Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 01

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 25. Oktober 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Kontaktmöglichkeiten

- Mail: vincent.hahn@student.kit.edu
- Web: `http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uddgw/`

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Kontaktmöglichkeiten

- Mail: vincent.hahn@student.kit.edu
- Web: `http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uddgw/`

Termine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Übungsblattabgabe: spätestens Freitag, 12:30, Briefkasten im UG. Mit Deckblatt.
- Übung: Fr, 9:45, Audimax
- Vorlesung: Mi, 11:30 Uhr, Audimax
- Klausurtermin: gewöhnlich Anfang März des kommenden Jahres

Termine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Übungsblattabgabe: spätestens Freitag, 12:30, Briefkasten im UG. Mit Deckblatt.
- Übung: Fr, 9:45, Audimax
- Vorlesung: Mi, 11:30 Uhr, Audimax
- Klausurtermin: gewöhnlich Anfang März des kommenden Jahres

Termine

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Übungsblattabgabe: spätestens Freitag, 12:30, Briefkasten im UG. Mit Deckblatt.
- Übung: Fr, 9:45, Audimax
- Vorlesung: Mi, 11:30 Uhr, Audimax
- Klausurtermin: gewöhnlich Anfang März des kommenden Jahres

Übungsblatter

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Die Übungsbläter müssen. . .

- handbeschrieben sein,
- mit Deckblatt abgeben werden und
- selbst bearbeiten sein.

Für den Übungsschein reichen 50 % der Punkte der Blätter.

Weitere Links

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorlesung

- Website: `http://gbi.ira.uka.de`
- Dozentin: tanja.schultz@kit.edu

Fachschaft

- Website: `http://www.fsmi.uni-karlsruhe.de/`
- Forum: `http://www.fsmi.uni-karlsruhe.de/forum/`

Weitere Links

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorlesung

- Website: `http://gbi.ira.uka.de`
- Dozentin: tanja.schultz@kit.edu

Fachschaft

- Website: `http://www.fsmi.uni-karlsruhe.de/`
- Forum: `http://www.fsmi.uni-karlsruhe.de/forum/`

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Junktoren

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Ein Junktor ist eine logische Verknüpfung zwischen Aussagen innerhalb der Aussagenlogik, also ein logischer Operator.
(Aus Wikipedia)

Beispiele

- Logisches „Oder" $\vee$
- Logisches „Und" $\wedge$
- ...

Junktoren

Definition

Ein Junktor ist eine logische Verknüpfung zwischen Aussagen innerhalb der Aussagenlogik, also ein logischer Operator.
(Aus Wikipedia)

Beispiele

- Logisches „Oder“ $\vee$
- Logisches „Und“ $\wedge$
- ...

Logisches Und („Konjunktion“)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Tabelle: Wahrheitswerte für $\wedge$

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Logisches Oder „Disjunktion“

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Tabelle: Wahrheitswerte für $\vee$

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Negation

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Tabelle: Wahrheitswerte für $\neg$

A	$\neg A$
f	w
w	f

Implikation

Tabelle: Wahrheitswerte für $\rightarrow$

A	B	$A \rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Alternative Schreibeweise

Finde eine Schreibweise, die nur aus $\vee$ und $\neg$ besteht!

Implikation

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Tabelle: Wahrheitswerte für $\rightarrow$

A	B	$A \rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Alternative Schreibeweise

Finde eine Schreibweise, die nur aus $\vee$ und $\neg$ besteht!

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Implikation

Tabelle: Wahrheitswerte für $\rightarrow$

A	B	$A \rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Alternative Schreibeweise

Finde eine Schreibweise, die nur aus $\vee$ und $\neg$ besteht!

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Klausuraufgabe

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Sommer 2010, Aufgabe 2
2 von 46 Punkten

Zeigen Sie (etwa mit Wahrheitstabellen), dass die Formeln äquivalent sind:

$$(((B \Rightarrow A) \vee B) \Rightarrow (\neg A)) \wedge B$$

$$\neg A \wedge B$$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Kartesisches Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition Kartesisches Produkt

Das Kartesisches Produkt $A \times B$ enthällt alle Kombinationen (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beispiel: Kleiner-Gleich-Menge

Die Menge M sei $M = \{1, 2, 3\}$.
Welche Elemente sind in in der Teilmenge $R_{\leq} \subseteq M \times M$?
Schreibweise: $R_{\leq} = \{(a, b)|a \leq b\}$

Kartesisches Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition Kartesisches Produkt

Das Kartesisches Produkt $A \times B$ enthällt alle Kombinationen (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beispiel: Kleiner-Gleich-Menge

