Matemática das Coisas

Parte 2

Modelos Matemáticos
com
Aplicação em Finanças

Aula de 10 Outubro 2023

José Joaquim Oliveira

Equações às Diferenças – Introdução

Em certos problemas

- o tempo é medido em intervalos regulares (h-d-m-y) assumindo uma variação discreta

- **Exemplos**

  ① efeito de um medicamento num paciente / horas

  ② rendimento bancário / anos

  ③ população em laboratório / dias

  ④ população mundial / décadas

- **Solução**

  é uma função de tipo particular

  ⋆ sucessão ⋆ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

  que traduz as sucessivas observações ao fim de $1, 2, \ldots, n, \ldots$ períodos de tempo depois da observação inicial x_0

Equações às Diferenças – Introdução

Em casos simples

- o valor de x_{n+1} depende apenas do valor anterior, x_n, e escrevemos

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

  sendo f uma função apropriada

- A equação (1) é uma **relação de recorrência** a que chamamos **equação às diferenças (EDF)**

- Como, na equação (1), temos x_{n+1} a depender apenas do termo anterior x_n, dizemos que a equação (1) é de **ordem 1**

Equações às Diferenças – Introdução

Mais em geral

- para $n, k \in \mathbb{N}$ e f definida apropriadamente, uma relação de recorrência da forma
$$x_{n+1} = f\big(n; x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$
diz-se uma equação às diferenças de ordem k

- a função f diz-se a função de actualização por permitir passar de uma iteração para a seguinte, por exemplo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ...

- uma sucessão $\big(\phi_n\big)_n$ diz-se solução de uma **EDF** como (2) se satisfaz a condição
$$\phi_{n+1} = f\big(n; \phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- uma **EDF** diz-se **autónoma** quando a função f não depende explicitamente de n,
$$x_{n+1} = f\big(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$
no caso contrário, diz-se **não autónoma**

Motivação

Problema de Fibonacci

Problema (sucessão) de Fibonacci

O primeiro exemplo conhecido de uma **EDF** foi estudado por

Fibonacci

e deu origem à conhecida sucessão com o seu nome.

Sucessão de Fibonacci

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\dots$$

Fibonacci idealizou um problema de **reprodução de coelhos**, cuja solução é dada precisamente por esta sucessão

Problema (sucessão) de Fibonacci

- Consideremos um casal jovem de coelhos que,
  ao fim de um mês, se torna fértil
- A partir daí, em cada mês,
  a fêmea dá à luz um novo casal de coelhos
- cada casal de coelhos torna-se fértil ao fim de um mês
  passando a procriar um novo casal de coelhos
  em cada mês
- suponhamos que os coelhos não morrem

Pergunta

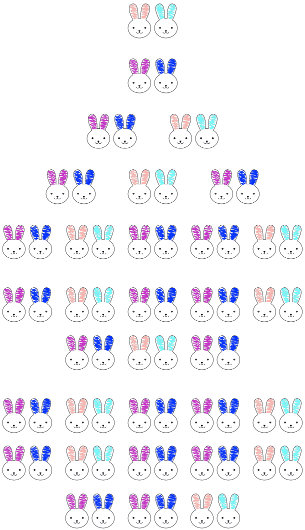
- Quantos casais de coelhos teremos ao fim de um ano?

Resposta de Fibonacci

- Teremos 144 casais de coelhos

Esquematicamente

Mês	Coelhos	Casais
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**
(M3) o casal anterior mais o casal novo		**2**
(M4) o casal anterior mais o casal novo		**3**
(M5)		**5**
(M6)		**8**
(M7)		**13**



etc etc etc

Como proceder em geral?

Quantos casais de coelhos temos num determinado mês?

Em cada mês n, vamos ter

- os casais que existiam no mês anterior $n-1$
- *mais* os novos casais nascidos no mês n

Quanto casais nascem no mês n?

