Matemática das Coisas

Parte 1

Modelos Matemáticos
em
Ciências da Vida e da Saúde

Aula de 31 de Outubro de 2023

José Joaquim Oliveira

Dinâmica de uma população

Modelo de Malthus

Evolução de uma população (nascimentos/mortes)

$$P'(t) = (n - m)P(t)$$

Thomas Malthus (1766-1834)

Economista

Reino Unido

- $P(t)$ número de indivíduos da população, no tempo t
- $P'(t)$ variação de $P(t)$
- n taxa de nascimentos
- m taxa de mortes

Modelo de Malthus

$$\boxed{P'(t) = (n - m)P(t)}$$

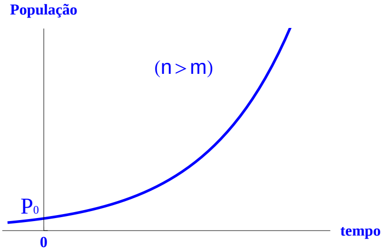
Solução do modelo ("crescimento" exponencial)

$$\boxed{P(t) = P_0\, e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

Caso $n > m$

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$$

Crescimento não limitado (não controlado)



Modelo de Malthus

$$\boxed{P'(t) = (n - m)P(t)}$$

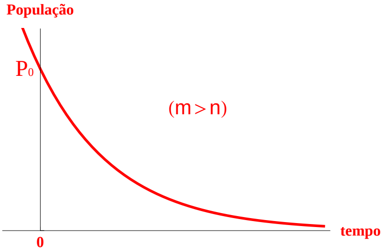
Solução do modelo ("crescimento" exponencial)

$$\boxed{P(t) = P_0 \, e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

Caso $m > n$

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = 0$$

Extinção da população



Modelo de Malthus

$$\boxed{P'(t) = (n-m)P(t)}$$

Solução do modelo ("crescimento" exponencial)

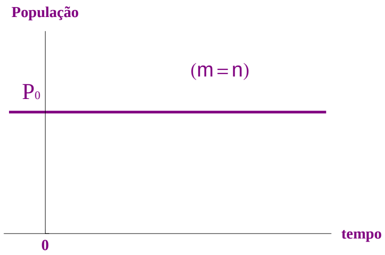
$$\boxed{P(t) = P_0\, e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

Caso $m = n$

$$P(t) = P_0$$

População constante

(sem interesse)



Análise do Modelo de Malthus

- **Modelo muito idealista**
- **Adequado a curtos intervalos de tempo**
  População mundial entre 1700 e 1961
- **Adequado a certas populações biológicas**
  Evolução de bactérias em laboratório
  Praga biológica
- **Caso contrário, por exemplo se $n > m$**
  Superpopulação (até algum controlo externo)
  no caso de humanos, fome, guerra, doenças, miséria

Modelo de Verhulst

Evolução de uma população (com inibição) ($k > 0$)

$$P'(t) = \underbrace{(n-m)P(t)}_{\text{nascim \& mortes}} - \underbrace{kP^2(t)}_{\text{inibição}}$$

Pierre Verhulst
(1804-1849)
Matemático, Economista, Político
Bélgica

ou $$P'(t) = aP(t) - kP^2(t)$$

ou $$P'(t) = \Big[a - kP(t)\Big]P(t)$$

$$P'(t) = aP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{a/k}\right]$$

$$P'(t) = aP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{s}\right]$$

Modelo de Verhulst

Solução do modelo ("crescimento" controlado)

$$\boxed{P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}\ , \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

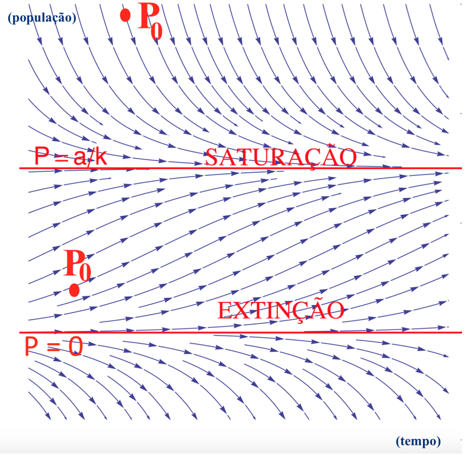
$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

$\dfrac{a}{k}$ capacidade ou nível de saturação do meio ambiente

Crescimento ou Decrescimento controlado, desde P_0 até $\frac{a}{k}$

Modelo de Verhulst (solução)

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}, \qquad \lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$



Comportamento qualitativo da solução (possíveis trajectórias)

Modelo de Verhulst

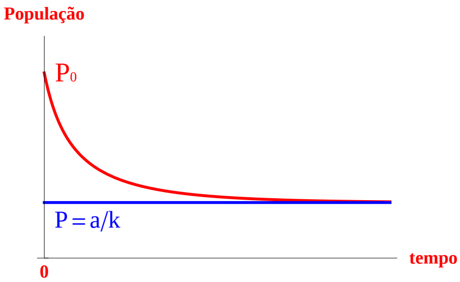
Solução do modelo

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}\ , \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $P_0 > \frac{a}{k}$

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

População diminui



Modelo de Verhulst

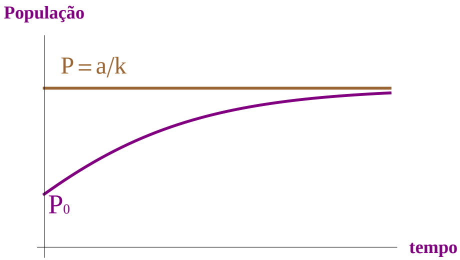
Solução do modelo

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}\ , \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $P_0 < \frac{a}{k}$

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

População aumenta



Análise do Modelo de Verhulst

- **Modelo menos idealista**
- **A evolução da população tem em conta os recursos disponíveis**

  alimentares, ambientais

  capacidade do meio
- **Factores ecológicos**
- **Processos selectivos**

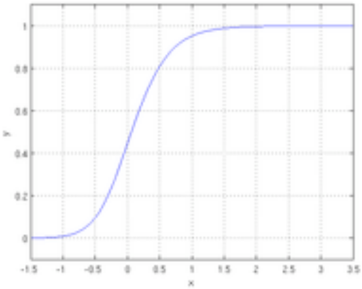
  que controlam o crescimento da população

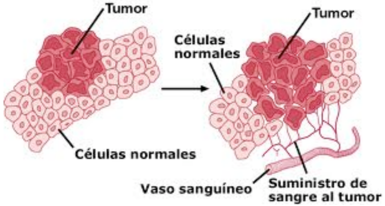
Aplicações notáveis

Medicina

Crescimento de tumores

Inibição: quimioterapia, fármacos



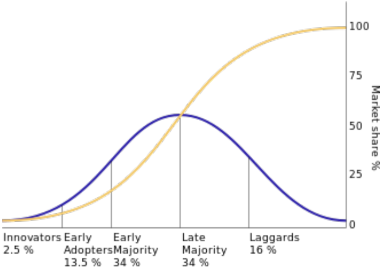


Aplicações notáveis

Economia & Sociologia

Difusão de ideias novas
tecnologias inovadoras

Inibição: natural, espontânea
associada ao consumo
bem como às imitações



AZUL: Consumidores
LARANJA: Saturação do mercado

Modelos Sazonais

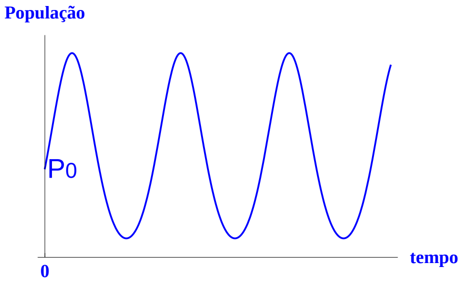
- Evolução depende fortemente da estação do ano ou de outros fenómenos periódicos
- Há uma grande alternância de comportamento

