Grundbegriffe der Informatik
WS 2011/12
Tutorium in der Woche 10

Gehalten in den Tutorien Nr. 10, Nr. 14

Philipp Basler (philippbasler@googlemail.com)
Nils Braun (area51.nils@googlemail.com)

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

9.1.2012 & 10.1.2012

Inhaltsverzeichnis

1. Übungsblätter
2. Master-Theorem
3. Mealy-Automaten
4. Aufgaben
5. Moore-Automat
6. Endliche Akzeptoren
7. Aufgaben zu endlichen Akzeptoren
8. Alte Klausuraufgaben
9. Schluss

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 Moore-Automat

6 Endliche Akzeptoren

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 Alte Klausuraufgaben

9 Schluss

Informationen zum nächsten Blatt

Blatt Nr. 10

Abgabetermin	13.1.2012 um 12:30 Uhr
Abgabeort	Briefkasten
Themen	Automaten und Würmer
Maximale Punkte	23

Statistkik

- 13 von 26 Abgaben
- 10.5 von 18 Punkten

Häufige Fehler auf dem letzten Übungsblatt

Blatt Nr. 9

- 1. Aufgabe Wenn ihr sagt $f(n) \leq c \cdot g(n)$, so sagt doch auch dazu welchen Wert c hat, sonst ist ja noch nichtmal gesagt, dass es so ein c überhaupt gibt.
- 2. Aufgabe Bei der b war nach *allen* Eigenschaften gefragt.
- 3. Aufgabe

1 Übungsblätter

2 **Master-Theorem**

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 Moore-Automat

6 Endliche Akzeptoren

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 Alte Klausuraufgaben

9 Schluss

Können wir die Laufzeit eines Algorithmus rekursiv angeben, so lässt uns das eventuell direkte Erkenntnisse über die asymptotische Laufzeit erblicken. Es sei $T(n)$ die Funktion, die die Laufzeit in Abhängigkeit der Eingabegröße n angibt.

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Es gilt $a \geq 1, b \geq 1$ und a, b sind konstant.

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Es gilt $a \geq 1, b \geq 1$ und a, b sind konstant.

Fall 1

$$\exists \varepsilon > 0 : f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right) \iff T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

Fall 2

$$f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \iff T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$$

Fall 3

$$\exists \varepsilon > 0 : f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$$
$$\wedge \exists d = const \in (0, 1) : af(\frac{n}{b}) \leq df(n)$$
$$\iff T(n) \in \Theta(f(n))$$

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 Moore-Automat

6 Endliche Akzeptoren

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 Alte Klausuraufgaben

9 Schluss

Endliche Automaten

Endliche Automaten erlauben es uns einen endlichen, regulären Ausdruck relativ einfach zu implementieren.

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$besteht aus . . .

- . . . einer endlichen Zustandsmenge Z

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X
- ... einer Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \to Z$

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X
- ... einer Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \to Z$
- ... einem Ausgabealphabet Y

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X
- ... einer Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \to Z$
- ... einem Ausgabealphabet Y
- ... einer Ausgabefunktion $g : Z \times X \to Y^*$

Was bedeutet also die Zustandsübergangsfunktion?

Was bedeutet also die Zustandsübergangsfunktion?
Bei Eingabe eines Symbols $x \in X$ und des aktuellen Zustands $z \in Z$ gibt uns die Zustandsübergangsfunktion an, in welchen Zustand z' der Automat dann sein wird.
Formell:

$$f(z, x) = z'$$

Was bedeutet also die Zustandsübergangsfunktion?
Bei Eingabe eines Symbols $x \in X$ und des aktuellen Zustands $z \in Z$ gibt uns die Zustandsübergangsfunktion an, in welchen Zustand z' der Automat dann sein wird.
Formell:

$$f(z, x) = z'$$

Graphisch bedeutet dies, dass die Zustände die Kanten in einem Graphen sind und die Zustandsübergänge die gerichteten Kanten

Was passiert bei Eingabe von Wörtern?

