GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 5

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 15. November 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **Kontextfreie Grammatik**.

Definition

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **Kontextfreie Grammatik**.

Was ist was?

N: Menge von Nichtterminalsymbolen

T: Menge von Terminalsymbolen

S: $S \in N$ Startsymbol

$P \subset N \times V^*$: Menge von Produktionen, $V := (N \cup T)$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ableitung

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Ableitung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ableitung

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ableitung

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Ableitung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorsicht

$$\Rightarrow \neq \rightarrow$$

- $\Rightarrow$ ist die Relation der Ableitung
- $\rightarrow$ ist die Relation der Produktion ($\in P$)

Ableitung

Frage

Was stimmt? Es ist $w_1, w_2 \in N \cup P$.

- $w_1 \rightarrow w_2$, daraus folt $w_1 \Rightarrow w_2$
- $w_1 \Rightarrow w_2$, daraus folgt $w_1 \rightarrow w_2$

Sprache der kontextfreien Grammatik

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann bezeichnen wir die Sprache $L = L(G)$ mit

$$L = \left\{ w \in T^* \middle| S \Rightarrow^* w \right\}$$

Sprache der kontextfreien Grammatik

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann bezeichnen wir die Sprache $L = L(G)$ mit

$$L = \left\{ w \in T^* \middle| S \Rightarrow^* w \right\}$$

Was ist $\Rightarrow^*$?

Mit $\Rightarrow^*$ ist die *reflexiv-transitive Hülle* der Ableitungsrelation gemeint.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt: $G_1 := (\{X\}, \{0\}, X, \{X \to X\})$
3. Ist $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt: $G_1 := (\{X\}, \{0\}, X, \{X \to X\})$
3. Ist $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

1. Ja z.B. $G = (\{X\}, \{0\}, X, \{\})$

Quickies

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt: $G_1 := (\{X\}, \{0\}, X, \{X \to X\})$
3. Ist $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

1. Ja z.B. $G = (\{X\}, \{0\}, X, \{\})$
2. $L(G_1) = \{\}$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt: $G_1 := (\{X\}, \{0\}, X, \{X \to X\})$
3. Ist $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

1. Ja z.B. $G = (\{X\}, \{0\}, X, \{\})$
2. $L(G_1) = \{\}$
3. Ja und $L(G_2) = \{\varepsilon\}$

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX \right\}\right) A$$

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right) A$$

Leite A ab!

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right) A$$

Leite A ab! Leite ABC ab! Finde weitere Wörter.

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right) A$$

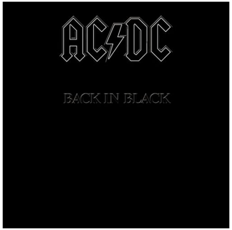
Leite A ab! Leite ABC ab! Finde weitere Wörter.

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX \right\} \right) A$$

Leite A ab! Leite ABC ab! Finde weitere Wörter.



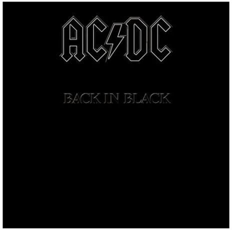
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right) A$$

Leite *A* ab! Leite *ABC* ab! Finde weitere Wörter.



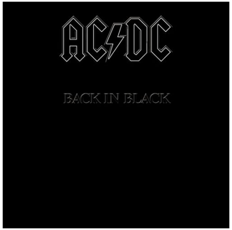
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \rightarrow \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right) A$$

Leite A ab! Leite ABC ab! Finde weitere Wörter.



ADAC

$L(G) = \{A, B, C, D\}^*$, oder etwa nicht?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Welche Sprachen erzeugen folgende Grammatiken.