Modelo típico

$$P'(t) = k \cos(\gamma t)\, P(t)$$

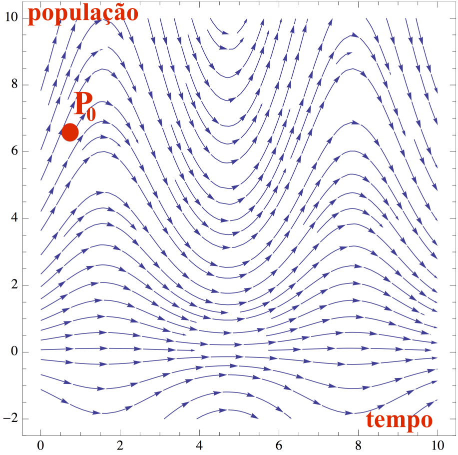
Solução

$$P(t) = P_0 e^{k/\gamma \,\mathrm{sen}(\gamma t)}$$



Modelos Sazonais

Aplicações: Turismo, alguns animais



Comportamento qualitativo da solução (possíveis trajectórias)

Dinâmica de duas populações

Modelos de Interacção (duas populações)

- Competição de espécies
- Duas espécies partilham um território comum ou dividem recursos alimentares
- Espécies que se inibem mutuamente
- Espécies que se favorecem mutuamente
- Sistemas de tipo **Presa-Predador** uma espécie é inibida e a outra é benificiada

Equações do modelo

- Duas populações $P(t)$ e $Q(t)$
- Sistema de duas equações de evolução

Equações do modelo

Se as espécies evoluíssem sozinhas (Verhulst), teríamos

$$\begin{cases} P'(t) = \left[a - bP(t)\right] P(t) = aP(t)\left[1 - \dfrac{P(t)}{s}\right] \\ \\ Q'(t) = \left[c - dQ(t)\right] Q(t) = cQ(t)\left[1 - \dfrac{Q(t)}{r}\right] \end{cases}$$

a e c $\longrightarrow$ taxas de crescimento intrínseco das populações
b e d $\longrightarrow$ taxas inibidoras de crescimento da espécie (competição intra-espécie)
s e r $\longrightarrow$ níveis de saturação das espécies (número máx de indivíduos)

Mas não é assim ...

porque as espécies interagem

Equações do modelo

As espécies interagem

Por exemplo, se competirem, então

a presença de uma espécie é prejudicial para a outra

$$\begin{cases} P'(t) = \big[a - bP(t) - kQ(t)\big]\, P(t) \\ Q'(t) = \big[c - dQ(t) - \ell P(t)\big]\, Q(t) \end{cases}$$

a e c $\longrightarrow$ taxas de crescimento intrínseco das populações

b e d $\longrightarrow$ taxas inibidoras de crescimento das espécies

k e ℓ $\longrightarrow$ efeito competitivo de uma espécie sobre a outra

Várias coisas podem acontecer

- Ocorre extinção das duas espécies
- Só uma das espécies sobrevive (a outra extingue-se)
- As duas espécies sobrevivem, e encontram uma "convivência estável"

Com técnicas da **Teoria dos Sistemas Dinâmicos**, podemos prever estas situações, fazendo uma **análise qualitativa da solução** do modelo

(pontos de equilíbrio e estabilidade)

sem mesmo conhecer a solução.

Equações do modelo

As espécies interagem

Numa relação de **mutualismo**, a presença de cada uma das espécies é benéfica para a outra

$$\begin{cases} P'(t) = \big[a - bP(t) + kQ(t)\big]\,P(t) \\ Q'(t) = \big[c - dQ(t) + \ell P(t)\big]\,Q(t) \end{cases}$$

a e c $\longrightarrow$ taxas de crescimento intrínseco das populações
b e d $\longrightarrow$ taxas inibidoras de crescimento das espécies

k e ℓ $\longrightarrow$ efeito benéfico de uma espécie sobre a outra

Exemplo: ruminantes e micro-organismos nos seus estômagos, ajudam na digestão dos vegetais ingeridos pelos ruminantes

Outras variantes

- **Parasita-Hospedeiro**

  uma espécie tira vantagens da outra
  há prejuízo para o hospedeiro
  ainda que sem grande dano

- **Comensalismo**

  uma beneficia e para a outra é indiferente
  rémora (beneficia) e tubarão (transporta) a rémora
  rémora alimenta-se dos restos que o tubarão rejeita

- **Presa-Predador**

  uma espécie alimenta-se da outra

Modelo Presa-Predador

Há uma competição feroz entre duas espécies

- O Predador ataca e a Presa defende-se
- O Predador alimenta-se da Presa

Pode ser uma relação de CANIBALISMO

- populações da mesma “espécie”
- selecção natural dentro da espécie
- para eliminar os indivíduos “defeituosos”