Was passiert bei Eingabe von Wörtern?
Wir definieren uns

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \; \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Was passiert bei Eingabe von Wörtern?
Wir definieren uns

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?

Was passiert bei Eingabe von Wörtern?
Wir definieren uns

$$f^*(z,\varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^*(z,wx) = f(f^*(z,w),x)$$

Was macht diese Funktion?
Bei Eingabe eines Wortes w und Anfangszustand z gibt sie den Zustand $z' = f^*(z,w)$ aus, in dem der Automat enden wird.

Was passiert bei Eingabe von Wörtern?
Wir definieren uns

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?
Bei Eingabe eines Wortes w und Anfangszustand z gibt sie den Zustand $z' = f^*(z, w)$ aus, in dem der Automat enden wird.
Definieren wir nun weiter

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

Was passiert bei Eingabe von Wörtern?
Wir definieren uns

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \; \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?
Bei Eingabe eines Wortes w und Anfangszustand z gibt sie den Zustand $z' = f^*(z, w)$ aus, in dem der Automat enden wird.
Definieren wir nun weiter

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \; \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?

Was passiert bei Eingabe von Wörtern?
Wir definieren uns

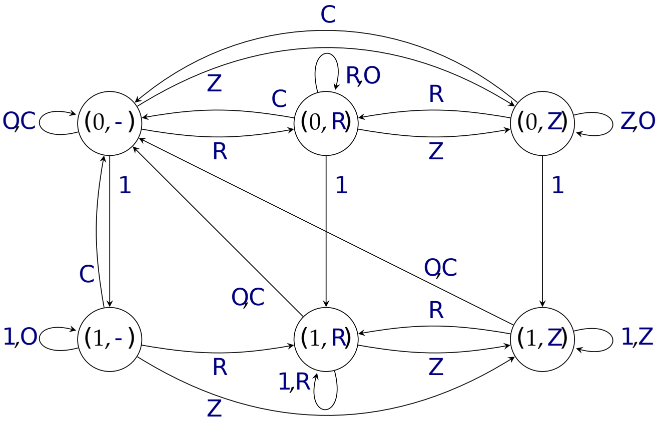
$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?
Bei Eingabe eines Wortes w und Anfangszustand z gibt sie den Zustand $z' = f^*(z, w)$ aus, in dem der Automat enden wird.
Definieren wir nun weiter

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?
Diese Funktion gibt die Reihe aller Zustände aus, die der Automat bei Eingabe des Wortes w im Startzustand z durchläuft.

Beispiel Getränkeautomat, R sei reines Wasser, Z ist Zitronenlimonade, C ist Clear, 1 ist die Eingabe von einer Münze mit Wertigkeit 1 und 0 sei Geldausgabe.



Was macht $f((0,-),Z), f^*((0,-),R10), f^{**}((0,-),R10)$? Rechnerisch und Graphisch.

- $f((0,-), Z) = (0, Z)$

- $$\begin{aligned} f^*((0,-),R10) &= f(f^*((0,-),R1),0) \\ &= f(f(f^*((0,-),R),1),0) \\ &= f(f(f(f^*((0,-),\varepsilon),R),1),0) \\ &= f(f(f((0,-),R),1),0) \\ &= f(f((0,R),1),0) \\ &= f((1,R),0) \\ &= (0,-) \end{aligned}$$

