



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

## **O fluxo de Ricci e o teorema de Hamilton**

Gabriel Guimarães Carvalho

Dissertação de Mestrado

Recife  
22 de Agosto de 2013

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Gabriel Guimarães Carvalho

## **O fluxo de Ricci e o teorema de Hamilton**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação  
em Matemática do Departamento de Matemática da  
Universidade Federal de Pernambuco como requisito  
parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Henrique José Morais de Araújo*

Recife  
22 de Agosto de 2013

**Catálogo na fonte**  
**Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571**

**Carvalho, Gabriel Guimarães**  
**O fluxo de Ricci e o teorema de Hamilton / Gabriel Guimarães**  
**Carvalho. - Recife: O Autor, 2013.**  
**141 f., il., fig.**

**Orientador: Henrique José Morais de Araújo.**  
**Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco.**  
**CCEN, Matemática, 2013.**

**Inclui referências e apêndice.**

**1. Geometria diferencial. 2. Equações diferenciais parciais. 3.**  
**Topologia. I. Araújo, Henrique José Morais de (orientador). II. Título.**

**516.36**

**CDD (23. ed.)**

**MEI2014 – 011**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: \_\_\_\_\_

Henrique José Moraes de Araújo, *UFPE*

**Orientador**

\_\_\_\_\_  
Antônio Fernando Pereira de Sousa, *UFPE*

\_\_\_\_\_  
Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante, *UFAL*

## **O FLUXO DE RICCI E O TEOREMA DE HAMILTON**

*Por*

Gabriel Guimarães Carvalho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410*

RECIFE – BRASIL

22 de Agosto de 2013

*Para meu avô, Barreto Guimarães, o primeiro professor de  
matemática que conheci.*

---

## Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente aos meus pais, pelo apoio durante a vida e principalmente estes últimos anos, aos meus irmãos e a Dal, segunda mãe/avó, pelo amor incondicional desde o meu primeiro segundo de vida. Agradeço também a Laise pela ótima companhia nestes últimos anos.

Agradeço ao Professor Henrique Araújo primeiramente por me aceitar como seu aluno de mestrado sem ter me conhecido durante a graduação. Em seguida, por confiar em mim na elaboração deste trabalho, pela orientação impecável, inspiração, e principalmente pelo tempo (muito tempo) dedicado a mim e a esta dissertação.

Aos demais membros da banca examinadora, Fernando Atônio Sousa (Tony) e Marcos Petrúcio (UFAL), pela leitura e crítica deste trabalho.

Agradeço aos amigos que fiz na vida pelos bons momentos e por estarem comigo nos maus momentos. Em especial gostaria de agradecer a Thiago Araújo pelas noites insanas de estudo desde o último semestre de graduação, Luiz Silva e João Alves pela amizade e pela ajuda com o  $\text{\LaTeX}$  e aos demais amigos da matemática que me ajudaram de alguma maneira : Fábio Botler, Alan Farias, Edgar Amorim, Gilson Simões, Lorena Brizza, Thiago Tanaka, Renato Teixeira, Lucas Mesquita, João Gondim, Tiago Duque, Jaime César e por aí vai... . Aos amigos da física Marília Cabral, Clarissa Cozzi, Henrique Vicente, Ceará (vulgo Tiago Saraiva), Hugo Andrade, André Gomes, Humberto Barbosa, Filgueira, Moacyr. Aos amigos do colégio não mais presentes, Marina e Felipe pela boa lembrança que vocês deixaram na minha vida.

Agradeço aos professores Tony e Sérgio Santa Cruz pelo meu primeiro contato com a Geometria Diferencial e a Topologia. Ao professor Fernando Codá Marques que durante o III Workshop de Geometria Diferencial da UFAL me esclareceu pessoalmente algumas partes do material contido em [5]. Também aos professores Ramón Mendonza, Hildeberto Cabral, Pedro Hinojosa e Eduardo Leandro pelos cursos que fiz no mestrado. Aos professores Hélio Porto, Francisco Brito, César Castilho, Sóstenes Lins, Pablo Braz, Fernando Nóbrega, Cleide Soares, Antônio Carlos, Manoel Lemos, André Meireles e Marcus Vinícius pelos cursos da graduação ou por me ajudarem de alguma forma. Aos funcionários que fazem o DMat funcionar, em especial agradeço à Tânia, Fátima e Manoel por toda a ajuda.

Agradeço à agência CAPES pelo auxílio financeiro.

*Living is easy with eyes closed, misunderstanding all you see. It's getting  
hard to be someone, but it all works out; It doesn't matter much to me.*

—JOHN LENNON (Strawberry Fields Forever)

---

## Resumo

---

Neste trabalho, basicamente dividido em duas partes, estudamos primeiramente o fluxo de Ricci e seus aspectos fundamentais, tais como um princípio do máximo e existência e unicidade de solução para tempos curtos, dada uma condição inicial diferenciável. Em seguida, nosso estudo é restrito às variedades diferenciáveis tridimensionais. Nesta segunda parte, abordamos os aspectos fundamentais da teoria criada pelo matemático Richard Hamilton e terminamos com uma prova para o seu teorema, usando conjuntos pinçantes, que caracteriza variedades tridimensionais com curvatura de Ricci positiva.

**Palavras-chave:** Fluxo de Ricci, teorema de Hamilton, geometria Riemanniana, variedades diferenciáveis, equações diferenciais parciais, conjuntos pinçantes, curvatura de Ricci.



---

## Abstract

---

In this work, basically divided in two parts, we first study the Ricci flow and its elementary features, such as a maximum principle and the short-time existence and unicity of a solution, given a smooth initial condition. Subsequently, our study is restricted to three-dimensional differentiable manifolds. In this second part, we approach the fundamental aspects of the theory created by the mathematician Richard Hamilton and we finish with a proof, using pinching sets, of his theorem which characterises three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature.

**Keywords:** Ricci flow, Hamilton's theorem, Riemannian geometry, differentiable manifolds, partial differential equations, pinching sets, Ricci curvature.

---

## Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
1.1	Pré-história do fluxo de Ricci	10
1.2	Arcabouço da dissertação	11
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1	Geometria Riemanniana	13
2.2	Evolução de quantidades geométricas	23
2.3	Laplaciano do tensor curvatura	34
<b>3</b>	<b>O fluxo de Ricci</b>	<b>37</b>
3.1	Definição	37
3.2	Soluções exatas para o fluxo de Ricci	38
3.2.1	Variedades Einstein	38
3.2.2	Variedades produto	39
3.2.3	Invariância por difeomorfismos	39
3.2.4	Sólitons de Ricci	39
3.2.5	Mudança de escala	42
3.3	Evolução de quantidades geométricas através do fluxo de Ricci	42
3.4	O fluxo de Ricci normalizado	47
3.4.1	O fluxo de Ricci normalizado e variedades Einstein	49
<b>4</b>	<b>O princípio do máximo</b>	<b>51</b>
4.1	Análise elementar	51
4.2	O princípio do máximo para escalares	52
4.3	Controle básico na evolução da curvatura	54
<b>5</b>	<b>Equações diferenciais parciais</b>	<b>58</b>
5.1	EDPs lineares em $\mathbb{R}^n$	58
5.1.1	O símbolo principal	59
5.2	Generalização para fibrados vetoriais	60

5.2.1	Teoria linear	60
5.2.2	Teoria não-linear	62
5.2.3	Linearização	63
5.3	Existência e unicidade para equações parabólicas	64
5.4	Linearização do fluxo de Ricci	64
5.5	O fluxo de Ricci não é parabólico	64
<b>6</b>	<b>Existência e unicidade do fluxo de Ricci para tempos curtos</b>	<b>67</b>
6.1	Preliminares	67
6.1.1	Álgebra linear	67
6.1.2	A conexão no fibrado pull-back	68
6.2	O fluxo da aplicação harmônica	68
6.3	O Fluxo de Ricci-DeTurck	72
6.4	O Teorema	75
<b>7</b>	<b>A teoria de Hamilton</b>	<b>79</b>
7.1	A EDO de Hamilton	79
7.2	Soluções máximas	87
7.3	O princípio do máximo de Hamilton	91
7.4	O teorema da convergência de Hamilton	98
7.5	Fluxo de Ricci em dimensão três	105
<b>Apêndice A</b>	<b>Estimativas e outros cálculos</b>	<b>119</b>
A.1	A operação $*$ e o fluxo de Ricci	119
A.1.1	Propriedades do produto tensorial	119
A.1.2	A operação $*$	119
A.1.3	Derivadas temporais	124
A.2	Limitação para a norma do tensor de curvatura	126
A.3	Outras estimativas	128
A.3.1	Conexão e laplaciano	128
A.3.2	Conexão e derivada temporal	129
A.3.3	Equações de evolução	131
A.3.4	Estimativas	133
A.3.5	Derivadas de ordem superior	136
A.4	Solução da equação de Bernoulli	138
<b>Referências</b>		<b>140</b>

### 1.1 Pré-história do fluxo de Ricci

Por volta do ano 1904, o matemático francês Henri Poincaré conjectura que toda variedade diferenciável tridimensional fechada e simplesmente conexa deveria ser homeomorfa à esfera tridimensional  $S^3$ . Mais tarde surge uma generalização desta conjectura para dimensões maiores que três. Esta conjectura generalizada acabou sendo provada para  $\dim M \geq 4$ : a prova para a conjectura de Poincaré generalizada para dimensão maior que ou igual a cinco rendeu ao matemático americano Stephen Smale a Medalha Fields de 1966 e a prova para dimensão quatro rendeu ao matemático, também americano, Michael Freedman a Medalha Fields do ano 1986. Restava ainda a conjectura original de Poincaré.

No início da década de 1980, o matemático americano William Thurston cria uma conjectura que, uma vez mostrada, teria como corolário a conjectura de Poincaré (para mais detalhes sobre a conjectura de Thurston o leitor pode consultar a seção 1.4 de [23]). Como parte de um programa para demonstrar a conjectura de geometrização de Thurston, o matemático americano Richard Hamilton introduz em seu pioneiro artigo [12] o fluxo de Ricci. Muito esforço foi feito nas décadas seguintes até que em 2002 e 2003 o matemático russo Grigori Perel'man divulga uma série de três artigos na internet ([18], [20] e [19]) que, por fim, provavam a conjectura de Thurston e, consequentemente, a quase centenária conjectura de Poincaré. É importante observar que a conjectura de Poincaré é puramente topológica, enquanto a abordagem de Perel'man usava geometria com técnicas de equações diferenciais parciais. Os trabalhos de Perel'man lhe renderam tanto a medalha Fields de 2006 quanto o prêmio oferecido pelo Instituto Clay de Matemática por resolver o primeiro dos sete problemas do milênio, curiosamente rejeitados por Perel'man.

## 1.2 Arcabouço da dissertação

Vimos na seção anterior quando e em que contexto surgiu o fluxo de Ricci e a sua importância histórica na solução da conjectura de Poincaré. Esta dissertação tem como propósito apresentar o fluxo de Ricci, cuja equação é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t)) \\ g(0) = g_0, \end{cases}$$

e estudar alguns aspectos desta equação, como um princípio de máximo satisfeito por esta equação e a existência e unicidade de solução para tempos curtos. O principal resultado desta dissertação é o teorema de Hamilton que afirma que uma variedade Riemanniana tridimensional  $(M, g)$  com curvatura de Ricci positiva admite uma métrica com curvatura seccional constante igual a 1. O teorema de classificação de formas espaciais nos diz, então, que  $M$  é difeomorfa a uma forma espacial esférica.

**Capítulo 2:** Na primeira seção fazemos uma exposição dos pré-requisitos mínimos de geometria Riemanniana. Em seguida, na segunda seção, estudamos como alguns objetos geométricos variam com uma variação arbitrária da métrica Riemanniana. Por fim, na seção três, calculamos o laplaciano do tensor curvatura de Riemann.

**Capítulo 3:** Na primeira seção introduzimos o fluxo de Ricci e na seção seguinte estudamos algumas soluções exatas para tal equação. Na terceira seção usamos os resultados obtidos no capítulo anterior para ver como alguns objetos geométricos variam quando a métrica Riemanniana varia de acordo com a equação fluxo de Ricci. Na quarta e última seção, introduzimos o fluxo de Ricci normalizado e estudamos sua relação com as variedades Einstein.

**Capítulo 4:** Na primeira seção enunciamos alguns resultados de análise matemática e equações diferenciais ordinárias que vamos precisar na seção seguinte. Na segunda seção, provamos um princípio do máximo e na seção seguinte usamos este princípio para achar estimativas para a curvatura escalar e para a norma do tensor curvatura de Riemann enquanto a métrica Riemanniana muda de acordo com a equação do fluxo de Ricci.

**Capítulo 5:** Na primeira seção apresentamos o formato de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem em  $\mathbb{R}^n$  e definimos o que é uma equação diferencial parcial parabólica. Também, apresentamos o símbolo principal de uma EDP linear de segunda ordem em  $\mathbb{R}^n$  e definimos parabolicidade em termos do símbolo principal. Na segunda seção, generalizamos o que foi feito na seção anterior para uma EDP definida em um fibrado vetorial diferenciável sobre uma variedade Riemanniana. Na terceira seção apresentamos o resultado que assegura para tempos curtos a existência e unicidade de solução para uma EDP parabólica. Na quarta seção calculamos a linearização da equação do fluxo de Ricci e na última seção mostramos que a equação do fluxo de Ricci não é parabólica.

**Capítulo 6:** Na primeira seção relembramos um fato da álgebra linear e calculamos a conexão

em um fibrado pull-back. Na segunda seção introduzimos o fluxo da aplicação harmônica e mostramos que este sistema de EDPs é parabólico. Na seção três introduzimos o chamado fluxo de Ricci-DeTurck e mostramos que a equação deste fluxo é uma equação parabólica. Por fim, na última seção, mostramos, usando o *truque DeTurck*, o seguinte

**Teorema:** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta e seja  $g_0$  uma métrica diferenciável em  $M$ . Então existe um número real  $T > 0$  e uma família diferenciável a um parâmetro de métricas  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , tal que  $g(t)$  é solução do fluxo de Ricci com  $g(0) = g_0$ . A solução é única.

**Capítulo 7:** Na primeira seção introduzimos a noção de tensor de curvatura algébrico e também a EDO de Hamilton. Na segunda seção definimos o que significa uma solução do fluxo de Ricci ser máxima e provamos o seguinte, e importante,

**Teorema:** Se  $M$  é uma variedade fechada e  $g(t)$  uma solução do fluxo de Ricci em um intervalo maximal  $[0, T)$  e  $T < \infty$ , então

$$\lim_{t \rightarrow T} \max_M |Rm|(\cdot, t) = \infty.$$

Este teorema nos fornece um critério para identificar uma solução máxima. Na terceira seção provamos um princípio do máximo que o tensor métrico satisfaz sob certas condições. Na quarta seção provamos o chamado teorema da convergência de Hamilton. Na última seção fazemos um estudo de variedades tridimensionais e encerramos com um resultado, devido a Hamilton, que caracteriza variedades tridimensionais com curvatura de Ricci positiva. Isto é, provamos, a menos da proposição 7.30, o seguinte

**Teorema:** Seja  $(M^3, g_0)$  uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci positiva. Se  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , é a solução máxima do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$ , então as métricas  $\frac{1}{4(T-t)}g(t)$  convergem na topologia  $C^\infty$ , quando  $t \rightarrow T$ , para uma métrica de curvatura seccional constante e igual a 1.

**Apêndice A:** Este apêndice contém cálculos e estimativas que usamos ao longo desta dissertação e que não foram incluídas no texto original para tornar a leitura mais didática.

Boa Leitura!

## CAPÍTULO 2

---

### Preliminares

---

*Em geometria, não existe uma estrada especial para os reis.*  
—Euclides

### 2.1 Geometria Riemanniana

Nesta seção será apresentado o material mínimo de geometria Riemanniana necessário para a leitura deste texto, assumindo que o leitor tem conhecimentos básicos sobre variedades diferenciáveis e cálculo com tensores. As proposições, lemas e afirmações não demonstradas no texto desta seção são resultados básicos em geometria Riemanniana e o leitor pode encontrá-los facilmente nas referências [7], [17] e/ou [16]. Neste texto, diferenciável será sinônimo de  $C^\infty$ . Também, a notação de Einstein para somatórios será amplamente utilizada.

**Definição 2.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Um  $k$ -tensor covariante em  $V$  é uma aplicação multilinear  $F : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Similarmente, um  $l$ -tensor contravariante é uma aplicação multilinear  $\tilde{F} : (V^*)^l \rightarrow \mathbb{R}$ . Um tensor misto de tipo  $\binom{k}{l}$ , ou  $(k, l)$ , é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definição 2.2.** *Em uma variedade diferenciável  $M$ , um campo tensorial do tipo  $(k, l)$  é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathcal{F}(M),$$

onde  $\mathfrak{X}(M)$  é o conjunto de campos vetoriais diferenciáveis definidos em  $M$ ,  $\mathfrak{X}^*(M)$  é o conjunto das 1-formas diferenciáveis definidas em  $M$  e  $\mathcal{F}(M)$  é o conjunto das funções diferenciáveis definidas em  $M$  que assumem valores reais.

**Observação 2.3.** No contexto de campos tensoriais, *linear* significa  $\mathcal{F}(M)$ –linear.

As seções diferenciáveis de um fibrado  $E$  sobre a variedade  $M$  serão denotadas por  $\Gamma(E)$ . Assim, denotando o fibrado tangente por  $TM$  e o fibrado cotangente por  $T^*M$ , temos que  $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$  e  $\Gamma(T^*M) = \mathfrak{X}^*(M)$ . Note que se  $\omega \in \Gamma(T^*M) = \mathfrak{X}^*(M)$ , então  $\omega$  é uma aplicação linear de  $\mathfrak{X}(M)$  em  $\mathcal{F}(M)$ . Da mesma forma, se  $X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ , então  $X$  é uma aplicação linear de  $\mathfrak{X}^*(M)$  em  $\mathcal{F}(M)$ . Denotando  $\otimes^k T^*M = \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{k \text{ vezes}}$  e

$\otimes^l TM = \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{l \text{ vezes}}$ , então um campo tensorial de tipo  $(k, l)$  sobre  $M$  pode ser visto como uma seção do fibrado

$$(\otimes^k T^*M) \otimes (\otimes^l TM).$$

**Definição 2.4.** Um tensor métrico  $g$  em uma variedade diferenciável  $M$  é um campo tensorial do tipo  $(2, 0)$  simétrico e definido positivo. É comum usar a notação  $\langle X, Y \rangle$  para denotar a função  $g(X, Y)$ .

**Definição 2.5.** Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável munida com um tensor métrico. Escrevemos  $(M, g)$  para explicitar a variedade e o tensor métrico em questão.

**Definição 2.6.** Um difeomorfismo  $\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$  entre variedades Riemannianas tal que  $\psi^*(g_N) = c g_M$ , onde  $\psi^*$  denota o pull-back de  $\psi$ , com  $c \neq 0$  é dito uma homotetia de coeficiente  $c$ .

Seguindo nossa convenção, um campo vetorial é um campo tensorial de tipo  $(0, 1)$  e uma 1–forma é um campo tensorial de tipo  $(1, 0)$ . Na presença de um tensor métrico, todo campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tem um único dual em  $\mathfrak{X}^*(M)$ , denotado por  $X^\flat$  que é dado por  $X^\flat(Y) = \langle Y, X \rangle$ , para qualquer  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Equivalentemente, dada uma 1–forma  $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ , existe um único campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $X^\flat = \omega$ . No último caso também podemos escrever  $\omega^\sharp = X$ . Estas aplicações  $\flat$  e  $\sharp$ , são conhecidas como *isomorfismos musicais*. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [10].

Seja  $\{x^1, \dots, x^n\}$  um sistema de coordenadas locais de  $M$ . Então, denotando por  $\partial_i$  o campo tangente  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  e por  $dx^i$  o seu campo dual, as componentes de um campo tensorial  $T$  de tipo  $(k, l)$  são dadas por

$$T(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_l}) = T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}.$$

Assim, localmente, escrevemos

$$T = T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l},$$

onde os índices variam no conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n = \dim M$ .

**Exemplo 2.7.** O tensor métrico  $g$  de uma variedade Riemanniana  $M$  pode ser escrito, localmente, como  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , onde  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$  e  $g_{ij} = g_{ji}$ . A inversa da métrica é denotada por  $g^{-1}$  e é um campo tensorial simétrico do tipo  $(0, 2)$  que localmente podemos escrever como  $g^{-1} = g^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$ , com  $g^{ij} = g^{-1}(dx^i, dx^j)$ . As componentes de  $g^{-1}$  satisfazem a relação  $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$  (delta de Kronecker).



**Definição 2.8.** Ao longo deste texto, o significado de *traço* de um campo tensorial será uma contração com a métrica  $g$  ou com sua inversa  $g^{-1}$ . Quando as entradas do tensor que estão sendo contraídas forem importantes usaremos uma notação que deixe claro quais entradas estão sendo contraídas. Assim,  $tr_{ab}$  representará a contração da  $a$ -ésima com a  $b$ -ésima entrada.

**Exemplo 2.9.** Seja  $A$  um campo tensorial do tipo  $(3, 1)$ . Então,  $tr_{13} A$  será um campo tensorial do tipo  $(1, 1)$  cujas componentes com respeito a um sistema de coordenadas locais  $\{x^1, \dots, x^n\}$  são dadas por

$$(tr_{13} A)(\partial_i, dx^j) = g^{kl} A_{kil}^j.$$

Quando o referencial local é ortonormal, temos

$$(tr_{13} A)(\partial_i, dx^j) = \sum_k A_{kik}^j.$$

Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis, seja  $E$  um fibrado vetorial sobre  $N$  e seja  $f$  uma função diferenciável de  $M$  em  $N$ .

**Definição 2.10.** O fibrado pull-back de  $E$  por  $f$ , denotado por  $f^*E$ , é o fibrado vetorial diferenciável sobre  $M$  definido por

$$f^*E = \{(p, \xi) | p \in M, \xi \in E, \pi(\xi) = f(p)\},$$

onde  $\pi : E \rightarrow N$  é a projeção de fibrado.

Em outras palavras,  $f^*E$  é um fibrado vetorial sobre  $M$  cuja fibra em  $p \in M$  é  $E_{f(p)}$ .

**Exemplo 2.11.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada. Seja  $f'$  o campo de velocidades de  $f$ . Então, fazendo  $M = (a, b)$ ,  $N = \mathbb{R}^2$ ,  $E = T\mathbb{R}^2$  e  $\pi : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção de fibrado, temos que  $f'$  será uma seção do fibrado  $f^*E$ .

Um conceito muito importante para a geometria Riemanniana é o conceito de conexão. Este objeto matemático permite que possamos derivar (campos de vetores, campos de tensores...) em uma variedade Riemanniana.

**Definição 2.12.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$(ii) \quad \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$(iii) \quad \nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

quaisquer que sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ .

**Observação 2.13.** A notação  $X(f)$  significa a derivada da função  $f$  na direção do campo  $X$ . Assim,  $X(f) = \nabla_X f = df(X)$ .

A terceira propriedade nos diz que  $\nabla$  não é tensorial, pois não é  $\mathcal{F}(M)$ –linear no segundo argumento.

Em variedades Riemannianas, existe uma conexão especial que satisfaz mais duas propriedades adicionais:

$$(iv) \quad X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$(v) \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

onde  $[X, Y] = XY - YX$  é o colchete de Lie.

De fato, esta conexão que satisfaz todas as cinco propriedades acima é única e denominada a conexão Riemanniana (ou de Levi-Civita) da variedade  $M$ . A conexão Riemanniana é caracterizada pela fórmula de Koszul:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [Y, X], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle.$$

Se escrevermos  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ , os coeficientes da conexão Riemanniana, chamados de símbolos de Christoffel, são unicamente determinados pela fórmula de Koszul e são dados por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left\{ g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m} \right\}, \quad (2.1)$$

onde  $g_{im,j} := \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{im})$ .

Consideremos a aplicação  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Esta aplicação é  $\mathcal{F}(M)$ –trilinear e portanto define um campo tensorial do tipo  $(3, 1)$  dado por

$$R(X, Y, Z, \theta) = \theta(R(X, Y)Z).$$

Este é o chamado tensor curvatura. A partir do tensor curvatura podemos definir um novo campo tensorial em  $M$ , do tipo  $(4, 0)$ , chamado de tensor curvatura de Riemann, dado por

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

cujas componentes são dadas por

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_l g_{ik}) + g_{lp} (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^p - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^p). \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Proposição 2.14.** O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \quad R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

$$(ii) R_{ijkl} = R_{klij}$$

$$(iii) R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0 \text{ (Primeira identidade de Bianchi.)}$$

Além destas propriedades o tensor curvatura de Riemann satisfaz o que chamamos de segunda identidade de Bianchi

$$\nabla_p R_{ijst} + \nabla_i R_{jpst} + \nabla_j R_{pist} = 0, \quad (2.3)$$

onde  $\nabla_p := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^p}}$ .

Vamos considerar uma função real que determina completamente o tensor curvatura, chamada curvatura seccional.

Um plano tangente a  $M$  em  $p$  é um subespaço bidimensional de  $T_p M$ . Para vetores  $u$  e  $v$  em um plano tangente definimos

$$Q(u, v) = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - (\langle u, v \rangle)^2. \quad (2.4)$$

**Proposição 2.15.** *Seja  $\Pi$  um plano tangente de  $M$  em  $p$ . O número*

$$K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{Q(u, v)} \quad (2.5)$$

*não depende da base  $\{u, v\}$  de  $\Pi$  e é chamado de curvatura seccional  $K(\Pi)$  de  $\Pi$ .*

Estaremos trabalhando também com outras duas curvaturas, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar. A curvatura de Ricci, ou tensor de Ricci, é obtida contraindo-se com a inversa da métrica a segunda e a quarta entrada do tensor curvatura de Riemann. Assim,

$$Ric = tr_{24} Rm.$$

As componentes do tensor de Ricci estão definidas por

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}. \quad (2.6)$$

e são dadas, através da equação 2.2, por

$$\begin{aligned} R_{ik} &= g^{jl} R_{ijkl} \\ &= \frac{1}{2} g^{jl} (\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_l g_{ik}) + (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{pm}^p - \Gamma_{pk}^m \Gamma_{im}^p). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pelas simetrias do tensor de Riemann, verifica-se que o tensor de Ricci é um tensor simétrico de tipo  $(2, 0)$ , mesmo tipo do tensor métrico.

**Observação 2.16.** A curvatura de Ricci pode ser interpretada como uma média de curvaturas seccionais. Para mais detalhes, consultar [7]. A relação entre a curvatura de Ricci aqui definida e a definida em [7] é, portanto,

$$Ric_p(v, v) = (n - 1) Ric_p(v)$$

para qualquer  $p \in M$  e qualquer vetor unitário  $v \in T_p M$ .

A curvatura escalar é definida como sendo o traço do tensor de Ricci, sendo portanto uma função real diferenciável definida em  $M$ . Assim, usando a equação 2.7,

$$\begin{aligned} S &= g^{ik} R_{ik} \\ &= \frac{1}{2} g^{jl} g^{ik} (\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_l g_{ik}) + g^{ik} (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{pm}^p - \Gamma_{pk}^m \Gamma_{im}^p). \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Teorema 2.17.** *O tensor curvatura de Riemann  $Rm$  é invariante por isometrias locais: Isto é, se  $\varphi : (M, g) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  é uma isometria local, então  $\varphi^* \tilde{Rm} = Rm$ .*

Como corolário temos que a curvatura seccional, a curvatura escalar e a curvatura de Ricci são também invariantes por isometrias locais.

A proposição a seguir é de fácil verificação e nos diz como devem mudar algumas quantidades geométricas após fazer a mudança de escala  $g \mapsto \alpha g$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  é um número positivo.

**Proposição 2.18.** *Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  uma constante positiva. Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Então, com respeito a métrica  $\tilde{g} = \alpha g$ , temos*

$$\begin{aligned} a) \tilde{g}^{-1} &= \frac{1}{\alpha} g^{-1} & b) \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k & c) \tilde{R}_{ijk}{}^l &= R_{ijk}{}^l & d) \tilde{R}_{ijkl} &= \alpha R_{ijkl} \\ e) \tilde{R}_{ij} &= R_{ij} & f) \tilde{S} &= \frac{1}{\alpha} S & g) d\tilde{V} &= \alpha^{n/2} dV, \end{aligned}$$

onde  $dV$  denota a forma volume da métrica  $g$  e  $d\tilde{V}$  denota a forma volume da métrica  $\tilde{g}$ .

A proposição a seguir nos fornece o tensor de Ricci no caso em que  $M$  é uma superfície. Neste caso há somente uma curvatura seccional, que chamamos de curvatura de Gauss.

**Proposição 2.19.** *Seja  $M$  uma variedade de dimensão dois com métrica Riemanniana  $g$ . Então,*

$$Ric(g) = Kg,$$

onde  $K$  é a curvatura de Gauss da variedade.

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, e_2\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$  em algum  $p \in M$ . Lembrando que o tensor de Riemann se anula caso três vetores sejam iguais (devido a primeira identidade de Bianchi) temos

$$Ric(e_1, e_2) = \sum_i Rm(e_1, e_i, e_2, e_i) = 0$$

e, além disto, temos que  $g(e_1, e_2) = 0$ . Portanto,  $Ric(e_1, e_2) = Kg(e_1, e_2)$ . É fácil ver que, pelo que foi feito acima, que o mesmo vale para  $Ric(e_2, e_1)$ . Calculando  $Ric(e_1, e_1)$  e  $Ric(e_2, e_2)$  temos

$$\begin{aligned} Ric(e_1, e_1) &= \sum_i Rm(e_1, e_i, e_1, e_i) = Rm(e_1, e_2, e_1, e_2) = K \\ Ric(e_2, e_2) &= \sum_i Rm(e_2, e_i, e_2, e_i) = Rm(e_2, e_1, e_2, e_1) = K \end{aligned}$$

Portanto,  $Ric(e_i, e_i) = Kg(e_i, e_i)$ . Assim, os tensores de  $Ric$  e  $Kg$  coincidem na base, logo são iguais. ■

No caso especial em que a curvatura seccional da variedade é constante temos a seguinte

**Proposição 2.20.** *Se  $M$  é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante  $C$ , então*

$$R(X, Y)Z = C\{\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X\}.$$

Com este resultado podemos mostrar o seguinte

**Corolário 2.21.** *Se  $M$  tem curvatura seccional constante  $C$  e  $\dim M = n$ , então  $\text{Ric} = (n-1)Cg$  e  $S = n(n-1)C$ .*

O lema a seguir nos diz como é a derivada de Lie do tensor métrico. Usamos a usual regra do produto para derivação tensorial, o fato que  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$  e as propriedades da conexão Riemanniana.

**Lema 2.22.** *Numa variedade Riemanniana  $(M, g)$  a derivada de Lie do tensor métrico é dada por*

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = \nabla \omega(Y, Z) + \nabla \omega(Z, Y),$$

onde  $\omega^\sharp = X$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z) \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y - [X, Y], Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z - [X, Z] \rangle \\ &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle \\ &= Y\langle X, Z \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle + Z\langle Y, X \rangle - \langle \nabla_Z Y, X \rangle \\ &= Y(\omega(Z)) - \omega(\nabla_Y Z) + Z(\omega(Y)) - \omega(\nabla_Z Y) \\ &= (\nabla_Y \omega)(Z) + (\nabla_Z \omega)(Y) \\ &= \nabla \omega(Y, Z) + \nabla \omega(Z, Y). \end{aligned}$$

■

**Observação 2.23.** Note que a demonstração acima produz uma fórmula alternativa para o cálculo da derivada de Lie do tensor métrico dada por

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle. \quad (2.9)$$

É importante lembrar que a conexão de Levi-Civita pode ser estendida para atuar em campos tensoriais. Também é importante lembrar que esta conexão comuta com traços e que vale a regra de Leibniz  $\nabla_X (A \otimes B) = (\nabla_X A) \otimes B + A \otimes (\nabla_X B)$ . Adotaremos também a convenção

$$\nabla_X A(\cdots) = \nabla A(X, \cdots),$$

diferente da convenção usada em [7, pág. 113], por exemplo. Pelas propriedades da conexão Riemanniana mostra-se facilmente que a métrica é paralela. Isto é,  $\nabla g = 0$ .

Também podemos generalizar o tensor métrico para campos de tensores. Em [16] encontramos a expressão

$$\langle F, G \rangle = g^{i_1 r_1} \dots g^{i_k r_k} g_{j_1 s_1} \dots g_{j_l s_l} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} G_{r_1 \dots r_k}^{s_1 \dots s_l} \quad (2.10)$$

para o produto interno entre  $F$  e  $G$ , ambos de tipo  $(k, l)$ , em termos de suas componentes. A norma de um tensor fica definida por  $|T|^2 = \langle T, T \rangle$ .

**Exemplo 2.24.** O traço de um campo tensorial do tipo  $(2, 0)$  é o produto interno com a métrica Riemanniana  $g$ . De fato, se escrevermos  $\alpha = a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , temos que  $tr \alpha = g^{ij} a_{ij}$ . Por outro lado, pela equação 2.10, temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha, g \rangle &= g^{ik} g^{jl} \alpha_{ij} g_{kl} \\ &= g^{ik} \alpha_{ij} \delta_k^j \\ &= g^{ij} \alpha_{ij} \\ &= tr \alpha. \end{aligned}$$

Temos também a noção de segunda derivada covariante de um campo tensorial. Escrevemos

$$\nabla_{X,Y}^2 := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}.$$

Desta maneira, temos

$$\nabla_{X,Y}^2 A := \nabla_X \nabla_Y A - \nabla_{\nabla_X Y} A \equiv (\nabla^2 A)(X, Y, \dots).$$

Quando aplicada em funções obtemos a Hessiana, que é o campo tensorial de tipo  $(2, 0)$  simétrico

$$Hess f := \nabla df = \nabla \nabla f.$$

Quando aplicada a campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , a Hessiana da função  $f$  satisfaz

$$(Hess f)(X, Y) = (\nabla \nabla f)(X, Y) = \nabla_{X,Y}^2 f = XY f - (\nabla_X Y) f.$$

O gradiente de uma função diferenciável  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  é definido por  $grad f := (df)^\sharp$ . Assim, o gradiente é dado localmente por

$$grad f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j. \quad (2.11)$$

É importante ressaltar que, uma vez que se define o gradiente de uma função diferenciável  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  como feito acima, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(grad f)} g(X, Y) &= \mathcal{L}_{(df)^\sharp} g(X, Y) \\ &= \nabla df(X, Y) + \nabla df(Y, X) \\ &= 2(Hess f)(X, Y). \end{aligned}$$

Adotamos também a convenção

$$\Delta A := tr_{12} \nabla^2 A,$$

para o laplaciano de  $A$ . Relembrando,  $tr_{12}$  significa que estamos tomando o traço sobre primeira e segunda entradas de  $\nabla^2 A$ . Em um referencial ortonormal temos, portanto,

$$\Delta A = \sum_i \nabla_i \nabla_i A.$$

Nesse contexto podemos considerar

$$\begin{aligned} R(X, Y) &:= \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X, Y]} \\ &= \nabla_{Y, X}^2 - \nabla_{X, Y}^2. \end{aligned}$$

Assim,  $R(X, Y)$  pode ser aplicado a campos tensoriais. A igualdade a seguir é conhecida como identidade de Ricci e nos diz como comutar segundas derivadas. Esta igualdade será provada na subseção A.3.1 do apêndice. Temos

$$\begin{aligned} \nabla_{Y, X}^2 A(W, Z, \dots) - \nabla_{X, Y}^2 A(W, Z, \dots) &= -A(R(X, Y)W, Z, \dots) \\ &\quad - A(W, R(X, Y)Z, \dots) - \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

para qualquer campo tensorial  $A$  de tipo  $(k, 0)$ .

Usaremos com frequência o operador divergência, denotado por  $\delta$ , que será definido por  $\delta(T) = -tr_{12} \nabla T$ . Note que  $\delta$  transforma campos tensoriais de tipo  $(k, l)$  em campos tensoriais do tipo  $(k-1, l)$ .

**Exemplo 2.25.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Então,  $\delta(fg) = -df$ . De fato, considerando um referencial ortonormal local  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , temos

$$\begin{aligned} \delta(fg)(e_j) &= [-tr_{12} \nabla(fg)](e_j) \\ &= [-tr_{12} (df \otimes g + f \otimes \nabla g)](e_j) \\ &= [-tr_{12} (df \otimes g)](e_j) \\ &= -\sum_i df(e_i)g(e_i, e_j) \\ &= -g(grad f, e_j) \\ &= -df(e_j). \end{aligned}$$

Podemos também definir a divergência de um campo vetorial.

**Definição 2.26.** Seja  $X$  um campo vetorial. Definimos a divergência de  $X$  por

$$div X = \mathcal{C}(\nabla X),$$

onde  $\mathcal{C}$  é a contração do tensor de tipo  $(1, 1)$   $\nabla X$ .

A adjunta formal de  $\delta$  é a derivada covariante  $\nabla$ . Isto quer dizer que  $\delta$  é o único operador que manda campos tensoriais de tipo  $(k+1, l)$  em campos tensoriais de tipo  $(k, l)$  tal que para qualquer campo tensorial  $T$  de tipo  $(k, l)$  vale

$$\langle \nabla T, S \rangle = \langle T, \delta S \rangle + \text{div}(V(S, T)),$$

onde  $V(S, T)$  é obtido, em coordenadas, através de

$$V(S, T) = S_{\alpha, i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} T_{p_1, \dots, p_k}^{q_1, \dots, q_l} g_{j_1 q_1} \dots g_{j_l q_l} g^{i_1 p_1} \dots g^{i_k p_k} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

Dado um tensor simétrico do tipo  $(2, 0)$   $T$ , definimos o *tensor gravitação* por

$$G(T) = T - \frac{1}{2}(\text{tr } T)g. \quad (2.13)$$

O seu divergente é dado por

$$\delta G(T) = \delta T + \frac{1}{2}d(\text{tr } T), \quad (2.14)$$

pois  $\delta(fg) = -df$  qualquer que seja  $f \in \mathcal{F}(M)$ , como vimos no exemplo 2.25.

Uma identidade bastante útil, obtida contraindo a segunda identidade de Bianchi, é

$$\delta G(\text{Ric}) = \delta \text{Ric} + \frac{1}{2}dS = 0, \quad (2.15)$$

onde a última igualdade pode ser vista em [17], corolário 54, deixando claro que o operador divergência aqui definido tem sinal contrário ao deste referência. Tomando o divergente da expressão acima obtemos

$$\delta^2 \text{Ric} = \frac{1}{2}\Delta S, \quad (2.16)$$

uma vez que vale  $-\delta dS = -(-\text{tr}_{12} \nabla^2 S) = \Delta S$ .

Usando resultados anteriores mostramos facilmente que

$$\mathcal{L}_{(\delta G(T))^\sharp} g = \mathcal{L}_{(\delta T)^\sharp} g + \text{Hess}(\text{tr } T). \quad (2.17)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\delta G(T))^\sharp} g &= \mathcal{L}_{(\delta T + \frac{1}{2}d(\text{tr } T))^\sharp} g \\ &= \mathcal{L}_{(\delta T)^\sharp} g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{(d(\text{tr } T))^\sharp} g \\ &= \mathcal{L}_{(\delta T)^\sharp} g + \frac{1}{2}(2\text{Hess}(\text{tr } T)) \\ &= \mathcal{L}_{(\delta T)^\sharp} g + \text{Hess}(\text{tr } T). \end{aligned}$$

Por fim, denotamos por  $A * B$  qualquer campo tensorial que seja combinação linear de campos tensoriais, cada um obtido a partir de  $A \otimes B$  usando a métrica para fazer mudanças de tipo, contrações e contrações com a métrica. Como  $\nabla g = 0$ , vale a regra de Leibniz  $\nabla(A * B) = (\nabla A) * B + A * (\nabla B)$ . Também podemos estimar que  $|A * B| \leq C(n)|A||B|$ , onde  $n$  é a dimensão da variedade. Na seção A.1 do apêndice discutiremos esta estimativa.



## 2.2 Evolução de quantidades geométricas

Suponha que tenhamos uma família diferenciável de métricas  $g = g(t)$  para  $t$  em algum intervalo não-degenerado, e escrevemos  $h = \frac{\partial g}{\partial t}$ . Nesta seção veremos como algumas entidades geométricas variam em termos da variação do tensor métrico. A menos que dito em contrário, os campos vetoriais aqui mencionados não dependem de  $t$ . A referência para esta seção é o capítulo 2 de [23].

Estaremos com frequência derivando campos tensoriais com relação a  $t$ . Podemos ver  $\partial_t$  como sendo  $\nabla_{\partial_t}$  na variedade produto  $M \times \mathbb{R}$ . É importante notar que  $\partial_t$  não altera o tipo do campo tensorial. No apêndice o leitor encontrará as regras de derivação utilizadas nos cálculos desta seção.

A proposição a seguir mostra como a conexão Riemanniana muda. Antes, vamos estabelecer uma notação e provar um lema. Vamos definir

$$\partial_t(\nabla(X, Y)) := (\partial_t \nabla)(X, Y) + \nabla(\partial_t X, Y) + \nabla(X, \partial_t Y), \quad (2.18)$$

onde  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ , quaisquer que sejam os campos  $X$  e  $Y$ , dependentes ou não de  $t$ . Denotaremos por  $\Pi(X, Y) := (\frac{\partial}{\partial t} \nabla)(X, Y)$ . Assim,

$$\partial_t(\nabla(X, Y)) := \Pi(X, Y) + \nabla(\partial_t X, Y) + \nabla(X, \partial_t Y).$$

É importante observar que mesmo que  $X$  e  $Y$  não dependam de  $t$ ,  $\nabla_X Y$  depende de  $t$  pois a conexão depende da métrica, que depende de  $t$ .

**Observação 2.27.** Não confundir  $(\partial_t \nabla)(X, Y)$  com  $\partial_t(\nabla(X, Y))$ . Quando os campos vetoriais  $X$  e  $Y$  não dependem de  $t$  temos uma igualdade. Para o caso em que  $X$  e  $Y$  são campos que dependem de  $t$  vale a equação 2.18.

Embora  $\nabla_X Y$  não seja tensorial, pois  $\nabla_X fY \neq f\nabla_X Y$ , mostraremos que no caso em que os campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  não dependem de  $t$ ,  $\Pi = (\partial_t \nabla)$  é tensorial.