Die Menge M sei $M = \{1, 2, 3\}$.
Welche Elemente sind in in der Teilmenge $R_{\leq} \subseteq M \times M$?
Schreibweise: $R_{\leq} = \{(a, b) | a \leq b\}$

Kartesisches Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition Kartesisches Produkt

Das Kartesisches Produkt $A \times B$ enthällt alle Kombinationen (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beispiel: Kleiner-Gleich-Menge

Die Menge M sei $M = \{1, 2, 3\}$.
Welche Elemente sind in in der Teilmenge $R_{\leq} \subseteq M \times M$?
Schreibweise: $R_{\leq} = \{(a, b) | a \leq b\}$
$R_{\leq} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

1. Allgemeines
2. Aussagenlogik
3. Relationen und Abbildungen
   - Kartesisches Produkt
   - Totalität
   - Eindeutigkeit
   - Funktionen
4. Mengenlehre

Totalität

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal, wenn es zu jedem Element der Urbildmenge A ein zugehöriges Element der Bildmenge B gibt.
Die Relation heißt rechtstotal, wenn es zu jedem Element der Bildmenge B ein zugehöriges Element der Urbildmenge A gibt.

Beispiel

Welche Eigenschaft hat diese Funktion, wenn $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$?

$$f(x) = x^2$$

Totalität

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal, wenn es zu jedem Element der Urbildmenge A ein zugehöriges Element der Bildmenge B gibt.
Die Relation heißt rechtstotal, wenn es zu jedem Element der Bildmenge B ein zugehöriges Element der Urbildmenge A gibt.

Beispiel

Welche Eigenschaft hat diese Funktion, wenn $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$?

$$f(x) = x^2$$

Totalität

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal, wenn es zu jedem Element der Urbildmenge A ein zugehöriges Element der Bildmenge B gibt.
Die Relation heißt rechtstotal, wenn es zu jedem Element der Bildmenge B ein zugehöriges Element der Urbildmenge A gibt.

Beispiel

Welche Eigenschaft hat diese Funktion, wenn $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$?

$$f(x) = x^2$$

Linkstotal.

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eindeutigkeit

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig, wenn einem Element der Bildmenge B höchstens ein Element der Urbildmenge A zugeordnet ist.
Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig, wenn einem Element der Urbildmenge A höchstens ein Element der Bildmenge B zugeordnet ist.

Beispiel

Welche Eigenschaft hat die Funktion $f(x) = x^2$ (Wertebereiche wie oben)?

Eindeutigkeit

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig, wenn einem Element der Bildmenge B höchstens ein Element der Urbildmenge A zugeordnet ist.
Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig, wenn einem Element der Urbildmenge A höchstens ein Element der Bildmenge B zugeordnet ist.

Beispiel

Welche Eigenschaft hat die Funktion $f(x) = x^2$ (Wertebereiche wie oben)?

Eindeutigkeit

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig, wenn einem Element der Bildmenge B höchstens ein Element der Urbildmenge A zugeordnet ist.
Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig, wenn einem Element der Urbildmenge A höchstens ein Element der Bildmenge B zugeordnet ist.

Beispiel

Welche Eigenschaft hat die Funktion $f(x) = x^2$ (Wertebereiche wie oben)?
Rechtseindeutig.

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt Funktion, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist.

Eigenschaften einer Funktion

Tabelle: Eigenschaften von Funktionen. Dabei sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$ (also keine komplexen Zahlen).

rechtstotal	linkseindeutig	Bezeichnung	Beispiel
			$f(x) = x^2$
			$f(x) = e^x$
			$f(x) = x^3 - x$
			$f(x) = x$

Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt Funktion, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist.

Eigenschaften einer Funktion

Tabelle: Eigenschaften von Funktionen. Dabei sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$ (also keine komplexen Zahlen).

rechtstotal	linkseindeutig	Bezeichnung	Beispiel
0	0	-	$f(x) = x^2$
			$f(x) = e^x$
			$f(x) = x^3 - x$
			$f(x) = x$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt Funktion, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist.

Eigenschaften einer Funktion

Tabelle: Eigenschaften von Funktionen. Dabei sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$ (also keine komplexen Zahlen).

rechtstotal	linkseindeutig	Bezeichnung	Beispiel
0	0	-	$f(x) = x^2$
0	1	injektiv	$f(x) = e^x$
			$f(x) = x^3 - x$
			$f(x) = x$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt Funktion, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist.

Eigenschaften einer Funktion

Tabelle: Eigenschaften von Funktionen. Dabei sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$ (also keine komplexen Zahlen).

rechtstotal	linkseindeutig	Bezeichnung	Beispiel
0	0	-	$f(x) = x^2$
0	1	injektiv	$f(x) = e^x$
1	0	surjektiv	$f(x) = x^3 - x$
			$f(x) = x$

Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt Funktion, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist.