-

$$
\begin{aligned}
f^{**}((0,-),R10) =& f^{**}((0,-),R1)) \cdot f(f^{*}((0,-),R1),0) \\
=& f^{**}((0,-),R) \cdot f(f^{*}((0,-),R),1) \\
& \cdot f(f^{*}((0,-),R1),0) \\
=& f^{**}((0,-),\varepsilon) \cdot f(f^{*}((0,-),\varepsilon),R) \\
& \cdot f(f^{*}((0,-),R),1) \cdot f(f^{*}((0,-),R1),0) \\
=& (0,-) \cdot f((0,-),R) \cdot f(f(f^{*}((0,-),\varepsilon),R),1) \\
& \cdot f(f(f^{*}((0,-),R),1),0) \\
=& (0,-) \cdot f((0,-),R) \cdot f(f((0,-),R),1) \\
& \cdot f(f(f(f^{*}(0,-),\varepsilon),R),1),0) \\
=& (0,-) \cdot f((0,-),R) \cdot f(f((0,-),R),1) \\
& \cdot f(f(f((0,-),R),1),0) \\
=& (0,-) \cdot (0,R) \cdot (1,R) \cdot (0,-)
\end{aligned}
$$

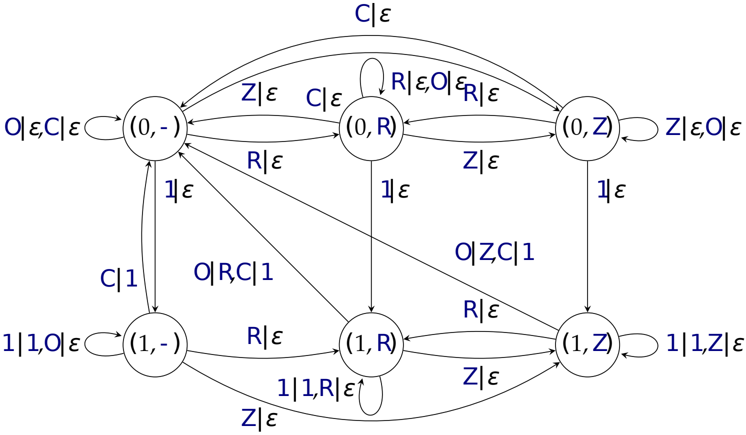
Nun betrachten wir einen Automaten mit Ausgabemöglichkeit. Die Kanten sind nun beschriftet mit $x_i|y_i$, wobei $x_i \in X, y_i \in Y$. Also wird bei Eingabe von x_i das Symbol y_i ausgegeben.

Nun betrachten wir einen Automaten mit Ausgabemöglichkeit. Die Kanten sind nun beschriftet mit $x_i|y_i$, wobei $x_i \in X, y_i \in Y$. Also wird bei Eingabe von x_i das Symbol y_i ausgegeben.
Wir können also analog zu f^* und f^{**} definieren

$$g^* : Z \times X^* \to Y^*$$
$$g^*(z, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in X^* \forall x \in X : g^*(z, wx) = g(f^*(z, w), x)$$
$$g^{**} : Z \times X^* \to Y^*$$
$$g^{**}(z, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in X^* \forall x \in X : g^{**}(z, wx) = g^{**}(z, w) \cdot g^*(z, wx)$$

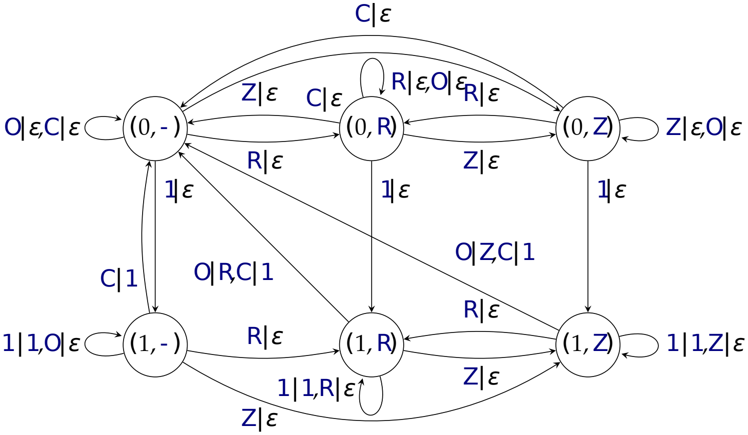
Dies gibt nun nicht die durchlaufenen Zustände bzw den Abschlußzustand an, sondern die letzte Ausgabe bzw alle durchlaufenen Ausgaben.

Der Getränkeautomat mit Ausgaben



Was macht $g^*((0,-),R10), g^{**}((0,-),R10), g^{**}((0,-),R110)$?

Der Getränkeautomat mit Ausgaben



Was macht $g^*((0,-),R10), g^{**}((0,-),R10), g^{**}((0,-),R110)$?

$g^*((0,-),R10) = g^{**}((0,-),R10) = R, g^{**}((0,-),R110) = 1R$

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 **Aufgaben**

5 Moore-Automat

6 Endliche Akzeptoren

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 Alte Klausuraufgaben

9 Schluss

Gegeben sei folgender Mealy-Automat

$$Z = \{z\}, X = Y = \{a, b\}, g(z, a) = b, g(z, b) = ba$$

- Zeichnen Sie den Automaten, überlegen Sie sich hierzu wie die Übergangsfunktion aussieht.
- Wie lautet

$$w_1 = g^{**}(z, a)$$

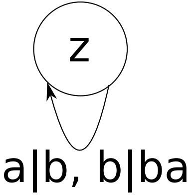
- Wie lautet

$$w_2 = g^{**}(z, w_1), \ldots, w_{i+1} = g^{**}(z, w_i)$$

- Was passiert hierbei mit den Längen?

Lösung zu Aufgabe 1

- Graph :



- $w_1 = g^{**}(z, a) = g^{**}(z, \varepsilon) \cdot g^{*}(z, wx) = g(f^{*}(z, \varepsilon), a) = g(z, a) = b$

Lösung zu Aufgabe 1

- $w_1 = g^{**}(z,a) = g^{**}(z,\varepsilon) \cdot g^{*}(z,wx) = g(f^{*}(z,\varepsilon),a) = g(z,a) = b$
- $$w_2 = g^{**}(z,b) = g(z,b) = ba$$

Lösung zu Aufgabe 1

- $w_1 = g^{**}(z, a) = g^{**}(z, \varepsilon) \cdot g^*(z, wx) = g(f^*(z, \varepsilon), a) = g(z, a) = b$
-
$$\begin{aligned} w_2 &= g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba \\ w_3 &= g^{**}(z, ba) \\ &= g^{**}(z, b) \cdot g^*(z, a) \\ &= g(z, b) \cdot g(z, a) \\ &= baa \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1

- $w_1 = g^{**}(z, a) = g^{**}(z, \varepsilon) \cdot g^*(z, wx) = g(f^*(z, \varepsilon), a) = g(z, a) = b$
- $$\begin{aligned} w_2 &= g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba \\ w_3 &= g^{**}(z, ba) \\ &= g^{**}(z, b) \cdot g^*(z, a) \\ &= g(z, b) \cdot g(z, a) \\ &= baa \\ w_4 &= g^{**}(z, baa) \\ &= g(z, b) \cdot g(z, a) \cdot g(z, a) \\ &= baaa \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1

- $w_1 = g^{**}(z, a) = g^{**}(z, \varepsilon) \cdot g^{*}(z, wx) = g(f^{*}(z, \varepsilon), a) = g(z, a) = b$
-
$$\begin{aligned}
w_2 &= g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba \\
w_3 &= g^{**}(z, ba) \\
&= g^{**}(z, b) \cdot g^{*}(z, a) \\
&= g(z, b) \cdot g(z, a) \\
&= baa \\
w_4 &= g^{**}(z, baa) \\
&= g(z, b) \cdot g(z, a) \cdot g(z, a) \\
&= baaa \\
w_{i+1} &= g^{**}(z, w_i) \\
&= ba^{i}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1

- $$\begin{aligned} w_2 &= g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba \\ w_3 &= g^{**}(z, ba) \\ &= g^{**}(z, b) \cdot g^{*}(z, a) \\ &= g(z, b) \cdot g(z, a) \\ &= baa \\ w_4 &= g^{**}(z, baa) \\ &= g(z, b) \cdot g(z, a) \cdot g(z, a) \\ &= baaa \\ w_{i+1} &= g^{**}(z, w_i) \\ &= ba^i \end{aligned}$$

- Für die Länge gilt
$$|w_{i+1}| = i + 1$$

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 **Moore-Automat**

6 Endliche Akzeptoren

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 Alte Klausuraufgaben

9 Schluss

Ein Moore-Automat ist das gleiche wie ein Mealy-Automat mit dem einzigen Unterschied, dass die Ausgabe im Zustand erfolgt und nicht beim Zustandsübergang.

Ein Moore-Automat ist das gleiche wie ein Mealy-Automat mit dem einzigen Unterschied, dass die Ausgabe im Zustand erfolgt und nicht beim Zustandsübergang.
Die Ausgabefunktion ist insofern auch einfacher. Wir definieren uns $h : Z \to Y$, die uns die Ausgabe im Zustand $z \in Z$ liefert. Dann ist

$$g^*(z, w) = h(f^*(z, w))$$

Ein Moore-Automat ist das gleiche wie ein Mealy-Automat mit dem einzigen Unterschied, dass die Ausgabe im Zustand erfolgt und nicht beim Zustandsübergang.
Die Ausgabefunktion ist insofern auch einfacher. Wir definieren uns $h : Z \to Y$, die uns die Ausgabe im Zustand $z \in Z$ liefert. Dann ist

$$g^*(z, w) = h(f^*(z, w))$$

Für g^{**} gilt dann mit $h^{**} : Z^* \to Y$

$$g^{**}(z, w) = h^{**}(f^{**}(z, w))$$

Heißt also, dass wir einfach nur h auf jeden durchlaufenen Zustand anwenden.

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 Moore-Automat

6 **Endliche Akzeptoren**

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 Alte Klausuraufgaben

9 Schluss

Endlicher Akzeptor

Ein endlicher Akzeptor ist ein Moore-Automat mit $Y = \{0, 1\}$, der 1 ausgibt, falls das eingegebene Wort der vorliegeneden Syntax entspricht und 0 sonst.

Notation : Wir kennzeichnen den akzeptieren Zustand mit einem zweiten Kreis und lassen die Ausgabe im Zustandsnamen weg.

Endlicher Akzeptor

Ein endlicher Akzeptor ist ein Moore-Automat mit $Y = \{0, 1\}$, der 1 ausgibt, falls das eingegebene Wort der vorliegeneden Syntax entspricht und 0 sonst.

Notation : Wir kennzeichnen den akzeptieren Zustand mit einem zweiten Kreis und lassen die Ausgabe im Zustandsnamen weg.
Wir sprechen von einer akzeptierten Sprache über einem Alphabet.
Sie ist definiert als

$$L = \{w | g^*(z_0, w) = 1\}$$

Also sind in einer akzeptierten Sprache alle Wörter, die akzeptiert werden.