Modelo Lotka-Volterra

Alfred Lotka (1880–1949)
Ucrânia

Vito Volterra (1860–1940)
Itália

Modelo

$$\begin{cases} P'(t) = \quad aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

População de presas isolada

$$P'(t) = aP(t)$$

crescimento exponencial

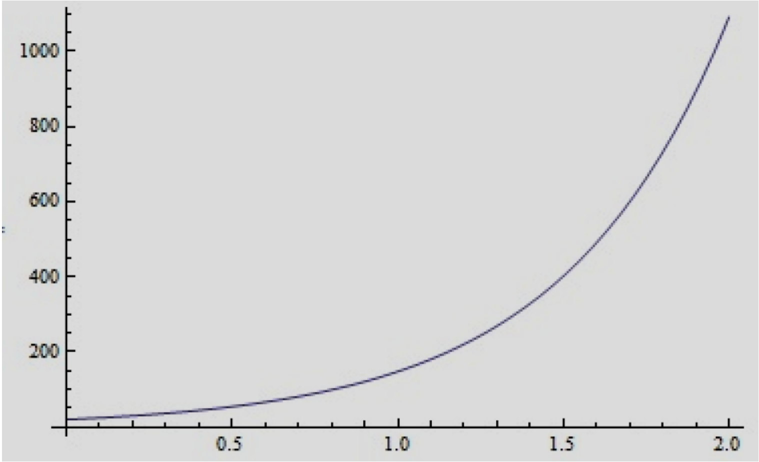
População de predadores isolada

$$Q'(t) = -cQ(t)$$

decrescimento exponencial (extinção)

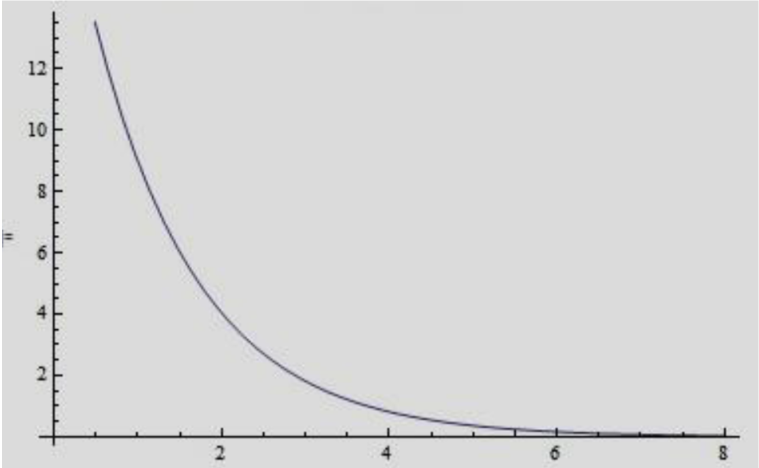
Presas isoladas (solução exacta)

$$\boxed{P(t) = P_0\, e^{at}}$$



Predadores isolados (solução exacta)

