# Grundbegriffe der Informatik
# WS 2011/12
# Tutorium in der Woche 5
## Gehalten in den Tutorien Nr. 10, Nr. 14

Philipp Basler (philippbasler@googlemail.com)
Nils Braun (area51.nils@googlemail.com)

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

20.10.2011 & 22.10.2011

# Inhaltsverzeichnis

# Informationen zum nächsten Blatt

## Blatt Nr. 5

| | |
|---|---|
| Abgabetermin | 18.11.2011 um 12:30 Uhr |
| Abgabeort | Briefkasten im UG |
| Themen | Formale Sprachen, Grammatiken |
| Maximale Punkte | 20 |

# Statistik

## Statistik

- 22 von 26 Abgaben
- Durchschnittlich 12.3 von 19 Punkten

# Häufige Fehler auf dem letzten Übungsblatt

**Blatt Nr. 4**

- Aufgabe Nr. 1: Keine
- Aufgabe Nr. 2a) $p$ ist als konstante vorgegeben, somit ist $p$ *keine* Laufvariable
- Aufgabe Nr. 2b) *Eine* Schleifeninvariante
- Aufgabe Nr. 2a+b) Im allgemeinen: $60 \cdot (\alpha \textbf{ div } 6) \neq 10\alpha$
- Aufgabe Nr. 3a) nicht den fall $i = 0$ sowie die Anfangsbelegungen für die Tabelle vergessen
- Aufgabe Nr. 4 keine

# Was bleibt?

*Was ist eine Schleifeninvariante?*

# Was bleibt?

*Was ist eine Schleifeninvariante?*

Eine Aussage die, wenn sie vor dem Durchlauf der Schleife gilt, auch danach gilt.

# Was bleibt?

*Wie beweist man sie?*

# Was bleibt?

*Wie beweist man sie?*

Durch vollständige Induktion!

# Was bleibt?

*Was ist der **ggT**?*

# Was bleibt?

*Was ist der **ggT**?*

Der größte gemeinsame Teiler.

# Was bleibt?

*Wie viele b's sind in*

$$\{a\}^*\{ab\}^2\{a\}^*$$

# Was bleibt?

*Wie viele b's sind in*

$$\{a\}^*\{ab\}^2\{a\}^*$$

Genau 2

# Klassifizierung

## Definition

Sei $R \subset A \times A$ eine (binäre) Relation auf der Menge $A$. Wir nennen $R$

- **reflexiv** falls gilt
$$\forall x \in A : (x, x) \in R$$
- **transitiv** falls gilt
$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$$
- **symmetrisch** falls gilt
$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$$

# Verknüpfung

## Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des **Produktes von** $R$ **und** $S$ als

$$R \circ S = \{(x, z) \in M \times L \mid \exists y \in N \ : \ (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

# Verknüpfung

## Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des **Produktes von $R$ und $S$** als

$$R \circ S = \{(x, z) \in M \times L \mid \exists y \in N \ : \ (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

Wieder können wir Potenzen definieren:

$$R^0 = I_M = \{(x, x) \mid x \in M\} \qquad R^{i+1} = R^i \circ R$$

# Verknüpfung

## Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des **Produktes von $R$ und $S$** als

$$R \circ S = \{(x,z) \in M \times L \mid \exists y \in N \ : \ (x,y) \in R \text{ und } (y,z) \in S\}$$

Wieder können wir Potenzen definieren:

$$R^0 = I_M = \{(x,x) \mid x \in M\} \qquad R^{i+1} = R^i \circ R$$

Und die **reflexiv-transitive Hülle** von $R$

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

# Infixschreibweise

Ist $R$ eine Relation, so können wir statt

$$(x, y) \in R$$

auch abkürzend

$$xRy$$

schreiben.

# Beispiele

- Die Relation $=$ ist

# Beispiele

- Die Relation $=$ ist transitiv, reflexiv und symmetrisch.

# Beispiele

- Die Relation $=$ ist transitiv, reflexiv und symmetrisch.
- Die Relation $<$ ist

# Beispiele

- Die Relation $=$ ist transitiv, reflexiv und symmetrisch.
- Die Relation $<$ ist transitiv, nicht reflexiv und unsymmetrisch

# Beispiele

- Die Relation $=$ ist transitiv, reflexiv und symmetrisch.
- Die Relation $<$ ist transitiv, nicht reflexiv und unsymmetrisch

# Definition

**Definition**

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **kontextfreie Grammatik**.

# Definition

## Definition

Die Menge $G = G(N, T, S, P)$ nennen wir **kontextfreie Grammatik**.

**Nichtterminalsymbolen** $N$ (ein Alphabet)

**Terminalsymbolen** $T$ (ein Alphabet) disjunkt zu $N$

**Startsymbol** $S \in N$

**Produktionsmenge** $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$

**Symbole** $V = N \cup T$ (ein Alphabet)

# Ableitung

Gibt es für ein $w \in V^*$ und ein $v \in V^*$ eine Aufspaltung

$$w = w_1 X w_2 \qquad v = w_1 w w_2$$

mit Wörtern $w_1, w_2 \in V^*$ und eine Produktion $(X, w) \in P$ so nennen wir $v$ aus $w$ **ableitbar** und schreiben

$$w \Rightarrow v$$

Mit $w \Rightarrow^i v$ für ein $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir zwei Wörter, wenn zwischen ihnen $i$ Ableitungsschritte liegen. Dafür schreiben wir auch $w \Rightarrow^* v$.
$\Rightarrow^*$ ist eine reflexiv-transitive Hülle der Relation $\Rightarrow$.

## Definition

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik. Wir bezeichnen die Sprache $L = L(G)$ mit

$$L = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

also die von der Grammatik $G$ **erzeugte Sprache**.

# Musikgrammatik

Wir betrachten die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \to \varepsilon \mid AX \mid BX \mid CX \mid DX\})$$

Wer kann $A$ ableiten? Und $ABC$?

# Musikgrammatik

Wir betrachten die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \to \varepsilon \mid AX \mid BX \mid CX \mid DX\})$$

Wer kann $A$ ableiten? Und $ABC$? Und

# Musikgrammatik

Wir betrachten die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \to \varepsilon \mid AX \mid BX \mid CX \mid DX\})$$

Wer kann $A$ ableiten? Und $ABC$? Und


# Musikgrammatik

Wir betrachten die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \to \varepsilon \mid AX \mid BX \mid CX \mid DX\})$$

Wer kann $A$ ableiten? Und $ABC$? Und

# Musikgrammatik

Wir betrachten die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \to \varepsilon \mid AX \mid BX \mid CX \mid DX\})$$

Wer kann $A$ ableiten? Und $ABC$? Und




Wer findet ein Wort über $\{A, B, C, D\}$ das ich nicht ableiten kann?

$$G = (\{X\}, \{A, B, C, D\}, X, \{X \to \varepsilon \mid AX \mid BX \mid CX \mid DX\})$$

zum Beispiel:

$$X \Rightarrow AX \Rightarrow ACX \Rightarrow ACDX \Rightarrow ACDCX \Rightarrow ACDC$$

oder kurz

$$X \Rightarrow^* ACDC$$

Die erzeugte Sprache ist

$$L = L(G) = \{A, B, C, D\}^*$$

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\})$$

- Komme ich auf ((((())))))?

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\})$$

- Komme ich auf (((((())))))?
- Komme ich auf ()((()))()()?

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\})$$

- Komme ich auf ((((())))))?
- Komme ich auf ()(())()()?
- Komme ich auf (()(?

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\}$$

Was kann ich also alles ableiten? Was ist $L(G)$?

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\}$$

Was kann ich also alles ableiten? Was ist $L(G)$?

- Alle "*wohlgeformten Klammerausdrücke*"

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow XX \mid (X) \mid \varepsilon\}$$

Was kann ich also alles ableiten? Was ist $L(G)$?

- Alle "*wohlgeformten Klammerausdrücke*" Hä?

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\}$$

Was kann ich also alles ableiten? Was ist $L(G)$?

