universidade de aveiro estga escola superior de tecnologia e gestão de águeda

Matemática II - Licenciatura em Eletrónica e Mecânica Industrial

Formulário

Cálculo Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Área da região plana limitada superiormente por f e inferiormente por g: $A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

Valor médio de f: $f_m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Comprimento de arco de curva: $L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Trabalho: $W = \int_a^b f(x)\cos(\theta(x))\,dx$

Integral Duplo

Coordenadas Polares: $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}, \quad \begin{matrix} r > 0 \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{matrix}$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{sen}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Volume de $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R,\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\right\}$: $V(S) = \iint_R f_2(x,y) - f_1(x,y)\,dx\,dy$

Valor médio de uma função em R: $f_{m,R} = \dfrac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

Área da superfície $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R,\ z = f(x,y)\right\}$: $A(S) = \iint_R \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}\,dx\,dy$

Regras de Derivação

Sejam u e v duas funções diferenciáveis e $c \in \mathbb{R}$

1. $(c)' = 0$
2. $(u+v)' = u' + v'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $(u^p)' = pu^{p-1}u'\ ,\ p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
6. $(a^u)' = u'a^u \ln(a)\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
7. $(e^u)' = u'e^u$
8. $(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \ln(a)}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
9. $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
10. $(\operatorname{sen}(u))' = u' \cos(u)$
11. $(\cos(u))' = -u' \operatorname{sen}(u)$
12. $(\operatorname{tg}(u))' = u' \sec^2(u)$
13. $(\operatorname{cotg}(u))' = -u' \operatorname{cosec}^2(u)$
14. $(\sec(u))' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$
15. $(\operatorname{cosec}(u))' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$
16. $(\operatorname{senh}(u))' = u' \cosh(u)$
17. $(\cosh(u))' = u' \operatorname{senh}(u)$
18. $(\operatorname{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
19. $(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
20. $(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

Primitivas Imediatas

Seja u uma função diferenciável e $C \in \mathbb{R}$

1. $\int k\, dx = kx + C\ ,\ k \in \mathbb{R}$
2. $\int u' u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C\ ,\ p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3. $\int u'\, e^u\, dx = e^u + C$
4. $\int u'\, a^u\, dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
5. $\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C$
6. $\int u' \operatorname{sen}(u)\, dx = -\cos(u) + C$
7. $\int u' \cos(u)\, dx = \operatorname{sen}(u) + C$
8. $\int u' \operatorname{tg}(u)\, dx = -\ln|\cos(u)| + C$
9. $\int u' \operatorname{cotg}(u)\, dx = \ln|\operatorname{sen}(u)| + C$
10. $\int u' \sec^2(u)\, dx = \operatorname{tg}(u) + C$
11. $\int u' \operatorname{cosec}^2(u)\, dx = -\operatorname{cotg}(u) + C$
12. $\int u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)\, dx = \sec(u) + C$
13. $\int u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)\, dx = -\operatorname{cosec}(u) + C$
14. $\int u' \sec(u)\, dx = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + C$
15. $\int u' \operatorname{cosec}(u)\, dx = \ln|\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)| + C$
16. $\int u' \operatorname{senh}(u)\, dx = \cosh(u) + C$
17. $\int u' \cosh(u)\, dx = \operatorname{senh}(u) + C$
18. $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\, dx = \operatorname{arcsen}(u) + C$
19. $\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \operatorname{arctg}(u) + C$

Primitivação por Partes: $\displaystyle\int u\,v\,dx = \int u\,dx\,v - \int \left(\int u\,dx\,v'\right) dx$

Primitivação por Substituição: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))\,g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$

Tipo de Função	**Substituição**
$R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\,\text{sen}(t)$ ou $x = \frac{a}{b}\cos(t)$
$R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\,\text{tg}(t)$
$R\left(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\sec(t)$
$R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}\right)$	$x = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, \ldots)$
$R\left(x, a^{rx}, a^{sx}\right)$	$a^{mx} = t$ onde $m = m.d.c.(r, s, \ldots)$

Primitivação de Potências de Funções Trigonométricas

Potências ímpares de $\text{sen}(x)$ ou $\cos(x)$	$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
Potências pares de $\text{sen}(x)$ ou $\cos(x)$	$\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ ou $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
Potências de $\text{tg}(x)$ ou $\text{cotg}(x)$	$\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ ou $\text{cotg}^2(x) + 1 = \text{cosec}^2(x)$
Potências pares de $\sec(x)$ ou $\text{cosec}(x)$	$\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ ou $\text{cotg}^2(x) + 1 = \text{cosec}^2(x)$

Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Sejam $a, b, w \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

1. $\mathcal{L}\{af(t) + b\,g(t)\} = a\,F(s) + b\,G(s)$
2. $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$
3. $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$
4. $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$
5. $\mathcal{L}\{\cos(wt)\} = \dfrac{s}{s^2 + w^2}$
6. $\mathcal{L}\{\text{sen}(wt)\} = \dfrac{w}{s^2 + w^2}$
7. $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\,F(s) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$
8. $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n\,F^{(n)}(s)$
9. $\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$
10. $\mathcal{L}\{U_a(t)\,f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$
11. $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right\} = F(s)\,G(s)$

Transformadas de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt} f(t)dt$$

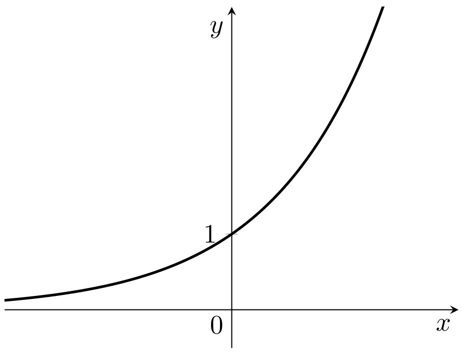
Sejam $a, b, \tau, w_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$.

1. $\mathcal{F}\{af(t) + b\,g(t)\} = a\,F(w) + b\,G(w)$
2. $\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = (jw)^n\,F(w)$
3. $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-jwa}\,F(w)$
4. $\mathcal{F}\left\{e^{j\tau t} f(t)\right\} = F(w - \tau)$
5. $\mathcal{F}\left\{f(\frac{t}{c})\right\} = c\,F(cw)$
6. $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
7. $\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
8. $\mathcal{F}\{t^n f(t)\}(w) = j^n\,F^{(n)}(w)$

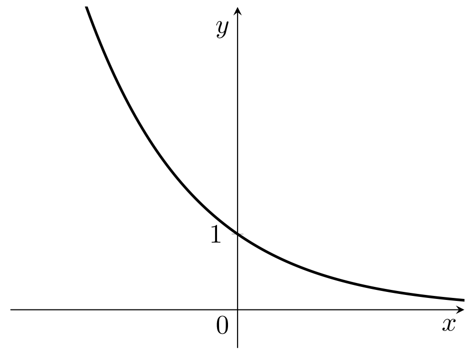
Funções Elementares

Função Exponencial: $\mathbf{y = a^x}$, $a > 0$ e $a \neq 1$

$a > 1$

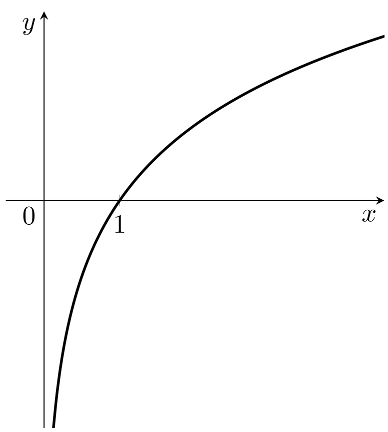


$0 < a < 1$

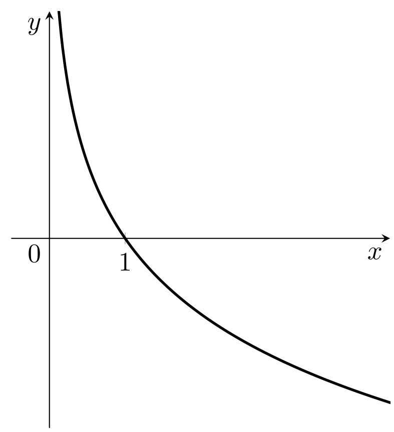


Função Logarítmica: $\mathbf{y} = \log_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$, $a > 0$ e $a \neq 1$