$$\boxed{Q(t) = Q_0\, e^{-ct}}$$



Modelo completo

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

Analiticamente

não é possível determinar a solução exacta

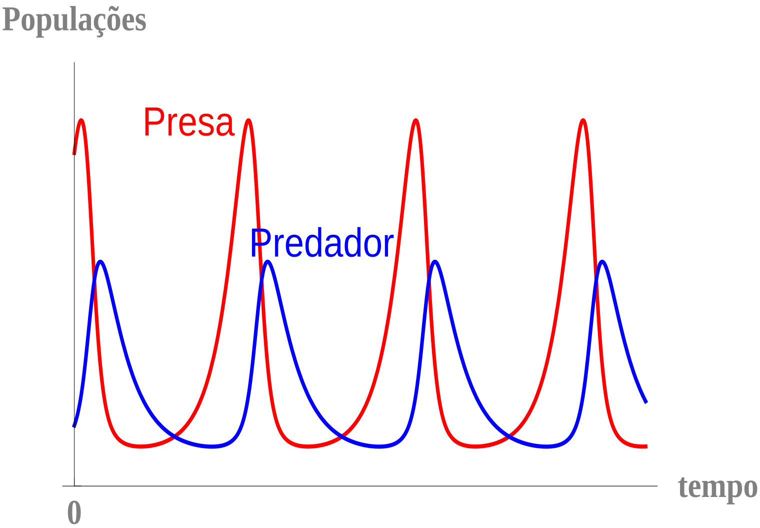
Numericamente

procuramos uma solução aproximada

Estudamos

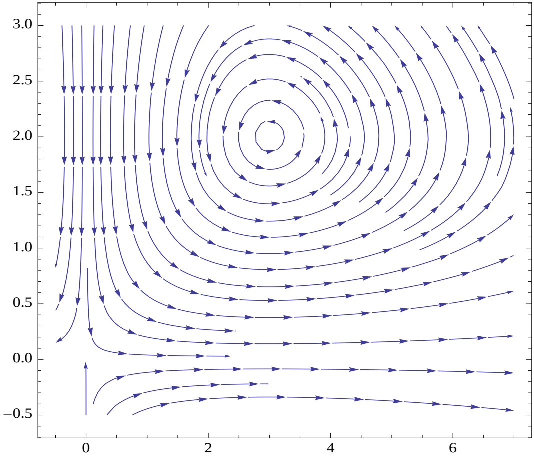
o comportamento qualitativo da solução (exacta)

Solução numérica (aproximada)



Comportamento qualitativo da solução

Lince (Predador)



Coelho (Presa)

Modelo SIR

Estudo & Simulações

Modelo SIR (Kermack & Mc-Kendrik, 1927)

Estudo de uma **epidemia** que se transmite através do

contacto entre pessoas **infectadas** e pessoas **saudáveis**

As pessoas **saudáveis** são **susceptíveis** de se infectarem, contraindo a doença.

As pessoas **infectadas** acabam por **recuperar** da doença ou por padecer de forma drástica, morrendo.

Se quem já esteve doente ficar imune e não se infectar novamente, então os indivíduos recuperados são **removidos** da dinâmica da infecção.

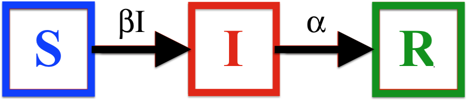
Consideremos uma determinada população com **N indivíduos**.
Vamos organizar esta população em três classes

- **S** (indivíduos susceptíveis) $\longrightarrow$ aqueles que podem ser contaminados quando em contacto com indivíduos doentes
- **I** (indivíduos infectados) $\longrightarrow$ aqueles que tiveram contacto com a doença e que podem contaminar outros indivíduos quando em contacto com indivíduos susceptíveis
- **R** (indivíduos recuperados) $\longrightarrow$ aqueles que já contraíram a doença e que foram removidos da classe, porque recuperaram ou porque acabaram por morrer

Vamos seguir a evolução, no tempo, do número de indivíduos de cada classe, digamos

$$S(t),\ I(t),\ R(t)$$

Tomaremos como ponto de partida o **diagrama de fluxo** de propagação da epidemia, dado por



onde

$$\begin{array}{lcl} \beta I & \longrightarrow & \text{taxa de infecção} \\ \beta & \longrightarrow & \text{coeficiente de transmissão da infecção} \\ \alpha & \longrightarrow & \text{taxa de recuperação de indivíduos} \end{array}$$

Modelo útil na **previsão de evolução** da epidemia e na **tomada de decisão** sobre estratégias de combate à sua propagação, como medidas de **vacinação** e de **quarentena**.

Equações do Modelo SIR

Do **diagrama de fluxo** $\boxed{S} \xrightarrow{\beta I} \boxed{I} \xrightarrow{\alpha} \boxed{R}$ vemos que

- **a classe $\boxed{S}$ apenas perde indivíduos** da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**

  [vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

- **a classe $\boxed{I}$ recebe e perde indivíduos**
  recebe indivíduos da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**
  perde indivíduos a uma taxa constante

  [vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

- **a classe $\boxed{R}$ apenas recebe indivíduos** a uma taxa constante

  [vamos ter apenas um termo de *ganho* na equação de $R(t)$]

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta I} \boxed{I} \xrightarrow{\alpha} \boxed{R}$$

- **a classe** $\boxed{\mathbf{S}}$ **apenas perde indivíduos** da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**