Como obter uma fórmula recursiva para $F(n)$?

$$\boxed{F(n) = \textbf{? (depende das observações anteriores)}}$$

E como obter uma fórmula "fechada" que dê $F(n)$ em função de n?

$$\boxed{F(n) = \textbf{? (depende apenas de } n\textbf{)}}$$

Problema em Finanças

Empréstimo bancário

Problema de empréstimo bancário

- **Contraímos um empréstimo bancário**
  que devemos pagar em prestações
  uniformemente distribuídas no tempo,
  em geral, **prestações mensais**
- O empréstimo está sujeito a uma **taxa de juro anual (%)**
  que é aplicada ao montante em dívida
- **Cada prestação tem duas componentes**
  uma componente paga os juros do montante em dívida
  outra componente amortiza a dívida
- **Admitimos que**
  a taxa de juro é constante (anual)
  a prestação (mensal) é fixa

Qual o plano de pagamento?

Problema de empréstimo bancário

- **Concretizando**

  E_0 = valor do empréstimo contraído

  r = taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)

  E_n = montante em dívida após o n-ésimo pagamento

  P = valor da prestação mensal

- **Então**

  (i) Começo com E_0 em dívida

  (ii) No final do mês 1, pago uma prestação P ao banco
  Deste montante P,

  - a componente rE_0 é relativa ao juro sobre a dívida
  - a componente $P - rE_0$ amortiza a dívida

  No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$E_1 = E_0 - (P - rE_0) \;\Rightarrow\; \boxed{E_1 = (1+r)E_0 - P}$$

Problema de empréstimo bancário

▶ Então (cont.)

(ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1+r)E_0 - P}$$

(iii) No final do mês 2, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_1 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_1$ amortiza a dívida

No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$E_2 = E_1 - (P - rE_1) = (1+r)E_1 - P$$

$$E_2 = (1+r)[(1+r)E_0 - P] - P$$

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

Problema de empréstimo bancário

▶ Então (cont.)

(iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

(iv) No final do mês 3, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_2 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_2$ amortiza a dívida

No final do mês 3, fico a dever ao banco

$$E_3 = E_2 - (P - rE_2) = (1+r)E_2 - P$$

$$E_3 = (1+r)\Big\{(1+r)^2 E_0 - P[1 + (1+r)]\Big\} - P$$

$$\boxed{E_3 = (1+r)^3 E_0 - P\Big[1 + (1+r) + (1+r)^2\Big]}$$

Problema de empréstimo bancário

- **E assim sucessivamente** $\cdots$
  resultando(indução sobre n)

$$E_n = (1+r)^n E_0 - P\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$$

- **Mas** $\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$

  representa a soma dos n primeiros termos de uma **progressão geométrica** de razão $(1+r)$
  e primeiro termo igual a 1

- **Logo** $\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$

  é dado por

$$\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = \frac{1-(1+r)^n}{-r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Problema de empréstimo bancário

- **E finalmente**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - P\Big[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\Big]$$

é dado por

$$\boxed{E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

onde, recorde-se,

E_0 é o valor do empréstimo contraído
r é a taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)
E_n é o montante em dívida após o n-ésimo pagamento
P é o valor da prestação mensal

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Na prática, se eu contrair**

  um empréstimo de 10 000 € para pagar em 5 anos,
  com uma taxa de juro anual de $3,6\%$,
  qual o valor da minha prestação mensal P?

- Converto a taxa anual numa taxa mensal constante $3{,}6/12$ ou seja $0{,}3\%$, ou ainda $r = 0{,}003$

  Pago a dívida em 5 anos, logo em $5 \times 12 = 60$ meses

  Liquido a dívida com a última prestação, logo $E_{60} = 0$

  Determino P, resolvendo

$$0 = (1+0,003)^{60} \times 10000 - \frac{P}{0,003}\Big[(1+0,003)^{60} - 1\Big]$$

  e vem $\boxed{P = 1\,977{,}22\,€}$

Problema 1

Contraímos um empréstimo bancário por 30 anos no valor de 125 000 € a uma taxa de juro anual de $3,5\%$.

Qual o valor da prestação mensal, supondo que o juro é taxado mensalmente e que o valor em dívida é actualizado mensalmente?

