\delta_r} \delta_r, \\ \dot{p} = L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r, \\ \dot{r} = N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r, \end{cases} \quad (12.61)$$

em que se usou o facto de que $Y_{\delta_a} = 0$ (a força lateral devida à deflexão dos *ailerons* é nula ou desprezável na esmagadora maioria dos casos). Daqui pode concluir-se que a taxa de derrapagem inicial só depende da deflexão do leme de direcção, sendo $\dot{v} > 0$ se $\delta_r > 0$.

A aceleração angular inicial, $t = 0^+$, é $\vec{\omega} = \dot{p}\vec{i} + \dot{r}\vec{k}$. Como em $t = 0$, $\vec{\omega} = 0$, a direcção de $\vec{\omega}$ define a direcção inicial do eixo de rotação da aeronave. O ângulo do eixo de rotação inicial com eixo x é

$$\xi = \tan^{-1} \frac{\dot{r}}{\dot{p}} \quad (12.62)$$

Admitimos como válida a simplificação $L_{\delta_r} = 0 = N_{\delta_a}$ (isto é, os *ailerons* produzem um movimento de rolamento puro e o *rudder* um movimento de guinada puro). Partindo de (12.61) e tendo em conta as definições (12.53), (12.54) e (12.55), obtém-se, no caso de resposta a *rudder* ($\delta_a = 0$):

$$\tan \xi_R = \frac{r}{p} = \frac{\dot{r}}{\dot{p}} = \frac{N_{\delta_r}}{L_{\delta_r}} = \frac{N_{\delta_r}/I'_z}{I'_{zx}N_{\delta_r}} = \frac{1}{I_z'I'_{zx}} = \frac{I_x}{I_{zx}}, \quad (12.63)$$

e no caso de resposta a *aileron* ($\delta_r = 0$):

$$\tan \xi_A = \frac{I_{zx}}{I_z}. \quad (12.64)$$

A resposta para eixos principais de inércia, isto é, quando $I_{zx} = 0$, é, como seria de esperar,

$$\begin{aligned} \text{Rudder: } \quad \tan \xi_R &= \frac{I_x}{I_{zx}} = \infty \Rightarrow \xi_R = 90^\circ \\ \text{Ailerons: } \quad \tan \xi_A &= \frac{I_{zx}}{I_z} = 0 \Rightarrow \xi_A = 0 \end{aligned}$$

Se os eixos de estabilidade do avião forem diferentes dos eixos principais de inércia, a rotação faz-se em torno de um eixo que depende do ângulo ϵ entre os dois sistemas. Os valores de I_{x_s} , I_{z_s} e $I_{z_s x_s}$ são dados por

$$\begin{aligned} I_{x_s} &= I_{x_p} \cos^2 \epsilon + I_{z_p} \sin^2 \epsilon \\ I_{z_s} &= I_{x_p} \sin^2 \epsilon + I_{z_p} \cos^2 \epsilon \\ I_{z_s x_s} &= \frac{1}{2}(I_{z_p} - I_{x_p}) \sin 2\epsilon \end{aligned}$$

Como exemplo, admitta-se que $I_{x_p}/I_{z_p} = 0.4$ (caso de jacto de transporte) e $\epsilon = 20^\circ$ (ângulo de ataque elevado). Com estes dados podemos calcular ξ_A e ξ_R . Na figura

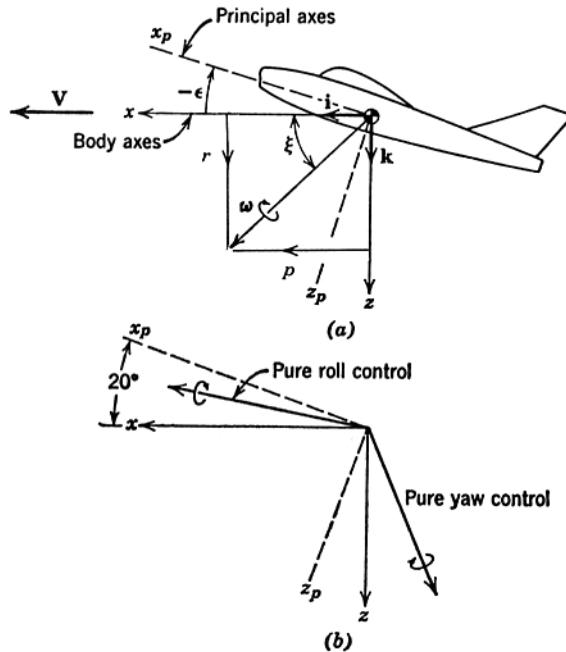


Figura 12.10: Direcção inicial da velocidade angular e eixos iniciais de rotação após deflexão dos ailerons ou do rudder. Fonte: [1].

12.10 estão representados estes ângulos. O gráfico da figura 12.11 representa ξ_A e ξ_R em função do ângulo ϵ . Dos gráficos podemos concluir que após deflexão dos *ailerons* a aeronave passa a ter movimento de roolamento em torno de um eixo entre o eixo principal x_p e x (tendência a rolar em torno do eixo principal de inércia); após deflexão do *rudder* a aeronave passa a ter movimento de guinada em torno de eixo diferente de z_p e z (e mais afastado de z_p).

12.5.2 Soluções para Valores Elevados dos Ângulos

A análise anterior referiu-se à resposta para $t = 0^+$, isto é, imediatamente após a deflexão dos *ailerons* ou *rudder*. Para saber o que acontece em instantes posteriores é necessário resolver as equações exactas, não-lineares, o que se afigura difícil em geral. Existe uma abordagem que estabelece um compromisso razoável entre a exactidão das soluções encontradas e a dificuldade para as obter. Consiste em usar uma representação linear para as forças de inércia e aerodinâmicas, na hipótese de que as variações das velocidades e velocidades angulares são pequenas, e em usar uma descrição exacta para as forças gravíticas, uma vez que os ângulos de pranchamento, picada e guinada podem ser grandes.

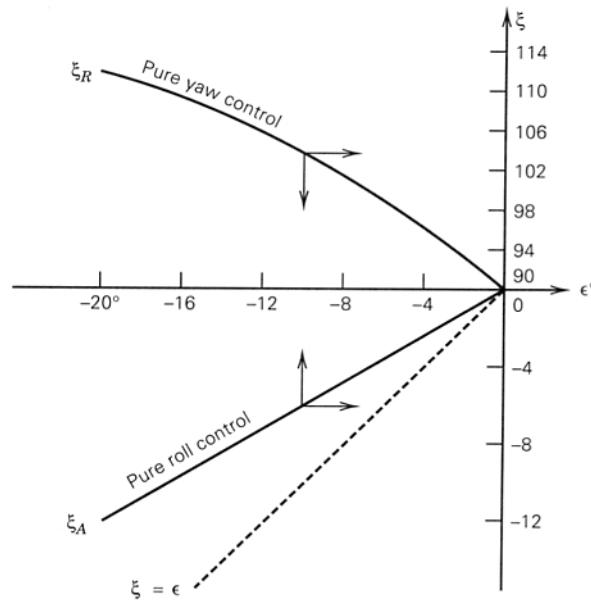


Figura 12.11: ângulos ξ_A e ξ_R em função do ângulo ϵ entre os eixos do corpo e os eixos principais de inércia. Fonte: [1].

As equações do movimento são agora, para as variáveis longitudinais,

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\Delta X}{m} - g \sin \theta \\ \dot{w} &= \frac{\Delta Z}{m} - g(1 - \cos \theta \cos \phi) + u_0 q \\ \dot{q} &= \frac{\Delta M}{I_y} \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi\end{aligned}$$

e para as variáveis laterais,

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{\Delta Y}{m} + g \cos \theta \sin \phi - u_0 r \\ \dot{p} &= \frac{\Delta L}{I_x'} + I_{zx}' \Delta N \\ \dot{r} &= \frac{\Delta N}{I_z'} + I_{zx}' \Delta L \\ \dot{\theta} &= p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\ \dot{\psi} &= (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta\end{aligned}$$

Estas equações podem ser resolvidas numericamente (usando, por exemplo, um método Runge-Kutta).

Nas figuras 12.12 apresentam-se os resultados da integração numérica das equações para uma deflexão dos *ailerons* de -15° para um Boeing 747 em voo de cruzeiro a 40000 ft com $Ma = 0.8$.

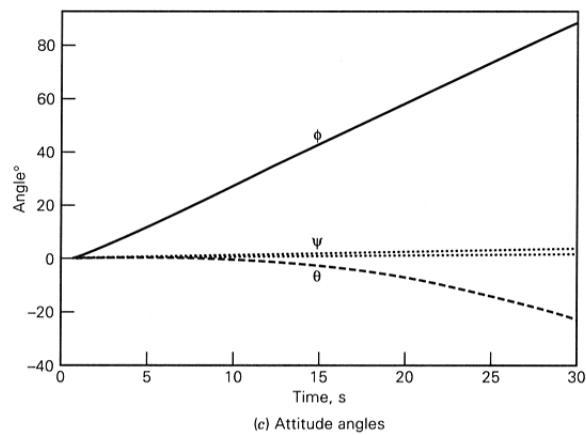
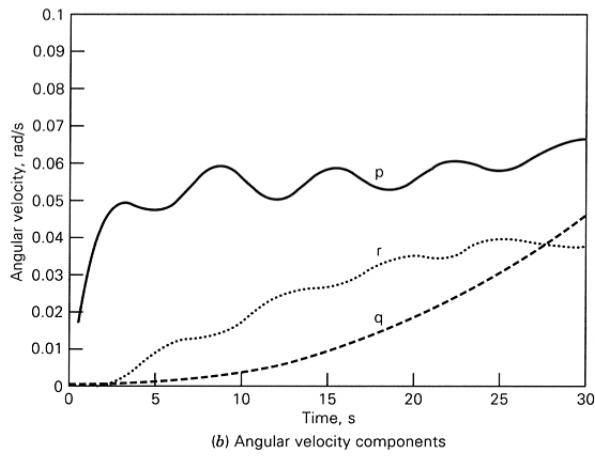
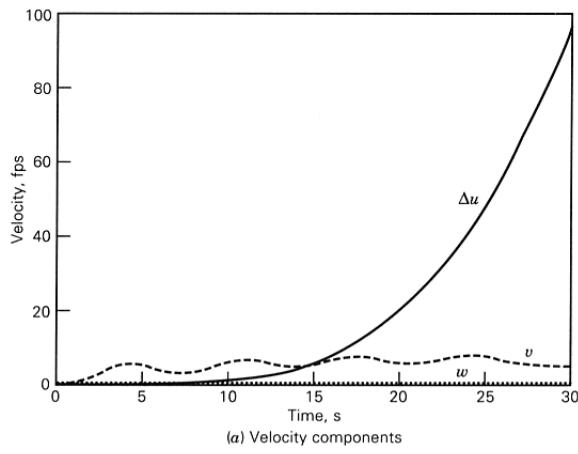


Figura 12.12: Evolução das componentes da velocidade (em cima), da velocidade angular (a meio) e dos ângulos de rolamento, picada e guinada (em baixo). Fonte: [1].

Observa-se que a velocidade angular de rolamento p aumenta rapidamente e em consequência, o ângulo de pranchamento ϕ aumenta (e quase linearmente com o tempo). O ângulo de derrapagem β , a velocidade angular de guinada r e o ângulo de guinada ψ permanecem pequenos. O aumento de ϕ leva a uma diminuição da componente vertical de L e por isso a um ângulo de picada θ negativo e a um aumento de Δu . Note-se que ao fim de 30 s $\Delta u \approx 0.1u_0$ o que implica que a aproximação linear começa a não ser válida. Por outro lado $p = 0.05\text{rad/s} \Rightarrow \hat{p} = 0.01$, pelo que se justifica ter desprezado as forças aerodinâmicas e iniciais não-lineares.

Capítulo 13

Qualidades de Voo

Qualidades de voo são as características de estabilidade e de controlo importantes para a impressão que o piloto forma da aeronave. Os factores que influenciam essa impressão são a dinâmica longitudinal e lateral do avião, a força de controlo necessária e os gradientes da força de controlo. As qualidades de voo esperadas pelo piloto dependem do tipo de aeronave e da fase de voo em que se encontra.

Para que um avião tenha boas qualidades de voo é necessário não só que as forças máximas que é necessário aplicar para controlar o avião tenham valores aceitáveis, mas também que as forças a aplicar durante a maior parte do voo sejam nulas.

13.1 Classificação de aeronaves e fases de voo

A impressão que um piloto forma de uma aeronave depende muito do tipo de aeronave: é muito diferente pilotar um jacto militar, um avião de linha aérea ou uma avionete de recreio. Por isso é necessário classificar as aeronaves em classes de acordo com as suas características. A tabela 13.1 mostra a classificação habitualmente usada. As classes de aeronaves dependem da dimensão e peso da aeronave, mas também da manobrabilidade esperada durante os voos típicos a efectuar.