$a > 1$

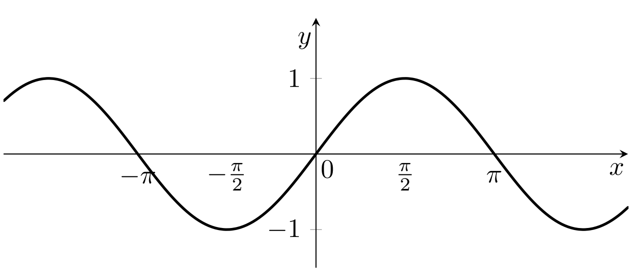


$0 < a < 1$

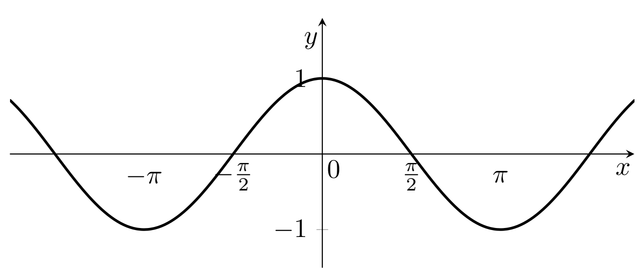


Funções Trigonométricas

$y = \text{sen}(x)$



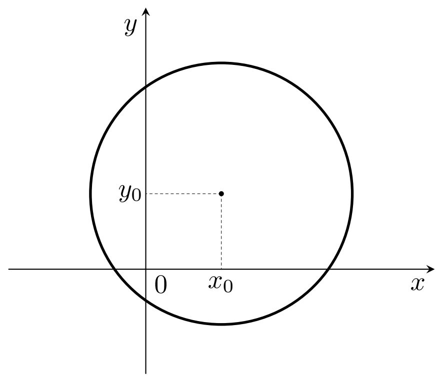
$y = \cos(x)$



Cónicas

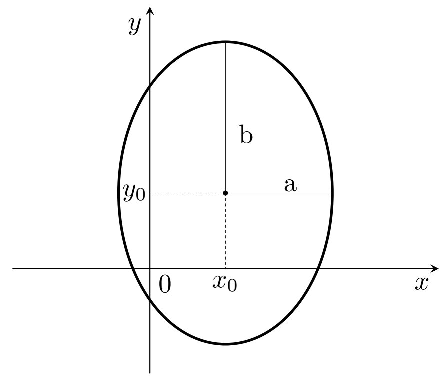
Circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



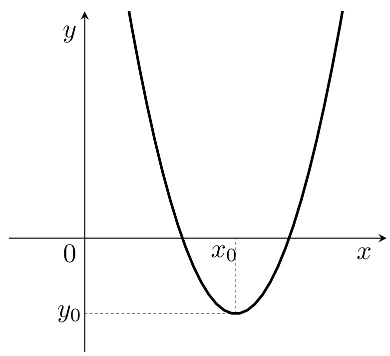
Elipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

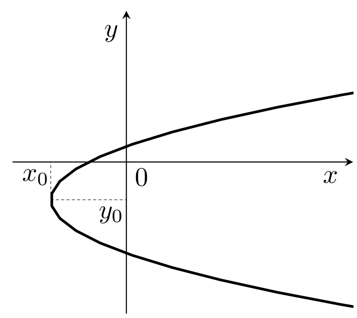


Parábola

$$y = y_0 + a\,(x - x_0)^2$$

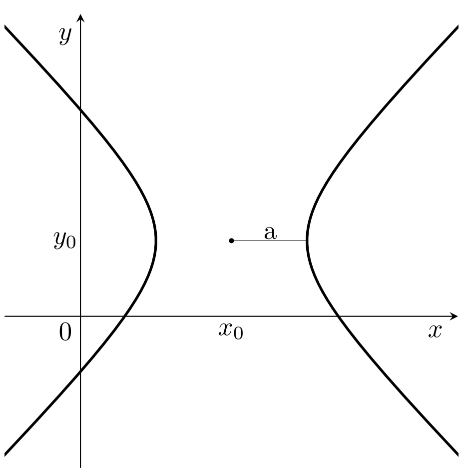


$$x = x_0 + a\,(y - y_0)^2$$

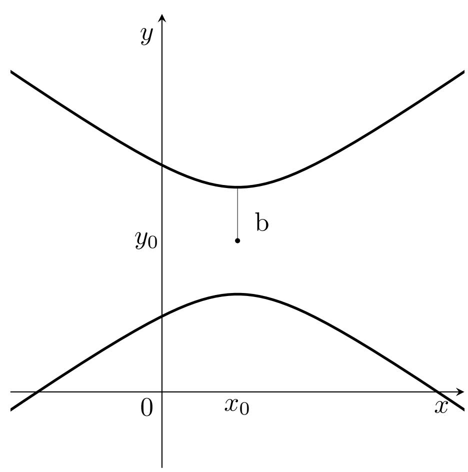


Hipérbole

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



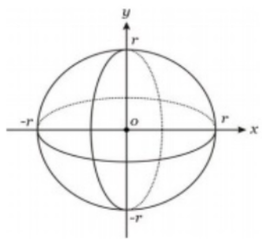
$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$

