Matemática das Coisas

Parte 1

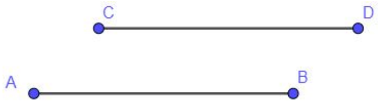
Cálculo de distâncias inacessíveis

Aula de 19 de Setembro de 2023

José Joaquim Martins Oliveira

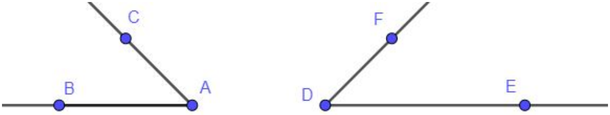
Congruência de triângulos

- Dois segmentos de recta, $[AB]$ e $[CD]$, dizem-se <u>*congruentes*</u> se têm o mesmo comprimentos, i.e. $\overline{AB} = \overline{CD}$.



  Representa-se por $[AB] \cong [CD]$.

- Dois ângulos, $\angle CAB$ e $\angle EDF$, dizem-se <u>*congruentes*</u> se têm a mesma medida, i.e. $m(\angle CAB) = m(\angle EDF)$.



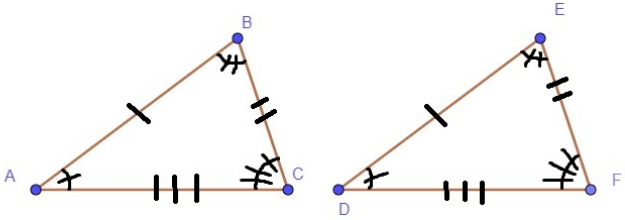
  Representa-se por $\angle CAB \cong \angle EDF$.

Congruência de triângulos

- Dois triângulos, $\triangle ACB$ e $\triangle DFE$, dizem-se *congruentes* se existe uma correspondência entre os vértices

$$(\text{Na figura} \quad A \mapsto D, \quad C \mapsto F \quad \text{e} \quad B \mapsto E)$$

tal que ângulos e lados correspondentes são congruentes.



Na figura $[AB] \cong [DE]$, $[BC] \cong [EF]$, $[CA] \cong [FD]$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$.
Representa-se por $\triangle ACB \cong \triangle DFE$.

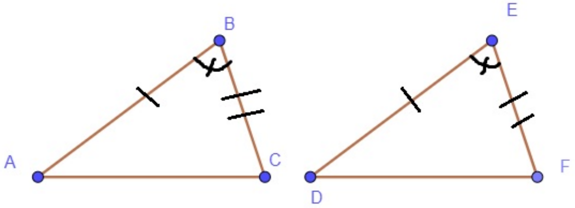
Critérios de congruência de triângulos

- **Critério LAL**

  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

tal que $[AB] \cong [DE]$, $\angle B \cong \angle E$ e $[BC] \cong [EF]$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

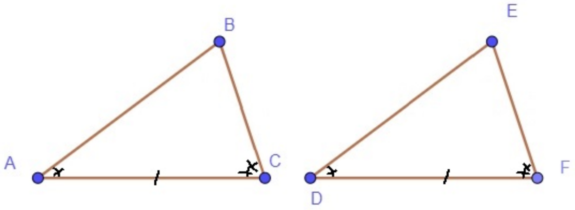


Critérios de congruência de triângulos

- **Critério ALA**
  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

tal que $\angle A \cong \angle D$, $[AC] \cong [DF]$, e $\angle C \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



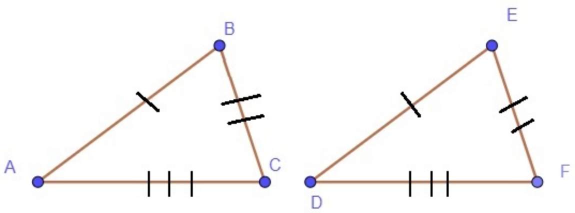
Critérios de congruência de triângulos

- **Critério LLL**

  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

tal que $[AB] \cong [DE]$, $[AB] \cong [CD]$ e $[BC] \cong [EF]$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



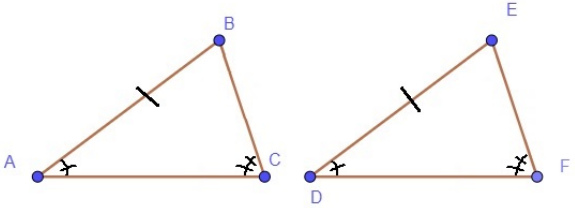
Critérios de congruência de triângulos

- **Critério LAA**

  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

  tal que $[AB] \cong [DE]$, $\angle A \cong \angle D$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



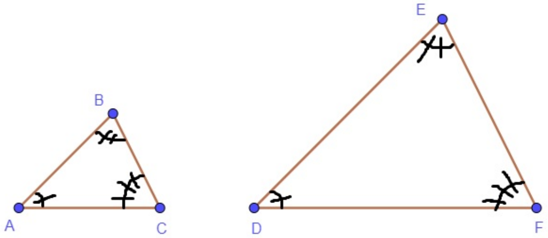
- Verifique que **ALL** e **AAA** não são critérios de congruência de triângulos.

Semelhança de triângulos

- Dois triângulos, $\triangle ACB$ e $\triangle DFE$, dizem-se *semelhantes* se existe uma correspondência entre os vértices

$$(\text{Na figura} \quad A \mapsto D, \quad C \mapsto F \quad \text{e} \quad B \mapsto E)$$

tal que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais.



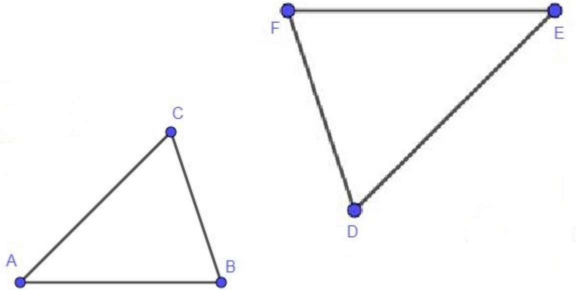
Na figura $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \qquad \left(\underline{\text{razão de semelhança:}} \;\; r = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\right).$$

Representa-se por $\triangle ACB \sim \triangle DFE$.

Semelhança de triângulos

- Exemplo: Considere-se os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle DFE$,



Onde $\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle D$ e

$$\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 3, \overline{AC} = 3.42, \overline{EF} = 5.2, \overline{DE} = 4.446, \overline{DF} = 3.9$$

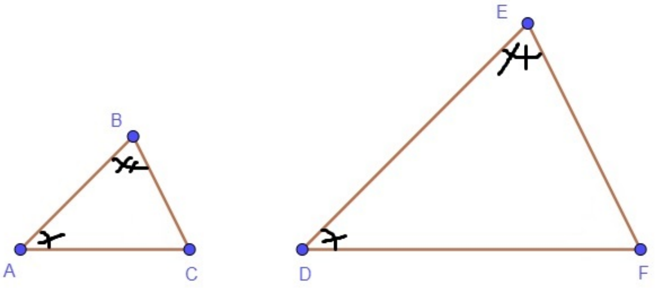
Verifique que os triângulos são semelhantes, identificando a razão de semelhança.

Critérios de semelhança de triângulos

- **Critério AA**
  Se dois triângulos têm, de um para o outro, dois ângulos congruentes, então são semelhantes.
- **Exemplo** Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, em que

$$\angle A \cong \angle D \quad \text{e} \quad \angle B \cong \angle E$$

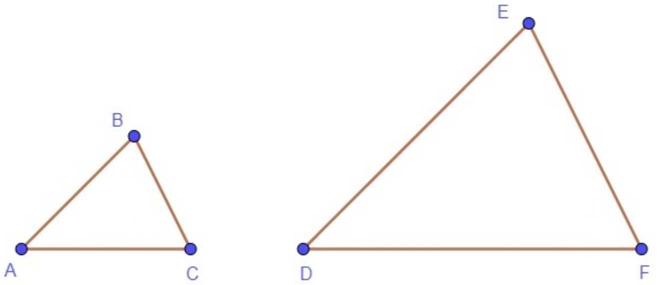
então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



- Razão de semelhança de $\triangle ABC$ para $\triangle DEF$: $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$.

Critérios de semelhança de triângulos

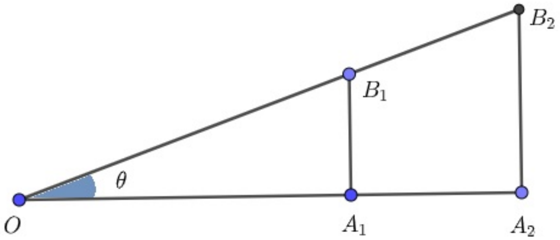
- **Critério LAL**
  Se dois triângulos têm, de um para o outro, um ângulo congruente e os correspondentes lados adjacentes proporcionais, então são semelhantes.
- **Critério LLL**
  Se dois triângulos têm, de um par ao outro, todos os lados proporcionais, então são semelhantes.



Razões trigonométricas

- Considere os $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ em que

$$m(\angle OA_2B_2) = m(\angle OA_1B_1) = 90^\circ \quad \text{e} \quad \theta = m(\angle A_2OB_2) \in]0^\circ, 90^\circ[.$$

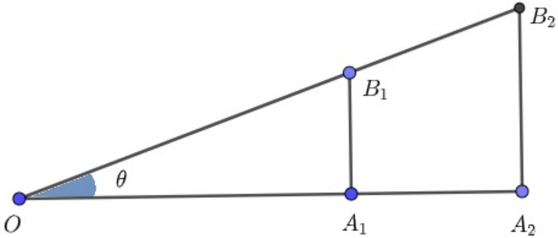


- Pelo critério **AA** da semelhança de triângulos

$$\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$$

Razões trigonométricas

- Tendo-se $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$, então

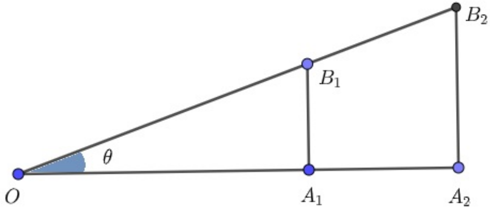


$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}$$

- Assim obtêm-se as razões trigonométricas
  - $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$;
  - $\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$;
  - $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$;
  - $\frac{\overline{OA_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
  - $\frac{\overline{OB_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
  - $\frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$.

