Série clássica de Fourier | $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{j2\pi m \frac{t}{T}}$, $C_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j2\pi m \frac{t}{T}} dt$

período $\frac{T}{|m|}$, $f = m/T$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

$x(t) = 2\cos(4\pi t) - \sin(6\pi t)$ 1. f. fundamental?

$\cos(4\pi t) = \cos(2\pi \frac{t}{T_1}) \rightarrow 4\pi t = \frac{2\pi t}{T_1} \Leftrightarrow T_1 = \frac{1}{2}$ | $\sin(6\pi t) = \sin(2\pi \frac{t}{T_2})$ $\Leftrightarrow T_2 = \frac{1}{3}$

Período = m. m.c de T_1 e T_2: $K_1 T_1 = K_2 T_2$, K nº int $\frac{K_1}{2} = \frac{K_2}{3}$ $\Leftrightarrow K_1 = 2$ e $K_2 = 3$

ou $Freq_1 = 1/\frac{1}{2} = 2Hz$ $Freq_2 = 1/\frac{1}{3} = 3Hz$

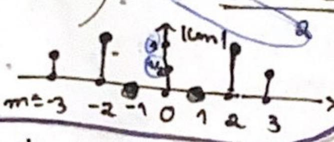
Freq = m.d.c de 2 e 3 = 1

2. Expanda x(t) na S.C.F

$x(t) = 2 \times \frac{e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}}{2} - \left(\frac{e^{j6\pi t} - e^{-j6\pi t}}{2j}\right) = 2 \times \frac{e^{j2\pi 2t} + e^{-j2\pi 2t}}{2} - \frac{e^{j2\pi 3t} - e^{-j2\pi 3t}}{2j}$ logo T=1

3. Gráfico de $|C_m|$ em função da freq.

T=1 m=2 m=-2 m=3 m=-3



Transformada de Fourier

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$: fazer $t = nT_a \rightarrow T_a$ é p. de amostragem | $x_a(n) = x_a(nT_a) = \cos(2\pi f_0 nT_a) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_a} n)$

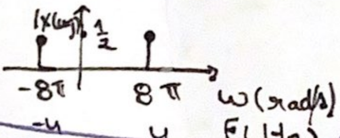
Note que $\cos(2\pi \frac{f_0}{f_a} n) = \cos(2\pi \frac{f_0 + Kf_a}{f_a} n)$, $K \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow = 2\pi \frac{f_0}{f_a} n + \cancel{2\pi K n}$. P/ q/ n haja ambiguidades $\left|\frac{f_0}{f_a}\right| < \frac{1}{2}$

Se o sinal $x(t) = \cos(\underbrace{8\pi t}_{2\pi f t})$ for amostrado a 3 Hz, c/ q sinais se confunde? Esboce graf |X(jω)|

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, com $f_0 = 4$ } $x(nT_a) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_a} t)$, com $f_a = 3$ $= \cos(2\pi \frac{f_0 + Kf_a}{f_a} t)$

$f_0 + Kf_a$ ($4 + K3$) $= -2, K=-2$ | $+1, K=-1$ | $+4, K=0$ | $+7, K=+1$. x(t) confunde-se c/ outros sinais q/ freq -2, 1, +7, etc

Graf: $\cos(8\pi t) = \frac{e^{j2\pi 4t} + e^{-j2\pi 4t}}{2}$ (4Hz, -4Hz)



Transf. discreta de Fourier

freq. ass a X(m): $\frac{m}{T} = \frac{m}{NT_a} = \frac{m}{N} f_a$

X(m) → f. perió de T=N {m=N-1=-1}

Um sinal periódico com uma freq. fundamental de 10Hz foi amostragem 5 vezes num período. Os val. de X(m) da sua DFT são (*). Desenhe o graf c/ x:x em Hz

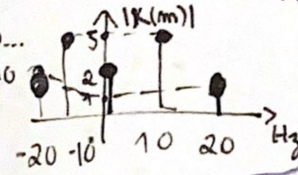
(*)

m	X(m)
0	2
1	3+4j
2	-1
3	-1
4	3-4j

$Fa = 5 \times 10 = 50Hz$ (N)

m → freq de $\frac{m}{N} fa$ $= mF = 10m$

m	X(m)	Freq
-5, 0, 5	2	-50, 0, 50...
-4, 1, 6	$\sqrt{3^2+4^2} = 5$	-40, 0, 40
-3, 2, 7	1	⋮
-2, 3, 8	1	
-1, 4, 9	5	



