Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 2^5

Tutorium 6

Dominik Muth - dominik.muth@student.kit.edu | 28. November 2012

INSTITUT FÜR INFORMATIK

Outline/Gliederung

Überblick

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 b)

Ein Wort $w \in \{a, b\}^*$ ist genau dann in L_b, wenn das maximal lange Anfangsstück von w, das nur aus *a*a besteht, und das maximal lange Endstück von w, das nur aus a besteht, gleiche Länge haben.

Überblick

Karlsruher Institut für Technologie

Wiederholung - Quiz

- Schleifeninvarianten sind immer eindeutig.
- Aus einer Schleifeninvariante lässt sich der Sinn des Algorithmus herleiten.
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- x^2 ist eine surjektive Abbildung

Wiederholung - Quiz

- Schleifeninvarianten sind immer eindeutig. *X*
- Aus einer Schleifeninvariante lässt sich der Sinn des Algorithmus herleiten.
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- x^2 ist eine surjektive Abbildung

Wiederholung - Quiz

- Schleifeninvarianten sind immer eindeutig. *X*
- Aus einer Schleifeninvariante lässt sich der Sinn des Algorithmus herleiten. *X*
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- x^2 ist eine surjektive Abbildung

Wiederholung - Quiz

- Schleifeninvarianten sind immer eindeutig. X
- Aus einer Schleifeninvariante lässt sich der Sinn des Algorithmus herleiten. X
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\surd$
- x^2 ist eine surjektive Abbildung

Wiederholung - Quiz

- Schleifeninvarianten sind immer eindeutig. *X*
- Aus einer Schleifeninvariante lässt sich der Sinn des Algorithmus herleiten. *X*
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\surd$
- x^2 ist eine surjektive Abbildung $\surd$*X*

Wiederholung - Aufgaben

Binäre Operationen

Geben Sie für folgende aussagenlogische Formeln jeweils einen arithmetischen Ausdruck an, so dass das Ergebnis den Wahrheitswerten der aussagenlogischen Formel entspricht. Verwenden Sie für den Ausdruck nur die Operatoren +, - und $\cdot$ sowie konstante Zahlen. 0 bzw. 1 repräsentiert dabei den Wahrheitswert *falsch* bzw. *wahr*.

- $A \vee B$
- $A \Rightarrow B$
- $A \Leftrightarrow B$

Wiederholung

Vollständige Induktion

Beweisen sie folgende Gleichung durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Überblick

Zahlensysteme

Definition

Eine Zahl wird mit Num_x zur Basis x dargestellt.

Beispiel: Num_{10} ist definiert durch:

$$Num_{10}(\epsilon) = 0 \quad (1)$$

$$\forall v \in Z_{10}^* \forall w \in Z_{10} : Num_{10}(vw) = 10 \cdot Num_{10}(v) + Num_{10}(w) \quad (2)$$

Lemma

Num_{10} ist durch Gleichung 1 und 2 wohldefiniert.
Wie beweisen wir das?

Zahlensysteme

Definition

Eine Zahl wird mit Num_x zur Basis x dargestellt.
Beispiel: Num_{10} ist definiert durch:

$$\begin{aligned} Num_{10}(\epsilon) &= 0 \qquad (1) \\ \forall v \in Z_{10}^* \forall w \in Z_{10} : Num_{10}(vw) &= 10 \cdot Num_{10}(v) + Num_{10}(w) \qquad (2) \end{aligned}$$

Lemma

Num_{10} ist durch Gleichung 1 und 2 wohldefiniert.
Wie beweisen wir das?

Zahlensysteme

Definition

Eine Zahl wird mit Num_x zur Basis x dargestellt.
Beispiel: Num_{10} ist definiert durch:

$$
\begin{aligned}
Num_{10}(\epsilon) &= 0 && (1)\\
\forall v \in Z_{10}^* \forall w \in Z_{10} : Num_{10}(vw) &= 10 \cdot Num_{10}(v) + Num_{10}(w) && (2)
\end{aligned}
$$

Lemma

Num_{10} ist durch Gleichung 1 und 2 wohldefiniert.
Wie beweisen wir das?

