GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 13

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 31. Januar 2013

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wiederholung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Irgendwas zu Turingmaschinen
- Irgendwas zu Codierungen
- Irgendwas zu Relationen
- Reflexiv
- Transitiv
- Symmetrisch

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Unentscheidbare Probleme

Es gibt Probleme, die lassen sich mit einer Turing-Maschine (oder äquivalent: einem Java-Programm) nicht lösen. (Auch nicht mit unendlich viel Zeit und Platz.)
Ein solches Problem ist nicht **entscheidbar**

Entscheidbarkeit

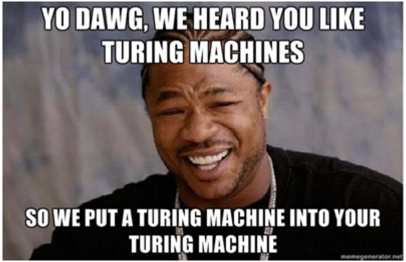
Für ein entscheidbares Problem gibt es eine Turingmaschine, die für jede Eingabe hält und das Eingabewort entweder akzeptiert oder nicht.

Codierung von Turingmaschinen

Bisher haben wir eine Turingmaschine formal so geschrieben $T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$. Wir bauen uns eine Codierung, die die ganze Turingmaschine in ein Wort w_1 "packt".

Dieses Wort w_1 übergeben wir dann einer universellen Turingmaschine U, die

- übeprüft, ob w_1 eine Turingmaschine T codiert
- dann die Turingmaschine T "simuliert" und als Eingabe w_2 verwendet
- und schließlich das Ergebnis davon ausgibt



Halteproblem

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Satz

Es ist nicht möglich, eine Turingmaschine U zu bauen, die für jede Turingmaschine T (codiert als w_1) und jede Eingabe w_2 entscheidet, ob T bei der Eingabe von w_2 hält.

Das lässt sich auch beweisen. Halteproblembeweis (verdorbene Diagonale)

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Äquivalenzrelation

Definition: Äquivalenzrelation

Eine Relation R ist genau dann eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie

- symmetrisch,
- reflexiv und
- transitiv

ist.

Eigenschaften von Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

- $\leq$
- $>$
- $=$

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

Eigenschaften von Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

- $\leq$ reflexiv, transitiv
- $>$
- $=$

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eigenschaften von Relationen

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

- $\leq$ reflexiv, transitiv
- $>$ transitiv
- $=$

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eigenschaften von Relationen

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

- $\leq$ reflexiv, transitiv
- $>$ transitiv
- $=$ reflexiv, transitiv, symmetrisch

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

Äquivalenzklasse

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Äquivalenzklasse

Sind zwei Elemente $(x, y) \in R$, so schreibt man auch xRy (Infixschreibweise). Alle Elemente, die miteinander in Relation stehen, befinden sich in der selben **Äquivalenzklasse**:

$$[x]_{\mathrm{R}} = \{y | yRx\}$$

Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Stimmt es, dass auch xRy folgt: $[x]_\mathrm{R} = [y]_\mathrm{R}$?
- Existiert ein $z \in [x]_\mathrm{R}$ und $z \in [y]_\mathrm{R}$, so ist $[x]_\mathrm{R} = [y]_\mathrm{R}$.
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \quad \bmod 6$?

Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Stimmt es, dass auch xRy folgt: $[x]_\mathrm{R} = [y]_\mathrm{R}$? Ja.
- Existiert ein $z \in [x]_\mathrm{R}$ und $z \in [y]_\mathrm{R}$, so ist $[x]_\mathrm{R} = [y]_\mathrm{R}$.
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \quad \bmod 6$?

Quiz

- Stimmt es, dass auch xRy folgt: $[x]_{\mathrm{R}} = [y]_{\mathrm{R}}$? Ja.
- Existiert ein $z \in [x]_{\mathrm{R}}$ und $z \in [y]_{\mathrm{R}}$, so ist $[x]_{\mathrm{R}} = [y]_{\mathrm{R}}$. Ja.
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \quad \bmod 6$?

Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Stimmt es, dass auch xRy folgt: $[x]_{\mathrm{R}} = [y]_{\mathrm{R}}$? Ja.
- Existiert ein $z \in [x]_{\mathrm{R}}$ und $z \in [y]_{\mathrm{R}}$, so ist $[x]_{\mathrm{R}} = [y]_{\mathrm{R}}$. Ja.
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu $R =$ mod 6? 6

Nerode-Äquivalenzrelation

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Nerode-Äquivalenzrelation

Sei $L \subseteq A^*$ eine formale Sprache. w_1 und w_2 seien Wörter $\in A^*$. Die Wörter heißen **Nerode-Äquivalent** ($\equiv_L$), falls gilt:

$$w_1 \equiv_L w_2 \leftrightarrow (\forall w \in A^* : w_1 w \in L \leftrightarrow w_2 w \in L)$$

Beispiel zur Nerode Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Alphabet $A = \{a, b\}$
- Sprache $L \subset A*$, L enthält alle Wörter ohne das Teilwort *ba*:
  $L = \langle a^* b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?