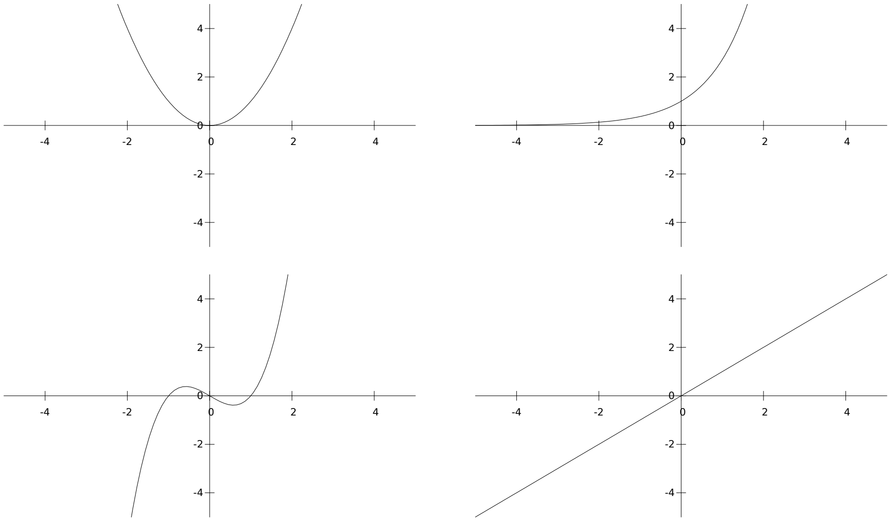
Eigenschaften einer Funktion

Tabelle: Eigenschaften von Funktionen. Dabei sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$ (also keine komplexen Zahlen).

rechtstotal	linkseindeutig	Bezeichnung	Beispiel
0	0	-	$f(x) = x^2$
0	1	injektiv	$f(x) = e^x$
1	0	surjektiv	$f(x) = x^3 - x$
1	1	bijektiv	$f(x) = x$

Graphen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Funktionen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorsicht

Unbedingt den Definitionsbereich einer Funktion beachten. Die Normalparabel ist im Bereich der komplexen Zahlen surjektiv!

Übungsaufgabe

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Winter 2010/2011, Aufgabe 1.2

Es sei A die Menge aller Kinobesucher in einer Vorstellung und B die Menge aller Sitzplätze. Die Abbildung f ordnet den Kinobesuchern die Sitzplätze zu: $f : A \to B$

- Was bedeutet es im Kino, wenn f linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist?
- Was wünschen sich die Kinobesucher: Eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung auf die Sitzplätze? Was wünscht sich der Besitzer?
- In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, 6 Kinobesucher besuchten ein Kino mit 8 Plätzen. Zeichnen Sie eine injektive Abbildung f. Wie viele injektive Abbildungen gibt es?

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Mengenlehre

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition Menge

Eine Menge ist eine beliebig große Ansammlung an Elementen
$\Rightarrow$ es existieren Mengen ohne, endlich vielen und unendlich vielen Elementen.

Schreibweiße von Mengen

Sei M eine Menge bestehend aus den Elementen $0, 1, 2$, dann schreiben wir:

$$M = \{0, 1, 2\}$$

Außerdem gilt: $0, 1, 2 \in M$

Besonderheiten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Reihenfolge der Elemente in einer Menge ist egal.
  Da $x, y \in \{x, y\}$ aber auch $x, y \in \{y, x\}$
  $\Rightarrow \{x, y\} = \{y, x\}$
- Mehrfaches Vorkommen von Elementen ist auch egal.
  $\Rightarrow \{a, b, b, 3\} = \{a, b, 3\}$

Besonderheiten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Reihenfolge der Elemente in einer Menge ist egal.
  Da $x, y \in \{x, y\}$ aber auch $x, y \in \{y, x\}$
  $\Rightarrow \{x, y\} = \{y, x\}$
- Mehrfaches Vorkommen von Elementen ist auch egal.
  $\Rightarrow \{a, b, b, 3\} = \{a, b, 3\}$

Besondere Mengen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Leere Menge: $\emptyset = \{\}$
- Die Natürlichen Zahlen ohne 0: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$
- Die Natürlichen Zahlen mit 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Ganze Zahlen von 0 bis n-1: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

Besondere Mengen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Leere Menge: $\emptyset = \{\}$
- Die Natürlichen Zahlen ohne 0: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$
- Die Natürlichen Zahlen mit 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Ganze Zahlen von 0 bis n-1: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

Besondere Mengen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Leere Menge: $\emptyset = \{\}$
- Die Natürlichen Zahlen ohne 0: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$
- Die Natürlichen Zahlen mit 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Ganze Zahlen von 0 bis n-1: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