**Lema 2.28.**  $\Pi(X, Y)$  é um campo tensorial simétrico.

*Demonstração.* Para mostrar que  $\Pi$  é tensorial tome  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$  e tome  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1 + fX_2}(Y_1 + gY_2) &= \nabla_{X_1} Y_1 + X_1(g)Y_2 + g\nabla_{X_1} Y_2 \\ &\quad + f\nabla_{X_2} Y_1 + fX_2(g)Y_2 + fg\nabla_{X_2} Y_2. \end{aligned}$$

Derivando com respeito a  $t$  ambos os lados da expressão acima temos

$$\begin{aligned} \Pi(X_1 + fX_2, Y_1 + gY_2) &= \Pi(X_1, Y_1) + 0 + g\Pi(X_1, Y_2) + f\Pi(X_2, Y_1) \\ &\quad + 0 + fg\Pi(X_2, Y_2) \\ &= \Pi(X_1, Y_1) + g\Pi(X_1, Y_2) + f\Pi(X_2, Y_1) + fg\Pi(X_2, Y_2) \end{aligned}$$

Para mostrar que este tensor é simétrico, basta perceber que

$$\Pi(X, Y) - \Pi(Y, X) = \partial_t[X, Y] = 0.$$

■

**Observação 2.29.** Note que  $\Pi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$  é  $\mathcal{F}(M)$ -bilinear. Assim,  $\Pi$  define um campo tensorial de tipo  $(2, 1)$  dado por

$$\Pi(X, Y, \theta) = \theta(\Pi(X, Y)).$$

**Proposição 2.30.**

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \nabla_X Y, Z \right\rangle = \frac{1}{2} \left[ (\nabla_Y h)(X, Z) + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Z h)(X, Y) \right]. \quad (2.19)$$

*Demonstração.* Como, pela igualdade A.17 do apêndice,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= h(\nabla_X Y, Z) + \langle \Pi(X, Y), Z \rangle + \left\langle \nabla_X Y, \frac{\partial}{\partial t} Z \right\rangle \\ &= h(\nabla_X Y, Z) + \langle \Pi(X, Y), Z \rangle \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \langle \Pi(X, Y), Z \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_X Y, Z \rangle - h(\nabla_X Y, Z) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [X \langle Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle] - h(\nabla_X Y, Z) \\ &= \left[ X(h(Y, Z)) - h(Y, \nabla_X Z) - \left\langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \nabla_X Z \right\rangle \right] - h(\nabla_X Y, Z) \\ &= (\nabla_X h)(Y, Z) - \langle \Pi(X, Z), Y \rangle \\ &= (\nabla_X h)(Y, Z) - \langle \Pi(Z, X), Y \rangle. \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento apresentado acima, obtemos que

$$\langle \Pi(Z, X), Y \rangle = (\nabla_Z h)(X, Y) - \langle \Pi(Y, Z), X \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \Pi(X, Y), Z \rangle &= (\nabla_X h)(Y, Z) - \langle \Pi(Z, X), Y \rangle = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Z h)(X, Y) \\ &\quad + \langle \Pi(Y, Z), X \rangle. \end{aligned}$$

Novamente, pelo mesmo argumento anterior, obtemos que

$$\langle \Pi(Y, Z), X \rangle = (\nabla_Y h)(X, Z) - \langle \Pi(X, Y), Z \rangle.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \langle \Pi(X, Y), Z \rangle &= (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Z h)(X, Y) \\ &\quad + (\nabla_Y h)(X, Z) - \langle \Pi(X, Y), Z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\langle \Pi(X, Y), Z \rangle = (\nabla_X h)(Y, Z) + (\nabla_Y h)(X, Z) - (\nabla_Z h)(X, Y).$$

Para uma demonstração alternativa, olhar a subseção A.3.2 do apêndice. ■

Agora vamos ver como o tensor curvatura muda.

**Proposição 2.31.**

$$\frac{\partial}{\partial t} R(X, Y)W = (\nabla_Y \Pi)(X, W) - (\nabla_X \Pi)(Y, W). \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Por definição temos  $R(X, Y)W = \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X, Y]} W$ . Segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(X, Y)W &= \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X, Y]} W] \\ &= \Pi(Y, \nabla_X W) + \nabla_Y (\Pi(X, W)) - \Pi(X, \nabla_Y W) - \nabla_X (\Pi(Y, W)) + \Pi([X, Y], W), \end{aligned}$$

pela definição de  $\Pi$  e pelas propriedades de  $\partial_t$  (ver apêndice, equação A.17). Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(X, Y)W &= [\Pi(Y, \nabla_X W) + \nabla_Y (\Pi(X, W))] \\ &\quad - [\Pi(X, \nabla_Y W) + \nabla_X (\Pi(Y, W))] + \Pi([X, Y], W) \\ &= [\Pi(Y, \nabla_X W) + \nabla_Y (\Pi(X, W))] \\ &\quad - [\Pi(X, \nabla_Y W) + \nabla_X (\Pi(Y, W))] + \Pi(\nabla_X Y - \nabla_Y X, W) \\ &= [\Pi(Y, \nabla_X W) + \nabla_Y (\Pi(X, W))] \\ &\quad - [\Pi(X, \nabla_Y W) + \nabla_X (\Pi(Y, W))] + \Pi(\nabla_X Y, W) \\ &\quad - \Pi(\nabla_Y X, W) \\ &= \{\nabla_Y (\Pi(X, W)) - \Pi(\nabla_Y X, W) - \Pi(X, \nabla_Y W)\} \\ &\quad - \{\nabla_X (\Pi(Y, W)) - \Pi(\nabla_X Y, W) - \Pi(Y, \nabla_X W)\} \\ &= (\nabla_Y \Pi)(X, W) - (\nabla_X \Pi)(Y, W). \end{aligned}$$

■

Na proposição a seguir fixaremos um ponto  $p$  na variedade  $M$  e usaremos um sistema de coordenadas normais em  $p$ . Este sistema possui algumas propriedades especiais que simplificam vários cálculos em geometria Riemanniana. A saber, em um sistema de coordenadas normais em  $p$  temos que os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  são todos nulos no ponto  $p$  e a base de campos coordenados em  $T_p M$  é ortonormal.

**Proposição 2.32.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Rm(X, Y, W, Z) &= \frac{1}{2} [h(R(X, Y)W, Z) - h(R(X, Y)Z, W)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\nabla_{Y, W}^2 h(X, Z) - \nabla_{X, W}^2 h(Y, Z) \\ &\quad + \nabla_{X, Z}^2 h(Y, W) - \nabla_{Y, Z}^2 h(X, W)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

*Demonstração.* Fixe um tempo  $t$ . Para simplificar mostraremos esta identidade tensorial em um ponto  $p \in M$  com coordenadas normais. Assim  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$  e sem perda de generalidade podemos escolher campos vetoriais diferenciáveis  $X, Y, Z$  e  $W$  tais que  $\nabla X = \nabla Y = \nabla Z = \nabla W = 0$ , bastando tomar campos com coeficientes constantes no sistema de coordenadas normais.

Pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R(X, Y)W, Z \rangle &= h(R(X, Y)W, Z) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} R(X, Y)W, Z \right\rangle \\ &= h(R(X, Y)W, Z) + \langle (\nabla_Y \Pi)(X, W) - (\nabla_X \Pi)(Y, W), Z \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\nabla X = \nabla Y = \nabla Z = \nabla W = 0$ , temos que  $(\nabla_Y \Pi)(X, W) = \nabla_Y(\Pi(X, W))$ . Além disso, como  $\nabla g = 0$ , vale

$$\begin{aligned} (\nabla_Y g)(\Pi(X, W), Z) &= Yg(\Pi(X, W), Z) - g(\nabla_Y(\Pi(X, W)), Z) - g(\Pi(X, W), \nabla_Y Z) \\ &= Yg(\Pi(X, W), Z) - g((\nabla_Y \Pi)(X, W), Z) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $g((\nabla_Y \Pi)(X, W), Z) = \langle (\nabla_Y \Pi)(X, W), Z \rangle = Yg(\Pi(X, W), Z)$ . Analogamente,

$$\langle (\nabla_X \Pi)(Y, W), Z \rangle = Xg(\Pi(Y, W), Z).$$

Usando o que foi feito acima e a proposição 2.30 temos

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_Y \Pi)(X, W), Z \rangle &= Yg(\Pi(X, W), Z) \\ &= \frac{1}{2}Y[(\nabla_W h)(X, Z) + (\nabla_X h)(W, Z) - (\nabla_Z h)(X, W)] \\ &= \frac{1}{2}[(\nabla_Y \nabla_W h)(X, Z) + (\nabla_Y \nabla_X h)(W, Z) - (\nabla_Y \nabla_Z h)(X, W)] \\ &= \frac{1}{2}[\nabla_{Y,W}^2 h(X, Z) + \nabla_{Y,X}^2 h(W, Z) - \nabla_{Y,Z}^2 h(X, W)]. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\langle (\nabla_X \Pi)(Y, W), Z \rangle = \frac{1}{2}[\nabla_{X,W}^2 h(Y, Z) + \nabla_{X,Y}^2 h(W, Z) - \nabla_{X,Z}^2 h(Y, W)].$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R(X, Y)W, Z \rangle &= h(R(X, Y)W, Z) + \langle (\nabla_Y \Pi)(X, W) - (\nabla_X \Pi)(Y, W), Z \rangle \\ &= h(R(X, Y)W, Z) + \frac{1}{2}[\nabla_{Y,W}^2 h(X, Z) + \nabla_{Y,X}^2 h(W, Z) \\ &\quad - \nabla_{Y,Z}^2 h(X, W) - \nabla_{X,W}^2 h(Y, Z) \\ &\quad - \nabla_{X,Y}^2 h(W, Z) + \nabla_{X,Z}^2 h(Y, W)]. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração usaremos a identidade de Ricci dada em 2.12

$$\frac{1}{2}(\nabla_{Y,X}^2 h(W, Z) - \nabla_{X,Y}^2 h(W, Z)) = \frac{1}{2}(-h(R(X, Y)W, Z) - h(W, R(X, Y)Z)).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R(X, Y)W, Z \rangle &= \frac{1}{2} [h(R(X, Y)W, Z) - h(R(X, Y)Z, W)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\nabla_{Y, W}^2 h(X, Z) - \nabla_{Y, Z}^2 h(X, W) \\ &\quad - \nabla_{X, W}^2 h(Y, Z) + \nabla_{X, Z}^2 h(Y, W)]. \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.33.** Para qualquer campo tensorial  $\alpha \in \Gamma(\otimes^2 T^*M)$  que depende de  $t$ , vale

$$\frac{\partial}{\partial t} (tr \alpha) = -\langle h, \alpha \rangle + tr \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right). \quad (2.22)$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos checar como a inversa da métrica muda sabendo que  $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = h_{ij}$ . Usando que  $g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i$ , e portanto que  $\frac{\partial}{\partial t} (g^{ik} g_{kl}) = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial t} (g^{ik} g_{kl}) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ik} \right) g_{kl} + g^{ik} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{kl} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ik} \right) g_{kl} + g^{ik} h_{kl}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (g^{ik}) g_{kl} &= -g^{ik} h_{kl} \\ \frac{\partial}{\partial t} (g^{ik}) g_{kl} g^{jl} &= -g^{jl} g^{ik} h_{kl} \\ \frac{\partial}{\partial t} (g^{ik}) \delta_k^j &= -h^{ij} \\ \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij}) &= -h^{ij}. \end{aligned}$$

Feito isto, escrevendo  $\alpha = \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , calculamos

$$\frac{\partial}{\partial t} (tr \alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} \alpha_{ij}) = -h^{ij} \alpha_{ij} + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_{ij}) = -\langle h, \alpha \rangle + tr \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right),$$

pois  $-h^{ij} \alpha_{ij} = -g^{ik} g^{jl} h_{kl} \alpha_{ij} = -\langle h, \alpha \rangle$ , pela equação 2.10. ■

Dado um campo tensorial, é comum fixar algumas entradas e deixar outras entradas livres, escrevendo  $\cdot, \star, \dots$  nas entradas livres deste campo. Por exemplo, se  $A$  é um campo tensorial de tipo  $(2, 0)$  cuja primeira entrada  $X$  está fixada, representamos a 1-forma resultante por  $A(X, \cdot)$ . Neste contexto,  $g(X, \cdot) = X^\flat$ .

Esta notação é comumente usada para indicar em quais entradas de um tensor estamos tomando o traço (ou fazendo uma contração intrínseca). Por exemplo, podemos escrever

$$Ric(X, Y) = tr Rm(X, \cdot, Y, \cdot).$$

**Proposição 2.34.**

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric = -\frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g, \quad (2.23)$$

onde  $\Delta_L$  é o laplaciano Lichnerowicz

$$\Delta_L A(X, W) := \Delta A(X, W) - A(X, Ric(W)) - A(W, Ric(X)) + 2tr[A(R(X, \cdot)W, \cdot)], \quad (2.24)$$

onde  $A$  é um campo tensorial do tipo  $(2, 0)$ .

Na definição do laplaciano Lichnerowicz o termo  $Ric(W)$  significa o campo vetorial tal que  $Ric(X, W) = \langle Ric(W), X \rangle$ . Em outras palavras,  $Ric(W) = (Ric(\cdot, W))^\sharp$ . Neste caso, se  $W = W^a \partial_a$ ,  $Ric(W) = W^i g^{kj} R_{ij} \partial_k$ . Antes de demonstrar esta proposição vamos observar alguns fatos que usaremos fortemente durante a demonstração. Primeiramente nós temos que

$$tr h[(R(X, \cdot)W, \cdot)] = \langle Rm(X, \cdot, W, \cdot), h \rangle. \quad (2.25)$$

Em seguida, temos

$$h(X, Ric(W)) = \langle h(X, \cdot), Ric(W, \cdot) \rangle \quad (2.26)$$

$$= tr(h(X, \cdot) \otimes Ric(W, \cdot)) \quad (2.27)$$

$$= -tr h(R(W, \cdot), X). \quad (2.28)$$

Vejamos a primeira:

$$\begin{aligned} tr h[(R(X, \cdot)W, \cdot)] &= g^{jl} h(R(X^i \partial_i, \partial_j) W^k \partial_k, \partial_l) \\ &= g^{jl} h(X^i W^k R_{ijk}^m \partial_m, \partial_l) \\ &= g^{jl} X^i W^k R_{ijk}^m h(\partial_m, \partial_l) \\ &= g^{jl} X^i W^k R_{ijk}^m h_{ml} \\ &= g^{jl} g^{ms} R_{ijks} X^i W^k h_{ml} \\ &= \langle Rm(X, \cdot, W, \cdot), h \rangle. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora a segunda:

$$\begin{aligned} h(Ric(W), X) &= h(W^i g^{kj} R_{ij} \partial_k, X^m \partial_m) \\ &= W^i g^{kj} R_{ij} X^m h_{km} \\ &= g^{kj} (W^i R_{ij}) (X^m h_{mk}) \\ &= \langle Ric(W, \cdot), h(X, \cdot) \rangle \\ &= tr[h(X, \cdot) \otimes Ric(W, \cdot)]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

A partir da expressão 2.29, usando um referencial ortonormal local, obtemos:

$$\begin{aligned} g^{kj} (W^i R_{ij}) (X^m h_{mk}) &= \sum_{j,m} (W^i R_{ij}) (X^m h_{jm}) \\ &= \sum_{j,a,m} (W^i R_{iaja}) (X^m h_{jm}) \\ &= - \sum_{j,a,m} (W^i R_{iaaj}) (X^m h_{jm}) \\ &= -tr[h(R(W, \cdot), X)]. \end{aligned}$$

Finalmente, a demonstração da proposição 2.34:

*Demonstração.* Pela proposição 2.33 usando  $\alpha = Rm(X, \cdot, W, \cdot)$ , e pela definição do tensor de Ricci temos

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) = -\langle R(X, \cdot, W, \cdot), h \rangle + tr \left[ \frac{\partial}{\partial t} Rm(X, \cdot, W, \cdot) \right].$$

Já mostramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Rm(X, Y, W, Z) &= \frac{1}{2} [h(R(X, Y)W, Z) - h(R(X, Y)Z, W)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\nabla_{Y, W}^2 h(X, Z) - \nabla_{X, W}^2 h(Y, Z) \\ &\quad + \nabla_{X, Z}^2 h(Y, W) - \nabla_{Y, Z}^2 h(X, W)]. \end{aligned}$$

Segue diretamente da identidade de Ricci dada em 2.12 que

$$\nabla_{Y, W}^2 h(X, Z) = \nabla_{W, Y}^2 h(X, Z) + h(R(Y, W)X, Z) + h(R(Y, W)Z, X)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Rm(X, Y, W, Z) &= \frac{1}{2} [h(R(X, Y)W, Z) - h(R(X, Y)Z, W) \\ &\quad + h(R(Y, W)X, Z) + h(R(Y, W)Z, X)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\nabla_{W, Y}^2 h(X, Z) - \nabla_{X, W}^2 h(Y, Z) \\ &\quad + \nabla_{X, Z}^2 h(Y, W) - \nabla_{Y, Z}^2 h(X, W)]. \end{aligned}$$

Devemos tomar o traço em  $Y$  e  $Z$ . Temos

$$\begin{aligned} tr \nabla_{X, \cdot}^2 h(\cdot, W) &= -(\nabla \delta h)(X, W) \\ tr \nabla_{W, \cdot}^2 h(X, \cdot) &= -(\nabla \delta h)(W, X) \\ tr \nabla_{X, W}^2 h(\cdot, \cdot) &= \nabla_{X, W}^2 tr h = Hess(tr h)(X, W) \\ tr \nabla_{\cdot, \cdot}^2 h(X, W) &= (\Delta h)(X, W), \end{aligned}$$

onde as duas últimas igualdades são triviais (basta recordar a definição de Laplaciano e Hessiana) e as duas primeiras são análogas. Vamos mostrar a primeira. Primeiramente temos

$$tr \nabla_{X, \cdot}^2 h(\cdot, W) = tr \nabla^2 h(X, \cdot, \cdot, W),$$

usando a definição da segunda derivada covariante. Em seguida temos que

$$\begin{aligned} (\nabla \delta h)(X, W) &= \nabla_X \delta h(W) \\ &= \nabla_X (-tr \nabla h(\cdot, \cdot, W)) \\ &= -tr \nabla_X \nabla h(\cdot, \cdot, W) \\ &= -tr \nabla^2 h(X, \cdot, \cdot, W), \end{aligned}$$

mostrando, portanto, a igualdade desejada. Note que foi usado o fato de a derivada covariante comutar com traços.

Segue que,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial}{\partial t} R(X, \cdot, W, \cdot) \right] &= \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{2} [h(R(X, \cdot)W, \cdot) - h(R(X, \cdot), \cdot, W) \right. \\ &\quad + h(R(\cdot, W)X, \cdot) + h(R(\cdot, W), \cdot, X)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\nabla_W^2 h(X, \cdot) - \nabla_{X, W}^2 (\cdot, \cdot) \\ &\quad \left. + \nabla_X^2 h(\cdot, W) - \nabla_{\cdot, X}^2 h(X, W)] \right\}. \end{aligned}$$

Daí temos,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial}{\partial t} R(X, \cdot, W, \cdot) \right] &= \frac{1}{2} \left[ -(\nabla \delta h)(W, X) - \operatorname{Hess}(\operatorname{tr} h)(X, W) \right. \\ &\quad \left. - (\nabla \delta h)(X, W) - (\Delta h)(X, W) \right] \\ &\quad + \\ &\quad \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ h(R(X, \cdot)W, \cdot) - h(R(X, \cdot), \cdot, W) \right. \\ &\quad \left. + h(R(\cdot, W)X, \cdot) + h(R(\cdot, W), \cdot, X) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial}{\partial t} R(X, \cdot, W, \cdot) \right] &= -\frac{1}{2} \left[ (\nabla \delta h)(W, X) + \operatorname{Hess}(\operatorname{tr} h)(X, W) \right. \\ &\quad \left. + (\nabla \delta h)(X, W) + (\Delta h)(X, W) \right] \\ &\quad + \\ &\quad \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ h(R(X, \cdot)W, \cdot) - h(R(X, \cdot), \cdot, W) \right. \\ &\quad \left. + h(R(\cdot, W)X, \cdot) + h(R(\cdot, W), \cdot, X) \right]. \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Ric}(X, W) &= -\langle R(X, \cdot, W, \cdot), h \rangle + \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial}{\partial t} R(X, \cdot, W, \cdot) \right] \\ &= -\operatorname{tr} h(R(X, \cdot)W, \cdot) + \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial}{\partial t} Rm(X, \cdot, W, \cdot) \right] \end{aligned}$$



temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) &= -tr h(R(X, \cdot)W, \cdot) - \frac{1}{2}[(\nabla \delta h)(W, X) + Hess(tr h)(X, W) \\ &\quad + (\nabla \delta h)(X, W) + (\Delta h)(X, W)] \\ &\quad + \\ &\quad \frac{1}{2}tr[h(R(X, \cdot)W, \cdot) - h(R(X, \cdot), \cdot, W) \\ &\quad + h(R(\cdot, W)X, \cdot) + h(R(\cdot, W), \cdot, X)]. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) &= -\frac{1}{2}[(\nabla \delta h)(W, X) + Hess(tr h)(X, W) \\ &\quad + (\nabla \delta h)(X, W) + (\Delta h)(X, W)] \\ &\quad + \\ &\quad \frac{1}{2}tr[-h(R(X, \cdot)W, \cdot) - h(R(X, \cdot), \cdot, W) \\ &\quad + h(R(\cdot, W)X, \cdot) + h(R(\cdot, W), \cdot, X)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) &= -\frac{1}{2}[(\nabla \delta h)(W, X) + Hess(tr h)(X, W) \\ &\quad + (\nabla \delta h)(X, W) + (\Delta h)(X, W)] \\ &\quad - \\ &\quad \frac{1}{2}tr[h(R(X, \cdot)W, \cdot) + h(R(X, \cdot), \cdot, W) \\ &\quad + h(R(W, \cdot)X, \cdot) + h(R(W, \cdot), \cdot, X)]. \end{aligned}$$

Recordando que pela equação 2.28 valem

$$\begin{aligned} tr[h(R(W, \cdot), \cdot, X)] &= -h(X, Ric(W)) \\ tr[h(R(X, \cdot), \cdot, W)] &= -h(W, Ric(X)), \end{aligned}$$

e pela equação 2.25 vale

$$\begin{aligned} tr[h(R(X, \cdot)W, \cdot)] &= \langle Rm(X, \cdot, W, \cdot), h \rangle \\ &= \langle Rm(W, \cdot, X, \cdot), h \rangle \\ &= tr h(R(W, \cdot)X, \cdot), \end{aligned}$$

usando o lema 2.22, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) &= -\frac{1}{2} [\mathcal{L}_{(\delta h)^\sharp} g(X, W) + Hess(tr h)(X, W) \\ &\quad + (\Delta h)(X, W)] \\ &\quad - \\ &\quad \frac{1}{2} [2tr h(R(X, \cdot)W, \cdot) - h(Ric(X), W) \\ &\quad - h(Ric(W), X)]. \end{aligned}$$

Finalmente, usando a equação 2.17,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) &= -\frac{1}{2} [\mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g(X, W) + (\Delta h)(X, W)] \\ &\quad - tr h(R(X, \cdot)W, \cdot) + \frac{1}{2} [h(Ric(X), W) + h(Ric(W), X)] \\ &= -\frac{1}{2} \Delta_L h(X, W) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g(X, W) \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.35.**

$$\frac{\partial}{\partial t} S = -\langle Ric, h \rangle + \delta^2 h - \Delta(tr h). \quad (2.30)$$

*Demonstração.* Por definição temos que  $S = tr Ric$ . Segue da proposição 2.33 que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} tr(Ric) = -\langle Ric, h \rangle + tr \left( \frac{\partial}{\partial t} Ric \right).$$

Usando a proposição anterior e a linearidade do traço obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\langle Ric, h \rangle + tr \left( \frac{\partial}{\partial t} Ric \right) \\ &= -\langle Ric, h \rangle - \frac{1}{2} tr(\Delta_L h) - \frac{1}{2} tr(\mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g) \end{aligned}$$

Vamos calcular as duas últimas parcelas isoladamente. Note que a última parcela é como na equação 2.17. Como queremos o traço desta expressão, temos

$$\begin{aligned} tr(\mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g) &= tr(\mathcal{L}_{(\delta h)^\sharp} g) + tr(Hess(tr h)) \\ &= -2\delta^2 h + \Delta(tr h) \end{aligned}$$

onde a primeira parcela é obtida usando diretamente a fórmula da derivada de Lie do tensor métrico  $g$ ,  $\mathcal{L}_{\omega^\sharp} g(X, W) = \nabla \omega(X, W) + \nabla \omega(W, X)$ .

Lembrando que  $\Delta_L h(X, W) := \Delta h(X, W) - h(X, Ric(W)) - h(W, Ric(X)) + 2tr h(R(X, \cdot)W, \cdot)$ , podemos reescrever esta expressão da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Delta_L h(X, W) &= \Delta h(X, W) - h(X, Ric(W)) - h(W, Ric(X)) + 2tr h(R(X, \cdot)W, \cdot) \\ &= \Delta h(X, W) - \langle h(X, \cdot), Ric(W, \cdot) \rangle - \langle h(W, \cdot), Ric(X, \cdot) \rangle \\ &\quad + 2\langle Rm(X, \cdot, W, \cdot), h \rangle.\end{aligned}$$

Daí,

$$tr(\Delta_L h) = tr \Delta h - \langle h, Ric \rangle - \langle h, Ric \rangle + 2\langle h, Ric \rangle = tr \Delta h.$$

Combinando estes resultados, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -\langle Ric, h \rangle - \frac{1}{2}tr(\Delta_L h) - \frac{1}{2}tr(\mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g) \\ &= -\langle Ric, h \rangle - \frac{1}{2}tr \Delta h - \frac{1}{2}(-2\delta^2 h) - \frac{1}{2}tr \Delta h \\ &= -\langle Ric, h \rangle + \delta^2 h - \Delta(tr h)\end{aligned}$$

pois o traço comuta com derivadas covariantes. ■

**Proposição 2.36.**

$$\frac{\partial}{\partial t} dV = \frac{1}{2}(tr h) dV, \quad (2.31)$$

onde  $dV$  é a forma volume da variedade Riemanniana  $M$ .

*Demonstração.* Primeiramente, lembre que  $dV = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  e lembre também que a derivada do determinante é dada por

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = \det A (A^{-1})_{ji},$$

onde  $a_{ij}$  representa o elemento na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$  e  $(A^{-1})_{ij}$  representa o elemento na  $j$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna da matriz inversa de  $A$ . Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sqrt{\det g}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial t} \det g \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial \det g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \sum_{i,j} (g^{-1})_{ji} h_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g} (g^{ji} h_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (tr h) \sqrt{\det g}.\end{aligned}$$
■

### 2.3 Laplaciano do tensor curvatura

Definimos o campo tensorial  $B$ , de tipo  $(4, 0)$ , por

$$B(X, Y, W, Z) = \langle Rm(X, \cdot, Y, \star), Rm(W, \circ, Z, \diamond) \rangle. \quad (2.32)$$

**Observação 2.37.** Note que  $Rm(X, \cdot, Y, \star)$  e  $Rm(W, \circ, Z, \diamond)$  são campos tensoriais do tipo  $(2, 0)$ . Portanto,  $B$  é definido como sendo o produto interno destes dois campos obtidos. As componentes do tensor  $B$  são dadas por

$$\begin{aligned} B_{ijkl} &= B(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= \langle R(\partial_i, \partial_p, \partial_j, \partial_r), R(\partial_k, \partial_q, \partial_l, \partial_s) \rangle \\ &= g^{pq} g^{rs} R_{ipjr} R_{kqls}. \end{aligned}$$

Em um referencial ortonormal,

$$B_{ijkl} = \sum_{r,s} R_{irjs} R_{krsl}. \quad (2.33)$$

Verifica-se que o campo tensorial  $B$  possui algumas simetrias de  $Rm$ :

$$B(X, Y, W, Z) = B(W, Z, X, Y) = B(Y, X, Z, W).$$

**Proposição 2.38.**

$$\begin{aligned} (\Delta Rm)(X, Y, W, Z) = & - \nabla_{Y,W}^2 Ric(X, Z) + \nabla_{X,W}^2 Ric(Y, Z) \\ & - \nabla_{X,Z}^2 Ric(Y, W) + \nabla_{Y,Z}^2 Ric(X, W) \\ & - Ric(R(W, Z)Y, X) + Ric(R(W, Z)X, Y) \\ & - 2(B(X, Y, W, Z) - B(X, Y, Z, W) \\ & + B(X, W, Y, Z) - B(X, Z, Y, W)). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Usaremos coordenadas normais em  $p \in M$ . Da segunda identidade de Bianchi temos

$$\nabla_i R_{jkla} + \nabla_j R_{kila} + \nabla_k R_{ijla} = 0.$$

Derivando mais uma vez e tomando traço temos

$$\Delta R_{jkla} + \sum_i \nabla_i \nabla_j R_{kila} - \sum_i \nabla_i \nabla_k R_{ijla} = 0,$$

onde foi usado que  $\sum_i \nabla_i \nabla_i Rm = \Delta Rm$  (definição de Laplaciano). Pela identidade de Ricci dada em 2.12, lembrando que o colchete dos campos coordenados se anula,

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla_i \nabla_j R_{kila} - \sum_i \nabla_j \nabla_i R_{kila} &= - \sum_{c,i} R_{jike} R_{cila} - \sum_{c,i} R_{jiic} R_{ckla} \\ &\quad - \sum_{c,i} R_{jilc} R_{kica} - \sum_{c,i} R_{jiac} R_{kilc}. \end{aligned}$$

De fato, vamos nos convencer olhando pro primeiro termo do lado direito da igualdade acima, os outros são análogos. De acordo com a identidade de Ricci, este termo corresponde ao termo dado por

$$\begin{aligned} -\sum_i Rm(R(\partial_j, \partial_i)\partial_k, \partial_i, \partial_l, \partial_a) &= -\sum_i Rm\left(\sum_c R_{jike}\partial_c, \partial_i, \partial_l, \partial_a\right) \\ &= -\sum_{c,i} R_{jike}R_{cila}, \end{aligned}$$

onde é usado na primeira igualdade que

$$R(\partial_j, \partial_i)\partial_k = R_{jik}{}^m\partial_m = g^{cm}R_{jike}\partial_m = \sum_c R_{jike}\partial_c,$$

uma vez que a base é ortonormal em  $p$ . Usando que  $\sum_i R_{jiic} = -R_{jc}$  e que, pela primeira identidade de Bianchi,  $R_{cila} = -R_{ilca} - R_{lcia}$  obtemos

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla_i \nabla_j R_{kila} - \sum_i \nabla_j \nabla_i R_{kila} &= \sum_{c,i} R_{jike}R_{ilca} + \sum_{c,i} R_{jike}R_{lcia} \\ &\quad + \sum_c R_{jc}R_{kcla} - \sum_{c,i} R_{jilc}R_{kica} - \sum_{c,i} R_{jiac}R_{kilc} \quad (2.34) \\ &= \sum_c R_{jc}R_{kcla} + B_{jkla} - B_{jkal} - B_{jakl} + B_{jlka}, \end{aligned}$$

usando 2.33. Vamos agora estudar o termo  $\sum_i \nabla_j \nabla_i R_{kila}$  acima. Usando novamente a segunda identidade de Bianchi próximo a  $p$ ,

$$\nabla_b R_{laki} + \nabla_l R_{abki} + \nabla_a R_{blki} = 0.$$

Tomando o traço nas entradas com  $b$  e  $i$ ,

$$g^{ib}\nabla_b R_{laki} + \nabla_l R_{ak} - \nabla_a R_{lk} = 0.$$

Aplicando  $\nabla_j$  e nos restringindo ao ponto  $p$ , lembrando que estamos utilizando coordenadas normais em torno de  $p$ , temos

$$\sum_i \nabla_j \nabla_i R_{kila} = \nabla_j \nabla_a R_{lk} - \nabla_j \nabla_l R_{ak}.$$

Substituindo em 2.34 temos:

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla_i \nabla_j R_{kila} &= \nabla_j \nabla_a R_{lk} - \nabla_j \nabla_l R_{ak} \\ &\quad + \sum_c R_{jc}R_{kcla} + B_{jkla} - B_{jkal} - B_{jakl} + B_{jlka}. \end{aligned}$$

Trocando  $j$  por  $k$  na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla_i \nabla_k R_{jila} &= \nabla_k \nabla_a R_{lj} - \nabla_k \nabla_l R_{aj} \\ &\quad + \sum_c R_{kc}R_{jcila} + B_{kjla} - B_{kjal} - B_{kajl} + B_{klja}. \end{aligned}$$

Voltando para  $\Delta R_{jkla} + \sum_i \nabla_i \nabla_j R_{kila} - \sum_i \nabla_i \nabla_k R_{jila} = 0$  temos:

$$\begin{aligned}
 \Delta R_{jkla} &= -\sum_i \nabla_i \nabla_j R_{kila} + \sum_i \nabla_i \nabla_k R_{jila} \\
 &= -\left( \nabla_j \nabla_a R_{lk} - \nabla_j \nabla_l R_{ak} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_c R_{jc} R_{kcla} + B_{jkla} - B_{jkal} - B_{jaki} + B_{jlka} \right) \\
 &\quad + \left( \nabla_k \nabla_a R_{lj} - \nabla_k \nabla_l R_{aj} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_c R_{kc} R_{jc la} + B_{kjla} - B_{kjal} - B_{kaji} + B_{klja} \right).
 \end{aligned}$$

Usando as simetrias de  $B$ , temos que

$$\begin{aligned}
 B_{kjal} &= B_{jkla} \\
 B_{kjla} &= B_{jkal} \\
 B_{klja} &= B_{jaki} \\
 B_{kaji} &= B_{jlka}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \Delta R_{jkla} &= -\nabla_j \nabla_a R_{lk} + \nabla_j \nabla_l R_{ak} + \nabla_k \nabla_a R_{lj} \\
 &\quad - \nabla_k \nabla_l R_{aj} - \sum_c R_{jc} R_{kcla} + \sum_c R_{kc} R_{jc la} \\
 &\quad - 2(B_{jkla} - B_{jkal} + B_{jlka} - B_{jaki}).
 \end{aligned}$$

Como podemos fazer isto para qualquer ponto  $p \in M$ , o resultado segue. ■

## CAPÍTULO 3

---

### O fluxo de Ricci

---

Neste capítulo será apresentado o fluxo de Ricci. Além disto, discutiremos algumas soluções especiais para este fluxo, usaremos alguns resultados obtidos na seção 2.2 para ver como alguns objetos geométricos são modificados através do fluxo de Ricci e discutiremos um pouco sobre o fluxo de Ricci normalizado. As referências básicas para este capítulo são [23] e [2].

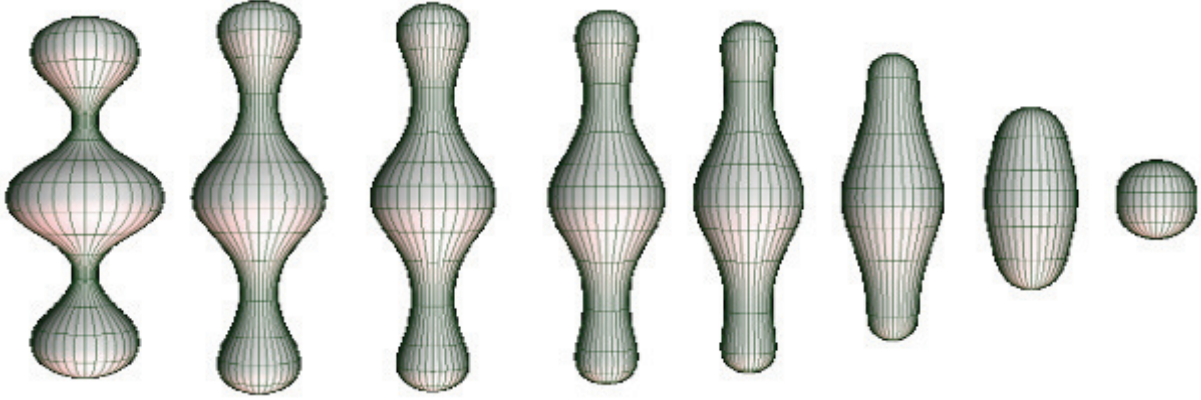
#### 3.1 Definição

**Definição 3.1.** *O Fluxo de Ricci em uma variedade Riemanniana  $M$ , definido por Hamilton em [12], é uma maneira de processar o tensor métrico  $g$  permitindo-o evoluir de acordo com a equação*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t)) \\ g(0) = g_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\text{Ric}(g(t))$  é a curvatura de Ricci, que depende da métrica  $g(t)$ .

Esta é uma equação de evolução no espaço de métricas Riemannianas que sob vários aspectos se comporta como uma equação do calor não-linear. Como na equação de calor, que age na direção de uniformizar a temperatura, o fluxo de Ricci tende a uniformizar a curvatura da variedade. Neste sentido, a variedade tende a se tornar cada vez mais “redonda”. A figura 3.1 abaixo exemplifica o fluxo de Ricci em uma superfície fechada. Note também que o volume desta superfície está diminuindo. A variação no volume da variedade quando a métrica Riemanniana varia de acordo com a equação do fluxo de Ricci é um fato interessante que provaremos mais adiante, na proposição 3.19.



**Figura 3.1** O fluxo de Ricci em uma superfície fechada

## 3.2 Soluções exatas para o fluxo de Ricci

### 3.2.1 Variedades Einstein

**Definição 3.2.** Uma variedade  $M$  com métrica Riemanniana satisfazendo

$$\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0$$

para alguma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  é chamada variedade Einstein.

Considere  $g(t) = u(t)g_0, u(t) > 0$ . Note que, como  $u$  é função apenas de  $t$ , em cada instante  $t$  temos uma mudança de escala como na proposição 2.18. Se esta família a um parâmetro de métricas é uma solução para o fluxo de Ricci, e  $\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0$ , teremos:

$$\begin{aligned} \partial_t(g(t)) &= u'(t)g_0 \\ &= -2\text{Ric}(u(t)g_0) \\ &= -2\text{Ric}(g_0) \\ &= -2\lambda g_0. \end{aligned}$$

Segue que  $u'(t) = -2\lambda$  e, pela condição inicial,  $u(t) = (1 - 2\lambda t)$ . Temos, assim, como solução para o fluxo

$$g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0.$$

Se  $\lambda > 0$  a solução é dita encolhedora e  $t \in [0, 1/2\lambda)$ , tendo uma singularidade em  $t = 1/2\lambda$ . Se  $\lambda = 0$  ou  $\lambda < 0$  a solução é dita estacionária ou expansora, respectivamente.

**Exemplo 3.3** ( $\lambda = 0$ ).  $\mathbb{R}^n$  com a métrica canônica é Einstein e temos trivialmente uma solução estacionária.

**Exemplo 3.4** ( $\lambda > 0$ ). Para a esfera redonda de curvatura seccional constante  $C$  ( $S^n, g_0$ ), nós temos  $\text{Ric}(g_0) = (n-1)Cg_0$ , pelo corolário 2.21. Portanto, temos como solução do fluxo de Ricci a função  $g(t) = (1 - 2(n-1)Ct)g_0$ . Com isso vemos que as distâncias na métrica  $g(t)$  vão diminuindo até  $T = \frac{1}{2(n-1)C}$ , onde há uma singularidade.



**Exemplo 3.5** ( $\lambda < 0$ ). Se  $g_0$  fosse a métrica hiperbólica - isto é, de curvatura seccional constante e igual a  $-1$  - teríamos  $Ric(g_0) = -(n-1)g_0$ , e portanto  $g(t) = (1 + 2(n-1)t)g_0$ . Assim a variedade expande homoteticamente para todo tempo.

### 3.2.2 Variedades produto

É um fato da geometria Riemanniana que em uma variedade produto  $M \times N$ , com projeções  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$  e  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ , o tensor de Ricci em  $M \times N$  satisfaz

$$Ric_{M \times N}(X, Y) = Ric_M(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)) + Ric_N(d\pi_2(X), d\pi_2(Y)).$$

Sejam  $(M^n, g_0)$  e  $(N^p, h_0)$  variedades Riemannianas, e denotemos por  $g_0 + h_0$  a métrica produto correspondente em  $M \times N$ . Se  $(M^n, g(t))$  e  $(N^p, h(t))$  são soluções do fluxo de Ricci, com  $g(0) = g_0$  e  $h(0) = h_0$ , então  $g(t) + h(t)$  é solução do fluxo de Ricci em  $M \times N$  com condição inicial  $g_0 + h_0$ .

### 3.2.3 Invariância por difeomorfismos

Se  $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$  é um difeomorfismo que não depende do tempo tal que  $g(t) = \varphi^* \tilde{g}(t)$  e  $\tilde{g}(t)$  é solução do fluxo de Ricci, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \varphi^* \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right) \\ &= \varphi^* (-2Ric(\tilde{g})) \\ &= -2Ric(\varphi^* \tilde{g}) \\ &= -2Ric(g), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade vem do teorema 2.17. Daí,  $g$  também é uma solução para o fluxo de Ricci.

### 3.2.4 Sólitos de Ricci

Vamos agora generalizar o que foi feito na subseção 3.2.3. Seja  $X(t)$  uma família de campos vetoriais em  $M$  que depende de  $t$ , gerando uma família de difeomorfismos  $\psi_t$ . Esta família a um parâmetro de difeomorfismos é o fluxo do campo vetorial  $X$ . Para mais detalhes o leitor pode consultar [13, pág. 41], seção 1.6. Seja  $\sigma$  uma função diferenciável de  $t$ .

**Proposição 3.6.** Definindo  $\hat{g}(t) = \sigma(t) \psi_t^*(g(t))$  temos

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = \sigma'(t) \psi_t^*(g) + \sigma(t) \psi_t^* \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right) + \sigma(t) \psi_t^*(\mathcal{L}_X g). \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Mostraremos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_t^*(g(t)) = \psi_t^* \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right) + \psi_t^*(\mathcal{L}_X g),$$

e o resultado segue pela regra do Leibniz. Fazendo  $\psi_t^*(g(t)) = \psi_t^*(g(t) - g(s)) + \psi_t^*(g(s))$  e calculando a derivada pela definição em  $t = s$  temos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow s} \frac{\psi_t^*(g(t)) - \psi_s^*(g(s))}{t - s} &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{\psi_t^*(g(t) - g(s)) + \psi_t^*(g(s)) - \psi_s^*(g(s) - g(s)) - \psi_s^*(g(s))}{t - s} \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{\psi_t^*(g(t) - g(s))}{t - s} + \lim_{t \rightarrow s} \frac{\psi_t^*(g(s)) - \psi_s^*(g(s))}{t - s} \\ &= \psi_s^* \left( \left. \frac{\partial g(t)}{\partial t} \right|_{t=s} \right) + \psi_s^*(\mathcal{L}_X g) \end{aligned}$$

pois, fazendo  $t - s = h$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow s} \frac{\psi_t^*(g(s)) - \psi_s^*(g(s))}{t - s} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_{s+h}^*(g(s)) - \psi_s^*(g(s))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \psi_s^* \left( \frac{\psi_h^*(g(s)) - \psi_0^*(g(s))}{h} \right) \\ &= \psi_s^*(\mathcal{L}_X g), \end{aligned}$$

pela definição de derivada de Lie (consultar [13], por exemplo). ■

**Definição 3.7.** Dizemos que uma métrica  $g_0$  é um *sóliton de Ricci* em  $M$  se existem  $\lambda \in \mathbb{R}$  e um campo de vetores  $Y$  tais que

$$\text{Ric}_{g_0} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g_0 = \lambda g_0.$$

Os sólitos caracterizam-se pela seguinte propriedade, que depende da unicidade do fluxo de Ricci, cuja versão para variedades compactas é demonstrada no capítulo 6: Toda solução do fluxo de Ricci  $g(t)$  com condição inicial  $g_0$  difere de um múltiplo de  $g_0$  por um difeomorfismo. De fato, se  $\varphi_t : M \rightarrow M$  ( $\varphi_0 = id$ ) é o fluxo gerado pelo campo de vetores (dependente do tempo)

$$X(t) = \frac{1}{1 - 2\lambda t} Y$$

então

$$g(t) = (1 - 2\lambda t) \varphi_t^*(g_0) = \sigma(t) \varphi_t^*(g_0)$$

é solução do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$ . Basta checar que satisfaz a equação do fluxo de Ricci:

$$\begin{aligned} \partial_t(g(t)) &= \sigma'(t) \varphi_t^* g_0 + \sigma(t) \varphi_t^* \mathcal{L}_X g_0 \\ &= -2\lambda \varphi_t^*(g_0) + (1 - 2\lambda t) \varphi_t^* \left( \mathcal{L}_{\frac{1}{1-2\lambda t} Y} g_0 \right) \\ &= \varphi_t^* (-2\lambda g_0 + \mathcal{L}_Y g_0) \\ &= \varphi_t^* (-2\text{Ric}(g_0)) \\ &= -2\text{Ric}(\varphi_t^*(g_0)) \\ &= -2\text{Ric}(g(t)/\sigma(t)). \end{aligned}$$

Como  $Ric(\alpha g) = Ric(g), \forall \alpha > 0$ ,

$$\partial_t(g(t)) = -2Ric(g(t)).$$

**Definição 3.8.** Um sóliton de Ricci é dito estacionário, expansor ou encolhedor se  $\lambda = 0, \lambda < 0$  ou  $\lambda > 0$ , respectivamente.

