Grundbegriffe der Informatik
WS 2011/12
Tutorium in der Woche 2
Gehalten in den Tutorien Nr. 10, Nr. 14

Philipp Basler (philippbasler@googlemail.com)
Nils Braun (area51.nils@googlemail.com)

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

31.10.2011

Inhaltsverzeichnis

1 **Übungsblätter**

2 Wörter

3 Vollständige Induktion

4 Schluss

Informationen zum nächsten Blatt

Blatt Nr. 2

Abgabetermin	4.11.2011 12:30 Uhr
Abgabeort	Briefkasten im UG von Gebäude 50.34
Themen	Wörter und Vollständige Induktion
Maximale Punkte	20

Häufige Fehler auf dem letzten Übungsblatt

Blatt Nr. 1

- 1. Aufgabe Keine
- 2. Aufgabe Zu ALLEN Eigenschaften etwas angeben. f_2 muss nicht surjektiv sein, kann allerdings
- 3. Aufgabe Nein, $f := x- > e^x$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$
- 4. Aufgabe Ausschließlich NOR benutzen

Statistik

- 23 von 26 Abgaben
- Durchschnittlich bei den Abgegebenen 14.4 von 20 Punkten

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*
- Eine surjektive Funktion ist *rechtstotal*

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*
- Eine surjektive Funktion ist *rechtstotal*

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*
- Eine surjektive Funktion ist *rechtstotal*
- Jede Relation ist eine Funktion

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*
- Eine surjektive Funktion ist *rechtstotal*
- Jede Relation ist eine Funktion

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*
- Eine surjektive Funktion ist *rechtstotal*
- Jede Relation ist eine Funktion
- Jede Funktion ist eine Relation

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss *linkseindeutig* sein
- Eine injektive Funktion ist *rechtstotal*
- Eine surjektive Funktion ist *rechtstotal*
- Jede Relation ist eine Funktion
- Jede Funktion ist eine Relation

Alphabet

Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von Zeichen.

Alphabet

Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von Zeichen.

Wort

- Ein Wort **w** über einem Alphabet A ist eine **Folge von Zeichen** aus A

Alphabet

Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von Zeichen.

Wort

- Ein Wort **w** über einem Alphabet A ist eine **Folge von Zeichen** aus A
- Eine surjektive Abbildung $f : G_n \to A$ wobei $G_n = \{i \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq i < n\}$

Alphabet

Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von Zeichen.

Wort

- Ein Wort **w** über einem Alphabet A ist eine **Folge von Zeichen** aus A
- Eine surjektive Abbildung $f : G_n \to A$ wobei $G_n = \{i \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq i < n\}$

Beispiel

$$A = \{a, b\}$$

Alphabet

Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von Zeichen.

Wort

- Ein Wort **w** über einem Alphabet A ist eine **Folge von Zeichen** aus A
- Eine surjektive Abbildung $f : G_n \to A$ wobei $G_n = \{i \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq i < n\}$

Beispiel

$$A = \{a, b\}$$

$$A^* \ni w_1 = aabbabab$$

$$A^* \ni w_2 = ab$$

$$A^* \ni w_3 = a$$

Konkatenation von Wörtern

z.b. w_1 =Schrank , w_2 =Schlüssel
Dann gilt

$$w_1 \circ w_2 = \text{SchrankSchlüssel}$$

Aber

$$w_2 \circ w_1 = \text{SchlüsselSchrank} \neq w_1 \circ w_2$$

Konkatenation von Wörtern

z.b. w_1 =Schrank , w_2 =Schlüssel
Dann gilt

$$w_1 \circ w_2 = \text{SchrankSchlüssel}$$

Aber

$$w_2 \circ w_1 = \text{SchlüsselSchrank} \neq w_1 \circ w_2$$

Falls $w = w_1 \circ w_2$ und $w_1 \in A^*, w_2 \in B^*$, dann gilt

$$w \in (A \cup B)^*$$

Das Leere Wort

Es gilt

$$\varepsilon := f : \mathbb{G}_0 \to A$$

Das Leere Wort

Es gilt

$$\varepsilon := f : \mathbb{G}_0 \to A$$

Weiterhin gilt $\varepsilon \circ w \circ \varepsilon = w$
Ein Wort ohne Buchstaben der Länge 0. Wofür braucht man sowas?

Das Leere Wort

Es gilt

$$\varepsilon := f : \mathbb{G}_0 \to A$$

Weiterhin gilt $\varepsilon \circ w \circ \varepsilon = w$
Ein Wort ohne Buchstaben der Länge 0. Wofür braucht man sowas?

