GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 8

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 13. Dezember 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

1. O-Kalk[Pleaseinsertintopreamble]l/Landau-Symbole
2. Laufzeiten

Asymptotisches Wachstum

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wachsen asymptotische genauso schnell, wenn es zwei Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt:

$$\exists n' \in \mathbb{N}_0 \forall n > n' : c \cdot f(n) \leq g(n) \geq c' \cdot f(n)$$

Wir schreiben dafür auch

$$f \asymp g$$

Asymptotisches Wachstum

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Welche Eigenschaften hat diese Relation?

$$f \asymp g$$

Asymptotisches Wachstum

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Welche Eigenschaften hat diese Relation?

$$f \asymp g$$

- symmetrisch
- reflexiv
- transitiv

Damit ist dies eine Äquivalenzrelation.

Äquivalenzklassen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

$\Theta(f)$ ist die **Menge** aller Funktionen g, die asymptotisch genauso schnell wachsen wie f, also

$$\Theta(f) = \{g | f \asymp g\}$$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

O-
Kalk[Pleaseinsertintopreamble]l/Landau-
Symbole

Laufzeiten

Ist $8 \cdot x^2 \in \Theta\left(x^2\right)$?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ist $8 \cdot x^2 \in \Theta\left(x^2\right)$? Ja, denn es gilt:

$$8 \cdot x^2 \asymp x^2$$

Ist $x^3 \in \Theta x^2$? Und gilt $e^x \in \Theta x^2$?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ist $8 \cdot x^2 \in \Theta\left(x^2\right)$? Ja, denn es gilt:

$$8 \cdot x^2 \asymp x^2$$

Ist $x^3 \in \Theta x^2$? Und gilt $e^x \in \Theta x^2$?
Nein.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ist $8 \cdot x^2 \in \Theta\left(x^2\right)$? Ja, denn es gilt:

$$8 \cdot x^2 \asymp x^2$$

Ist $x^3 \in \Theta x^2$? Und gilt $e^x \in \Theta x^2$?
Nein. Ist $x^3 + x^2 \in \Theta\left(x^3\right)$?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ist $8 \cdot x^2 \in \Theta\left(x^2\right)$? Ja, denn es gilt:

$$8 \cdot x^2 \asymp x^2$$

Ist $x^3 \in \Theta x^2$? Und gilt $e^x \in \Theta x^2$?
Nein. Ist $x^3 + x^2 \in \Theta\left(x^3\right)$?
Ja!

Asympototisches Wachstum

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ definiert man:

$$g \preceq f \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n' \in \mathbb{N}_0 : \forall n > n' : \qquad g(n) \leq c \cdot f(n)$$
$$g \succeq f \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n' \in \mathbb{N}_0 : \forall n > n' : \qquad g(n) \geq c \cdot f(n)$$

Umgangssprächlich: “wächst asymptotisch höchstens so schnell wie” oder “wächst asymptotisch mindestens so schnell wie”.

Äquivalenzklassen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

$O(f)$ ist die Menge aller Funktionen, die asymptotische höchstens so schnell wachsen wie f.

$$O(f) = \{g | g \preceq f\}$$

Definition

$\Omega(f)$ ist die Menge aller Funktionen, die asymptotische mindestens so schnell wachsen wie f.

$$\Omega(f) = \{g | g \succeq f\}$$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Was stimmt?

- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^2\right)$
- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^3\right)$
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^2\right)$
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in \Omega\left(x^4\right)$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Was stimmt?

- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^2\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^3\right)$
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^2\right)$
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in \Omega\left(x^4\right)$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Was stimmt?

- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^2\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^3\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^2\right)$
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in \Omega\left(x^4\right)$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Was stimmt?

- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^2\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^3\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^2\right)$ Falsch.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in \Omega\left(x^4\right)$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Was stimmt?

- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^2\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^3\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^2\right)$ Falsch.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^4\right)$ Wahr.
- $e^x \in O\left(x^4\right)$
- $e^x \in \Omega\left(x^4\right)$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Was stimmt?

- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^2\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^3\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^2\right)$ Falsch.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^4\right)$ Wahr.
- $e^x \in O\left(x^4\right)$ Falsch.
- $e^x \in \Omega\left(x^4\right)$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Was stimmt?

- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^2\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in \Omega\left(x^3\right)$ Wahr.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^2\right)$ Falsch.
- $x^3 + x^2 \in O\left(x^4\right)$ Wahr.
- $e^x \in O\left(x^4\right)$ Falsch.
- $e^x \in \Omega\left(x^4\right)$ Wahr.

Ungenauigkeiten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Häufig wird auch das geschrieben

Achtung: Falsche Schreibweise

$$f = \Theta\left(g\right) h = O\left(n^3\right) \qquad k = \Omega\left(f + g\right)$$

Das gibt Punkteabzug.

Was genau ist hier falsch?
¡2-¿Links vom Gleichheitszeichen steht jeweils eine Funktion, rechts eine Menge. Das ist wie “Apfel ist gleich Korb” - einfach falsch.

Formalitäten

Karlsruher Institut für Technologie

Untersuchen von zwei Polynom-Funktionen:

- $f(n) = n^4 + n^3$
- $g(n) = n^2$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n^4 + n^3}{n^2} = n^2 + n$$

- Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Dann: $f \in \Theta(g)$. In diesem Fall: Nicht
- Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$. Dann: $g \in O(f)$ und dann auch: $f \in \Omega(g)$. Das stimmt hier

Wer gewinnt?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Notation	Beispiel
$f \in \mathcal{O}(1)$	$f = 5$
$f \in \mathcal{O}(\log(n))$	$f = \ln(x)$
$f \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$	$f = 2 \cdot \sqrt{n}$
$f \in \mathcal{O}(n)$	$f = 7 \cdot n$
$f \in \mathcal{O}(\log(n) \cdot n)$	$f = 3 \cdot n \cdot \ln(n)$
$f \in \mathcal{O}(n^2)$	$f = 3 \cdot n^2$
$f \in \mathcal{O}(2^n)$	$f = 3 \cdot 2^n$
$f \in \mathcal{O}(n!)$	$f = 3 \cdot n!$

Logarithmus-Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Zur Veranschaulichung:

n	$\log_8 n$	$\log_2 n$
1	0	0
8	1	3
64	2	6
512	3	9
4096	4	12

Was fällt auf?

Logarithmus-Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Zur Veranschaulichung:

n	$\log_8 n$	$\log_2 n$
1	0	0
8	1	3
64	2	6
512	3	9
4096	4	12

Was fällt auf?

$\log_2 n = 3 \cdot \log_8 n$. Die beiden Logarithmen unterscheiden sich also nur durch einen konstanten Faktor.

Logarithmus

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aus den Logarithmusregeln folgt:

$$n = a^{\log_a(n)} \tag{1}$$

$$n = b^{\log_b(n)} \tag{2}$$

(4)

Was bringt das jetzt? Wir können zeigen, dass alle Logarithmen, egal zu welcher Basis, asymptotisch wachsen. Setze $c = c' = \log_b a$. Dann:

$$c \log_a n \leq \log_b n \leq c' \log_a n$$

Logarithmus

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aus den Logarithmusregeln folgt:

$$n = a^{\log_a(n)} \tag{1}$$

$$n = b^{\log_b(n)} \tag{2}$$

$$(1) \Rightarrow (a)^{\log_a n} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a n} = b^{\log_b a \cdot \log_a n} \tag{3}$$

$$(2) \text{ und } (3) \Rightarrow (b)^{\log_b n} = b^{\log_b a \cdot \log_a n} \tag{4}$$

Was bringt das jetzt? Wir können zeigen, dass alle Logarithmen, egal zu welcher Basis, asymptotisch wachsen. Setze $c = c' = \log_b a$. Dann:

$$c \log_a n \leq \log_b n \leq c' \log_a n$$

Rechenregeln

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Das dürft ihr so verwenden:

- $f \in \mathcal{O}(g) \leftrightarrow g \in \Omega(f)$
- $\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$ oder
  $f \asymp g \leftrightarrow f \succeq g \wedge f \preceq g$
- $O(f_1) + O(f_2) = O(f_1 + f_2)$
- Wenn $g \in O(f)$, dann ist auch $\mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$ und $O(f+g) = \mathcal{O}(f)$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

1. O-Kalk[Pleaseinsertintopreamble]l/Landau-Symbole
2. Laufzeiten

Beispielalgorithmus

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Input: $a \in \mathbb{R}$
Input: $n \in \mathbb{N}_+$
  $x \leftarrow 1$
  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $x \leftarrow a \cdot x$
  od
Output: x

Was passiert und in welcher Laufzeit?

Klassen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Welche Funktionen gehören in welche Klasse(n)?

	$\mathcal{O}\left(n^2\right)$	$\Omega\left(n^2\right)$	$\mathcal{O}\left(\log n\right)$	$\Theta\left(n\right)$
$n^2 + n$	j	j	n	n
$n \cdot \log n$	j	n	n	n
$2 \cdot n + 1$	j	n	n	j
n^3	n	j	n	n
5	j	n	j	n