  [vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

- **a classe** $\boxed{\mathbf{I}}$ **recebe indivíduos** da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**
  e perde indivíduos a uma taxa constante

  [vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

- **a classe** $\boxed{\mathbf{R}}$ **apenas recebe indivíduos** a uma taxa constante

  [vamos ter apenas um termo de *ganho* na equação de $R(t)$]

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t) I(t) \\ I'(t) &= \beta S(t) I(t) - \alpha I(t) \\ R'(t) &= \alpha I(t) \end{aligned}$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$\begin{aligned} S(t) + I(t) + R(t) &= \mathbf{N} \\ S'(t) + I'(t) + R'(t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e podemos trabalhar com o **modelo reduzido**

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t) I(t) \\ I'(t) &= \beta S(t) I(t) - \alpha I(t) \end{aligned}$$

porque

$$R(t) = \mathbf{N} - S(t) - I(t)$$

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$
$$I'(t) = \beta S(t) I(t) - \alpha I(t)$$
$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferencias ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)
- **sistema acoplado** (as equações de uma classe envolvem as densidades das outras classes)

Como obter uma **solução analítica** exacta do sistema?

- **sistema autónomo** (os termos sem derivada não envolvem a variável t explicitamente)

Estudamos o sistema como um **sistema dinâmico autónomo**
Determinamos **numericamente** uma sua solução **aproximada**

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$
$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$
$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$
- $R'(t) \geq 0$ e $R'(t) = 0$ sse $I(t) = 0$

Logo

$S(t)$ é decrescente e $R(t)$ é crescente

Quanto a $I'(t)$, temos que

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) = I(t)\Big[\beta S(t) - \alpha\Big]$$

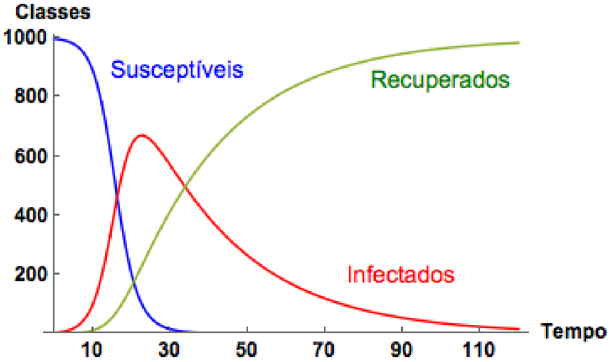
pelo que

- $I'(t) \geq 0$ se $S(t) \geq \dfrac{\alpha}{\beta}$ e $I'(t) \leq 0$ se $S(t) \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$

ou seja

$I(t)$ cresce enquanto $S(t) > \alpha/\beta$ e decresce enquanto $S(t) < \alpha/\beta$
atingindo um máximo quando $S(t) = \alpha/\beta$

Resolução numérica do sistema (solução aproximada)



$\alpha = 0.04$, $\beta = 0.0004$, $\mathbf{N} = 1000$, $S(0) = 997$, $I(0) = 3$, $R(0) = 0$

Neste caso, $\alpha/\beta = 100$ e, de facto,

$I(t)$ mantém-se crescente até $S(t)$ atingir o valor $= 100$
e passa a ser decrescente para $S(t) < 100$

Relação entre $S(t)$ e $I(t)$

Das equações para S e I,

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t), \quad I'(t) = \beta S(t) I(t) - \alpha I(t),$$

dividindo a segunda pela primeira, e enquanto $S \neq 0$, $I \neq 0$, vem

$$\frac{I'(t)}{S'(t)} = \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \alpha I}{-\beta SI} \iff \boxed{\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{S}}$$

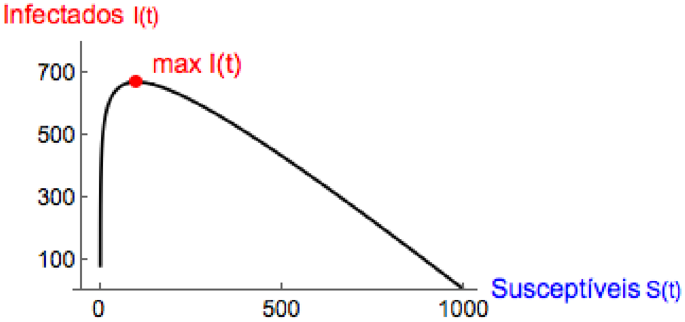
que é uma EDO de variáveis separáveis.