Allgemein

Karlsruher Institut für Technologie

Für Num_x

$$Num_x(\epsilon) = 0 \tag{3}$$

$$\forall v \in Z_x^* \forall w \in Z_x : Num_{10}(vw) = x \cdot Num_x(v) + Num_x(w) \tag{4}$$

Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel für Num_3

$Num_3(12012)$

Nach Gleichung 2 $\Rightarrow Num_3(12012) = 3 * Num_3(1201) + Num_3(2)$

$$\Rightarrow^*$$

$$3*\left(3*\left(3*(3*Num_3(1))+Num_3(2)\right)+Num_2(0)\right)+Num_3(1)\Big)+Num_3(2)$$

$$= 81 * Num_3(1) + 27 * Num_3(2) + 9 * Num_3(0) + 3 * Num_3(1) + Num_3(2)$$

$$= 81 * 1 + 27 * 2 + 9 * 0 + 3 * 1 + 2$$

$$= 140$$

Kann man das ganze noch in einer anderen Form darstellen?

Beispiel

Beispiel für Num_3

$Num_3(12012)$

Nach Gleichung 2 $\Rightarrow Num_3(12012) = 3 * Num_3(1201) + Num_3(2)$

$\Rightarrow^*$

$$3*\left(3*\left(3*\left(3*Num_3(1)\right)+Num_3(2)\right)+Num_2(0)\right)+Num_3(1)\Big)+Num_3(2)$$

$$= 81 * Num_3(1) + 27 * Num_3(2) + 9 * Num_3(0) + 3 * Num_3(1) + Num_3(2)$$

$$= 81 * 1 + 27 * 2 + 9 * 0 + 3 * 1 + 2$$

$$= 140$$

Kann man das ganze noch in einer anderen Form darstellen?

Beispiel

Beispiel für Num_3

$Num_3(12012)$

Nach Gleichung 2 $\Rightarrow Num_3(12012) = 3 * Num_3(1201) + Num_3(2)$

$\Rightarrow^*$

$$3*\Bigg(3*\bigg(3*\big(3*Num_3(1)\big)+Num_3(2)\bigg)+Num_2(0)\bigg)+Num_3(1)\Bigg)+Num_3(2)$$

$= 81 * Num_3(1) + 27 * Num_3(2) + 9 * Num_3(0) + 3 * Num_3(1) + Num_3(2)$

$= 81 * 1 + 27 * 2 + 9 * 0 + 3 * 1 + 2$

$= 140$

Kann man das ganze noch in einer anderen Form darstellen?

Beispiel

Beispiel für Num_3

$Num_3(12012)$

Nach Gleichung 2 $\Rightarrow Num_3(12012) = 3 * Num_3(1201) + Num_3(2)$

$\Rightarrow^*$

$$3*\left(3*\left(3*(3*Num_3(1))+Num_3(2)\right)+Num_2(0)\right)+Num_3(1)\Big)+Num_3(2)$$

$$= 81 * Num_3(1) + 27 * Num_3(2) + 9 * Num_3(0) + 3 * Num_3(1) + Num_3(2)$$

$$= 81 * 1 + 27 * 2 + 9 * 0 + 3 * 1 + 2$$

$$= 140$$

Kann man das ganze noch in einer anderen Form darstellen?

Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel für Num_3

$Num_3(12012)$

Nach Gleichung 2 $\Rightarrow$ $Num_3(12012) = 3 * Num_3(1201) + Num_3(2)$

$\Rightarrow^*$

$$3 * \left(3 * \left(3 * (3 * Num_3(1)) + Num_3(2)\right) + Num_2(0)\right) + Num_3(1)\Bigg) + Num_3(2)$$

$= 81 * Num_3(1) + 27 * Num_3(2) + 9 * Num_3(0) + 3 * Num_3(1) + Num_3(2)$

$= 81 * 1 + 27 * 2 + 9 * 0 + 3 * 1 + 2$

$= 140$

Kann man das ganze noch in einer anderen Form darstellen?

Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel für Num_3

$Num_3(12012)$

Nach Gleichung 2 $\Rightarrow Num_3(12012) = 3 * Num_3(1201) + Num_3(2)$

$\Rightarrow^*$

$$3*\left(3*\left(3*(3*Num_3(1))+Num_3(2)\right)+Num_2(0)\right)+Num_3(1)\Bigg)+Num_3(2)$$

$$= 81 * Num_3(1) + 27 * Num_3(2) + 9 * Num_3(0) + 3 * Num_3(1) + Num_3(2)$$

$$= 81 * 1 + 27 * 2 + 9 * 0 + 3 * 1 + 2$$

$$= 140$$

Kann man das ganze noch in einer anderen Form darstellen?

Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel für Num_3

$Num_3(12012)$

Nach Gleichung 2 $\Rightarrow$ $Num_3(12012) = 3 * Num_3(1201) + Num_3(2)$

$$\Rightarrow^*$$

$$3*\left(3*\left(3*\left(3*Num_3(1)\right)+Num_3(2)\right)+Num_2(0)\right)+Num_3(1)\Big)+Num_3(2)$$

$$= 81 * Num_3(1) + 27 * Num_3(2) + 9 * Num_3(0) + 3 * Num_3(1) + Num_3(2)$$

$$= 81 * 1 + 27 * 2 + 9 * 0 + 3 * 1 + 2$$

$$= 140$$

Kann man das ganze noch in einer anderen Form darstellen?

Aufgaben

- $\forall m \in \mathbb{N}_0 : Num_4(3^m) = ?$
- Schreibe einen Algorithmus um die $Num_5(w)$ zu berechnen, mit $w \in Z_5^*$.
  w(i) gibt das Zeichen an der i-ten Stelle zurück.

Aufgaben

- $\forall m \in \mathbb{N}_0 : Num_4(3^m) = ?$
  $4^m - 1$
- Schreibe einen Algorithmus um die $Num_5(w)$ zu berechnen, mit $w \in Z_5^*$.
  w(i) gibt das Zeichen an der i-ten Stelle zurück.

Überblick

1. Übungsblatt 5
2. Wiederholung
3. Zahlensysteme
4. Übersetzungen/Homomorphismen
5. Huffman-Codierung
6. Aufgaben
7. Fragen

Übersetzungen

Warum?

- Lesbarkeit (z.B. Deutsch statt Chinesisch)
- Kompression (z.B. Zip-Dateien)
- Verschlüsselung (z.B. https)
- Fehlererkennung und Korrektur

Übersetzungen

Warum?

- Lesbarkeit (z.B. Deutsch statt Chinesisch)
- Kompression (z.B. Zip-Dateien)
- Verschlüsselung (z.B. https)
- Fehlererkennung und Korrektur

Übersetzungen

Warum?

- Lesbarkeit (z.B. Deutsch statt Chinesisch)
- Kompression (z.B. Zip-Dateien)
- Verschlüsselung (z.B. https)
- Fehlererkennung und Korrektur

Übersetzungen

Warum?

- Lesbarkeit (z.B. Deutsch statt Chinesisch)
- Kompression (z.B. Zip-Dateien)
- Verschlüsselung (z.B. https)
- Fehlererkennung und Korrektur

Homomorphismen

Was ist das?

Ein Homomorphismus hat die Eigenschaft, dass er strukturerhaltend ist, das bedeutet z.B. für Abbildungen auf den natürlichen Zahlen:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : f(x) + f(y) = f(x + y)$$

Beispiel

$$f(x) = 2x$$

Homomorphismen

Was ist das?

Ein Homomorphismus hat die Eigenschaft, dass er strukturerhaltend ist, das bedeutet z.B. für Abbildungen auf den natürlichen Zahlen:

$\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : f(x) + f(y) = f(x + y)$

Beispiel

$f(x) = 2x$

Wie auf Wörter übertragen?

Eigenschaften, welche sich ausnutzen lassen:

- Wörter lassen sich konkatenieren
- Wörter, lassen sich auf Werte abbilden

Beispiel

– $h(a) = 001$ und $h(b) = 1101$
– dann ist $h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

Homomorphismen

Wie auf Wörter übertragen?

Eigenschaften, welche sich ausnutzen lassen:

- Wörter lassen sich konkatenieren
- Wörter, lassen sich auf Werte abbilden

Beispiel

– $h(a) = 001$ und $h(b) = 1101$
– dann ist $h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

Homomorphismen

Karlsruher Institut für Technologie

Wie auf Wörter übertragen?

Eigenschaften, welche sich ausnutzen lassen:

- Wörter lassen sich konkatenieren
- Wörter, lassen sich auf Werte abbilden

Beispiel

– $h(a) = 001$ und $h(b) = 1101$
– dann ist $h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

Warum?

Homomorphismen

Was gibt es allgemein zu beachten?

