Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 4

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 15. November 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Division mit Rest

Definition

$$\forall x \in \mathbb{N}_0, \forall y \in \mathbb{N}_+ :$$
$$x = y \cdot (x \operatorname{div} y) + (x \mod y)$$

Hierbei ist div die Ganzzahldivision ohne Rest.

Beispiel

Den Rest a der Ganzzahldivision erhält man also mit $a = x \mod y$:

$$1 = 4 \mod 3$$

Division mit Rest

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

$$\forall x \in \mathbb{N}_0, \forall y \in \mathbb{N}_+ :$$
$$x = y \cdot (x \operatorname{div} y) + (x \mod y)$$

Hierbei ist div die Ganzzahldivision ohne Rest.

Beispiel

Den Rest a der Ganzzahldivision erhält man also mit $a = x \mod y$:

$$1 = 4 \mod 3$$

Division mit Rest

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Folgerung

Aus der Definition kann direkt geschlossen werden:

$$x \operatorname{div} y \in \mathbb{N}_0$$

$$x \mod y \in \{0, \ldots, y-1\}$$

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

mündlich

x	y	x div y	$x \mod y$
4	3		
2	1		
10	3		
8	3		
9	2		
4	3		

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

mündlich

x	y	x div y	$x \mod y$
4	3	1	1
2	1		
10	3		
8	3		
9	2		
4	3		

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

mündlich

x	y	$x \operatorname{div} y$	$x \mod y$
4	3	1	1
2	1	2	0
10	3		
8	3		
9	2		
4	3		

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

mündlich

x	y	$x \operatorname{div} y$	$x \mod y$
4	3	1	1
2	1	2	0
10	3	3	1
8	3		
9	2		
4	3		

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

mündlich

x	y	x div y	x mod y
4	3	1	1
2	1	2	0
10	3	3	1
8	3	2	2
9	2		
4	3		

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

mündlich

x	y	x div y	$x \mod y$
4	3	1	1
2	1	2	0
10	3	3	1
8	3	2	2
9	2	4	1
4	3		

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

mündlich

x	y	$x \operatorname{div} y$	$x \mod y$
4	3	1	1
2	1	2	0
10	3	3	1
8	3	2	2
9	2	4	1
4	3	1	1

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Größter gemeinsamer Teiler

Definition

Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen ist die größtmögliche Zahl $m \in \mathbb{N}_0$, für die gilt:

$$a \operatorname{div} m = 0 \wedge bivm = 0$$

Bestimmung

Der größte gemeinsame Teiler kann mit Primfaktorzerlegung bestimmt werden:

$$a = 3528, b = 3780$$
$$\Rightarrow a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^2$$
$$\Rightarrow b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

Damit ist der ggT $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 252$

Größter gemeinsamer Teiler

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen ist die größtmögliche Zahl $m \in \mathbb{N}_0$, für die gilt:

$$a \operatorname{div} m = 0 \wedge bivm = 0$$

Bestimmung

Der größte gemeinsame Teiler kann mit Primfaktorzerlegung bestimmt werden:

$$a = 3528, b = 3780$$
$$\Rightarrow a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^2$$
$$\Rightarrow b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

Damit ist der $ggT\, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 252$

Größter gemeinsamer Teiler

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie

Programmierung

Die *ggt*-Funktion lässt sich so programmieren:

$$\mathrm{ggt}\,(a, b) = \begin{cases} a & \text{falls } b = 0 \\ \mathrm{ggt}\,(b, a \mod b) & \end{cases}$$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Algorithmen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eigenschaften

Ein Algorithmus. . .

- hat eine endliche Beschreibung,
- besteht aus elementaren Aussagen,
- ist deterministisch,
- gibt endliche Ausgabe auf endliche Eingabe aus,
- hat endlich viele Schritte,
- ist skalierbar
- und ist nachvollziehbar

Algorithmen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eigenschaften

Ein Algorithmus. . .

- hat eine endliche Beschreibung,
- besteht aus elementaren Aussagen,
- ist deterministisch,
- gibt endliche Ausgabe auf endliche Eingabe aus,
- hat endlich viele Schritte,
- ist skalierbar
- und ist nachvollziehbar

Algorithmen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eigenschaften

Ein Algorithmus...

- hat eine endliche Beschreibung,
- besteht aus elementaren Aussagen,
- ist deterministisch,
- gibt endliche Ausgabe auf endliche Eingabe aus,
- hat endlich viele Schritte,
- ist skalierbar
- und ist nachvollziehbar

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Algorithmen

Eigenschaften

Ein Algorithmus...

- hat eine endliche Beschreibung,
- besteht aus elementaren Aussagen,
- ist deterministisch,
- gibt endliche Ausgabe auf endliche Eingabe aus,
- hat endlich viele Schritte,
- ist skalierbar
- und ist nachvollziehbar

Algorithmen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eigenschaften

Ein Algorithmus. . .

- hat eine endliche Beschreibung,
- besteht aus elementaren Aussagen,
- ist deterministisch,
- gibt endliche Ausgabe auf endliche Eingabe aus,
- hat endlich viele Schritte,
- ist skalierbar
- und ist nachvollziehbar

Algorithmen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Eigenschaften

Ein Algorithmus…

- hat eine endliche Beschreibung,
- besteht aus elementaren Aussagen,
- ist deterministisch,
- gibt endliche Ausgabe auf endliche Eingabe aus,
- hat endlich viele Schritte,
- ist skalierbar
- und ist nachvollziehbar

Algorithmen

Eigenschaften

Ein Algorithmus. . .

