GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 12

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 24. Januar 2013

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

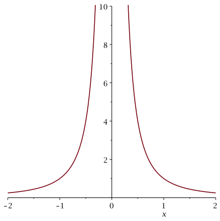
Partielle Funktionen

Definition: Partielle Funktion

Eine partielle Funktion ist eine rechtseindeutige Relation, die nicht zwingend linkstotal ist.
Wir schreiben

$$f : M \dashrightarrow M'$$

Anschaulich:
Funktionen, die an manchen Stellen "Definitionslücken" haben dürfen.
Beispiel:
$\frac{1}{x^2}$ ist eine partielle Funktion ($x = 0$ hat keinen Funktionswert)



Turingmaschine

Definition: Turingmaschine

Eine Turingmaschine T ist definiert durch

$$T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$$

Dabei ist

- **Z**: die Zustandsmenge

Turingmaschine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Turingmaschine

Eine Turingmaschine T ist definiert durch

$$T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$$

Dabei ist

- **Z**: die Zustandsmenge
- $\mathbf{z_0}$: der Anfangszustand

Turingmaschine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Turingmaschine

Eine Turingmaschine T ist definiert durch

$$T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$$

Dabei ist

- **Z**: die Zustandsmenge
- $\mathbf{z_0}$: der Anfangszustand
- **X**: das Bandalphabet

Turingmaschine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Turingmaschine

Eine Turingmaschine T ist definiert durch

$$T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$$

Dabei ist

- **Z**: die Zustandsmenge
- $\mathbf{z_0}$: der Anfangszustand
- **X**: das Bandalphabet
- $\mathbf{f} : \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Z}$: die partielle Zustandsüberführungsfunktion

Turingmaschine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Turingmaschine

Eine Turingmaschine T ist definiert durch

$$T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$$

Dabei ist

- **Z**: die Zustandsmenge
- $\mathbf{z_0}$: der Anfangszustand
- **X**: das Bandalphabet
- $\mathbf{f} : \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Z}$: die partielle Zustandsüberführungsfunktion
- $\mathbf{g} : \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{g}$: die partielle Ausgabefunktion

Turingmaschine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Turingmaschine

Eine Turingmaschine T ist definiert durch

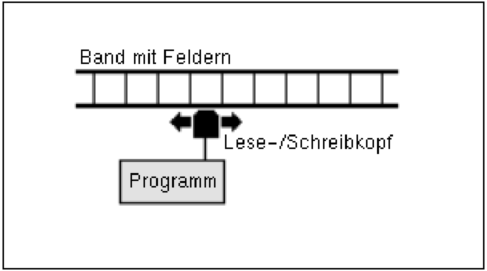
$$T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$$

Dabei ist

- $\mathbf{Z}$: die Zustandsmenge
- $\mathbf{z_0}$: der Anfangszustand
- $\mathbf{X}$: das Bandalphabet
- $\mathbf{f} : \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Z}$: die partielle Zustandsüberführungsfunktion
- $\mathbf{g} : \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{g}$: die partielle Ausgabefunktion
- $\mathbf{m} : \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \dashrightarrow \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$: die partielle Bewegungsfunktion

Turingmaschine: Verständnis

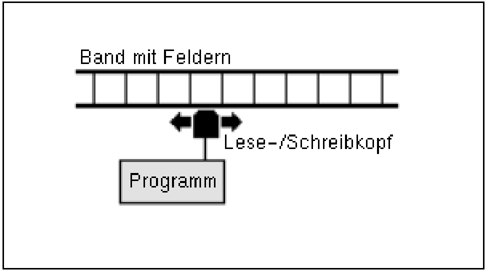
Woher kennen wir ähnliche Funktionen wie f und g?



Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Turingmaschine: Verständnis

Woher kennen wir ähnliche Funktionen wie f und g?
Von Automaten und Akzeptoren.

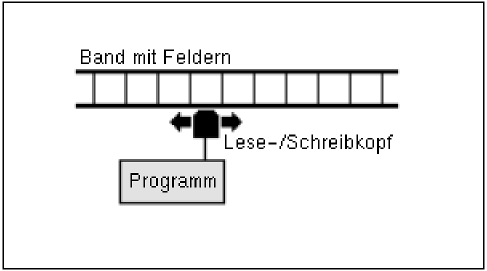


Turingmaschine: Verständnis

Woher kennen wir ähnliche Funktionen wie f und g?