Besondere Mengen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Leere Menge: $\emptyset = \{\}$
- Die Natürlichen Zahlen ohne 0: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$
- Die Natürlichen Zahlen mit 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Ganze Zahlen von 0 bis n-1: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

Mengenoperationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vereinigung von Mengen $\cup$

Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $B = \{a, b, c\}$
Dann ist die Vereinigung der Mengen A und B:
$A \cup B = \{0, 1, 2\} \cup \{a, b, c\} = \{0, 1, 2, a, b, c\}$
Alle Elemente aus A und B liegen somit in $A \cup B$

Durchschnitt von Mengen $\cap$

Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, a\}$
Dann ist der Durchschnitt der Mengen A und B:
$A \cap B = \{0, 1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4, a\} = \{1, 2\}$
Im Durchschnitt liegen somit nur Elemente, die sowohl in A und in B liegen.

Mengenoperationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vereinigung von Mengen $\cup$

Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $B = \{a, b, c\}$
Dann ist die Vereinigung der Mengen A und B:
$A \cup B = \{0, 1, 2\} \cup \{a, b, c\} = \{0, 1, 2, a, b, c\}$
Alle Elemente aus A und B liegen somit in $A \cup B$

Durchschnitt von Mengen $\cap$

Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, a\}$
Dann ist der Durchschnitt der Mengen A und B:
$A \cap B = \{0, 1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4, a\} = \{1, 2\}$
Im Durchschnitt liegen somit nur Elemente, die sowohl in A und in B liegen.

Aufgabenteil 1

Gegeben seien die Mengen A, B, C und D, mit:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 9\} \\ B &= \{1, 2, 4, 8\} \\ C &= \{x, d, 1, 2, 3, 4, 9\} \\ D &= \{a, c, d, x\} \end{aligned}$$

Die Menge M sei definiert durch:

$$M = \Big((D \cap C) \cup ((C \cap B) \cup (A \cap C))\Big) \setminus (A \cap B)$$

Welche Elemente enthält die Menge M?
Antwort:

Aufgabenteil 1

Gegeben seien die Mengen A, B, C und D, mit:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 9\} \\ B &= \{1, 2, 4, 8\} \\ C &= \{x, d, 1, 2, 3, 4, 9\} \\ D &= \{a, c, d, x\} \end{aligned}$$

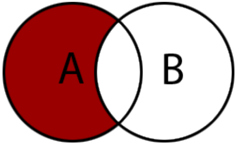
Die Menge M sei definiert durch:

$$M = \Big((D \cap C) \cup ((C \cap B) \cup (A \cap C))\Big) \setminus (A \cap B)$$

Welche Elemente enthält die Menge M?
Antwort: $M = \{d, x, 2, 3, 4, 9\}$

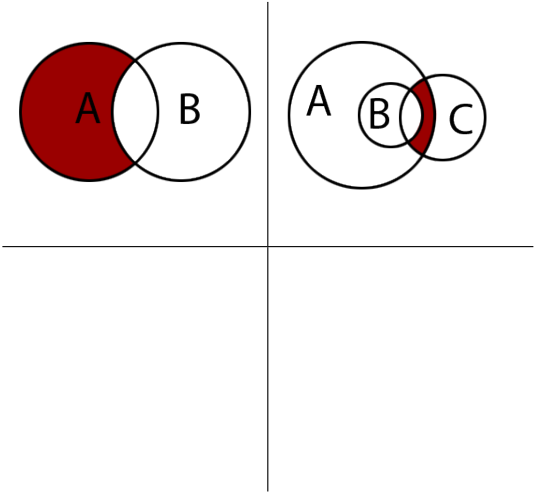
Mengenraten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



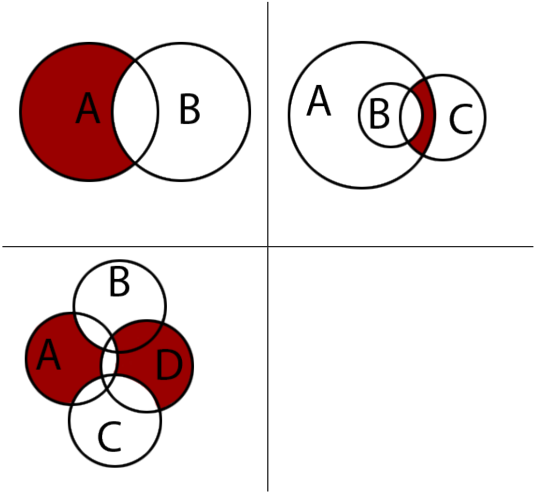
Mengenraten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Mengenraten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Mengenraten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu