Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 5

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 22. November 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Allgemeine Fehler, Fragen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Allgemeines

- Versucht formale Beweise und Aussagen zu schreiben.
- Vollständige Induktion: welches ist das erste Element?
- Schleifeninvarianten gelten ab dem Einstiegspunkt in die Schleife.

Überblick

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- $X = X$ ist eine Schleifeninvariante!
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- $X = X$ ist eine Schleifeninvariante! $\surd$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- $X = X$ ist eine Schleifeninvariante! $\surd$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ $\surd$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **Kontextfreie Grammatik**.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **Kontextfreie Grammatik**.

Was ist was?

N: Menge von Nichtterminalsymbolen

Definition

Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **Kontextfreie Grammatik**.

Was ist was?

N: Menge von Nichtterminalsymbolen

T: Menge von Terminalsymbolen

Definition

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **Kontextfreie Grammatik**.

Was ist was?

N: Menge von Nichtterminalsymbolen

T: Menge von Terminalsymbolen

S: $S \in N$ Startsymbol

Definition

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **Kontextfreie Grammatik**.

Was ist was?

N: Menge von Nichtterminalsymbolen

T: Menge von Terminalsymbolen

S: $S \in N$ Startsymbol

$P \subset N \times V^*$: Menge von Produktionen,
$V := (N \cup T)$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ableitung

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Ableitung

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Ableitung

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Ableitung

Definition

Als Ableitung wird in der theoretischen Informatik der Vorgang bezeichnet, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen.

Wir schreiben:

- $w \Rightarrow v$, wenn von der Ableitung von v aus w genau 1 Ableitungsschritt liegt.
- $w \Rightarrow^i v$, wenn von der Ableitung von v aus w i Ableitungsschritte liegen ($i \in \mathbb{N}$).
- $w \Rightarrow^* v$, wenn von der Ableitung von v aus w beliebig viele Ableitungsschritte liegen.

Ableitung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorsicht

$$\Rightarrow \neq \rightarrow$$

- $\Rightarrow$ ist die Relation der Ableitung
- $\rightarrow$ ist die Relation der Produktion ($\in P$)

Ableitung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Frage

Was stimmt? Es ist $w_1, w_2 \in N \cup P$.

- $w_1 \rightarrow w_2$, daraus folgt $w_1 \Rightarrow w_2$
- $w_1 \Rightarrow w_2$, daraus folgt $w_1 \rightarrow w_2$

Ableitung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie

Frage

Was stimmt? Es ist $w_1, w_2 \in N \cup P$.

- $w_1 \to w_2$, daraus folgt $w_1 \Rightarrow w_2$ Wahr.
- $w_1 \Rightarrow w_2$, daraus folgt $w_1 \to w_2$ Falsch.

Ableitungsbäume

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Klammern

Gegeben ist die Sprache $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\})$
Zeichne einen Ableitungsbaum für die Ausdrücke

- (( ))( )
- (( ))( )((( )))

Welche Eigenschaften hat ein Wort *w* dieser Grammatik?

-
-
-

Ableitungsbäume

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Klammern

Gegeben ist die Sprache $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$
Zeichne einen Ableitungsbaum für die Ausdrücke

- (( ))( )
- (( ))( )((( )))

Welche Eigenschaften hat ein Wort w dieser Grammatik?

- wohlgeformter Klammerausdruck
- $N_((w) = N_) (w)$
- Für jedes Präfix v: $N_((v) \geq N_) (v)$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Sprache der kontextfreien Grammatik

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann bezeichnen wir die Sprache $L = L(G)$ mit

$$L = \left\{ w \in T^* \middle| S \Rightarrow^* w \right\}$$

Was ist $\Rightarrow^*$?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Sprache der kontextfreien Grammatik

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann bezeichnen wir die Sprache $L = L(G)$ mit

$$L = \left\{ w \in T^* \middle| S \Rightarrow^* w \right\}$$

Was ist $\Rightarrow^*$?

Sprache der kontextfreien Grammatik

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann bezeichnen wir die Sprache $L = L(G)$ mit

$$L = \left\{ w \in T^* \middle| S \Rightarrow^* w \right\}$$

Was ist $\Rightarrow^*$?

