

# GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 3

Vincent Hahn – [vincent.hahn@student.kit.edu](mailto:vincent.hahn@student.kit.edu) | 8. November 2012



[Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

1 [Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt 2

2 Wiederholung: Mengen

3 Formale Sprachen

4 Aufgaben

[Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

1 [Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt 2

2 Wiederholung: Mengen

3 Formale Sprachen

4 Aufgaben

[Please insert into preamble] bungs  
2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates  $B(x, y)$  in Prädikatenlogik:

$B(x, y) \hat{=}$   $y$  ist bester Freund von  $x$ .

$M$  sei die Menge aller Menschen.

## Lösung

[Please insert into preamble] bungs  
2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates  $B(x, y)$  in Prädikatenlogik:

$B(x, y) \hat{=}$   $y$  ist bester Freund von  $x$ .

$M$  sei die Menge aller Menschen.

## Lösung

$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)?$

[Please insert into preamble] bungs  
2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates  $B(x, y)$  in Prädikatenlogik:

$B(x, y) \hat{=}$   $y$  ist bester Freund von  $x$ .

$M$  sei die Menge aller Menschen.

## Lösung

$$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)!$$

[Please insert into preamble] bungs  
2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates  $B(x, y)$  in Prädikatenlogik:

$B(x, y) \hat{=}$   $y$  ist bester Freund von  $x$ .

$M$  sei die Menge aller Menschen.

## Lösung

$$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)!$$

$$\forall x \in M : \exists y \in M : B(x, y)$$

[Please insert into preamble] bungs  
2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates  $B(x, y)$  in Prädikatenlogik:

$B(x, y) \hat{=}$   $y$  ist bester Freund von  $x$ .

$M$  sei die Menge aller Menschen.

## Lösung

$$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)!$$

$$\forall x \in M : \exists y \in M : B(x, y) \wedge \forall z \in M \setminus y : \neg B(x, z)$$



[Please insert into preamble] bungs  
2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates  $B(x, y)$  in Prädikatenlogik:

$B(x, y) \hat{=}$   $y$  ist bester Freund von  $x$ .

$M$  sei die Menge aller Menschen.

## Lösung

$$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)!$$

$$\forall x \in M : \exists y \in M : B(x, y) \wedge \forall z \in M \setminus y : \neg B(x, z)$$

[Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

1 [Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt 2

2 **Wiederholung: Mengen**

3 Formale Sprachen

4 Aufgaben

[Please insert into preamble]bungshblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

**Aufgabe 1**Was ist  $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$ ?**Aufgabe 2**Frage: Was ist  $M \cup \{\}$ ?**Aufgabe 3**Frage: Was ist  $M \cap \{\}$ ?

[Please insert into preamble]bungsbblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Aufgabe 1

Was ist  $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$ ?Antwort:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 

### Aufgabe 2

Frage: Was ist  $M \cup \{\}$ ?

### Aufgabe 3

Frage: Was ist  $M \cap \{\}$ ?

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Aufgabe 1

Was ist  $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$ ?Antwort:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 

### Aufgabe 2

Frage: Was ist  $M \cup \{\}$ ?Antwort:  $M$ 

### Aufgabe 3

Frage: Was ist  $M \cap \{\}$ ?

[Please insert into preamble]bungshblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Aufgabe 1

Was ist  $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$ ?Antwort:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 

### Aufgabe 2

Frage: Was ist  $M \cup \{\}$ ?Antwort:  $M$ 

### Aufgabe 3

Frage: Was ist  $M \cap \{\}$ ?Antwort:  $\{\}$ .

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Aufgabe 4

Die Mengendifferenz: Was ist  $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}$ ?

### Aufgabe 5

Alles zusammen: Was ist  $((\{1, 2, 3\} \cup \{2, a, b\}) \cap \{1, 2, a, b, ?\}) \setminus \{1, a\}$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Aufgabe 4

Die Mengendifferenz: Was ist  $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}$ ?

Antwort:  $\{1\}$

### Aufgabe 5

Alles zusammen: Was ist  $((\{1, 2, 3\} \cup \{2, a, b\}) \cap \{1, 2, a, b, ?\}) \setminus \{1, a\}$



[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Aufgabe 4

Die Mengendifferenz: Was ist  $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}$ ?

