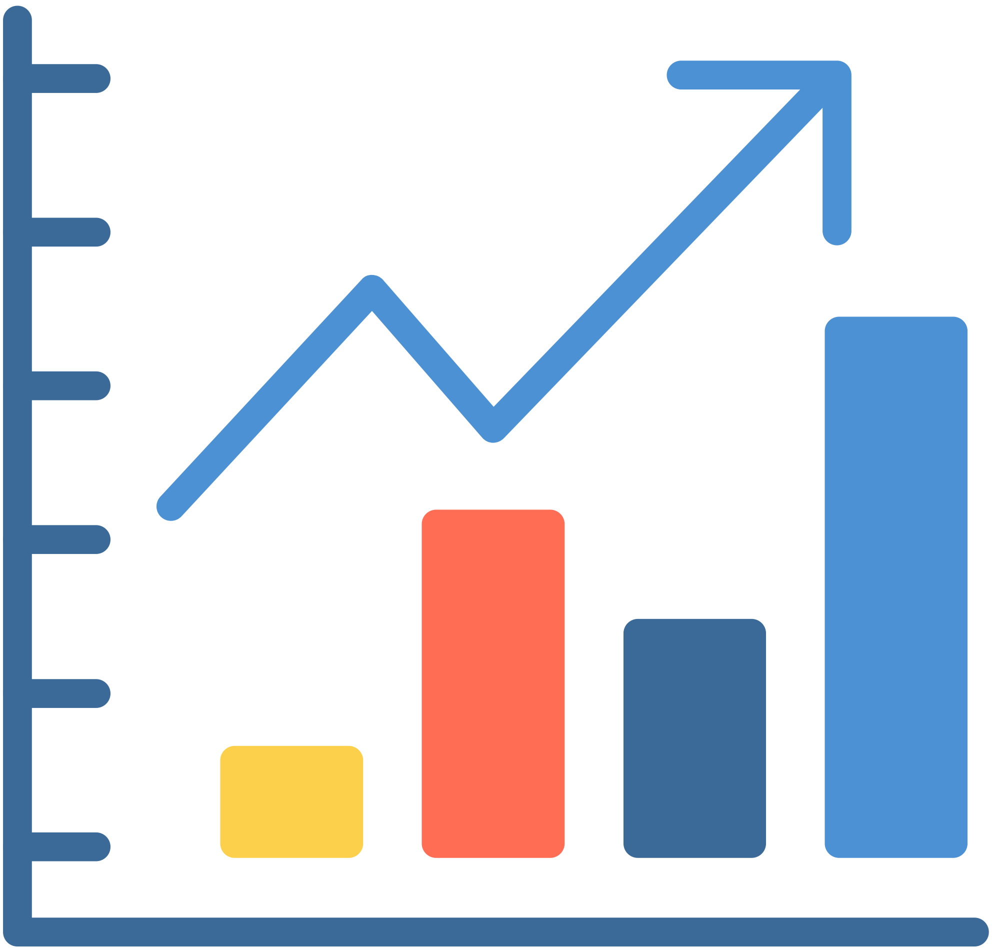
MATEMÁTICA DAS COISAS

EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS ORDINÁRIAS

DINÂMICA DE ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO



RELATÓRIO REALIZADO POR:
GONÇALO CASTRO A107337
LUÍS FELÍCIO A106913
RICARDO NEVES A106850
RAFAEL SILVA A107289
CARLOS CUNHA A106910
DIOGO COSTA A107328
JOSÉ PINTO A107287

2023/2024

RESOLUÇÃO/ESTUDO

01.

a) As constantes têm os seguintes significados:

a: - Taxa intrínseca de crescimento da população P na ausência de competição.

b: - Efeito de autolimitação na população P devido à competição intraespecífica.

k: - Efeito da competição da população Q na população P.

c: - Taxa intrínseca de crescimento da população Q na ausência de competição.

d: - Efeito de autolimitação na população Q devido à competição intraespecífica.

ℓ: - Efeito da competição da população P na população Q.

b) Nas equações, cada termo representa a taxa de variação de cada população em relação ao tempo, levando em conta os efeitos da competição intraespecífica entre espécies.

c) Na ausência de uma das espécies, as equações diferenciais correspondentes seriam:

Se Q estiver ausente: P'(t) = (a−bP)P

Se P estiver ausente: Q'(t) = (c−dQ)Q

Estas equações representam a dinâmica de cada população num cenário isolado, sem a influência da outra espécie. Portanto, na ausência de uma das espécies, a equação diferencial correspondente descreve a taxa de variação da população remanescente considerando apenas os efeitos intrínsecos de crescimento e autolimitação dessa população.