Aliasing É um fenómeno de distorção que ocorre quando

uma freq de amostragem é insuf. para representar corretamente as inf de um sinal. Ele pode ocorrer em diferentes contextos mas é comum em audio digital e imagens digitais. Em áudio digital, por exemplo, se a freq de amostr. é insuf. para capturar todas as freq presentes no sinal de audio. As freq acima da freq. de amostragem máx permitida apareceram como alises em freq abaixo da freq. de amostragem máxima. Isto pode causar distorções audíveis e reduzir a qualidade de audio, mas não o tem/p

Quantização sinal quantizado: $x_q(n) = round(x(n)/\Delta)$ | sinal. reconst. $x_r(n) = \Delta x_q(n) = \Delta\, round(x(n)/\Delta)$ | erro abs de quant $< \Delta/2$, erro quadrático médio:

$\int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{e^3}{3\Delta} \Big|_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12}$ $\Delta = \frac{2A}{2^B} = A 2^{1-B}$ ou $\Delta = \frac{2A}{2^B - 2} = A 2^{1-B}$

← densidade da prob.

Pretende-se quantizar o sinal $x(m) = 2\cos(8\pi t + 1) - 2\sin(13\pi t) + \cos(17\pi t)$ com 10 bits. ~~Este~~ Amplitude: $|x(m)| \leq |2\cos(8\pi t+1)| + |-2\sin(13\pi t)| + |\cos(17\pi t)| = 2+2+1 = 5$ | passo de quant. (Δ): $\Delta = \frac{2A}{2^{10}-2} = \frac{2 \cdot 5}{1024-2} \simeq \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ | Sinal quantizado: $x_q(m) = \text{round}(100\,x(m))$

Sinal reconstruído: $x_r(m) = \Delta x_q(m) = 0{,}01\,\text{round}(100\,x(m))$ | erro absoluto: $\Delta/2 = 0.005$

erro quadrático médio: $\frac{\Delta^2}{12} = \frac{0{,}0001}{12} = 10^{-5}$ | erro absoluto: $\Delta/2 = 0{,}005$

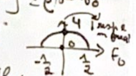
Processamento (filtragem) de sinais

$y(m) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,x(m-k)$

Sabe-se que o sinal de saída é dado por $y(m) = x(m) + 2x(m-1) + x(m-2)$. Esboce o graf. do n.º absoluto da resposta em freq deste sistema.

Para $x(m) = e^{j2\pi f_0 m}$ temos $y(m) = x(m)\,[\underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{2e^{-j2\pi f_0}}_{k=1} + \underbrace{e^{-j4\pi f_0}}_{k=2}]$. A resposta em freq é então: $1 + 2e^{-j2\pi f_0} + e^{-j4\pi f_0} = e^{-j2\pi f_0}[e^{j2\pi f_0} + 2 + e^{-j2\pi f_0}] = e^{-j2\pi f_0}\,2[1+\cos(2\pi f_0)]$. O seu valor absoluto é então $[2+2\cos(2\pi f_0)]$.

Usando o sinal de teste $x(m) = e^{j2\pi f_0 m}$ temos $y(m) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\,e^{j2\pi f_0 (m-k)} = e^{j2\pi f_0 m}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\,e^{-j2\pi f_0 k}\right]$.



Compressão de informação

N.º médio bits: $\sum$ n bits × prob. $H \leq$ n.º médio de bits $< H+1$

Entropia: $H = -\sum P_i \log_2 P_i \rightarrow P_i$ é p P_0, P_1, P_2

Ex:

símbolo	P
S_0	0,1
S_1	0,6
S_2	0,1
S_3	0,2

$\rightarrow$

S_{02}	0,2
S_1	0,6
S_3	0,2

$\rightarrow$

S_{023}	0,4
S_1	0,6

$\rightarrow$

S_{0123}	1

Cód. Huffman:

S_0	$C_0 = 000$
S_1	$C_1 = 1$
S_2	$C_2 = 001$
S_3	$C_3 = 01$

S_{02}: $C_{02} = 00$; S_1: $C_1 = 1$; S_3: $C_3 = 01$

Os códigos binários obtêm-se olhando para trás

S_{023}	$C_{023} = 0$
S_1	$C_1 = 1$

$\leftarrow S_{0123}$

S_0	1/8
S_1	3/8
S_2	1/8
S_3	2/8
S_4	1/8

Calcule: a) entropia $-\log_2 \frac{1}{8} = 3$; $-\log_2 \frac{3}{8} = 3 - 1{,}585 = 1{,}415$; $-\log_2 2/8 = 2$