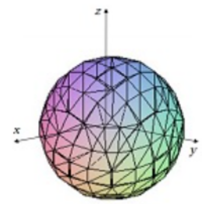


Superfícies Quádricas

Superfície Esférica

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

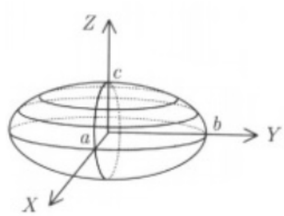


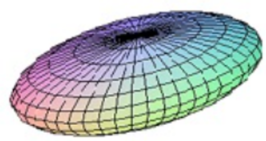


- 3 variáveis x, y e z;
- as 3 variáveis elevadas ao quadrado;
- as variáveis ao quadrado têm o mesmo sinal;
- os coeficientes das variáveis são iguais;
- o termo independente é diferente de 0.

Elipsóide

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

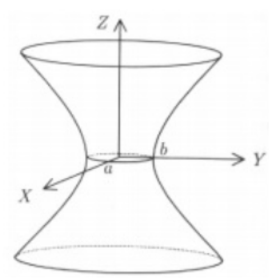


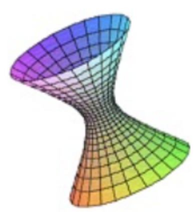


- 3 variáveis x, y e z;
- as 3 variáveis elevadas ao quadrado;
- as variáveis ao quadrado têm o mesmo sinal;
- alguns dos coeficientes das variáveis são diferentes;
- o termo independente é diferente de 0.

Hiperbolóide de 1 Folha

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

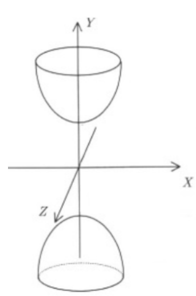


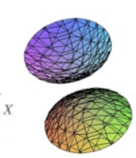


- 3 variáveis x, y e z;
- as 3 variáveis elevadas ao quadrado;
- uma das variáveis ao quadrado têm sinal negativo;
- o termo independente é positivo.

Hiperbolóide de 2 Folhas

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

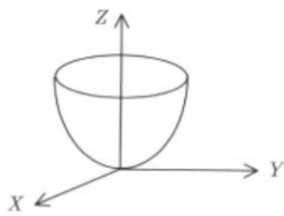


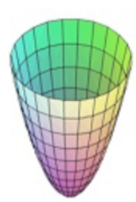


- 3 variáveis x, y e z;
- as 3 variáveis elevadas ao quadrado;
- uma das variáveis ao quadrado têm sinal positivo;
- o termo independente é positivo.

Parabolóide Elíptico

$$z = z_0 + \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

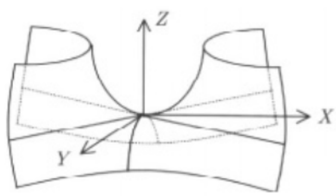


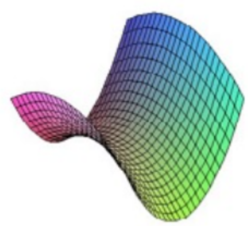


- 3 variáveis x, y e z;
- 2 variáveis elevadas ao quadrado;
- as variáveis ao quadrado têm o mesmo sinal.

Parabolóide Hiperbólico

$$z = z_0 + \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

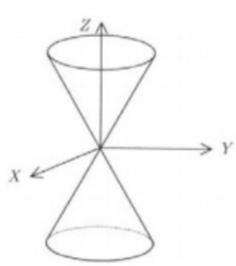




- 3 variáveis x, y e z;
- 2 variáveis elevadas ao quadrado;
- as variáveis ao quadrado têm sinais diferentes.

Cone Elíptico

$$(z-z_0)^2 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$



- 3 variáveis x, y e z;
- as 3 variáveis elevadas ao quadrado;
- o termo independente é 0.

Cilindro Elíptico

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

- 2 variáveis;
- as 2 variáveis elevadas ao quadrado;
- as variáveis ao quadrado têm sinal positivo;
- o termo independente é positivo.

Observação: As equações das quádricas estão escritas na sua forma genérica e as representações gráficas são exemplos destas com os centros ou vértices na origem.