02.

Os pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais são os valores das variáveis em que as derivadas são zero para todas as equações do sistema. No caso do sistema dado pelas equações (1):

$$\frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t) - kQ(t) = 0 \quad \text{(Equação 1)}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = c - dQ(t) - lP(t) = 0 \quad \text{(Equação 2)}$$

Para P'(t)=0: $a - bP - kQ = 0$

Para Q'(t)=0: $c - dQ - lP = 0$

Agora, podemos resolver este sistema de equações para *P* e *Q*.

Começamos por isolar *P* na Equação 1:

$$P = \frac{a - kQ}{b} \qquad (3)$$

Agora substituímos essa expressão para P na Equação 2:

$$c - dQ - l\frac{a - kQ}{b} = 0 \Leftrightarrow c - dQ - \frac{la}{b} + \frac{lkQ}{b} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{lk}{b}\right)Q - dQ = \frac{la}{b} - c$$

$$Q\left(\frac{lk}{b} - d\right) = \frac{la}{b} - c \Leftrightarrow Q = \frac{\frac{la}{b} - c}{\frac{lk}{b} - d} \Leftrightarrow Q = \frac{(la - cb)d}{(lk - db)c}$$

Uma vez encontrado Q, podemos encontrar *P* substituindo este valor de Q na equação (3) acima.

$$P = \frac{a - kQ}{b} = \frac{a - k\frac{(la-cb)d}{(lk-db)c}}{b} = \frac{a}{b} - \frac{dk\,(la - cb)}{cb\,(lk - db)}$$

R.: Essas são as expressões para os valores de *P* e *Q* que representam os pontos de equilíbrio do sistema de equações diferenciais, em função das constantes *a*, *b*, *k*, *c*, *d*, e *ℓ*.

03. A matriz Jacobiana é composta pelas derivadas parciais das equações em relação às variáveis P e Q. Vamos calcular essas derivadas parciais:

Para P'(t):

$$\frac{\partial P'(t)}{\partial P} = (a - 2bP - kQ)$$

$$\frac{\partial P'(t)}{\partial Q} = -kP$$

Para Q'(t):

$$\frac{\partial Q'(t)}{\partial Q} = (c - dQ - lP)$$

$$\frac{\partial Q'(t)}{\partial P} = -lQ$$

Agora, organizamos essas derivadas parciais na matriz Jacobiana:

$$\begin{bmatrix} (a - 2bP - kQ) & -kP \\ -lQ & (c - dQ - lP) \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações diferenciais P'(t) = F(P,Q)P'(t) = F(P,Q) e Q'(t) = G(P,Q)Q'(t) = G(P,Q).

04. ***Caso 1:*** Como a=b=k=1, c=0.5, d=0.25 e l=0.75, temos que:

P_{eq} = 1/2

$$J_{eq} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix} \quad Det\,(J_{eq} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow Det \begin{bmatrix} -\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{16} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \pm \frac{i\sqrt{2}}{4}$$

Com este resultado podemos concluir que A presença de parte imaginária nos autovalores sugere oscilações amortecidas em torno do ponto de equilíbrio. A presença de parte real negativa indica estabilidade, significando que perturbações iniciais decrescerão ao longo do tempo, levando o sistema de volta ao ponto de equilíbrio, sendo portanto linearmente estável.

Caso 2: Como a=b=k=1, c=0.75, d=1 e l=0.5, temos que:

$$P_{eq} = \frac{1}{3}$$

$$J_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad Det\,(J_{eq} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow Det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} - \lambda \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{18} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{8}$$

Estes resultados traduzem que o o ponto é instável pois a parte real dos valores próprios são positivos indicando a presença de um componente de exponencial cresecente.

Caso 3: Como a=b=k=1, c=1.5, d=1 e l=1, temos que:

$$P_{eq} = 1 - \frac{-0.5}{0} = +\infty$$

Como o ponto de equilibrio não existe a estabilidade para estes valores não pode ser estudada.

