GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 8

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 13. Dezember 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Allgemeine Fehler, Fragen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Allgemeines

Überblick

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- In jedem gerichteten Baum gibt es genau einen Knoten x_0 mit $d^+(x_0) = 0 \land d^-(x_0) \geq 0$
- Zwischen zwei isomorphen Graphen gibt es immer nur einen Isomorphismus

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- In jedem gerichteten Baum gibt es genau einen Knoten x_0 mit $d^+(x_0) = 0 \wedge d^-(x_0) \geq 0$ $\surd$
- Zwischen zwei isomorphen Graphen gibt es immer nur einen Isomorphismus

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- In jedem gerichteten Baum gibt es genau einen Knoten x_0 mit $d^+(x_0) = 0 \wedge d^-(x_0) \geq 0$ $\surd$
- Zwischen zwei isomorphen Graphen gibt es immer nur einen Isomorphismus X

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Adjazenz

Zwei Knoten x und y eines Graphen sind *adjazent* (oder *benachbart*), wenn sie durch eine Kante verbunden sind.

Adjazenzliste

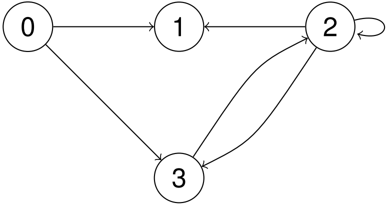
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

In der Adjazenzliste stehen zu einem Knoten x alle Knoten y, die von x direkt erreichbar sind.

Adjazenzliste - Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



0	1,2
1	
2	1,2,3
3	2

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ajazenzmatrix

Karlsruher Institut für Technologie

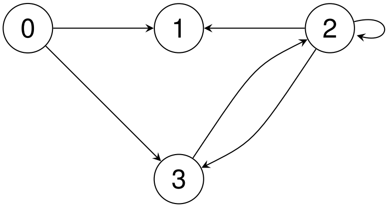
Definition

Bei einem Graphen mit n Knoten bezeichnet die Matrix $A \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ die Adjazenmatrix des Graphen. Für die Matrix gilt:

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin E \\ 1 & (i,j) \in E \end{cases}$$

Adjazenzmatrix - Beispiel

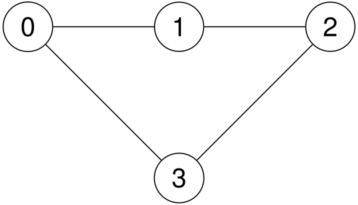
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrix - Beispiel 2

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Besondere Adjazenzmatrizen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrix - Eigenschaften

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Schlingen stehen bei A_{ii}
- Ungerichteter Graph $\Leftrightarrow$ A symmetrisch $\Leftrightarrow A_{ij} = A_{ji}$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

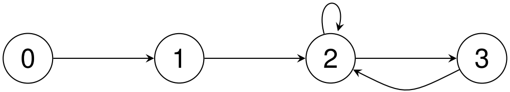
Vergleich: Adjazenzmatrix und Adjazenzliste

- Spart Speicherplatz (bei wenig Kanten)
- Schneller Zugriff auf adjazente ("benachbarte") Knoten

- Konstanter Speicherplatzverbrauch n^2
- Schneller Zugriff auf Kante von i nach j
- Komfortabel auch bei vielen Kanten

Potenz der Adjazenzmatrix

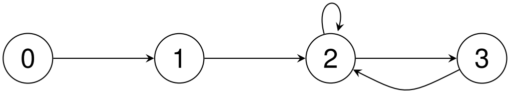
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Potenz der Adjazenzmatrix

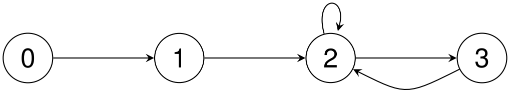
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potenz der Adjazenzmatrix

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(A^2\right)_{ij}$ gibt Auskunft, ob es einen *Weg der Länge 2* von i nach j gibt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Matrixmultiplikation

Berechne jeweils AB und BA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

Berechne jeweils AB und BA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation - Algorithmus

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

for $i \leftarrow 0$ **to** $l - 1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
    $C_{ij} \leftarrow 0$
    for $k \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
      $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$
    od
  od
od

Die Einheitsmatrix

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

3×3-Einheitsmatrix:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbb{I} = \mathbb{I}A = A$$

Wegematrix

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Wegematrix W ist definiert als

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin E^* \\ 1 & (i,j) \in E^* \end{cases}$$

Ein Algorithmus zur Berechnung ist

$$W_{ij} = \operatorname{sgn}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right)_{ij}\right)$$

Dabei ist sgn die "Vorzeichenfunktion":

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften der Wegematrix

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Wegematrix ist die Adjazenzmatrix der reflexiv-transitive Hülle
- Gibt es einen beliebigen Weg zwischen zwei Knoten i und j, ist $W_{ij} = 1$.