Razões trigonométricas

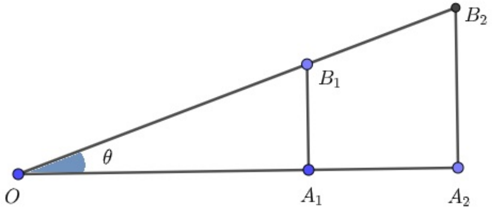
- Para $\theta \in]0°, 90°[$, define-se:
  1. Seno de θ como sendo a razão $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$, denotando-se por $\operatorname{sen}(\theta)$;
  2. Cosseno de θ como sendo a razão $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$, denotando-se por $\cos(\theta)$;
  3. Tangente de θ como sendo a razão $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$, denotando-se por $\operatorname{tg}(\theta)$;



Razões trigonométricas

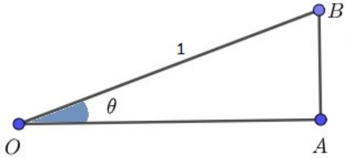
- Para $\theta \in]0°, 90°[$, define-se:

4. Cotangente de θ como sendo a razão $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$, denotando-se por $\operatorname{cotg}(\theta)$;
5. Secante de θ como sendo a razão $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$, denotando-se por $\sec(\theta)$;
6. Cossecante de θ como sendo a razão $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$, denotando-se por $\operatorname{cosec}(\theta)$.



Fórmula fundamental da trigonometria

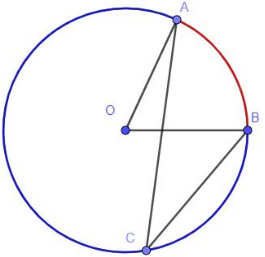
- Considere-se um triângulo rectângulo $\triangle OAB$ com a hipotenusa medindo uma unidade, $\overline{OB} = 1$:



1. Assim tem-se
$$\cos(\theta) = \overline{OA} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \overline{AB}.$$
2. Pelo teorema de Pitágoras, tem-se
$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$
3. Donde se obtém a chamada fórmula fundamental da trigonometria:
$$1 = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta), \qquad \theta \in]0°, 90°[$$

Propriedades da Circunferência

- Chama-se ângulo ao centro de uma circunferência a qualquer ângulo cujo vértice coincide com o centro.
- Chama-se ângulo inscrito numa circunferência a qualquer ângulo cujo vértice pertence à circunferência e os lados intersectam-na.

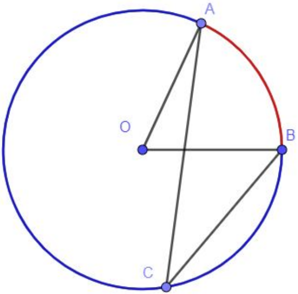


- $\angle BOA$ é ângulo ao centro;
- $\angle BCA$ é ângulo inscrito;
- O arco $\overset{\frown}{BA}$ chama-se interno a $\angle BCA$;
- O arco $\overset{\frown}{ACB}$ chama-se externo a $\angle BCA$;

- Chama-se amplitude do arco $\overset{\frown}{BA}$ à medida do $\angle BOA$.

Propriedades da Circunferência

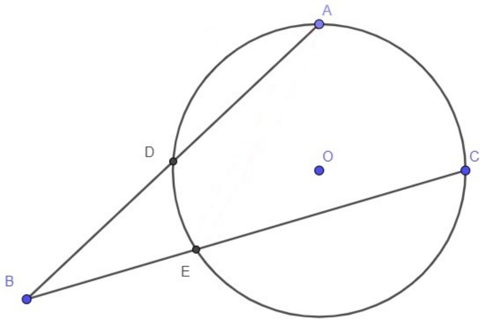
- Num circunferência, a medida de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco interno.
  Concretamente:
  $$m(\angle BCA) = \frac{1}{2} m(\angle BOA).$$



Propriedades da Circunferência

- A medida do $\angle CBA$, apresentado da figura, pode ser calculada da seguinte forma.

$$m(\angle CBA) = \frac{1}{2}\Big(m(\angle COA) - m(\angle DOE)\Big).$$



Propriedades da Circunferência

- A medida do $\angle CBA$, apresentado da figura, pode ser calculada da seguinte forma.

$$m(\angle CBA) = \frac{1}{2}\Big(m(\angle COA) + m(\angle DOE)\Big).$$