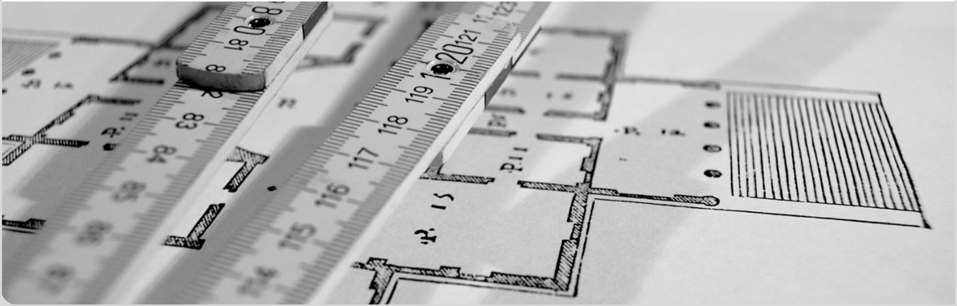
Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr.

Foliensatz 0333

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 6. November 2012

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Outline/Gliederung

1. Formale Sprachen

2. Aufgaben

Definition

Definition: formale Sprache

Eine *formale Sprache* (über einem Alphabet A) ist eine Teilmenge $L \subseteq A*$.

Erklärung

Erklärung

L ist also eine Menge. Darin sind alle syntaktisch korrekten Gebilde enthalten.

Beispiel

Beispiel

1. Das Alphabet ist $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
2. Die Sprache L sind alle Dezimalzahlen

Beispiel

Beispiel

1. Das Alphabet ist $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
2. Die Sprache L sind alle Dezimalzahlen
3. $\Rightarrow -22 \in L$

Beispiel

Beispiel

1. Das Alphabet ist $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
2. Die Sprache L sind alle Dezimalzahlen
3. $\Rightarrow -22 \in L$
4. $\Rightarrow 22 - 0 - - - 3 \notin L$ (aber $\in A$!)

Produkt

Definition: Produkt

Seien L_1 und L_2 zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 | w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das Produkt der Sprachen L_1 und L_2.

Potenzen

Definition: Potenzen

L sei eine formale Sprache. Rekursiv lässt sich auch die Potenz davon definieren.

$$L^0 = \{\epsilon\}$$
$$L^{i+1} = L^i \cdot L$$

Konkatenationsabschluss

Definition: Konkatenationsabschluss

L sei eine formale Sprache. Dann ist der Konkatenationsabschluss:

$$L^* = \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{\infty} L^{\mathrm{i}}$$

Der ϵ-freie Konkatenationsabschluss ist:

$$L^+ = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} L^{\mathrm{i}}$$

Konkatenationsabschluss

ϵ-freier Konkatenationsabschluss

Falls $\epsilon \in L$, so enthält der ϵ-freie Konkatenationsabschluss auch ϵ.

Beispiele

Beispiele

1. IP4-Adressen
2. Programmiersprache C
3. HTML
4. E-Mail (RFC 5322)

Wie es geht

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$
3. $L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$ oder
4. $L = \{w_1 b w_2 | w_1, w_2 \in a^*\}$

Übung

1. Was ist L^3?
2. Was ist $L^i \; \{b\}^*$?

Wie es geht

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$
3. $L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$ oder
4. $L = \{w_1 b w_2 | w_1, w_2 \in a^*\}$

Übung

1. Was ist L^3?
2. Was ist $L^i \ \{b\}^*$?

Wie es geht

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$
3. $L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$ oder
4. $L = \{w_1 b w_2 | w_1, w_2 \in a^*\}$

Übung

1. Was ist L^3?
2. Was ist $L^i \quad \{b\}^*$?

Wie es geht

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b" enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$
3. $L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$ oder
4. $L = \{w_1 b w_2 | w_1, w_2 \in a^*\}$

Übung

1. Was ist L^3?
2. Was ist L^i $\{b\}^*$?

Wie es geht

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$
3. $L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$ oder
4. $L = \{w_1 b w_2 | w_1, w_2 \in a^*\}$

Übung

1. Was ist L^3?
2. Was ist $L^i \ \{b\}^*$?

Übungsaufgabe

Karlsruher Institut für Technologie

Winter 2010/2011

Es sei $A = \{a, b\}$. Beschreiben Sie die folgenden formalen Sprachen mit den Symbolen $\{$, $\}$, a, b, ϵ, $\bigcup$, $*$, Komma,), (und +:

1. die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort „ab“ enthalten
2. die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein „b“ ist
3. die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei „b“s hintereinander vorkommen

Übungsaufgabe

Lösung

1. $\{a, b\}^* \cdot \{ab\} \cdot \{a, b\}^*$
2. $\{a, b\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}^1$
3. $\{a, ba\}^* \cdot \{b, \epsilon\}$

Übungsaufgabe

Winter 2008/2009

Es sei A = a, b. Die Sprache L $\subset$ A$*$ sei definiert durch

$$L = (\{a\}^* \{b\} \{a\}^*)^*$$

Zeigen Sie, dass jedes Wort w aus $\{a, b\}^*$, das mindestens einmal das Zeichen b enthält, in L liegt. (Hinweis: Führen Sie eine Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Zeichens b in w durch.)

Übungsaufgabe

Induktionsanfang

Für k = 1: In diesem Fall lässt sich das Wort w aufteilen in

$$w = w_1 \cdot b \cdot w_2$$

wobei w_1 und w_2 keine b enthalten und somit in $\{a\}^*$ liegen. Damit gilt $w \in \{a\}^* \{b\} \{a\}^*$ und somit auch

$$w \in (\{a\}^* \{b\} \{a\}^*)^* = L$$

Übungsaufgabe

Induktionsannahme

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass alle Wörter über $\{a, b\}^*$, die genau k-Mal das Zeichen b enthalten, in L liegen.

Induktionsschritt

Wir betrachten ein Wort w , das genau $k + 1$ Mal das Zeichen „b“ enthält. Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 \cdot w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen b enthält und w_2 genau k Mal das Zeichen „b“. Nach Induktionsanfang liegt w_1 in $\{a\}^* \{b\} \{a\}^*$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt w_2 in $(\{a\}^* \{b\} \{a\}^*)^*$, was bedeutet, dass $w = w_1 \cdot w_2$ in $\left(\{a\}^* \{b\} \{a\}^*\right)(\{a\}^* \{b\} \{a\}^*)^* \subset (\{a\}^* \{b\} \{a\}^*)^* = L$ liegt und die Behauptung ist gezeigt.

¡++¿