Resolvendo esta EDO, obtemos

$$\boxed{I = \frac{\alpha}{\beta}\ln(S) - S + \left[S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln(S_0)\right]}$$

Graficamente

$$\boxed{I = \frac{\alpha}{\beta}\ln(S) - S + \left[S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln(S_0)\right]}$$



$\alpha = 0.04, \quad \beta = 0.0004, \quad \mathbf{N} = 1000, \quad S_0 = 997, \quad I_0 = 3, \quad R_0 = 0$

Estudo do sistema dinâmico “reduzido”

$$S' = -\beta S I$$
$$I' = \beta S I - \alpha I$$

Procurar os pontos de equilíbrio

$$\beta S I = 0, \quad \beta S I - \alpha I = 0$$

Soluções

$$\left(S=0 \vee I=0\right) \quad \wedge \quad \left(S=\alpha/\beta \vee I=0\right)$$

Pontos de equilíbrio

$$\left(S_1^*, I_1^*\right) = \left(0, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(S_2^*, I_2^*\right) = \left(\alpha/\beta, 0\right)$$

Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Partimos do sistema "reduzido"

$$S' = -\beta S I$$
$$I' = \beta S I - \alpha I$$

e definimos as funções (segundo membro das equações)

$$F(S, I) = -\beta S I, \quad G(S, I) = \beta S I - \alpha I$$

Construímos a chamada **matriz Jacobiana**

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial S} & \dfrac{\partial F}{\partial I} \\ \dfrac{\partial G}{\partial S} & \dfrac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}$$

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$\left(S_1^*, I_1^*\right) = \left(0, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(S_2^*, I_2^*\right) = \left(\alpha/\beta, 0\right)$$

Vem

$$\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}(S_2^*, I_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(\alpha/\beta,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos de calcular os **valores próprios** destas matrizes

Para $\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*)$, são $\quad \lambda_{1(1)} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{1(2)} = -\alpha$

Para $\mathbf{J}(S_2^*, I_2^*)$, são $\quad \lambda_{2(1)} = \lambda_{2(2)} = 0$

Nada se pode concluir sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Seria necessário uma análise detalhada usando os vectores próprios.

Sobre a estabilidade

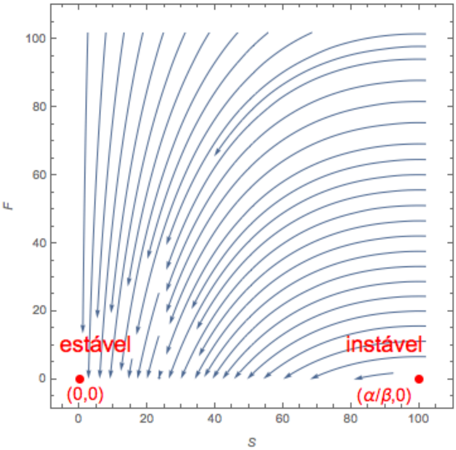
Table – Stability and Instability Properties of Linear and Almost Linear Systems

	Linear System		Almost Linear System	
r_1, r_2	Type	Stability	Type	Stability
$r_1 > r_2 > 0$	N	Unstable	N	Unstable
$r_1 < r_2 < 0$	N	Asymptotically stable	N	Asymptotically stable
$r_2 < 0 < r_1$	SP	Unstable	SP	Unstable
$r_1 = r_2 > 0$	PN or IN	Unstable	N or SpP	Unstable
$r_1 = r_2 < 0$	PN or IN	Asymptotically stable	N or SpP	Asymptotically stable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	SpP	Unstable	SpP	Unstable
$\lambda < 0$	SpP	Asymptotically stable	SpP	Asymptotically stable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Stable	C or SpP	Indeterminate

Note: N, node; IN, improper node; PN, proper node; SP, saddle point; SpP, spiral point; C, center.

Boyce & DePrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems

Retrato de fase (trajectórias da solução)



$(0, 0)$ atrai as trajectórias $\longrightarrow$ estável (atractor)

$(\alpha/\beta, 0)$ repele as trajectórias $\longrightarrow$ instável (repulsor)