$\left[P = 561{,}31\text{ €}\right.$; total pago ao banco 202 070 €$\left.\right]$

Problema 2

Contraímos um empréstimo análogo, mas o juro é taxado anualmente e o valor em dívida é actualizado anualmente.

Qual o valor da prestação mensal?

Notar que, neste caso, o banco calcula uma prestação anual e converte-a numa prestação mensal.

[prestação anual $P_a = 6\,796{,}42$ €; prestação mensal $P_m = P_a/12 = 566{,}37$ €; total pago ao banco 203 892 €]

Pontos de equilíbrio & estabilidade

Diagrama de teia de aranha

Pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Um ponto x^* no domínio de f diz-se um *ponto de equilíbrio* da EDF se x^* é um **ponto fixo** de f, isto é, se

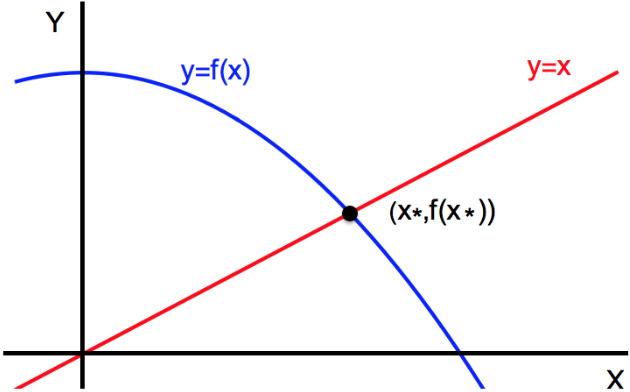
$$\boxed{x^* = f(x^*)}$$

Se x^* for um ponto de equilíbrio, então a sucessão $\phi_n(x) = x^*$ é uma **solução (constante)** da EDF, já que

$$\begin{aligned} x_0 = x^* &\Rightarrow x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow x_3 = f(x_2) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Graficamente

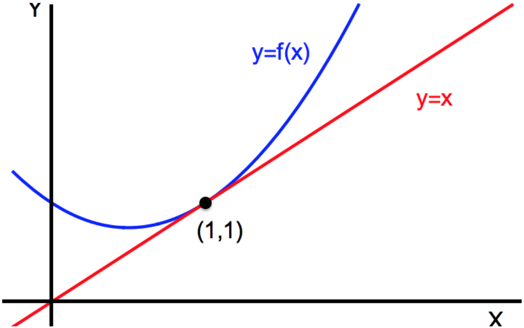
Um **ponto de equilíbrio** da equação $x_{n+1} = f(x_n)$ é dado pela intersecção da curva $y = f(x)$ com a recta de equação $y = x$



Exemplo 1 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

Temos $f(x) = x^2 - x + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow (x^*)^2 - x^* + 1 = x^* \Leftrightarrow (x^*)^2 - 2x^* + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^* - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 1}$$



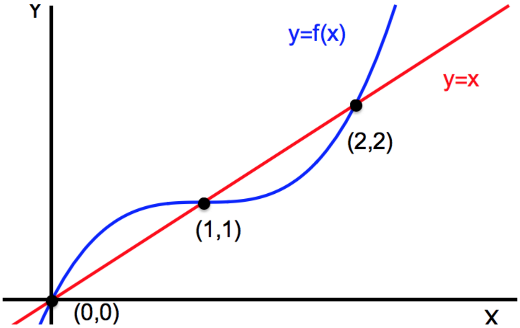
Exemplo 2 $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Temos $f(x) = (x-1)^3 + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow (x^*-1)^3 + 1 = x^* \Leftrightarrow (x^*-1)^3 - (x^*-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^*-1)\left[(x^*-1)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow (x^*-1)x^*(x^*-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$$