Mit $\Rightarrow^*$ ist die **reflexiv-transitive Hülle** der Ableitungsrelation gemeint.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt:
   $G_1 := (\{X, S\}, \{0\}, S, \{X \rightarrow X, S \rightarrow X, X \rightarrow \epsilon\})$
3. Ist $G_2 := (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt:
   $G_1 := (\{X, S\}, \{0\}, S, \{X \to X, S \to X, X \to \epsilon\})$
3. Ist $G_2 := (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \to \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

1. Ja z.B. $G = (\{S\}, \{0\}, S, \{S \to \varepsilon\})$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt:
   $G_1 := (\{X, S\}, \{0\}, S, \{X \to X, S \to X, X \to \epsilon\})$
3. Ist $G_2 := (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \to \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

1. Ja z.B. $G = (\{S\}, \{0\}, S, \{S \to \varepsilon\})$
2. $L(G_1) = \{\}$

Quickies

Fragen

1. Gibt es Grammatiken für die gilt: $L(G) = \{\}$?
2. Welche Sprache erzeugt:
   $G_1 := (\{X, S\}, \{0\}, S, \{X \to X, S \to X, X \to \epsilon\})$
3. Ist $G_2 := (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \to \varepsilon\})$ eine gültige Grammatik?

Lösung

1. Ja z.B. $G = (\{S\}, \{0\}, S, \{S \to \varepsilon\})$
2. $L(G_1) = \{\}$
3. Ja und $L(G_2) = \{\varepsilon\}$

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right)$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right)$$

Leite A ab!

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right)$$

Leite A ab! Leite ABC ab! Finde weitere Wörter.

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right)$$

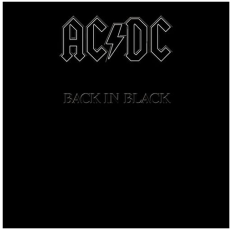
Leite A ab! Leite ABC ab! Finde weitere Wörter.

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = \left(\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \left\{X \to \epsilon \middle| AX \middle| BX \middle| CX \middle| DX\right\}\right)$$

Leite *A* ab! Leite *ABC* ab! Finde weitere Wörter.

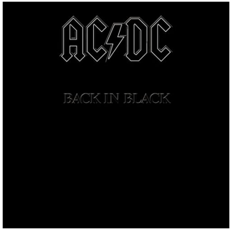


Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \to \epsilon | AX | BX | CX | DX\})$$

Leite *A* ab! Leite *ABC* ab! Finde weitere Wörter.



ADAC

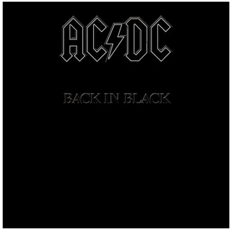
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Musikgrammatik (by Nils Braun und Philipp Basler)

Gegeben ist die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \rightarrow \epsilon | AX | BX | CX | DX\})$$

Leite A ab! Leite ABC ab! Finde weitere Wörter.



ADAC

$L(G) = \{A, B, C, D\}^*$, oder etwa nicht?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgaben

Welche Sprachen erzeugen folgende Grammatiken.

1. $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \to aY|\varepsilon, Y \to bX\})$
2. $G_2 := (\{X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, X,$
   $\{X \to Ya|Yb|Yc, Y \to ZZY|\varepsilon, Z \to a|b|c\})$

Gebt eine jeweils Grammatik an für die gilt $L(G) = L_i$:

1. $L_1 := \{ab, cd\}^+ \cdot \{a, c\}^2$
2. $A := \{0, 1\}, L_2 := \{w \in A^* | Num_0(w) = Num_1(w)\}$

Bonus-Aufgabe (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

In Mengen M aus Studenten mit $|M| \leq 3$

Konstruiert eine Grammatik die alle E-Mail-Adresse aus den Buchstaben a, b, c erzeugt. **Hinweis**: $T := \{a, b, c, @, ., \_\}$

Bonus-Aufgabe (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

In Mengen M aus Studenten mit $|M| \leq 3$

Konstruiert eine Grammatik die alle E-Mail-Adresse aus den Buchstaben a, b, c erzeugt. **Hinweis**: $T := \{a, b, c, @, ., \_\}$

Lösung

Achtung: die Lösung deckt nicht alle korrekten Fälle ab. $G = (N, T, S, P)$

- $N = \{E, A, B\}$
- $T = \{a, b, c, ., \_, @\}$
- $S = E$
- $P = \{E \longrightarrow A@B.B, A \longrightarrow BA|\_A|.A, B \longrightarrow aB|bB|cB|\varepsilon\}$

Aufgabe: Winter 2008/2009

Aufgabe

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik

$$G = (N, \{a, b\}, S, P)$$

  an, für die $L(G)$ die Menge aller Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$ ist.
- Geben Sie eine Ableitung der Wörter *baaab* und *abaaaba* aus dem Startsymbol Ihrer Grammatik an.
- Beweisen Sie, dass Ihre Grammatik jedes Palindrom über dem Alphabet $\{a, b\}$ erzeugt.

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Relationen

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt **Relation**.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine **homogene** Relation.

Relationen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt **Relation**.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine **homogene** Relation.

Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt **Relation**.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine **homogene** Relation.

Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt **Relation**.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine **homogene** Relation.

Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

- Seien A, B zwei Mengen. $R \subseteq A \times B$
- R ist eine Teilmenge des Kreuzproduktes zweier Mengen und heißt **Relation**.
- Man schreibt auch: xRy für $(x, y) \in R$
- Ist A = B so nennt man R auch eine **homogene** Relation.

Eigenschaften von Relationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Sei $R \subset A \times A$ eine (binäre) Relation auf der Menge A. Wir nennen R

- **reflexiv** falls gilt:

$$\forall x \in A : (x, x) \in R$$

- **transitiv** falls gilt:

$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

- **symmetrisch** falls gilt:

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgaben

Quickies

- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv?
- Ist die Relation $>$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv?
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ transitiv?
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?
- Ist die Relation $=$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Quickies

- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Ja.
- Ist die Relation $>$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv?
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ transitiv?
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?
- Ist die Relation $=$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie

Quickies

- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Ja.
- Ist die Relation $>$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Nein.
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ transitiv?
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?
- Ist die Relation $=$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Quickies

- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Ja.
- Ist die Relation $>$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Nein.
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ transitiv? Ja.
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?
- Ist die Relation $=$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Quickies

- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Ja.
- Ist die Relation $>$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Nein.
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ transitiv? Ja.
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch? Nein.
- Ist die Relation $=$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Quickies

- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Ja.
- Ist die Relation $>$ auf $\mathbb{N}_0$ reflexiv? Nein.
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ transitiv? Ja.
- Ist die Relation $\geq$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch? Nein.
- Ist die Relation $=$ auf $\mathbb{N}_0$ symmetrisch? Ja.

Aufgaben 2

Karlsruher Institut für Technologie

Quickies

- Ist die Relation: $R = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls x gerade} \\ x-1 & \text{falls x ungerade} \end{cases}$

  mit $x \in \mathbb{N}_0$ und $f(x) \in \mathbb{N}_0$ symmetrisch?
- Ist die Relation: $R = \{(x, y) \in M \times M \mid y = x^2\}$ reflexiv?

Produkt

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N$, $S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des **Produktes von** R **und** S als

$$R \circ S = \{(x, z) \in M \times L | \exists\, y \in N : (x,\ y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Produkt

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N$, $S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des **Produktes von** R **und** S als

$$R \circ S = \{(x,z) \in M \times L | \exists\, y \in N : (x,\ y) \in R \text{ und } (y,z) \in S\}$$

Potenzschreibweise

$$R^0 = I_{\mathrm{M}} = \{(x,x)\,|x \in M\} \text{ und } R^{\mathrm{i}+1} = R^{\mathrm{i}} \circ R$$

Reflexiv-Transitive-Hülle

$$R^* = \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{\infty} R^{\mathrm{i}}$$

Äquivalenzrelationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Sei R eine homogene Relation über M. $x, y, z \in M$.
Hat R folgende Eigenschaften:

reflexiv	xRx
transitiv	$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
symmetrisch	$xRy \Rightarrow yRx$

So heißt R eine **Äquivalenzrelation**.

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern.
$R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit"-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ "Freundschaft 1. Grades."
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ "Freundschaft 2. Grades"
- $R^* =?$ "Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?"

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern. $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ “Freundschaft 1. Grades.“
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ “Freundschaft 2. Grades“
- $R^* =?$ “Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?“

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern.
$R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit"-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ "Freundschaft 1. Grades."
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ "Freundschaft 2. Grades"
- $R^* = ?$ "Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?"

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern.
$R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ “Freundschaft 1. Grades.“
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ “Freundschaft 2. Grades“
- $R^* =$? “Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?“

Beispiel (by Patrick Niklaus)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Freunde im Netzwerk

Sei $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$ eine Menge von Nutzern. $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.

- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- $R^1 = R$ “Freundschaft 1. Grades.“
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$ “Freundschaft 2. Grades“
- $R^* =?$ “Gibt es eine Verbindung durch Freunde beliebigen Grades?“

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Bestimmt die reflexiv-transitive Hülle der Relationen.

$M := \{1, 2, 3, 4\}, R_i \subset M \times M$

1. $R_1 := \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\}$
2. $R_2 := \{(1, 1), (2, 2)\}$
3. $R_3 := \{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Bestimmt die reflexiv-transitive Hülle der Relationen.
$M := \{1, 2, 3, 4\}, R_i \subset M \times M$

1. $R_1 := \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\}$
2. $R_2 := \{(1, 1), (2, 2)\}$
3. $R_3 := \{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

Lösungen

1. $R_1^* := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$
2. $R_2^* := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3. $R_3^* := \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$