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 Moore-Automat

6 Endliche Akzeptoren

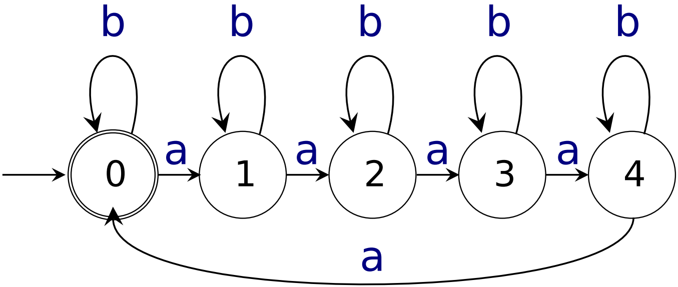
7 **Aufgaben zu endlichen Akzeptoren**

8 Alte Klausuraufgaben

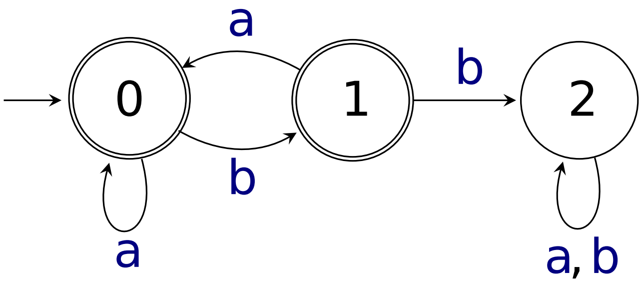
9 Schluss

- Zeichnen Sie einen möglichst kleinen endlichen Akzeptor mit $X = \{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, bei denen die Anzahl der a durch 5 teilbar ist.
- Zeichnen Sie einen Akzeptor mit $X = \{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, in denen nirgends hintereinander zwei b vorkommen.

Lösung zu Aufgabe 3



Lösung zu Aufgabe 3



Gibt es einen endlichen Akzeptor mit

$$\{a^k b^k | k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \{w | f^{**}(z_0, w) = 1\}$$

Wenn nein, warum nicht?

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 Moore-Automat

6 Endliche Akzeptoren

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 **Alte Klausuraufgaben**

9 Schluss

März 2010 Aufgabe 3

- Sei $X = \{0,1,2,3\}$ und $w = 2103 \in X^*$. Geben Sie ein Wort $w' \in \{0,1\}^*$ an, so dass $\mathrm{Num}_2(w') = \mathrm{Num}_4(w)$ gilt.
- Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| \leq 3, X = \{0,1,2,3\}$ und $Y = \{0,1\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ gilt :

$$\mathrm{Num}_4(w) = \mathrm{Num}_2(g^{**}(z_0, w))$$

- Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| < 4, X = \{0,1\}$ und $Y = \{0,1,2,3\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ **mit gerader Länge** gilt

$$\mathrm{Num}_2(w) = \mathrm{Num}_4(g^{**}(z_0, w))$$

WiSe 10/11 Aufgabe 6 c

Die Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ sei definiert als die Menge aller Wörter w, die folgende Bedingungen erfüllen

$$N_b(w) > N_a(w)$$
$$\forall v_1, v_2 \in \{a, b\}^* : w \neq v_1 bb v_2$$

Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L erkennt.

1 Übungsblätter

2 Master-Theorem

3 Mealy-Automaten

4 Aufgaben

5 Moore-Automat

6 Endliche Akzeptoren

7 Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

8 Alte Klausuraufgaben

9 **Schluss**

Was ihr nun wissen solltet

- Wie man einen endlichen Automaten zeichnet
- Wie man die Zeichnung verstehen kann.
- Was ein endlicher Akzeptor ist.

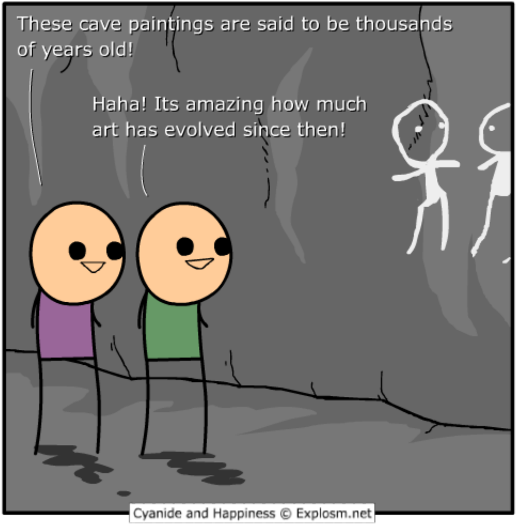


Abbildung: `http://www.explosm.net/comics/1510/`

Kontakt via E-Mail an Philipp Basler oder Nils Braun
gbi.ugroup.hostzi.com