A fase de voo em que o avião se encontra é também muito importante para definição das qualidades de voo. É classificada em três categorias, descritas na tabela 13.2. Durante a maior parte do tempo de voo as aeronaves permanecem na fase de voo de categoria B e por isso esta categoria é particularmente importante no que diz respeito às qualidades de voo. Nas outras fases de voo é esperada uma maior intervenção do piloto e por isso as características esperadas podem degradar-se um pouco sem prejuízo das qualidades de voo.

13.2 Níveis de qualidades de voo

13.2.1 Escala de Cooper Harper e níveis de qualidades de voo

Como se afirmou anteriormente, as qualidades de voo são aquelas características de estabilidade e controlo importantes para a impressão que o piloto forma da aeronave. Esta impressão é, evidentemente, subjectiva. A escala de Cooper-Harper, apresentada

Tabela 13.1: Classes of aircraft (source: [4])

Class I	Small, light airplanes (such as light utility, primary trainer, and light observation craft)
Class II	Medium-weight, low-to-medium maneuverability airplanes (such as heavy utility / search and rescue, light or medium transport / cargo / tanker, reconnaissance, tactical bomber, heavy attack and trainer for Class II)
Class III	Large, heavy, low-to-medium maneuverability airplanes (such as heavy transport / cargo / tanker, heavy bomber, and trainer for Class III)
Class IV	Heavy maneuverability airplanes (such as fighter/interceptor, attack, tactical reconnaissance, observation and trainer for Class IV)

Tabela 13.2: Flight phase categories

Category A	Nonterminal flight phases that require rapid maneuvering, precision tracking or precise flight path control, such as air-to-air combat, in-flight refueling (receiver), terrain-following, and close formation flying (applies only to military aircraft).
Category B	Nonterminal flight phases that are normally accomplished using gradual maneuvers and no precision tracking, although accurate flight path control may be required. Includes climb, cruise, loiter, descent, in-flight refueling (for tanker) and aerial delivery.
Category C	Terminal flight phases requiring gradual maneuvers but precise flight path control. Include takeoff, catapult takeoff, approach, wave-off/go-around, and landing.

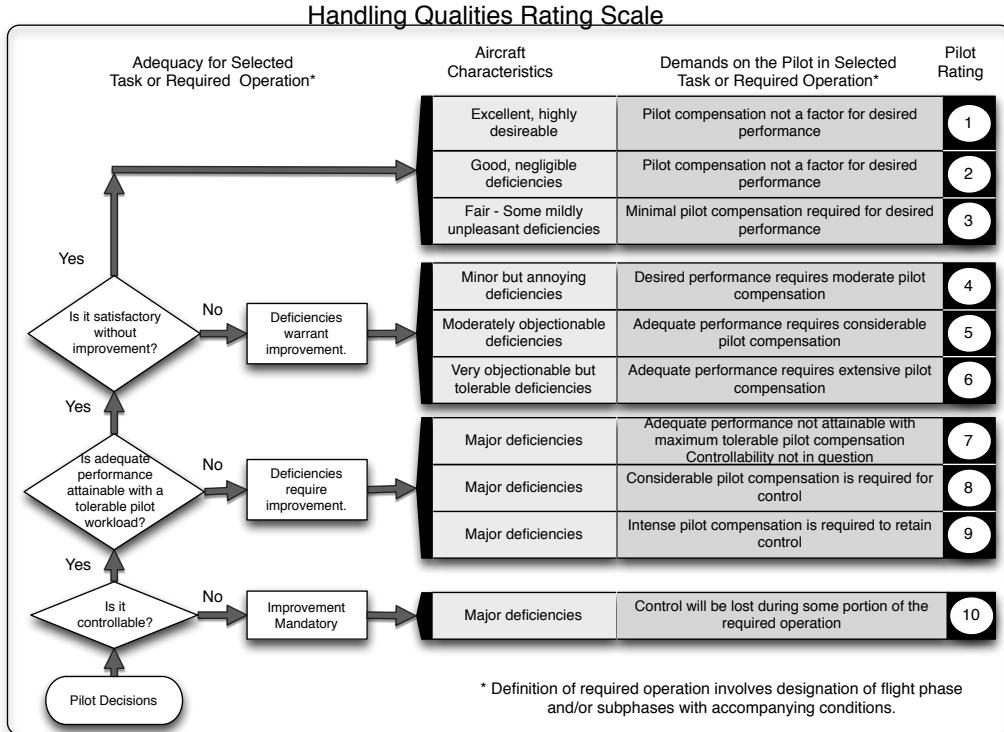


Figura 13.1: Escala de Cooper-Harper. Fonte: Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Cooper-Harper_rating_scale.

na figura 13.1, permite quantificar essa impressão subjectiva. A partir das respostas dos pilotos as aeronaves são classificadas de 1 (melhor) a 10 (pior).

As qualidades de voo são habitualmente definidas em termos dos três níveis apresentados na tabela 13.3. A escala de Cooper-Harper pode relacionar-se com os níveis de qualidades de voo de acordo com o apresentado na tabela 13.4.

Os níveis de qualidade de voo e a escala de Cooper-Harper são estabelecidos através das impressões e opiniões dos pilotos. A relação entre estes níveis de qualidades de voo e parâmetros de controlo e estabilidade objectivos e mensuráveis é difícil e muitas vezes vaga, sendo difícil estabelecer critérios muito estritos relativamente aos valores que os parâmetros podem tomar. No entanto, apresentar-se-ão em seguida os valores que são habitualmente seguidos para relacionar os níveis de qualidades de voo e a frequência natural e o factor de amortecimento dos modos.

13.2.2 Qualidades de voo longitudinais

Na tabela 13.5 indicam-se os limites para o factor de amortecimento correspondentes a cada nível de qualidades de voo. Note-se que para uma aeronave ser de nível 2, basta o modo fugóide ser estável, e para ser de nível 3 o modo fugóide pode até ser instável, bastando que t_2 seja suficientemente elevado para que o avião seja controlável.

Tabela 13.3: Flying qualities levels

Level 1	Flying qualities clearly adequate for the mission flight phase
Level 2	Flying qualities adequate to accomplish the mission flight phase but with some increase in pilot workload and/or degradation in mission effectiveness
Level 3	Flying qualities such that the airplane can be controlled safely but pilot workload is excessive and/or mission effectiveness is inadequate.