Von Automaten und Akzeptoren.

Wo war dort der Unterschied?



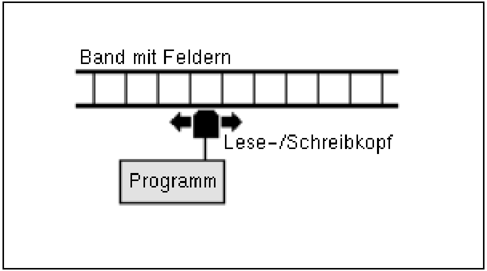
Turingmaschine: Verständnis

Woher kennen wir ähnliche Funktionen wie f und g?

Von Automaten und Akzeptoren.

Wo war dort der Unterschied?

Bei Automaten und Akzeptoren waren die Funktionen nicht partiell.



Turingmaschine: Verständnis

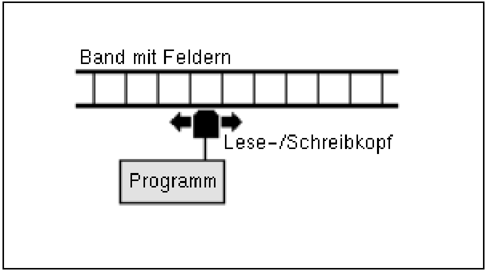
Woher kennen wir ähnliche Funktionen wie f und g?

Von Automaten und Akzeptoren.

Wo war dort der Unterschied?

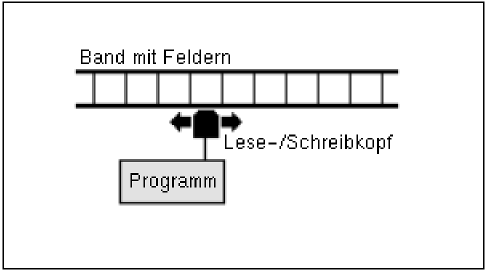
Bei Automaten und Akzeptoren waren die Funktionen nicht partiell.

Was bewirken partielle Zustandsübergangsfunktionen?



Turingmaschine: Verständnis

Woher kennen wir ähnliche Funktionen wie *f* und *g*?
Von Automaten und Akzeptoren.
Wo war dort der Unterschied?
Bei Automaten und Akzeptoren waren die Funktionen nicht partiell.
Was bewirken partielle Zustandsübergangsfunktionen?
Die partiellen Funktionen bewirken, dass der Automat zu manchen *Konfigurationen* stehen bleibt.



Konfiguration einer Turingmaschine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

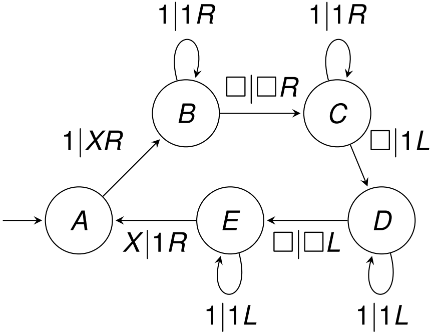
Definition: Konfiguration

Eine Turingmaschine befindet sich zu jedem Zeitpunkt in einem "Gesamtzustand", den wir eine Konfiguration nennen. Sie ist beschrieben durch

- den aktuellen Zustand $z \in Z$ der Steuereinheit
- die aktuelle Beschriftung $b \in X^*$ des gesamten Bandes
- die aktuelle Position $p \in \mathbb{Z}$ des Kopfes

Turingmaschine: Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



	A	B	C	D	E
□		C,□,R	D,1,L	E,□,L	
1	B,X,R	B,1,R	C,1,R	D,1,L	E,1,L
X					A,1,R

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Turingmaschine: Beispiel

Was macht die Turingmaschine?

Was passiert mit dem Wort . . . □11□ . . . , das auf dem Band steht?