Caso 4: Como a=0.1, b=0.005, k=0.001, c=0.2, d=0.2/120 e l=0.02, temos que:

$P_{eq} = 20.2$

$J_{eq} = \begin{bmatrix} -0.1222 & -0.0202 \\ -0.404 & -4.244 \end{bmatrix}$ $Det\left(J_{eq} - I\lambda\right) = 0 \Leftrightarrow Det\begin{bmatrix} -0.1222-\lambda & -0.0202 \\ -0.404 & -4.244-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4.366\lambda + 0.5268 \Leftrightarrow \lambda \approx -4.237 \cap \lambda \approx 0.871$

Como um valor próprio apresenta parte real positiva e outro negativa isso implica que o ponto de equilíbrio está localmente na fronteira entre estabilidade e instabilidade. Essa situação é conhecida como um ponto de equilíbrio "impróprio" ou "semiflexível". Portanto, o comportamento do sistema dependerá das condições iniciais específicas e pode resultar em trajetórias que se afastam em algumas direções e se aproximam em outras, não se podendo, portanto, tirar conclusões acerca da sua estabilidade.

05.

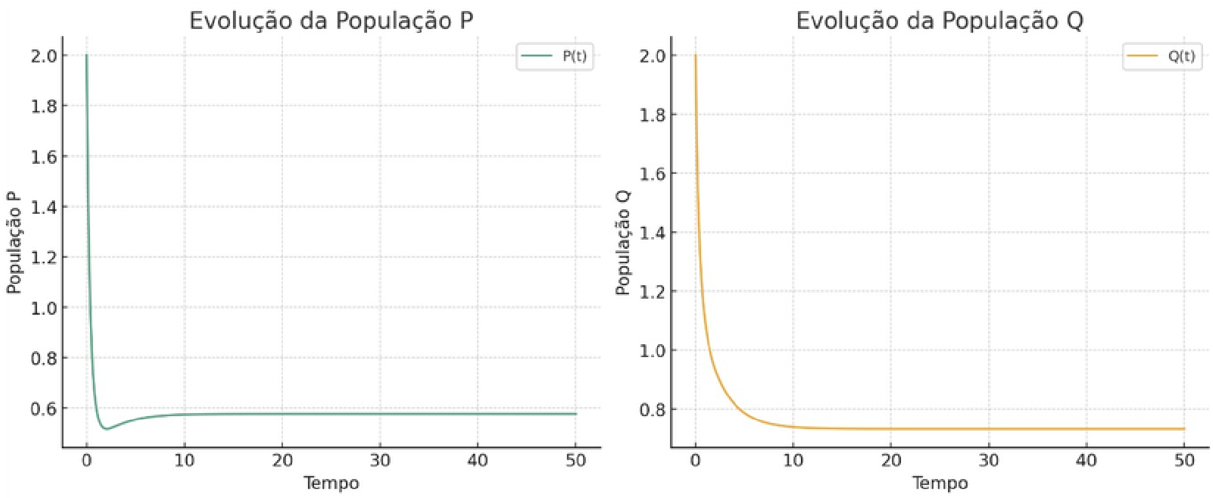
Vamos determinar os pontos de equilíbrio e analisar a estabilidade desses pontos para o conjunto Ide parâmetros do Caso 1 : a = b = k = 1, c = 0.5, d = 0.25, e ℓ = 0.75.

Para o Caso 1, existe um único Ponto de Equilíbrio para as espécies em competição, que é aproximadamente P* = 0.577 e Q* = 0.732.

A Matriz Jacobiana avaliada neste ponto de equilíbrio é:

$$\begin{bmatrix} -1.732 & -0.577 \\ -0.549 & -0.683 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio para o Caso 1 são aproximadamente -1.977 e -0.438. Como ambos são negativos, isso indica que o Ponto de Equilíbrio é estável. Isso significa que pequenas perturbações nas populações de ambas as espécies tenderão a voltar para esse ponto de equilíbrio ao longo do tempo. Agora, vamos proceder com as simulações numéricas para visualizar o comportamento das populações P e Q ao longo do tempo, começando com as condições iniciais P(0) = Q(0) = 2.



- A população P(t) diminui rapidamente no início e depois estabiliza-se num valor que é consistente com o ponto de equilíbrio calculado.
- A população Q(t) também diminui rapidamente e estabiliza-se num nível que corresponde ao ponto de equilíbrio.

Ambas as populações estabilizam-se ao longo do tempo, o que está alinhado com a análise da estabilidade feita anteriormente usando os autovalores da matriz Jacobiana. Isso confirma que o ponto de equilíbrio é estável para o conjunto de parâmetros dado no Caso 1.