$H = (3 + 3 \times 1{,}415 + 3 + 2 \times 2 + 3)/8 = 2{,}156$

b) código Huffman

código	símbolo		
00	S_0	1	$\xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 5 \xrightarrow{0} 8$
01	S_1	3	$\xrightarrow{1}$
01	S_2	1	$\xrightarrow{1}$
10	S_3	2	$\xrightarrow{0} 3 \xrightarrow{1}$
11	S_4	1	$\xrightarrow{1}$

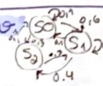
c) n.º médio de bits do código de Huffman

$(3 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1)/8 = 9/4 = 2{,}25$

d) codifique $S_0 S_3 S_1 S_4$: 1000 | 10 | 01 | 11 |

e) descodifique 0010001 | 1001 | 000 | 11 → S_2 S_0 S_4

Código Huffman c/ cadeias de Markov



• constrói 3 cód. Huffman → 1 p/ símbolo que segue S_0

S_0	0,1	$\xrightarrow{0} 0{,}4 \xrightarrow{0} 1{,}0$	00
S_1	0,6	$\xrightarrow{1}$	1
S_2	0,3	$\xrightarrow{1}$	01

1.4 bits por símbolo $(0{,}0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}6 + 0{,}1 \times 0{,}3)$

→ 1 p/ o que segue S_1

S_0	0,1	$\xrightarrow{0} 0{,}5 \xrightarrow{0} 1{,}0$	00
S_1	0,5	$\xrightarrow{1}$	1
S_2	0,4	$\xrightarrow{1}$	01

1.5 bits por símbolo

→ 1 p/ codificar um símbolo que segue S_2

S_0	0,7	$\xrightarrow{0}$ 0
S_1	0,3	$\xrightarrow{1}$ 1
S_2	0,0	x

1 bits por símbolo

Run lenght encoding (RLE)

Run lenght encoding (RLE): forma de codificação/compressão de dados em que sequências de dados são armazenados com um único valor de dados e contagem, em vez de serem armazenados na forma original. Para compactar uma sequência de símbolos no RLE contam-se quantas vezes aparece consecutivamente o mesmo símbolo e envia-se o símbolo e a respetiva contagem. AAABBCAAA envia (A, 3) (B, 2) (C, 1) (A, 3)

Pretende-se codificar $S_1 S_0 S_2$ usando um codificador aritmético. Sabe-se que $P_0 = 0{,}1$, $P_1 = 0{,}5$, $P_2 = 0{,}3$ e $P_3 = 0{,}1$. Descodifique 0.52

codificar

0.0 — 0.1 — 0.6 — 0.9 — 1.0 → S_1

0,10 — 0,15 — 0,40 — 0,55 — 0,60 (S_0, S_1, S_2, S_3) → S_0

0,100 — 0,105 — 0,125 — 0,145 — 0,150 (S_0, S_1, S_2, S_3) → S_2

→ enviar 0,13 ou 0,14

descodificar

0.0 — 0.1 — 0.6 — 0.9 — 1.0 (S_0, S_1, S_2, S_3)

0,1 — 0,15 — 0,40 — 0,55 — 0,60

$0{,}52 \in [0{,}40, 0{,}55[$

como não há algarismos termina-se a descodificação $S_1 S_2$

Compressão LZW (Lempel–Ziv–Welch)

1. Iniciar o dicionário c/ todos os strings de comprimento 1 – 2 / P = empty string
3) repetir até se chegar ao fim dos dados por comprimir
   3a) C = próximo símbolo
   b) se PC estiver no dic P = concatenação P e C voltar a 3
   c) enviar o índice correspondente a P, adicionar PC ao dic, P = C e voltar a 3
4) enviar o índice correspondente a P

Ex: Para um dic inicializado com A, B, C e comprime ABAACABA

Dic

índice	string
0	A
1	B
2	C
3	AB
4	BA
5	AA
6	AC
7	CA
8	ABA

P	C	P+C	índice
	A	A	x
A	B	AB	0
B	A	BA	1
A	A	AA	0
A	C	AC	0
C	A	CA	2
AB	A	ABA	3
A	x		0

• À medida q o dic vai ficando maior, o n.º de bits nec. para codificar os índice aumenta