- Alle "*wohlgeformten Klammerausdrücke*" Hä?
- $\forall w \in L(G) : N_((w) = N_)(w)$

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow XX \mid (X) \mid \varepsilon\}$$

Was kann ich also alles ableiten? Was ist $L(G)$?

- Alle "*wohlgeformten Klammerausdrücke*" Hä?
- $\forall w \in L(G) : N_((w) = N_)(w)$ Reicht das?

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\}$$

Was kann ich also alles ableiten? Was ist $L(G)$?

- Alle "*wohlgeformten Klammerausdrücke*" Hä?
- $\forall w \in L(G) : N_{(}(w) = N_{)}(w)$ Reicht das?
  Notwendig aber nicht hinreichend!

# Klammern

Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \varepsilon\}$$

Was kann ich also alles ableiten? Was ist $L(G)$?

- Alle "*wohlgeformten Klammerausdrücke*" Hä?
- $\forall w \in L(G) : N_((w) = N_)(w)$ Reicht das?
  Notwendig aber nicht hinreichend!

Was macht also einen richtig geklammerten Ausdruck aus?

# Richtige Klammern

Anzahl der schließenden Klammern darf nie größer als Anzahl der offenen Klammern sein!

# Richtige Klammern

Anzahl der schließenden Klammern darf nie größer als Anzahl der offenen Klammern sein!
Für jedes Präfix $v$ von einem Wort $w \in L(G)$ gilt

$$N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$$

# Richtige Klammern

Anzahl der schließenden Klammern darf nie größer als Anzahl der offenen Klammern sein!
Für jedes Präfix $v$ von einem Wort $w \in L(G)$ gilt

$$N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$$

Was tut eigentlich

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to (X)X \mid \varepsilon\})$$

# Selbstbaukasten!

Wir bauen eine Grammatik, die folgendes kann:

- über dem Alphabet $\{a, b\}$
- in allen ableitbaren Wörtern soll entweder *ab* vorkommen
- oder gar kein *a*.

# Selbstbaukasten!

Die Grammatik

$$G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \to bX \mid abY \mid \varepsilon, Y \to aY \mid bY \mid \varepsilon\})$$

leistet das Gewünschte! (oder?)

## Aufgabe (WS 2008) ★★☆☆☆

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik

  $$G = (N, \{a, b\}, S, P)$$

  an, für die $L(G)$ die Menge aller Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$ ist.
- Geben Sie eine Ableitung der Wörter **baaab** und **abaaaba** aus dem Startsymbol Ihrer Grammatik an.
- Beweisen Sie, dass Ihre Grammatik jedes Palindrom über dem Alphabet $\{a, b\}$ erzeugt.

# Lösung

Die Grammatik

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid\})$$

erzeugt gerade die Menge der Palindrome.

# Lösung

Die Grammatik

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \})$$

erzeugt gerade die Menge der Palindrome. Die Ableitungen der Wörter mit dieser Grammatik sind

$$S \Rightarrow bSb \Rightarrow baSab \Rightarrow baaab$$

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abaSaba \Rightarrow abaaaba$$

# Lösung

Sei $w$ ein Palindrom über $\{a, b\}$. Wir zeigen durch Induktion über $n = |w|$, dass alle Palindrome gerader Länge aus $S$ abgeleitet werden können.

# Lösung

Sei $w$ ein Palindrom über $\{a, b\}$. Wir zeigen durch Induktion über $n = |w|$, dass alle Palindrome gerader Länge aus $S$ abgeleitet werden können.

## Induktionsanfang

# Lösung

Sei $w$ ein Palindrom über $\{a, b\}$. Wir zeigen durch Induktion über $n = |w|$, dass alle Palindrome gerader Länge aus $S$ abgeleitet werden können.

## Induktionsanfang

Für $n = 0$ ist das leere Wort $\varepsilon$ in einem Schritt aus $S$ ableitbar.
Für $n = 1$: Die einzigen Wörter aus $\{a, b\}^*$ der Länge 1 sind $a$ und $b$. Auch diese sind offensichtlich aus $S$ ableitbar.

# Lösung

Sei $w$ ein Palindrom über $\{a, b\}$. Wir zeigen durch Induktion über $n = |w|$, dass alle Palindrome gerader Länge aus $S$ abgeleitet werden können.

## Induktionsanfang

Für $n = 0$ ist das leere Wort $\varepsilon$ in einem Schritt aus $S$ ableitbar.
Für $n = 1$: Die einzigen Wörter aus $\{a, b\}^*$ der Länge 1 sind $a$ und $b$. Auch diese sind offensichtlich aus $S$ ableitbar.

## Induktionsannahme

# Lösung

Sei $w$ ein Palindrom über $\{a, b\}$. Wir zeigen durch Induktion über $n = |w|$, dass alle Palindrome gerader Länge aus $S$ abgeleitet werden können.

## Induktionsanfang

Für $n = 0$ ist das leere Wort $\varepsilon$ in einem Schritt aus $S$ ableitbar.
Für $n = 1$: Die einzigen Wörter aus $\{a, b\}^*$ der Länge 1 sind $a$ und $b$. Auch diese sind offensichtlich aus $S$ ableitbar.

## Induktionsannahme

Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass alle Palindrome der Länge $n$ und alle Palindrome der Länge $n + 1$ aus S abgeleitet werden können.

# Lösung

## Induktionsschritt

Sei $w$ ein Palindrom der Länge $n + 2$. Das erste (und damit auch das letzte) Zeichen sei oBdA ein $a$. Dann gibt es ein $w' \in \{a, b\}^*$, so dass $w = aw'a$ ist. Da $w$ ein Palindrom ist, muss auch $w'$ ein Palindrom sein. Weiterhin gilt $|w'| = n$.

# Lösung

## Induktionsschritt

Sei $w$ ein Palindrom der Länge $n+2$. Das erste (und damit auch das letzte) Zeichen sei oBdA ein $a$. Dann gibt es ein $w' \in \{a, b\}^*$, so dass $w = aw'a$ ist. Da $w$ ein Palindrom ist, muss auch $w'$ ein Palindrom sein. Weiterhin gilt $|w'| = n$. Nach Induktionsannahme gibt es somit eine Ableitung $S \Rightarrow^* w'$. Somit gibt es die Ableitung

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow^* aw'a = w$$

und $w \in L(G)$ folgt.

# Lösung

## Induktionsschritt

Sei $w$ ein Palindrom der Länge $n+2$. Das erste (und damit auch das letzte) Zeichen sei oBdA ein $a$. Dann gibt es ein $w' \in \{a, b\}^*$, so dass $w = aw'a$ ist. Da $w$ ein Palindrom ist, muss auch $w'$ ein Palindrom sein. Weiterhin gilt $|w'| = n$. Nach Induktionsannahme gibt es somit eine Ableitung $S \Rightarrow^* w'$. Somit gibt es die Ableitung

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow^* aw'a = w$$

und $w \in L(G)$ folgt. Entsprechendes gilt, wenn das erste Zeichen von w ein b ist.
Mit der Induktionsannahme haben wir also gezeigt, dass auch Palindrome der Länge $n+1$ und $n+2$ aus $S$ ableitbar sind.

# Was ihr nun wissen solltet

- Was eine Grammatik ist.
- Was transitiv und reflexiv bedeutet.
- Was ein Ableitungsbaum ist.
- Was der Unterschied zwischen $\rightarrow, \Rightarrow, \Rightarrow^*$ ist.

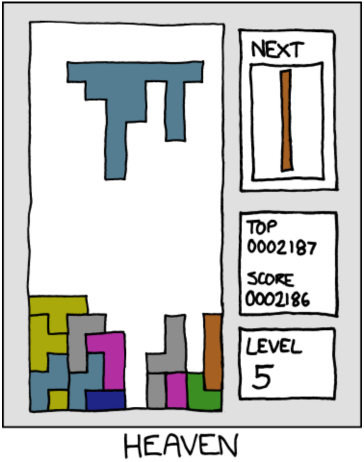


**Abbildung:** `http://www.xkcd.com`

Kontakt via E-Mail an Philipp Basler oder Nils Braun
gbi.ugroup.hostzi.com