Tabela 13.4: Relação entre os níveis de qualidades de voo e a escala de Cooper-Harper

Level 1	Cooper-Harper scale = 1-3.5
Level 2	Cooper-Harper scale = 3.5-6.5
Level 3	Cooper-Harper scale = 6.5-9+

Os valores limite para o factor de amortecimento do modo de período curto para cada nível de qualidades de voo estão indicados na tabela 13.6. Neste caso, para os níveis 1 e 2 existe um valor máximo e um valor mínimo para o factor de amortecimento.

13.2.3 Qualidades de voo laterais

Para descrever as qualidades de voo do modo de rolamento convém definir a constante do modo como $\tau = -1/\lambda$. A dependência temporal do modo é então $e^{-t/\tau}$: quanto menor o valor de τ , mais amortecido é o modo e mais rapidamente decresce a perturbação.

Na tabela 13.7 apresentam-se as qualidades de voo do modo de rolamento em termos da constante de tempo τ .

Relativamente ao modo de rolamento holandês as qualidades de voo estão representadas na tabela 13.8. Neste caso interessam não só os valores do factor de amortecimento e da frequência natural, mas também o produto $\zeta\omega_n$.

Finalmente, as qualidades de voo em função do modo espiral apresentam-se na tabela 13.9. Note-se que em qualquer dos níveis e das fases de voo se admite que o modo espiral possa ser instável desde que o tempo para a amplitude aumentar para o dobro supere os valores apresentados na tabela.

Tabela 13.5: Limites para as qualidades de voo para o modo fugóide

Nível 1	$\zeta > 0.04$
Nível 2	$\zeta > 0$
Nível 3	$t_2 > 55 \text{ s}$

Tabela 13.6: Limites para o factor de amortecimento do modo de período curto

Níveis	Categorias A e C		Categoria B	
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
1	0.35	1.30	0.30	2.00
2	0.25	2.00	0.20	2.00
3	0.15	—	0.15	—

Tabela 13.7: Valor máximo da constante para o modo de rolamento

Categoria da fase de voo	Classe	Level		
		1	2	3
A	I, IV	1.0	1.4	
	II, III	1.4	3.0	
B	Todas	1.4	3.0	10
C	I, II-C, IV	1.0	1.4	
	II-L, III	1.4	3.0	

Tabela 13.8: Valores mínimos da frequência natural e do factor de amortecimento para o modo de rolamento holandês

Níveis	Fase de Voo	Classe	Min ζ	Min $\zeta\omega_n$	Min ω_n
1	A	I, IV	0.19	0.35	1.0
		II, III	0.19	0.35	0.4
	B	Todas	0.08	0.15	0.4
		I, II-C			
		IV	0.08	0.15	1.0
	C	II-L, III	0.08	0.15	0.4
2	Todas	Todas	0.02	0.05	0.4
3	Todas	Todas	0.02	—	0.4

(Nota: ω_n em rad s⁻¹)

Tabela 13.9: Valor mínimo para o tempo para a amplitude aumentar para o dobro (t_2) para o modo espiral

Classe	Fase de Voo	Nível 1 (s)	Nível 2 (s)	Nível 3 (s)
I e IV	A	12	12	4
	B e C	20	12	4
II e III	Todas	20	12	4

Tabela 13.10: Valores calculados para o Cessna 182 para os modos longitudinais

Modo	T (s)	$t_{1/2}$ (s)	$N_{1/2}$	ω_n (rad/s)	ζ
Fugóide	37.0	31.4	0.85	0.171	0.128
Período Curto	2.22	0.156	0.070	5.268	0.845

Tabela 13.11: Valores calculados para o Cessna 182 para os modos laterais

Modo	Período (s)	$t_{1/2}$ (s)	$N_{1/2}$	ω_n (rad/s)	ζ	$-1/\lambda$ (s)
Espiral	—	39.1	—			56.4
Rolamento	—	0.053	—			0.0768
Rolamento holandês	1.967	1.03	0.525	3.26	0.205	

13.3 Aplicação dos critérios a um Cessna 182

Como exemplo, vamos aplicar estes critérios ao Cessna 182, na situação de voo já descrita anteriormente.

Em primeiro lugar verificamos que o Cessna 182 é uma aeronave ligeira, pelo que é de classe I, como se pode constatar consultando a tabela 13.1.

O avião encontra-se em voo de cruzeiro, pelo que a fase de voo é de categoria B (cfr. tabela 13.2).

13.3.1 Modos longitudinais

Na tabela 13.10 resumem-se os resultados obtidos para o período, $t_{1/2}$, $N_{1/2}$, a frequência natural e o factor de amortecimento para os modos longitudinais do Cessna 182. Começando pelo modo fugóide, como $\zeta = 0.128 > 0.04$, a aeronave é de Nível 1. Para o modo de período curto, como $\zeta = 0.845$, valor que está entre 0.30 e 2.00, a aeronave é também de Nível 1. Conclui-se portanto que nesta situação de voo a aeronave é de Nível 1 para ambos os modos.

13.3.2 Modos laterais

Na tabela 13.11 apresentam-se os valores de $t_{1/2}$ e da constante $\tau = -1/\lambda$ para os modos espiral e de rolamento, bem como do período, de $t_{1/2}$, de $N_{1/2}$, da frequência natural e do factor de amortecimento para o modo de rolamento holandês.

Verifica-se que $\tau = -1/\lambda = 0.0768 < 1.0$ para o modo de rolamento, concluindo-se da tabela 13.7 que também para este modo, nesta situação de voo, o Cessna 182 é de Nível 1. Relativamente ao modo espiral, verifica-se que o modo é estável e por isso é de Nível 1 (os valores da tabela 13.9 referem-se ao tempo para a amplitude aumentar para o dobro, ou seja, admitindo que o modo é instável).

Finalmente, para o modo de rolamento holandês, da tabela 13.11 tira-se que $\omega_n = 3.26\text{rad/s} > 0.4\text{rad/s}$ e $\zeta = 0.205 > 0.08$. Por outro lado, $\zeta\omega_n = 0.670 > 0.15$. Comparando com os valores da tabela 13.8, conclui-se que a aeronave é de Nível 1 também para o modo de rolamento holandês, nesta situação de voo.

Apêndice A

Equilíbrio e estabilidade para configurações *canard*

Neste capítulo pretende-se estudar o equilíbrio e a estabilidade de configurações *canard*.



Figura A.1: Numa configuração *canard* o estabilizador encontra-se à frente da asa.

A.1 Características das configurações *canard*

Dá-se o nome de configurações *canard* àquelas em que o estabilizador é montado à frente da asa e é usual referirmo-nos ao estabilizador dessas configurações como *canard*.

Desde o início da aviação foram usadas configurações *canard* (figura A.2) como forma de estabilizar o vôo. No entanto, a escolha desta configuração deveu-se princi-



Figura A.2: Os primeiros aviões tinham uma configuração *canard*: Flyer, dos irmãos Wright (Kitty Hawk, 1903), à esquerda; e 14-Bis, de Santos Dumont (Paris, 1906), à direita.

palmente por razões de segurança: o piloto estava mais longe do início do avião e no caso de queda o *canard* amortecê-la-ia.

Actualmente as configurações *canard* são usadas para garantir a estabilidade da aeronave e para controlo longitudinal (de picada). O *canard* pode também ser usado para gerar sustentação, embora este fim seja secundário face aos outros.

O *canard* pode ser fixo (não usado para controlo, apenas para estabilidade), fixo mas com *elevators* que permitem controlo longitudinal (esta configuração é semelhante ao de estabilizador na cauda + leme de profundidade) ou ser totalmente móvel, sendo neste caso o controlo longitudinal efectuado por deflexão de todo o *canard* (é uma configuração semelhante a *stabilator*).

As vantagens das configurações *canard* face às configurações convencionais incluem uma maior manobrabilidade, maior dificuldade do avião entrar em perda e maiores valores de $C_{L_{\max}}$ (sem flaps). Por outro lado, as configurações *canard* apresentam também algumas desvantagens, como uma maior distância entre os centros de massa do combustível e da aeronave, o que pode levar a maiores variações do centro de massa em voo, e uma diminuição de visibilidade. Além disso a aerodinâmica de uma configuração *canard* é mais complicada que a de uma configuração convencional e o dimensionamento do *canard* é crítico: é fácil fazer mau projeto.

A.2 Equilíbrio e estabilidade

Iremos estudar uma configuração em que o *canard* é a única superfície estabilizadora e a única superfície para controlo longitudinal. Supomos também um *canard* móvel, sem *elevator*.

Usaremos a seguinte notação:

- i_c : ângulo de incidência do *canard*, é variável;
- i_c positivo se $L_c > 0$;
- $h\bar{c}$: posição do CM, medida a partir do bordo de ataque da asa;
- $h\bar{c}$ pode ser negativo se estiver à frente do bordo de ataque da asa;
- $h_{n_{wb}}\bar{c}$: posição do CA da asa;

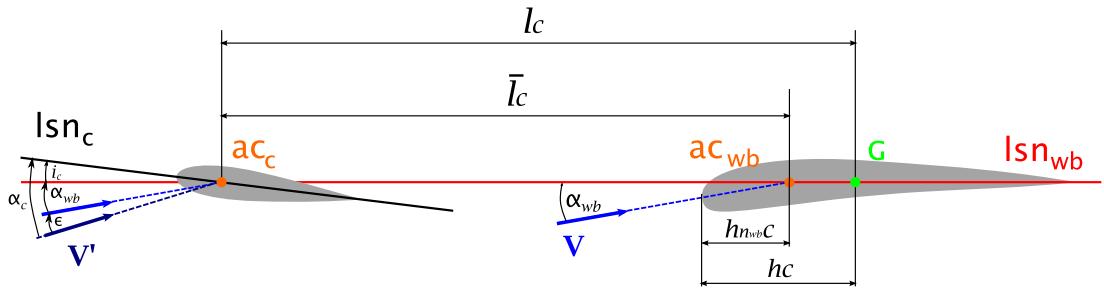


Figura A.3: Relação entre ângulos de ataque da asa e do *canard* e distâncias entre o centro aerodinâmico do *canard* e o centro aerodinâmico da asa (l_c) e o centro de massa (\bar{l}_c).

- l_c : distância entre CA do *canard* e CM;
- \bar{l}_c : distância entre CA do *canard* e CA da asa.

A.2.1 Sustentação e momento de picada

A interacção aerodinâmica entre *canard* e asa é complexa. O *canard* está na zona de *upwash* da asa, a asa está na zona de *downwash* do *canard* e o vórtice do bordo marginal do *canard* tem efeito de *upwash* na asa. O efeito global destas interações nos ângulos efectivos é que $\alpha_{wb} < \alpha_c$. Modelamos este efeito por meio de um ângulo de *upwash* ε no *canard*.

Da figura A.3 podemos determinar a relação entre os ângulos de ataque do *canard* e da asa, o ângulo de *upwash* ε e o ângulo de incidência do *canard*,

$$\alpha_c = \alpha_{wb} + \varepsilon + i_c. \quad (\text{A.1})$$

Vamos admitir que o ângulo de *upwash* varia linearmente com α_{wb} ,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_\alpha \alpha_{wb}, \quad (\text{A.2})$$

e a relação entre α_c e α_{wb} é

$$\alpha_c = \alpha_{wb}(1 + \varepsilon_\alpha) + (\varepsilon_0 + i_c). \quad (\text{A.3})$$

A figura A.3 permite ainda relacionar as distâncias entre o centro aerodinâmico do *canard* e o centro aerodinâmico da asa (l_c) e entre o centro aerodinâmico do *canard* e o centro de massa (\bar{l}_c). Note-se que h pode ser negativo se o centro de massa estiver à frente da asa.

$$l_c = \bar{l}_c + (h - h_{n_{wb}}) \bar{c} \Rightarrow \frac{l_c S_c}{\bar{c} S} = \frac{\bar{l}_c S_c}{\bar{c} S} + (h - h_{n_{wb}}) \frac{S_c}{S}. \quad (\text{A.4})$$

Analogamente ao que fizemos para configurações convencionais, podemos definir as razões de volume do *canard* como

$$V_c = \frac{l_c S_c}{\bar{c} S}, \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{V}_c = \frac{\bar{l}_c S_c}{\bar{c} S}, \quad (\text{A.6})$$