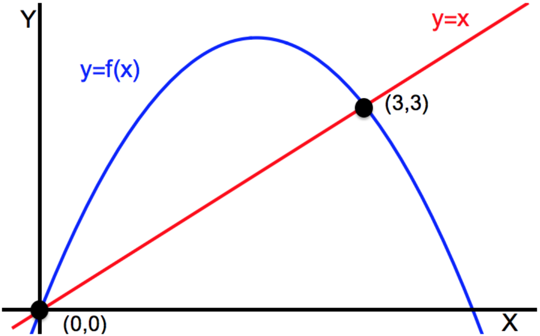


Exemplo 3 $x_{n+1} = x_n(4 - x_n)$

Temos $f(x) = x(4 - x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*(4 - x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*(4 - x^* - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^*(3 - x^*) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 3}$$

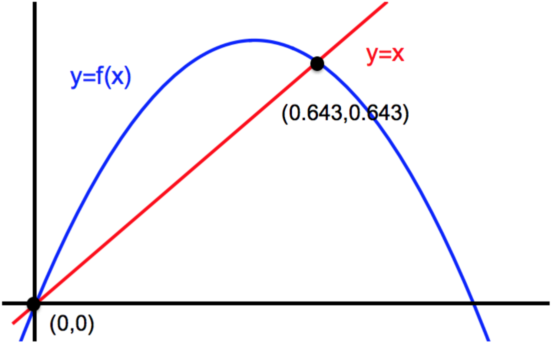


Exemplo 4 $x_{n+1} = 2,8\, x_n(1 - x_n)$

Temos $f(x) = 2,8\,x(1-x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow 2,8\,x^*(1-x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*\Big[2,8\,(1-x^*) - 1\Big] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^*(1,8 - 2,8x^*) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1,8/2,8}$$

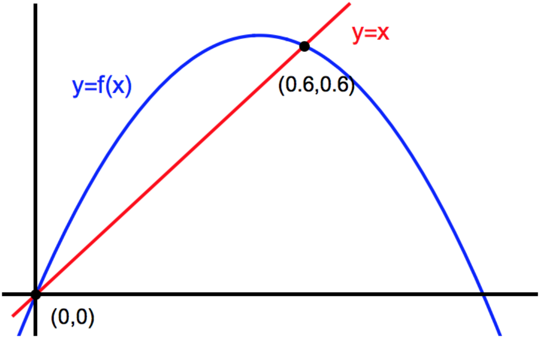


Exemplo 5 $x_{n+1} = \alpha\, x_n - \beta x_n^2, \quad \alpha, \beta > 0$

Temos $f(x) = \alpha\, x - \beta x^2$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow \alpha\, x^* - \beta (x^*)^2 = x^* \Leftrightarrow x^* \Big(\beta x^* + 1 - \alpha - 1 \Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = (\alpha - 1)/\beta}$$



$$\alpha = \beta = 2,5$$

Notar que

• **Raramente**, uma solução é dada por um ponto de equilíbrio.

• No entanto, é comum e é desejável que, depois de algumas iterações, uma solução atinja um **ponto de equilíbrio**.

➡ Por essa razão, tem interesse

- estudar os **pontos de equilíbrio** de uma EDF
- analisar o **comportamento** (**estabilidade**) das soluções da EDF relativamente aos pontos de equilíbrio.

Estabilidade

Estabilidade

Um ponto de equilíbrio x^* é *estável* se

- todas as iterações x_n estão **arbitrariamente** próximas de x^* desde que x_0 esteja **suficientemente** próximo de x^*.

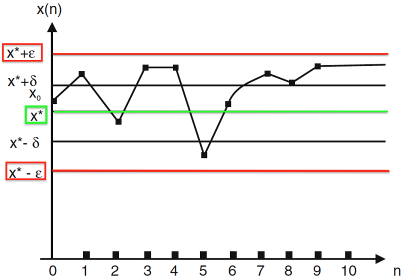
Simbolicamente

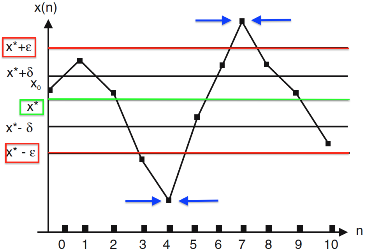
Um ponto de equilíbrio x^* é *estável* se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}}$$