- ϵ-freier Homomorphismus: Warum?
- $\forall x, y, z \in A : x \cdot y \neq z \Rightarrow h(x) \cdot h(y) \neq h(z)$
- präfixfreier Code: für keine zwei verschiedenen Symbole $x1, x2 \in A$ gilt: $h(x1)$ ist ein Präfix von $h(x2)$.

Homomorphismen

Was gibt es allgemein zu beachten?

- ϵ-freier Homomorphismus: Warum?
- $\forall x, y, z \in A : x \cdot y \neq z \Rightarrow h(x) \cdot h(y) \neq h(z)$
- präfixfreier Code: für keine zwei verschiedenen Symbole $x1, x2 \in A$ gilt: $h(x1)$ ist ein Präfix von $h(x2)$.

Homomorphismen

Was gibt es allgemein zu beachten?

- ϵ-freier Homomorphismus: Warum?
- $\forall x, y, z \in A : x \cdot y \neq z \Rightarrow h(x) \cdot h(y) \neq h(z)$
- präfixfreier Code: für keine zwei verschiedenen Symbole $x1, x2 \in A$ gilt: $h(x1)$ ist ein Präfix von $h(x2)$.

Homomorphismen

Karlsruher Institut für Technologie

Was gibt es allgemein zu beachten?

- ϵ-freier Homomorphismus: Warum?
- $\forall x, y, z \in A : x \cdot y \neq z \Rightarrow h(x) \cdot h(y) \neq h(z)$
- präfixfreier Code: für keine zwei verschiedenen Symbole $x1, x2 \in A$ gilt: $h(x1)$ ist ein Präfix von $h(x2)$.

Homomorphismen

Was gibt es allgemein zu beachten?

- ϵ-freier Homomorphismus: Warum?
- $\forall x, y, z \in A : x \cdot y \neq z \Rightarrow h(x) \cdot h(y) \neq h(z)$
- präfixfreier Code: für keine zwei verschiedenen Symbole $x1, x2 \in A$ gilt: $h(x1)$ ist ein Präfix von $h(x2)$.

Gibt es Ausnahmen?

Aufgaben

Gegeben sei $A = \{a, b, c\}$ mit:
$h(a) = 1011$, $h(b) = 0110$, $h(c) = 111$

- ist h präfixfrei?
- Berechnen Sie $h(aacbabca)$
- Berechnen sie w für welches gilt:
  $h(w) = 0110111111011111011011110110110$

Aufgaben

Karlsruher Institut für Technologie

Gegeben sei $A = \{a, b, c\}$ mit:
$h(a) = 1011$, $h(b) = 0110$, $h(c) = 111$

- ist h präfixfrei?
  ja
- Berechnen Sie $h(aacbabca)$
- Berechnen sie w für welches gilt:
  $h(w) = 0110111111011111011011110110110$

Aufgaben

Gegeben sei $A = \{a, b, c\}$ mit:

$h(a) = 1011$, $h(b) = 0110$, $h(c) = 111$

- ist h präfixfrei?

  ja

- Berechnen Sie $h(aacbabca)$

  101110111110110101101101111011

- Berechnen sie w für welches gilt:

  $h(w) = 01101111111011111011011110110110$

Aufgaben

Karlsruher Institut für Technologie

Gegeben sei $A = \{a, b, c\}$ mit:
$h(a) = 1011$, $h(b) = 0110$, $h(c) = 111$

- ist h präfixfrei?
  ja
- Berechnen Sie $h(aacbabca)$
  101110111110110101101101111011
- Berechnen sie w für welches gilt:
  $h(w) = 01101111111011111011011110110110$
  bccacbcab

Überblick

Huffman-Codierung

Allgemein Vorgehensweise

- Tabelle aufstellen, wie oft kommt jedes Element vor?
- Baum aufstellen, Blätter sind die Elemente.
- Elemente mit niedrigster Häufigkeit zu neuem Knoten zusammenführen und addierte Häufigkeit in Knoten schreiben.
- solange Wiederholen bis nur noch die Wurzel übrig ist.
- Kanten beschriften, Kanten nach links mit 1 und Kanten nach rechts mit 0, oder anders herum.