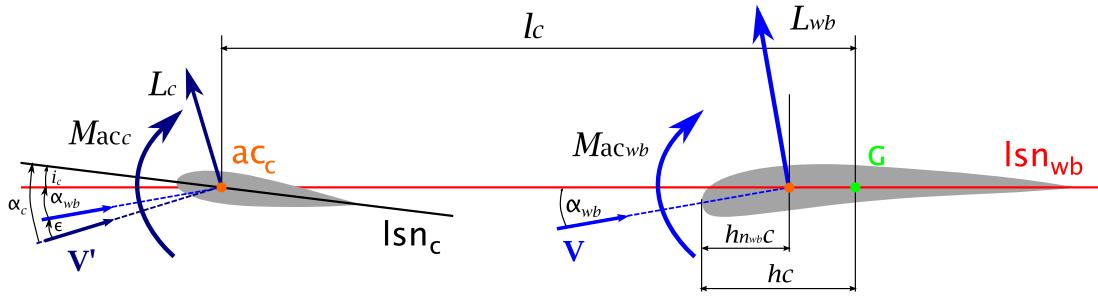


Figura A.4: Forças e momentos aerodinâmicos aplicados na asa e no *canard*.

e de (A.4) a relação entre elas é

$$V_c = \bar{V}_c + (h - h_{nwb}) \frac{S_c}{S}. \quad (\text{A.7})$$

A velocidade do escoamento incidente no *canard* V' e na asa V diferem tanto na direcção (pelo ângulo de *upwash*) como no módulo. No entanto, o módulo das duas velocidades é habitualmente muito semelhante, pelo que admitiremos que $V' \approx V$.

A sustentação do *canard* é então adimensionalizada pela pressão dinâmica da asa e pela área do *canard*. No caso do momento de picada usamos ainda a corda média do *canard*, \bar{c}_c .

$$C_{L_c} = \frac{L_c}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_c}, \quad (\text{A.8})$$

$$C_{m_{ac_c}} = \frac{M_{ac_c}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_c \bar{c}_c}. \quad (\text{A.9})$$

Na figura A.4 representam-se as forças e momentos aerodinâmicos aplicados na asa e no *canard*. Admitindo que os ângulos de ataque e o ângulo de incidência do *canard* são pequenos, a sustentação total é dada por

$$L = L_{wb} + L_c \quad (\text{A.10})$$

e o respectivo coeficiente de sustentação é

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = C_{L_{wb}} + \frac{S_c}{S} C_{L_c} \quad (\text{A.11})$$

Na zona de linearidade entre o coeficiente de sustentação e o ângulo de ataque,

$$C_{L_{wb}} = \alpha_{wb} \alpha_{wb}, \quad (\text{A.12})$$

$$C_{L_c} = \alpha_c \alpha_c = \alpha_c \alpha_{wb} (1 + \varepsilon_\alpha) + \alpha_c (\varepsilon_0 + i_c). \quad (\text{A.13})$$

Logo:

$$C_L = \left[\alpha_{wb} + \alpha_c \frac{S_c}{S} (1 + \varepsilon_\alpha) \right] \alpha_{wb} + \alpha_c \frac{S_c}{S} (\varepsilon_0 + i_c). \quad (\text{A.14})$$

Esta relação pode ser escrita de forma mais simplificada como

$$C_L = \alpha \alpha_{wb} + \alpha_c \frac{S_c}{S} (\varepsilon_0 + i_c), \quad (\text{A.15})$$

em que

$$\alpha = \alpha_{wb} + \alpha_c \frac{S_c}{S} (1 + \varepsilon_\alpha). \quad (\text{A.16})$$

Para o momento de picada, a figura A.4 permite escrever

$$M = M_{ac_c} + l_c L_c + M_{ac_{wb}} + (h - h_{n_{wb}}) \bar{c} L_{wb} \quad (\text{A.17})$$

A adimensionalização do momento de picada total relativamente ao centro de massa é

$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}},$$

pelo que

$$C_m = \frac{S_c C_c}{S \bar{c}} C_{m_{ac_c}} + \frac{l_c S_c}{\bar{c} S} C_{L_c} + C_{m_{ac_{wb}}} + (h - h_{n_{wb}}) C_{L_{wb}}. \quad (\text{A.18})$$

O *canard* pode ter uma contribuição para a sustentação e por isso o seu perfil pode ter curvatura positiva, sendo $C_{m_{ac_c}} \neq 0$, pelo que mantemos este termo. Usando (A.7) obtém-se

$$C_m = \overline{C_{m_{ac}}} + \bar{V}_c C_{L_c} + (h - h_{n_{wb}}) C_L, \quad (\text{A.19})$$

com

$$\overline{C_{m_{ac}}} = \left(\frac{S_c C_c}{S \bar{c}} C_{m_{ac_c}} + C_{m_{ac_{wb}}} \right). \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, usando (A.15), (A.12) e (A.13), obtém-se:

$$C_m = \overline{C_{m_0}} + C_{m_\alpha} \alpha_{wb}, \quad (\text{A.21})$$

em que

$$\overline{C_{m_0}} = \overline{C_{m_{ac}}} + \alpha_c (\varepsilon_0 + i_c) \left[\frac{S_c}{S} (h - h_{n_{wb}}) + \bar{V}_c \right] \quad (\text{A.22})$$

$$= \overline{C_{m_{ac}}} + \alpha_c (\varepsilon_0 + i_c) V_c \quad (\text{A.23})$$

$$C_{m_\alpha} = \alpha (h - h_{n_{wb}}) + \bar{V}_c \alpha_c (1 + \varepsilon_\alpha) \quad (\text{A.24})$$

A.2.2 Ponto neutro

Por definição, no ponto neutro $C_{m_\alpha} = 0$, e (A.24) mostra que a sua posição, h_n , é dada por

$$h_n = h_{n_{wb}} - \bar{V}_c \frac{\alpha_c}{\alpha} (1 + \varepsilon_\alpha). \quad (\text{A.25})$$

A equação (A.24) permite ainda escrever

$$C_{m_\alpha} = \alpha (h - h_n) = -\alpha K_n, \quad (\text{A.26})$$

em que a margem estática $K_n = h_n - h$ é definida da forma habitual.

A.3 Condições de equilíbrio

As expressões deduzidas são válidas tanto para *canards* fixos como para *canards* com ângulo de incidência variável. No caso de *canard* móvel, controlo longitudinal é realizado fazendo variar i_c . No caso de um *canard* com ângulo de incidência fixo e com leme de profundidade, é necessário acrescentar o termo de controlo correspondente.