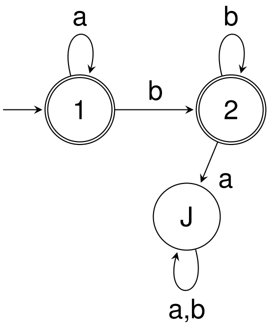
Nerode-Äquivalenzklassen:

Beispiel zur Nerode Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Alphabet $A = \{a, b\}$
- Sprache $L \subset A*$, L enthält alle Wörter ohne das Teilwort *ba*:
  $L = \langle a^* b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?



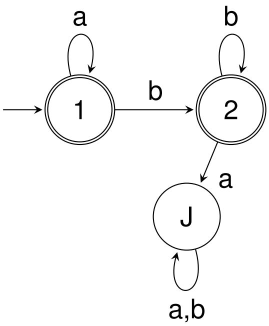
Nerode-Äquivalenzklassen:

Beispiel zur Nerode Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Alphabet $A = \{a, b\}$
- Sprache $L \subset A*$, L enthält alle Wörter ohne das Teilwort *ba*:
  $L = \langle a^* b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?



Wie kann jeder Zustand erreicht werden?

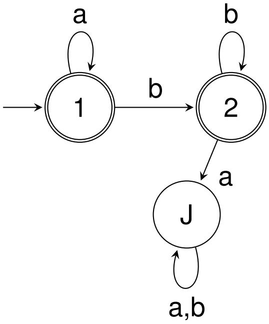
Nerode-Äquivalenzklassen:

Beispiel zur Nerode Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Alphabet $A = \{a, b\}$
- Sprache $L \subset A*$, L enthält alle Wörter ohne das Teilwort *ba*:
  $L = \langle a^* b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?



Wie kann jeder Zustand erreicht werden?

- a^*
- $a^* bb^*$
- $a^* bb^* a \{a, b\}^*$

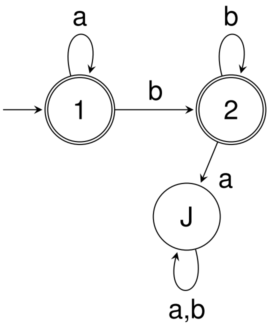
Nerode-Äquivalenzklassen:

Beispiel zur Nerode Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Alphabet $A = \{a, b\}$
- Sprache $L \subset A*$, L enthält alle Wörter ohne das Teilwort *ba*:
  $L = \langle a^* b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?



Wie kann jeder Zustand erreicht werden?

- a^*
- $a^* bb^*$
- $a^* bb^* a \{a, b\}^*$

Nerode-Äquivalenzklassen:
$[\epsilon]$, $[b]$, $[ba]$.

Beispiel 2 zur Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^k b^k | k \in \mathbb{N}_0\}$.
Wie sieht hier ein endlicher Akzeptor aus?

Beispiel 2 zur Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei die Sprache $L = \left\{a^k b^k | k \in \mathbb{N}_0\right\}$.
Wie sieht hier ein endlicher Akzeptor aus? Es gibt keinen.

Beispiel 2 zur Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^k b^k | k \in \mathbb{N}_0\}$.
Wie sieht hier ein endlicher Akzeptor aus? Es gibt keinen.
Nennt einige Nerode-Äquivalenzklassen.

Beispiel 2 zur Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^k b^k | k \in \mathbb{N}_0\}$.
Wie sieht hier ein endlicher Akzeptor aus? Es gibt keinen.
Nennt einige Nerode-Äquivalenzklassen.
Wieviele gibt es? Und wieviele Elemente sind in jeder Klasse enthalten?

Beispiel 2 zur Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei die Sprache $L = \left\{a^k b^k | k \in \mathbb{N}_0\right\}$.
Wie sieht hier ein endlicher Akzeptor aus? Es gibt keinen.
Nennt einige Nerode-Äquivalenzklassen.
Wieviele gibt es? Und wieviele Elemente sind in jeder Klasse enthalten?
Es gibt unendlich viele Nerode-Äquivalenzklassen und in jeder ist genau ein Element.

¡++¿

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Faktormenge

Definition: Faktormenge

Die Menge aller Äquivalenzklassen einer Menge zur Relation R bezeichnet man als **Faktormenge** und schreibt $M_{/\mathrm{R}}$.