GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 14

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 7. Februar 2013

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

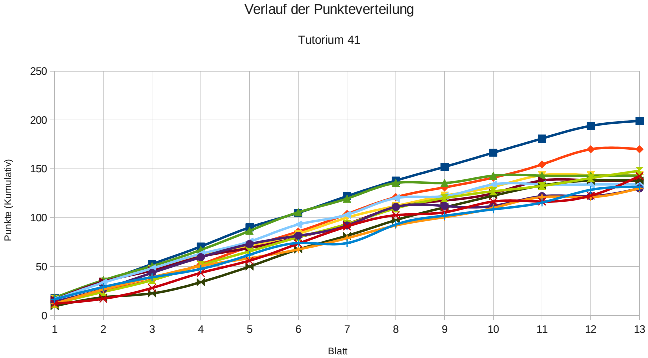
Statistiken

Die folgenden Grafiken beziehen sich

- bei den Übungsblättern auf diejenigen, die den Übungsschein erhalten haben und
- bei der Übungsklausur auf diejenigen, die abgegeben haben.

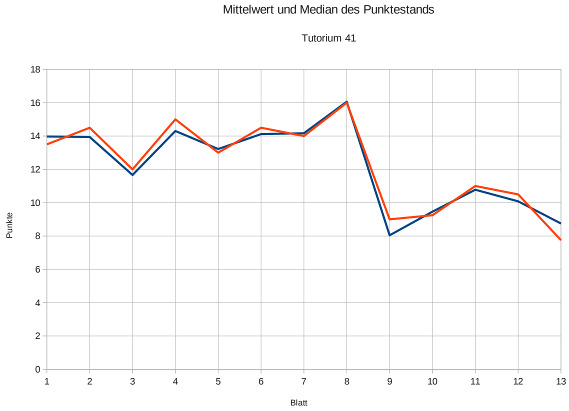
Verlauf des Punktestands

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Verlauf des Punktestands

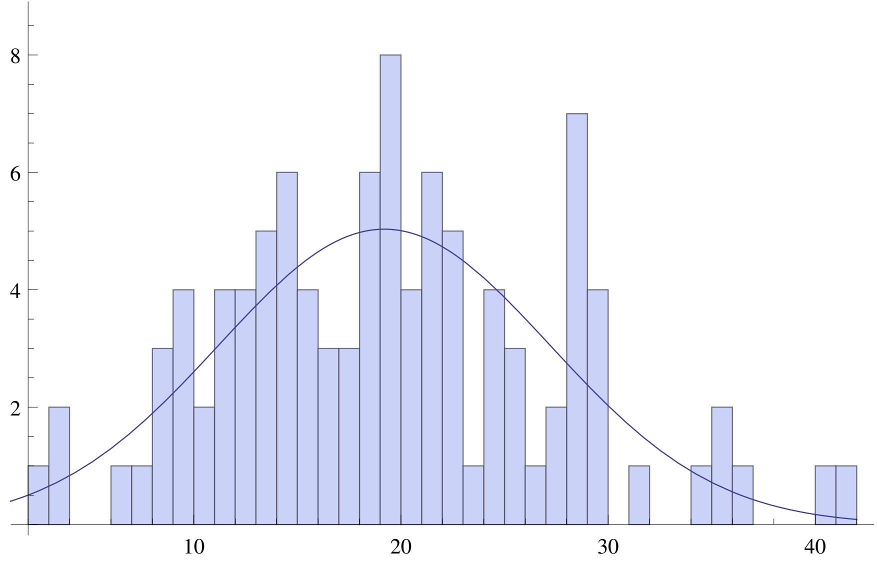
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



blau: Mittelwert, rot: Median

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Punkteverteilung in der Probleklausur



Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
  Nein.
- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum? Siehe Halteproblem.
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$? Ja.
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen? Nein.

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Verträglichkeit

Karlsruher Institut für Technologie

Definition: Verträglichkeit

Es sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M und $f : M \to M$ eine Abbildung. Man sagt, dass $\equiv$ mit f verträglich ist, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \Longrightarrow f(x_1) \equiv f(x_2)$$

Was bedeuted das anschaulich? Fallen euch Beispiele ein?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel modulo n

Karlsruher Institut für Technologie

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \tag{1}$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \tag{2}$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \tag{3}$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \tag{4}$$

Beweis.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel modulo n

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \quad (1)$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \quad (2)$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \quad (3)$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \quad (4)$$

Beweis.

Beispiel modulo n

Karlsruher Institut für Technologie

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \tag{1}$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \tag{2}$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \tag{3}$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \tag{4}$$

Beweis.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel modulo n

Karlsruher Institut für Technologie

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \tag{1}$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \tag{2}$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \tag{3}$$
$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \tag{4}$$

Beweis.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beweis von (3)

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)\,n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod n$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie

Beweis von (3)

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)\, n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod n$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beweis von (3)

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)\, n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beweis von (4)

Löse Gleichung (1) nach x_1 auf und Gleichung (2) nach y_1 und multipliziere beide Seiten:

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot y_1 &= (x_2 + kn) \cdot (y_2 + mn) \\
&= x_2 \cdot y_2 + n\left(mx_2 + ky_2 + kmn\right) \\
x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 &= n\left(mx_2 + ky_2 + kmn\right) \\
\iff x_1 \cdot y_1 &\equiv x_2 \cdot y_2 \pmod n
\end{aligned}
$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Kongruenz

Damit können wir auch “nur mit Repräsentanten” der Äquivalenzklasse rechnen:

$$[2] + [3] = [2 + 3] = [5] = [0]$$
$$[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [1]$$

Nennt weitere Beispiele für die Äquivalenzrelation Kongruent Modulo i, wobei sich i bei jedem von euch erhöht.

Verträglichkeit und Kongruenzrelationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Die Operationen $+$ und $\cdot$ sind also verträglich mit unserer Relation "kongruent modulo n".

Definition: Kongruenzrelation

Eine Funktion, die mit allen gerade interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträgich ist, nennt man auch **Kongruenzrelation**.

Kongruenz und die Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu