MATEMÁTICA DAS COISAS

EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS

APLICAÇÕES EM FINANÇAS E ECONOMIA

RELATÓRIO REALIZADO POR:
GONÇALO CASTRO A107337
LUÍS FELÍCIO A106913
RICARDO NEVES A106850
RAFAEL SILVA A107289
CARLOS CUNHA A106910
DIOGO COSTA A107328
JOSÉ PINTO A107287

2023/2024

RESOLUÇÃO

01. $$p(n+1) = Ap(n) + B <=> f(x_n) = A(x_n) + B$$

$$p(n+1) \qquad -sv/sc \qquad p(n) \qquad (bc-bv)/sc$$

R.: Podemos reescrever a equação (2) da segunte maneira :

$$x_{n+1} = Ap(n) + B$$

Onde:

- Xn é p(n), ou seja, é o preço no ano n;
- A e B são os coeficientes **-sv/sc** e **(bc-bv)/sc**, respetivamente;
- f (Xn) é a mudança de preço de um ano para o próximo.

02.

$$p(n+1) = p(n) \Leftrightarrow p\,(n) = -\frac{Sv}{Sc} \times p(n) + \frac{(bc-bv)}{Sc} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(n)(\frac{1+Sv}{Sc}) = \frac{bc-bv}{Sc} \Leftrightarrow p(n) = \frac{\frac{bc-bv}{Sc}}{\frac{Sc+Sv}{Sc}} \Leftrightarrow p(n) = \frac{bc-bv}{Sc+Sv}$$

R.: Os pontos de equilíbrio são : $\frac{bc-bv}{Sc+Sv}$

03.

$$Sv \times p(n) + bv = -Sc \times p(n) + bc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Sv + Sc) \times p(n) = bc - bv \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(n) = \frac{bc-bv}{Sc+Sv}$$

R.: Confirmando o resultado de 02. : $p(n) = \frac{bc-bv}{Sc+Sv}$

04.

$$p\,(0) = p_0$$

$$p\,(1) = Ap_0 + B$$

$$p(2) = Ap(1) + B \Leftrightarrow p(2) = A(Ap_0 + B) + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(2) = A^2 p_0 + AB + B$$

$$p\left(3\right)=Ap\left(2\right)+B\Leftrightarrow p\left(3\right)=A\left(A^2p_0+AB+B\right)+B\Leftrightarrow$$
$$p\left(3\right)=A^3p_0+A^2B+AB+B$$
$$p\left(4\right)=Ap\left(3\right)+B\Leftrightarrow p\left(4\right)=A\left(A^3p_0+A^2B+AB+B\right)+B\Leftrightarrow$$
$$p\left(4\right)=A^4p_0+A^3B+A^2B+AB+B$$

05.

Apartir do que realizámos em 04.:

$$p\left(n\right)=A^np_0+A^{n-1}B...AB+B$$

R.: A fórmula de p(n) é: $p\left(n\right)=A^np_0+B\left(A^{n-1}+A^{n-2}...A^0\right)$

06.

$B\frac{1-A^n}{1-A}=$ soma dos n primeiros elementos da $PG=B\times A^{n-1}$
a qual vai resultar em $B\times\left(A^{n-1}+A^{n-2}+...A^0\right)$

$$p\left(n\right)=A^np_0+B\left(A^{n-1}+A^{n-2}...A^0\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$p\left(n\right)=A^np_0+B\frac{1-A^n}{1-A}$$

07.

De modo a classificar a estabilidadde dos pontos de equílibrio necessitamos de determinar a derivada de f(Xn) variando os valores de A e tendo em conta os critérios do Teorema 1 conseguimos classificar a estabilidade:

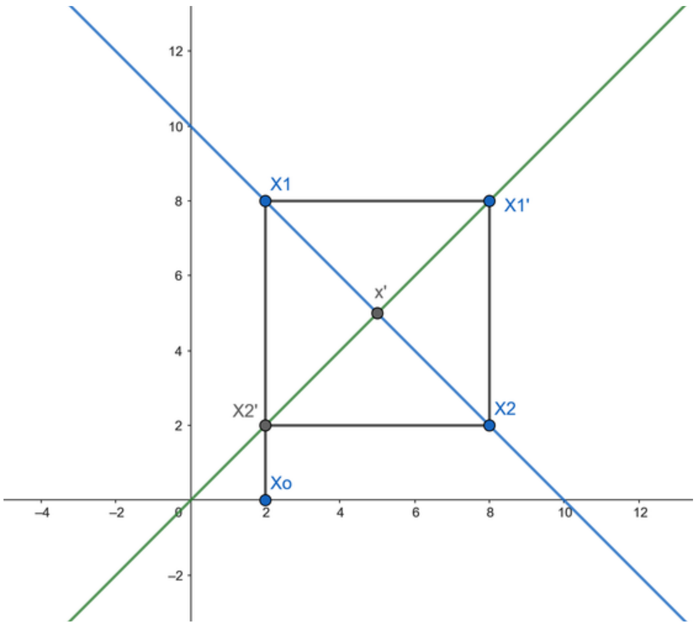
CASO 1 $\rightarrow -1<A<0\Leftrightarrow p<\left|A\right|<1$

Se $\left|f^{'}\left(x_n\right)\right|=\left|A\right|<1$ o ponto de equilíbrio é assimptoticamente estável

CASO 2 $\rightarrow A<-1\Leftrightarrow\left|A\right|>1$

Se $\left|f^{'}\left(x_n\right)\right|=\left|A\right|>1$ o ponto de equilíbrio é instável

CASO 3 $\rightarrow A = -1 \Leftrightarrow |A| = 1$



Podemos observar que os pontos assumem sempre os mesmos dois valores, logo não podemos afirmar a estabilidade do ponto de equilíbrio utilizando os critérios ou o método da teia de aranha.

08.

Atendendo à expressão obtida no exercício 3, $p(n) = A^n p_0 + B\frac{1-A^n}{1-A}$ calculamos para cada caso, o limite quando n tende para $+\infty$, ou seja, vamos tentar ver o que acontece a $p(n)$ no futuro

CASO 1 $\rightarrow -1 < A < 0$

Neste caso, A^n tende a 0 à medida que n aumenta, porque A é uma fração negativa e o seu expoente positivo n está a aumentar. Isso significa que $A^n p_0$ também tende a 0. Portanto, a expressão de $p(n)$ vai se reduzir a **B / (1 - A)** à medida que n se aproxima do infinito.

CASO 2 $\rightarrow A < -1$

Neste caso, A^n oscilará entre valores positivos e negativos muito grandes à medida que n aumenta, porque A é negativo e menor que -1. Isso significa que A^n não terá um limite à medida que n se torna muito grande, e portanto, o preço $p(n)$ também oscilará e não terá um limite estável.

CASO 3 $\rightarrow A = -1$

Neste caso A^n alternará entre -1 e 1 dependendo se n é par ou ímpar. Isso vai levar a uma sequência de preços que alterna entre dois valores diferentes e não se estabiliza num valor único.

- No Caso 1, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, pois o preço estabiliza-se em um valor fixo.
- No Caso 2, o ponto de equilíbrio é instável, pois o preço não se estabiliza e continua a oscilar.
- No Caso 3, não podemos falar em estabilidade tradicional, pois o sistema oscila entre dois valores sem convergir para um único ponto de equilíbrio.

09.

a) Agora que possuimos conhecimento do valor das constantes sv = 3 , bv = 1 , sc = 1 , bc = 9, podemos descobrir o valor de A e correspondê-lo ao caso correto.

R.: Como A = - sv/sc = - 3/1 = -3, logo o valor de A corresponde ao :

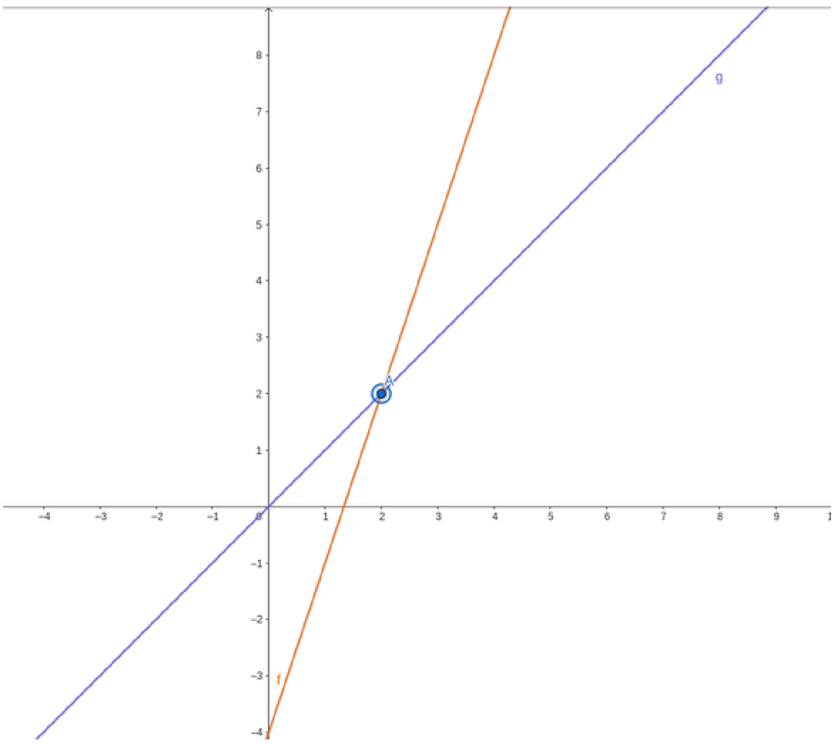
CASO 2 $\rightarrow A < -1$

b) A fórmula do preço de equilíbrio foi calculada e determinada no exercício 3, onde se obteve

$$p(n) = \frac{bc - bv}{Sc + Sv}$$

Sendo assim, substituindo o valor das constantes que agora conhecemos, o valor do preço de equílibrio é portanto:

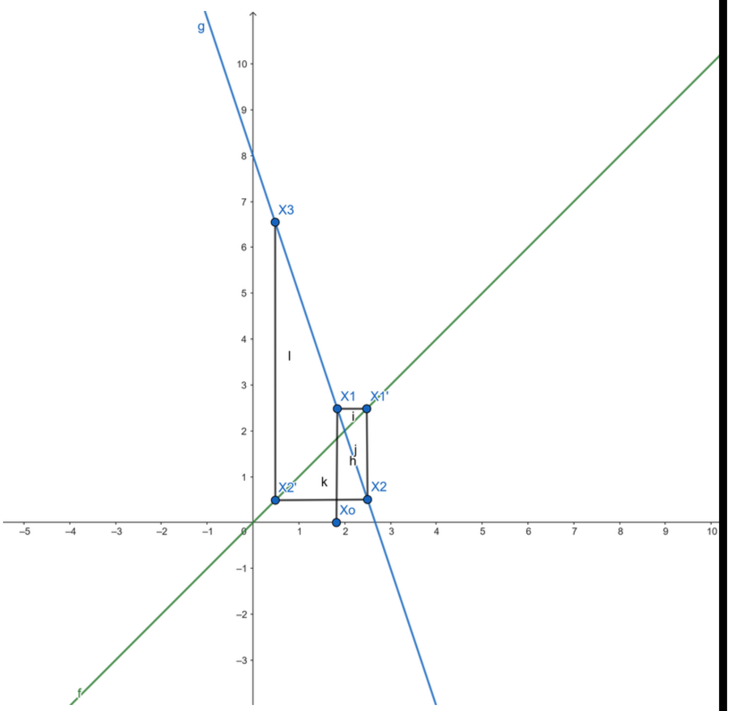
$$p\left(n\right) = \frac{9-1}{1+3} = \frac{8}{4} = 2$$



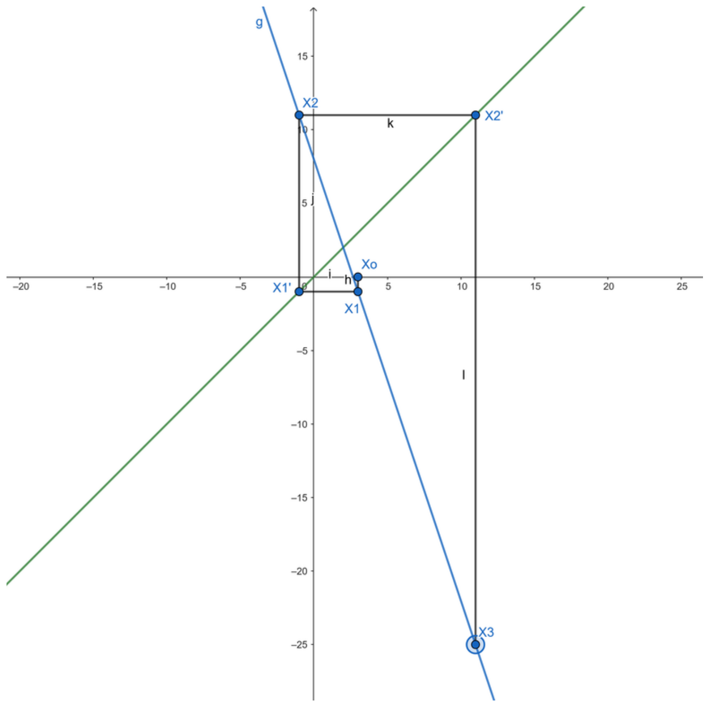
A interseção entre as funções y = x (bissetriz dos quadrantes ímpares e p(n+1) retrata o ponto de equilíbrio descoberto onde p(n) = 2.

c)

$Quando: p_0 = 1.8$



$Quando: p_0 = 3$



R.: Como podemos visualizar nos gráficos acima , os pontos referentes ao preço afastam-se do preço de equílibrio com o aumentar de n, ou seja o ponto de equilíbrio é instável.