Huffman-Codierung

Allgemein Vorgehensweise

- Tabelle aufstellen, wie oft kommt jedes Element vor?
- Baum aufstellen, Blätter sind die Elemente.
- Elemente mit niedrigster Häufigkeit zu neuem Knoten zusammenführen und addierte Häufigkeit in Knoten schreiben.
- solange Wiederholen bis nur noch die Wurzel übrig ist.
- Kanten beschriften, Kanten nach links mit 1 und Kanten nach rechts mit 0, oder anders herum.

Huffman-Codierung

Allgemein Vorgehensweise

- Tabelle aufstellen, wie oft kommt jedes Element vor?
- Baum aufstellen, Blätter sind die Elemente.
- Elemente mit niedrigster Häufigkeit zu neuem Knoten zusammenführen und addierte Häufigkeit in Knoten schreiben.
- solange Wiederholen bis nur noch die Wurzel übrig ist.
- Kanten beschriften, Kanten nach links mit 1 und Kanten nach rechts mit 0, oder anders herum.

Huffman-Codierung

Allgemein Vorgehensweise

- Tabelle aufstellen, wie oft kommt jedes Element vor?
- Baum aufstellen, Blätter sind die Elemente.
- Elemente mit niedrigster Häufigkeit zu neuem Knoten zusammenführen und addierte Häufigkeit in Knoten schreiben.
- solange Wiederholen bis nur noch die Wurzel übrig ist.
- Kanten beschriften, Kanten nach links mit 1 und Kanten nach rechts mit 0, oder anders herum.

Huffman-Codierung

Allgemein Vorgehensweise

- Tabelle aufstellen, wie oft kommt jedes Element vor?
- Baum aufstellen, Blätter sind die Elemente.
- Elemente mit niedrigster Häufigkeit zu neuem Knoten zusammenführen und addierte Häufigkeit in Knoten schreiben.
- solange Wiederholen bis nur noch die Wurzel übrig ist.
- Kanten beschriften, Kanten nach links mit 1 und Kanten nach rechts mit 0, oder anders herum.

Huffman-Codierung

Beispiel

- Kodierung für ”w = badcfehg”
- Kodierung für ein Wort, in welchem a einmal, b zweimal, c 4-mal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vorkommt

Huffman-Codierung

Beispiel

- Kodierung für ”w = badcfehg”
- Kodierung für ein Wort, in welchem a einmal, b zweimal, c 4-mal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vorkommt

Huffman-Codierung

Wie sieht es mit der Codierung von $w = aaaaaabbbbbcccc$ aus?

Huffman-Codierung

Wie sieht es mit der Codierung von $w = aaaaaabbbbbcccc$ aus?

Lässt sich das ganze noch optimieren?

Überblick

Kodiere folgende Wörter mit der Huffman-Codierung:

- abcbcaaa
- abababab
- hello␣world

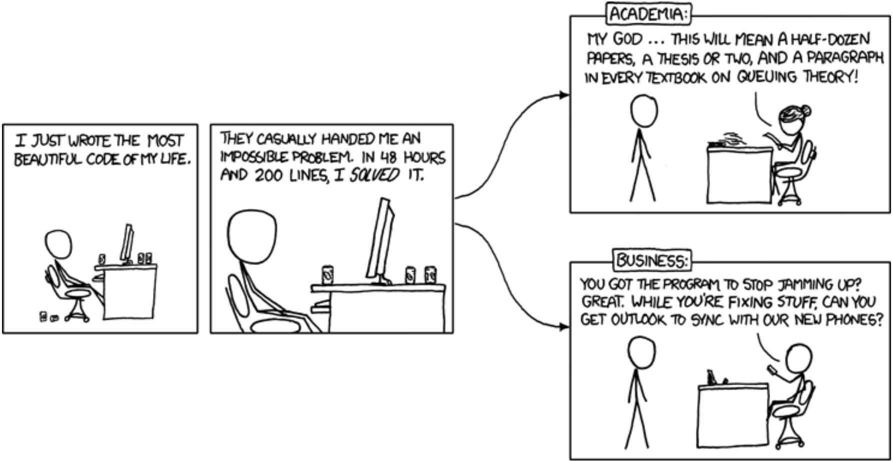
Überblick

Karlsruher Institut für Technologie

Fragen

- Fragen zum Stoff?
- Fragen zum nächsten Übungsblatt?
- Generelle Fragen?
- Feedback?

EOF



source : http : //imgs.xkcd.com/comics/academia_vs_business.png