A.3.1 Canard móvel

A sustentação total é dada por (A.15). Supondo $\varepsilon_0 = 0$, temos:

$$C_L = C_{L_\alpha} \alpha_{wb} + C_{L_{i_c}} i_c \quad (\text{A.27})$$

com:

$$\begin{cases} C_{L_\alpha} \equiv a \\ C_{L_{i_c}} \equiv \frac{\partial C_L}{\partial i_c} = a_c \frac{S_c}{S} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Das equações (A.21), (A.23), (A.22) e (A.24), com $\varepsilon_0 = 0$, o momento de picada é

$$C_m = \overline{C_{m_{ac}}} + C_{m_\alpha} \alpha_{wb} + C_{m_{i_c}} i_c \quad (\text{A.29})$$

em que

$$\begin{cases} C_{m_\alpha} = a(h - h_n) \\ C_{m_{i_c}} = a_c V_c = a_c \left[\frac{S_c}{S} (h - h_{n_{wb}}) + \bar{V}_c \right] \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

As equações de equilíbrio são

$$\begin{cases} C_L = C_{L_{\text{trim}}} \\ C_m = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} C_L = C_{L_\alpha} \alpha_{wb} + C_{L_{i_c}} i_c = C_{L_{\text{trim}}} \\ C_m = \overline{C_{m_{ac}}} + C_{m_\alpha} \alpha_{wb} + C_{m_{i_c}} i_c = 0 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

As soluções de (A.31) determinam os valores de α_{wb} e i_c de equilíbrio:

$$\begin{cases} \alpha_{wb_{\text{trim}}} = \frac{C_{L_{\text{trim}}} C_{m_{i_c}} + \overline{C_{m_{ac}}} C_{L_{i_c}}}{\det} \\ i_{c_{\text{trim}}} = -\frac{C_{L_\alpha} \overline{C_{m_{ac}}} + C_{L_{\text{trim}}} C_{m_\alpha}}{\det} \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

em que $\det = C_{L_\alpha} C_{m_{i_c}} - C_{m_\alpha} C_{L_{i_c}}$. Note-se que como i_c é variável, não é útil usar o ângulo de ataque absoluto da aeronave, pois ele varia com i_c . É preferível usar α_{wb} .

A.3.2 Configuração com *canard* fixo e *elevator*

A análise da configuração com *canard* com ângulo de incidência fixo e leme é semelhante à análise da configuração com estabilizador horizontal e leme de profundidade. Representando por δ_e a deflexão do leme, pode-se admitir que a relação entre a sustentação no *canard* e δ_e é linear: $C_{L_c} = a_c \alpha_c + a_e \delta_e$.

A dedução das expressões para o ângulo de ataque absoluto da aeronave α e para C_{m_0} , $C_{L_{\delta_e}}$ e $C_{m_{\delta_e}}$ no caso de *canard* fixo com *elevator* fica como exercício.

Apêndice B

Outra Aproximação ao Modo fugóide

Apresenta-se em seguida uma outra aproximação ao modo fugóide que permite melhores resultados que as anteriores. Faremos as aproximações directamente nas equações do movimento para pequenas perturbações de modo a obter um sistema de ordem inferior à inicial.

As aproximações que serão feitas decorrem das características do modo fugóide: q e $\Delta\theta$ são pequenos e podem ser desprezados nas equações. Além disso, como o estado estacionário é um voo horizontal, $\theta_0 = 0$. Omitindo os termos de controlo, as equações para o movimento longitudinal são:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{u} &= \frac{X_u}{m}\Delta u + \frac{X_w}{m}w + -g\underbrace{\cos\theta_0}_{\approx 1}\Delta\theta \\ \dot{w} &= \frac{Z_u}{m}\Delta u + \frac{Z_w}{m}w + \underbrace{\frac{Z_w}{m}\dot{w}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{Z_q}{m}q}_{\approx 0} - g\underbrace{\sin\theta_0}_{\approx 0}\Delta\theta + u_0q \\ \underbrace{\dot{q}}_{\approx 0} &= \frac{\Delta M}{I_y} \approx \frac{1}{I_y}(M_u\Delta u + M_w w) \\ \Delta\dot{\theta} &= q\end{aligned}$$

Com as aproximações indicadas anteriormente, e escrevendo as equações na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \dot{w} \\ 0 \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & u_0 & 0 \\ M_u & M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta\theta \end{bmatrix}.$$

Este sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser resolvido de forma análoga

ao sistema completo. Admitindo soluções na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}$, obtém-se

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = \lambda \Delta u, \\ \dot{w} = \lambda w, \\ \Delta \dot{\theta} = \lambda \Delta \theta, \end{cases}$$

e substituindo nas equações anteriores vem

$$\begin{bmatrix} \lambda \Delta u \\ \lambda w \\ 0 \\ \lambda \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & u_0 & 0 \\ M_u & M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} - \lambda & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} - \lambda & u_0 & 0 \\ M_u & M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{B.1})$$

A equação característica para o modo fugóide aproximado é

$$\begin{vmatrix} \frac{X_u}{m} - \lambda & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} - \lambda & u_0 & 0 \\ M_u & M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e daqui se deduz

$$\underbrace{(-u_0 M_w)}_A \lambda^2 + \underbrace{\left[g M_u + \frac{u_0}{m} (M_w X_u - M_u X_w) \right]}_B \lambda + \underbrace{\left[\frac{g}{m} (M_w Z_u - M_u Z_w) \right]}_C = 0. \quad (\text{B.2})$$

Obtemos portanto uma equação característica que é de 2^a ordem, o que mostra que o sistema aproximado é também de 2^a ordem. Note-se que a equação se pode escrever

$$A \lambda^2 + B \lambda + C = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{B}{A} \lambda + \frac{C}{A} = 0.$$

A frequência natural e factor de amortecimento para o modo fugóide aproximado podem determinar-se usando A , B e C definidos na equação (B.2), obtendo-se

$$\omega_n^2 = -\frac{g}{m u_0} \left(Z_u - \frac{Z_w}{M_w} M_u \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\zeta = -\frac{1}{2} \left[\frac{g}{m u_0} \left(\frac{Z_w}{M_w} M_u - Z_u \right) \right]^{-1/2} \left[\frac{g M_u}{u_0 M_w} + \frac{1}{m} \left(X_u - \frac{M_u}{M_w} X_w \right) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Para muitas aeronaves e situações de voo é possível fazer ainda a aproximação $M_u = 0$. Nesse caso, os valores para a frequência natural e o factor de amortecimento são dados por

$$\omega_n^2 = -\frac{g Z_u}{m u_0}, \quad (\text{B.5})$$

$$\zeta = -\frac{1}{2} \left[-\frac{g Z_u}{m u_0} \right]^{-1/2} \frac{X_u}{m} = -\frac{X_u}{2} \sqrt{-\frac{u_0}{m g Z_u}}, \quad (\text{B.6})$$

que são expressões idênticas a (10.40) e a (10.41).

B.1 Resposta ao Controlo

As equações para o modo fugóide aproximado, incluindo agora os termos de controlo, são

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u} &= \frac{X_u}{m} \Delta u + \frac{X_w}{m} w + -g \Delta \theta + \frac{X_{\delta_e}}{m} \delta_e + \frac{X_{\delta_p}}{m} \delta_p \\ \dot{w} &= \frac{Z_u}{m} \Delta u + \frac{Z_w}{m} w + u_0 q + \frac{Z_{\delta_e}}{m} \delta_e + \frac{Z_{\delta_p}}{m} \delta_p \\ 0 &= M_u \Delta u + M_w w + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_p} \delta_p \\ \Delta \dot{\theta} &= q\end{aligned}$$

Considerando apenas a variação da deflexão do leme de profundidade, e aplicando a transformada de Laplace, obtemos, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} s \Delta \bar{u} \\ s \bar{w} \\ 0 \cdot \bar{q} \\ s \Delta \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & u_0 & 0 \\ M_u & M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \Delta \bar{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_e}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{m} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \bar{\delta}_e,$$

ou, deixando no 2º membro apenas a parte de controlo,

$$\begin{bmatrix} \left(s - \frac{X_u}{m}\right) & -\frac{X_w}{m} & 0 & g \\ -\frac{Z_u}{m} & \left(s - \frac{Z_w}{m}\right) & -u_0 & 0 \\ -M_u & -M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \Delta \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_e}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{m} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \bar{\delta}_e \quad (\text{B.7})$$

Resolvendo este sistema em ordem a $\Delta \bar{u}/\Delta \bar{\delta}_e$, $\bar{w}/\Delta \bar{\delta}_e$, $\bar{q}/\Delta \bar{\delta}_e$ e $\Delta \bar{\theta}/\Delta \bar{\delta}_e$ obtemos as funções de transferência $G_{u\delta_e}$, $G_{w\delta_e}$ e $G_{\theta\delta_e}$:

$$\bar{x}(s) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}/\bar{\delta}_e \\ \bar{w}/\bar{\delta}_e \\ \bar{q}/\bar{\delta}_e \\ \bar{\theta}/\bar{\delta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{u\delta_e}(s) \\ G_{w\delta_e}(s) \\ G_{q\delta_e}(s) \\ G_{\theta\delta_e}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(s - \frac{X_u}{m}\right) & -\frac{X_w}{m} & 0 & g \\ -\frac{Z_u}{m} & \left(s - \frac{Z_w}{m}\right) & -u_0 & 0 \\ -M_u & -M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_e}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{m} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Começando por $G_{u\delta_e}$,

$$\frac{\Delta \bar{u}(s)}{\Delta \bar{\delta}_e(s)} = G_{u\delta_e} = \frac{a_1 s + a_0}{f(s)}, \quad (\text{B.8})$$

em que os coeficientes são

$$a_1 = u_0 \left(M_{\delta_e} \frac{X_u}{m} - M_w \frac{X_{\delta_e}}{m} \right) - g M_{\delta_e}, \quad (\text{B.9})$$

$$a_0 = g \left(M_{\delta_e} \frac{Z_w}{m} - M_w \frac{Z_{\delta_e}}{m} \right). \quad (\text{B.10})$$

O polinómio característico para o modo fugóide aproximado é

$$f(s) = As^2 + Bs + C, \quad (\text{B.11})$$

sendo os coeficientes A , B e C dados por

$$A = -u_0 M_w \quad (\text{B.12})$$

$$B = g M_u + \frac{u_0}{m} (X_u M_w - M_u X_w) \quad (\text{B.13})$$

$$C = \frac{g}{m} (Z_u M_w - M_u Z_w) \quad (\text{B.14})$$

A função de transferência $G_{w\delta_e}$ é dada por

$$\frac{\bar{w}(s)}{\Delta \bar{\delta}_e(s)} = G_{w\delta_e} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{f(s)}, \quad (\text{B.15})$$

em que os coeficientes são:

$$b_2 = u_0 M_{\delta_e}$$

$$b_1 = u_0 M_u \frac{X_{\delta_e}}{m}$$

$$b_0 = g \left(M_u \frac{Z_{\delta_e}}{m} - M_{\delta_e} \frac{Z_u}{m} \right)$$

Finalmente,

$$\frac{\Delta \bar{\theta}(s)}{\Delta \bar{\delta}_e(s)} = G_{\theta\delta_e} = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{f(s)}, \quad (\text{B.16})$$

em que os coeficientes são

$$c_2 = M_{\delta_e} \quad (\text{B.17})$$

$$c_1 = M_u \frac{X_{\delta_e}}{m} + M_w \frac{Z_{\delta_e}}{m} - M_{\delta_e} \left(\frac{X_u}{m} + \frac{Z_w}{m} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$c_0 = M_{\delta_e} \left(\frac{X_u}{m} \frac{Z_w}{m} - \frac{X_w}{m} \frac{Z_u}{m} \right) + \frac{Z_{\delta_e}}{m} \left(M_u \frac{X_w}{m} - M_w \frac{X_u}{m} \right) + \frac{X_{\delta_e}}{m} \left(M_w \frac{Z_u}{m} - M_u \frac{Z_w}{m} \right) \quad (\text{B.19})$$

Estas funções de transferência permitem obter resultados mais exactos para a resposta à deflexão do leme de profundidade que os que se obtém com a aproximação mais simples considerada anteriormente.

Bibliografia

- [1] Bernard Etkin and Lloyd Duff Reid. *Dynamics of Flight: Stability and Control*. John Wiley and Sons, 3rd edition, 1996.
- [2] R. D. Finck. USAF Stability and Control Datcom. Technical Report AFWAL-TR-83-3048, Air Force Wright Aeronautical Laboratories, 1978.
- [3] Barnes W. McCormick. *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*. John Wiley and Sons, 2nd edition, 1995.
- [4] Robert C. Nelson. *Flight Stability and Automatic Control*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1998.
- [5] Jan Roskam. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls, Part I*. DAR-corporation, 2003.