1. $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow aY|\varepsilon, Y \rightarrow bX\})$
2. $G_2 := (\{X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, X,$
   $\{X \rightarrow Ya|Yb|Yc, Y \rightarrow ZZY|\varepsilon, Z \rightarrow a|b|c\})$

Gebt eine jeweils Grammatik an für die gilt $L(G) = L_i$:

1. $L_1 := \{ab, cd\}^+ \cdot \{a, c\}^2$
2. $A := \{0, 1\}, L_2 := \{w \in A^* | Num_0(w) = Num_1(w)\}$

Bonus-Aufgabe (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

In Mengen M aus Studenten mit $|M| \leq 3$

Konstruiert eine Grammatik die alle E-Mail-Adresse aus den Buchstaben a, b, c erzeugt. *Hinweis*: $T := \{a, b, c, @, ., \_\}$

Bonus-Aufgabe (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

In Mengen M aus Studenten mit $|M| \leq 3$

Konstruiert eine Grammatik die alle E-Mail-Adresse aus den Buchstaben a, b, c erzeugt. *Hinweis*: $T := \{a, b, c, @, ., \_\}$

Lösung

$G = (N, T, S, P)$

- $N = \{E, A, B\}$
- $T = \{a, b, c, ., \_, @\}$
- $S = E$
- $P = \{E \longrightarrow A@B.B, A \longrightarrow BA|\_A|.A, B \longrightarrow aB|bB|cB|\varepsilon\}$

Aufgabe: Winter 2008/2009

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik

  $$G = (N, \{a, b\}, S, P)$$

  an, für die $L(G)$ die Menge aller Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$ ist.
- Geben Sie eine Ableitung der Wörter *baaab* und *abaaaba* aus dem Startsymbol Ihrer Grammatik an.
- Beweisen Sie, dass Ihre Grammatik jedes Palindrom über dem Alphabet $\{a, b\}$ erzeugt.

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Relationen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt *Relation*.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine *homogene* Relation.

Relationen

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt *Relation*.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine *homogene* Relation.

Relationen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt *Relation*.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine *homogene* Relation.

Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt *Relation*.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine *homogene* Relation.

Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt *Relation*.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine *homogene* Relation.

Eigenschaften von Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Sei $R \subset A \times A$ eine (binäre) Relation auf der Menge A. Wir nennen R

- **reflexiv** falls gilt:

$$\forall x \in A : (x, x) \in R$$

- **transitiv** falls gilt:

$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

- **symmetrisch** falls gilt:

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Produkt

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N$, $S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des *Produktes von R und S* als

$$R \circ S = \{(x, z) \in M \times L | \exists\, y \in N : (x,\ y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

Produkt

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N$, $S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des *Produktes von R und S* als

$$R \circ S = \{(x, z) \in M \times L | \exists\, y \in N : (x,\ y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

Potenzschreibweise

$$R^0 = I_{\mathrm{M}} = \{(x, x)\, | x \in M\} \text{ und } R^{\mathrm{i}+1} = R^{\mathrm{i}} \circ R$$

Reflexiv-Transitive-Hülle

$$R^* = \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{\infty} R^{\mathrm{i}}$$

Äquivalenzrelationen

Definition

Sei R eine homogene Relation über M. $x, y, z \in M$.
Hat R folgende Eigenschaften:

reflexiv xRx

transitiv $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

symmetrisch $xRy \Rightarrow yRx$

So heißt R eine *Äquivalenzrelation*.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern. $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ "Freundschaft 1. Grades."
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ "Freundschaft 2. Grades"
- $R^* =?$ "Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?"

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern.
$R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ “Freundschaft 1. Grades.“
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ “Freundschaft 2. Grades“
- $R^* =?$ “Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?“

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern. $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit"-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ "Freundschaft 1. Grades."
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ "Freundschaft 2. Grades"
- $R^* =?$ "Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?"

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern.
$R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit"-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ "Freundschaft 1. Grades."
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ "Freundschaft 2. Grades"
- $R^* =$? "Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?"

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern. $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit"-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ "Freundschaft 1. Grades."
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ "Freundschaft 2. Grades"
- $R^* =?$ "Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?"

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Bestimmt die reflexiv-transitive Hülle der Relationen.

$M := \{1, 2, 3, 4\}, R_i \subset M \times M$

1. $R_1 := \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\}$
2. $R_2 := \{(1, 1), (2, 2)\}$
3. $R_3 := \{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Bestimmt die reflexiv-transitive Hülle der Relationen.

$M := \{1, 2, 3, 4\}, R_i \subset M \times M$

1. $R_1 := \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\}$
2. $R_2 := \{(1, 1), (2, 2)\}$
3. $R_3 := \{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

Lösungen

1. $R_1^* := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$
2. $R_2^* := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3. $R_3^* := \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$