Mehrfachkonkatenation

$$w^k = \underbrace{w \circ w \circ \cdots \circ w}_{k-mal}$$

und

$$w^0 = \varepsilon$$

Das Leere Wort

Es gilt

$$\varepsilon := f : \mathbb{G}_0 \to A$$

Weiterhin gilt $\varepsilon \circ w \circ \varepsilon = w$
Ein Wort ohne Buchstaben der Länge 0. Wofür braucht man sowas?

Mehrfachkonkatenation

$$w^k = \underbrace{w \circ w \circ \cdots \circ w}_{k-mal}$$

und

$$w^0 = \varepsilon$$

Länge eines Wortes

Unter Länge eines Wortes versteht man die Anzahl der Zeichen, die es beinhaltet:

Länge eines Wortes

Unter Länge eines Wortes versteht man die Anzahl der Zeichen, die es beinhaltet:
z.B.

$$|\text{hallo}| = 5$$

Es gilt laut Vorlesung

$$|w^k| = k|w|$$

und für das leere Wort gilt

$$|\varepsilon| = 0$$

Weiterhin gilt

$$|a \circ b| = |a| + |b|$$

Praefix

Ein Praefix ist ein beliebig langer Teil von Anfang eines Wortes, d.h.
Sei $w = a \circ b$, so ist a Praefix von w

Suffix

Ein Suffix ist ein beliebig langer Teil bis zum Ende des Wortes, d.h.
Sei $w = a \circ b$, so ist b Praefix von w

Aufgabe

- Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ bilden? Was enthält die Menge A^*?
- Ist das Wort $w =$ **aabaa** ein Element der Menge A^5?
- Was ist **aabba**·**babba**? Was ist $A^2 \times A^2$? Und $A^2 \cdot A^2$?

Lösung

Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ *bilden?*
Was enthält die Menge A^**?*

Lösung

Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ bilden? Was enthält die Menge A^*?

Aus A lassen sich z.B. die Wörter

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{aa}, \mathbf{bb}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}, \mathbf{aaa}, \mathbf{bbb}, \ldots$$

bilden.

Lösung

Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ bilden? Was enthält die Menge A^*?

Aus A lassen sich z.B. die Wörter

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{aa}, \mathbf{bb}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}, \mathbf{aaa}, \mathbf{bbb}, \ldots$$

bilden. Die Menge A^* enthält gerade diese Wörter. Beachte: Auch ε ist in A^*!

Lösung

Ist das Wort $w = \textbf{aabaa}$ *ein Element der Menge* A^5*?*

Lösung

Ist das Wort $w =$ **aabaa** *ein Element der Menge* A^5*?*

Ja. Das Wort besteht aus 5 Symbolen, die alle in A liegen.

Lösung

Was ist **aabba**$\cdot$**babba***? Was ist* $A^2 \times A^2$*? Und* $A^2 \cdot A^2$*?*

Lösung

Was ist **aabba**·**babba***? Was ist* $A^2 \times A^2$*? Und* $A^2 \cdot A^2$*?*

$$\mathbf{aabba} \cdot \mathbf{babba} = \mathbf{aabbababba}$$

$$A^2 \times A^2 = \{(\mathbf{aa}, \mathbf{aa}), (\mathbf{aa}, \mathbf{bb}), (\mathbf{aa}, \mathbf{ab}), (\mathbf{aa}, \mathbf{ba}), (\mathbf{bb}, \mathbf{aa}), \dots\}$$

$$A^2 \cdot A^2 = \{\mathbf{aaaa}, \mathbf{aabb}, \mathbf{aaab}, \mathbf{aaaba}, \mathbf{bbaa}, \dots\} = A^4$$

Vollständige Induktion ist wie stille Post.

Vollständige Induktion ist wie stille Post.
Wir zeigen, dass die Behauptung für das erste mögliche Argument stimmt.

Vollständige Induktion ist wie stille Post.
Wir zeigen, dass die Behauptung für das erste mögliche Argument stimmt.
Dannach nehmen wir an es stimmt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ und zeigen, dass es für $n + 1$ auch stimmt.