Der einfache Algorithmus zur Wegematrix

$W \leftarrow 0$ ▷ Nullmatrix
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $M \leftarrow \mathbb{I}$ ▷ Einheitsmatrix
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $W \leftarrow W + M$
od
$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$

Eigenschaften des Algorithmus

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- A^n macht $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ Matrixmultiplikationen
- Jede Matrixmultiplikation macht n^2 Operationen
- Summe: n^2 Matrixelemente addieren, das ganze n Mal: Über $n \Rightarrow n \cdot n^2 = n^3$ Operationen
- Signum-Funktion: n^2 Operationen

$$\Rightarrow n^2 + n^3 + n^2 \left(n + n - 1\right) \cdot \frac{n\left(n-1\right)}{2} = n^5 + \mathcal{O}\left(n^4\right)$$

Algorithmuslaufzeit: n^5

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Laufzeitverbesserung

Wie könnte Laufzeit gespart werden (eventuell mit mehr Speicherverbrauch)?

Vergleich der Algorithmen:

$W \leftarrow 0$ $\qquad \triangleright$ Nullmatrix
for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
  $M \leftarrow \mathbb{I}$ $\qquad \triangleright$ Einheitsmatrix
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $W \leftarrow W + M$
od
$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$

Laufzeitverbesserung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wie könnte Laufzeit gespart werden (eventuell mit mehr Speicherverbrauch)? Etwa durch Zwischenspeichern der berechneten Matrizen A^i.
Vergleich der Algorithmen:

$W \leftarrow 0$ ▷ Nullmatrix
for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
  $M \leftarrow \mathbb{I}$ ▷ Einheitsmatrix
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $W \leftarrow W + M$
od
$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Laufzeitverbesserung

Karlsruher Institut für Technologie

Wie könnte Laufzeit gespart werden (eventuell mit mehr Speicherverbrauch)? Etwa durch Zwischenspeichern der berechneten Matrizen A^i.

Vergleich der Algorithmen:

$W \leftarrow 0$ ▷ Nullmatrix
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $M \leftarrow \mathbb{I}$ ▷ Einheitsmatrix
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $W \leftarrow W + M$
od
$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$

$W \leftarrow 0$ ▷ Nullmatrix
$M \leftarrow \mathbb{I}$ ▷ Einheitsmatrix
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $W \leftarrow W + M$
  $M \leftarrow M \cdot A$
od
$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$

Der n^4-Algorithmus

$W \leftarrow A + \mathbb{I}$
$m \leftarrow \log_2(n)$
for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
    $W \leftarrow W \cdot W$
od
$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$

Wie sieht das mit der Laufzeit aus?

Der Algorithmus von Warshall

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $W_{ij} \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ A_{ij} & \text{falls } i \neq j \end{cases}$
  od
od
for $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**

$W_{ij} \leftarrow \max(W_{ij}, \min(W_{ik}, W_{kj}))$
    od
  od
od
$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$

Beispiel: Berechne die Wegematrix für

$$G = (\{0,1,2,3\}, \{(0,3),(1,0),(2,3),(3,1)\})$$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

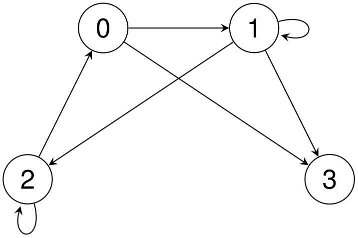
Beispiel

Gegeben sei die Adjazenzliste:

0	1, 2
1	
2	0, 3, 5
3	0
4	2, 4
5	1, 3, 4

Bilde die Adjazenzmatrix und die Wegematrix mit dem Warshall-Algorithmus.

Aufgabe 2



Geben Sie

- die Adjazenliste,
- die Adjazenzmatrix,
- die Wegematrix,
- und die Zwischenmatrizen beim Berechnen der Wegematrix mit dem Warshall-Algorithmus

an.