Antwort:  $\{1\}$

### Aufgabe 5

Alles zusammen: Was ist  $((\{1, 2, 3\} \cup \{2, a, b\}) \cap \{1, 2, a, b, ?\}) \setminus \{1, a\}$ ?

Antwort:  $\{2, a\}$

[Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

1 [Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt 2

2 Wiederholung: Mengen

3 Formale Sprachen

4 Aufgaben

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Definition: formale Sprache

Eine *formale Sprache* (über einem Alphabet  $A$ ) ist eine Teilmenge  $L \subseteq A^*$ .

### Vorsicht

$abb \neq \{abb\}$ , aber das Wort  $abb$  ist in der Sprache  $\{abb\}$ .

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Erklärung

$L$  ist also eine Menge. Darin sind alle syntaktisch korrekten Gebilde enthalten.

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel: Schlüsselwörter in Java

Eine formale Sprache wäre etwa die Menge der Schlüsselwörter in der Programmiersprache Java:

Beispiele:

Größe:

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel: Schlüsselwörter in Java

Eine formale Sprache wäre etwa die Menge der Schlüsselwörter in der Programmiersprache Java:

Beispiele:  $\{ \textit{class}, \textit{if}, \textit{else}, \textit{for}, \textit{while}, \dots \}$

Größe:

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel: Schlüsselwörter in Java

Eine formale Sprache wäre etwa die Menge der Schlüsselwörter in der Programmiersprache Java:

Beispiele:  $\{ \textit{class}, \textit{if}, \textit{else}, \textit{for}, \textit{while}, \dots \}$

Größe: Endlich

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel:

Gesucht ist eine Sprache  $L$  über  $A = \{a, b\}$ , in denen kein Wort das Teilwort  $ab$  enthält.

Deklaration:

Alternativ:



[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel:

Gesucht ist eine Sprache  $L$  über  $A = \{a, b\}$ , in denen kein Wort das Teilwort  $ab$  enthält.

Deklaration:  $L = \{a, b\} \setminus \{w_1 ab w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$ .

Alternativ:

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

**Beispiel:**

Gesucht ist eine Sprache  $L$  über  $A = \{a, b\}$ , in denen kein Wort das Teilwort  $ab$  enthält.

Deklaration:  $L = \{a, b\} \setminus \{w_1 ab w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$ .

Alternativ:  $L = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in \{b\}^* \wedge \{a\}^*\}$ .

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist  $A = \{ \quad \quad \quad \}$
- Die Sprache  $L$  sind alle Dezimalzahlen

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
- Die Sprache  $L$  sind alle Dezimalzahlen
- $\Rightarrow -22 \in L$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
- Die Sprache  $L$  sind alle Dezimalzahlen
- $\Rightarrow -22 \in L$
- $\Rightarrow 22 - 0 - - - 3 \notin L$  (aber  $\in A^*$ !)

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
- Die Sprache  $L$  sind alle Dezimalzahlen
- $\Rightarrow -22 \in L$
- $\Rightarrow 22 - 0 - - - 3 \notin L$  (aber  $\in A^*$ !)

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Definition: Produkt

Seien  $L_1$  und  $L_2$  zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das Produkt der Sprachen  $L_1$  und  $L_2$ .

### Beispiel:

Wie vorhin ist die Sprache  $L$  über  $A = \{a, b\}$  gesucht, wo nirgendwo das Teilwort  $ab$  vorkommt. Komfortable Produktschreibweise:

[Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Definition: Produkt

Seien  $L_1$  und  $L_2$  zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das Produkt der Sprachen  $L_1$  und  $L_2$ .

### Beispiel:

Wie vorhin ist die Sprache  $L$  über  $A = \{a, b\}$  gesucht, wo nirgendwo das Teilwort  $ab$  vorkommt. Komfortable Produktschreibweise:  $L = \{b\}^* \{a\}^*$



[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel: Produkt

Gesucht ist die Sprache der nichtleeren Wörter über dem Alphabet  $A$ .

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel: Produkt

Gesucht ist die Sprache der nichtleeren Wörter über dem Alphabet  $A$ .

$$L = A \cdot A^*$$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen  $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$  und  $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ .  
Sind diese Wörter  $\in L_1 \cdot L_2$ ?

☒  $ab$ ☐  $\epsilon$ ☐  $bab$ ☐  $aab$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen  $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$  und  $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ .  
Sind diese Wörter  $\in L_1 \cdot L_2$ ?

