Grundbegriffe der Informatik
WS 2011/12
Tutorium in der Woche 3
Gehalten in den Tutorien Nr. 10, Nr. 14

Philipp Basler (philippbasler@googlemail.com)
Nils Braun (area51.nils@googlemail.com)

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

07.11.2011 & 08.11.2011

Inhaltsverzeichnis

Informationen zum nächsten Blatt

Blatt Nr. 3

Abgabetermin	11.11.11 um 11:11 Uhr (Scherz 12:30)
Abgabeort	Briefkasten im UG
Themen	Vollständige Induktion & Sprachen
Maximale Punkte	21

Häufige Fehler auf dem letzten Übungsblatt

Blatt Nr. 2

- 1. Aufgabe: Doppelpunkte, Mengen und $\Longrightarrow$
- 2. Aufgabe: Bitte mit Begründung!
- 3. Aufgabe: Woher wisst ihr, dass $1/2n(n+1)$ eine ganze Zahl ist?
- 4. Aufgabe: Reihenfolge
- 5. Aufgabe: Nix

Häufige Fehler auf dem letzten Übungsblatt - A2.1

Gegeben sind folgende Aussagen

- Jeder Frosch ist glücklich, wenn alle seine Kinder quaken können
- Alle grünen Frösche können quaken
- Ein Frosch ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Frosches ist

Was bleibt?

Was benötigt eine vollständige Induktion?

Was bleibt?

Was benötigt eine vollständige Induktion?

IA, IV, IS

Was bleibt?

Was ist ein Alphabet? Was ist ein Wort?

Was bleibt?

Was ist ein Alphabet? Was ist ein Wort?

Alphabet: endliche Menge von Zeichen

Wort: Funktion

$$w : \mathbb{G}_n \to A$$

Was bleibt?

Richtig oder Falsch? Es gibt kein leeres Wort.

Was bleibt?

Richtig oder Falsch? Es gibt kein leeres Wort.

Falsch! ε

Mengen...

Wer weiß noch was Mengen sind?

...und was man alles mit ihnen machen kann

Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{1, 2, 3, \pi\} \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ gerade }\}$$

- Was ist die Vereinigung $M_1 \cup M_2$?
- Was ist der Schnitt $M_1 \cap M_2$?
- Was ist die Differenz $M_2 \setminus M_1$?
- Was ist das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$?

Definition

Definition

Sei A ein gegebenes Alphabet. Eine formale Sprache L ist eine Teilmenge von A^*, die alle syntaktisch korrekten Gebilde enthält.

Definition

Definition

Sei A ein gegebenes Alphabet. Eine formale Sprache L ist eine Teilmenge von A^*, die alle syntaktisch korrekten Gebilde enthält.

Was *syntaktisch korrekt* bedeutet, hängt von der Sprache ab und ist durch deren Bildungsvorschrift gekennzeichnet.

Produkt

Definition

Seien L_1 und L_2 zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das **Produkt** der Sprachen L_1 und L_2.

Produkt

Definition

Seien L_1 und L_2 zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das **Produkt** der Sprachen L_1 und L_2.

In $L_1 \cdot L_2$ sind also alle Wörter enthalten, deren erster Teil aus L_1 und deren zweiter Teil aus L_2 ist.

Potenzen

Definition

Damit kann man rekursiv eine Potenz definieren:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{i+1} = L^i \cdot L$$

Potenzen

Definition

Damit kann man rekursiv eine Potenz definieren:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{i+1} = L^i \cdot L$$

L^i enthält also alle Kombinationen von i-Wörtern aus L.

Konkatenationsabschluss

Definition

Der Konkatenationsabschluss einer formalen Sprache L ist

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Der ε-freie Konkatenationsabschluss ist

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

Konkatenationsabschluss

Definition

Der Konkatenationsabschluss einer formalen Sprache L ist

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Der ε-freie Konkatenationsabschluss ist

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

Achtung: Der ε-freie Konkatenationsabschluss muss nicht ε-frei sein!