Estabilidade

Graficamente





Estável

Instável

Atractor

Um ponto de equilíbrio x^* é *atractor (local)* se

> a sucessão $(x_n)_n$ convergir para o ponto de equilíbrio x^*
> **desde que** x_0 seja escolhido suficientemente próximo de x^*

Simbolicamente, x^* é *atractor (local)* se

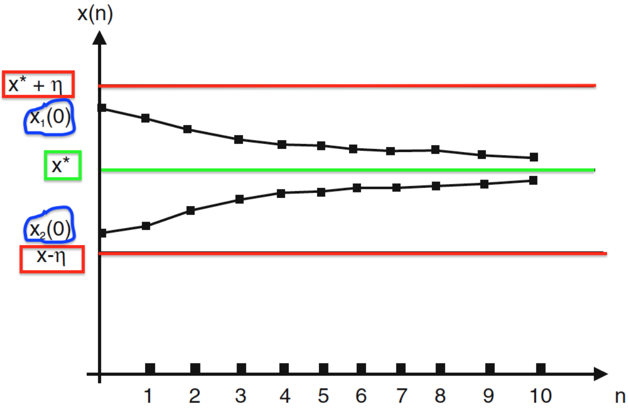
$$\boxed{\exists \eta > 0 : \; |x_0 - x^*| < \eta \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x^*}$$

Além disso, na definição acima, se $\eta = +\infty$, então x^* é um *atractor global*, significando que $(x_n)_n$ converge para x^* independentemente de x_0

Um ponto de equilíbrio x^* que seja, simultaneamente, **estável** e **atractor** diz-se *assimptoticamente estável*.

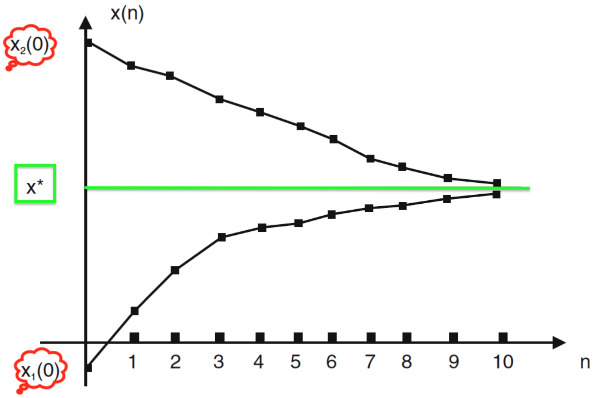
Analogamente, se x^* for, simultaneamente, **estável** e **atractor global** diz-se *assimptoticamente globalmente estável*.

Graficamente



Estabilidade assimptótica

Graficamente



Estabilidade assimptótica global

Para estudar a estabilidade

a definição não é “amigável”

método gráfico

método analítico
(critério de estabilidade)

Método gráfico

A estabilidade é estudada através dos chamados

diagramas de teia de aranha

1. Num sistema de eixos OXY com OX para x_n e OY para x_{n+1}, como atrás, representamos os gráficos de

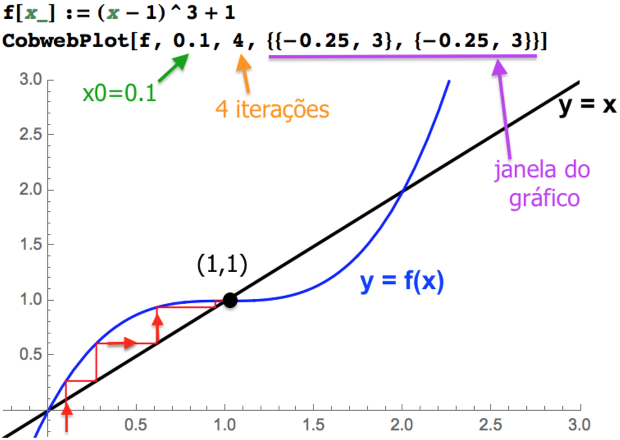
$$\begin{array}{lcl} y = x & \text{ou seja} & x_{n+1} = x_n \\ y = f(x) & \text{ou seja} & x_{n+1} = f(x_n) \end{array}$$

2. Marcamos x_0 no eixo horizontal.
3. Procuramos $x_1 = f(x_0)$ subindo verticalmente até ao gráfico de f.
4. Procuramos $x_2 = f(x_1)$, mas precisamos de colocar x_1 no eixo OX; conseguimos isso, primeiro, reflectindo horizontalmente x_1 desde o gráfico de f até ao gráfico da recta $y = x$.
5. etc etc etc

(é mais fácil fazer do que descrever)

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 1}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 2}$

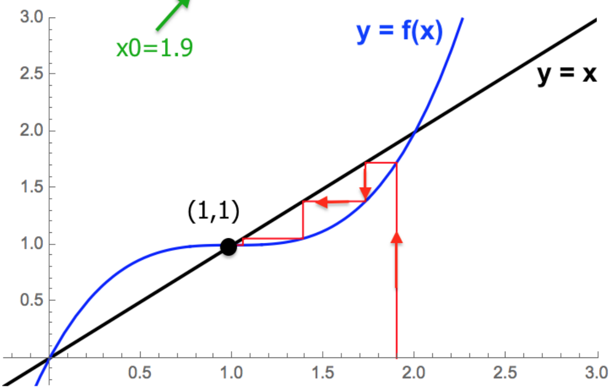


$x^* = 1$ é assimptoticamente estável (esq)

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 1}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 2}$

```
f[x_] := (x - 1)^3 + 1
CobwebPlot[f, 1.9, 4, {{-0.25, 3}, {-0.25, 3}}]
```

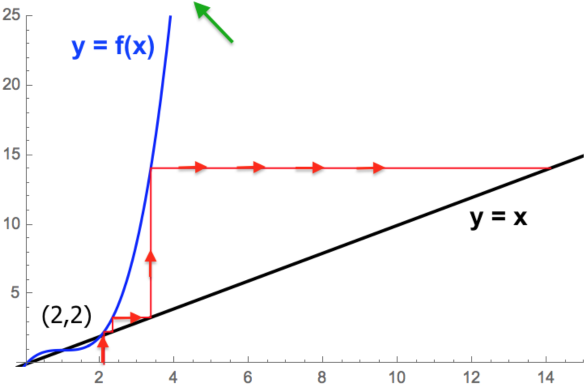


$x^* = 1$ é assimptoticamente estável (dir)

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 1}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 2}$

```
f[x_] := (x - 1)^3 + 1
CobwebPlot[f, 2.1, 3, {{-0.25, 15}, {-0.25, 25}}]
```

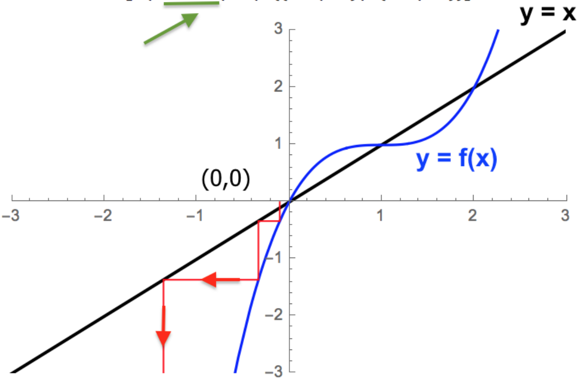


$x^* = 2$ é instável

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

```
f[x_] := (x - 1)^3 + 1
CobwebPlot[f, -0.1, 4, {{-3, 3}, {-3, 3}}]
```



$x^* = 0$ é instável

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Teorema 1. Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e f' contínua em x^*.

Consequentemente

(a) Se $\left|f'(x^*)\right| < 1$, então x^* é **assimptoticamente estável**;

(b) Se $\left|f'(x^*)\right| > 1$, então x^* é **instável**;

(c) Se $\left|f'(x^*)\right| = 1$, o caso é **duvidoso**.

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Teorema 2. Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, f' contínua em x^* e $f'(x^*) = 1$.

Consequentemente

(a) Se $f''(x^*) \neq 0$, então x^* é **instável**;

(b) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$ então x^* é **instável**;

(c) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$ então x^* é **assimptoticamente estável**.