		A						
1.		↓						
	□	1	1	□	□	□	□	□

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Turingmaschine: Beispiel

Was macht die Turingmaschine?

Was passiert mit dem Wort . . . □11□ . . . , das auf dem Band steht?

1.		A ↓						
	□	1	1	□	□	□	□	□
2.			B ↓					
	□	X	1	□	□	□	□	□

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Turingmaschine: Beispiel

Was macht die Turingmaschine?

Was passiert mit dem Wort . . . □11□ . . . , das auf dem Band steht?

		A						
1.		↓						
	□	1	1	□	□	□	□	□
			B					
2.			↓					
	□	X	1	□	□	□	□	□
				B				
3.				↓				
	□	X	1	□	□	□	□	□

Turingmaschine: Beispiel

Was macht die Turingmaschine?

Was passiert mit dem Wort . . . □11□ . . . , das auf dem Band steht?

1.		A ↓						
	□	1	1	□	□	□	□	□
2.			B ↓					
	□	X	1	□	□	□	□	□
3.				B ↓				
	□	X	1	□	□	□	□	□
4.					C ↓			
	□	X	1	□	□	□	□	□

5.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & D & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \\ \square & X & 1 & \square & 1 & \square & \square & \square \end{array}$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

5.				D ↓				
	□	X	1	□	1	□	□	□
6.			E ↓					
	□	X	1	□	1	□	□	□

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

				D				
				↓				
5.	□	X	1	□	1	□	□	□
			E					
			↓					
6.	□	X	1	□	1	□	□	□
		E						
		↓						
7.	□	X	1	□	1	□	□	□

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

				D				
5.				↓				
	□	X	1	□	1	□	□	□
			E					
6.			↓					
	□	X	1	□	1	□	□	□
		E						
7.		↓						
	□	X	1	□	1	□	□	□
			A					
8.			↓					
	□	1	1	□	1	□	□	□

				D ↓				
5.	□	X	1	□	1	□	□	□
			E ↓					
6.	□	X	1	□	1	□	□	□
		E ↓						
7.	□	X	1	□	1	□	□	□
			A ↓					
8.	□	1	1	□	1	□	□	□
				B ↓				
9.	□	1	X	□	1	□	□	□

				D				
5.				↓				
	□	X	1	□	1	□	□	□
			E					
6.			↓					
	□	X	1	□	1	□	□	□
		E						
7.		↓						
	□	X	1	□	1	□	□	□
			A					
8.			↓					
	□	1	1	□	1	□	□	□
				B				
9.				↓				
	□	1	X	□	1	□	□	□
					C			
10.					↓			
	□	1	X	□	1	□	□	□

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

11.

					C		
					↓		
□	1	X	□	1	□	□	□

11.						C ↓		
	□	1	X	□	1	□	□	□
12.					D ↓			
	□	1	X	□	1	1	□	□

						C		
11.						↓		
	□	1	X	□	1	□	□	□
					D			
12.					↓			
	□	1	X	□	1	1	□	□
				D				
13.				↓				
	□	1	X	□	1	1	□	□

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

						C ↓		
11.	□	1	X	□	1	□	□	□
					D ↓			
12.	□	1	X	□	1	1	□	□
				D ↓				
13.	□	1	X	□	1	1	□	□
			E ↓					
14.	□	1	X	□	1	1	□	□

						C		
11.						↓		
	□	1	X	□	1	□	□	□
					D			
12.					↓			
	□	1	X	□	1	1	□	□
				D				
13.				↓				
	□	1	X	□	1	1	□	□
			E					
14.			↓					
	□	1	X	□	1	1	□	□
				A				
15.				↓				
	□	1	1	□	1	1	□	□

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Turingmaschine: Beispiele

Nicht jede Turingmaschine kommt wie die vorherige zum Halten. Es gibt auch unendliche Berechnungen (wie in Java).

Turingmaschine als Akzeptor

Ist eine Turingmaschine ein Akzeptor, so ist ein Eingabewort akzeptiert, wenn der Endzustand ein akzeptierter Zustand ist.