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

$$L = \{0, \ldots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \ldots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \ldots, 9\}^3$$

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

$$L = \{0, \dots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \dots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \dots, 9\}^3$$

Dann geht aber auch

$$000.999.123 \in L$$

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

$$L = \{0, \dots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \dots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \dots, 9\}^3$$

  Dann geht aber auch

$$000.999.123 \in L$$

- Formale Sprache der Schlüsselwörter in Java

$$L = \{class, int, if, \dots\}$$

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

$$L = \{0, \ldots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \ldots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \ldots, 9\}^3$$

  Dann geht aber auch

$$000.999.123 \in L$$

- Formale Sprache der Schlüsselwörter in Java

$$L = \{class, int, if, \ldots\}$$

- Formale Sprache der legalen Zahlen vom Typ **int**:

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

  $$L = \{0, \ldots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \ldots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \ldots, 9\}^3$$

  Dann geht aber auch

  $$000.999.123 \in L$$

- Formale Sprache der Schlüsselwörter in Java

  $$L = \{class, int, if, \ldots\}$$

- Formale Sprache der legalen Zahlen vom Typ **int**: Mit $A = \{0 \ldots 9\}$

  $$L = A \cdot A^*$$

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

$$L = \{0,\ldots,9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0,\ldots,9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0,\ldots,9\}^3$$

  Dann geht aber auch

$$000.999.123 \in L$$

- Formale Sprache der Schlüsselwörter in Java

$$L = \{class, int, if, \ldots\}$$

- Formale Sprache der legalen Zahlen vom Typ **int**: Mit $A = \{0 \ldots 9\}$

$$L = A \cdot A^*$$

  Und minus? Und $0x$?

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

$$L = \{0, \dots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \dots, 9\}^3 \cdot \{.\} \cdot \{0, \dots, 9\}^3$$

Dann geht aber auch

$$000.999.123 \in L$$

- Formale Sprache der Schlüsselwörter in Java

$$L = \{class, int, if, \dots\}$$

- Formale Sprache der legalen Zahlen vom Typ **int**: Mit $A = \{0 \dots 9\}$

$$L = A \cdot A^*$$

Und minus? Und 0x? Also besser $L = \{0x, -, \varepsilon\} \cdot A \cdot A^*$

Die Sache mit dem b

Sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet. Mit L wollen wir alle Wörter beschreiben, die genau ein b enthalten.
Wie schreibe ich das hin?

Die Sache mit dem b

Sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet. Mit L wollen wir alle Wörter beschreiben, die genau ein b enthalten.
Wie schreibe ich das hin?

$$L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^* \qquad L = \{w_1 b w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$$

Die Sache mit dem b

Sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet. Mit L wollen wir alle Wörter beschreiben, die genau ein b enthalten.
Wie schreibe ich das hin?

$$L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^* \qquad L = \{w_1 b w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$$

Was ist L^3? Was enthält L^i?

Die Sache mit dem b

Sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet. Mit L wollen wir alle Wörter beschreiben, die genau ein b enthalten.
Wie schreibe ich das hin?

$$L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^* \qquad L = \{w_1 b w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$$

Was ist L^3? Was enthält L^i? Zum Beispiel ist

$$aaababaaaabaa = aaaba\ baa\ aabaa \in L_3$$

Die Sache mit dem b

Sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet. Mit L wollen wir alle Wörter beschreiben, die genau ein b enthalten.
Wie schreibe ich das hin?

$$L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^* \qquad L = \{w_1 b w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$$

Was ist L^3? Was enthält L^i? Zum Beispiel ist

$$aaababaaaabaa = aaaba\ baa\ aabaa \in L_3$$

L^i enthält alle Wörter, die genau i-mal ein b enthalten!

Die Sache mit dem b

Was enthält

$$L^i \setminus \{b\}^*$$

Die Sache mit dem b

Was enthält

$$L^i \setminus \{b\}^*$$

Alle Wörter, die aus i b's bestehen aber auch noch mindestens ein a enthalten.

Die Sache mit dem b

Was enthält

$$L^i \setminus \{b\}^*$$

Alle Wörter, die aus i b's bestehen aber auch noch mindestens ein a enthalten.
Und was enthält

$$L^i \cap \{x \in A^* \mid \text{Länge von } x = i + 1\}$$

Die Sache mit dem b

Was enthält

$$L^i \setminus \{b\}^*$$

Alle Wörter, die aus i b's bestehen aber auch noch mindestens ein a enthalten.

Und was enthält

$$L^i \cap \{x \in A^* \mid \text{ Länge von } x = i + 1\}$$

Alle Wörter, die aus i b's bestehen und noch genau ein a enthalten.

Aufgabe (WS 2010) ★★★☆☆

Es sei $A = \{a, b\}$. Beschreiben Sie die folgenden formalen Sprachen mit den Symbolen $\{, \}, a, b, \varepsilon, \cup, *,$ Komma$,), ($ und $+$:

- die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort **ab** enthalten.
- die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist.
- die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei b's unmittelbar hintereinander vorkommen.

Lösung

- *die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort* **ab** *enthalten.*

Lösung

- *die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort* **ab** *enthalten.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{ab\} \cdot \{a, b\}^*$$

Lösung

- *die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort* **ab** *enthalten.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{ab\} \cdot \{a, b\}^*$$

- *die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist.*

Lösung

- *die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort* **ab** *enthalten.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{ab\} \cdot \{a, b\}^*$$

- *die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}^1$$

Lösung

- *die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort* **ab** *enthalten.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{ab\} \cdot \{a, b\}^*$$

- *die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}^1$$

- *die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei b's unmittelbar hintereinander vorkommen.*

Lösung

- *die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort* **ab** *enthalten.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{ab\} \cdot \{a, b\}^*$$

- *die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}^1$$

- *die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei b's unmittelbar hintereinander vorkommen.*

$$\{a, ba\}^* \cdot \{b, \varepsilon\}$$

Aufgabe (WS 2008)

Es sei $A = \{a, b\}$. Die Sprache $L \subset A^*$ sei definiert durch

$$L = (\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^*$$

Zeigen Sie, dass jedes Wort w aus $\{a, b\}^*$, das mindestens einmal das Zeichen b enthält, in L liegt. (Hinweis: Führen Sie eine Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Zeichens b in w durch.)

Lösung

$$L = (\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^*$$

Sei k die Anzahl der Vorkommen von b in einem Wort $w \in \{a, b\}^*$.

Induktionsanfang

Lösung

$$L = (\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^*$$

Sei k die Anzahl der Vorkommen von b in einem Wort $w \in \{a, b\}^*$.

Induktionsanfang

Für $k = 1$: In diesem Fall lässt sich das Wort w aufteilen in

$$w = w_1 \cdot b \cdot w_2$$

wobei w_1 und w_2 keine b enthalten und somit in $\{a\}^*$ liegen. Damit gilt $w \in \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$ und somit auch

$$w \in (\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^* = L$$

Lösung

Induktionsannahme

Lösung

Induktionsannahme

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass alle Wörter über $\{a, b\}^*$, die genau k-mal das Zeichen b enthalten, in L liegen.

Lösung

Induktionsannahme

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass alle Wörter über $\{a, b\}^*$, die genau k-mal das Zeichen b enthalten, in L liegen.

Induktionsschritt

Lösung

Induktionsannahme

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass alle Wörter über $\{a, b\}^*$, die genau k-mal das Zeichen b enthalten, in L liegen.

Induktionsschritt

Wir betrachten ein Wort w, das genau $k + 1$ mal das Zeichen b enthält. Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 \cdot w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen b enthält und w_2 genau k-mal das Zeichen b.

Lösung

Induktionsannahme

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass alle Wörter über $\{a, b\}^*$, die genau k-mal das Zeichen b enthalten, in L liegen.

Induktionsschritt

Wir betrachten ein Wort w, das genau $k + 1$ mal das Zeichen b enthält. Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 \cdot w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen b enthält und w_2 genau k-mal das Zeichen b. Nach Induktionsanfang liegt w_1 in $\{a\}^*\{b\}\{a\}^*$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt w_2 in $(\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^*$, was bedeutet, dass $w = w_1 \cdot w_2$ in

$$(\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)(\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^* \subset (\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^* = L$$

liegt und die Behauptung ist gezeigt.

Aufgabe (Klausur) ★★★★☆

Begründen oder widerlegen Sie:

- Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$L^* \cdot L = L^+$$

- Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$L^* \cdot L = L^+$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$L^* \cdot L = L^+$$

Diese Aussage ist wahr!

1. Schritt: $L^* \cdot L \subseteq L^+$:

Lösung

Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$L^* \cdot L = L^+$$

Diese Aussage ist wahr!

1. Schritt: $L^* \cdot L \subseteq L^+$:

Wenn $w \in L^* \cdot L$ liegt, dann lässt es sich in Teilwörter auftrennen

$$w = w_1 \cdot w_2$$

mit $w_1 \in L^*$ und $w_2 \in L$. Für w_1 existiert ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $w_1 \in L^i$. Also

$$w = w_1 w_2 \in L^i \cdot L = L^{i+1} \subset L^+$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$L^* \cdot L = L^+$$

Diese Aussage ist wahr!

2. Schritt: $L^* \cdot L \supseteq L^+$**:**

Lösung

Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$L^* \cdot L = L^+$$

Diese Aussage ist wahr!

2. Schritt: $L^* \cdot L \supseteq L^+$:

Wähle nun $w \in L^+$. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}_+$ mit $w \in L^i$. Da $i > 0$ lässt es sich schreiben als $i = j + 1$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$w \in L^{j+1} = L^j \cdot L \subset L^* \cdot L$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Diese Aussage ist falsch: Sei $L_1 = \{a\}$ und $L_2 = \{b\}$. Dann liegt **ab** in $(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^*$ aber nicht in $L_1^* \cup L_2^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$.

Noch mehr Aufgaben

Begründen oder widerlegen Sie:

- Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$(L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1 \cdot L_2)^*$$

- Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Noch mehr Aufgaben

Begründen oder widerlegen Sie:

- Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$(L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1 \cdot L_2)^*$$

- Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$(L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1 \cdot L_2)^*$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$(L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1 \cdot L_2)^*$$

Diese Aussage ist falsch: Sei $L_1 = \{a\}$ und $L_2 = \{b\}$. Dann liegt

$$\mathbf{aa} = \mathbf{aa} \cdot \varepsilon$$

in $(L_1^* \cdot L_2^*) = (L_1^* \cdot L_2^*)^1 \subset (L_1^* \cdot L_2^*)^*$, aber nicht in $(L_1 \cdot L_2)^* = \{ab\}^*$.

Lösung

Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Lösung

Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Die Aussage ist korrekt: Sei w ein Wort aus $(L_1^* \cup L_2^*)^*$. Dieses lässt sich in Teilwörter $w_1, \cdots, w_k$ unterteilen, so dass für $1 \leq i \leq k$ gilt:

$$w_i \in (L_1^* \cup L_2^*) \implies w_i \in L_1^* \text{ oder } w_i \in L_2^*$$

Diese Teilwörter w_i lassen sich wieder in Teilwörter $w_{i_1}, \ldots w_{i_s}$ zerlegen, die entweder aus L_1 kommen, wenn $w_i \in L_1^*$ liegt, oder in L_2 liegen, wenn $w_i \in L_2^*$ liegt. Damit lässt sich w in Teilwörter w_{i_j} aus $L_1 \cup L_2$ unterteilen und es folgt $w \in (L_1 \cup L_2)^*$.

Lösung

Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt:

$$(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Sei umgekehrt ein Wort w aus $(L_1 \cup L_2)^*$. Dieses lässt sich dann in Teilwörter $w_1, \dots, w_k$ unterteilen, so dass für $1 \leq i \leq k$ gilt

$$w_i \in L_1 \cup L_2 \implies w_i \in L_1 \subset L_1^* \text{ oder } w_i \in L_2 \subset L_2^*$$

Somit lässt sich w in Teilwörter aus $L_1^* \cup L_2^*$ unterteilen, und es folgt $w \in (L_1^* \cup L_2^*)^*$.

Was ihr nun wissen solltet

- Was formale Sprachen sind...
- ...und was man mit ihnen machen kann.
- Wie man einen Beweis über vollständige Induktion führt.
- dass nächste Woche kein Feiertag ist
- Wie ihr eure Punkte abrufen könnt

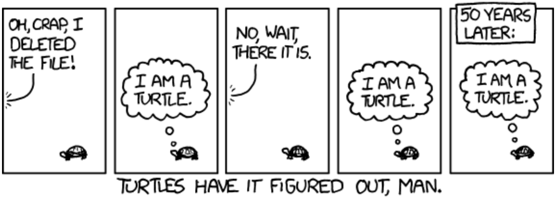

Abbildung: `http://www.xkcd.com`

Kontakt via E-Mail an Philipp Basler oder Nils Braun
gbi.ugroup.hostzi.com