

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 6

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 29. November 2012



Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

1 Übungsblatt 5

2 Wiederholung

3 Übersetzungen

4 Homomorphismus

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

- 1 **Übungsblatt 5**
- 2 Wiederholung
- 3 Übersetzungen
- 4 Homomorphismus

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Allgemeines

- Randbedingungen bei Sprachen überprüfen (ε)
- “Für ein beliebiges aber festes. . .”

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

1 Übungsblatt 5

2 **Wiederholung**

3 Übersetzungen

4 Homomorphismus

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- x^2 ist eine surjektive Abbildung

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ✓

- x^2 ist eine surjektive Abbildung

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

■ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ✓

■ x^2 ist eine surjektive Abbildung ✓✗

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Aufgaben

- Was ist mit $(f \circ g)(x)$ gemeint?
- Wann ist eine Funktion injektiv?
- Wann ist eine Funktion surjektiv?

Binäre Operationen

Geben Sie für folgende aussagenlogische Formeln jeweils einen arithmetischen Ausdruck an, so dass das Ergebnis den Wahrheitswerten der aussagenlogischen Formel entspricht. Verwenden Sie für den Ausdruck nur die Operatoren $+$, $-$ und \cdot sowie konstante Zahlen. 0 bzw. 1 repräsentiert dabei den Wahrheitswert *falsch* bzw. *wahr*.

■ $A \vee B$

■ $A \Rightarrow B$

■ $A \Leftrightarrow B$

Vollständige Induktion

Beweisen sie folgende Gleichung durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

1 Übungsblatt 5

2 Wiederholung

3 Übersetzungen

4 Homomorphismus

Definition

Definition von Num

Zu einer Zahlenbasis b gilt

$$\text{Num}_b(\varepsilon) = 0$$

$$\forall w \in Z_b^* : \forall x \in Z_b : \text{Num}_b(wx) = b \cdot \text{Num}_b(w) + \text{Num}_b(x)$$

Beispiel

Gegeben ist die Zahl 101 im Binärsystem ($b = 2$). Umrechnung:

$$\begin{aligned} \text{Num}_2(101) &= 2 \cdot \text{Num}_2(10) && + \text{Num}_2(1) \\ &= 2 \cdot \text{Num}_2(10) && + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot \text{Num}_2(1) + \text{Num}_2(0)) && + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 + 0) && + 1 \\ &= 2 \cdot 2 + 1 && = 5 \end{aligned}$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\text{Num}_2(1010) =$$

$$\text{Num}_4(321) =$$

$$\text{Num}_{16}(B2) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(1010) &= 2 \cdot \text{Num}_2(101) + \text{Num}_2(0) \\ &= \dots = 10\end{aligned}$$

$$\text{Num}_4(321) =$$

$$\text{Num}_{16}(B2) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(1010) &= 2 \cdot \text{Num}_2(101) + \text{Num}_2(0) \\ &= \dots = 10\end{aligned}$$

$$\text{Num}_4(321) = 4 \cdot \text{Num}_4(32) + \text{Num}_4(1)$$

$$\text{Num}_{16}(B2) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(1010) &= 2 \cdot \text{Num}_2(101) + \text{Num}_2(0) \\ &= \dots = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_4(321) &= 4 \cdot \text{Num}_4(32) + \text{Num}_4(1) \\ &= 4 \cdot (4 \cdot \text{Num}_4(3) + \text{Num}_4(2)) + \text{Num}_4(1)\end{aligned}$$

$$\text{Num}_{16}(B2) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(1010) &= 2 \cdot \text{Num}_2(101) + \text{Num}_2(0) \\ &= \dots = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_4(321) &= 4 \cdot \text{Num}_4(32) + \text{Num}_4(1) \\ &= 4 \cdot (4 \cdot \text{Num}_4(3) + \text{Num}_4(2)) + \text{Num}_4(1) \\ &= 57\end{aligned}$$

$$\text{Num}_{16}(B2) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(1010) &= 2 \cdot \text{Num}_2(101) + \text{Num}_2(0) \\ &= \dots = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_4(321) &= 4 \cdot \text{Num}_4(32) + \text{Num}_4(1) \\ &= 4 \cdot (4 \cdot \text{Num}_4(3) + \text{Num}_4(2)) + \text{Num}_4(1) \\ &= 57\end{aligned}$$

$$\text{Num}_{16}(B2) = 16 \cdot \text{Num}_{16}(B) + \text{Num}_{16}(2)$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(1010) &= 2 \cdot \text{Num}_2(101) + \text{Num}_2(0) \\ &= \dots = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_4(321) &= 4 \cdot \text{Num}_4(32) + \text{Num}_4(1) \\ &= 4 \cdot (4 \cdot \text{Num}_4(3) + \text{Num}_4(2)) + \text{Num}_4(1) \\ &= 57\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_{16}(B2) &= 16 \cdot \text{Num}_{16}(B) + \text{Num}_{16}(2) \\ &= 16 \cdot 11 + 2\end{aligned}$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Jetzt ihr

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(1010) &= 2 \cdot \text{Num}_2(101) + \text{Num}_2(0) \\ &= \dots = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_4(321) &= 4 \cdot \text{Num}_4(32) + \text{Num}_4(1) \\ &= 4 \cdot (4 \cdot \text{Num}_4(3) + \text{Num}_4(2)) + \text{Num}_4(1) \\ &= 57\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_{16}(B2) &= 16 \cdot \text{Num}_{16}(B) + \text{Num}_{16}(2) \\ &= 16 \cdot 11 + 2 \\ &= 178\end{aligned}$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) =$$

$$\text{Num}_2(111) =$$

$$\text{Num}_2(1111) =$$

Gibt es eine Regel?

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) =$$

$$\text{Num}_3(222) =$$

$$\text{Num}_3(2222) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) = 3$$

$$\text{Num}_2(111) =$$

$$\text{Num}_2(1111) =$$

Gibt es eine Regel?

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) =$$

$$\text{Num}_3(222) =$$

$$\text{Num}_3(2222) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) = 3$$

$$\text{Num}_2(111) = 7$$

$$\text{Num}_2(1111) =$$

Gibt es eine Regel?

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) =$$

$$\text{Num}_3(222) =$$

$$\text{Num}_3(2222) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) = 3$$

$$\text{Num}_2(111) = 7$$

$$\text{Num}_2(1111) = 15$$

Gibt es eine Regel?

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) =$$

$$\text{Num}_3(222) =$$

$$\text{Num}_3(2222) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) = 3$$

$$\text{Num}_2(111) = 7$$

$$\text{Num}_2(1111) = 15$$

Gibt es eine Regel? $\text{Num}_2(1^m) = 2^m - 1$

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) =$$

$$\text{Num}_3(222) =$$

$$\text{Num}_3(2222) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) = 3$$

$$\text{Num}_2(111) = 7$$

$$\text{Num}_2(1111) = 15$$

Gibt es eine Regel? $\text{Num}_2(1^m) = 2^m - 1$

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) = 8$$

$$\text{Num}_3(222) =$$

$$\text{Num}_3(2222) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) = 3$$

$$\text{Num}_2(111) = 7$$

$$\text{Num}_2(1111) = 15$$

Gibt es eine Regel? $\text{Num}_2(1^m) = 2^m - 1$

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) = 8$$

$$\text{Num}_3(222) = 26$$

$$\text{Num}_3(2222) =$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Regeln

$$\text{Num}_2(11) = 3$$

$$\text{Num}_2(111) = 7$$

$$\text{Num}_2(1111) = 15$$

Gibt es eine Regel? $\text{Num}_2(1^m) = 2^m - 1$

Geht das auch in anderen Fällen?

$$\text{Num}_3(22) = 8$$

$$\text{Num}_3(222) = 26$$

$$\text{Num}_3(2222) = 80$$

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

Von Binär nach Dezimal

Von Binär nach Dezimal

Input: $w \in \mathbb{Z}_2^*$ $x \leftarrow 0$ **for** $i \leftarrow 0$ **to** $|w| - 1$ **do** $x \leftarrow 2x + \text{Num}_2(w(i))$ **od****Output:** x

Winter 2010/2011

Es bezeichne \mathbb{Z} die Menge der ganzen Zahlen. Gegeben sei eine Ziffernmenge $Z_{-2} = \{N, E\}$ mit der Festlegung $\text{Num}_2(N) = 0$ und $\text{Num}_2(E) = 1$. Wir definieren eine Abbildung $\text{Num}_{-2} : Z_{-2}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$\text{Num}_{-2}(\varepsilon) = 0$$

$$\forall w \in Z_{-2}^* : \forall x \in Z_{-2} : \text{Num}_{-2}(wx) = -2 \cdot \text{Num}_{-2}(w) + \text{Num}_{-2}(x)$$

- Geben Sie für $w \in \{E, EN, EE, ENE, EEN, EEE\}$ jeweils $\text{Num}_{-2}(w)$ an.
- Für welche Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $w \in Z_{-2}^*$ mit $\text{Num}_{-2}(w) = x$?
- Wie kann man an einem Wort $w \in Z_{-2}^*$ erkennen, ob $\text{Num}_{-2}(w)$ negativ, Null oder positiv ist?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Übungsblatt 5

Wiederholung

Übersetzungen

Homomorphismus

- 1 Übungsblatt 5
- 2 Wiederholung
- 3 Übersetzungen
- 4 Homomorphismus**

Definition

A und B seien Alphabete. h ist eine Abbildung: $h : A \rightarrow B^*$ und $h^{**} : A^* \rightarrow B^*$.

Es muss gelten, dass h^{**} ein Homomorphismus ist:

$$h^{**} = \varepsilon$$

$$\forall w \in A^* : \forall x \in A : h^{**}(wx) = h^{**}(w)h(x)$$

Definition

A und B seien Alphabete. h ist eine Abbildung: $h : A \rightarrow B^*$ und $h^{**} : A^* \rightarrow B^*$.

Es muss gelten, dass h^{**} ein Homomorphismus ist:

$$h^{**} = \varepsilon$$

$$\forall w \in A^* : \forall x \in A : h^{**}(wx) = h^{**}(w)h(x)$$

Eigenschaften

Ein Homomorphismus ist. . .

- **Strukturerhaltend**

$$\forall xy \in A^* : h(xy) = h(x) \circ h(y)$$

- ε -frei, falls

$$\forall x \in A : h(x) \neq \varepsilon$$

- Präfixfrei, falls

$$\forall w \in A^* : \nexists v, z \in A^* \wedge w \neq vz : h(w) = h(v) \circ h(z)$$

Anschaulich: Für verschiedene x_1 und x_2 gilt: $h(x_1)$ ist kein Präfix von $h(x_2)$.

Eigenschaften

Ein Homomorphismus ist. . .

- Strukturerhaltend

$$\forall xy \in A^* : h(xy) = h(x) \circ h(y)$$

- ε -frei, falls

$$\forall x \in A : h(x) \neq \varepsilon$$

- Präfixfrei, falls

$$\forall w \in A^* : \nexists v, z \in A^* \wedge w \neq vz : h(w) = h(v) \circ h(z)$$

Anschaulich: Für verschiedene x_1 und x_2 gilt: $h(x_1)$ ist kein Präfix von $h(x_2)$.

Eigenschaften

Ein Homomorphismus ist. . .

- Strukturerhaltend

$$\forall xy \in A^* : h(xy) = h(x) \circ h(y)$$

- ε -frei, falls

$$\forall x \in A : h(x) \neq \varepsilon$$

- Präfixfrei, falls

$$\forall w \in A^* : \nexists v, z \in A^* \wedge w \neq vz : h(w) = h(v) \circ h(z)$$

Anschaulich: Für verschiedene x_1 und x_2 gilt: $h(x_1)$ ist kein Präfix von $h(x_2)$.

Beispiel

$h : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$. Es ist

■ $h(a) = 1$

■ $h(b) = 01$

■ $h(c) = 001$

Ist der Homomorphismus Präfixfrei? Ist er ε -frei? Wir erhalten ein beliebiges Codewort und dekodieren dies. Wie?

$$u(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ a \cdot u(w') & \text{falls } w = 1w' \\ b \cdot u(w') & \text{falls } w = 01w' \\ c \cdot u(w') & \text{falls } w = 001w' \end{cases}$$

Dekodiere 100101.

Beispiel

$h : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$. Es ist

■ $h(a) = 1$

■ $h(b) = 01$

■ $h(c) = 001$

Ist der Homomorphismus Präfixfrei? Ist er ε -frei? Wir erhalten ein beliebiges Codewort und dekodieren dies. Wie?

$$u(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ a \cdot u(w') & \text{falls } w = 1w' \\ b \cdot u(w') & \text{falls } w = 01w' \\ c \cdot u(w') & \text{falls } w = 001w' \end{cases}$$

Dekodiere 100101.

Beispiel

$h : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$. Es ist

■ $h(a) = 1$

■ $h(b) = 01$

■ $h(c) = 001$

Ist der Homomorphismus Präfixfrei? Ist er ε -frei? Wir erhalten ein beliebiges Codewort und dekodieren dies. Wie?

$$u(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ a \cdot u(w') & \text{falls } w = 1w' \\ b \cdot u(w') & \text{falls } w = 01w' \\ c \cdot u(w') & \text{falls } w = 001w' \end{cases}$$

Dekodiere 100101.

Beispiel

$h : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$. Es ist

■ $h(a) = 1$

■ $h(b) = 01$

■ $h(c) = 001$

Ist der Homomorphismus Präfixfrei? Ist er ε -frei? Wir erhalten ein beliebiges Codewort und dekodieren dies. Wie?

$$u(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ a \cdot u(w') & \text{falls } w = 1w' \\ b \cdot u(w') & \text{falls } w = 01w' \\ c \cdot u(w') & \text{falls } w = 001w' \end{cases}$$

Dekodiere 100101.

Gegeben ist

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = a \\ 3 & \text{falls } x = b \end{cases}$$

■ Strukturerhaltend?

■ ε -frei:

■ Präfixfrei:

Gegeben ist

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = a \\ 3 & \text{falls } x = b \end{cases}$$

- Strukturerhaltend?

$$h(aba) = h(a) \circ h(b) \circ h(a) = 232$$

- ε -frei:

- Präfixfrei:

Gegeben ist

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = a \\ 3 & \text{falls } x = b \end{cases}$$

- Strukturerhaltend?

$$h(aba) = h(a) \circ h(b) \circ h(a) = 232$$

- ε -frei: Annahme $h(c) = \varepsilon$, $h(b) = 2$.

Gegeben: Verschlüsseltes Wort und Homomorphismus: $h(w) = 2$.

Woher weiß ich, wieviele c in meinem Wort w sind?

- Präfixfrei:

Gegeben ist

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = a \\ 3 & \text{falls } x = b \end{cases}$$

- Strukturerhaltend?

$$h(aba) = h(a) \circ h(b) \circ h(a) = 232$$

- ε -frei: Annahme $h(c) = \varepsilon$, $h(b) = 2$.

Gegeben: Verschlüsseltes Wort und Homomorphismus: $h(w) = 2$.

Woher weiß ich, wieviele c in meinem Wort w sind?

- Präfixfrei: $h(a) = 2$, $h(b) = 3$, $h(c) = 23$. Woher weiß ich bei $h(w) = 23$, was w ist?

Wie auf Wörter übertragen?

Eigenschaften, welche sich ausnutzen lassen:

- Wörter lassen sich konkatenieren
- Wörter, lassen sich auf Werte abbilden

Beispiel

- $h(a) = 001$ und $h(b) = 1101$
- dann ist $h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

Wie auf Wörter übertragen?

Eigenschaften, welche sich ausnutzen lassen:

- Wörter lassen sich konkatenieren
- Wörter, lassen sich auf Werte abbilden

Beispiel

- $h(a) = 001$ und $h(b) = 1101$
- dann ist $h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

Wie auf Wörter übertragen?

Eigenschaften, welche sich ausnutzen lassen:

- Wörter lassen sich konkatenieren
- Wörter, lassen sich auf Werte abbilden

Beispiel

- $h(a) = 001$ und $h(b) = 1101$
- dann ist $h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

Warum?

Beschreibung

Die Huffman-Codierung ordnet Wörter bzw. Wörterblöcke durch einen Homomorphismus eine Codierung zu, die umso länger wird, je seltener das Wort vorkommt.

Beispiel

Gegeben: $w = \textit{analysis}$. Vorgehen:

- 1 Tabelle aufstellen: Wie oft kommt jedes Symbol vor?
- 2 Baum aufstellen
- 3 Kanten beschriften

Geht das noch besser?

Ja, wenn ein e zum Beispiel oft gefolgt von einem i kommt, kann dies zu einem neuen Zeichen zusammengefasst werden.

Alternativ: Arithmetische Kodierung.

Aufgabe Winter 2008

Das Wort

$$w = 0000000100110001001100000000111000010000$$

soll komprimiert werden.

- Zerlegen Sie w in Viererblöcke und bestimmen Sie die Häufigkeit der vorkommenden Blöcke.
- Zur Kompression soll ein Huffman-Code verwendet werden. Stellen Sie einen Baum auf. Beschriften Sie alle Knoten und Kanten
- Geben Sie die Codierung des Wortes w mit Ihrem Code an.

Aufgabe Winter 2008

Das Wort

$$w = 0000000100110001001100000000111000010000$$

soll komprimiert werden.

- Zerlegen Sie w in Viererblöcke und bestimmen Sie die Häufigkeit der vorkommenden Blöcke.
- Zur Kompression soll ein Huffman-Code verwendet werden. Stellen Sie einen Baum auf. Beschriften Sie alle Knoten und Kanten
- Geben Sie die Codierung des Wortes w mit Ihrem Code an.

Lösung: 1010010100111000011

Aufgabe Winter 2010

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \geq k \geq n$. In einem Wort $w \in \{a, b, c\}^*$ der Länge $3n$ komme k mal das Zeichen a , n mal das Zeichen b und $2n - k$ mal das Zeichen c vor.

- Geben Sie den für die Huffman-Codierung benötigten Baum an
- Geben Sie in Abhängigkeit von k und n die Länge des zu w gehörenden Huffman-Codes an

Aufgabe Winter 2010

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \geq k \geq n$. In einem Wort $w \in \{a, b, c\}^*$ der Länge $3n$ komme k mal das Zeichen a , n mal das Zeichen b und $2n - k$ mal das Zeichen c vor.

- Geben Sie den für die Huffman-Codierung benötigten Baum an
- Geben Sie in Abhängigkeit von k und n die Länge des zu w gehörenden Huffman-Codes an

Lösung Teil b: $2k + 2n + 2n - k = 4n + k$