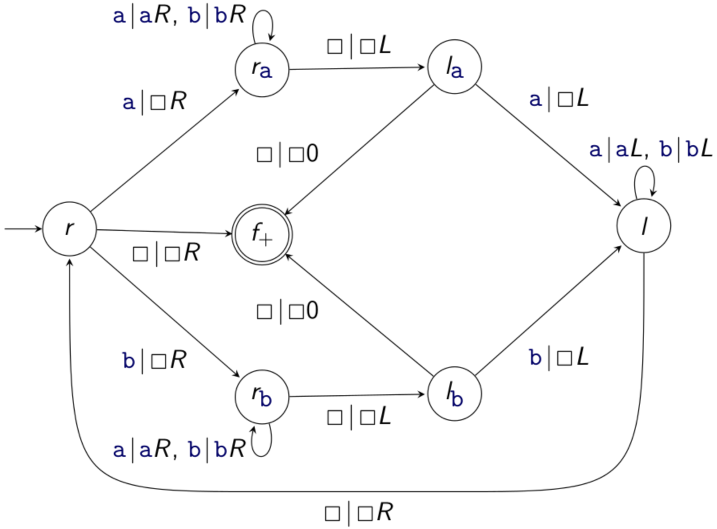
Definition: Eigenschaften von Sprachen

Eine Sprache L ist

- eine aufzählbare Sprache, wenn es eine Turingmaschine gibt, die L akzeptiert oder
- eine entscheidbare Sprache, wenn es eine Turingmaschine gibt, die L akzeptiert und immer hält.

Turingmaschine als Akzeptor: Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Was macht diese Turingmaschine?

Klausuraufgabe

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

TODO

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Alan Turing

- Verantwortlich für viele wichtige Entwicklungen in der theoretischen Informatik
- Mitentwickler der **Turing-Bombe**, die im zweiten Weltkrieg zur Entschlüsselung der Enigma half
- nebenbei auch guter Marathonläufer (nahm an Olympiavorwettkämpfen teil)
- wurde wegen Homosexualität 1952 einer psychiatrischen Zwangsbehandlung unterzogen
- musste dabei weibliche Hormone nehmen
- Depression führten zu Selbstmord

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Hinweis

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Hinweis

Die Komplexität untersuchen wir nur an Turingmaschinenen, die für jede Eingaben zum Halten kommen.

Komplexität

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Zeitkomplexität

Die Zeitkomplexität Time (n) einer Turingmaschine ist die maximale Anzahl an Schritten, die eine Turingmaschine bei Eingabe eines Wortes der Länge n benötigen kann.
(Worst-Case)

Definition: Platzkomplexität

Die Platzkomplexität Space (n) einer Turingmaschine ist die maximale Anzahl an Feldern, die eine Turingmaschine bei Eingabe eines Wortes der Länge n benötigen kann.
(Worst-Case)
Benötigt wird ein Feld, sobald es vom Schreibkopf besucht wird.

Beispiel: Zeitkomplexität der Palindromturingmaschine

1. n Schritte vom ersten zum letzten Symbol
2. n Schritte wieder zurück zum ersten Symbol
3. Gleiche Prozedur mit "innerem Wort": $1 + \text{Time}\,(n-2)$-Schritte

Insgesamt:

$$T(n) \leq n + n + 1 + T(n-2)$$
$$T(n) - T(n-2) \leq 2n + 1 \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$$

Beispiel: Platzkomplexität der Palindromturingmaschine

1. $n + 1$ Felder vom ersten zum letzten Symbol
2. 0 Felder auf dem Weg zurück zum ersten Symbol
3. Gleiche Prozedur mit “innerem Wort”: 0 Felder

Insgesamt:

$$n + 1$$

Komplexitätsklassen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition der Komplexitätsklassen

- **P** ist die Menge aller Entscheidungsprobleme, die von Turingmaschinen entschieden werden können, deren Zeitkomplexität polynomiell ist.
- **PSPACE** ist die Menge aller Entscheidungsprobleme, die von Turingmaschinen entschieden werden können, deren Raumkomplexität polynomiell ist.

Daraus kann man leicht folgern:

$$P \subset PSPACE$$

Denn in t Schritten sind maximal $t + 1$ Felder erreichbar.

Klausuraufgabe

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

TODO