- hat eine endliche Beschreibung,
- besteht aus elementaren Aussagen,
- ist deterministisch,
- gibt endliche Ausgabe auf endliche Eingabe aus,
- hat endlich viele Schritte,
- ist skalierbar
- und ist nachvollziehbar

Schleifen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Arten

while	Wiederholen, wenn eine Bedingung erfüllt ist.
for	n-Mal wiederholen.
do-while	Wiederholen, danach nochmal, wenn eine Bedingung erfüllt ist.

Schleifen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Arten

while	Wiederholen, wenn eine Bedingung erfüllt ist.
for	n-Mal wiederholen.
do-while	Wiederholen, danach nochmal, wenn eine Bedingung erfüllt ist.

Schleifen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Arten

while	Wiederholen, wenn eine Bedingung erfüllt ist.
for	*n*-Mal wiederholen.
do-while	Wiederholen, danach nochmal, wenn eine Bedingung erfüllt ist.

Schleifen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 1

Input: $x \in \mathbb{N}$

  $i \leftarrow 0$

  while $x > 1$ **do**

    $x \leftarrow x \operatorname{div} 2$

    $i \leftarrow i + 1$

  od

Output: i

Schleifen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 2

$k \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** 20 **do**
  $k \leftarrow i$
od
Output: k

Schleifen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 3

Gegeben sei ein Wort w der Länge $|w| = n$. Das Array W hat an i-ter Stelle den i-ten Buchstabe von w. w ist ϵ-frei.

$c \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**

$$c \leftarrow \begin{cases} c + 1 & \text{falls } W[i] = x \\ c & \text{sonst} \end{cases}$$

od
Output: c

Schleifen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Übung 1, Winter 2008/2009

Es sei A ein Alphabet.
Schreiben Sie einen Algorithmus auf, der folgendes leistet: Als Eingaben erhält er ein Wort w über A und zwei Symbole $x \in A$ und $y \in A$. Am Ende soll eine Variable r den Wert 0 oder 1 haben, und zwar soll gelten:

$$r = \begin{cases} 1 & \text{falls irgendwo in w direkt hintereinander erst } x \text{ dann } y \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Benutzen Sie zum Zugriff auf das i-te Symbol von w die Schreibweise $w(i)$. Formulieren Sie den Algorithmus mit Hilfe einer for-Schleife.

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Schleifeninvariante

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Eine Schleifeninvariante ist eine Eigenschaft einer Schleife, die bei jedem Schleifenzeitpunkt gültig ist.

Hä?

Eine Schleifeninvariante ist zum Beispiel

- ein Wertebereich für eine Variable oder
- ein Verhältnis zweiter Variablen.

Schleifeninvariante

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Eine Schleifeninvariante ist eine Eigenschaft einer Schleife, die bei jedem Schleifenzeitpunkt gültig ist.

Hä?

Eine Schleifeninvariante ist zum Beispiel

- ein Wertebereich für eine Variable oder
- ein Verhältnis zweiter Variablen.

Schleifeninvarianzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wofür?

Mit Schleifeninvarianten lassen sich Algorithmen überprüfen.

Wie?

Mit vollständiger Induktion :-)

Schleifeninvarianzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wofür?

Mit Schleifeninvarianten lassen sich Algorithmen überprüfen.

Wie?

Mit vollständiger Induktion :-)

Schleifeninvarianzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

Input: $a, b \in \mathbb{N}_0$

$S \leftarrow a$

$Y \leftarrow b$

for $i \leftarrow 0$ **to** $b - 1$ **do**

$S \leftarrow S - 1$

$Y \leftarrow Y - 1$

od

Output: S

Übung

Algorithmus mit $a = 3$ und $b = 4$ ausprobieren und Werte für S und Y bei jedem Schleifendurchlauf finden.

Schleifeninvarianzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

Input: $a, b \in \mathbb{N}_0$

$S \leftarrow a$

$Y \leftarrow b$

for $i \leftarrow 0$ **to** $b - 1$ **do**

$S \leftarrow S - 1$

$Y \leftarrow Y - 1$

od

Output: S

Übung

Algorithmus mit $a = 3$ und $b = 4$ ausprobieren und Werte für S und Y bei jedem Schleifendurchlauf finden.

Schleifeninvarianzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Winter 2008/2009

Input: $a, b \in \mathbb{N}_0$

$X_0 \leftarrow a$

$Y_0 \leftarrow b$

$P_0 \leftarrow 1$

$Z_0 \leftarrow X_0 \mod 2$

$n \leftarrow 1 + [\log_2 a]$

for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**

$P_{\mathrm{i}+1} \leftarrow P_{\mathrm{i}} \cdot Y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{Z_i}}$

$X_{\mathrm{i}+1} \leftarrow X_{\mathrm{i}}$ div

$Y_{\mathrm{i}-1} \leftarrow Y_{\mathrm{i}}^2$

$Z_{\mathrm{i}+1} \leftarrow X_{\mathrm{i}+1} \mod 2$

od

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über i die Schleifeninvariante:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : P_{\mathrm{i}} \cdot Y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{X_i}} = b^a$$