☒  $ab$ ☒  $\epsilon$ ☐  $bab$ ☐  $aab$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen  $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$  und  $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ .  
Sind diese Wörter  $\in L_1 \cdot L_2$ ?

☒  $ab$ ☒  $\epsilon$ ☒  $bab$ ☐  $aab$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen  $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$  und  $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ .  
Sind diese Wörter  $\in L_1 \cdot L_2$ ?

- $ab$
- $\epsilon$
- $bab$
- $aab$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen  $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$  und  $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ .  
Sind diese Wörter  $\in L_1 \cdot L_2$ ?

- $ab$
- $\epsilon$
- $bab$
- $aab$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Definition: Potenzen

$L$  sei eine formale Sprache. Rekursiv lässt sich auch die Potenz davon definieren.

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\} \\ L^{i+1} &= L^i \cdot L \end{aligned}$$



[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 1: Potenzen

Es sei  $L = \{a\}^* \{b\}^*$ . Was ist dann in

■  $L^0$

■  $L^1$

■  $L^2$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 1: Potenzen

Es sei  $L = \{a\}^* \{b\}^*$ . Was ist dann in

■  $L^0$

■  $L^1$

■  $L^2$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel 1: Potenzen

Es sei  $L = \{a\}^* \{b\}^*$ . Was ist dann in

- $L^0$
- $L^1$
- $L^2$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Definition: Konkatenationsabschluss

$L$  sei eine formale Sprache. Dann ist der Konkatenationsabschluss:

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Der  $\epsilon$ -freie Konkatenationsabschluss ist:

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## $\epsilon$ -freier Konkatenationsabschluss

Falls  $\epsilon \in L$ , so enthält der  $\epsilon$ -freie Konkatenationsabschluss auch  $\epsilon$ .

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel 1: Konkatenationsabschluss

Argumentiere, dass  $L^* = \{a, b\}^*$  ist.

## Beispiel 2: Mengenäquivalenz beweisen

Zeige, dass  $L^* \cdot L = L^+$  (Tafel).

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel 1: Konkatenationsabschluss

Argumentiere, dass  $L^* = \{a, b\}^*$  ist.

## Beispiel 2: Mengenäquivalenz beweisen

Zeige, dass  $L^* \cdot L = L^+$  (Tafel).

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiele

- 1 IP4-Adressen
- 2 Programmiersprache C
- 3 HTML
- 4 E-Mail (RFC 5322)



[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel

- 1 Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
- 2 Alphabet:  $A = \{a, b\}$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Beispiel

- 1 Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
- 2 Alphabet:  $A = \{a, b\}$

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

### Beispiel

- ① Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
- ② Alphabet:  $A = \{a, b\}$
- ③  $L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$  oder
- ④  $L = \{w_1 b w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$

Vincent Hahn – [vincent.hahn@student.kit.edu](mailto:vincent.hahn@student.kit.edu)

[Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

1 [Pleaseinsertintopreamble]bungsblatt 2

2 Wiederholung: Mengen

3 Formale Sprachen

4 Aufgaben

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Winter 2010/2011

Es sei  $A = \{a, b\}$ . Beschreiben Sie die folgenden formalen Sprachen mit den Symbolen  $\{, \}, a, b, \epsilon, \cup, *, \text{Komma}, (, )$  und  $+$ :

- ① die Menge aller Wörter über  $A$ , die das Teilwort „ab“ enthalten
- ② die Menge aller Wörter über  $A$ , deren vorletztes Zeichen ein „b“ ist
- ③ die Menge aller Wörter über  $A$ , in denen nirgends zwei „b“s hintereinander vorkommen

[Please insert into preamble] bungsblatt

2

Wiederholung: Mengen

Formale Sprachen

Aufgaben

## Sommer 2009 (4 von 46 Punkten)

Gegeben seien diese formalen Sprachen:

$$L_1 = \{a^k b^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 3 = 1\}$$

$$L_2 = \{b^k a^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \bmod 2 = 1 \wedge m \bmod 3 = 0\}$$

Geben Sie eine äquivalente Menge in Mengenschreibweise an für:

- ①  $L = L_1$
- ②  $L = L_1 \cdot L_2$
- ③  $L = L_1 \cap L_2$