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Teorema 3. Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, f' contínua em x^* e $f'(x^*) = -1$.

Consequentemente

(a) Se $2f'''(x^*) + 3[f''(x^*)]^2 > 0$ então x^* é **assimptoticamente estável**;

(b) Se $2f'''(x^*) + 3[f''(x^*)]^2 < 0$ então x^* é **instável**.

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

$f(x) = (x-1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x + 3}$$

$f'(1) = 0 \implies |f'(1)| < 1 \implies x^* = 1$ é assimptoticamente estável

$f'(0) = 3 \implies |f'(0)| > 1 \implies x^* = 0$ é instável

$f'(2) = 3 \implies |f'(2)| > 1 \implies x^* = 2$ é instável

Exercício (fazer)

(a) $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ (b) $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$

(b) $f(x) = x^2 + 3x$ pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0}$ $\boxed{x^* = -2}$

$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3 \wedge f'(-2) = -1$

$\boxed{x^* = 0}$ é instável $\boxed{x^* = -2}$ caso duvidoso

Para o caso duvidoso

$f''(x) = 2,\ f'''(x) = 0 \Rightarrow 2f'''(-2) + 3[f''(-2)]^2 = 12 > 0$

$\boxed{x^* = -2}$ é assimptoticamente estável

Problema em Economia

Lei da oferta e da procura

Problema – lei da oferta e da procura

Um determinado produto é vendido no mercado

- $S(n)$ representa a **oferta**, ou seja, o número de unidades desse produto **colocadas à venda**, no período n (tipicamente uma época ou um ano)
- $D(n)$ representa a **procura**, ou seja, o número de unidades desse produto **compradas**, no período n
- $p(n)$ representa o **preço de cada unidade** desse produto praticado no período n
- Em geral, a oferta $S(n)$ é função do preço praticado no período anterior, $p(n-1)$, e a procura $D(n)$ é função do preço praticado no período actual, $p(n)$ (explicar)

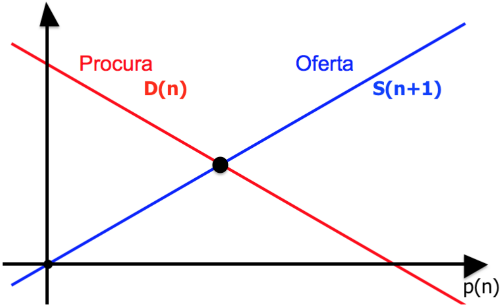
Por simplicidade, assumimos que

- tanto a **oferta** $S(n+1)$ como a **procura** $D(n)$ dependem linearmente de $p(n)$

$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s, \qquad D(n) = -m_d p(n) + b_d,$$

  com $m_s, b_s, m_d, b_d > 0$

- m_s mede a sensibilidade do vendedor ao preço de mercado
- m_d mede a sensibilidade do consumidor ao preço de mercado



Para esgotar o produto, satisfazendo a procura do consumidor

- o preço praticado no mercado é aquele que corresponde a ter a **oferta igual à procura**, digamos $S(n) = D(n)$ ou $S(n+1) = D(n+1)$,
$$m_s p(n) + b_s = -m_d p(n+1) + b_d$$
ou seja
$$\boxed{p(n+1) = Ap(n) + B} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(n+1) = f(p(n))}$$
onde
$$A = -\frac{m_s}{m_d} \quad \text{e} \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$$
- obtemos uma EDF linear de ordem 1, para o **preço** a praticar no mercado ao longo dos vários períodos de tempo (anualmente, época a época), ou seja, para a **sucessão de preços**
- para esta EDF, temos $f(p) = Ap + B$

- Em Economia, o **preço de equilíbrio** é o que resulta da intersecção da curva da oferta $S(n+1)$ com a curva da procura $D(n)$
- Fazemos o estudo deste problema de acordo com a exposição anterior
  - – pontos fixos de f
  - – pontos de equilíbrio da EDF
  - – estabilidade (diagrama de teia de aranha)
  - – estabilidade (critérios)
  - – **interpretação dos resultados**

(projecto para todos)