**Definição 3.9.** Um sóliton de Ricci cujo campo vetorial  $Y$  pode ser escrito como gradiente de alguma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é conhecido como sóliton gradiente de Ricci.

No exemplo a seguir  $\Delta$  representará o laplaciano clássico, isto é,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

**Exemplo 3.10** (O sóliton charuto de Hamilton). Seja  $M = \mathbb{R}^2$  com métrica inicial  $g_0 = \rho^2(dx^2 + dy^2)$ . Sabemos que nestas condições (parametrização isotérmica, [8, pág.283]) a curvatura de Gauss é dada por

$$K = -\frac{1}{2\rho^2}\Delta \ln \rho^2 = -\frac{1}{\rho^2}\Delta \ln \rho$$

e que para dimensão dois vale, pela proposição 2.19,  $Ric(g) = Kg$ . Se fizermos  $\rho^2 = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  então

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\rho^2}\Delta \ln \rho \\ &= -(1+x^2+y^2)\Delta \ln(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)\Delta \ln(1+x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Ric(g_0) = \frac{2}{1+x^2+y^2}g_0.$$

Definindo  $Y := -2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$  temos que  $\omega = Y^\flat = -\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx - \frac{2y}{1+x^2+y^2}dy$ . Da fórmula para a derivada de Lie do tensor métrico obtemos

$$(\mathcal{L}_Y g)_{ij} = \partial_i(\omega_j) + \partial_j(\omega_i) - 2\Gamma_{ij}^1\omega_1 - 2\Gamma_{ij}^2\omega_2.$$

Sabendo que  $g = \frac{1}{\rho^2}\delta_{ij}dx^i \otimes dx^j$ , temos que  $g^{-1} = \rho^2\delta_{ij}dx^i \otimes dx^j$ . Calculando os símbolos de Christoffel temos,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-x}{1+x^2+y^2} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{-y}{1+x^2+y^2} \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{y}{1+x^2+y^2} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{-x}{1+x^2+y^2} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{-y}{1+x^2+y^2}.$$

Uma vez que temos em mãos os símbolos de Christoffel calculamos que

$$\mathcal{L}_Y g = -\frac{4}{1+x^2+y^2} g_0$$

Por fim, se tomarmos  $f(x, y) = \ln \rho^2 = \ln \frac{1}{1+x^2+y^2}$  temos, pela equação 2.11,

$$\text{grad } f = g^{11} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + g^{22} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = -2 \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) = Y.$$

Mostrando que este é um sóliton gradiente. O sóliton charuto é um dos vários sólitons de Ricci que podem ser escritos explicitamente:

$$\text{Ric}_{g_0} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g_0 = 0 \cdot g_0.$$

Como  $\lambda = 0$ , este sóliton de Ricci é estacionário. Sendo  $X(t) = \frac{1}{1-2\lambda t} Y = Y = -2(x\partial_x + y\partial_y)$ , temos que o fluxo  $\varphi_t$ , com  $\varphi_0 = id$ , do campo  $X$  é dado por  $\varphi_t(x, y) = (e^{-2t}x, e^{-2t}y)$ . Assim,  $g(t) = \varphi_t^*(g_0)$ , solução do fluxo de Ricci, é dada por

$$g(t) = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{e^{4t} + x^2 + y^2}.$$

### 3.2.5 Mudança de escala

Suponha que  $(M, g(t))$  seja um fluxo de Ricci para  $t \in [0, T]$ . Dado um fator de escala  $\lambda > 0$ , se definirmos um novo fluxo multiplicando o tempo por  $\lambda$  e as distâncias por  $\lambda^{\frac{1}{2}}$ , este define

$$\hat{g}(x, t) = \lambda g(x, t/\lambda)$$

para  $t \in [0, \lambda T]$ , então

$$\partial_t(\hat{g}) = \lambda \partial_t g(x, t/\lambda) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} (-2\text{Ric}(g(t/\lambda)))(x) = -2\text{Ric}(\hat{g}(t))(x)$$

e  $\hat{g}$  também é um fluxo de Ricci. Esta mudança de escala é conhecida como *mudança de escala parabólica* do fluxo de Ricci.

## 3.3 Evolução de quantidades geométricas através do fluxo de Ricci

Nos voltaremos nesta seção para alguns resultados já calculados na seção 1.2. Agora faremos  $h = -2\text{Ric}$ .

Usando a proposição 2.32 e a proposição 2.38 temos

**Proposição 3.11.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Rm(X, Y, W, Z) = & (\Delta Rm)(X, Y, W, Z) \\ & - Ric(R(X, Y)W, Z) + Ric(R(X, Y)Z, W) \\ & - Ric(R(W, Z)X, Y) + Ric(R(W, Z)Y, X) \\ & + 2(B(X, Y, W, Z) - B(X, Y, Z, W)) \\ & + B(X, W, Y, Z) - B(X, Z, Y, W). \end{aligned}$$

**Observação 3.12.** Olhando para os termos das formas  $Ric(R(X, Y)W, Z)$  e  $B(X, Y, W, Z)$ , cujas componentes são dadas, respectivamente, por

$$R_{ml}R_{ijk}^m \\ g^{pq}g^{rs}R_{ipjr}R_{kqls},$$

uma maneira mais simples de escrever a expressão da proposição 3.11 é

$$\frac{\partial}{\partial t} Rm = \Delta Rm + Rm * Rm. \quad (3.3)$$

**Proposição 3.13.** No fluxo de Ricci, o tensor de Ricci evolui de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric = \Delta_L Ric, \quad (3.4)$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) = \Delta Ric(X, W) - 2\langle Ric(X), Ric(W) \rangle + 2\langle Rm(X, \cdot, W, \cdot), Ric \rangle. \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Consequência da proposição 2.34, pela equação 2.15: Pela proposição 2.34 temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric = -\frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g.$$

Como, no fluxo de Ricci,  $h = -2Ric$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric = -\frac{1}{2}\Delta_L(-2Ric) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{(\delta G(-2Ric))^\sharp} g.$$

Pela equação 2.15,  $\delta G(Ric) = 0$ , anulando, portanto, a segunda parcela. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric = -\frac{1}{2}\Delta_L(-2Ric) = \Delta_L Ric,$$

mostrando a primeira afirmação. Pela definição de  $\Delta_L$  dada na proposição 2.34, trocando  $A$  por  $Ric$ , temos que

$$\Delta_L Ric(X, W) = \Delta Ric(X, W) - Ric(X, Ric(W)) - Ric(W, Ric(X)) + 2tr[Ric(R(X, \cdot)W, \cdot)].$$

Mas,  $Ric(X, W) = \langle Ric(X), W \rangle$ . Daí,  $Ric(X, Ric(W)) = \langle Ric(X), Ric(W) \rangle$  e  $Ric(W, Ric(X)) = \langle Ric(W), Ric(X) \rangle$ . Pela igualdade 2.25, trocando  $h$  por  $Ric$ , temos que

$$2tr[Ric(R(X, \cdot)W, \cdot)] = 2\langle Rm(X, \cdot, W, \cdot), Ric \rangle.$$

Combinando os resultados acima, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric(X, W) = \Delta Ric(X, W) - 2\langle Ric(X), Ric(W) \rangle + 2\langle Rm(X, \cdot, W, \cdot), Ric \rangle.$$

■

**Observação 3.14.** A expressão acima pode ser simplificada como  $\frac{\partial}{\partial t} Ric = \Delta Ric + R * Ric$ .

**Proposição 3.15.** No fluxo de Ricci, a curvatura escalar evolui de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial t} S = 2|Ric|^2 + \Delta S. \quad (3.6)$$

*Demonstração.* Este resultado é consequência da proposição 2.35 e da igualdade 2.16. ■

Vamos decompor o tensor de Ricci ortogonalmente com um dos termos na direção de  $g$ . Primeiramente, temos que a projeção ortogonal do tensor de Ricci sobre o tensor métrico é dada por

$$Proj_g Ric = \frac{\langle Ric, g \rangle}{\langle g, g \rangle} g = \frac{S}{n} g.$$

Segue que,

$$Ric = \left( Ric - \frac{S}{n} g \right) + \frac{S}{n} g = \mathring{Ric} + \frac{S}{n} g. \quad (3.7)$$

O termo  $\mathring{Ric}$  representa a parte sem traço do tensor de Ricci. De fato, como  $\mathring{Ric}$  é um campo tensorial de tipo  $(2, 0)$ , o traço do campo  $\mathring{Ric}$  é dado pelo produto interno com o tensor métrico (olhar o exemplo 2.24). Assim,

$$tr \mathring{Ric} = \langle \mathring{Ric}, g \rangle = \left\langle Ric - \frac{S}{n} g, g \right\rangle = S - \frac{S}{n} n = 0,$$

onde usamos que  $\langle Ric, g \rangle = tr Ric = S$ . Segue que,

$$|Ric|^2 = |\mathring{Ric}|^2 + \frac{S^2}{n} \geq \frac{S^2}{n}.$$

Isto nos fornece o seguinte

**Corolário 3.16.**

$$\frac{\partial}{\partial t} S \geq \Delta S + \frac{2}{n} S^2. \quad (3.8)$$

**Proposição 3.17.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathring{Ric} = \Delta \mathring{Ric} + R * \mathring{Ric}. \quad (3.9)$$

*Demonstração.* Esta demonstração será dividida em duas partes. Na primeira mostraremos que

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric = \Delta Ric + R * \mathring{Ric},$$

e em seguida mostraremos a proposição.

Sabemos que

$$Ric(X, Y) = \mathring{Ric}(X, Y) + \frac{S}{n} g(X, Y).$$

Assim, como operadores,  $Ric$  e  $\mathring{Ric}$  se relacionam através de

$$Ric = \mathring{Ric} + \frac{S}{n} I,$$

onde  $I$  é o operador identidade.

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Ric(X), Ric(Y) \rangle &= \left\langle Ric(X), \mathring{Ric}(Y) + \frac{S}{n} Y \right\rangle \\ &= \langle Ric(X), \mathring{Ric}(Y) \rangle + \frac{S}{n} \langle Ric(X), Y \rangle \\ &= \langle Ric(X), \mathring{Ric}(Y) \rangle + \frac{S}{n} Ric(X, Y). \end{aligned}$$

Segue que

$$\langle Ric(X), Ric(Y) \rangle = (R * \mathring{Ric})(X, Y) + \frac{S}{n} Ric(X, Y).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle Rm(X, \cdot, Y, \cdot), Ric \rangle &= \left\langle Rm(X, \cdot, Y, \cdot), \mathring{Ric} + \frac{S}{n} g \right\rangle \\ &= \langle Rm(X, \cdot, Y, \cdot), \mathring{Ric} \rangle + \frac{S}{n} \langle Rm(X, \cdot, Y, \cdot), g \rangle \\ &= \langle Rm(X, \cdot, Y, \cdot), \mathring{Ric} \rangle + \frac{S}{n} Ric(X, Y) \\ &= R * \mathring{Ric} + \frac{S}{n} Ric(X, Y). \end{aligned}$$

Como, pela equação 3.5,

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric(X, Y) = \Delta Ric(X, Y) - 2 \langle Ric(X), Ric(Y) \rangle + 2 \langle Rm(X, \cdot, Y, \cdot), Ric \rangle,$$

o primeiro resultado a ser mostrado é verdadeiro.

Como  $\mathring{Ric} = Ric - \frac{S}{n}g$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathring{Ric} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(Ric - \frac{S}{n}g\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}Ric - \frac{1}{n}\frac{\partial S}{\partial t}g - \frac{S}{n}\frac{\partial g}{\partial t}.\end{aligned}$$

Calculando  $\Delta(fT)$ , onde  $f$  é uma função e  $T$  um campo tensorial, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta(fT) &= tr(\nabla\nabla fT) = tr(\nabla(df \otimes T + f \otimes \nabla T)) \\ &= tr(\nabla df \otimes T + 2df \otimes \nabla T + f \otimes \nabla\nabla T) \\ &= \Delta fT + f\Delta T + 2\nabla_{(grad f)}T,\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}tr(df \otimes \nabla T) &= \sum_i df(e_i)\nabla T(e_i, -) \\ &= \sum_i \nabla T(df(e_i)e_i, -) \\ &= \nabla T(grad f, -) \\ &= \nabla_{(grad f)}T,\end{aligned}$$

onde  $\{e_i\}$  é um referencial ortonormal local. Calculando  $\Delta(Sg)$  obtemos que  $\Delta(Sg) = (\Delta S)g$  uma vez que  $\nabla g \equiv 0$ .

Assim, lembrando que  $\frac{\partial S}{\partial t} = \Delta S + 2|Ric|^2$ , que  $\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric$  e que  $Ric = \mathring{Ric} + \frac{S}{n}g$ , temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathring{Ric} &= \Delta\left(\mathring{Ric} + \frac{S}{n}g\right) + R*\mathring{Ric} - \frac{1}{n}(\Delta S + 2|Ric|^2)g + \frac{2S}{n}Ric \\ &= \Delta\mathring{Ric} + \frac{1}{n}\Delta Sg + R*\mathring{Ric} - \frac{1}{n}\Delta Sg - \frac{2}{n}|Ric|^2g + \frac{2S}{n}Ric \\ &= \Delta\mathring{Ric} + R*\mathring{Ric} - \frac{2}{n}(|Ric|^2g - SRic).\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}|Ric|^2g - SRic &= |Ric|^2g - S\left(\mathring{Ric} + \frac{S}{n}g\right) \\ &= \left(|Ric|^2 - \frac{S^2}{n}\right)g - S\mathring{Ric} \\ &= |\mathring{Ric}|^2g - S\mathring{Ric} \\ &= \langle \mathring{Ric}, \mathring{Ric} \rangle g - S\mathring{Ric} \\ &= \langle Ric, \mathring{Ric} \rangle - S\mathring{Ric} \\ &= R*\mathring{Ric},\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■



**Proposição 3.18.**

$$\delta \mathring{Ric} = \frac{2-n}{2n} \nabla S.$$

*Demonstração.* Como  $Ric = \mathring{Ric} + \frac{S}{n}g$ , temos que

$$\begin{aligned} \delta \mathring{Ric} &= \delta \left( Ric - \frac{S}{n}g \right) \\ &= \delta Ric + \frac{1}{n} \nabla S \\ &= -\frac{1}{2} \nabla S + \frac{1}{n} \nabla S \\ &= \frac{2-n}{2n} \nabla S, \end{aligned}$$

pela igualdade 2.15 e pelo resultado obtido no exemplo 2.25. ■

Finalmente, a proposição a seguir mostra como se comporta o volume de  $M$  no fluxo de Ricci.

**Proposição 3.19.** *No fluxo de Ricci,*

$$\frac{\partial}{\partial t} dV = -S dV \tag{3.10}$$

*Demonstração.* Segue da proposição 2.36. ■

Em particular, como  $Vol(M) = \int_M dV$ , temos

$$\frac{d}{dt} Vol(M) = - \int_M S dV. \tag{3.11}$$

### 3.4 O fluxo de Ricci normalizado

Como vimos, o volume de uma variedade muda com o tempo no fluxo de Ricci. Podemos definir um novo fluxo que mantenha o volume constante. Isto é feito através da seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g) + \frac{2}{n} \frac{\int_M S dV}{\int_M dV} g \tag{3.12}$$

Lembrando que se  $h$  é uma variação de  $g$  temos pela proposição 2.36 que  $\frac{\partial}{\partial t}dV = \frac{1}{2}(trh)dV$ . Assim, no fluxo de Ricci normalizado vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &= \frac{d}{dt} \int_M dV = \int_M \frac{\partial}{\partial t} dV = \int_M \frac{1}{2}(trh)dV \\ &= \int_M \frac{1}{2}tr \left( -2Ric + \frac{2}{n} \frac{\int_M SdV}{\int_M dV} g \right) dV \\ &= \int_M \left( -S + \frac{\int_M SdV}{\int_M dV} \right) dV \\ &= - \int_M SdV + \int_M \frac{\int_M SdV}{\int_M dV} dV \\ &= 0,\end{aligned}$$

e portanto o volume da variedade se mantém contante.

Uma pergunta natural é: Qual é a relação entre soluções do fluxo de Ricci e do fluxo de Ricci normalizado? Para responder, vamos fazer alguns cálculos. Seja  $g(t)$  uma solução para o fluxo de Ricci no intervalo  $[0, T)$ . Considere as métricas  $\tilde{g}(\tilde{t}) := c(t)g(t)$ , onde

$$c(t) = \exp \left( \frac{2}{n} \int_0^t r(\tau) d\tau \right)$$

e

$$\tilde{t}(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau$$

com  $r = \frac{\int_M SdV}{\int_M dV}$ . Vamos mostrar que  $\tilde{g}(\tilde{t})$  é solução para o fluxo de Ricci normalizado. Isto é, vamos mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{g}(\tilde{t}) = -2Ric(\tilde{g}) + \frac{2}{n} \tilde{r} \tilde{g}.$$

Vejamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{g}(\tilde{t}) &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\frac{d\tilde{t}}{dt}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = \frac{1}{c(t)} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{c(t)} \left( c'(t)g(t) + c(t) \frac{\partial g}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{c(t)} \left( \frac{2}{n} c(t) r g(t) - 2c(t) Ric(g) \right) \\ &= \frac{1}{c(t)} \left( \frac{2}{n} \tilde{r} \tilde{g} - 2c(t) Ric(\tilde{g}) \right) \\ &= -2Ric(\tilde{g}) + \frac{2}{n} \tilde{r} \tilde{g}\end{aligned}$$

pois  $Ric(\tilde{g}) = Ric(c(t)g) = Ric(g)$ , uma vez que  $c$  é uma função positiva de  $t$  e além disso  $\frac{r}{c(t)} = \tilde{r}$ . De fato, usando as propriedades na proposição 2.18, temos

$$\tilde{r} = \frac{\int \tilde{S} d\tilde{V}}{\int d\tilde{V}} = \frac{\int \frac{1}{c(t)} S d\tilde{V}}{\int d\tilde{V}} = \frac{1}{c(t)} \frac{\int c(t)^{n/2} S dV}{\int c(t)^{n/2} dV} = \frac{1}{c(t)} \frac{\int S dV}{\int dV} = \frac{1}{c(t)} r.$$

Daí, soluções do fluxo de Ricci normalizado diferem de soluções do fluxo de Ricci por uma mudança de escala no tempo e no espaço. Reciprocamente, se  $\tilde{g}(\tilde{t})$  é solução do fluxo de Ricci normalizado, então  $g(t) = \tilde{g}(\tilde{t})/c(\tilde{t})$  é solução do fluxo de Ricci, onde  $c(\tilde{t}) = \exp\left(\frac{2}{n} \int_0^{\tilde{t}} \tilde{r}(\tau) d\tau\right)$  e  $t = \int_0^{\tilde{t}} c^{-1}(\tau) d\tau$ :

$$\begin{aligned} \partial_t(g(t)) &= \partial_t \left( \frac{\tilde{g}(\tilde{t})}{c(\tilde{t})} \right) \\ &= \partial_{\tilde{t}} \left( \frac{\tilde{g}(\tilde{t})}{c(\tilde{t})} \right) \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} \\ &= c(\tilde{t}) \cdot \frac{\partial_{\tilde{t}}(\tilde{g}(\tilde{t}))c(\tilde{t}) - \tilde{g}(\tilde{t})c'(\tilde{t})}{c(\tilde{t})^2} \\ &= -2Ric_{\tilde{g}(\tilde{t})} \\ &= -2Ric_{c(\tilde{t})g(t)} \\ &= -2Ric_{g(t)}, \end{aligned}$$

pois  $\tilde{g}(\tilde{t})$  satisfaz a equação do fluxo de Ricci normalizado,  $c'(\tilde{t}) = \frac{2}{n} \tilde{r}(\tilde{t})c(\tilde{t})$  e  $c(\tilde{t}) > 0$ .

### 3.4.1 O fluxo de Ricci normalizado e variedades Einstein

Vejamos agora uma propriedade muito interessante que relaciona o fluxo de Ricci normalizado e variedades Einstein.

**Proposição 3.20.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana fechada. Se  $(M, g(t))$  é Einstein para todo  $t \in [0, T)$ , então a solução do fluxo de Ricci normalizado em  $M$  é a solução constante  $g(t) = g_0 = g(0)$ . Reciprocamente, se  $(M, g(t))$  é uma variedade Riemanniana fechada tal que  $g(t) = g_0 = g(0)$  seja solução do fluxo de Ricci normalizado, então  $M$  é Einstein.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que se  $(M, g(t))$  é uma variedade Einstein para todo  $t$  em  $[0, T)$ , então  $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = 0$ . Como  $M$  é Einstein, existe  $\lambda = \lambda(t)$  tal que  $Ric_{g(t)} = \lambda(t)g(t)$ . Assim,  $S = \lambda n$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g(t) &= -2Ric + \frac{2}{n} \frac{\int_M S dV}{\int_M dV} g \\ &= -2\lambda g + \frac{2}{n} \lambda n \frac{\int_M dV}{\int_M dV} g \\ &= -2\lambda g + \frac{2}{n} \lambda n g \\ &= 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se  $g(t) = g_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = 0 &= -2Ric(g(t)) + \frac{2}{n} \frac{\int S dV}{\int dV} g(t) \\ &= -2Ric(g_0) + \frac{2}{n} \frac{\int S dV}{\int dV} g_0. \end{aligned}$$

Segue que,

$$Ric(g_0) = \frac{1}{n} \frac{\int S dV}{\int dV} g_0 = \Lambda g_0.$$

Concluimos que se  $(M, g_0)$ , então  $g(t) = g_0$  é uma solução do fluxo de Ricci normalizado. Pela unicidade do fluxo de Ricci, provada na seção 6.4, está é a única solução. ■

## CAPÍTULO 4

---

### O princípio do máximo

---

A referência para este capítulo é o material contido no capítulo 3 de [23].

#### 4.1 Análise elementar

Suponha que  $U \subset \mathbb{R}^n$  seja aberto e seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Se  $f$  tem um mínimo local em algum  $p \in U$  então segue que  $(\text{grad } f)(p) = 0$  e  $\Delta f(p) \geq 0$ . Isto segue do teste da segunda derivada para funções de uma variável: dada uma direção qualquer  $v \in \mathbb{R}^n$ , a função  $t \mapsto f_v(t) := f(p + tv)$  tem um mínimo local em  $t = 0$ , daí  $f'_v(0) = \nabla_v f(p) = 0$  e  $f''_v(0) = \nabla_v \nabla_v f(p) \geq 0$ . O laplaciano é proporcional à média de  $f''_v(0)$  sobre todos os vetores unitários  $v$ , e portanto é não-negativo.

Em uma variedade Riemanniana o mesmo argumento é válido quando definimos  $f_v(t) := f(\exp_p(tv))$ . Assim, temos o seguinte resultado:

**Lema 4.1** (Teste da Segunda Derivada). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Se  $u$  tem mínimo local em um ponto  $p \in M$ , então*

$$(\text{grad } u)(p) = 0 \text{ e } \Delta u(p) \geq 0.$$

Como veremos, este lema é fundamental para a demonstração do princípio do máximo.

A seguir enunciaremos dois teoremas que podem ser encontrados em [21] e que serão utilizados na demonstração do teorema 4.4.

**Teorema 4.2.** *Seja  $f$  contínua em um conjunto aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$ , onde  $\mathbb{E}$  é o espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Para cada  $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$  suponhamos que o problema de valor inicial, com  $\lambda$  fixo,*

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

tenha uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ , definida no seu intervalo máximo  $(\omega_-, \omega_+)$ ,  $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(t_0, x_0, \lambda)$ . Então

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) | (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in (\omega_-, \omega_+)\}$$

é aberto em  $\mathbb{R} \times \Omega$  e  $\varphi$  é contínua em  $D$ .

**Teorema 4.3.** *Seja  $f(t, x, \lambda, \mu)$  contínua no aberto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda \times \mathcal{M}$ , onde  $\mathbb{E}, \Lambda$  e  $\mathcal{M}$  são espaços euclidianos quaisquer, com derivadas parciais de ordem  $\leq m$  relativas às coordenadas de  $(x, \lambda)$  também contínuas. Então, para  $\lambda$  e  $\mu$  fixos,*

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, \lambda, \mu) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

tem única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda, \mu)$ . A solução  $\varphi$  está definida no aberto

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda, \mu) | (t_0, x_0, \lambda, \mu) \in \Omega, t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda, \mu), \omega_+(t_0, x_0, \lambda, \mu))\}$$

de  $\mathbb{R} \times \Omega$ , onde  $(\omega_-(t_0, x_0, \lambda, \mu), \omega_+(t_0, x_0, \lambda, \mu))$  é o intervalo máximo, no qual admite as derivadas parciais da forma

$$\frac{\partial^{i+\alpha_1+\dots+\alpha_n+\beta_1+\dots+\beta_l} \varphi}{\partial_t^i \partial(x_0^1)^{\alpha_1} \partial(x_0^2)^{\alpha_2} \dots \partial(\lambda^1)^{\beta_1} \dots \partial(\lambda^l)^{\beta_l}}$$

com  $\sum \alpha_j + \sum \beta_j \leq m$ ,  $i \leq 1$ , as quais são contínuas.

## 4.2 O princípio do máximo para escalares

**Teorema 4.4** (princípio do máximo fraco para escalares). *Suponha que para  $t \in [0, T]$  (onde  $0 < T < \infty$ )  $g(t)$  seja uma família diferenciável de métricas e que  $X(t)$  seja uma família diferenciável de campos vetoriais em uma variedade fechada  $M$ . Seja  $F : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Suponha que a função  $u \in C^\infty(M \times [0, T], \mathbb{R})$  satisfaça*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta_{g(t)} u + \langle X(t), \text{grad } u \rangle + F(u, t). \quad (4.1)$$

Suponha também que  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  seja solução de

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = F(\phi(t), t) \\ \phi(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Se  $u(\cdot, 0) \leq \alpha$ , então  $u(\cdot, t) \leq \phi(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ .

*Demonstração.* Para  $\varepsilon > 0$  considere a EDO

$$\begin{cases} \frac{d\phi_\varepsilon}{dt} = F(\phi_\varepsilon(t), t) + \varepsilon \\ \phi_\varepsilon(0) = \alpha + \varepsilon \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.3)$$

para uma nova função  $\phi_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . Os teoremas 4.2 e 4.3 nos garantem que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  existe uma solução  $\phi_\varepsilon$  em  $[0, T]$ . (Aqui estamos usando a existência de  $\phi$  na hipótese e o fato de  $T < \infty$ .)

Mais ainda,  $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$  quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , isto é,  $\phi_\varepsilon$  converge pontualmente para a única solução do problema 4.2. Consequentemente, só precisamos mostrar que  $u(\cdot, t) \leq \phi_\varepsilon(t)$  para todo  $t \in [0, T]$  e  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  arbitrário.

Suponha falso. Então podemos encontrar  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  e  $t_0 \in (0, T]$  onde  $u(\cdot, t_0) < \phi_\varepsilon(t_0)$  falha. Ou seja,  $u(\cdot, t_0) \geq \phi_\varepsilon(t_0)$ . Sem perda de generalidade, assuma  $t_0$  o menor tempo que isto ocorre, e seja  $x \in M$  tal que  $u(x, t_0) = \phi_\varepsilon(t_0)$ . Tal  $x$  existe pois  $M$  é compacta. Usando o fato de que para  $s \in [0, t_0]$  a função  $u(x, s) - \phi_\varepsilon(s)$  é negativa e vale zero em  $s = t_0$ , devemos ter

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) - \phi'_\varepsilon(t_0) \geq 0,$$

caso contrário,  $t_0$  não seria o menor tempo no qual vale  $u(\cdot, t_0) \geq \phi_\varepsilon(t_0)$ . Mais ainda, como  $x$  é um máximo de  $u(\cdot, t_0)$ , segue que  $\Delta u(x, t_0) \leq 0$  e  $\text{grad } u(x, t_0) = 0$ . Usando estas informações juntamente com 4.1 e 4.3 temos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{g(t)} u - \langle X(t), \text{grad } u \rangle - F(u, t) \\ 0 &\geq \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_g u - \langle X, \text{grad } u \rangle - F(u, \cdot) \right] (x, t_0) \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - F(u, \cdot) \right] (x, t_0) - \Delta_g u(x, t_0) \\ &\geq \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - F(u, \cdot) \right] (x, t_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) - F(u(x, t_0), t_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) - F(\phi_\varepsilon(t_0), t_0) \\ &\geq \phi'_\varepsilon(t_0) - F(\phi_\varepsilon(t_0), t_0) \\ &= \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Resumindo,  $0 \geq \varepsilon > 0$ . Contradição. ■

Usando este resultado com os sinais de  $u, \phi$  e  $\alpha$  trocados e  $F$  apropriadamente modificada temos:

**Corolário 4.5.** (*princípio do mínimo fraco*) Vale o teorema 4.4 com as desigualdades revertidas.

*Demonstração.* Seja  $v$  tal que

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} v + \langle X(t), \text{grad } v \rangle + F(v, t) \tag{4.4}$$

e  $\tilde{\phi}$  satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\phi}}{dt} = F(\tilde{\phi}(t), t) \\ \tilde{\phi}(0) = \alpha. \end{cases}$$

Queremos mostrar que se  $v(\cdot, 0) \geq \alpha$ , então  $v(\cdot, t) \geq \tilde{\phi}(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ .

Fazendo  $v = -u$  em 4.4, obtemos

$$\frac{\partial(-u)}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)}(-u) + \langle X(t), \text{grad}(-u) \rangle + F(-u, t)$$

que podemos reescrever como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\leq \Delta_{g(t)}u + \langle X(t), \text{grad } u \rangle - F(-u, t) \\ &= \Delta_{g(t)}u + \langle X(t), \text{grad } u \rangle + G(u, t). \end{aligned}$$

Se  $u(\cdot, 0) \leq -\alpha$  e  $\phi$  é dada pela solução da EDO

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = G(\phi(t), t) \\ \phi(0) = -\alpha, \end{cases} \quad (4.5)$$

então, pelo teorema 4.4,  $u(\cdot, t) \leq \phi(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ . Multiplicando 4.5 por  $-1$  obtemos

$$\begin{cases} \frac{d(-\phi)}{dt} = -G(\phi(t), t) \\ -\phi(0) = \alpha. \end{cases}$$

Fazendo  $-\phi = \tilde{\phi}$ , temos

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\phi}}{dt} = -G(-\tilde{\phi}(t), t) = F(\tilde{\phi}(t), t) \\ \tilde{\phi}(0) = \alpha. \end{cases}$$

Como  $-u = v$ , segue que  $v(\cdot, 0) \geq \alpha$  e  $v(\cdot, t) \geq -\phi(t) = \tilde{\phi}(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ . ■

### 4.3 Controle básico na evolução da curvatura

**Teorema 4.6.** *Suponha que  $g(t)$  seja solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ . Se  $S \geq \alpha$  em  $t = 0$ , então para todo  $t \in [0, T]$*

$$S \geq \frac{\alpha}{1 - t \left( \frac{2\alpha}{n} \right)}.$$



*Demonstração.* Lembrando do corolário 3.16 e usando o corolário 4.5 com  $u = S$ ,  $X(t) = 0$  e  $F(r, t) = \frac{2}{n}r^2$ . Neste caso,

$$\phi(t) = \frac{\alpha}{1 - t\left(\frac{2\alpha}{n}\right)},$$

pois, derivando  $\phi(t)$  temos

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{2}{n} \frac{\alpha^2}{\left(1 - \frac{2\alpha t}{n}\right)^2} = \frac{2}{n}(\phi(t))^2 = F(\phi(t), t).$$

■

A seguir, alguns corolários de fácil verificação.

**Corolário 4.7.** *Suponha que  $g(t)$  seja solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ . Se  $S \geq \alpha \in \mathbb{R}$  em  $t = 0$ , então  $S \geq \alpha$  em todo  $t \in [0, T]$*

Como uma consequência do corolário acima temos o seguinte

**Corolário 4.8.** *A função  $t \mapsto \min_M S(x, t)$  é não-decrescente em  $t$ .*

*Demonstração.* Denotando por  $\alpha = \min_M S(x, 0)$ , temos que  $S(x, 0) \geq \alpha$ . Pelo corolário 4.7, temos que para todo  $t \in [0, T]$  vale  $S(x, t) \geq \alpha$ . Assim, se  $t_1 \in [0, T]$ , vale  $S(x, t_1) \geq \alpha = \min_M S(x, 0)$ . Em particular,  $\min_M S(x, t_1) \geq \min_M S(x, 0) = \alpha$ . De maneira geral, podemos considerar  $t_1, t_2 \in [0, T]$  com  $t_1 \leq t_2$ . Observe que  $t_2 \in [t_1, T]$  e que, se denotarmos por  $C_1 = \min_M S(x, t_1)$ , usando o corolário 4.7 no intervalo  $[t_1, T]$  vai valer  $S(x, t_2) \geq C_1$ . Em particular,  $\min_M S(x, t_2) \geq C_1 = \min_M S(x, t_1)$ . Com isto, está mostrado que o *mínimo* em  $M$  da curvatura escalar é uma função não-decrescente de  $t$ . ■

**Corolário 4.9.** *Curvatura escalar positiva (ou não negativa) é preservada pelo fluxo de Ricci.*

**Corolário 4.10.** *Suponha que  $g(t)$  seja solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ . Se  $S \geq \alpha > 0$  em  $t = 0$ , então devemos ter que  $T \leq \frac{n}{2\alpha}$ .*

O corolário a seguir é consequência da equação 3.11.

**Corolário 4.11.** *Suponha que  $g(t)$  seja solução fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ , com  $S \geq 0$  em  $t = 0$ . Então o volume  $V(t)$  é não-crescente.*

O princípio do máximo também pode ser aplicado para dar restrições para o tensor curvatura de Riemann  $Rm$ . Vamos nos concentrar na norma de  $Rm$ , que pode ser comparada com a maior curvatura seccional  $K$  ( $0 \leq |Rm| \leq C|K|$  para alguma constante  $C$  que depende só da dimensão de  $M$ ). Ver a seção A.2 do apêndice.

**Proposição 4.12.** *No fluxo de Ricci,*

$$\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 \leq \Delta|Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 + C|Rm|^3 \quad (4.6)$$

onde  $C = C(n)$  e  $\Delta$  é o operador de Laplace-Beltrami.

*Demonstração.* Lembrando que  $\frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}) = -h^{ij}$ , no fluxo de Ricci teremos  $\frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}) = 2R^{ij}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}g^{kl}g^{ab}g^{cd}R_{ikac}R_{jlbd}) \\ &= 2(R^{ij}g^{kl}g^{ab}g^{cd} + g^{ij}R^{kl}g^{ab}g^{cd} + g^{ij}g^{kl}R^{ab}g^{cd} \\ &\quad + g^{ij}g^{kl}g^{ab}R^{cd})R_{ikac}R_{jlbd} + 2\left\langle Rm, \frac{\partial}{\partial t}Rm \right\rangle. \end{aligned}$$

Lembre da equação 3.3 e temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}g^{kl}g^{ab}g^{cd}R_{ikac}R_{jlbd}) \\ &= 2(R^{ij}g^{kl}g^{ab}g^{cd} + g^{ij}R^{kl}g^{ab}g^{cd} + g^{ij}g^{kl}R^{ab}g^{cd} \\ &\quad + g^{ij}g^{kl}g^{ab}R^{cd})R_{ikac}R_{jlbd} + 2\langle Rm, \Delta Rm + Rm * Rm \rangle \\ &= 2(R^{ij}g^{kl}g^{ab}g^{cd} + g^{ij}R^{kl}g^{ab}g^{cd} + g^{ij}g^{kl}R^{ab}g^{cd} \\ &\quad + g^{ij}g^{kl}g^{ab}R^{cd})R_{ikac}R_{jlbd} + 2\langle Rm, \Delta Rm \rangle + 2\langle Rm, Rm * Rm \rangle. \end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\langle Rm, Rm * Rm \rangle \leq |Rm||Rm * Rm| \leq C_1(n)|Rm|^3.$$

Note que como podemos escrever, por exemplo,  $R^{ij} = g^{si}g^{rj}g^{tp}R_{strp}$ , os termos da forma  $2(R^{ij}g^{kl}g^{ab}g^{cd})R_{ikac}R_{jlbd}$  podem ser comparados com  $|Rm * Rm * Rm|$  que por sua vez satisfaz  $|Rm * Rm * Rm| \leq C_2(n)|Rm|^3$ . Com isso temos

$$\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 \leq C(n)|Rm|^3 + 2\langle Rm, \Delta Rm \rangle.$$

Por fim, como  $d\langle Rm, Rm \rangle = 2\langle Rm, \nabla \cdot Rm \rangle$  e portanto

$$\nabla d\langle Rm, Rm \rangle = 2\langle \nabla \cdot Rm, \nabla \cdot Rm \rangle + 2\langle Rm, \nabla^2 \cdot Rm \rangle.$$

Tomando traço,

$$\Delta|Rm|^2 = 2|\nabla Rm|^2 + 2\langle Rm, \Delta Rm \rangle.$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 \leq \Delta|Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 + C|Rm|^3$$

■

Após enfraquecer a desigualdade 4.6 para  $\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 \leq \Delta|Rm|^2 + C|Rm|^3$  podemos usar o princípio do máximo com  $u = |Rm|^2$ ,  $X(t) = 0$ ,  $F(r, t) = Cr^{\frac{3}{2}}$ ,  $\alpha = A$  e

$$\phi(t) = \frac{1}{(A^{-1} - \frac{1}{2}Ct)^2},$$

solução de

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = C\phi(t)^{\frac{3}{2}} \\ \phi(0) = A^2, \end{cases} \quad (4.7)$$

resultando no

**Teorema 4.13.** *Suponha que  $g(t)$  seja solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ . Suponha que no tempo  $t = 0$  tenhamos  $|Rm| \leq A$ . Então para todo  $t \in (0, T]$ ,*

$$|Rm| \leq \frac{A}{1 - \frac{1}{2}CA t},$$

onde  $C$  é a mesma constante da proposição 4.12.

---

## Equações diferenciais parciais

---

Neste capítulo faremos uma discussão breve sobre equações diferenciais parciais. Mais precisamente, será apresentado o teorema que garante existência e unicidade de soluções para tempos curtos de uma equação parabólica. Em seguida, mostraremos que o fluxo de Ricci não é parabólico e portanto, a princípio, não poderemos recorrer ao resultado deste capítulo. No capítulo seguinte usaremos o chamado *truque de DeTurck* para mostrar que o fluxo de Ricci admite uma única solução em tempos curtos. Este capítulo teve como referências o capítulo 4 de [23] e a primeira seção do capítulo 5 de [2].

### 5.1 EDPs lineares em $\mathbb{R}^n$

Considere a EDP de segunda ordem em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  para uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i b_i \partial_i u + cu \quad (5.1)$$

onde  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são coeficientes diferenciáveis. Uma equação como 5.1 é dita parabólica se os  $a_{ij}$  são uniformemente definidos positivos. Isto é, existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad (5.2)$$

qualquer que seja  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 5.1.** A equação do calor  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$  é parabólica.

Vejamos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Segue que  $a_{ij} = \delta_{ij}$ . Dado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = |\xi|^2.$$

Claramente, existe  $\lambda > 0$  tal que 5.2 é satisfeita.

Esta noção se estende para variedades. Seja  $M$  uma variedade fechada e considere a EDP para a função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) \quad (5.3)$$

onde  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  pode ser escrita com respeito às coordenadas locais  $\{x^i\}$  como

$$L(u) = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i b_i \partial_i u + cu$$

para  $a_{ij}, b_i$  e  $c$  funções reais diferenciáveis localmente definidas. Dizemos que a equação 5.3 é parabólica se  $a_{ij}$  é definido positivo para todo  $x \in M$ . Na seção a seguir vamos identificar equações parabólicas através do seu símbolo principal e mostrar que é equivalente ao que definimos nesta seção. Como a definição a seguir é invariante por mudança de coordenadas, a anterior o será.

### 5.1.1 O símbolo principal

Definimos o *símbolo principal*  $\sigma(L) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\sigma(L)(x, \xi) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j. \quad (5.4)$$

Isto está bem definido e é independente da escolha de coordenadas. Há uma definição alternativa: Dado  $(x, \xi) \in T^*M$ , e  $f, \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis com  $d\phi(x) = \xi$ , defina

$$\sigma(L)(x, \xi) f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi} f)(x). \quad (5.5)$$

Vamos checar que está bem definido e que as duas definições são consistentes. Primeiro, note que

$$\begin{aligned} \partial_i(e^{s\phi} f)(x) &= \partial_i(e^{s\phi(x)} f(x)) \\ &= \partial_i(e^{s\phi(x)}) f(x) + e^{s\phi(x)} \partial_i(f(x)) \\ &= e^{s\phi(x)} \partial_i(s\phi(x)) f(x) + e^{s\phi(x)} \partial_i f(x) \\ &= s(\partial_i \phi(x)) (e^{s\phi} f)(x) + e^{s\phi(x)} \partial_i f(x). \end{aligned}$$

Assim, usando a regra de Leibniz e o cálculo acima,

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j (e^{s\phi} f)(s) &= \partial_j [s(\partial_i \phi(x)) (e^{s\phi} f)(x) + e^{s\phi(x)} \partial_i f(x)] \\ &= s[\partial_i \partial_j (\phi(x)) (e^{s\phi} f)(x) + \partial_i (\phi(x)) \partial_j (e^{s\phi} f)(x)] + \\ &\quad \partial_j (e^{s\phi(x)}) \partial_i f(x) + e^{s\phi(x)} \partial_i \partial_j f(x) \\ &= e^{s\phi(x)} \partial_i \partial_j f(x) + s e^{s\phi(x)} \partial_j \phi(x) \partial_i f(x) \\ &\quad + s(\partial_i \partial_j \phi(x)) e^{s\phi(x)} f(x) + s^2 (\partial_i \phi(x)) e^{s\phi(x)} (\partial_j \phi(x)) f(x) \\ &\quad + s(\partial_j \phi(x)) e^{s\phi(x)} (\partial_i f(x)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 e^{-s\phi(x)} \partial_i \partial_j (e^{s\phi} f)(s) &= \partial_i \partial_j f(x) + s \partial_j \phi(x) \partial_i f(x) \\
 &\quad + s(\partial_i \partial_j \phi(x)) f(x) \\
 &\quad + s^2 \partial_i \phi(x) \partial_j \phi(x) f(x) + s \partial_i \phi(x) \partial_j f(x) \\
 &= s^2 \partial_i \phi(x) \partial_j \phi(x) f(x) + s^1(\dots) + s^0(\dots).
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$L(e^{s\phi} f)(x) = a_{ij}(\partial_i \partial_j (e^{s\phi} f)(x)) + (\dots).$$

Portanto,

$$e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi} f)(x) = s^2 a_{ij} \partial_i \phi(x) \partial_j \phi(x) f(x) + s^1(\dots) + s^0(\dots).$$

Finalmente obtemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi} f)(x) = a_{ij} \partial_i \phi(x) \partial_j \phi(x) f(x) = a_{ij} \xi_i \xi_j f(x)$$

onde a última igualdade vem de  $d\phi(x) = \xi$ . Em particular, a segunda definição para o símbolo principal não depende da escolha de  $f$  e  $\phi$  (com  $d\phi(x) = \xi$ ).

**Definição 5.2.** Uma EDP do tipo 5.3 é parabólica se  $\sigma(L)(x, \xi) > 0$  qualquer que seja  $(x, \xi) \in T^*M$  com  $\xi \neq 0$ .

**Exemplo 5.3.** Considere o operador de Laplace-Beltrami

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_i (\sqrt{\det(g)} g^{ij} \partial_j) \\
 &= g^{ij} \partial_i \partial_j + \text{termos com derivadas de ordem inferior.}
 \end{aligned}$$

Então, por definição,

$$\sigma(L)(x, \xi) = g^{ij} \xi_i \xi_j = |\xi|^2 > 0.$$

Segue que a equação do calor em variedades Riemannianas  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$  também é parabólica.

## 5.2 Generalização para fibrados vetoriais

### 5.2.1 Teoria linear

Seja  $E$  um fibrado vetorial diferenciável sobre uma variedade fechada  $M$ . Enquanto anteriormente foi feita uma análise para funções  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , agora vamos considerar seções  $v \in \Gamma(E)$ . Localmente podemos escrever  $v = v^\alpha e_\alpha$  para algum referencial local  $\{e_\alpha\}$ , onde  $\alpha$  representa

um multi-índice. Por exemplo, considere  $v \in \Gamma(\text{Sym}^2 T^*M)$ . Ou seja,  $v$  é um campo tensorial de tipo  $(2,0)$  simétrico. Localmente podemos escrever  $v = v_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , com  $v_{ij} = v_{ji}$ . Neste caso,  $e_\alpha = dx^i \otimes dx^j$  e  $v^\alpha = v_{ij}$ .

Considere a equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(v) \quad (5.6)$$

onde  $L$  é um operador diferencial linear de segunda ordem. Isto é,  $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  pode ser escrito localmente, em termos das coordenadas locais  $\{x^i\}$  em  $M$  e o referencial local  $\{e_\alpha\}$  em  $E$ , como

$$L(v) = \sum_{\alpha} \left[ a_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i \partial_j v^\beta + b_{\alpha\beta}^i \partial_i v^\beta + c_{\alpha\beta} v^\beta \right] e_\alpha. \quad (5.7)$$

Podemos definir o símbolo principal também neste caso. Seja  $\Pi : T^*M \rightarrow M$  a projeção de fibrado. Claramente, por ser uma projeção,  $\Pi$  é diferenciável. Seja  $\pi : E \rightarrow M$  outra projeção de fibrado. Usando a definição de fibrado pull-back (definição 2.10) trocando  $f$  por  $\Pi$ ,  $M$  por  $T^*M$  e  $N$  por  $M$ , temos que  $\Pi^*(E)$  é um fibrado vetorial sobre  $T^*M$  cuja fibra em  $(x, \xi) \in T^*M$  é  $E_x$ .

Assim, definimos  $\sigma(L) : \Pi^*(E) \rightarrow \Pi^*(E)$  como o homomorfismo de fibrados vetoriais

$$\sigma(L)(x, \xi)v = \sum_{\alpha} (a_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i \xi_j v^\beta) e_\alpha. \quad (5.8)$$

**Exemplo 5.4.** Sejam  $E = \text{Sym}^2 T^*M$  e  $v \in E$ . Seja  $L(v)$  dado por

$$L(v) = [g^{ij} \partial_i \partial_j v_{kl}] dx^k \otimes dx^l.$$

Vamos deixar a equação acima no formato

$$L(v) = \sum_{\alpha} \left[ a_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i \partial_j v^\beta + b_{\alpha\beta}^i \partial_i v^\beta + c_{\alpha\beta} v^\beta \right] e_\alpha.$$

Neste caso,  $\alpha = (k, l)$  e  $\beta = (m, n)$  são multi-índices e valem

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}^{ij} &= g^{ij} \delta_{km} \delta_{ln}, \\ b_{\alpha\beta}^i &= 0, \\ c_{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} [g^{ij} \delta_{km} \delta_{ln} \partial_i \partial_j v_{mn}] dx^k \otimes dx^l &= \sum_{k,l} [g^{ij} \partial_i \partial_j v_{kl}] dx^k \otimes dx^l \\ &= L(v). \end{aligned}$$

Por fim, vamos calcular o símbolo principal do operador  $L$  neste caso. Por definição,

$$\sigma(L)(x, \xi)v = \sum_{\alpha} (a_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i \xi_j v^\beta) e_\alpha.$$

Assim, neste exemplo, vale

$$\begin{aligned}\sigma(L)(x, \xi)v &= \sum_{k,l} (g^{ij} \delta_{km} \delta_{ln} \xi_i \xi_j v_{mn}) dx^k \otimes dx^l \\ &= \sum_{k,l} (g^{ij} \xi_i \xi_j v_{kl}) dx^k \otimes dx^l \\ &= |\xi|^2 v.\end{aligned}$$

Daí,  $\sigma(L)(x, \xi) = |\xi|^2 id$ .

Novamente, existe uma definição independente de coordenadas: Dado  $(x, \xi) \in T^*M$ , para todo  $v \in \Gamma(E)$  e  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  com  $d\phi(x) = \xi$ , defina

$$\sigma(L)(x, \xi)v = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi} v)(x). \quad (5.9)$$

Por exemplo, para um fibrado vetorial com conexão  $\nabla$ , se  $\Delta$  denota o laplaciano da conexão  $\nabla$ , então

$$\Delta(e^{s\phi} v) = e^{s\phi} (s^2 |d\phi|^2 v + \text{termos de ordem inferior em } s)$$

e portanto  $\sigma(\Delta)(x, \xi)v = |\xi|^2 v$  pois  $d\phi = \xi$ . Assim,  $\sigma(\Delta)(x, \xi) = |\xi|^2 id$ .

**Definição 5.5.** Dizemos que 5.6 é parabólica se existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\langle \sigma(L)(x, \xi)v, v \rangle \geq \lambda |\xi|^2 |v|^2 \quad (5.10)$$

quaisquer que sejam  $(x, \xi) \in T^*M$  e  $v \in \Gamma(E)$ .

### 5.2.2 Teoria não-linear

Nosso caso de interesse são as equações da forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P(v) \quad (5.11)$$

onde  $P$  é um operador diferencial de segunda ordem *quasilinear*. Ou seja,  $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  pode ser dado localmente, em termos das coordenadas locais  $\{x^i\}$  de  $M$  e o referencial local  $\{e_\alpha\}$  de  $E$ , como

$$P(v) = \sum_{\alpha} [a_{\alpha\beta}^{ij}(x, v, \nabla v) \partial_i \partial_j v^\beta + b^\alpha(x, v, \nabla v)] e_\alpha. \quad (5.12)$$

Comparando com a definição de um operador linear, o operador quasi-linear de segunda ordem possui coeficientes que não dependem apenas do ponto, mas também da própria função e da primeira derivada dela. O fluxo de Ricci se encaixa nesta categoria de equações. De fato, em coordenadas locais, o fluxo de Ricci tem a forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g_{ik})}{\partial t} &= g^{jl} R_{ijkl} \\ &= \frac{1}{2} g^{jl} (\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_l g_{ik}) + (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{pm}^p - \Gamma_{pk}^m \Gamma_{im}^p),\end{aligned}$$

usando a equação 2.7. Note que os coeficientes são da forma  $g^{jl}$  e não possuem dependência na primeira derivada.



### 5.2.3 Linearização

Quando estamos trabalhando com equações diferenciais parciais não-lineares, tentamos linearizar a equação para que a teoria linear possa ser aplicada. Isto é, se tivermos uma solução  $u_0$  para uma dada EDP não-linear, é possível linearizar a equação considerando a família diferenciável  $u = u(s)$  de soluções com a variação  $v = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{s=0}$ . Diferenciando a EDP com respeito a  $s$ , o resultado será uma EDP linear em termos de  $v$ .

Por exemplo, se a EDP não-linear é da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2u, Du, u, x, t),$$

onde  $F = F(p, q, r, x, t) : \text{Sym}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A linearização em torno de  $u_0$  é dada por

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left. \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \right|_{u_0} D_i D_j v + \left. \frac{\partial F}{\partial q_k} \right|_{u_0} D_k v + \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{u_0} v.$$

O resultado é uma EDP linear com coeficientes que dependem de  $u_0$ .

Mais geralmente, para um operador diferencial não linear  $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  com uma solução dada  $u_0$ , a linearização  $DP$  de  $P$  em  $u_0$ , se existir, é definida pela aplicação linear  $DP : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  definida por

$$DP|_{u_0}(v) = \left. \frac{\partial}{\partial t} P(u(t)) \right|_{t=0}, \quad (5.13)$$

onde  $u(0) = u_0$  e  $u'(0) = v$ . De particular interesse são as evoluções da forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{E}(f),$$

onde  $\mathcal{E}(f)$  é um operador diferencial não-linear de segunda ordem em  $f$  sobre o fibrado  $\pi : E \rightarrow M$ . Se  $\bar{f}$  é uma variação de  $f$ , então consideraremos a equação

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = D\mathcal{E}|_f(\bar{f}),$$

onde  $D\mathcal{E}|_f$  é o operador linear de segunda ordem dado em 5.13.

**Definição 5.6.** Dizemos que uma EDP não-linear do tipo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{E}(f),$$

é parabólica quando a EDP linear

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = D\mathcal{E}|_f(\bar{f})$$

for parabólica, onde  $\bar{f}$  é uma variação de  $f$ .

### 5.3 Existência e unicidade para equações parabólicas

Considere o fibrado vetorial  $\pi : E \longrightarrow M$ , onde  $M$  é uma variedade Riemanniana, com alguma métrica de fibrado  $g$ . Seja  $u : M \times [0, T) \longrightarrow E$  uma função que satisfaz a equação de evolução

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = P(u) \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.14)$$

onde  $P : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$  é algum operador diferencial.

**Teorema 5.7.** *Se o sistema 5.14 for parabólico em  $u_0$ , então existe uma solução em algum intervalo  $[0, T)$  e esta solução é única enquanto existir.*

Este resultado pode ser encontrado em [22, pág. 389], proposição 8.2. Nesta referência, o autor assume que  $E$  é um fibrado trivial. Para um fibrado arbitrário o leitor pode consultar o teorema 4.51 em [3, pág. 133].

### 5.4 Linearização do fluxo de Ricci

Considere

$$\frac{\partial g}{\partial t} = P(g) = -2Ric(g) \quad (5.15)$$

no fibrado  $E$  de tensores simétricos de tipo  $(2, 0)$ . A linearização de 5.15 será dada por

$$\frac{\partial h}{\partial t} = L(h) = -2 \frac{\partial}{\partial t} Ric(g) = \Delta_L h + \mathcal{L}_{(\delta G(h))^\sharp} g,$$

pela proposição 2.34. Gostaríamos de saber se dada uma métrica inicial  $g$  e o  $L$  correspondente  $\frac{\partial h}{\partial t} = L(h)$  é parabólica. Esta resposta é dada na seção a seguir.

### 5.5 O fluxo de Ricci não é parabólico

Lembre que  $\sigma(L)(x, \xi)h = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi} h)(x)$  para  $\phi$  satisfazendo  $d\phi(x) = \xi$ . Como  $\Delta_L A = \Delta A + (\text{termos com derivadas de } A \text{ de ordem inferior a } 2)$ , então

$$\sigma(\Delta_L)(x, \xi)h = \sigma(\Delta)(x, \xi)h = |\xi|^2 h,$$

como já calculamos. Lembrando que  $\delta G(T) = \delta(T) + \frac{1}{2}d(trT)$ , calculamos

$$\begin{aligned}
\delta G(e^{s\phi}h) &= \delta(e^{s\phi}h) + \frac{1}{2}d(tr(e^{s\phi}h)) \\
&= -tr\nabla(e^{s\phi}h) + \frac{1}{2}d(e^{s\phi}trh) \\
&= -tr(d(e^{s\phi}) \otimes h + e^{s\phi}\nabla h) + \frac{1}{2}\left[d(e^{s\phi})trh + e^{s\phi}d(trh)\right] \\
&= -tr(e^{s\phi}\nabla h + se^{s\phi}d\phi \otimes h) + \frac{1}{2}se^{s\phi}d\phi trh + \frac{1}{2}e^{s\phi}d(trh) \\
&= e^{s\phi}\left[s\left(-tr(d\phi \otimes h) + \frac{1}{2}d\phi trh\right) + s^0(\dots)\right] \\
&= e^{s\phi}\left[s\left(-h(\xi^\sharp, \cdot) + \frac{1}{2}\xi trh\right) + s^0(\dots)\right],
\end{aligned}$$

onde foi usado que  $tr(d\phi \otimes h) = h(\xi^\sharp, \cdot)$ . De fato, lembrando que  $d\phi = \xi$ ,

$$\begin{aligned}
tr(d\phi \otimes h)(\partial_k) &= g^{ij}d\phi(\partial_i)h(\partial_j, \partial_k) \\
&= g^{ij}(d\phi)_i h_{jk} \\
&= g^{ij}\xi_i h_{jk} \\
&= \xi^j h_{jk} \\
&= h(\xi^j \partial_j, \partial_k) \\
&= h(\xi^\sharp, \partial_k).
\end{aligned}$$

Segue que  $tr(d\phi \otimes h) = h(\xi^\sharp, \cdot)$ .

Recordando que  $\mathcal{L}_{\omega^\sharp}g = \nabla\omega(X, W) + \nabla\omega(W, X)$ , temos que

$$\mathcal{L}_{(f\omega)^\sharp}g(X, Y) = f\mathcal{L}_{\omega^\sharp}g(X, Y) + (df \otimes \omega)(X, Y) + (df \otimes \omega)(Y, X).$$

Portanto,  $\mathcal{L}_{(f\omega)^\sharp}g = f\mathcal{L}_{\omega^\sharp}g + (df \otimes \omega) + (\omega \otimes df)$ . Assim, usando a expressão para  $\delta G(e^{s\phi}h)$  acima, calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\delta G(e^{s\phi}h))^\sharp}g &= \mathcal{L}_{(-se^{s\phi}h(\xi^\sharp, \cdot))^\sharp}g + \mathcal{L}_{(\frac{1}{2}se^{s\phi}trh\xi)^\sharp}g \\
&\quad + \mathcal{L}_{(e^{s\phi}s^0(\dots))^\sharp}g.
\end{aligned}$$

Vamos calcular cada uma destas parcelas isoladamente usando a fórmula para  $\mathcal{L}_{(f\omega)^\sharp}g$ . Para a primeira parcela, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(-se^{s\phi}h(\xi^\sharp, \cdot))^\sharp}g &= -se^{s\phi}\mathcal{L}_{(h(\xi^\sharp, \cdot))^\sharp}g + h(\xi^\sharp, \cdot) \otimes d(-se^{s\phi}) + d(-se^{s\phi}) \otimes [h(\xi^\sharp, \cdot)] \\
&= s^1(\dots) - s^2e^{s\phi}\{d\phi \otimes [h(\xi^\sharp, \cdot)] + h(\xi^\sharp, \cdot) \otimes d\phi\} \\
&= s^1(\dots) - s^2e^{s\phi}\{\xi \otimes [h(\xi^\sharp, \cdot)] + h(\xi^\sharp, \cdot) \otimes \xi\}.
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela, usando que  $d\phi = \xi$ , temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}se^{s\phi}trh\xi)^\#}g &= \frac{1}{2}se^{s\phi}trh\mathcal{L}_{\xi^\#}g + \frac{1}{2}d(se^{s\phi}trh) \otimes \xi + \frac{1}{2}\xi \otimes d(se^{s\phi}trh) \\ &= s^1(\dots) + \frac{1}{2}(s^2e^{s\phi}(trh)d\phi \otimes \xi + se^{s\phi}d(trh) \otimes \xi) \\ &\quad + \frac{1}{2}(s^2e^{s\phi}(trh)\xi \otimes d\phi + se^{s\phi}\xi \otimes d(trh)) \\ &= s^1(\dots) + s^2e^{s\phi}(trh)(\xi \otimes \xi).\end{aligned}$$

Finalmente, para a última parcela, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(e^{s\phi}s^0(\dots))^\#}g &= e^{s\phi}\mathcal{L}_{(s^0(\dots))^\#}g + d(e^{s\phi}) \otimes s^0(\dots) + s^0(\dots) \otimes d(e^{s\phi}) \\ &= s^0(\dots) + s^1(\dots)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\delta G(e^{s\phi}h))^\#}g &= e^{s\phi}[s^2(-\xi \otimes [h(\xi^\#, \cdot)] - h(\xi^\#, \cdot) \otimes \xi + (\xi \otimes \xi)trh) \\ &\quad + s^1(\dots) + s^0(\dots)].\end{aligned}$$

Então, pela definição do símbolo principal,

$$\sigma(h \mapsto \mathcal{L}_{(\delta G(e^{s\phi}h))^\#}g)(x, \xi)h = -\xi \otimes [h(\xi^\#, \cdot)] - h(\xi^\#, \cdot) \otimes \xi + (\xi \otimes \xi)trh.$$

Segue que,

$$\sigma(L)(x, \xi)h = |\xi|^2h - \xi \otimes [h(\xi^\#, \cdot)] - h(\xi^\#, \cdot) \otimes \xi + (\xi \otimes \xi)trh,$$

onde  $L$  é como na seção 5.4.

Tendo em mãos o símbolo principal da nossa equação, podemos avaliar se ela é ou não parabólica. Para ser parabólica, devemos ter que  $\langle \sigma(L)(x, \xi)h, h \rangle > 0$  quaisquer que sejam  $(x, \xi) \in T^*M$  com  $\xi \neq 0$  e  $h \in \text{Sym}^2 T_x^*M$ . Contudo, se fizermos  $h = \xi \otimes \xi$  vemos que

$$\begin{aligned}\sigma(L)(x, \xi)h &= |\xi|^2\xi \otimes \xi - \xi \otimes (\xi \otimes \xi)(\xi^\#, \cdot) - (\xi \otimes \xi)(\xi^\#, \cdot) \otimes \xi + (\xi \otimes \xi)tr(\xi \otimes \xi) \\ &= |\xi|^2(\xi \otimes \xi)(1 - 1 - 1 + 1) = 0,\end{aligned}$$

onde foi usado que

$$\xi(\xi^\#) = \xi(\xi^i \partial_i) = \xi^i \xi(\partial_i) = \xi^i \xi_i = g^{ij} \xi_j \xi_i = \langle \xi, \xi \rangle = |\xi|^2,$$

e portanto valem

1)

$$tr(\xi \otimes \xi) = g^{ij} \xi(\partial_i) \xi(\partial_j) = g^{ij} \xi_i \xi_j = |\xi|^2$$

2)

$$(\xi \otimes \xi)(\xi^\#, \cdot) = \xi(\xi^\#) \xi = |\xi|^2 \xi.$$

Segue que  $\frac{\partial h}{\partial t} = L(h)$  não é parabólica.

---

## Existência e unicidade do fluxo de Ricci para tempos curtos

---

Como já vimos, a equação do fluxo de Ricci não é parabólica e portanto não podemos usar o resultado da teoria geral de equações diferenciais parciais parabólicas visto no capítulo anterior. Aqui será demonstrado que para tempos curtos podemos garantir a existência e a unicidade de uma solução para o fluxo de Ricci em uma variedade Riemanniana  $M$  dada uma condição inicial  $g(0) = g_0$ . Este teorema foi provado primeiramente por Hamilton em 1982 em [12]. Neste artigo, Hamilton fez uso do teorema da função inversa de Nash-Moser para estabelecer este resultado. Mais tarde, em 1983, Dennis DeTurck [6] obtém o mesmo resultado usando o que hoje chamamos de *o truque de DeTurck*, que reduz o problema de existência e unicidade de soluções do fluxo de Ricci ao problema de existência e unicidade de soluções de uma equação parabólica. O que será feito neste capítulo é baseado no capítulo 2 de [4].

### 6.1 Preliminares

#### 6.1.1 Álgebra linear

É importante que, para a leitura deste capítulo, o leitor esteja familiarizado com alguns resultados de álgebra multi-linear, principalmente a existência de um isomorfismo entre  $V^* \otimes W$  e  $\mathcal{L}(V, W)$ . Dado  $\varphi \otimes w \in V^* \otimes W$ , a aplicação que leva  $\varphi \otimes w$  em  $L_{\varphi, w}$  definida por  $L_{\varphi, w}(v) = \varphi(v)w$ , com  $v \in V$ , é um isomorfismo linear. Para mais, consultar [15].

Se  $f : M^n \rightarrow N^m$  é uma função diferenciável entre duas variedades, então temos que  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é uma transformação linear entre os espaços vetoriais  $T_p M$  e  $T_{f(p)} N$ . Mas, podemos ver  $df_p$  como um elemento de  $T_p^* M \otimes T_{f(p)} N$  via o isomorfismo mencionado anteriormente. Sejam  $\mathcal{B} = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ ,  $\mathcal{B}^* = \{dx^1, \dots, dx^n\}$  e  $\mathcal{C} = \{\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_m\}$  bases para  $T_p M$ ,  $T_p^* M$  e  $T_{f(p)} N$ , respectivamente. Então,

$$df_p(\partial_j) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \bar{\partial}_\alpha = \left[ \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} dx^i \otimes \bar{\partial}_\alpha \right] (\partial_j). \quad (6.1)$$

### 6.1.2 A conexão no fibrado pull-back

Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis,  $E$  um fibrado vetorial sobre  $N$  e seja  $f$  uma aplicação diferenciável de  $M$  para  $N$ . Como vimos na definição 2.10, podemos considerar o fibrado pull-back  $f^*E$ .

**Definição 6.1.** A restrição  $\xi_f \in \Gamma(f^*E)$  de  $\xi \in \Gamma(E)$  a  $f$  é definida por

$$\xi_f(p) = \xi(f(p)) \in E_{f(p)} = (f^*E)_p$$

qualquer que seja  $p \in M$ .

**Exemplo 6.2.** Suponha que  $g$  seja uma métrica em  $E$ . Então  $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ , e pela restrição obtemos  $g_f \in \Gamma((f^*E)^* \otimes (f^*E)^*)$ , que é uma métrica em  $f^*E$ : Se  $\eta, \xi \in (f^*E)_p = E_{f(p)}$ , então  $(g_f(p))(\eta, \xi) = (g(f(p)))(\eta, \xi)$ .

O teorema a seguir, que pode ser encontrado em [2], mostra como funciona a conexão no fibrado pull-back. Seja  $\nabla$  uma conexão no fibrado  $E$  sobre  $N$  e seja  $f : M \rightarrow N$  uma função diferenciável.

**Teorema 6.3.** Existe uma única conexão  ${}^f\nabla$  em  $f^*E$ , chamada de conexão pull-back, tal que

$${}^f\nabla_v(\xi_f) = \nabla_{df(v)}\xi \quad (6.2)$$

para quaisquer  $v \in TM$  e  $\xi \in \Gamma(E)$ .

**Proposição 6.4.** Se  $g$  é uma métrica em  $E$  e  $\nabla$  é a conexão em  $E$  compatível com  $g$ , então  ${}^f\nabla$  é compatível com a restrição  $g_f$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $\nabla$  é compatível com  $g$  se, e somente se,  $\nabla g = 0$ . Precisamos, portanto, mostrar que  ${}^f\nabla g_f = 0$  se  $\nabla g = 0$ . Isto é imediato, uma vez que  ${}^f\nabla_v(g_f) = \nabla_{df(v)}g = 0$ . ■

**Definição 6.5** (Pushforwards). Se  $f : M \rightarrow N$  é diferenciável, então para cada  $p \in M$ , temos a aplicação linear  $f_*(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N = (f^*TN)_p$ . Isto é,  $f_*(p) \in T_p^*M \otimes (f^*TN)_p$ . Então  $f_*$  é uma seção diferenciável de  $T^*M \otimes f^*TN$ .

**Exemplo 6.6.** Dado  $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ , o pushforward de  $X$  é a seção  $f_*X \in \Gamma(f^*TN)$  que é dada ao se aplicar  $f_*$  a  $X$ .

Na seção a seguir não haverá diferença nos símbolos usados para as conexões envolvidas, mas deverá ficar claro para o leitor quais conexões estão sendo usadas.

## 6.2 O fluxo da aplicação harmônica

Sejam  $(M^n, g)$  e  $(N^m, h)$  duas variedades Riemannianas e seja  $f : M^n \rightarrow N^m$  uma função diferenciável. A derivada de  $f$  pode ser vista como

$$df \equiv f_* \in \Gamma(T^*M^n \otimes f^*TN^m)$$

onde  $f^*TN^m$  é o fibrado pullback sobre  $M^n$ . Isto é verdade porque, em cada ponto  $p \in M$  existe um isomorfismo linear entre  $\mathcal{L}(T_pM, T_{f(p)}N)$  e  $T_p^*M \otimes T_{f(p)}N$  e  $T_{f(p)}N = (f^*TN)_p$ . Usando coordenadas locais  $\{x^i\}$  em  $M^n$  e  $\{y^\alpha\}$  em  $N^m$ , denotamos a conexão de  $g$  por  $(\Gamma_g)^k_{ij}$  e a conexão de  $h$  por  $(\Gamma_h)^\gamma_{\alpha\beta}$ . Então,

$$df = (df)_j^\alpha \left( dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \left( dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right).$$

A conexão induzida

$$\nabla : \Gamma(T^*M^n \otimes f^*TN^m) \longrightarrow \Gamma(T^*M^n \otimes T^*M^n \otimes f^*TN^m)$$

é definida da seguinte maneira: Sejam  $\omega \otimes X \in \Gamma(T^*M^n \otimes f^*TN^m)$  e  $v \in \Gamma(TM)$ . Então,

$$\begin{aligned} \nabla_v(\omega \otimes X) &:= (\nabla_v \omega) \otimes X + \omega \otimes ({}^f\nabla_v X) \\ &= (\nabla_v \omega) \otimes X + \omega \otimes \nabla_{df(v)} X. \end{aligned}$$

Usando a equação 6.2, calculamos

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial/\partial x^i}(\partial/\partial y^\beta) &= \nabla_{df(\partial/\partial x^i)}(\partial/\partial y^\beta) \\ &= \nabla_{(\partial^\alpha f/\partial x^i)} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} (\partial/\partial y^\beta) \\ &= \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \\ &= \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^i} (\Gamma_h \circ f)^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}. \end{aligned}$$

Segue, portanto, que os símbolos de Christoffel da conexão pull-back são dados por

$$(f^*\Gamma)^\gamma_{i\beta} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} (\Gamma_h \circ f)^\gamma_{\alpha\beta}.$$

Assim, calculando  $\nabla df$ , obtemos

$$\nabla(df) = \sum_{i,j,\alpha} (\nabla df)^\alpha_{ij} \left( dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right),$$

onde

$$(\nabla df)^\alpha_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \right) - (\Gamma_g)^k_{ij} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} (\Gamma_h \circ f)^\alpha_{\beta\gamma} \left( \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} \right).$$

A equação acima segue dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
(\nabla df)(\partial_i, \partial_j, dy^\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(df(\partial_j, dy^\alpha)) - df(\nabla_{\partial_i} \partial_j, dy^\alpha) - df(\partial_j, \nabla_{\partial_i} dy^\alpha) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \right) - df((\Gamma_g)_{ij}^k \partial_k, dy^\alpha) - df(\partial_j, \nabla_{df(\partial_i)} dy^\alpha) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \right) - (\Gamma_g)_{ij}^k \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} \right) - df \left( \partial_j, \nabla_{\frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y^\beta}} dy^\alpha \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \right) - (\Gamma_g)_{ij}^k \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} \right) - df \left( \partial_j, \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}} dy^\alpha \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \right) - (\Gamma_g)_{ij}^k \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} \right) \\
&\quad - \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} df(\partial_j, -(\Gamma \circ f)_{\beta\gamma}^\alpha dx^\gamma) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \right) - (\Gamma_g)_{ij}^k \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} (\Gamma \circ f)_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial f^\gamma}{\partial x_j},
\end{aligned}$$

onde a quinta igualdade vem de

$$\begin{aligned}
\left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}} dy^\alpha \right) \left( \frac{\partial}{\partial y^t} \right) &= \frac{\partial}{\partial y^\beta} \left( dy^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y^t} \right) \right) - dy^\alpha \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}} \frac{\partial}{\partial y^t} \right) \\
&= -dy^\alpha \left( (\Gamma \circ f)_{\beta t}^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right) \\
&= -(\Gamma \circ f)_{\beta t}^\alpha,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}} dy^\alpha = -(\Gamma \circ f)_{\beta\gamma}^\alpha dx^\gamma.$$

Se tomarmos o traço nas duas primeiras entradas de  $\nabla df$  obtemos uma seção de  $f^*TN$ . Este objeto é importante para o que segue e motiva a seguinte

**Definição 6.7.** O laplaciano da aplicação harmônica é definido por

$$\Delta_{g,h}f = \text{tr}_{12}(\nabla df) \in \Gamma(f^*TN^m).$$

Em componentes,

$$(\Delta_{g,h}f)^\alpha = g^{ij} \left[ \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_g)_{ij}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} + \left( (\Gamma_h)_{\gamma\beta}^\alpha \circ f \right) \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} \right]. \quad (6.3)$$

Dada  $f_0 : M^n \rightarrow N^m$  diferenciável, o fluxo da aplicação harmônica, introduzido por Eells e Sampson em [9], é



$$\begin{cases} \frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta_{g,h} f \\ f(0) = f_0, \end{cases} \quad (6.4)$$

onde  $f_t$  é uma família a um parâmetro de aplicações de  $M$  em  $N$ .

**Observação 6.8.** Eells e Sampson mostraram em [9] que 6.4 admite uma única solução em tempos curtos. O leitor pode consultar o teorema em [9, pág. 151] para a unicidade e o teorema em [9, pág. 154] para existência.

Vamos usar o teorema 5.7 para obter a existência e unicidade de 6.4 em tempos curtos.

Note que 6.3 não é linear em  $f$ , mas o termo  $g^{ij} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}$  o é. Assim, denotando por  $\bar{f}$  uma variação de  $f$ , após uma linearização obtemos

$$L(\bar{f})^\alpha = g^{ij} \frac{\partial^2 \bar{f}^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + (\text{termos com derivadas de ordem menor que 2}).$$

Procedendo como no exemplo 5.4, temos que

$$L(\bar{f}) = g^{ij} \frac{\partial^2 \bar{f}^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + (\dots)$$

com  $a_{\alpha\beta}^{ij} = g^{ij} \delta_{\alpha\beta}$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  sendo índices simples.

Segue que a equação

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = L(\bar{f})$$

tem símbolo principal dado por  $\sigma(x, \xi) \bar{f} = |\xi|^2 \bar{f}$ , pois, pela equação 5.8,

$$\begin{aligned} \sigma(L)(s, \xi) \bar{f} &= \sum_{\alpha} \left[ g^{ij} \delta_{\alpha\beta} \xi_i \xi_j \bar{f}^\beta \right] \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= g^{ij} \xi_i \xi_j f^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= |\xi|^2 f. \end{aligned}$$

Como

$$\langle \sigma(L)(x, \xi) \bar{f}, \bar{f} \rangle = |\xi|^2 |\bar{f}|^2,$$

temos que 6.4 é parabólica, pela definição 5.5. Assim, existe uma única solução em um intervalo  $[0, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

**Lema 6.9.** Suponha que  $K$ ,  $M$  e  $N$  sejam variedades diferenciáveis com um difeomorfismo  $\psi : K \rightarrow M$  e uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$ . Sejam  $\tilde{g}$  um tensor métrico de  $M$ ,  $\tilde{h}$  um tensor métrico de  $N$  e  $g = \psi^* \tilde{g}$ . Então,

$$\Delta_{g, \tilde{h}}(\varphi \circ \psi) = (\Delta_{\tilde{g}, \tilde{h}} \varphi) \psi,$$

onde o  $\Psi$  subscrito denota a restrição como na definição 6.1.

*Demonstração.* Qualquer que seja  $p \in K$ , precisamos mostrar que

$$\Delta_{g,h}(\varphi \circ \psi)(p) = (\Delta_{\tilde{g},\tilde{h}}\varphi)(\psi(p)).$$

Para fazer isto para qualquer  $p$  fixo, escolha coordenadas locais  $(x^i)$  para  $M$  numa vizinhança de  $\psi(p)$  e induza coordenadas locais em  $K$  numa vizinhança de  $p$  por  $y^i = x^i \circ \psi$ . Fixe coordenadas locais  $(z^\alpha)$  para  $N$  numa vizinhança de  $\varphi \circ \psi(p)$ . Nestas coordenadas temos que  $z \circ \varphi \circ x^{-1} = z \circ (\varphi \circ \psi) \circ y^{-1}$ ,  $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$  daí  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ . Portanto nestas coordenadas  $\varphi^\alpha = (\varphi \circ \psi)^\alpha$ . Segue que

$$\begin{aligned} (\Delta_{\tilde{g},\tilde{h}}\varphi)(\psi(p)) &= \tilde{g}_{ij}(\partial_i \partial_j \varphi^\alpha - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \partial_k \varphi^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \partial_i \varphi^\beta \partial_j \varphi^\gamma) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \\ &= g^{ij}(\partial_i \partial_j (\varphi \circ \psi)^\alpha - \Gamma_{ij}^k \partial_k (\varphi \circ \psi)^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \partial_i (\varphi \circ \psi)^\beta \partial_j (\varphi \circ \psi)^\gamma) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \\ &= (\Delta_{g,h}(\varphi \circ \psi))(p). \end{aligned}$$

■

**Corolário 6.10.** *Seja  $f$  uma aplicação diferenciável de uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  para outra variedade Riemanniana  $(N, h)$  e seja  $\varphi$  um difeomorfismo de  $M$  em  $M$ . Então*

$$(\Delta_{\varphi^*(g),h}(f \circ \varphi))|_p = (\Delta_{g,h}f)|_{\varphi(p)}.$$

### 6.3 O Fluxo de Ricci-DeTurck

No que segue precisaremos de uma métrica fixada em  $M$ . Vamos fixar, de uma vez por todas, uma métrica que denotaremos por  $h$ .

**Definição 6.11.** *Seja  $M$  uma variedade compacta, e seja  $h$  uma métrica fixada de  $M$ . Suponha que  $\tilde{g}(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , é uma família a um parâmetro de métricas em  $M$ . Dizemos que  $\tilde{g}(t)$  é uma solução para o fluxo de Ricci-DeTurck se*

$$\frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t),$$

onde  $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t),h} id$ .

**Lema 6.12.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g} &= -\tilde{g}^{ik}(\partial_i \partial_l \tilde{g}_{jk} + \partial_j \partial_k \tilde{g}_{il} - \partial_j \partial_l \tilde{g}_{ik}) dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + (\text{termos com derivadas de } \tilde{g} \text{ de ordem inferior}). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pela equação 6.3,  $\xi_t = \Delta_{\tilde{g},h} id$  pode ser escrito como

$$\xi_t = \tilde{g}^{ik}[(\Gamma_h)_{ik}^l - (\Gamma_{\tilde{g}})_{ik}^l] \partial_l.$$

Daí

$$\begin{aligned}\xi_t &= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn}(\partial_i\tilde{g}_{mk} + \partial_k\tilde{g}_{mi} - \partial_m\tilde{g}_{ik})\partial_n \\ &\quad + (\text{termos com derivadas de } \tilde{g} \text{ de ordem inferior}).\end{aligned}$$

Vamos usar a equação 2.9 para calcular a derivada de Lie e coletar os termos que possuem apenas derivadas de  $\tilde{g}$  de segunda ordem. Fazendo as substituições na equação 2.9, obtemos

$$\mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}(\partial_j, \partial_l) = \langle \nabla_j \xi_t, \partial_l \rangle + \langle \nabla_l \xi_t, \partial_j \rangle.$$

Temos também que

$$\begin{aligned}\nabla_j \xi_t &= \nabla_j \left( -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{jl}(\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_k\tilde{g}_{ij} - \partial_j\tilde{g}_{ik})\partial_l \right. \\ &\quad \left. + (\text{termos com derivadas de } \tilde{g} \text{ de ordem inferior}) \right) \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn}(\partial_j\partial_i\tilde{g}_{mk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{im} - \partial_j\partial_m\tilde{g}_{ik})\partial_n + (\dots).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_l \xi_t = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn}(\partial_l\partial_i\tilde{g}_{mk} + \partial_l\partial_k\tilde{g}_{im} - \partial_l\partial_m\tilde{g}_{ik})\partial_n + (\dots).$$

Segue que,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_j \xi_t, \partial_l \rangle &= \tilde{g}_{nl} \left[ -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn}(\partial_j\partial_i\tilde{g}_{mk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{im} - \partial_j\partial_m\tilde{g}_{ik}) \right] + (\dots) \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_j\partial_i\tilde{g}_{lk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik}) + (\dots).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\langle \nabla_l \xi_t, \partial_j \rangle = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_l\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_l\partial_k\tilde{g}_{ij} - \partial_l\partial_j\tilde{g}_{ik}) + (\dots).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g} &= \left[ -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_j\partial_i\tilde{g}_{lk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik}) \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_l\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_l\partial_k\tilde{g}_{ij} - \partial_l\partial_j\tilde{g}_{ik}) \right] dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + (\dots) \\ &= \left[ -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_j\partial_i\tilde{g}_{lk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik}) \right] dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_l\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_l\partial_k\tilde{g}_{ij} - \partial_l\partial_j\tilde{g}_{ik}) \right] dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + (\dots) \\ &= -\tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik}) dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + (\text{termos com derivadas de } \tilde{g} \text{ de ordem inferior}),\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue alternando os índices  $j$  e  $l$  na segunda parcela da igualdade anterior. ■

**Proposição 6.13.** *Seja  $M$  uma variedade compacta e seja  $h$  uma métrica fixada de  $M$ . Dada uma métrica inicial  $g_0$ , existe um número real  $T > 0$  e uma família diferenciável a um parâmetro de métricas  $\tilde{g}(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , tal que  $\tilde{g}(t)$  é solução do fluxo de Ricci-DeTurck com condição inicial  $\tilde{g}(0) = g_0$ . A solução é única.*

*Demonstração.* Lembre que, pela equação 2.7,

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}} &= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl} - \partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk} - \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} + \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik})dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + (\text{termos com derivadas de } \tilde{g} \text{ de ordem inferior}). \end{aligned}$$

Pelo lema 6.12, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g} &= -\tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik})dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + (\text{termos com derivadas de } \tilde{g} \text{ de ordem inferior}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -2Ric_{\tilde{g}} - \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g} &= \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl}dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + (\text{termos com derivadas de } \tilde{g} \text{ de ordem inferior}). \end{aligned}$$

Fazendo  $P(\tilde{g}) = -2Ric_{\tilde{g}} - \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}$ , vamos calcular a linearização  $[DP(\tilde{g})]\tilde{h}$  de  $P(\tilde{g})$  e calcular seu símbolo principal. Usando a regra de Leibniz e lembrando que  $\partial_t\tilde{g}^{ab} = -\tilde{h}^{ab}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(-2Ric_{\tilde{g}} - \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}) &= -\tilde{h}^{ik}\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl}dx^j \otimes dx^l \\ &\quad + \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k\tilde{h}_{jl}dx^j \otimes dx^l + (\dots) \\ &= \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k\tilde{h}_{jl}dx^j \otimes dx^l + (\dots) \\ &= L(\tilde{h}). \end{aligned}$$

Para calcular o símbolo principal  $\sigma(L)(x, \xi)\tilde{h}$  vamos primeiro trocar  $\tilde{h}$  por  $e^{s\phi}\tilde{h}$ . Fazendo os cálculos e coletando apenas o termo com  $s^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} L(e^{s\phi}\tilde{h}) &= \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k(e^{s\phi}\tilde{h}_{jl})dx^j \otimes dx^l + (\dots) \\ &= \tilde{g}^{ik}\partial_i[\partial_k(e^{s\phi}\tilde{h}_{jl}) + e^{s\phi}\partial_k\tilde{h}_{jl}]dx^j \otimes dx^l + (\dots) \\ &= \tilde{g}^{ik}\partial_i(\tilde{h}_{jl}e^{s\phi}s\frac{\partial\phi}{\partial x^k} + e^{s\phi}\partial_k\tilde{h}_{jl})dx^j \otimes dx^l \\ &= \tilde{g}^{ik}\left\{s\left[(\partial_i\tilde{h}_{jl})e^{s\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} + \tilde{h}_{jl}se^{s\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} + \tilde{h}_{jl}e^{s\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^k}\right] \right. \\ &\quad \left. + se^{s\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\partial_k\tilde{h}_{jl} + e^{s\phi}\partial_i\partial_k\tilde{h}_{jl}\right\}dx^j \otimes dx^l + (\dots) \\ &= s^2e^{s\phi}\tilde{g}^{ik}\tilde{h}_{jl}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^j \otimes dx^l + (\dots) \end{aligned}$$

Segue que

$$s^{-2}e^{-s\phi}L(e^{s\phi}) = \tilde{g}^{ik}\tilde{h}_{jl}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^j \otimes dx^l + (\dots),$$

onde  $(\dots)$  representa os termos que possuem  $s^{-1}$  e  $s^{-2}$ . Assim,

$$\begin{aligned}\sigma(L)(x, \xi)\tilde{h} &= \lim_{s \rightarrow \infty} [s^{-2}e^{-s\phi}L(e^{s\phi}\tilde{h})] \\ &= \tilde{g}^{ik}\tilde{h}_{jl}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^j \otimes dx^l.\end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = d\phi(\partial_i) = \xi(\partial_i) = \xi_i$ , temos que

$$\sigma(L)(x, \xi)\tilde{h} = \tilde{g}^{ik}\tilde{h}_{jl}\xi_i\xi_kdx^j \otimes dx^l = |\xi|^2\tilde{h}_{jl}dx^j \otimes dx^l = |\xi|^2\tilde{h}.$$

Para concluir,

$$\langle \sigma(L)(x, \xi)\tilde{h}, \tilde{h} \rangle = \langle |\xi|^2\tilde{h}, \tilde{h} \rangle = |\xi|^2\langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle = |\xi|^2|\tilde{h}|^2.$$

Isto mostra que a equação do fluxo de Ricci-DeTurck é parabólica e portanto existe única solução para esta equação em um intervalo  $[0, T)$ ,  $T > 0$ , concluindo assim a demonstração. ■

## 6.4 O Teorema

A ideia principal é mostrar que existe uma correspondência 1 – 1 entre os fluxos de Ricci o Ricci-DeTurck.

**Proposição 6.14.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com uma métrica  $h$  fixada. Assuma que  $\tilde{g}(t)$  é uma família a um parâmetro de métricas em  $M$  satisfazendo*

$$\frac{\partial\tilde{g}(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t),$$

onde  $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t), h}id$ . Seja  $\varphi_t$ ,  $t \in [0, T)$ , uma família a um parâmetro de difeomorfismos que satisfaz

$$\frac{\partial\varphi_t(p)}{\partial t} = \xi_t|_{\varphi_t(p)}$$

para todos os pontos  $p \in M$  e para todo  $t \in [0, T)$ . Então, as métricas  $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$ ,  $t \in [0, T)$ , são solução do fluxo de Ricci.

*Demonstração.* Como  $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$ , temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^*(\tilde{g}(t)) \\ &= \varphi_t^*\left(\frac{\partial\tilde{g}(t)}{\partial t} + \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t)\right) \\ &= \varphi_t^*(-2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t) + \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t)) \\ &= \varphi_t^*(-2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)}) \\ &= -2\text{Ric}_{g(t)},\end{aligned}$$

■

onde usamos a proposição 3.6 e o teorema 2.17.

**Proposição 6.15.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com uma métrica  $h$  fixada. Suponha que  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , seja solução do fluxo de Ricci em  $M$ . Suponha ainda que  $\varphi_t$ ,  $t \in [0, T)$ , seja uma família a um parâmetro de difeomorfismos de  $M$  evoluindo através do fluxo de calor do mapa hamônico*

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \Delta_{g(t), h} \varphi_t.$$

Para cada  $t \in [0, T)$ , defina uma nova métrica  $\tilde{g}(t)$  por  $\varphi_t^*(\tilde{g}(t)) = g(t)$ . Então

$$\frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t),$$

onde  $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t), h} \text{id}$ . Além disto temos que para todo  $p \in M$  e para todo  $t \in [0, T)$  vale

$$\frac{\partial \varphi_t(p)}{\partial t} = \xi_t|_{\varphi_t(p)}.$$

*Demonstração.* Pelo corolário 6.10 temos que, para todo  $p \in M$  e para todo  $t \in [0, T)$  vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_t(p)}{\partial t} &= (\Delta_{g(t), h} \varphi_t)|_p = (\Delta_{\varphi_t^*(\tilde{g}(t)), h} \varphi_t)|_p \\ &= (\Delta_{\tilde{g}(t), h} \text{id})|_{\varphi_t(p)} = \xi_t|_{\varphi_t(p)}. \end{aligned}$$

Como  $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$  e sabendo que por hipótese  $\partial_t(g(t)) = -2\text{Ric}_{g(t)}$ , vamos ter que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \varphi_t^* \left( \frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} + \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t) \right) \\ \frac{\partial g(t)}{\partial t} + 2\text{Ric}_{g(t)} &= 2\text{Ric}_{g(t)} + \varphi_t^* \left( \frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} + \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t) \right) \\ 0 &= \varphi_t^* \left( \frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} + \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t) + 2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} \right). \end{aligned}$$

Concluimos que  $\frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} + \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t) + 2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} = 0$  e portanto

$$\frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t).$$

■

**Teorema 6.16** (Hamilton). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta e seja  $g_0$  uma métrica diferenciável em  $M$ . Então existe um número real  $T > 0$  e uma família diferenciável a um parâmetro de métricas  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , tal que  $g(t)$  é solução do fluxo de Ricci com  $g(0) = g_0$ . A solução é única.*

*Demonstração.* Sabemos que existe uma solução  $\tilde{g}(t)$  para o fluxo de Ricci-DeTurck que está definida em um intervalo  $[0, T)$  e satisfaz a condição inicial  $\tilde{g}(0) = g_0$ . Consequentemente, temos

$$\frac{\partial \tilde{g}(t)}{\partial t} = -2Ric_{\tilde{g}(t)} - \mathcal{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t)$$

onde  $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t), h} id$ . Para cada  $p \in M$  denote por  $\varphi_t(p)$  a solução da EDO

$$\frac{\partial \varphi_t(p)}{\partial t} = \xi_t|_{\varphi_t(p)}$$

com condição inicial  $\varphi_0(p) = p$ . Pela proposição 6.14, as métricas  $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$ , com  $t \in [0, T)$ , são solução do fluxo de Ricci com  $g(0) = g_0$ . Isto mostra a existência.

Agora, sejam  $g^1(t)$  e  $g^2(t)$  duas soluções do fluxo de Ricci que estão definidas em algum intervalo  $[0, T)$  e satisfazem  $g^1(0) = g^2(0)$ . Afirmo que  $g^1(t) = g^2(t)$  para todo  $t \in [0, T)$ .

Suponha que tenhamos  $g^1(t) \neq g^2(t)$  para algum  $t \in [0, T)$ . Seja  $\tau \in [0, T)$  definido por

$$\tau = \inf\{t \in [0, T) | g^1(t) \neq g^2(t)\}.$$

Temos que  $g^1(\tau) = g^2(\tau)$ . Seja  $\varphi_t^1$  a solução do fluxo de calor do mapa harmônico

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t^1}{\partial t} = \Delta_{g^1(t), h} \varphi_t^1 \\ \varphi_\tau^1 = id. \end{cases}$$

Analogamente, seja  $\varphi_t^2$  a solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t^2}{\partial t} = \Delta_{g^2(t), h} \varphi_t^2 \\ \varphi_\tau^2 = id. \end{cases}$$

Dos resultados de Eells e Sampson, sabemos que  $\varphi_t^1$  e  $\varphi_t^2$  estão definidas em algum intervalo  $[\tau, \tau + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Vamos escolher  $\varepsilon$  suficientemente pequeno para que

$$\begin{aligned} \varphi_t^1 : M &\longrightarrow M \\ \varphi_t^2 : M &\longrightarrow M \end{aligned}$$

sejam ambas difeomorfismos para todo  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$ . Tal  $\varepsilon$  existe pois difeomorfismo é uma condição estável (consultar o teorema de estabilidade em [11, pág. 35]).

Para cada  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$  defina duas novas métricas Riemannianas  $\tilde{g}^1(t)$  e  $\tilde{g}^2(t)$  em  $M$  por

$$\begin{aligned} (\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) &= g^1(t) \\ (\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) &= g^2(t). \end{aligned}$$

Pela proposição 6.15,  $\tilde{g}^1(t)$  e  $\tilde{g}^2(t)$  são ambas soluções do fluxo de Ricci-DeTurck. Como  $\tilde{g}^1(\tau) = \tilde{g}^2(\tau)$ , temos que

$$\begin{aligned}\tilde{g}^1(t) &= \tilde{g}^2(t) \\ t &\in [\tau, \tau + \varepsilon).\end{aligned}$$

Para cada  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$  defina um campo vetorial em  $M$  por

$$\xi_t = \Delta_{\tilde{g}^1(t),h} id = \Delta_{\tilde{g}^2(t),h} id.$$

Pela proposição 6.15 temos que quaisquer que sejam  $p \in M$  e  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$  vale

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_t^1(p)}{\partial t} &= \xi_t|_{\varphi_t^1(p)} \\ \frac{\partial \varphi_t^2(p)}{\partial t} &= \xi_t|_{\varphi_t^2(p)}.\end{aligned}$$

Como  $\varphi_\tau^1 = \varphi_\tau^2 = id$ , segue pela teoria geral de EDOs que  $\varphi_t^1 = \varphi_t^2$  para  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$ . Portanto,

$$\begin{aligned}g^1(t) &= (\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) = (\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) = g^2(t) \\ t &\in [\tau, \tau + \varepsilon).\end{aligned}$$

Isto contradiz a definição de  $\tau$ , concluindo a demonstração da unicidade. ■



## CAPÍTULO 7

---

### A teoria de Hamilton

---

*Curiouser and curiouser...*  
—Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*.

O objetivo deste capítulo é mostrar um resultado, devido a Hamilton, que caracteriza variedades Riemannianas tridimensionais com curvatura de Ricci positiva. Para este capítulo, usaremos como referência parte do material contido no capítulo 1 e o capítulo 2 de [5].

#### 7.1 A EDO de Hamilton

Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal local. Por *tensor de curvatura* deverá ser entendido um campo tensorial do tipo  $(4,0)$  que satisfaz as mesmas simetrias do tensor curvatura de Riemann. Ou seja, um tensor de curvatura  $T$  é um campo tensorial que satisfaz, quaisquer que sejam os campos vetoriais  $X, Y, Z$  e  $W$ :

- i)  $T(X, Y, Z, W) = -T(Y, X, Z, W)$
- ii)  $T(X, Y, Z, W) = T(Z, W, X, Y)$
- iii)  $T(X, Y, Z, W) + T(X, Z, W, Y) + T(X, W, Y, Z) = 0$  (Primeira identidade de Bianchi).

**Definição 7.1.** Seja  $R$  um tensor de curvatura. Definimos o tensor  $Q(R)$  por

$$\begin{aligned} Q(R)(X, Y, Z, W) &= \sum_{p,q} R(X, Y, e_p, e_q) R(Z, W, e_p, e_q) \\ &\quad + 2 \sum_{p,q} R(X, e_p, Z, e_q) R(Y, e_p, W, e_q) \\ &\quad - 2 \sum_{p,q} R(X, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, Z, e_q). \end{aligned}$$

**Lema 7.2.**  $Q(R)_{ijkl} = 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl})$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos lembrar que  $B_{ijkl} = g^{pq}g^{rs}R_{ipjr}R_{kqls} = g^{pq}g^{rs}R_{pirj}R_{qksl}$ . Como estamos trabalhando com um referencial ortonormal, vamos ter

$$B_{ijkl} = \sum_{p,q} R_{piqj} R_{pkql}.$$

Assim, segue que,

$$2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) = 2 \sum_{p,q} (R_{piqj} R_{pkql} - R_{piqj} R_{plqk} - R_{piql} R_{pj qk} + R_{piqk} R_{pjql}).$$

Usando a primeira identidade de Bianchi encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} R_{pqi j} R_{pkql} &= \sum_{p,q} \left\{ (R_{pijq} + R_{pjqi})(R_{plqk} + R_{pkql}) \right\} \\ &= \sum_{p,q} (R_{pijq} R_{pkql} + R_{pijq} R_{plqk} + R_{pjqi} R_{pkql} + R_{pjqi} R_{plqk}). \end{aligned}$$

Modificando apropriadamente cada uma das parcelas da expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} (R_{pijq} R_{pkql}) &= \sum_{p,q} ((-R_{piqj})(-R_{pkql})) = \sum_{p,q} (R_{piqj} R_{pkql}) \\ \sum_{p,q} (R_{pijq} R_{plqk}) &= \sum_{p,q} ((-R_{piqj})(R_{plqk})) = \sum_{p,q} (-R_{piqj} R_{plqk}), \end{aligned}$$

para as duas primeiras parcelas. Como temos um somatório em  $p$  e em  $q$ , podemos trocar a ordem destes índices obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} (R_{pjqi} R_{plqk}) &= \sum_{p,q} (R_{qjpi} R_{qlpk}) = \sum_{p,q} (R_{piqj} R_{pkql}) \\ \sum_{p,q} (R_{pjqi} R_{pkql}) &= \sum_{p,q} (R_{qjpi} R_{qklp}) = \sum_{p,q} (R_{piqj} R_{lpqk}) = \sum_{p,q} (-R_{piqj} R_{plqk}), \end{aligned}$$

para as parcelas seguintes. Somando estes resultados obtemos que

$$\sum_{p,q} (R_{pqi j} R_{pkql}) = 2 \sum_{p,q} (R_{piqj} R_{pkql}) - 2 \sum_{p,q} (R_{piqj} R_{plqk}).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) &= \sum_{p,q} (R_{pqi j} R_{pkql}) + 2 \sum_{p,q} (R_{piqk} R_{pjql}) - 2 \sum_{p,q} (R_{piql} R_{pj qk}) \\ &= \sum_{p,q} (R_{ijpq} R_{klpq}) + 2 \sum_{p,q} (R_{ipkq} R_{jplq}) - 2 \sum_{p,q} (R_{iplq} R_{jpkq}) \\ &= Q(R)_{ijkl}, \end{aligned}$$

onde da primeira para a segunda igualdade foram usadas algumas simetrias do tensor de curvatura. ■

Com isto, podemos escrever

$$Q(R)(X, Y, Z, W) = 2 \left( B(X, Y, Z, W) - B(X, Y, W, Z) - B(X, W, Y, Z) + B(X, Z, Y, W) \right).$$

Frequentemente se escreve  $Q(R) = R^2 + R^\sharp$ , onde

$$R^2(X, Y, Z, W) = \sum_{p,q} R(X, Y, e_p, e_q) R(Z, W, e_p, e_q)$$

$$R^\sharp(X, Y, Z, W) = 2 \sum_{p,q} R(X, e_p, Z, e_q) R(Y, e_p, W, e_q) - 2 \sum_{p,q} R(X, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, Z, e_q).$$

**Observação 7.3.** Verifica-se que  $Q(R)$  satisfaz a primeira identidade de Bianchi e que  $R^2$  e  $R^\sharp$  não a satisfazem. Também,  $Q(R)$  possui as outras simetrias do tensor curvatura de Riemann.

Se  $T$  é um campo tensorial de tipo  $(4, 0)$  que satisfaz as simetrias do tensor curvatura de Riemann, podemos, com abuso de notação, denotar por  $Ric(T)$  o campo tensorial obtido ao tomar o traço na segunda e quarta entradas e por  $S(T)$  o traço de  $Ric(T)$ . Assim,  $Ric(T)(X, Y) = \sum_i T(X, e_i, Y, e_i) = \sum_i T(e_i, X, e_i, Y)$  e  $S(T) = \sum_i Ric(T)(e_i, e_i)$ , onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial ortonormal local.

**Proposição 7.4.**

$$Ric(Q(R))(Y, W) = 2 \sum_{p,q} Ric(e_p, e_q) R(Y, e_p, W, e_q).$$

*Demonstração.* Segue da definição de  $Q(R)$  e de  $Ric$  que

$$\begin{aligned} Ric(Q(R))(Y, W) &= \sum_m Q(R)(e_m, Y, e_m, W) \\ &= \sum_{m,p,q} R(e_m, Y, e_p, e_q) R(e_m, W, e_p, e_q) \\ &\quad + 2 \sum_{m,p,q} R(e_m, e_p, e_m, e_q) R(Y, e_p, W, e_q) \\ &\quad - 2 \sum_{m,p,q} R(e_m, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, e_m, e_q) \\ &= \sum_{m,p,q} R(e_m, Y, e_p, e_q) R(e_m, W, e_p, e_q) \\ &\quad + 2 \sum_{m,p,q} Ric(e_p, e_q) R(Y, e_p, W, e_q) \\ &\quad - 2 \sum_{m,p,q} R(e_m, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, e_m, e_q). \end{aligned}$$

Da primeira identidade de Bianchi vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{m,p,q} R(e_m, Y, e_p, e_q) R(e_m, W, e_p, e_q) &= - \sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_p, e_q, Y) \right. \\ &\quad \left. + R(e_m, e_q, Y, e_p) \right] R(e_m, W, e_p, e_q) \\ &= 2 \sum_{m,p,q} R(e_m, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, e_m, e_q). \end{aligned}$$

Vamos mostrar a última igualdade.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_p, e_q, Y) + R(e_m, e_q, Y, e_p) \right] R(e_m, W, e_p, e_q) = \\
& - \sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_p, e_q, Y) R(e_m, W, e_p, e_q) \right] - \sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_q, Y, e_p) R(e_m, W, e_p, e_q) \right] \\
& = \sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_p, e_q, Y) R(e_p, e_q, W, e_m) \right] - \sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_q, Y, e_p) R(e_m, W, e_p, e_q) \right].
\end{aligned}$$

Temos dois somatórios distintos em  $m$ ,  $p$  e  $q$ . Podemos trocar apropriadamente os índices em cada somatório sem interferir no resultado. No primeiro somatório faremos a mudança

$$\begin{aligned}
p & \rightarrow m \\
m & \rightarrow q \\
q & \rightarrow p,
\end{aligned}$$

enquanto no segundo somatório a mudança será

$$\begin{aligned}
p & \rightarrow p \\
m & \leftrightarrow q.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos como resultado no primeiro termo

$$\begin{aligned}
\sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_p, e_q, Y) R(e_p, e_q, W, e_m) \right] & = \sum_{m,p,q} \left[ R(e_q, e_m, e_p, Y) R(e_m, e_p, W, e_q) \right] \\
& = \sum_{m,p,q} \left[ R(Y, e_p, e_m, e_q) R(e_m, e_p, W, e_q) \right].
\end{aligned}$$

Para o segundo termo, temos

$$\begin{aligned}
- \sum_{m,p,q} \left[ R(e_m, e_q, Y, e_p) R(e_m, W, e_p, e_q) \right] & = - \sum_{m,p,q} \left[ R(e_q, e_m, Y, e_p) R(e_q, W, e_p, e_m) \right] \\
& = \sum_{m,p,q} \left[ R(Y, e_p, e_m, e_q) R(e_m, e_p, W, e_q) \right].
\end{aligned}$$

Somando estes dois resultados, concluímos que

$$\sum_{m,p,q} R(e_m, Y, e_p, e_q) R(e_m, W, e_p, e_q) = 2 \sum_{m,p,q} R(e_m, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, e_m, e_q).$$

Como

$$\begin{aligned}
Ric(Q(R))(Y, W) & = \sum_{m,p,q} R(e_m, Y, e_p, e_q) R(e_m, W, e_p, e_q) \\
& + 2 \sum_{m,p,q} Ric(e_p, e_q) R(Y, e_p, W, e_q) \\
& - 2 \sum_{m,p,q} R(e_m, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, e_m, e_q)
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{m,p,q} R(e_m, Y, e_p, e_q) R(e_m, W, e_p, e_q) = 2 \sum_{m,p,q} R(e_m, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, e_m, e_q)$$

temos diretamente que

$$Ric(Q(R))(Y, W) = 2 \sum_{p,q} Ric(e_p, e_q) R(Y, e_p, W, e_q).$$

■

**Corolário 7.5.**  $S(Q(R)) = 2|Ric|^2$

*Demonstração.* Fazendo  $Y = W = e_s$  e somando em  $s$  temos

$$\begin{aligned} S(Q(R)) &= \sum_s Ric(Q(R))(e_s, e_s) \\ &= 2 \sum_{s,p,q} Ric(e_p, e_q) R(e_s, e_p, e_s, e_q) \\ &= 2 \sum_{p,q} (Ric(e_p, e_q))^2 = 2|Ric|^2. \end{aligned}$$

■

Retornando ao estudo do fluxo de Ricci.

Seja  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , uma solução do fluxo de Ricci em  $M$ . Dado  $x \in M$ , fixemos uma base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $T_x M$  ortonormal com respeito a  $g(0)$ . Seja  $\{e_i(t)\}_{i=1,2,\dots,n} \subset T_x M$ ,  $t \in [0, T)$ , a solução do sistema linear de EDOs

$$\frac{d}{dt} e_i(t) = Ric(e_i) \quad (7.1)$$

com condição inicial  $e_i(0) = e_i$ .

**Proposição 7.6.** *O conjunto  $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$  é uma base de  $T_x M$  ortonormal com respeito a  $g(t)$ .*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t)(e_i(t), e_k(t)) &= -2Ric(e_i(t), e_k(t)) + g(t) \left( \frac{d}{dt} e_i(t), e_k(t) \right) + g(t) \left( e_i(t), \frac{d}{dt} e_k(t) \right) \\ &= -2Ric(e_i(t), e_k(t)) + g(t)(Ric(e_i(t)), e_k(t)) + g(t)(e_i(t), Ric(e_k(t))) \\ &= -2Ric(e_i(t), e_k(t)) + Ric(e_i(t), e_k(t)) + Ric(e_i(t), e_k(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Como em uma base ortonormal  $Ric(e_i) = \sum_{k=1}^n Ric(e_i, e_k)e_k$ , então se trocarmos o sistema 7.1 pelo sistema não-linear

$$\frac{d}{dt}e_i(t) = \sum_{k=1}^n Ric(e_i, e_k)e_k, \quad (7.2)$$

temos que  $\{e_i(t)\}_{i=1,2,\dots,n}$  é uma base ortonormal de  $T_x M$  com respeito a  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , onde os  $e_i(t)$  satisfazem 7.2.

**Corolário 7.7.** *Seja  $g(t)$  uma solução do fluxo de Ricci. Se  $\{e_i(t)\}$  é uma base de  $T_x M$  ortonormal com respeito a  $g(t)$  que satisfaz 7.2, então*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Rm(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) &= \Delta Rm(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) \\ &\quad + Q(Rm)(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Lembrando da proposição 3.11 e do lema 7.2 temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}Rm(X, Y, W, Z) &= (\Delta Rm)(X, Y, W, Z) \\ &\quad - Ric(R(X, Y)W, Z) + Ric(R(X, Y)Z, W) \\ &\quad - Ric(R(W, Z)X, Y) + Ric(R(W, Z)Y, X) + Q(Rm)(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} &= (\Delta Rm)_{ijkl} \\ &\quad - Ric(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) + Ric(R(\partial_i, \partial_j)\partial_l, \partial_k) \\ &\quad - Ric(R(\partial_k, \partial_l)\partial_i, \partial_j) + Ric(R(\partial_k, \partial_l)\partial_j, \partial_i) + Q(Rm)_{ijkl} \\ &= (\Delta Rm)_{ijkl} + Q(Rm)_{ijkl} \\ &\quad - R_{ql}R_{ijk}^q + R_{qk}R_{ijl}^q - R_{qj}R_{kli}^q + R_{qi}R_{klj}^q \\ &= (\Delta Rm)_{ijkl} + Q(Rm)_{ijkl} \\ &\quad g^{pq}(-R_{ql}R_{ijkp} + R_{qk}R_{ijlp} - R_{qj}R_{klip} + R_{qi}R_{kljp}) \\ &= (\Delta Rm)_{ijkl} + Q(Rm)_{ijkl} \\ &\quad - g^{pq}(R_{ql}R_{ijkp} + R_{qk}R_{ijpl} + R_{qj}R_{ipkl} + R_{qi}R_{pjkl}). \end{aligned}$$

Aplicando o que foi feito acima para o referencial ortonormal  $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$  temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}Rm\right)(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) &= \Delta Rm(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) \\ &\quad + Q(Rm)(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) \\ &\quad - \sum_p \left\{ Ric(e_p(t), e_l(t))Rm(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_p(t)) \right. \\ &\quad + Ric(e_p(t), e_k(t))Rm(e_i(t), e_j(t), e_p(t), e_l(t)) \\ &\quad + Ric(e_p(t), e_j(t))Rm(e_i(t), e_p(t), e_k(t), e_l(t)) \\ &\quad \left. + Ric(e_p(t), e_i(t))Rm(e_p(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) \right\} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Rm(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} Rm \right) (e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)) \\ &+ Rm \left( \frac{d}{dt} e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t) \right) \\ &+ Rm \left( e_i(t), \frac{d}{dt} e_j(t), e_k(t), e_l(t) \right) \\ &+ Rm \left( e_i(t), e_j(t), \frac{d}{dt} e_k(t), e_l(t) \right) \\ &+ Rm \left( e_i(t), e_j(t), e_k(t), \frac{d}{dt} e_l(t) \right). \end{aligned}$$

Mas note que

$$Rm \left( \frac{d}{dt} e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t) \right) = \sum_p Ric(e_i(t), e_p(t)) Rm(e_p(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t)).$$

O colorário segue porque a EDO satisfeita pelos vetores  $e_i(t)$  foi escolhida para cancelar os termos com Ricci na expressão para  $\left( \frac{\partial}{\partial t} Rm \right) (e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_l(t))$ . ■

O espaço vetorial  $T_x M$  de uma variedade Riemanniana pode ser *isometricamente* identificado com o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , uma vez escolhida uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_x M$ . Assim, podemos associar  $v \in T_x M$  ao vetor com coordenadas  $(\langle v, e_i \rangle)_i \in \mathbb{R}^n$ . Duas identificações diferentes estão relacionadas pela ação de uma isometria linear  $T \in O(n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , o que equivale a uma mudança de base.

**Definição 7.8.** Um tensor de curvatura algébrico de  $\mathbb{R}^n$  é uma forma quadrilinear  $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz:

- i)  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$
- ii)  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$
- iii)  $R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 0$  (primeira identidade de Bianchi),

quaisquer que sejam  $X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 7.9.** O conjunto de tensores de curvatura algébricos de  $\mathbb{R}^n$  será denotado por  $Curv(\mathbb{R}^n)$ .

Como um tensor de curvatura algébrico é uma aplicação quadrilinear de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ , podemos ver  $Curv(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^N$ , com  $N = n^4$  (consultar o corolário 2 do capítulo 2 da referência [14]).

**Observação 7.10.** Como um tensor de curvatura algébrico é do mesmo tipo do tensor curvatura de Riemann e satisfaz as mesmas simetrias, podemos definir  $Ric(R)$  e  $S(R)$  do mesmo modo como definimos o tensor de Ricci e a curvatura escalar para o tensor de Riemann.

Se  $R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  e se  $T \in O(n)$ , definimos

$$R_T(X, Y, Z, W) = R(T(X), T(Y), T(Z), T(W)).$$

Claramente  $R_T \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$ . Dizemos que um subconjunto  $S \subset \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  é  $O(n)$ -invariante se para todo  $R \in S$  e para toda transformação  $T \in O(n)$  valer  $R_T \in S$ .

Escolhida uma base ortonormal de  $T_x M$ , podemos identificar o tensor de Riemann de uma variedade Riemanniana  $M$  em  $x$  com um tensor de curvatura algébrico. No nosso caso, identificaremos  $T_x M$  com  $\mathbb{R}^n$  por meio da base  $\{e_i(t)\}$  ortonormal com respeito a  $g(t)$  e que satisfaz 7.2.

Vamos verificar que duas identificações distintas estão relacionadas pela ação em  $\text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  de algum  $T \in O(n)$ : Dadas duas identificações  $I_1$  e  $I_2$ , existe uma transformação ortogonal  $T$  tal que  $R_1 = R_{2T}$ . Para isto fazemos  $T = I_2 I_1^{-1}$ . Então,

$$\begin{aligned} R_{2T}(X, Y, Z, W) &= R_2(T(X), T(Y), T(Z), T(W)) \\ &= Rm(I_2^{-1}(T(X)), \dots, I_2^{-1}(T(W))) \\ &= Rm(I_1^{-1}(X), \dots, I_1^{-1}(W)) \\ &= R_1(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

Segue que  $T = I_2 I_1^{-1}$ .

Por outro lado, seja  $I : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação que manda a base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $T_x M$  na base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Assim,  $R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  é dado por

$$R(X, Y, Z, W) = Rm(I^{-1}(X), I^{-1}(Y), I^{-1}(Z), I^{-1}(W)).$$

Dada  $T \in O(n)$ , então existe outra identificação  $\tilde{I}$  tal que

$$R_T(X, Y, Z, W) = Rm(\tilde{I}^{-1}(X), \dots, \tilde{I}^{-1}(W)).$$

Vemos isto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_T(X, Y, Z, W) &:= R(T(X), T(Y), T(Z), T(W)) \\ &= Rm(I^{-1}(T(X)), I^{-1}(T(Y)), I^{-1}(T(Z)), I^{-1}(T(W))), \end{aligned}$$

que é o tensor de curvatura algébrico obtido através da identificação  $\tilde{I} = T^{-1}I$ .

A evolução do tensor curvatura em  $x$  fica determinada por uma curva diferenciável

$$t \in [0, T) \rightarrow R(t) \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n).$$

Como consequência direta do corolário 7.7 temos

**Proposição 7.11.** *Pelo fluxo de Ricci*

$$\frac{d}{dt}R(t) = \Delta R(t) + Q(R(t)).$$

**Observação 7.12.** Acima, denotamos por  $\Delta R(t)$  o elemento de  $\text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  correspondente ao tensor  $\Delta_{g(t)}R$  em  $x$ , usando a identificação.

A EDO

$$\frac{d}{dt}R = Q(R)$$

terá um papel importante para o que segue. Ela é conhecida como a *EDO de Hamilton*.



## 7.2 Soluções máximas

No que segue,  $C$  denotará uma constante. O leitor deverá perceber que a constante  $C$  em cada uma das estimativas não é a mesma, apesar da notação.

**Definição 7.13.** *Dados dois campos tensoriais simétricos do tipo  $(2,0)$   $g_1$  e  $g_2$ , então  $g_1 \geq g_2$  significa que o campo tensorial  $g_1 - g_2$  é (fracamente) definido positivo.*

**Lema 7.14.** *Se  $g(t)$  é solução do fluxo de Ricci em uma variedade Riemanniana compacta para  $t \in [0, T)$ ,  $T < \infty$ , e se  $|Rm| \leq C_0$  em  $M \times [0, s]$  qualquer que seja o subconjunto  $[0, s] \subset [0, T)$ , então vale*

$$e^{-2Ct}g(0) \leq g(t) \leq e^{2Ct}g(0), \quad (7.3)$$

para todo  $t \in [0, s]$ , onde  $C = C(C_0)$ .

*Demonstração.* Fixemos um intervalo  $[0, s] \subset [0, T)$ . Primeiramente, vamos obter uma estimativa para  $|Ric|$ . Como  $|Rm| \leq C_0$  e  $Ric = Rm * g$ , temos que  $|Ric| = |Rm * g| \leq |Rm||g|$ . Portanto,  $|Ric| \leq C(C_0)$  em  $M \times [0, s]$ . Como  $\frac{\partial}{\partial t}g(X, X) = -2Ric(X, X)$ , temos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}g(X, X) \right| = 2|Ric(X, X)| = 2|\langle Ric(X), X \rangle| \leq 2|Ric|g(X, X),$$

onde  $|Ric|$  se refere a norma do operador  $Ric$ . Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln g(X, X) = \frac{1}{g(X, X)} \frac{\partial}{\partial t} g(X, X),$$

para qualquer  $X$  não-nulo. Daí,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \ln g(X, X) \right| \leq 2C.$$

Integrando, obtemos

$$\left| \ln \frac{g(t)(X, X)}{g(0)(X, X)} \right| \leq 2Ct,$$

de onde segue o lema. ■

**Lema 7.15.** *Nas condições do lema 7.14, para todo inteiro  $k \geq 0$  e todo  $t \in [0, T)$  vale*

$$|\nabla^k \partial_i| \leq C.$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos escolher um atlas apropriado para a variedade  $M$ . Dado um atlas para  $M$ , em cada ponto  $p \in M$  tomemos uma vizinhança coordenada compacta. A união destas vizinhanças é claramente uma cobertura para  $M$ . Como  $M$  é compacta, podemos tomar uma sub-cobertura finita. Vamos usar este atlas obtido por esta sub-cobertura finita, cujas vizinhanças coordenadas são compactas e denotar por  $\partial_i$  os campos tangentes (locais) associados à estes sistemas de coordenadas.

O resultado se prova por indução em  $k$ . Para  $k = 0$  o resultado vale pois  $\partial_i$  não depende de  $t$  e pelo lema 7.14  $g(t)$  está limitada por  $g(0)$ . Daí,  $|\partial_i(0)| \leq C$ . Suponha que o resultado vale para todo inteiro até  $k - 1$ , vamos mostrar que o mesmo vale para  $k$ . Primeiro, vamos escrever  $[0, T) = [0, T - 1/(2C_0)] \cup [T - 1/(2C_0), T)$ . Vamos estimar  $|\nabla^k Ric|$  neste intervalo. Note que na decomposição  $[0, T) = [0, T - 1/(2C_0)] \cup [T - 1/(2C_0), T)$ , o primeiro intervalo é compacto. Portanto, por continuidade,  $|\nabla^k Ric| \leq C$ . No outro intervalo, usamos a estimativa A.49 do apêndice. Esta estimativa depende de  $t$ , mas no intervalo  $[T - 1/(2C_0), T)$  podemos estimar por uma constante  $C = C(k, n, T, C_0)$ , fazendo  $t = T - 1/(2C_0)$ , já que a função que limita  $|\nabla^k Ric|$  é decrescente em  $t$ . Segue que  $|\nabla^k Ric| \leq C$  em  $[0, T)$ .

Como, pela equação A.33 do apêndice, vale

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^k \partial_i = \sum_{m+j=k-1} \nabla^m \partial_i * \nabla^{j+1} Ric,$$

e como  $|A * B| \leq C|A||B|$ , temos que  $\left| \frac{\partial}{\partial t} \nabla^k \partial_i \right| \leq C$ . Assim,

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla^k \partial_i \right) (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, dx^j) \right| \leq C |\partial_{i_1}| \cdots |\partial_{i_k}| |dx^j| \leq C.$$

Como os  $\partial_i$  não dependem do tempo vale

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla^k \partial_i \right) (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, dx^j) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^k \partial_i (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, dx^j) \right),$$

produzindo

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^k \partial_i (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, dx^j) \right) \right| \leq C.$$

Por integração em  $t$ , mostra-se que

$$\left| \left( \nabla^k \partial_i (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, dx^j) \right) \right| \leq C. \quad (7.4)$$

Fazendo  $A = \nabla^k \partial_i$ , temos que

$$|\nabla^k \partial_i|^2 = g_{jm} g^{i_1 l_1} \cdots g^{i_k l_k} A_{i_1, \dots, i_k}^j A_{l_1, \dots, l_k}^m,$$

pela fórmula 2.10. Pelo lema 7.14 a métrica  $g(t)$  está limitada. Pela desigualdade 7.4 os  $A_{i_1, \dots, i_k}^j$  estão limitados. Segue que

$$|\nabla^k \partial_i|^2 \leq C,$$

o que completa a demonstração. ■

**Lema 7.16.** *Nas condições do lema 7.14, para quaisquer inteiros  $k, l \geq 0$  e todo  $t \in [0, T)$  vale*

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k \partial_i \right| \leq C.$$

*Demonstração.* Usamos aqui o mesmo atlas do lema 7.15. Para  $l = 0$  e  $l = 1$  o resultado foi mostrado na demonstração do lema 7.15. Suponha que para todo  $k$  e até  $j = l - 1$  vale

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla^k \partial_i \right| \leq C.$$

Assim,

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k \partial_i \right| = \left| \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^k \partial_i \right| = \left| \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \sum_{m+j=k-1} \nabla^m \partial_i * \nabla^{j+1} Ric \right) \right| \leq C,$$

pela estimativa A.49, usando um argumento semelhante ao do lema anterior, e pela proposição A.17 do apêndice. ■

**Definição 7.17.** *Dizemos que a solução do fluxo de Ricci  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , é máxima se ela não pode ser estendida para intervalos maiores  $[0, T + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .*

O Teorema abaixo fornece um critério para determinar se uma solução é máxima.

**Teorema 7.18.** *Se  $M$  é uma variedade fechada e  $g(t)$  é uma solução do fluxo de Ricci em um intervalo maximal  $[0, T)$  e  $T < \infty$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow T} \max_M |Rm|(\cdot, t) = \infty.$$

*Demonstração.* Vamos tomar a contrapositiva. Suponha que existe uma sequência  $t_i \rightarrow T$  e uma constante  $K < \infty$  que não depende de  $i$  tal que

$$\max_M |Rm|(\cdot, t_i) \leq K.$$

Pelo teorema 4.13, temos que

$$|Rm|(x, t) \leq \frac{K}{1 - \frac{C}{2} K t}.$$

Em particular, para  $t \geq t_i$  e para todo  $x \in M$  vale

$$|Rm|(x, t) \leq \frac{K}{1 - \frac{C}{2} K (t - t_i)}.$$

Então, fazendo  $\varepsilon < \frac{2}{CK}$ , para  $i$  suficientemente grande temos  $t_i \in [T - \varepsilon, T)$ . Assim,

$$\max_M |Rm|(\cdot, t) \leq \frac{K}{1 - \frac{C}{2} K (t - (T - \varepsilon))}$$

para  $t \in [T - \varepsilon, T)$ . Segue que  $|Rm| \leq \tilde{K}$  em  $[0, T)$ .

**Afirmção:** A métrica  $g(t)$  pode ser estendida de uma solução diferenciável em  $[0, T)$  para uma solução diferenciável em  $[0, T]$ .

Para mostrar que a extensão é contínua usamos o lema 7.14, pois  $|Rm| \leq \tilde{K}$  para  $t \in [T - \varepsilon, T)$ . Temos, para  $t \geq \tau$ ,  $\tau \in [T - \varepsilon, T)$ , que existe  $C = C(\tilde{K})$  tal que

$$e^{-2C(t-\tau)}g(\tau) \leq g(t) \leq e^{2C(t-\tau)}g(\tau),$$

de onde segue

$$\left(e^{-2C(t-\tau)} - 1\right)g(\tau) \leq g(t) - g(\tau) \leq \left(e^{2C(t-\tau)} - 1\right)g(\tau).$$

Por outro lado,

$$e^{-2CT}g(0) \leq g(\tau) \leq e^{2CT}g(0),$$

de onde segue

$$\left(e^{-2C(t-\tau)} - 1\right)e^{-2CT}g(0) \leq g(t) - g(\tau) \leq \left(e^{2C(t-\tau)} - 1\right)e^{2CT}g(0).$$

Como para  $x$  pequeno vale  $e^x - 1 \leq 2x$ , temos em particular

$$g(t) - g(\tau) \leq D(t - \tau)g(0),$$

com  $D$  constante. Com isso, mostramos que  $g$  é uniformemente contínua. Daí,  $g$  se estende a  $t = T$  continuamente. Usando o lema 7.14, no limite temos que  $g(T) \geq e^{-2CT}g(0) \geq 0$ . Portanto, a métrica  $g(T)$  é definida positiva. Para mostrar que a extensão é diferenciável, vamos mostrar que todas as derivadas temporais e espaciais das funções  $g_{ij}$  estão limitadas (Olhar o teorema 5.19 em [1]). Vamos lembrar que, em  $[T - \varepsilon, T)$ , vale

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k Ric \right| \leq C, \quad (7.5)$$

pela desigualdade A.49 (e usando um argumento semelhante ao usado na demonstração do lema 7.15), e que no mesmo intervalo, pelo lema 7.16, vale

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k \partial_i \right| \leq C.$$

É possível mostrar que

$$\left( \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k Ric \right) (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, \partial_a, \partial_b) = \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\alpha R_{ab} + \frac{\partial^l}{\partial t^l} (\text{termos envolvendo os } \nabla \partial_i \text{ e } \nabla^{k-1} Ric),$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  é um multi-índice e  $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_p}}$ . Segue que,

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\alpha R_{ab} = \left( \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k Ric \right) (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, \partial_a, \partial_b) - \frac{\partial^l}{\partial t^l} (\text{termos envolvendo os } \nabla \partial_i \text{ e } \nabla^{k-1} Ric).$$

Como os termos do lado direito da igualdade acima estão limitados, pela desigualdade 7.5 e pelo lema 7.16, temos que

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\alpha R_{ab} \right| \leq C.$$

Usando a equação do fluxo de Ricci  $\partial_t g_{ab} = -2R_{ab}$ , temos que para todo  $l \geq 1$  vale

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\alpha g_{ab} \right| \leq C.$$

O resultado para  $l = 0$  segue por integração. Com isto mostramos que a extensão de  $g$  do intervalo  $[0, T)$  para o intervalo  $[0, T]$  é diferenciável. Usamos o teorema 6.16 com a métrica inicial sendo  $g(T)$  e temos uma solução diferenciável em um intervalo  $[T, T + \varepsilon)$ . Portanto temos uma solução diferenciável em  $[0, T + \varepsilon)$ , mostrando que a solução pode ser estendida. ■

Usaremos na próxima seção

**Teorema 7.19.** *Seja  $M^n$  uma variedade compacta, e seja  $g(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ , uma solução do fluxo de Ricci em  $M$  satisfazendo  $\max_M |R_{g(t)}| \leq 1/\delta$  para todo  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ . Suponha que  $A$  é um tensor que satisfaz uma equação de evolução da forma*

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \Delta A + R * A.$$

Para todo inteiro  $m \geq 1$ , existe uma constante  $C > 0$ , que só depende de  $n, m$ , e da equação de evolução de  $A$ , tal que

$$\max_{M \times [t_0 + \delta/2, t_0 + \delta]} |\nabla^m A| \leq C \delta^{-\frac{m}{2}} \max_{M \times [t_0, t_0 + \delta]} |A|. \quad (7.6)$$

*Demonstração.* Ver a proposição A.27 e o corolário A.28 do apêndice. ■

### 7.3 O princípio do máximo de Hamilton

O objetivo desta seção será demonstrar o seguinte

**Teorema 7.20.** *Seja  $F \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  um subconjunto fechado, convexo,  $O(n)$ –invariante e invariante pela EDO  $\frac{dR}{dt} = Q(R)$ . Suponha que  $(M^n, g_0)$  seja uma variedade Riemanniana compacta com a propriedade que o tensor curvatura de  $g_0$  pertença a  $F$  em todos os pontos de  $M$ . Se  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , é a solução do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$ , então o tensor curvatura de  $g(t)$  pertence a  $F$  em todos os pontos de  $M$  e para todo  $t \in [0, T)$ .*

**Observação 7.21.** Como  $F$  é  $O(n)$ –invariante, a afirmação  $R_{g(t)}(x) \in F$  está bem definida, isto é, não depende da escolha do referencial ortonormal usado na identificação.

Antes de demonstrar o teorema 7.20, lembremos algumas propriedades de subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 7.22.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto convexo e fechado. Dado  $z \in \mathbb{R}^N$ , seja  $y \in F$  tal que  $d(z, F) = |y - z|$ . Então o vetor  $w = y - z$  satisfaz, para todo  $x \in F$ ,*

$$\langle x - y, w \rangle \geq 0.$$

*Demonstração.* Seja  $x \in F$ . Como o conjunto  $F$  é convexo, temos que  $sx + (1 - s)y \in F$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Pela escolha de  $y$ , isto significa que para todo  $s \in [0, 1]$  vale

$$|sx + (1 - s)y - z| \geq |y - z|.$$

Fazendo  $f(s) = |sx + (1 - s)y - z|^2$ , concluímos que  $f'(0) \geq 0$ . Como

$$f'(s) = \langle x - y, sx + (1 - s)y - z \rangle$$

concluímos que

$$f'(0) = 2\langle x - y, w \rangle \geq 0.$$

■

**Lema 7.23.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto convexo e fechado. Dado  $z \in \mathbb{R}^n$ , seja  $y \in F$  tal que  $d(z, F) = |y - z|$ . Então, para todo  $z_1 \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\langle y - z_1, y - z \rangle \leq d(z_1, F)|y - z|.$$

*Demonstração.* Usando o lema anterior e a desigualdade de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - y, y - z \rangle &= \langle x - z_1 + z_1 - y, y - z \rangle \\ &= \langle x - z_1, y - z \rangle + \langle z_1 - y, y - z \rangle \\ &\leq |x - z_1||y - z| + \langle z_1 - y, y - z \rangle \end{aligned}$$

para todo  $x \in F$ . Assim,

$$\begin{aligned} -\langle z_1 - y, y - z \rangle &\leq |x - z_1||y - z| \\ \langle y - z_1, y - z \rangle &\leq |x - z_1||y - z|. \end{aligned}$$

O lema segue escolhendo  $x \in F$  como sendo o mais próximo de  $z_1$ .

■

Denotaremos o tensor de curvatura algébrico associado ao tensor curvatura de  $g(t)$  em  $p \in M$  por  $R_{(p,t)}$ . Seja  $d(t) = \max_{p \in M} d(R_{(p,t)}, F)$ . Esta distância está bem definida pela  $O(n)$ -invariância de  $F$ . Para ver isto, primeiramente note que se  $T \in O(n)$  e  $R_1, R_2 \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$ , então  $d(R_{1T}, R_{2T}) = d(R_1, R_2)$ , pois  $T$  é ortogonal e  $d(R_1, R_2)^2 = \langle R_1 - R_2, R_1 - R_2 \rangle$  (produto interno em  $\mathbb{R}^N$ ). Em seguida, lembremos que

$$d(R_{(p,t)}, F) = \inf\{d(R_{(p,t)}, S) | S \in F\}.$$

Desta maneira, se fizermos  $R_{2(p,t)} = R_{(p,t)T^{-1}}$ , temos

$$\begin{aligned} d(R_{2(p,t)}, F) &= \inf\{d(R_{2(p,t)}, \tilde{S}) | \tilde{S} \in F\} \\ &= \inf\{R_{(p,t)T^{-1}}, \tilde{S}_{T^{-1}} | \tilde{S}_{T^{-1}} \in F\} \\ &= \inf\{R_{(p,t)}, \bar{S} | \bar{S} \in F\} \\ &= d(R_{(p,t)}, F), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade ocorre pela  $O(n)$ -invariância do conjunto  $F$ . Segue que  $d(t) = \max_{p \in M} d(R_{(p,t)}, F)$  está bem definida. Também temos que  $d(R_T, 0) = d(R_T, 0_T) = d(R, 0)$ ,  $T \in O(n)$ . É possível mostrar que esta distância é uma função contínua de  $t$ .

**Lema 7.24.** Para todo  $t_0 \in [0, T)$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que, para todo  $t \in [0, t_0]$ , vale

$$\limsup_{t' \rightarrow t^+} \frac{d(t') - d(t)}{t' - t} \leq Cd(t).$$

*Demonstração.* Seja  $t_0 \in [0, T)$ . Existe  $\Lambda > 0$  tal que  $|R_{(p,t)}| \leq \Lambda$  para todo  $(p, t) \in M \times [0, t_0]$ , pela compacidade de  $M$ . Como  $Q$  é uma aplicação de  $Curv(\mathbb{R}^n)$  em  $Curv(\mathbb{R}^n)$  diferenciável, pois  $Q(R)$  depende das componentes de  $R$  que por sua vez são diferenciáveis, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|Q(R) - Q(S)| \leq C|R - S|$$

para quaisquer  $R, S \in Curv(\mathbb{R}^n)$  com  $|R|, |S| \leq 2\Lambda + d(0, F)$ .

Vamos fixar  $t \in [0, t_0]$ , e seja  $\delta_k$  uma sequência de números positivos tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ .

Para cada  $k$ , escrevemos  $t_k = t + \delta_k$ , e seja  $p_k \in M$  tal que

$$d(R_{(p_k, t_k)}, F) = d(t_k).$$

Então, pela definição de  $d(t)$ ,

$$d(t_k) - d(t) \leq d(R_{(p_k, t_k)}, F) - d(R_{(p_k, t)}, F)$$

para todo  $k$ . Como  $F$  é um conjunto fechado, podemos tomar  $S_k \in F$  tal que

$$d(S_k, R_{(p_k, t_k)}) = d(R_{(p_k, t_k)}, F).$$

Note que como  $S_k \in F$ , temos que  $d(S_k, F) = 0$ . Por outro lado,  $|S_k| = d(S_k, 0) \leq d(S_k, F) + d(F, 0) = d(F, 0) \leq 2\Lambda + d(F, 0)$ .

**Afirmção :** Para todo  $k$ , temos que

$$\langle \Delta R_{(p_k, t_k)}, R_{(p_k, t_k)} - S_k \rangle \leq 0$$

e que

$$\langle Q(S_k), R_{(p_k, t_k)} - S_k \rangle \leq 0.$$

**Observação 7.25.** Por  $\Delta R_{(p_k, t_k)}$  se entende o representante em  $Curv(\mathbb{R}^n)$  do tensor  $\Delta Rm$  definido em  $p_k \in M$  em  $t = t_k$ , novamente usando a identificação.

Primeira desigualdade: Seja  $v \in T_{p_k}M$ , com  $|v|_{g(t_k)} = 1$ , e indiquemos por  $\gamma(s)$  a geodésica da métrica  $g(t_k)$  com  $\gamma(0) = p_k$  e  $\gamma'(0) = v$ . Podemos tomar uma base ortonormal  $\{e_1(s), \dots, e_n(s)\}$  de  $T_{\gamma(s)}M$ , e paralela ao longo de  $\gamma(s)$ , para que seja possível identificar  $Curv(T_{\gamma(s)}M)$  com  $Curv(\mathbb{R}^n)$ . Podemos pensar em  $R(s) = R_{\gamma(s), t_k}$  como uma curva diferenciável em  $Curv(\mathbb{R}^n)$ . Segue da escolha de  $p_k$  que

$$d(R(s), F) \leq d(R(0), F) = |R(0) - S_k|.$$

Por outro lado, os lemas anteriores implicam que

$$\langle S_k - R(s), S_k - R(0) \rangle \leq d(R(s), F) |R(0) - S_k|.$$

Resumindo,

$$\langle S_k - R(s), S_k - R(0) \rangle \leq |R(0) - S_k|^2.$$

Portanto, se definirmos  $f(s) = \langle S_k - R(s), S_k - R(0) \rangle$ , a desigualdade acima nos diz que  $f$  tem um máximo em  $s = 0$  e portanto  $f''(0) \leq 0$ . Esta é uma função definida através do produto interno em  $\mathbb{R}^N$ . Como temos uma identificação isométrica entre o espaço tangente da variedade e  $\mathbb{R}^n$ , usamos esta identificação para voltar para a variedade e derivar  $f$  ao longo de  $\gamma'(s)$ . Apesar de  $S_k$  ser um elemento fixo em  $\mathbb{R}^N$ , para cada instante  $s$  ele terá um representante ao longo de  $\gamma(s)$ , dado pela identificação cada ponto desta curva. Ou seja,  $\tilde{S}_k(s)$  é um campo tensorial em  $M$  ao longo de  $\gamma(s)$  dado por

$$\tilde{S}_k(s)(e_i(s), e_j(s), e_k(s), e_l(s)) = S_k(f_i, f_j, f_k, f_l) = S_k \in \mathbb{R}^N,$$

onde  $\{f_i\}$  é a base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  usada na identificação. Como resultado, a derivada covariante de  $\tilde{S}_k(s)$  ao longo da geodésica  $\gamma$  é dada por

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'} \tilde{S}_k(s))(e_i(s), e_j(s), e_k(s), e_l(s)) &= \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{S}_k(s)(e_i(s), e_j(s), e_k(s), e_l(s))) \\ &\quad + \tilde{S}_k(s)(\nabla_{\gamma'} e_i(s), e_j(s), e_k(s), e_l(s)) \\ &\quad + \tilde{S}_k(s)(e_i(s), \nabla_{\gamma'} e_j(s), e_k(s), e_l(s)) \\ &\quad + \tilde{S}_k(s)(e_i(s), e_j(s), \nabla_{\gamma'} e_k(s), e_l(s)) \\ &\quad + \tilde{S}_k(s)(e_i(s), e_j(s), e_k(s), \nabla_{\gamma'} e_l(s)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois os campos  $e_i(s)$  são paralelos ao longo de  $\gamma$  e  $\tilde{S}_k(s)(e_i(s), e_j(s), e_k(s), e_l(s))$  é constante, portanto sua derivada é nula.

Daí,

$$f''(0) = \langle (\nabla_v \nabla_v R)_{(p_k, t_k)}, R_{(p_k, t_k)} - S_k \rangle.$$



**Observação 7.26.** Novamente, denotamos por  $\nabla_v \nabla_v R$  o elemento de  $Curv(\mathbb{R}^n)$  correspondente ao tensor  $\nabla_v \nabla_v R$  em  $x$ , usando a identificação.

Então, fazendo  $v = e_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e somando, vamos obter a primeira desigualdade.

Segunda desigualdade: Aqui usaremos o fato de  $F$  ser invariante pela EDO de Hamilton. Ou seja, a solução  $S_k(s)$  da EDO de Hamilton com  $S_k(0) = S_k \in F$  satisfaz  $S_k(s) \in F$  para todo  $s \geq 0$  suficientemente pequeno. Logo, pela definição de  $S_k$ ,

$$h(s) = |S_k(s) - R_{(p_k, t_k)}|^2 \geq |S_k(0) - R_{(p_k, t_k)}|^2 = h(0)$$

para todo  $s \geq 0$  suficientemente pequeno. Logo,  $h'(0) \geq 0$ . Ou seja,

$$\langle S_k - R_{(p_k, t_k)}, Q(S_k) \rangle \geq 0.$$

Com isso, está concluída a prova da afirmação.

Observe que, como  $|R_{(p_k, t_k)}|, |S_k| \leq 2\Lambda + d(0, F)$ , temos

$$|Q(R_{(p_k, t_k)}) - Q(S_k)| \leq C|R_{(p_k, t_k)} - S_k| = Cd(t_k). \quad (7.7)$$

Pelo lema 7.23 temos:

$$\begin{aligned} \langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, R_{(p_k, t)} - S_k \rangle &= \langle S_k - R_{(p_k, t_k)}, S_k - R_{(p_k, t)} \rangle \\ &\leq d(R_{(p_k, t)}, F) |S_k - R_{(p_k, t_k)}| \\ &= d(R_{(p_k, t)}, F) |R_{(p_k, t_k)} - S_k|. \end{aligned}$$

Daí,

$$d(R_{(p_k, t)}, F) \geq \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, R_{(p_k, t)} - S_k \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|}$$

Como  $d(t) \geq d(R_{(p_k, t)}, F)$ , temos

$$\begin{aligned} d(t_k) - d(t) &\leq d(R_{(p_k, t_k)}, S_k) - d(R_{(p_k, t)}, F) \\ &\leq |R_{(p_k, t_k)} - S_k| - \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, R_{(p_k, t)} - S_k \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|}, \end{aligned}$$

produzindo

$$d(t_k) - d(t) \leq \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, R_{(p_k, t_k)} - R_{(p_k, t)} \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|}.$$

Lembrando que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ , e denotando o  $\max_{[a, b]} |f''(x)|$  por  $C$  temos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\bar{x})(x - x_0)^2,$$

para algum  $\bar{x} \in (a, b)$ . Segue daí a desigualdade:

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{1}{2}C(x - x_0)^2.$$

Agora, como  $R_{(p_k, \cdot)}$  é de classe  $C^2$ , existe uma constante  $C_2 > 0$ , independente de  $k$ , tal que

$$\left| R_{(p_k, t_k)} - R_{(p_k, t)} + (t - t_k) \frac{\partial}{\partial t} R_{(p_k, t_k)} \right| \leq C_2 |t - t_k|^2.$$

**Observação 7.27.** Lembre que estamos fixando um instante  $t \in [0, t_0]$  e que definimos  $t_k = t + \delta_k$  onde  $\delta_k$  é uma sequência de números positivos que satisfaz  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ . Na desigualdade obtida através da fórmula de Taylor com resto de Lagrange, a constante  $C := \max_{[a, b]} |f''|$  depende *exclusivamente* da função  $f$  e do intervalo  $[a, b]$ . Portanto, a constante  $C_2$  acima depende apenas da função  $R_{(p_k, t)}$  e do intervalo  $[0, t_0]$ . Esta é a razão pela qual  $C_2$  não depende de  $k$ .

Lembrando que  $\frac{\partial}{\partial t} R_{(p_k, t_k)} = \Delta R_{(p_k, t_k)} + Q(R_{(p_k, t_k)})$ , obtemos

$$\begin{aligned} d(t_k) - d(t) &\leq (t_k - t) \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, \Delta R_{(p_k, t_k)} + Q(R_{(p_k, t_k)}) \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|} + C_2 |t_k - t|^2 \\ &= (t_k - t) \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, \Delta R_{(p_k, t_k)} + Q(R_{(p_k, t_k)}) - Q(S_k) + Q(S_k) \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|} + C_2 |t_k - t|^2. \end{aligned}$$

Usando desigualdades provadas na afirmação, obtemos

$$\begin{aligned} d(t_k) - d(t) &\leq (t_k - t) \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, \Delta R_{(p_k, t_k)} + Q(R_{(p_k, t_k)}) - Q(S_k) + Q(S_k) \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|} + C_2 |t_k - t|^2 \\ &= (t_k - t) \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, \Delta R_{(p_k, t_k)} \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|} + (t_k - t) \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, Q(R_{(p_k, t_k)}) - Q(S_k) \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|} \\ &\quad + \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, Q(S_k) \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|} + C_2 |t_k - t|^2 \\ &\leq (t_k - t) \frac{\langle R_{(p_k, t_k)} - S_k, Q(R_{(p_k, t_k)}) - Q(S_k) \rangle}{|R_{(p_k, t_k)} - S_k|} + C_2 |t_k - t|^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade 7.7, concluímos que

$$d(t_k) - d(t) \leq (t_k - t)Cd(t_k) + C_2 |t_k - t|^2.$$

Dividindo por  $t_k - t$  e fazendo  $k \rightarrow \infty$  obtemos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{d(t_k) - d(t)}{t_k - t} \leq Cd(t).$$

■

Finalmente vamos demonstrar o teorema 7.20.

*Demonstração.* Dado  $t_0 \in [0, T)$ , o lema 7.24 implica que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\limsup_{t' \rightarrow t^+} \frac{d(t') - d(t)}{t' - t} \leq Cd(t)$$

qualquer que seja  $t \in [0, t_0]$ .

Definindo  $h(t) = e^{-Ct}d(t)$  segue que, para todo  $t \in [0, t_0]$ ,

$$\limsup_{t' \rightarrow t^+} \frac{h(t') - h(t)}{t' - t} \leq 0,$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{h(t') - h(t)}{t' - t} &= \frac{e^{-Ct'}d(t') - e^{-Ct}d(t)}{t' - t} \\ &= \frac{e^{-Ct'}d(t') - e^{-Ct}d(t) + e^{-Ct}d(t') - e^{-Ct}d(t)}{t' - t} \\ &= e^{-Ct} \left[ \frac{d(t') - d(t)}{t' - t} \right] + d(t') \left[ \frac{e^{-Ct'} - e^{-Ct}}{t' - t} \right]. \end{aligned}$$

Temos que

$$\limsup_{t' \rightarrow t^+} e^{-Ct} \left[ \frac{d(t') - d(t)}{t' - t} \right] \leq e^{-Ct}Cd(t)$$

pelo lema 7.24. E também

$$\limsup_{t' \rightarrow t^+} d(t') \left[ \frac{e^{-Ct'} - e^{-Ct}}{t' - t} \right] \leq -d(t)Ce^{-Ct},$$

pela continuidade de  $d(t)$ . Usando que  $\limsup(f + g) \leq \limsup f + \limsup g$ , temos que

$$\limsup_{t' \rightarrow t^+} \frac{h(t') - h(t)}{t' - t} \leq 0.$$

Isto implica que  $h$  é não-crescente em  $t$ : Suponha por contradição que  $h(t_2) > h(t_1)$ , com  $t_2 > t_1$ . No intervalo  $[t_1, t_2]$ , considere a função  $\phi$  dada por

$$\phi(t) = h(t) - h(t_1) - \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$

Seja  $t_0 \in [t_1, t_2]$  o ponto de mínimo de  $\phi$ . Pela definição de  $t_0$ , vale  $\phi(t) \geq \phi(t_0)$ . Usando a expressão para  $\phi$ , esta desigualdade implica que

$$h(t) - h(t_0) \geq \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_0) = K(t - t_0),$$

onde  $K > 0$ . Isto é:

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \geq K.$$

Tomando o limite quando  $t \rightarrow t_0^+$ , temos uma contradição, pois o lado esquerdo foi provado ser menor que ou igual a zero. Esta contradição termina a prova que  $h$  é não-crescente em  $t$ .

Por outro lado, como o tensor de curvatura de  $g_0$  pertence, por hipótese, a  $F$  em todos os pontos de  $M$ , segue que  $d(0) = 0$  e portanto  $h(0) = 0$ . Com isto, concluímos que  $h$  deve ser identicamente nula em  $[0, t_0]$ , pois

$$0 \leq h(t) \leq h(0) = 0.$$

Isto significa que  $d(R_{(p,t)}, F) = 0$  para todo  $(p, t) \in M \times [0, t_0]$ .

O teorema segue da arbitrariedade de  $t_0$ . ■

## 7.4 O teorema da convergência de Hamilton

Desejamos agora estudar sob quais condições uma solução do fluxo de Ricci, após uma mudança de escala, converge para uma métrica de curvatura seccional constante e positiva.

Recorde do exemplo em que a variedade inicial é uma esfera euclidiana de curvatura seccional constante  $C > 0$ . Neste caso, a solução máxima do fluxo de Ricci é explícita (ver o exemplo 3.4):

$$g(t) = (1 - 2(n-1)Ct)g(0) \\ t \in [0, T)$$

onde  $T = \frac{1}{2(n-1)C}$ . Se definirmos  $\tilde{g}(t) = \frac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$  teremos:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t) &= \frac{1}{2(n-1)(\frac{1}{2(n-1)C} - t)}(1 - 2(n-1)Ct)g(0) \\ &= \frac{C}{1 - 2(n-1)Ct}(1 - 2(n-1)Ct)g(0) \\ &= Cg(0). \end{aligned}$$

Em particular,  $\tilde{g}(t)$  tem curvatura seccional constante e igual a 1, pela proposição 2.18.

**Definição 7.28.** Denotemos por  $K_{\max}(x, t)$  a maior curvatura seccional de  $g(t)$  em  $x \in M$  e por  $K_{\min}(x, t)$  a menor curvatura seccional de  $g(t)$  em  $x \in M$ . Definimos também  $K_{\max}(t) = \max_{x \in M} K(x, t)$  e analogamente  $K_{\min}(t) = \min_{x \in M} K(x, t)$ .

**Observação 7.29.** É possível mostrar que as funções  $K_{\min}$  e  $K_{\max}$  são funções contínuas de  $R$ .

**Proposição 7.30.** *Seja  $(M^n, g_0)$  uma variedade Riemanniana compacta, de dimensão  $n \geq 3$ , com curvatura escalar positiva. Suponhamos que  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , seja a solução máxima do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$  e satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K_{\min}(t)}{K_{\max}(t)} = 1.$$

*Então, as métricas  $\frac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$  convergem na topologia  $C^\infty$ , quando  $t \rightarrow T$ , para uma métrica de curvatura seccional constante 1.*

O leitor encontrará a demonstração desta proposição contida nos argumentos da seção 5.4 de [4].

**Definição 7.31.** *Seja  $R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  um tensor de curvatura algébrico com curvatura seccional positiva. Dado  $\delta \in (0, 1]$ , dizemos que  $R$  é  $\delta$ -pinçado se*

$$\delta \leq \frac{K_{\min}(R)}{K_{\max}(R)}.$$

*Quando valer a desigualdade estrita, dizemos que  $R$  é estritamente  $\delta$ -pinçado.*

**Exemplo 7.32.** O elipsóide

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

tem curvatura seccional mínima  $K_{\min}(R) = 1$  e curvatura seccional máxima  $K_{\max}(R) = 4$ , onde  $R$  denota o tensor de curvatura desta superfície. Segue que

$$\frac{K_{\min}}{K_{\max}} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, temos que  $R$  é  $1/4$ -pinçado.

**Definição 7.33.** *Seja  $F \subset \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  um subconjunto fechado,  $O(n)$ -invariante, convexo e invariante pela EDO*

$$\frac{dR}{dt} = Q(R).$$

*Dizemos que  $F$  é um conjunto pinçante se para todo  $\delta \in (0, 1)$ , existe um subconjunto compacto  $L \subset \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  tal que se  $R \in (F - L)$ , então  $R$  é  $\delta$ -pinçado.*

**Proposição 7.34.** *Seja  $F \subset \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  um conjunto pinçante. Para todo  $\delta \in (0, 1)$ , existe uma constante  $C = C(\delta) > 0$  tal que*

$$K_{\min}(R) \geq \delta K_{\max}(R) - C$$

*para todo  $R \in F$ . Em particular,  $K_{\min}(R) \geq -C/(1 - \delta)$ .*

*Demonstração.* Dado  $\delta \in (0, 1)$ , segue da definição de conjunto pinçante que existe um compacto  $L$  tal que se  $R \in F - L$ , então

$$K_{\min}(R) \geq \delta K_{\max}(R).$$

Por outro lado, como  $L$  é compacto e como  $K_{\min}(R)$  e  $K_{\max}(R)$  são contínuas, existe  $C > 0$  tal que

$$K_{\min}(R) - \delta K_{\max}(R) \geq -C$$

para todo  $R \in L$ . A segunda afirmação segue da primeira pois  $K_{\min}(R) \leq K_{\max}(R)$ . ■

**Corolário 7.35.** *Seja  $F \subset \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  um conjunto pinçante. Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante  $C = C(\varepsilon) > 0$  tal que*

$$|\mathring{Ric}(R)| \leq \varepsilon K_{\max}(R) + C$$

para todo  $R \in F$ .

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base ortonormal de autovetores que diagonaliza  $Ric(R)$  e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores correspondentes. Como  $Ric(R) = \mathring{Ric}(R) + (S(R)/n)g$  é uma decomposição ortogonal, vale

$$\begin{aligned} |\mathring{Ric}(R)|^2 &= |Ric(R)|^2 - \frac{S^2(R)}{n} \\ &= \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 - \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 \\ &= \frac{1}{n}[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2]. \end{aligned}$$

Mas,

$$\lambda_i - \lambda_j = \sum_{k \neq i, j} (K_{ik} - K_{jk}),$$

onde  $K_{ab}$  denota a curvatura seccional do plano gerado por  $e_a$  e  $e_b$ . Daí,

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq (n-2)(K_{\max}(R) - K_{\min}(R)).$$

Assim, como na expressão para  $|\mathring{Ric}|^2$  temos uma soma com  $\frac{n(n-1)}{2}$  termos, vale

$$|\mathring{Ric}(R)|^2 \leq \frac{1}{n} \frac{n(n-1)}{2} (n-2)^2 (K_{\max}(R) - K_{\min}(R))^2.$$

Ou seja, existe uma constante  $c = c(n) > 0$  tal que

$$|\mathring{Ric}(R)| \leq c(n)(K_{\max}(R) - K_{\min}(R)).$$

O corolário segue diretamente da proposição 7.34 se escolhermos  $\delta \in (0, 1)$  de tal maneira que  $c(n)(1 - \delta) \leq \varepsilon$ . ■

Seja  $(M^n, g_0)$  uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $n \geq 3$ , com curvatura escalar positiva, e seja  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , a solução máxima do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$ . Suponhamos também que  $F$  seja um conjunto pinçante e que o tensor de curvatura de  $g_0$  pertence a  $F$  em todos os pontos da variedade  $M$ .

Como a curvatura escalar de  $g(0)$  é positiva, sabemos pelo corolário 4.10 que o fluxo se torna singular em tempo finito. Também sabemos que se a solução é máxima, o teorema 7.18 implica que

$$\lim_{t \rightarrow T} \max_M |R_{g(t)}| = \infty.$$

Pelo teorema 7.20, temos que  $R_{g(t)} \in F$  para todo  $t \in [0, T)$  e em todos os pontos de  $M$ . Pela proposição 7.34 temos que  $K_{\min} \geq -C$  para alguma constante  $C > 0$ . Como a norma do tensor de curvatura está limitada pelo máximo do valor absoluto da curvatura seccional  $K$  (ver a seção A.2 do apêndice para a estimativa) e a norma do tensor de curvatura tende infinito, então necessariamente  $|K| \rightarrow \infty$ . Como  $K_{\min} \geq -C$  e  $S > 0$ , temos que  $K_{\max} > 0$  e tende a infinito quando  $t \rightarrow T$ .

**Lema 7.36.** *Seja  $t_k \in [0, T)$  uma sequência tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T$ . Se*

$$K_{\max}(t_k) \geq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, t_k]} K_{\max}(t),$$

então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{K_{\min}(t_k)}{K_{\max}(t_k)} = 1.$$

*Demonstração.* Pelo teorema 7.20, temos que  $R_{g(t)} \in F$  em todos os pontos de  $M$  e para todo  $t \in [0, T)$ . Segue do corolário 7.35 que para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\max_M |\mathring{Ric}_{g(t)}| \leq \varepsilon K_{\max}(t) + C_1$$

qualquer que seja  $t \in [0, T)$ . Em particular, para todo  $t \in [0, t_k]$  vale

$$\max_M |\mathring{Ric}_{g(t)}| \leq 2\varepsilon K_{\max}(t_k) + C_1. \quad (7.8)$$

Lembre que a evolução da parte sem traço do tensor de Ricci obedece, pela proposição 3.17,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathring{Ric} = \Delta \mathring{Ric} + R * \mathring{Ric}.$$

Como, por hipótese,  $K_{\max}(t_k) \geq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, t_k]} K_{\max}(t)$  e como existe uma constante tal que  $\max_{t \in [0, t_k]} |R_{g(t)}| \leq C \max_{t \in [0, t_k]} |K_{\max}(t)|$ , segue que  $\max_{t \in [0, t_k]} |R_{g(t)}| \leq \Lambda |K_{\max}(t_k)| := 1/\delta$ , com  $\Lambda$  dependendo apenas da dimensão da variedade. Como a norma do tensor curvatura vai para infinito quando  $t_k \rightarrow T$ , então para  $k$  suficientemente grande temos que  $K_{\max}(t_k) > 0$ . Assim, podemos retirar o valor absoluto.

Vamos decompor o intervalo  $[0, t_k]$ ,  $k$  suficientemente grande, como  $[0, t_k] = [0, t_k - \delta/2] \cup [t_k - \delta/2, t_k]$ , onde  $\delta$  é dado por  $\delta = 1/(\Lambda K_{\max}(t_k))$ . Note que, fazendo  $t_0 = t_k - \delta$ , o segundo intervalo da decomposição acima está na forma  $[t_0 + \delta/2, t_0 + \delta]$ . Assim, podemos usar a estimativa do teorema 7.19 no tempo  $t = t_k$  para  $A = \mathring{Ric}$  e  $m = 1$  e  $\delta = 1/(\Lambda K_{\max}(t_k))$ . Usando a desigualdade 7.8 e que

$$\max_M |\nabla \mathring{Ric}_{g(t_k)}| \leq \max_{M \times [t_0 + \delta/2, t_0 + \delta]} |\nabla \mathring{Ric}_{g(t)}|,$$

temos que a estimativa do teorema 7.19 nos fornece

$$\max_M |\nabla \mathring{Ric}_{g(t_k)}| \leq C \delta^{-\frac{1}{2}} \max_M |\mathring{Ric}_{g(t)}|.$$

Assim,

$$\max_M |\nabla \mathring{Ric}_{g(t_k)}|^2 \leq \Lambda_1 K_{\max}(t_k) (2\epsilon K_{\max}(t_k) + C_1)^2$$

para alguma constante  $\Lambda_1$  que só depende da dimensão da variedade  $M$ .

Como, pela proposição 3.18,  $\delta \mathring{Ric} = \frac{2-n}{n} \nabla S$  e  $n \geq 3$ , temos

$$\max_M |\nabla S_{g(t_k)}| \leq \Lambda_2 \sqrt{K_{\max}(t_k)} (2\epsilon K_{\max}(t_k) + C_1)$$

para alguma constante  $\Lambda_2$  que também só depende da dimensão de  $M$ , onde foi usado que  $\delta \mathring{Ric} = -tr \nabla \mathring{Ric} = g * \nabla \mathring{Ric}$  e portanto

$$|\delta \mathring{Ric}| = \left| \frac{2-n}{n} \nabla S \right| \leq |g| |\nabla \mathring{Ric}|,$$

produzindo  $|\nabla S| \leq c |\nabla \mathring{Ric}|$ , para alguma constante  $c > 0$ .

Temos, portanto, que  $|\nabla S| \leq \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C} > 0$  é uma constante. Então, fixado um tempo  $t$ ,

$$\begin{aligned} |S(p) - S(x)| &\leq \int_0^d |\langle \nabla S(\gamma(s)), \gamma' \rangle| ds \\ &\leq \int_0^d \mathcal{C} ds = \mathcal{C} d, \end{aligned}$$

onde  $\gamma$  é a geodésica que liga  $x$  a  $p$  com  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(d) = p$ .

Assim, seja  $p_k \in M$  tal que  $K_{\max}(p_k, t_k) = K_{\max}(t_k)$ . Então, qualquer que seja  $x \in M$ , temos que

$$|S(x, t_k) - S(p_k, t_k)| \leq \max_M |\nabla S_{g(t_k)}| d_{g(t_k)}(x, p_k) \leq \Lambda_2 \sqrt{K_{\max}(t_k)} (2\epsilon K_{\max}(t_k) + C_1) d_{g(t_k)}(x, p_k).$$

Fixado  $r > \pi$ , definimos  $r_k = \frac{r}{\sqrt{K_{\max}(t_k)}}$ . Assim,

$$|S(x, t_k) - S(p_k, t_k)| \leq \Lambda_2 r (2\epsilon K_{\max}(t_k) + C_1) \quad (7.9)$$



para todo  $x \in B_k = B_{r_k, g(t_k)}(p_k)$  (bola fechada).

Pela proposição 7.34, existe uma constante  $C_2 > 0$  tal que

$$K_{\min}(x, t_k) \geq (1 - \varepsilon)K_{\max}(x, t_k) - C_2.$$

Portanto, se  $x \in B_k$ ,

$$\begin{aligned} K_{\min}(x, t_k) &\geq \frac{1 - \varepsilon}{n(n-1)} S(x, t_k) - C_2 \\ &\geq \frac{1 - \varepsilon}{n(n-1)} S(p_k, t_k) - 2r\Lambda_2\varepsilon K_{\max}(t_k) - C_3 \\ &\geq (1 - \varepsilon)K_{\min}(p_k, t_k) - 2r\Lambda_2\varepsilon K_{\max}(p_k, t_k) - C_3 \\ &\geq ((1 - \varepsilon)^2 - 2r\Lambda_2\varepsilon)K_{\max}(p_k, t_k) - C_4, \end{aligned}$$

onde foi usada a desigualdade 7.9 e que, como  $S = \sum_{i \neq j} R_{ijij}$ , valem  $S \leq n(n-1)K_{\max}$  e  $S \geq n(n-1)K_{\min}$ . Na segunda desigualdade foi usado que

$$\frac{1 - \varepsilon}{n(n-1)} \leq 1.$$

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} K_{\max}(p_k, t_k) = \infty$ , pois  $t_k \rightarrow T$  e neste caso  $|R| \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{B_k} \frac{K_{\min}(x, t_k)}{K_{\max}(t_k)} \geq ((1 - \varepsilon)^2 - 2r\Lambda_2\varepsilon).$$

Agora, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e lembrando que  $K_{\min}(x, t_k) \leq K_{\max}(t_k)$ , temos que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{B_k} \frac{K_{\min}(x, t_k)}{K_{\max}(t_k)} = 1.$$

Assim, dado  $\delta > 0$ , temos que para  $k$  suficientemente grande vale

$$K_{\min}(x, t_k) \geq (1 - \delta)K_{\max}(t_k)$$

para todo  $x \in B_k$ . Podemos escolher  $\delta > 0$  suficientemente pequeno para que tenhamos  $r > \frac{\pi}{\sqrt{1-\delta}}$ . Para todo  $v \in T_{p_k}M$ ,  $|v|_{g(t_k)} = 1$ , seja  $\gamma_v(s)$  a geodésica de  $(M, g(t_k))$  satisfazendo  $\gamma_v(0) = p_k$  e  $\gamma'_v(0) = v$ . Mas  $\gamma_v([0, r_k]) \subset B_k$  e  $r_k > \frac{\pi}{\sqrt{(1-\delta)K_{\max}(t_k)}}$ . Como, para qualquer  $x \in B_k$  vale

$$\frac{Ric_x(v, v)}{n-1} \geq K_{\min}(x, t_k) \geq (1 - \delta)K_{\max}(t_k) := 1/r^2,$$

a demonstração do teorema de Bonnet-Myers (consultar o teorema 3.1 de [7, pág. 221] e a observação 2.16) nos diz que qualquer geodésica minimizante tem comprimento menor que  $\pi r$ . Mas o comprimento de  $\gamma$  é  $r_k > r$ . Logo  $\gamma$  não é minimizante. Como  $M$  é completa, se  $M \neq B_k$ , existiria  $q \in M$  com  $q \notin B_k$ . Tomando  $\gamma$  a geodésica minimizante que liga  $p_k$  a  $q$ , temos que  $d(p_k, q) > r_k$ . Sendo  $q' = \gamma(r_k)$ , temos que  $\gamma$  minimiza comprimento até  $q'$  e vale

$d(p_k, q') = r_k$ . Portanto,  $q' \in B_k$ . Mas as geodésicas minimizantes em  $B_k$  têm comprimento menor que  $r_k$ . Isto mostra que  $M = B_k$ . Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{K_{\min}(t_k)}{K_{\max}(t_k)} = 1.$$

■

**Lema 7.37.** *Seja  $t_k \in [0, T)$  uma sequência tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T$ . Então*

$$K_{\max}(t_k) \geq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, t_k]} K_{\max}(t)$$

para todo  $k$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Seja  $t_k \in [0, T)$  uma sequência tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T$ . Para cada  $k$ , seja  $\tau_k \in [0, t_k]$  tal que  $K_{\max}(\tau_k) = \max_{t \in [0, t_k]} K_{\max}(t)$ . Necessariamente,  $\tau_k \rightarrow T$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Para ver isto, suponhamos que  $\tau_k$  não converge para  $T$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Então, existiria uma subsequência  $\tau_{k_j} \leq L < T$  satisfazendo

$$K_{\max}(t_k) \leq K_{\max}(\tau_{k_j}) \leq \max_{t \in [0, L]} K_{\max}(t) = C,$$

com  $K_{\max}(t_k) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Ou seja, no limite  $C = \infty$ . Esta contradição mostra que  $\tau_k \rightarrow T$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Pelo lema 7.36,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{K_{\min}(\tau_k)}{K_{\max}(\tau_k)} = 1.$$

Em particular,

$$\frac{K_{\min}(\tau_k)}{K_{\max}(\tau_k)} \geq \frac{1}{2}$$

para todo  $k$  suficientemente grande. Do corolário 4.8 temos que o mínimo da curvatura escalar de  $g(t)$  é não-decrescente em  $t$ . Portanto, para  $k$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} K_{\max}(t_k) &\geq \frac{1}{n(n-1)} \min_M S(x, t_k) \\ &\geq \frac{1}{n(n-1)} \min_M S(x, \tau_k) \\ &\geq K_{\min}(\tau_k) \\ &\geq \frac{1}{2} K_{\max}(\tau_k) \\ &= \frac{1}{2} \max_{t \in [0, t_k]} K_{\max}(t). \end{aligned}$$

■

**Proposição 7.38.**

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K_{\min}(t)}{K_{\max}(t)} = 1.$$

*Demonstração.* Seja  $t_k \in [0, T)$  uma sequência tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T$ . Pelo lema 7.37

$$K_{\max}(t_k) \geq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, t_k]} K_{\max}(t)$$

para todo  $k$  suficientemente grande. Podemos usar o lema 7.36. Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{K_{\min}(t_k)}{K_{\max}(t_k)} = 1.$$

■

**Teorema 7.39** (Teorema da convergência de Hamilton). *Seja  $(M^n, g_0)$  uma variedade Riemanniana compacta, de dimensão  $n \geq 3$ , com curvatura escalar positiva. Seja  $F$  um conjunto pinçante, e suponha que o tensor de curvatura de  $g_0$  pertence a  $F$  em todos os pontos de  $M$ . Se  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , é a solução máxima do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$ , então as métricas*

$$\frac{1}{2(n-1)(T-t)} g(t)$$

*convergem na topologia  $C^\infty$ , quando  $t \rightarrow T$ , para uma métrica de curvatura seccional constante e igual a 1.*

*Demonstração.* Sabemos da proposição 7.38 que

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K_{\min}(t)}{K_{\max}(t)} = 1.$$

A convergência das métricas  $\frac{1}{2(n-1)(T-t)} g(t)$  segue da proposição 7.30. ■

## 7.5 Fluxo de Ricci em dimensão três

Nesta seção estudaremos o fluxo de Ricci em dimensão três e usaremos o teorema da convergência de Hamilton para provar um teorema, demonstrado por Richard Hamilton em [12], que caracteriza variedades tridimensionais compactas com curvatura de Ricci positiva.

Em dimensão três, o tensor de curvatura fica completamente determinado pelo tensor de Ricci. Isto se torna vantajoso porque a evolução da curvatura pode ser estudada por meio dos autovalores do tensor de Ricci.

**Proposição 7.40.** *Seja  $R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^3)$ . Então,*

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= Ric(X, Z)\langle Y, W \rangle - Ric(X, W)\langle Y, Z \rangle - Ric(Y, Z)\langle X, W \rangle \\ &\quad + Ric(Y, W)\langle X, Z \rangle - \frac{1}{2}S(\langle X, Z \rangle\langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle\langle Y, Z \rangle). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seja  $\tilde{R}$  dado por

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, Z, W) - Ric(X, Z)\langle Y, W \rangle + Ric(X, W)\langle Y, Z \rangle + Ric(Y, Z)\langle X, W \rangle \\ &\quad - Ric(Y, W)\langle X, Z \rangle + \frac{1}{2}S(\langle X, Z \rangle\langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle\langle Y, Z \rangle).\end{aligned}$$

Existem dois fatos sobre  $\tilde{R}$  que são importantes. Primeiro,  $\tilde{R} \in Curv(\mathbb{R}^n)$ . Segundo,  $\tilde{Ric} = 0$ . Vamos mostrar o segundo.

Seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  um referencial ortonormal local. Pela definição do tensor de Ricci temos:

$$\begin{aligned}\tilde{Ric}(e_i, e_j) &= \sum_{k=1}^3 \tilde{R}(e_i, e_k, e_j, e_k) \\ &= \sum_k R(e_i, e_k, e_j, e_k) - \sum_k Ric(e_i, e_j)\langle e_k, e_k \rangle + \sum_k Ric(e_i, e_k)\langle e_j, e_k \rangle \\ &\quad + \sum_k Ric(e_k, e_j)\langle e_i, e_k \rangle - \sum_k Ric(e_k, e_k)\langle e_i, e_j \rangle \\ &\quad + \sum_k \frac{1}{2}S(\langle e_i, e_j \rangle\langle e_k, e_k \rangle - \langle e_i, e_k \rangle\langle e_j, e_k \rangle) \\ &= Ric(e_j, e_j) - 3Ric(e_i, e_j) + Ric(e_i, e_j) + Ric(e_i, e_j) - S\delta_{ij} + \frac{1}{2}S(3\delta_{ij} - \delta_{ij}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Denotando por  $\tilde{K}_{e_i \wedge e_j}$  a curvatura seccional de  $\tilde{R}$  relativa ao plano gerado por  $e_i$  e  $e_j$ . Como o tensor de Ricci é zero, temos  $\tilde{Ric}_{11} = \tilde{Ric}_{22} = \tilde{Ric}_{33} = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{Ric}_{11} &= \tilde{K}_{e_1 \wedge e_3} + \tilde{K}_{e_1 \wedge e_2} = 0 \\ \tilde{Ric}_{22} &= \tilde{K}_{e_2 \wedge e_1} + \tilde{K}_{e_2 \wedge e_3} = 0 \\ \tilde{Ric}_{33} &= \tilde{K}_{e_1 \wedge e_3} + \tilde{K}_{e_2 \wedge e_3} = 0.\end{aligned}$$

Segue que  $\tilde{K}_{e_1 \wedge e_3} = \tilde{K}_{e_1 \wedge e_2} = \tilde{K}_{e_2 \wedge e_3} = 0$ . Concluimos que todas as curvaturas seccionais de  $\tilde{R}$  são zero, pois qualquer plano tangente é gerado por dois vetores que são combinações lineares de  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ . Segue que a curvatura seccional deste plano também será zero. Logo  $\tilde{R} = 0$ , pois o tensor nulo e  $\tilde{R}$  possuem as mesmas curvaturas seccionais (consulte o lema 3.3 de [7, pág. 105]). ■

Será muito conveniente, para o que faremos a seguir, diagonalizar o tensor de Ricci. Seja  $R \in Curv(\mathbb{R}^3)$ . Serão denotados por  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$  os autovalores do tensor de Ricci de  $R$ .

**Observação 7.41.** Lembre-se que existe uma transformação linear associada ao tensor de Ricci dada por

$$Ric(R)(X, Y) = \langle Ric(R)(X), Y \rangle.$$

Assim, dizemos que  $X$  é autovetor de  $Ric(R)$  com autovalor  $\lambda$  se  $Ric(R)(X) = \lambda X$ .

**Definição 7.42.** Dizemos que a curvatura de Ricci é positiva quando todos os autovalores de  $Ric$  são positivos.

**Proposição 7.43.** Seja  $R(t) \in \text{Curv}(\mathbb{R}^3)$ ,  $t \in [0, T)$ , solução da EDO  $\frac{dR}{dt} = Q(R)$ . Os autovalores  $\mu_1(t) \leq \mu_2(t) \leq \mu_3(t)$  do tensor de Ricci de  $R(t)$  satisfazem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mu_1(t) &= (\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_2 - \mu_3)^2 \\ \frac{d}{dt}\mu_2(t) &= (\mu_1 + \mu_3)\mu_2 + (\mu_1 - \mu_3)^2 \\ \frac{d}{dt}\mu_3(t) &= (\mu_2 + \mu_1)\mu_3 + (\mu_1 - \mu_2)^2.\end{aligned}$$

Em particular temos que  $\frac{d}{dt}S = 2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)$ .

*Demonstração.* Vamos considerar um referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Como  $\frac{d}{dt}R = Q(R)$  e como  $R_{ij} = \sum_k R_{ikjk}$ , temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_{ij} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k R_{ikjk}\right) \\ &= \sum_k \frac{d}{dt}R_{ikjk} \\ &= \sum_k Q(R)_{ikjk} \\ &= Ric(Q(R))_{ij}.\end{aligned}$$

Pelas proposições 7.4 e 7.40 temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_{ij} &= 2 \sum_{p,q=1}^3 R_{pq}R_{ipjq} \\ &= 2 \sum_{p,q=1}^3 R_{pq} \left( R_{ij}\delta_{pq} - R_{iq}\delta_{jp} - R_{jp}\delta_{iq} + R_{pq}\delta_{ij} - \frac{1}{2}S(\delta_{ij}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pj}) \right) \\ &= 2 \left\{ \sum_{p,q=1}^3 R_{pq}R_{ij}\delta_{pq} - \sum_{p,q=1}^3 R_{pq}R_{iq}\delta_{jp} - \sum_{p,q=1}^3 R_{pq}R_{jp}\delta_{iq} \right\} \\ &\quad + 2 \left\{ \sum_{p,q=1}^3 (R_{pq})^2\delta_{ij} - \frac{1}{2}S \left[ \sum_{p,q=1}^3 R_{pq}(\delta_{ij}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pj}) \right] \right\} \\ &= 2 \left\{ \sum_{k=1}^3 R_{kk}R_{ij} - \sum_{k=1}^3 R_{ik}R_{kj} - \sum_{k=1}^3 R_{ik}R_{kj} + |Ric|^2\delta_{ij} - \frac{1}{2}S[S\delta_{ij} - R_{ij}] \right\} \\ &= 2 \left( SR_{ij} - 2 \sum_{k=1}^3 R_{ik}R_{kj} + |Ric|^2\delta_{ij} - \frac{1}{2}S^2\delta_{ij} + \frac{1}{2}SR_{ij} \right) \\ &= 3SR_{ij} - 4 \sum_{k=1}^3 R_{ik}R_{kj} + 2|Ric|^2\delta_{ij} - S^2\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Após uma mudança de base, podemos supor que  $R_{ij}(0)$  é diagonal com autovalores  $R_{ii}(0) = \mu_i(0)$ . Podemos supor também que satisfazem  $\mu_1(0) \leq \mu_2(0) \leq \mu_3(0)$ . Se  $R_{ij}(t) = 0$  para  $i \neq j$  e se os  $R_{ii}(t)$  satisfazem

$$\frac{d}{dt}R_{ii} = 3(R_{11} + R_{22} + R_{33})R_{ii} - 4(R_{ii})^2 + 2((R_{11})^2 + (R_{22})^2 + (R_{33})^2) - (R_{11} + R_{22} + R_{33})^2$$

temos que  $R_{ij}(t)$  satisfaz o sistema inicial e é diagonal. O teorema de unicidade de EDOs implica que  $R_{ij}(t)$  será diagonal para todo  $t \in [0, T)$ . Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_{11} &= (R_{22} + R_{33})R_{11} + (R_{22} - R_{33})^2 \\ \frac{d}{dt}R_{22} &= (R_{11} + R_{33})R_{22} + (R_{11} - R_{33})^2 \\ \frac{d}{dt}R_{33} &= (R_{22} + R_{11})R_{33} + (R_{11} - R_{22})^2.\end{aligned}$$

Verifica-se que vale  $R_{11}(t) \leq R_{22}(t) \leq R_{33}(t)$ :

Calculando  $\frac{d}{dt}(R_{22} - R_{11})$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(R_{22} - R_{11}) &= \frac{d}{dt}R_{22} - \frac{d}{dt}R_{11} \\ &= R_{22}R_{11} + R_{22}R_{33} + R_{11}^2 + R_{33}^2 - 2R_{11}R_{33} \\ &\quad - R_{11}R_{22} - R_{11}R_{33} - R_{22}^2 - R_{33}^2 + 2R_{22}R_{33} \\ &= (R_{22} - R_{11})(3R_{33} - R_{22} - R_{11}) \\ &= 3R_{33}(R_{22} - R_{11}) - [R_{22} - R_{11}]^2\end{aligned}$$

com condição inicial  $R_{22}(0) - R_{11}(0) \geq 0$ . Temos aqui um problema de valor inicial da forma

$$\begin{aligned}y'(t) &= g(t)y(t) - [y(t)]^2 \\ y(0) &\geq 0.\end{aligned}$$

Suponha que  $y(0) > 0$ . Isto é,  $R_{22}(0) - R_{11}(0) > 0$ . Como feito no exemplo A.30 da seção A.4 do apêndice, temos que a solução  $R_{22}(t) - R_{11}(t) > 0$ . Portanto a desigualdade é preservada. Se  $y(0) = 0$ , temos como solução a solução trivial  $y(t) = 0$ . Daí,  $R_{22}(t) = R_{11}(t)$ . Como isto mostramos que  $R_{22}(t) \geq R_{11}(t)$ .

Procedendo de maneira inteiramente análoga obtemos que  $R_{11}(t) \leq R_{22}(t) \leq R_{33}(t)$ . Portanto  $\mu_i(t) = R_{ii}(t)$ , e consequentemente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mu_1(t) &= (\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_2 - \mu_3)^2 \\ \frac{d}{dt}\mu_2(t) &= (\mu_1 + \mu_3)\mu_2 + (\mu_1 - \mu_3)^2 \\ \frac{d}{dt}\mu_3(t) &= (\mu_2 + \mu_1)\mu_3 + (\mu_1 - \mu_2)^2.\end{aligned}$$

Como  $S = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}S &= \frac{d}{dt}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = \frac{d}{dt}\mu_1 + \frac{d}{dt}\mu_2 + \frac{d}{dt}\mu_3 \\
 &= (\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_1 + \mu_3)\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)\mu_3 \\
 &\quad + (\mu_2 - \mu_3)^2 + (\mu_1 - \mu_3)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 \\
 &= 2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) + 2(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) - 2(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) \\
 &= 2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2).
 \end{aligned}$$

■

**Proposição 7.44.** *O conjunto*

$$\{R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^3) \mid \mu_1 \geq 0\}$$

*é invariante pela EDO  $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ .*

*Demonstração.* Temos que

$$\frac{d}{dt}\mu_1(t) = (\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_2 - \mu_3)^2,$$

com a condição inicial  $\mu_1(0) \geq 0$ . Fazendo  $f(t) = \mu_2 + \mu_3$  temos que

$$\frac{d}{dt}\mu_1(t) - f(t)\mu_1 = (\mu_2 - \mu_3)^2 \geq 0.$$

Então, sendo  $v$  o fator integrante

$$v = e^{-\int_0^t f(s)ds},$$

segue que

$$v \frac{d}{dt}\mu_1 - v f \mu_1 \geq 0.$$

Ou seja,  $\frac{d}{dt}(v\mu_1) \geq 0$ . Daí,

$$v(t)\mu_1(t) \geq \mu_1(0)v(0) = \mu_1(0) \geq 0.$$

Como  $v(t) > 0$ , segue que  $\mu_1(t) \geq 0$ . Em particular, se  $\mu_1(0) > 0$ ,  $\mu_1(t) > 0$ . ■

Este resultado nos fornece o seguinte

**Corolário 7.45.** *Seja  $(M^3, g_0)$  uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci não-negativa. Se  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , é solução do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$ , então  $g(t)$  tem curvatura de Ricci não-negativa para todo  $t \in [0, T)$ .*

*Demonstração.* Seja  $F = \{R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^3) | \mu_1 \geq 0\}$ . Mostra-se, de maneira análoga àquela que será feita na demonstração do teorema 7.49, que  $F$  é fechado, convexo e  $O(3)$ -invariante. A proposição 7.44 fornece a invariância pela EDO de Hamilton. O teorema 7.20 garante que se  $R$  é tal que  $\mu_1(0) \geq 0$ , então  $\mu_1(t) \geq 0$ ,  $t \in [0, T)$ . Como  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ , o corolário segue. ■

**Proposição 7.46.** *Seja  $\delta \in (0, \frac{1}{3}]$ . O conjunto*

$$\{R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^3) | \mu_1 \geq \delta S, \mu_1 > 0\}$$

*é invariante pela EDO  $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\mu_1(0) \geq \delta S(0)$ . Então,

$$\frac{d}{dt}(\mu_1 - \delta S) = (\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_2 - \mu_3)^2 - 2\delta(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2).$$

Multiplicando por  $S$ , temos que

$$\begin{aligned} S \frac{d}{dt}(\mu_1 - \delta S) &= S(\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + S(\mu_2 - \mu_3)^2 - 2\delta S(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) \\ &= (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)^2 \\ &\quad - 2\delta S(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) \\ &= \mu_1^2\mu_2 + 2\mu_1\mu_2^2 + \mu_2^3 + \mu_1^2\mu_3 - \mu_2^2\mu_3 + 2\mu_1\mu_3^2 - \mu_2\mu_3^2 + \mu_3^3 \\ &\quad - 2\delta S(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) \end{aligned}$$

Vamos encontrar uma função  $g$  tal que a expressão acima seja igual a  $2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(\mu_1 - \delta S) + g$ . Assim,

$$2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(\mu_1 - \delta S) + g = \mu_1^2\mu_2 + 2\mu_1\mu_2^2 + \mu_2^3 + \mu_1^2\mu_3 - \mu_2^2\mu_3 + 2\mu_1\mu_3^2 - \mu_2\mu_3^2 + \mu_3^3 - 2\delta S(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2),$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} g &= \mu_1^2\mu_2 + 2\mu_1\mu_2^2 + \mu_2^3 + \mu_1^2\mu_3 - \mu_2^2\mu_3 + 2\mu_1\mu_3^2 - \mu_2\mu_3^2 + \mu_3^3 - 2\mu_1(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) \\ &= -2\mu_1^3 + \mu_1^2\mu_2 + \mu_2^3 + \mu_1^2\mu_3 - \mu_2^2\mu_3 - \mu_2\mu_3^2 + \mu_3^3 \\ &= (\mu_2 + \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_1(\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever  $S \frac{d}{dt}(\mu_1 - \delta S)$  como

$$S \frac{d}{dt}(\mu_1 - \delta S) = 2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(\mu_1 - \delta S) + g.$$

Fazendo  $f = \mu_1 - \delta S$  e  $h = 2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)$ , temos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$S \frac{d}{dt}f = hf + g.$$



Como  $g \geq 0$ , vale

$$S \frac{d}{dt} f - hf \geq 0.$$

Lembrando que  $\mu_1 > 0$ , e portanto  $S > 0$ , fazendo  $H = h/S$  obtemos

$$\frac{d}{dt} f - Hf \geq 0.$$

Com um argumento inteiramente semelhante ao que foi feito na proposição anterior, concluímos que  $f(t) \geq 0$ . Logo  $\mu_1(t) \geq \delta S(t)$ . ■

**Proposição 7.47.** *Temos que*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \leq -\mu_1 \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) - \frac{(\mu_3 - \mu_2)^2 \mu_3}{\mu_1^2},$$

com  $\mu_1 > 0$ . Em particular, a função  $t \mapsto \left( \frac{\mu_3(t)}{\mu_1(t)} - 1 \right)$  é não-crescente em  $t$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) &= \frac{1}{\mu_1^2} \left( \mu_1 \frac{d}{dt} \mu_3 - \mu_3 \frac{d}{dt} \mu_1 \right) \\ &= -\frac{\mu_3}{\mu_1^2} (\mu_2 - \mu_3)^2 + \frac{1}{\mu_1} ((\mu_1 - \mu_3) \mu_3 + (\mu_1 - \mu_2)^2). \end{aligned}$$

Como  $(\mu_1 - \mu_2)^2 \leq (\mu_1 - \mu_3)^2$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) &= -\frac{\mu_3}{\mu_1^2} (\mu_2 - \mu_3)^2 + \frac{1}{\mu_1} ((\mu_1 - \mu_3) \mu_3 + (\mu_1 - \mu_2)^2) \\ &\leq -\frac{\mu_3}{\mu_1^2} (\mu_2 - \mu_3)^2 + \frac{1}{\mu_1} ((\mu_1 - \mu_3) \mu_3 + (\mu_1 - \mu_3)^2) \\ &= -\frac{\mu_3}{\mu_1^2} (\mu_2 - \mu_3)^2 - \mu_1 \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Como  $\mu_1 > 0$ , segue que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) < 0,$$

completando a demonstração. ■

**Corolário 7.48.** *Seja  $\delta \in (0, \frac{1}{3}]$ . Se  $\mu_1 \geq \delta S$  e  $\mu_1 > 0$ , então*

$$\frac{d}{dt} \left[ \mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \right] \leq 0.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \right] &= \frac{d}{dt} \left( \mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \right) \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) + (\mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}}) \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \\ &\leq \frac{\delta}{1-\delta} \mu_1^{-1+\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) [(\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_3 - \mu_2)^2] \\ &\quad - \mu_1^{1+\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) - \mu_1^{-2+\frac{\delta}{1-\delta}} (\mu_3 - \mu_2)^2 \mu_3. \end{aligned}$$

Mas, como  $\mu_1 \geq \delta S = \delta(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$  temos que

$$\mu_2 + \mu_3 \leq \frac{1-\delta}{\delta} \mu_1.$$

Assim teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \right] &\leq \frac{\delta}{1-\delta} \mu_1^{-1+\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) [(\mu_2 + \mu_3)\mu_1 + (\mu_3 - \mu_2)^2] \\ &\quad - \mu_1^{1+\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) - \mu_1^{-2+\frac{\delta}{1-\delta}} (\mu_3 - \mu_2)^2 \mu_3 \\ &\leq \mu_1^{-2+\frac{\delta}{1-\delta}} (\mu_3 - \mu_2)^2 \left( -\mu_3 + \frac{\delta}{1-\delta} (\mu_3 - \mu_1) \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

■

Agora estamos prontos para provar o nosso principal resultado.

**Teorema 7.49.** (Hamilton, [12]) *Seja  $(M^3, g_0)$  uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci positiva. Se  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , é a solução máxima do fluxo de Ricci com condição inicial  $g(0) = g_0$ , então as métricas  $\frac{1}{4(T-t)}g(t)$  convergem na topologia  $C^\infty$ , quando  $t \rightarrow T$ , para uma métrica de curvatura seccional constante e igual a 1.*

*Demonstração.* Dividiremos esta demonstração em algumas partes. Primeiro, considere o conjunto

$$F = \left\{ R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n) \mid \mu_1 > 0, \mu_1 \geq \delta S, \delta \in (0, 1/3] \text{ e } \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \leq C \mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \right\} \cup \{0\}.$$

**O tensor de curvatura de  $g_0$  pertence a  $F$ :**

Como a curvatura de Ricci de  $g_0$  é positiva, temos que  $\mu_1 > 0$ , satisfazendo a primeira condição. Como  $M$  é compacta e os  $\mu_i$  são funções contínuas, definimos

$$\begin{aligned} a &= \min_M \mu_1 \\ b &= \max_M \mu_2 \\ c &= \max_M \mu_3. \end{aligned}$$

Para satisfazer a segunda condição ser satisfeita basta tomar  $\delta$  de tal forma que

$$\delta \leq \frac{a}{a+b+c}.$$

Por fim, usando novamente a continuidade dos  $\mu_i$ , tomamos  $K$  como sendo o máximo da função

$$\mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right).$$

Daí,

$$\mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \leq K \implies \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \leq K \mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}},$$

mostrando a terceira condição. Tomaremos a constante  $C$  como sendo  $C \geq \max\{K, 1\}$ .

**Observação 7.50.** É importante notar que como  $\mu_1 > 0$ , a constante  $C$  também é positiva. De fato, a função

$$\mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right).$$

é positiva, e, portanto, tem um máximo positivo. Como  $C \geq \max\{K, 1\}$ , então  $C > 0$ .

### F é um conjunto fechado:

Seja  $R_i$  uma sequência em  $F$  tal que  $\lim R_i = R$ . Se  $\mu_1(R) > 0$ , então esta sequência converge para um elemento de

$$\left\{ R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n) \mid \mu_1 > 0, \mu_1 \geq \delta S, \delta \in (0, 1/3] \text{ e } \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right) \leq C \mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \right\},$$

e portanto pertence a  $F$ . Agora vamos ver o que acontece caso  $\mu_1(R) = 0$ . Podemos supor que  $\mu_1(R_i) > 0$ . Daí,

$$\mu_1(R_i) \geq \delta(\mu_1(R_i) + \mu_2(R_i) + \mu_3(R_i)),$$

de onde

$$\frac{1-\delta}{\delta} \mu_1(R_i) \geq \mu_2(R_i) + \mu_3(R_i).$$

No limite,

$$0 = \frac{1-\delta}{\delta} \mu_1(R) \geq \mu_2(R) + \mu_3(R).$$

Como  $\mu_2(R), \mu_3(R) \geq 0$ , segue que  $\mu_2(R) = \mu_3(R) = 0$ . Como vimos na demonstração da proposição 7.40, isto implica que  $R = 0$ . Segue que esta sequência converge para o tensor nulo em

$\{0\} \subset F$ . Com isto mostramos que  $F$  é um conjunto fechado.

**F é O(n)-invariante:**

Seja  $X$  autovetor de  $Ric$  com autovalor  $\lambda$ . Isto quer dizer que para todo  $Y$  vale

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \langle Ric(X), Y \rangle \\ &= \langle \lambda X, Y \rangle \\ &= \lambda \langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

onde  $Ric$  é um operador autoadjunto. Vamos mostrar que  $Ric_T$ ,  $T \in O(n)$ , tem os mesmos autovalores. Seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal e seja  $\{f_1, f_2, f_3\} = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ .

$$\begin{aligned} Ric_T(T^{-1}(X), Y) &= \sum_{m=1}^3 R_T(T^{-1}(X), e_m, Y, e_m) \\ &= \sum_{m=1}^3 R(T \circ T^{-1}(X), f_m, T(Y), f_m) \\ &= Ric(X, T(Y)) \\ &= \lambda \langle X, T(Y) \rangle \\ &= \lambda \langle T^{-1}(X), Y \rangle. \end{aligned}$$

Segue que  $T^{-1}(X)$  é autovetor de  $Ric_T$  com autovalor  $\lambda$ .

**F é invariante pela EDO de Hamilton:**

Das proposições 7.44 e 7.46, temos que as condições  $\mu_1 > 0$  e  $\mu_1 \geq \delta S$  são preservadas pela EDO de Hamilton. Pelo corolário 7.48 a função

$$f(t) = \mu_1^{\frac{\delta}{1-\delta}} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \right)$$

é decrescente em  $t$ . Como em  $t = 0$  vale  $f(0) \leq C$ , esta condição é preservada.

**F é um conjunto convexo:**

Sejam  $R_1, R_2 \in Curv(\mathbb{R}^n)$ . Seja  $R_s \in Curv(\mathbb{R}^n)$  dado por

$$R_s = sR_2 + (1-s)R_1,$$

$s \in [0, 1]$ . Então, após tomar o traço temos

$$Ric_s = sRic_2 + (1-s)Ric_1,$$

$s \in [0, 1]$ . Agora, se  $x$  é autovetor unitário de  $Ric_s$  com autovalor  $\mu_3(s)$  temos

$$Ric_s(x, x) = \langle Ric_s(x), x \rangle = \mu_3(s).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Ric_s(x, x) &= s\langle Ric_2(x), x \rangle + (1-s)\langle Ric_1(x), x \rangle \\ &\leq s\mu_3(R_2) + (1-s)\mu_3(R_1), \end{aligned}$$

pois  $\mu_3(R_1) = \max_{|x|=1} \langle Ric_1(x), x \rangle$  e  $\mu_3(R_2) = \max_{|x|=1} \langle Ric_2(x), x \rangle$ . Isto quer dizer que a função  $\mu_3 : Curv(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa.

Analogamente temos que, se  $y$  é autovetor unitário de  $Ric_s$  com autovalor  $\mu_1(s)$ , então

$$\mu_1(s) \geq s\mu_1(R_2) + (1-s)\mu_1(R_1),$$

desta vez usando que  $\mu_1(R_1) = \min_{|x|=1} \langle Ric_1(x), x \rangle$  e  $\mu_1(R_2) = \min_{|x|=1} \langle Ric_2(x), x \rangle$ . Logo, a função  $\mu_1 : Curv(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  é côncava. Equivalentemente,  $-\mu_1$  é convexa.

Segue daí que as funções  $\delta S - \mu_1 = \delta S + (-\mu_1)$  e  $\mu_3 - \mu_1 - \mu_1^{1-\frac{\delta}{1-\delta}} = \mu_3 + (-\mu_1) + (-\mu_1^{1-\frac{\delta}{1-\delta}})$  são convexas, pois são somas de funções convexas:  $(\mu_1^{1-\frac{\delta}{1-\delta}})$  é côncava porque  $\mu_1$  é uma função côncava positiva e o expoente é menor que 1 e  $S$  é uma função linear (côncava e convexa) de  $R$ . Vamos verificar estas afirmações. Primeiramente, se  $a$  e  $b$  são números reais positivos e se  $0 < \alpha < 1$ , então  $(sa + (1-s)b)^\alpha \geq sa^\alpha + (1-s)b^\alpha$ , com  $s \in [0, 1]$ . Para verificar isto, considere a função  $h$  dada por

$$h(s) = sa^\alpha + (1-s)b^\alpha - (sa + (1-s)b)^\alpha.$$

Verifica-se sem dificuldade que  $h(0) = h(1) = 0$ . Calculando a segunda derivada da função  $h$ , obtemos

$$h''(s) = -\alpha(\alpha-1)(as + (1-s)b)^{\alpha-2}(a-b)^2 \geq 0,$$

de onde segue que a função  $h$  é uma função convexa. Como  $h$  é convexa e tem raízes em  $s = 0$  e  $s = 1$ , devemos ter que  $h \leq 0$  em  $[0, 1]$ . Portanto,  $(sa + (1-s)b)^\alpha \geq sa^\alpha + (1-s)b^\alpha$ . Se  $f$  é um função côncava e positiva, então

$$(f((1-s)x_1 + sx_2))^\alpha \geq ((1-s)f(x_1) + sf(x_2))^\alpha \geq s(f(x_1))^\alpha + (1-s)(f(x_2))^\alpha.$$

Logo,  $f^\alpha$  também é côncava.

Vamos provar a segunda afirmação. Sejam  $R_1$  e  $R_2$  dois tensores em  $Curv(\mathbb{R}^n)$  e seja  $R \in Curv(\mathbb{R}^n)$  dado por  $R = R_1 + R_2$ . Pela linearidade do traço, vale  $Ric(R) = Ric(R_1 + R_2) = Ric(R_1) + Ric(R_2)$ . Tomando novamente o traço e usando a linearidade temos que  $S(R) = S(R_1 + R_2) = S(R_1) + S(R_2)$ . Segue que a função que manda  $R$  em  $\mu_1(R) + \mu_2(R) + \mu_3(R)$  é linear.

O que foi mostrado acima nos diz que dados quaisquer tensores de curvatura algébricos  $R_1$  e  $R_2$  em  $F$ , o tensor dado por

$$R := sR_2 + (1-s)R_1$$

também pertence ao conjunto  $F$  para qualquer  $s \in [0, 1]$ . De fato, quaisquer que sejam  $R_1, R_2 \in F$ , como  $\delta S - \mu_1$  é convexa, então vale:

$$(\delta S - \mu_1)(sR_2 + (1-s)R_1) \leq s(\delta S - \mu_1)(R_2) + (1-s)(\delta S - \mu_1)(R_1)$$

para qualquer  $s \in [0, 1]$ . Isto implica que  $\delta S - \mu_1 \leq 0$ , e portanto  $\delta S \leq \mu_1$ , que é uma das condições para um tensor de curvatura algébrico estar em  $F$ . Analogamente, temos que

$$\mu_3 - \mu_1 - \mu_1^{1-\frac{\delta}{1-\delta}} \leq 0.$$

Segue daí que

$$\frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \leq \mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \leq C \mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}},$$

onde  $C$  representa a mesma constante do início da demonstração. Esta é a outra condição para o tensor estar em  $F$ . Usando que  $-\mu_1$  é convexa, obtemos

$$-\mu_1(sR_2 + (1-s)R_1) \leq -s\mu_1(R_2) - (1-s)\mu_1(R_1),$$

quaisquer que sejam  $R_1, R_2 \in F$  e  $s \in [0, 1]$ . Segue que  $\mu_1 \geq 0$ . Se  $\mu_1 > 0$ , pelo que foi feito acima, temos que  $sR_2 + (1-s)R_1$  está em  $F$ , quaisquer que sejam  $R_1, R_2 \in F$  e para qualquer  $s \in [0, 1]$ . Se  $\mu_1 = 0$ , um argumento como o usado para mostrar que  $F$  é um conjunto fechado nos diz que  $\mu_2 = \mu_3 = 0$ , e portanto  $sR_2 + (1-s)R_1$  é o tensor nulo, que está em  $F$ . Esta foi a última condição a ser verificada. Isto mostra que  $F$  é um conjunto convexo.

### F é um conjunto pinçante:

Deve-se mostrar que dado  $\sigma \in (0, 1)$ , existe um subconjunto compacto  $L \subset \text{Curv}(\mathbb{R}^n)$  tal que se  $R \in F - L$ , então  $R$  é  $\sigma$ -pinçado.

Lembre-se que escolhemos uma base na qual  $\mu_i = R_{ii}$ . Ou seja,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= K_{e_1 \wedge e_2} + K_{e_1 \wedge e_3} \\ \mu_2 &= K_{e_2 \wedge e_1} + K_{e_2 \wedge e_3} \\ \mu_3 &= K_{e_1 \wedge e_3} + K_{e_2 \wedge e_3}.\end{aligned}$$

Encontrando as curvaturas seccionais em função dos autovalores temos:

$$\begin{aligned}K_{e_1 \wedge e_2} &= \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_3}{2} \\ K_{e_1 \wedge e_3} &= \frac{\mu_1 + \mu_3 - \mu_2}{2} \\ K_{e_2 \wedge e_3} &= \frac{\mu_3 + \mu_2 - \mu_1}{2}.\end{aligned}$$

Agora, seja  $\{u, v, w\}$  uma base ortonormal. Então, pela definição de  $S$  temos que

$$S = \text{Ric}(u, u) + \text{Ric}(v, v) + \text{Ric}(w, w)$$

e portanto

$$\text{Ric}(u, u) + \text{Ric}(v, v) = S - \text{Ric}(w, w).$$

Por outro lado, usando a proposição 7.40 temos que

$$\begin{aligned}
 R(u, v, u, v) &= Ric(u, u)g(v, v) - Ric(u, v)g(u, v) - Ric(v, u)g(v, u) + Ric(v, v)g(u, u) \\
 &\quad - \frac{1}{2}S(g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2) \\
 &= Ric(u, u) + Ric(v, v) - \frac{1}{2}S \\
 &= \frac{1}{2}S - Ric(w, w).
 \end{aligned}$$

O que significa que a curvatura seccional é máxima quando  $Ric(w, w)$  for mínimo e que a curvatura seccional é mínima quando  $Ric(w, w)$  for máximo. Como  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$  e  $S = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ , temos que

$$\begin{aligned}
 K_{\max} &= \frac{1}{2}S - \mu_1 = \frac{\mu_3 + \mu_2 - \mu_1}{2} = K_{e_2 \wedge e_3} \\
 K_{\min} &= \frac{1}{2}S - \mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_3}{2} = K_{e_1 \wedge e_2}.
 \end{aligned}$$

Dado  $\sigma \in (0, 1)$ , tome  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \geq \sigma.$$

Seja  $m = m(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\mu_1 \geq m \implies C\mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}} < \varepsilon.$$

Seja  $L$  o conjunto dado por

$$L = \{R \in \text{Curv}(\mathbb{R}^n) \mid \mu_1 \geq \delta S, 0 < \mu_1 \leq m\} \cup \{0\}.$$

O conjunto  $L$  é fechado e além disto note que  $(1 - \delta)\mu_1 \geq \delta(\mu_2 + \mu_3) \geq \delta\mu_3$ . Ou seja,

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \frac{1 - \delta}{\delta}\mu_1 \leq \frac{1 - \delta}{\delta}m.$$

Como existe uma constante  $\tilde{C}$  tal que

$$0 \leq |R| \leq \tilde{C}|K_{\max}|,$$

$K_{\max}$  depende dos  $\mu_i$  e os  $\mu_i$  estão limitados, concluímos que  $|R|$  está limitado. Portanto  $L$  é compacto.

Por fim, vamos mostrar que se  $R \in F - L$ , então  $R$  é  $\sigma$ -pinçado. Se  $R \in F - L$ , então  $\mu_1 \geq m$  e portanto vale

$$C\mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}} < \varepsilon.$$

Como  $R \in F$ , devemos ter que  $\frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 \leq C\mu_1^{-\frac{\delta}{1-\delta}}$ . Assim, para  $R \in F - L$ , temos que

$$\frac{\mu_3}{\mu_1} - 1 < \varepsilon.$$

Com isso teremos que  $\frac{K_{\min}}{K_{\max}} \geq \sigma$ , pois

$$\frac{K_{\min}}{K_{\max}} = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_3}{\mu_2 + \mu_3 - \mu_1}$$

e

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 &\geq 2\mu_1 - \mu_3 \\ &\geq 2\left(\frac{\mu_3}{1+\varepsilon}\right) - \mu_3 \\ &= \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu_3 \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \mu_2 + \mu_3 - \mu_1 &\leq 2\mu_3 - \mu_1 \\ &\leq 2\mu_3 - \frac{\mu_3}{1+\varepsilon} \\ &= \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu_3. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\frac{K_{\min}}{K_{\max}} \geq \frac{1-\varepsilon}{1+2\varepsilon} \geq \sigma,$$

pela escolha de  $\varepsilon$ .

Temos, por fim, que a curvatura seccional  $K_{\min}$  é positiva, como mostra o cálculo abaixo:

$$\begin{aligned} K_{\min} &= \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_3}{2} \\ &\geq \frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\mu_3 \\ &\geq \frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}m > 0. \end{aligned}$$

Resumindo,  $F$  é um conjunto pinçante. Pelo teorema 7.20 o tensor de curvatura de  $g(t)$  permanece em  $F$ , para  $t \in [0, T)$ . O resultado agora segue usando-se o teorema 7.39. ■

**Corolário 7.51.** *Seja  $(M^3, g_0)$  uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci positiva. Então  $M$  é difeomorfa a uma forma espacial esférica  $S^3/\Gamma$ .*

*Demonstração.* Como a curvatura de Ricci de  $g_0$  é estritamente positiva, segue do teorema 7.49 que  $M$  admite uma métrica de curvatura seccional constante e igual a 1. Segue da classificação de formas espaciais simplesmente conexas (capítulo 8 de [7]) que  $M$  é difeomorfa a um quociente de  $S^3/\Gamma$  da esfera  $S^3$  pela ação, livre de pontos fixos, de um subgrupo finito  $\Gamma \subset O(4)$ . ■



---

## Estimativas e outros cálculos

---

### A.1 A operação $*$ e o fluxo de Ricci

#### A.1.1 Propriedades do produto tensorial

As seguintes propriedades do produto tensorial de campos tensoriais são de fácil verificação:

$$|T_1 \otimes T_2| = |T_1| |T_2|. \quad (\text{A.1})$$

Mais geralmente, temos que

$$|T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_m| = |T_1| |T_2| \cdots |T_m|. \quad (\text{A.2})$$

Temos também a regra de Leibniz para derivadas covariantes e derivadas temporais:

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2) \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_t(T_1 \otimes T_2) = (\partial_t T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\partial_t T_2). \quad (\text{A.4})$$

Mais geralmente,

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_m) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_m + \cdots + T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes (\nabla_X T_m) \quad (\text{A.5})$$

$$\partial_t(T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_m) = (\partial_t T_1) \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_m + \cdots + T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes (\partial_t T_m). \quad (\text{A.6})$$

#### A.1.2 A operação $*$

Dado um campo tensorial  $T$ , vamos considerar três tipos operações em  $T$ :

- 1) Uma permutação  $\mathcal{P}$  nas entradas de  $T$ . Denotaremos o campo resultante por  $\mathcal{P}T$ .
- 2) Uma contração  $\mathcal{C}$  em um par de entradas (uma covariante e outra contravariante) de  $T$ . Denotaremos o campo resultante por  $\mathcal{C}T$ .
- 3) O produto tensorial com a métrica ou sua inversa, que denotaremos por  $\mathcal{V}T$ . Ou seja,  $\mathcal{V}T = T \otimes g$  ou  $\mathcal{V}T = T \otimes g^{-1}$ .

Note que o tipo do tensor é alterado: de  $(r, s)$  para  $(r - 1, s - 1)$  no caso das contrações; de  $(r, s)$  para  $(r + 1, s - 1)$  no caso de contrações com  $g$ ; de  $(r, s)$  para  $(r - 1, s + 1)$  no caso de contrações com  $g^{-1}$ ; de  $(r, s)$  para  $(r + 2, s)$  no caso de produto com  $g$ ; de  $(r, s)$  para  $(r, s + 2)$  no caso de produto com  $g^{-1}$ . Note ainda que a operação de contração com a métrica (levantamento ou rebaixamento de índices) pode ser obtida por uma composição de  $\mathcal{V}$  com  $\mathcal{C}$ .

**Definição A.1.** Chamaremos as operações acima de operações básicas em  $T$ .

**Lema A.2.** As três operações acima comutam com a derivada covariante  $\nabla_X$ .

*Demonstração.* A demonstração de  $\nabla_X \mathcal{P}T = \mathcal{P}\nabla_X T$  é simples. Vamos ver um exemplo, no caso em que  $T$  é de tipo  $(2, 1)$  e  $\mathcal{P}$  permuta as duas últimas entradas covariantes. Assim,

$$\mathcal{P}T(X_1, X_2, \theta) = T(X_2, X_1, \theta).$$

Agora, pela regra do produto para derivações tensoriais,

$$\begin{aligned} \nabla_X T(X_1, X_2, \theta) &= X(T(X_1, X_2, \theta)) - T(\nabla_X X_1, X_2, \theta) \\ &\quad - T(X_1, \nabla_X X_2, \theta) - T(X_1, X_2, \nabla_X \theta). \end{aligned}$$

Com isto temos que

$$\begin{aligned} \nabla_X \mathcal{P}T(X_1, X_2, \theta) &= \nabla_X T(X_2, X_1, \theta) \\ &= X(T(X_2, X_1, \theta)) - T(\nabla_X X_2, X_1, \theta) - T(X_2, \nabla_X X_1, \theta) - T(X_2, X_1, \nabla_X \theta). \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\nabla_X T(X_1, X_2, \theta) = \nabla T(X, X_1, X_2, \theta)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\nabla T(X, X_1, X_2, \theta) &= \nabla T(X, X_2, X_1, \theta) \\ &= \nabla_X T(\theta, X_2, X_1) \\ &= \nabla_X \mathcal{P}T(X_1, X_2, \theta). \end{aligned}$$

Para a contração, temos

$$\nabla_X \mathcal{C}T(\dots) = X(\mathcal{C}T(\dots)) - \mathcal{C}T(\nabla_X -),$$

onde a notação  $\nabla_X -$  envolve um somatório em que cada termo apresenta uma derivação em uma das entradas. Considere um referencial ortonormal  $\{e_i\}$  com base dual  $\{\theta^i\}$ . Reescrevemos a equação acima na forma

$$\nabla_X \mathcal{C}T(\dots) = X(T(\dots, e_i, \dots, \theta^i, \dots)) - T(\nabla_X -, e_i, \nabla_X -, \theta^i, \nabla_X -).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\nabla_X T(\dots) &= \nabla_X T(\dots, e_i, \dots, \theta^i, \dots) \\ &= X(T(\dots, e_i, \dots, \theta^i, \dots)) - T(\nabla_X -, e_i, \nabla_X -, \theta^i, \nabla_X -) \\ &\quad - T(\dots, \nabla_X e_i, \dots, \theta^i, \dots) - T(\dots, e_i, \dots, \nabla_X \theta^i, \dots). \end{aligned}$$

Queremos mostrar que os dois últimos termos da equação acima se cancelam. Como  $\nabla_X \theta^i = -\theta^i(\nabla_X e_j)\theta^j$  e  $\nabla_X e_j = \theta^i(\nabla_X e_j)e_i$ , temos que

$$\begin{aligned} T(\cdots, \nabla_X e_i, \cdots, \theta^i, \cdots) &= T(\cdots, \theta^j(\nabla_X e_i)e_j, \cdots, \theta^i, \cdots) \\ &= T(\cdots, e_j, \cdots, \theta^j(\nabla_X e_i)\theta^i, \cdots) \\ &= -T(\cdots, e_j, \cdots, \nabla_X \theta^j, \cdots), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração para este caso.

O resultado para a operação  $\mathcal{V}$  é trivial, uma vez que vale a regra do produto e a métrica é paralela. ■

**Lema A.3.** a)  $|\mathcal{P}T| = |T|$

b)  $|\mathcal{C}T| \leq \sqrt{n}|T|$

c)  $|\mathcal{V}T| = \sqrt{n}|T|$ .

*Demonstração.* O primeiro item é trivial, o último segue diretamente da equação A.1. Vamos mostrar o segundo item. Usaremos que

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

O quadrado da norma de  $\mathcal{C}T$  é uma soma de termos da forma

$$\left( \sum_i T(\cdots, e_i, \cdots, \theta^i, \cdots) \right)^2,$$

onde os “ $\cdots$ ” devem ser substituídos por campos de um referencial ortonormal local e seus duais. Assim, temos que

$$\left( \sum_i T(\cdots, e_i, \cdots, \theta^i, \cdots) \right)^2 \leq n \sum_i T(\cdots, e_i, \cdots, \theta^i, \cdots)^2 \leq n \sum_{i,j} T(\cdots, e_i, \cdots, \theta^j, \cdots)^2,$$

de onde o resultado segue. ■

**Corolário A.4.** Se  $S$  é obtido de  $T$  por meio de  $k$  operações básicas, então

$$|S| \leq n^{\frac{k}{2}} |T|.$$

**Definição A.5.** Denotamos por  $T_1 \diamond T_2$  qualquer campo tensorial obtido de  $T_1 \otimes T_2$  por meio de um número finito de operações básicas. Analogamente,  $T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond T_m$  é obtido de  $T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_m$  por um número finito de operações básicas.

Usaremos também a notação alternativa  $\circ$  quando houver mais de uma operação do tipo  $\diamond$  envolvida e for conveniente fazer a distinção.

**Proposição A.6.** *Valem:*

a)

$$|T_1 \diamond T_2| \leq n^{\frac{k}{2}} |T_1| |T_2|,$$

onde  $k$  é o número de operações básicas envolvidas em  $\diamond$ .

b)

$$|T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond T_m| \leq n^{\frac{k}{2}} |T_1| |T_2| \cdots |T_m|,$$

onde  $k$  é o número de operações básicas.

c)

$$\nabla_X(T_1 \diamond T_2) = \nabla_X T_1 \diamond T_2 + T_1 \diamond \nabla_X T_2,$$

onde as operações básicas envolvidas na operação  $\diamond$  são as mesmas dos dois lados da igualdade.

d)

$$\nabla_X(T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond T_m) = \nabla_X T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond T_m + \cdots + T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_m,$$

onde as operações básicas envolvidas na operação  $\diamond$  são as mesmas dos dois lados da igualdade.

**Proposição A.7.**

$$(T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_i \diamond \cdots \diamond T_m) = (T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla T_i \diamond \cdots \diamond T_m)(X, \cdots).$$

**Observação A.8.** As operações  $\diamond$  não são as mesmas nos dois lados da equação, mesmo porque os campos são de ordens distintas.

*Demonstração.* Usaremos indução no número de operações básicas envolvidas no termo da esquerda. Para nenhuma operação, temos claramente

$$(T_1 \otimes \cdots \otimes \nabla_X T_i \otimes \cdots \otimes T_m)(\cdots) = \mathcal{P}(T_1 \otimes \cdots \otimes \nabla T_i \otimes \cdots \otimes T_m)(X, \cdots)$$

para alguma permutação  $\mathcal{P}$ . No passo indutivo, suponha inicialmente que  $\mathcal{P}$  é a última operação feita:

$$T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_i \diamond \cdots \diamond T_m = \mathcal{P}(T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m).$$

Denotando por  $P$  a permutação envolvida, e usando a hipótese indutiva, temos

$$\begin{aligned}
 (T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_i \diamond \cdots \diamond T_m)(\cdots) &= \mathcal{P}(T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m)(\cdots) \\
 &= (T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m)(P(\cdots)) \\
 &= (T_1 \circ \cdots \circ \nabla T_i \circ \cdots \circ T_m)(X, P(\cdots)) \\
 &= \mathcal{P}'(T_1 \circ \cdots \circ \nabla T_i \circ \cdots \circ T_m)(X, \cdots),
 \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{P}'$  é a nova operação associada à nova permutação  $P'$  envolvida.

Suponha agora que

$$T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_i \diamond \cdots \diamond T_m = \mathcal{C}(T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m).$$

Neste caso, obtemos

$$\begin{aligned}
 (T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_i \diamond \cdots \diamond T_m)(\cdots) &= \mathcal{C}(T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m)(\cdots) \\
 &= (T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m)(P(\cdots, e_j, \cdots, \theta^j, \cdots)) \\
 &= (T_1 \circ \cdots \circ \nabla T_i \circ \cdots \circ T_m)(X, \cdots, e_j, \cdots, \cdots, \theta^j, \cdots) \\
 &= \mathcal{C}'(T_1 \circ \cdots \circ \nabla T_i \circ \cdots \circ T_m)(X, \cdots),
 \end{aligned}$$

onde usamos o passo indutivo e um referencial local  $\{e_i\}$  com dual  $\{\theta^i\}$ .

Finalmente, suponha que

$$T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_i \diamond \cdots \diamond T_m = \mathcal{V}(T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m),$$

onde  $\mathcal{V}$  é o produto com  $g^{-1}$ . Neste caso, obtemos

$$\begin{aligned}
 (T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla_X T_i \diamond \cdots \diamond T_m)(\omega, \eta, \cdots) &= \mathcal{V}(T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m)(\cdots, \omega, \eta) \\
 &= (T_1 \circ \cdots \circ \nabla_X T_i \circ \cdots \circ T_m)(\cdots)g^{-1}(\omega, \eta) \\
 &= (T_1 \circ \cdots \circ \nabla T_i \circ \cdots \circ T_m)(X, \cdots)g^{-1}(\omega, \eta) \\
 &= \mathcal{V}(T_1 \circ \cdots \circ \nabla T_i \circ \cdots \circ T_m)(X, \cdots, \omega, \eta).
 \end{aligned}$$

O caso de produto com  $g$  é análogo. ■

Combinando o resultado acima com o último item da proposição A.6, obtemos

**Corolário A.9.**

$$\nabla(T_1 \diamond \cdots \diamond T_m) = \nabla T_1 \diamond \cdots \diamond T_m + \cdots \diamond T_1 \diamond \cdots \diamond \nabla T_m.$$

**Definição A.10.** Denotamos por  $T_1 * T_2$  uma combinação linear de termos da forma  $T_1 \diamond T_2$ . Analogamente,  $T_1 * T_2 \cdots * T_m$  é uma combinação linear de termos da forma  $T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond T_m$ .

Como uma consequência da proposição A.6 obtemos imediatamente a seguinte

**Proposição A.11.** a)

$$|T_1 * T_2| \leq Cn^{\frac{k}{2}} |T_1| |T_2|,$$

onde  $C$  é a soma dos valores absolutos dos coeficientes da combinação linear envolvida em  $*$  e  $k$  é o número máximo de operações básicas envolvidas em cada um dos termos.

b)

$$|T_1 * T_2 * \cdots * T_m| \leq Cn^{\frac{k}{2}} |T_1| |T_2| \cdots |T_m|,$$

onde  $C$  e  $k$  são como no item anterior.

c)

$$\nabla_X(T_1 * T_2) = \nabla_X T_1 * T_2 + T_1 * \nabla_X T_2,$$

onde o número de termos e as operações básicas envolvidas na operação  $*$  são as mesmas dos dois lados da equação.

d)

$$\nabla_X(T_1 * T_2 * \cdots * T_m) = \nabla_X T_1 * T_2 * \cdots * T_m + \cdots + T_1 * T_2 * \cdots * \nabla_X T_m,$$

onde o número de termos e as operações básicas envolvidas na operação  $*$  são as mesmas dos dois lados da equação.

**Corolário A.12.**

$$\nabla(T_1 * \cdots * T_m) = \nabla T_1 * \cdots * T_m + \cdots + T_1 * \cdots * \nabla T_m.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \nabla(T_1 * T_2 * \cdots * T_m)(X, \cdots) &= \nabla_X(T_1 * T_2 * \cdots * T_m)(\cdots) \\ &= (\nabla_X T_1 * T_2 * \cdots * T_m)(\cdots) + \cdots + (T_1 * T_2 * \cdots * \nabla_X T_m)(\cdots) \\ &= (\nabla T_1 * T_2 * \cdots * T_m)(X, \cdots) + \cdots + (T_1 * T_2 * \cdots * \nabla T_m)(X, \cdots), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vem do corolário A.9. ■

### A.1.3 Derivadas temporais

Vamos supor que  $g$  é solução do fluxo de Ricci.

**Lema A.13.** a)  $\partial_t \mathcal{P}T = \mathcal{P} \partial_t T$

b)  $\partial_t \mathcal{C}T = \mathcal{C} \partial_t T$

c)  $\partial_t \mathcal{V}T = \mathcal{V} \partial_t T \pm 2T \diamond R.$

*Demonstração.* Os dois primeiros itens são triviais. Para o terceiro, usaremos a equação A.5. Para o caso de produto com  $g$ , temos

$$\partial_t \mathcal{V}T = \partial_t(T \otimes g) = \partial_t T \otimes g + T \otimes \partial_t g = \mathcal{V} \partial_t T + T \otimes (-2Ric),$$

o que mostra o resultado neste caso. Para o caso de produto pelo inverso da métrica segue-se o mesmo procedimento, usando que

$$\partial_t g^{-1} = 2\mathcal{C}^2(Ric \otimes g^{-1} \otimes g^{-1}).$$

■

**Proposição A.14.**

$$\partial_t(T_1 \diamond T_2) = \partial_t T_1 \diamond T_2 + T_1 \diamond \partial_t T_2 + T_1 * T_2 * R,$$

onde a operação  $\diamond$  é a mesma nos dois lados da equação, e a operação  $*$  depende apenas da operação  $\diamond$  considerada.

*Demonstração.* Usaremos indução no número de operações envolvidas em  $\diamond$ , sendo o caso de nenhuma operação uma consequência da equação A.5. No passo indutivo, suporemos que  $T_1 \diamond T_2 = \mathcal{V}(T_1 \circ T_2)$ , sendo os outros casos mais simples. Pelo lema A.13,

$$\begin{aligned} \partial_t(T_1 \diamond T_2) &= \partial_t(\mathcal{V}(T_1 \circ T_2)) \\ &= \mathcal{V}(\partial_t(T_1 \circ T_2)) + T_1 * T_2 * R \\ &= \mathcal{V}(\partial_t T_1 \circ T_2 + T_1 \circ \partial_t T_2 + T_1 * T_2 * R) + T_1 * T_2 * R \\ &= \partial_t T_1 \diamond T_2 + T_1 \diamond \partial_t T_2 + T_1 * T_2 * R \end{aligned}$$

■

Usando o que foi feito, podemos generalizar a proposição acima para uma quantidade qualquer de campos.

**Proposição A.15.**

$$\partial_t(T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond T_m) = \partial_t T_1 \diamond T_2 \diamond \cdots \diamond T_m + \cdots + T_1 \diamond \cdots \diamond \partial_t T_m + T_1 * T_2 * \cdots * R,$$

onde a operação  $\diamond$  é a mesma nos dois lados da equação, e a operação  $*$  depende apenas da operação  $\diamond$  considerada.

Por linearidade, a prposição acima se generaliza imediatamente para a operação  $*$ :

**Proposição A.16.**

$$\partial_t(T_1 * T_2 * \cdots * T_m) = \partial_t T_1 * T_2 * \cdots * T_m + \cdots + T_1 * \cdots * \partial_t T_m + T_1 * T_2 * \cdots * R.$$

Estendemos abaixo a proposição anterior para derivadas de ordem superior. Convencionamos que  $\partial_t^0 T = T$ .

**Proposição A.17.** A  $k$ -ésima derivada temporal  $\partial_t^k(T_1 * \cdots * T_m)$  é uma soma de termos da forma

$$\partial_t^{i_1} T_1 * \partial_t^{i_2} T_2 * \cdots * \partial_t^{i_m} T_m * \partial_t^{j_1} R * \cdots * \partial_t^{j_l} R,$$

para algum  $l \geq 0$ , de forma que  $i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + \cdots + j_l + l = k$ .

*Demonstração.* Para  $k = 0$ , o resultado é trivial. Supondo verdadeiro para  $k$ , a derivada temporal do termo da forma dada será novamente um termo da forma dada com  $k + 1$  no lugar de  $k$ , pela proposição A.16. ■

## A.2 Limitação para a norma do tensor de curvatura

Estimamos pontualmente a norma do tensor curvatura de Riemann pela curvatura seccional máxima, em valor absoluto.

**Definição A.18.** Denotemos por  $K$  o máximo dos valores absolutos das curvaturas seccionais em um ponto. Ou seja,

$$K = \max |K_{\text{sec}}|,$$

onde o máximo é tomado sobre todos os planos tangentes ao ponto.

**Proposição A.19.** Existe  $C = C(n)$  tal que, em cada ponto de  $M$ ,

$$|R| \leq C(n)K.$$

A demonstração desta proposição segue dos seguintes lemas.

**Lema A.20.** Em qualquer base ortonormal  $\{e_i\}$ , temos

$$|R(e_i, e_j, e_i, e_k)| \leq 2K,$$

para quaisquer  $i, j$  e  $k$  distintos.

*Demonstração.* Fixados  $i, j$  e  $k$  distintos, defina

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{e_j + e_k}{\sqrt{2}} \\ v_k &= \frac{e_j - e_k}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Assim, se trocarmos  $e_j$  por  $v_j$  e  $e_k$  por  $v_k$  na base original, ainda teremos uma base ortonormal. Pela definição de  $K$ ,

$$|R(e_i, v_j, e_i, v_j)| \leq K.$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} R(e_i, v_j, e_i, v_j) &= R\left(e_i, \frac{e_j + e_k}{\sqrt{2}}, e_i, \frac{e_j + e_k}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}R(e_i, e_j + e_k, e_i, e_j + e_k) \\ &= \frac{1}{2}[R(e_i, e_j, e_i, e_j) + R(e_i, e_j, e_i, e_k) + R(e_i, e_k, e_i, e_k) + R(e_i, e_k, e_i, e_j)]. \end{aligned}$$

Como  $R(e_i, e_j, e_i, e_k) = R(e_i, e_k, e_i, e_j)$ , temos que

$$R(e_i, e_j, e_i, e_k) = R(e_i, v_j, e_i, v_j) - \frac{1}{2}[R(e_i, e_j, e_i, e_j) + R(e_i, e_k, e_i, e_k)].$$



Tomando a norma, pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |R(e_i, e_j, e_i, e_k)| &= \left| R(e_i, v_j, e_i, v_j) - \frac{1}{2}[R(e_i, e_j, e_i, e_j) + R(e_i, e_k, e_i, e_k)] \right| \\ &\leq |R(e_i, v_j, e_i, v_j)| + \frac{1}{2}|R(e_i, e_j, e_i, e_j) + R(e_i, e_k, e_i, e_k)| \\ &\leq K + K = 2K. \end{aligned}$$

■

**Definição A.21.**

$$S_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l) + R(e_i, e_l, e_k, e_j).$$

**Lema A.22.** Para  $i, j, k, l$ , todos distintos, vale

$$|S_{ijkl}| \leq 4K.$$

*Demonstração.* Procedendo como na demonstração do lema anterior, seja

$$v_j = \frac{e_j + e_l}{\sqrt{2}}$$

Usando o lema anterior e as simetrias do tensor de Riemann, temos

$$|R(e_i, v_j, e_k, v_j)| \leq K.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$R(e_i, v_j, e_k, v_j) = \frac{1}{2}[R(e_i, e_j, e_k, e_j) + R(e_i, e_l, e_k, e_l) + S_{ijkl}].$$

Obtemos o resultado desejado isolando  $S_{ijkl}$  e tomando sua norma. ■

**Lema A.23.** Para  $i, j, k, l$  todos distintos,

$$|R(e_i, e_j, e_k, e_l)| \leq 4K.$$

*Demonstração.* Da primeira identidade de Bianchi, obtemos

$$S_{ijkl} = 2R(e_i, e_l, e_k, e_j) - R(e_i, e_k, e_l, e_j).$$

Fazendo uma permutação nos índices  $l$  e  $k$ , obtemos

$$S_{ijlk} = 2R(e_i, e_k, e_l, e_j) - R(e_i, e_l, e_k, e_j).$$

Somando a segunda equação ao dobro da primeira, obtemos

$$3R(e_i, e_l, e_k, e_j) = 2S_{ijkl} + S_{ijlk}.$$

Finalmente, aplicando o lema anterior

$$3|R(e_i, e_l, e_k, e_j)| \leq 2 \cdot 4K + 4K = 12K,$$

de onde o resultado segue. ■

Podemos agora demonstrar a proposição A.19.

*Demonstração.* Temos que

$$|R|^2 = \sum_{i,j,k,l} (R(e_i, e_j, e_k, e_l))^2.$$

No somatório, excluindo-se os termos nulos, há  $2n(n-1)$  termos envolvendo dois índices distintos,  $4n(n-1)(n-2)$  termos envolvendo três índices distintos e  $n(n-1)(n-2)(n-3)$  termos envolvendo quatro índices distintos. Os termos que envolvem dois índices distintos são menores ou iguais a  $K^2$ . Para os demais termos da soma usamos os lemas anteriores para obter

$$|R|^2 \leq 2n(n-1)K^2 + 4n(n-1)(n-2) \cdot 4K^2 + n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 16K^2.$$

Daí,

$$|R|^2 \leq 2n(n-1)(8n^2 - 32n + 33)K^2.$$

■

**Observação A.24.** Da demonstração temos que  $C = \sqrt{2n(n-1)(8(n-2)^2 + 1)}$ .

**Observação A.25.** Escolhendo-se uma base ortonormal em que  $e_1$  e  $e_2$  gerem o plano de curvatura seccional máxima (em valor absoluto), obtemos  $|R|^2 \geq 2K^2$ , de onde  $|R| \geq \sqrt{2}K$ .

### A.3 Outras estimativas

No que segue, a operação  $*$  não depende dos campos tensoriais envolvidos, apenas de sua ordem e da própria equação.

#### A.3.1 Conexão e laplaciano

Seja  $A$  um campo tensorial em  $M$ . Temos que,

$$\nabla_X \nabla A(Y, -) = \nabla_X \nabla_Y A(-) - \nabla_{\nabla_X Y} A(-). \quad (\text{A.7})$$

Daí,

$$\nabla \nabla A(Y, X, -) - \nabla \nabla A(X, Y, -) = \nabla_Y \nabla_X A(-) - \nabla_X \nabla_Y A(-) + \nabla_{[X, Y]} A(-). \quad (\text{A.8})$$

Ou seja,

$$\nabla \nabla A(Y, X, -) - \nabla \nabla A(X, Y, -) = R(X, Y)A(-). \quad (\text{A.9})$$

Por outro lado,

$$\nabla_Y \nabla_X A(-) - \nabla_X \nabla_Y A(-) = A((\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) -) - [X, Y](A(-)), \quad (\text{A.10})$$

de forma que

$$R(X, Y)A(-) + A(R(X, Y)-) = 0, \quad (\text{A.11})$$

ou ainda,

$$\nabla\nabla A(Y, X, -) = \nabla\nabla A(X, Y, -) - A(R(X, Y)-). \quad (\text{A.12})$$

A igualdade acima é conhecida como *identidade de Ricci*.

Assim,

$$\begin{aligned} & g^{ij} \nabla\nabla\nabla A(e_i, e_j, X, -) \\ = & g^{ij} [\partial_i(\nabla\nabla A(e_j, X, -)) - \nabla\nabla A(\nabla_{e_i} e_j, X, -) - \nabla\nabla A(e_j, \nabla_{e_i} X, -) - \nabla\nabla A(e_j, X, \nabla_{e_i} -)] \\ = & g^{ij} [\partial_i(\nabla\nabla A(X, e_j, -) - A(R(e_j, X)-)) - \nabla\nabla A(X, \nabla_{e_i} e_j, -) + A(R(\nabla_{e_i} e_j, X)-) \\ & - \nabla\nabla A(\nabla_{e_i} X, e_j, -) + A(R(e_j, \nabla_{e_i} X)-) - \nabla\nabla A(X, e_j, \nabla_{e_i} -) + A(R(e_j, X)(\nabla_{e_i} -))] \\ = & g^{ij} [\nabla\nabla\nabla A(e_i, X, e_j, -) - \nabla A(e_i, R(e_j, X)-) - \\ & A(\nabla_{e_i}(R(e_j, X)-)) + A(R(\nabla_{e_i} e_j, X)-) + A(R(e_j, \nabla_{e_i} X)-) + A(R(e_j, X)(\nabla_{e_i} -))] \\ = & g^{ij} [\nabla\nabla\nabla A(X, e_i, e_j, -) - \nabla A(R(e_i, X)e_j, -) - \nabla A(e_j, R(e_i, X)-) - \nabla A(e_i, R(e_j, X)-) \\ & - A(\nabla_{e_i}(R(e_j, X)-)) + A(R(\nabla_{e_i} e_j, X)-) + A(R(e_j, \nabla_{e_i} X)-) + A(R(e_j, X)(\nabla_{e_i} -))] \\ = & \nabla\Delta A(X, -) + g^{ij} [-\nabla A(R(e_i, X)e_j, -) - \nabla A(e_j, R(e_i, X)-) - \nabla A(e_i, R(e_j, X)-)] \\ & - g^{ij} A((\nabla_{e_i} R)(e_j, X)-), \end{aligned}$$

onde foi usado que

$$\nabla\Delta A(X, -) = \nabla_X(g^{ij} \nabla\nabla A(e_i, e_j, -)) = g^{ij} \nabla\nabla\nabla A(X, e_i, e_j, -)$$

uma vez que a métrica é paralela e a derivada covariante comuta com contrações. Como a expressão inicial corresponde a  $\Delta\nabla A(X, -)$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta\nabla A(X, -) - \nabla\Delta A(X, -) &= \nabla A(Ric(X), -) \\ &+ g^{ij} (\nabla A(e_i, R(X, e_j)-) + \nabla A(e_j, R(e_i, X)-)) \\ &+ g^{ij} A((\nabla_{e_i} R)(X, e_j)-), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

que pode ser escrita na forma

$$\Delta\nabla A - \nabla\Delta A = \nabla A * R + A * \nabla R. \quad (\text{A.14})$$

### A.3.2 Conexão e derivada temporal

Sendo  $h = \partial_t g$ , verificam-se

$$\partial_t \langle X, Y \rangle = h(X, Y) + \langle \partial_t X, Y \rangle + \langle X, \partial_t Y \rangle \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_t (X(f)) = \partial_t X(f) + X(\partial_t f). \quad (\text{A.16})$$

Mais geralmente, se  $A$  é um campo tensorial,

$$\partial_t(A(-)) = (\partial_t A)(-) + A(\partial_t -). \quad (\text{A.17})$$

Definimos o campo tensorial  $\Gamma$  (a valores vetoriais) por

$$\Gamma(X, Y) = \partial_t(\nabla_X Y) - \nabla_{\partial_t X} Y - \nabla_X \partial_t Y. \quad (\text{A.18})$$

A bilinearidade é facilmente verificada. Supondo que os campos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  não dependem do tempo, e usando que

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X(\langle Y, Z \rangle) + Y(\langle X, Z \rangle) - Z(\langle X, Y \rangle) - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [Y, X], Z \rangle,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} 2\partial_t \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= 2h(\nabla_X Y, Z) + 2\langle \partial_t \nabla_X Y, Z \rangle \\ &= \nabla_X h(Y, Z) + \nabla_Y h(X, Z) - \nabla_Z h(X, Y) + 2h(\nabla_X Y, Z), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

de forma que

$$2\langle \Gamma(X, Y), Z \rangle = \nabla h(X, Y, Z) + \nabla h(Y, X, Z) - \nabla h(Z, X, Y). \quad (\text{A.20})$$

Por linearidade, a mesma equação vale para campos dependentes do tempo. Em particular, podemos escrever

$$\Gamma(X, Y) = X * Y * \nabla h. \quad (\text{A.21})$$

Vamos estender o resultado para 1-formas. Definimos

$$\Gamma(X, \omega) = \partial_t \nabla_X \omega - \nabla_{\partial_t X} \omega - \nabla_X \partial_t \omega. \quad (\text{A.22})$$

Sendo  $X$ ,  $Y$  e  $\omega$  independentes do tempo, usando a equação A.17, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(X, \omega)(Y) + \omega(\Gamma(X, Y)) &= (\partial_t \nabla_X \omega)(Y) + \omega(\partial_t \nabla_X Y) \\ &= \partial_t(\nabla_X \omega(Y)) + \omega(\partial_t \nabla_X Y) \\ &= \partial_t(X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)) + \omega(\partial_t \nabla_X Y) \\ &= -\partial_t(\omega(\nabla_X Y)) + \omega(\partial_t \nabla_X Y) = 0. \end{aligned}$$

Por linearidade, o resultado se estende a campos  $X$ ,  $Y$  e 1-forma  $\omega$  que dependem do tempo. Ou seja,

$$\Gamma(X, \omega)(Y) = -\omega(\Gamma(X, Y)). \quad (\text{A.23})$$

Em particular, podemos escrever

$$\Gamma(X, \omega) = X * \omega * \nabla h. \quad (\text{A.24})$$

Estendemos, também, a definição de  $\Gamma$  a um campo tensorial  $A$  qualquer:

$$\Gamma(X, A) = \partial_t \nabla_X A - \nabla_{\partial_t X} A - \nabla_X \partial_t A. \quad (\text{A.25})$$

Procedendo como no caso de 1-formas, obtemos

$$\Gamma(X, A)(-) = -A(\Gamma(X, -)). \quad (\text{A.26})$$

Em particular, se  $X$  é um campo que depende do tempo, obtemos

$$(\partial_t \nabla_X A - \nabla_X \partial_t A)(-) = -A(\Gamma(X, -)). \quad (\text{A.27})$$

Por outro lado, pela equação A.17,

$$(\partial_t \nabla_X A)(-) = \partial_t (\nabla_X A(-)) = \partial_t (\nabla A(X, -)) = (\partial_t \nabla A)(X, -), \quad (\text{A.28})$$

de forma que

$$(\partial_t \nabla A - \nabla \partial_t A)(X, -) = -A(\Gamma(X, -)). \quad (\text{A.29})$$

Portanto, pelas equações A.21 e A.24

$$\partial_t \nabla A - \nabla \partial_t A = A * \nabla h. \quad (\text{A.30})$$

No fluxo de Ricci, podemos escrever a expressão acima como

$$\partial_t \nabla A - \nabla \partial_t A = A * \nabla Ric, \quad (\text{A.31})$$

qualquer que seja o campo tensorial  $A$ . Usando  $B = \nabla^{k-1} A$  e usando A.30 com o campo  $B$ , obtemos

$$\partial_t \nabla^k A = \nabla \partial_t \nabla^{k-1} A + \nabla^{k-1} A * \nabla Ric. \quad (\text{A.32})$$

Usando o mesmo argumento para  $\partial_t \nabla^{k-1} A$ , e prosseguindo o argumento de maneira análoga, mostra-se que

$$\partial_t \nabla^k A = \nabla^k \partial_t A + \sum_{i+j=k-1} \nabla^i A * \nabla^{j+1} Ric. \quad (\text{A.33})$$

### A.3.3 Equações de evolução

Vamos supor que  $g = g(t)$  seja solução do fluxo de Ricci. Então  $\nabla h = \nabla \partial_t g = -2\nabla Ric$ . Portanto, para qualquer campo tensorial  $A$ ,

$$A * \nabla h = A * \nabla R. \quad (\text{A.34})$$

Suporemos que  $A$  satisfaz a equação de evolução da forma

$$\partial_t A = \Delta A + A * R. \quad (\text{A.35})$$

Então, pelas equações A.14 e A.30,

$$\begin{aligned}\partial_t \nabla A &= \nabla \partial_t A + A * \nabla h \\ &= \nabla(\Delta A + A * R) + A * \nabla R \\ &= \Delta \nabla A + \nabla A * R + A * \nabla R + \nabla A * R + A * \nabla R + A * \nabla R.\end{aligned}$$

Logo,

$$\partial_t \nabla A = \Delta \nabla A + \nabla A * R + A * \nabla R. \quad (\text{A.36})$$

Por indução em  $k$ , obtemos

$$\partial_t \nabla^k A = \Delta \nabla^k A + \sum_{j=0}^k \nabla^{k-j} A * \nabla^j R. \quad (\text{A.37})$$

O Hessiano da função  $\langle A, A \rangle$  satisfaz

$$(\nabla \nabla \langle A, A \rangle)(X, Y) = 2\langle \nabla_X \nabla_Y A - \nabla_{\nabla_X Y} A, A \rangle + 2\langle \nabla_X A, \nabla_Y A \rangle.$$

A partir da igualdade

$$\nabla \nabla A(X, Y, -) = \nabla_X \nabla_Y A(-) - \nabla_{\nabla_X Y} A(-)$$

obtemos, após tomar o traço,

$$\Delta \langle A, A \rangle = 2\langle \Delta A, A \rangle + 2|\nabla A|^2. \quad (\text{A.38})$$

Da equação A.35, obtemos

$$\partial_t |A|^2 = 2\langle \partial_t A, A \rangle = 2\langle \Delta A, A \rangle + 2\langle A * R, A \rangle. \quad (\text{A.39})$$

Logo,

$$\partial_t |A|^2 = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2\langle A * R, A \rangle. \quad (\text{A.40})$$

Sendo  $u_0 = |A|^2$ , obtemos

$$\partial_t u_0 \leq \Delta u_0 + C u_0 |R|, \quad (\text{A.41})$$

onde  $C$  é uma constante positiva que depende apenas da dimensão  $n$  da variedade 4 do formado específico da operação  $A * R$ . Analogamente, da equação A.37 e da equação A.38 (com  $\nabla^k A$  no lugar de  $A$ ), obtemos

$$\partial_t |\nabla^k A|^2 = \Delta |\nabla^k A|^2 - 2|\nabla^{k+1} A|^2 + 2\langle \nabla^k A * R, \nabla^k A \rangle + \sum_{j=1}^k \langle \nabla^{k-j} A * \nabla^j R, \nabla^k A \rangle. \quad (\text{A.42})$$

Sendo  $u_k = |\nabla^k A|^2$ , obtemos

$$\partial_t u_k \leq \Delta u_k + C u_k |R| + C \sqrt{u_k} \sum_{j=1}^k |\nabla^{k-j} A| \times |\nabla^j R|. \quad (\text{A.43})$$

### A.3.4 Estimativas

Lembramos o Princípio do Máximo fraco para escalares: se  $u$  satisfaz as desigualdades

$$\begin{cases} \partial_t u \leq \Delta u + \langle X, \nabla u \rangle + F(u, t) \\ u(0) \leq \alpha, \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

então  $u \leq \phi$  para todo  $t$ , onde  $\phi$  é a solução de

$$\begin{cases} \phi' = F(\phi, t) \\ \phi(0) = \alpha. \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

Sabemos que pela equação 3.3,  $R$  satisfaz a equação A.35. A desigualdade A.41 neste caso se torna

$$\partial_t |R| \leq \Delta |R|^2 + C|R|^{3/2},$$

onde  $C = C(n)$ . Seja  $M$  o máximo de  $|R|$  para  $t = 0$ . Podemos usar  $F(u, t) = Cu^{3/2}$ ,  $X = 0$  e  $\alpha = M^2$  nas desigualdades A.44. Neste caso,

$$\phi = \left( \frac{2M}{2 - MCt} \right).$$

Obtemos,

$$|R| \leq \frac{2m}{2 - MCt}. \quad (\text{A.46})$$

**Proposição A.26.** *Suponha que  $|R| \leq M$  no intervalo  $[0, 1/M]$ . Então, para cada  $k$ , existe constante  $C(k)$  (que depende também da dimensão  $n$  da variedade) tal que, no mesmo intervalo,*

$$|\nabla^k R| \leq \frac{C(k)M}{t^{k/2}}.$$

*Demonstração.* Por constantes entenderemos números positivos que dependem apenas da dimensão  $n$  e de parâmetros explicitamente indicados.

Sejam  $v_k = |\nabla^k R|^2$ ,  $k \geq 0$ . O resultado é verdadeiro por hipótese para  $k = 0$ . Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para  $j < k$ . Seja

$$v = t^k v_k + a_{k-1} t^{k-1} v_{k-1} + \cdots + a_1 t v_1 + a_0 v_0 = \sum_{j=0}^k a_j t^j v_j,$$

onde  $a_k = 1$  e  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  são constantes a serem escolhidas. Temos

$$\partial_t v = \sum_{j=1}^k j a_j t^{j-1} v_j + \sum_{j=0}^k a_j t^j \partial_t v_j.$$

Usando a equação A.42, obtemos, para certas constantes  $D(j)$  e  $E(j)$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t v \leq & \Delta v - 2t^k v_{j+1} + \sum_{j=1}^k (ja_j - 2a_{j-1})t^{j-1}v_j \\ & + \sqrt{v_0} \sum_{j=0}^k D(j)a_j t^j v_j + \sum_{j=2}^k E(j)t^j a_j \sum_{l=1}^{j-1} \sqrt{v_{j-l}} \sqrt{v_j} \sqrt{v_j}. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t v \leq & \Delta v + \sum_{j=1}^k (ja_j - 2a_{j-1} + MtD(j)a_j)t^{j-1}v_j \\ & + \sum_{j=2}^k E(j)a_j t^{j/2} \sum_{l=1}^{j-1} C(j-l)C(l)M^2 \sqrt{v_j}. \end{aligned}$$

Escolhemos os  $a_j$  de forma que

$$2a_{j-1} \geq ja_j + D(j)a_j \geq ja_j + MtD(j)a_j,$$

pois  $Mt \leq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \partial_t v \leq & \Delta v + \sum_{j=2}^{k-1} E(j)C(j)a_j M^3 \sum_{l=1}^{j-1} C(j-l)C(l) \\ & + E(k)t^{k/2} \sum_{l=1}^{k-1} C(k-l)C(l)M^2 \sqrt{v_k}. \end{aligned}$$

Como  $t^k v_k \leq v$ , podemos reescrever a desigualdade acima na forma

$$\partial_t v \leq \Delta v + F(k)M^2(\sqrt{v} + G(k)M).$$

Como  $v(0) = a_0 v_0(0) \leq a_0 M^2$ , aplicamos o Princípio do Máximo fraco para escalares com a solução de

$$\begin{cases} \phi' = F(k)M^2(\sqrt{\phi} + G(k)M) \\ \phi(0) = a_0 M^2. \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Obtemos a solução dada implicitamente por

$$2(\sqrt{\phi} - \sqrt{a_0}M) = F(k)M^2 t + 2G(k)M \ln \left( \frac{\sqrt{\phi} + G(k)M}{\sqrt{a_0}M + G(k)M} \right).$$

É fácil verificar que, para  $x \geq A > 0$

$$\ln \left( \frac{1+x}{1+A} \right) \leq \frac{x}{1+A}.$$



Aplicamos o resultado para  $x = \sqrt{\phi}/[G(k)M]$  e  $A = \sqrt{a_0}/G(k)$  (como  $\phi' > 0$ , a hipótese  $x \geq A$  é satisfeita). Obtemos

$$2(\sqrt{\phi} - \sqrt{a_0}M) \leq F(k)M^2t + 2\left(\frac{G(k)}{\sqrt{a_0} + G(k)}\right).$$

Daí,

$$2\left(\frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_0} + G(k)}\right)\sqrt{\phi} \leq F(k)M^2t + 2\sqrt{a_0}M \leq (F(k) + 2\sqrt{a_0})M.$$

Podemos escrever a desigualdade acima na forma  $\sqrt{\phi} \leq C(k)M$ . Portanto, pelo Princípio do Máximo fraco,  $t^k v_k \leq v \leq \phi \leq C(k)^2 M^2$ , de onde o resultado segue. ■

Suponha agora que  $A$  satisfaça a equação A.35.

**Proposição A.27.** *Suponha que  $|R| \leq M$  e  $|A| \leq N$  no intervalo  $[0, 1/M]$ . Então, para cada  $k$ , existe constante  $\tilde{C}(k)$  (que depende da dimensão  $n$  da variedade e da equação satisfeita por  $A$ ) tal que, no mesmo intervalo,*

$$|\nabla^k A| \leq \frac{\tilde{C}(k)N}{t^{k/2}}.$$

*Demonstração.* Sejam  $u_k = |\nabla^k A|^2$ ,  $k \geq 0$ . O resultado é verdadeiro por hipótese para  $k = 0$ . Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para  $j < k$ . Seja

$$u = t^k u_k + a_{k-1} t^{k-1} u_{k-1} + \cdots + a_1 t u_1 + a_0 u_0 = \sum_{j=0}^k a_j t^j u_j,$$

onde  $a_k = 1$  e  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  são constantes a serem escolhidas. Temos

$$\partial_t u = \sum_{j=1}^k j a_j t^{j-1} u_j + \sum_{j=0}^k a_j t^j \partial_t u_j.$$

Usando a equação A.42, obtemos, para certas constantes  $D(j)$  e  $E(j)$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t u &\leq \Delta u - 2t^k u_{j+1} + \sum_{j=1}^k (j a_j - 2a_{j-1}) t^{j-1} u_j + \sqrt{v_0} \sum_{j=0}^k D(j) a_j t^j u_j \\ &\quad + \sum_{j=2}^k E(j) t^j a_j \sum_{l=1}^{j-1} \sqrt{u_{j-l}} \sqrt{u_j} \sqrt{v_l}, \end{aligned}$$

onde os  $v_j$  são como na proposição A.26. Pela hipótese de indução, e pela proposição A.26, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t u &\leq \Delta u \sum_{j=1}^k (j a_j - 2a_{j-1} + M t D(j) a_j) t^{j-1} u_j \\ &\quad + \sum_{j=2}^k E(j) a_j t^{j/2} \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{C}(j-l) C(l) M N \sqrt{u_j}. \end{aligned}$$

Escolhemo os  $a_j$  de forma que

$$2a_{j-1} \geq ja_j + D(j)a_j \geq ja_j + MtD(j)a_j,$$

pois  $Mt \leq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \partial_t u &\leq \Delta u + \sum_{j=2}^{k-1} E(j)\tilde{C}(j)a_j MN^2 \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{C}(j-l)C(l) \\ &\quad + E(k)t^{k/2} \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{C}(k-l)C(l)MN\sqrt{u_k}. \end{aligned}$$

Como  $t^k u_k \leq u$ , podemos reescrever a desigualdade acima na forma

$$\partial_t u \leq \Delta u + F(k)MN(\sqrt{v} + G(k)N).$$

Como  $u(0) = a_0 u_0(0) \leq a_0 N^2$ , aplicamos o Princípio do Máximo fraco com a solução de

$$\begin{cases} \phi' = F(k)MN(\sqrt{\phi} + G(k)N) \\ \phi(0) = a_0 N^2. \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

O resultado segue como na proposição A.26. ■

**Corolário A.28.** Para  $\delta/2 \leq t \leq \delta = 1/M$ , temos

$$|\nabla^k A| \leq \delta^{-k/2} 2^{k/2} \tilde{C}(k)N.$$

### A.3.5 Derivadas de ordem superior

**Proposição A.29.** Suponha  $|R| \leq M$  no intervalo  $[0, 1/M]$ . Então para cada  $k$  e cada  $j$ , existe constante  $C(k, j)$  (que depende também da dimensão  $n$ ) tal que, no mesmo intervalo,

$$|\partial_t^j \nabla^k R| \leq \frac{C(k, j)M}{t^{j+k/2}}.$$

*Demonstração.* Por indução em  $j$ . Se  $j = 0$ , esta é a proposição A.26. No passo indutivo, temos, pela equação A.37,

$$\partial_t^{j+1} \nabla^k R = \partial_t \left( \Delta \nabla^k R + \sum_{i=0}^k \nabla^{k-i} R * \nabla^i R \right) = \partial_t^j \left( \nabla^{k+2} R * g + \sum_{i=0}^k \nabla^{k-i} R * \nabla^i R \right).$$

Aplicamos agora a proposição A.17. O termo típico de  $\partial_t^j (\nabla^{k+2} R * g)$  será da forma

$$\partial_t^i \nabla^{k+2} R * \partial_t^{j_1} R * \dots * \partial_t^{j_l} R$$

com  $i + j_1 + \dots + j_l + l = j$ . Pela hipótese de indução, e pelo item (b) da proposição A.11, temos que sua norma será menor ou igual a

$$C \times \frac{C(i, k+2)M}{t^{i+(k+2)/2}} \times \frac{C(j_1, 0)M}{t^{j_1}} \times \dots \times \frac{C(j_l, 0)M}{t^{j_l}},$$

onde  $C$  depende apenas na dimensão  $n$  (os demais parâmetros estão pré-determinados). Note que

$$\frac{M^{l+1}}{t^{i+j_1+\dots+j_l+(k+2)/2}} = \frac{M^{l+1}t^l}{t^{j+1+k/2}} \leq \frac{M}{t^{j+1+k/2}},$$

pois  $Mt \leq 1$ . Assim, existe constante  $D(j+1, k)$  tal que a estimativa acima pode ser escrita na forma  $D(j+1)M/(t^{j+1+k/2})$ . Consideremos agora um termo típico de  $\partial_t^j(\nabla^{k-i}R * \nabla^i R)$  que é da forma

$$\partial_t^{i_1}\nabla^{k-i}R * \partial_t^{i_2}\nabla^i R * \partial_t^{j_1}R * \dots * \partial_t^{j_l}R,$$

com  $i_1 + i_2 + j_1 + \dots + j_l + l = j$ . Procedendo como no caso anterior, obtemos uma estimativa para sua norma da forma

$$C \times \frac{C(i_1, k-i)M}{t^{i_1+(k-i)/2}} \times \frac{C(i_2, i)M}{t^{i_2+i/2}} \times \frac{C(j_1, 0)M}{t^{j_1}} \times \dots \times \frac{C(j_l, 0)M}{t^{j_l}}.$$

Note que

$$\frac{M^{l+2}}{t^{i_1+i_2+j_1+\dots+j_l+k/2}} = \frac{M^{l+2}t^{l+1}}{t^{j+1+k/2}} \leq \frac{M}{t^{j+1+k/2}},$$

novamente porque  $Mt \leq 1$ . Assim, a estimativa é semelhante à obtida no caso anterior, com uma nova constante  $D(j+1, k)$ . Considerando o somatório com todos os termos envolvidos, chegamos ao resultado final. ■

Usando a equação do fluxo de Ricci e escrevendo  $Ric = g * R$ , obtemos como corolário da proposição A.29 que

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k Ric \right| \leq \frac{CM}{t^{j+k/2}}. \quad (\text{A.49})$$

Como  $|Rm| < M$  e  $Ric = g * Rm$ , segue que  $|Ric| \leq |g||Rm| \leq nM$ . Também, como  $\nabla g = 0$ , segue que  $\nabla^k Ric = \nabla^k(g * Rm) = g * \nabla^k Rm$ . Além disso, a cada derivada temporal de  $g$ , podemos substituir  $\partial_t g$  por  $-2Ric$ . E cada derivada temporal de  $Ric$  podemos substituir  $\partial_t(Ric)$  por  $\partial_t(g * Rm) = Ric * Rm + g * \partial_t Rm$ . Desta forma,  $\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k Ric \right|$  é uma soma cujas parcelas tem uma limitação da forma  $\frac{CM}{t^{j+k/2}}$ , de onde o resultado segue. Vejamos um exemplo com  $l = 2$  e  $k = 3$ . Temos que, pelo teorema A.29

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^3 R \right| \leq \frac{CM}{t^{j+k/2}}.$$

Como vimos,  $\nabla^3 Ric = g * \nabla^3 R$ . Derivando uma vez com respeito a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^3 Ric &= \frac{\partial}{\partial t} (g * \nabla^3 R) \\ &= \partial_t g * \nabla^3 R + g * \partial_t \nabla^3 R \\ &= Ric * \nabla^3 R + g * \partial_t \nabla^3 R. \end{aligned}$$

Derivando novamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^3 Ric &= \partial_t Ric * \nabla^3 R + Ric * \partial_t \nabla^3 R + \partial_t g * \partial_t \nabla^3 R + g * \partial_t^2 \nabla^3 R \\
 &= \partial_t Ric * \nabla^3 R + Ric * \partial_t \nabla^3 R + g * \partial_t^2 \nabla^3 R \\
 &= (Ric * R + g * \partial_t R) * \nabla^3 R + Ric * \partial_t \nabla^3 R + g * \partial_t^2 \nabla^3 R,
 \end{aligned}$$

onde todas as parcelas estão limitadas por parcelas da forma  $\frac{CM}{t^{j+k/2}}$ , tanto pela proposição A.29 como pelo fato de  $|Ric| \leq nM$ .

## A.4 Solução da equação de Bernoulli

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não-linear da forma

$$y'(x) = g(x)y(x) + h(x)[y(x)]^n \quad (\text{A.50})$$

é conhecida como equação de Bernoulli. Apesar de ser uma equação não-linear, podemos fazer uma substituição apropriada para transformar A.50 em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que seja linear na nova função. Resolvendo esta nova equação diferencial, podemos usar a relação usada na substituição feita para achar soluções do problema original.

Primeiramente fazemos a substituição  $v(x) = [y(x)]^{1-n}$  e derivamos  $v$  com respeito a  $x$ , obtendo

$$v'(x) = (1-n)[y(x)]^{-n}y'(x). \quad (\text{A.51})$$

Resolvendo em  $y'(x)$ , obtemos

$$y'(x) = \frac{[y(x)]^n}{1-n}v'(x). \quad (\text{A.52})$$

Substituindo a equação A.52 na equação original A.50, obtemos

$$\frac{[y(x)]^n}{1-n}v'(x) = g(x)y(x) + h(x)[y(x)]^n. \quad (\text{A.53})$$

Dividindo ambos os lados da equação A.53 por  $\frac{[y(x)]^n}{1-n}$ , temos

$$\begin{aligned}
 v'(x) &= (1-n)g(x)[y(x)]^{1-n} + (1-n)h(x) \\
 &= (1-n)g(x)v(x) + (1-n)h(x),
 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear em  $v(x)$ . Resolvendo para  $v(x)$ , encontramos  $y(x)$  através de

$$y(x) = [v(x)]^{\frac{1}{1-n}}. \quad (\text{A.55})$$

**Exemplo A.30.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x)y(x) - [y(x)]^2 \\ y(0) &= \alpha > 0. \end{aligned}$$

O objetivo será mostrar que este problema admite como solução uma função  $y(x)$  que é positiva. Note que esta equação diferencial ordinária não-linear de primeira ordem é uma equação de Bernoulli com  $n = 2$  e  $h(x) = -1$ . Pelo que foi feito anteriormente, se fizermos a substituição  $v(x) = \frac{1}{y(x)}$ , obtemos a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem em  $v(x)$ :

$$v'(x) = -g(x)v(x) + 1.$$

Isto é,

$$v'(x) + g(x)v(x) = 1 > 0. \quad (\text{A.56})$$

Definindo uma nova função  $\eta(x)$  por

$$\eta(x) = e^{\int_0^x g(s)ds}$$

e multiplicando ambos os lados de A.56 por  $\eta(x)$  obtemos

$$\eta(x)v'(x) + \eta(x)g(x)v(x) > 0.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dx}(\eta(x)v(x)) > 0.$$

Como a função  $\eta(x)v(x)$  é crescente, vale

$$\eta(x)v(x) \geq \eta(0)v(0) = v(0) > 0,$$

pois  $v(0) = \frac{1}{y(0)} > 0$ . Como  $\eta(x)$  é uma função positiva vale, ao dividir a desigualdade acima por  $\eta(x)$ ,  $v(x) > 0$ . Segue, que  $y(x) > 0$ .

---

## Referências

---

- [1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Number 140 in Pure and Applied Mathematics. Elsevier, 2003.
- [2] Ben Andrews and Christopher Hopper. *Ricci Flow in Riemannian Geometry: A Complete Proof of the Differentiable  $1/4$ -Pinching Sphere Theorem*. Springer, 2011.
- [3] Thierry Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer, 1998.
- [4] Simon Brendle. *Ricci Flow and the Sphere Theorem*. Number 111 in Graduate Studies in Mathematics. AMS, United States of America, 2010.
- [5] Fernando Codá Marques. *Uma introdução ao Fluxo de Ricci*. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [6] Dennis DeTurck. Deforming metrics in the direction of their ricci tensors. *J. Differential Geometry*, (18), 1983.
- [7] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Riemanniana*. SBM, Rio de Janeiro, 2008.
- [8] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, Rio de Janeiro, 2010.
- [9] J. Eells and H. Sampson. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *Amer. J. Math*, (86), 1964.
- [10] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Germany, 1987.
- [11] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing, United States of America, 2010.
- [12] Richard Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature. *J. Differential Geometry*, (17), 1982.

- [13] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, Berlin, 1998.
- [14] Elon Lages Lima. *Álgebra Exterior*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [15] Serge Lang. *Álgebra Linear*. Edgar Blücher, São Paulo, 1971.
- [16] John M. Lee. *Riemannian Manifolds*. Number 176 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1997.
- [17] B O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [18] Grigori Perel'man. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>, 2002.
- [19] Grigori Perel'man. Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245>, 2003.
- [20] Grigori Perel'man. Ricci flow with surgery on three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>, 2003.
- [21] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Brasil, 1979.
- [22] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations III - Nonlinear Equations*. Number 117 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 2010.
- [23] Peter Topping. *Lectures on the Ricci Flow*. Cambridge University Press, 2006.