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

$x_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 2 \cdot 0 = 0$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

$x_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 2 \cdot 0 = 0$

IV Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun $x_n = 2n$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

$x_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 2 \cdot 0 = 0$

IV Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun $x_n = 2n$

IS Dann stimmt die Behauptung, falls $x_{n+1} = 2(n+1)$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

$x_0 = 0$ $x_0 = 2 \cdot 0 = 0$

IV Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun $x_n = 2n$

IS Dann stimmt die Behauptung, falls $x_{n+1} = 2(n+1)$

$$x_{n+1} = x_n + 2$$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

$x_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 2 \cdot 0 = 0$

IV Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun $x_n = 2n$

IS Dann stimmt die Behauptung, falls $x_{n+1} = 2(n+1)$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2 \\ &\overset{IV}{=} 2n + 2 \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

$x_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 2 \cdot 0 = 0$

IV Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun $x_n = 2n$

IS Dann stimmt die Behauptung, falls $x_{n+1} = 2(n+1)$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2 \\ &\overset{IV}{=} 2n + 2 \\ &= 2(n+1) \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2, x_0 = 0 \iff \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

IA Zeige es für $n = 0$

$x_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 2 \cdot 0 = 0$

IV Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun $x_n = 2n$

IS Dann stimmt die Behauptung, falls $x_{n+1} = 2(n+1)$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2 \\ &\overset{IV}{=} 2n + 2 \\ &= 2(n+1) \end{aligned}$$

Somit stimmt die Behauptung.

Aufgabe (WS 2009)

Gegeben sei folgende induktiv definierte Folge von Zahlen:

$$x_0 = 0$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2n + 1$$

- Berechnen Sie x_1, x_2, x_3, x_4.
- Geben Sie für x_n eine geschlossene Formel an (d.h. einen arithmetischen Ausdruck, in dem nur Zahlen, n und die Grundrechenarten vorkommen).
- Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Lösung

$$x_0 = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2n + 1$$

Berechnen Sie x_1, x_2, x_3, x_4.

Durch einfaches Einsetzen erhält man:

Lösung

$$x_0 = 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2n + 1$$

Berechnen Sie x_1, x_2, x_3, x_4.

Durch einfaches Einsetzen erhält man:

$$x_1 = x_{0+1} = x_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$
$$x_2 = x_{1+1} = x_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$
$$x_3 = x_{2+1} = x_2 + 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$
$$x_4 = x_{3+1} = x_3 + 2 \cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

Lösung

$$x_0 = 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2n + 1$$

Berechnen Sie x_1, x_2, x_3, x_4.

Durch einfaches Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{0+1} = x_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1 \\
x_2 &= x_{1+1} = x_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 \\
x_3 &= x_{2+1} = x_2 + 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9 \\
x_4 &= x_{3+1} = x_3 + 2 \cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16
\end{aligned}$$

Geben Sie für x_n *eine geschlossene Formel an.*

Lösung

$$x_0 = 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2n + 1$$

Berechnen Sie x_1, x_2, x_3, x_4.

Durch einfaches Einsetzen erhält man:

$$x_1 = x_{0+1} = x_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$
$$x_2 = x_{1+1} = x_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$
$$x_3 = x_{2+1} = x_2 + 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$
$$x_4 = x_{3+1} = x_3 + 2 \cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

Geben Sie für x_n *eine geschlossene Formel an.*
Entweder: Betrachte Ergebnisse aus a) oder Erinnerung an binomische Formel.

$$x_n = n^2$$

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang

Für $n = 0$ gilt nach Definition

$$x_0 = 0 = 0^2$$

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang

Für $n = 0$ gilt nach Definition

$$x_0 = 0 = 0^2$$

Induktionsvoraussetzung

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang

Für $n = 0$ gilt nach Definition

$$x_0 = 0 = 0^2$$

Induktionsvoraussetzung

Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}^+$ gelte die Behauptung, also

$$x_n = n^2$$

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsschluss

Zu zeigen ist die Behauptung für $n + 1$, also

$$\text{zu zeigen: } x_{n+1} = (n+1)^2$$

Dabei dürfen wir nur Dinge verwenden, die wir schon wissen. Das ist zuerst einmal die Definition von x_n, also

$$x_{n+1} = x_n + 2 \cdot (n+1) + 1$$

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsschluss

$$x_{n+1} = x_n + 2n + 1$$

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsschluss

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2n + 1 \\ &\overset{IV}{=} n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Lösung

Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Induktionsschluss

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2n + 1 \\ &\overset{IV}{=} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Behauptung

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Behauptung

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Induktionsanfang

$n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$

Behauptung

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Induktionsanfang

$n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad \qquad \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Induktionsvorraussetzung

Induktionsvorraussetzung

Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Induktionsvorraussetzung

Für ein beliebig, aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Induktionsschluss

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 2\right)$$

Induktionsschluss

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(n^2+3n+2\right)$$

Induktionsschluss

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

Induktionsschluss

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

$$\stackrel{IV}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1$$

Induktionsschluss

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 2\right)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\ &\overset{IV}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(n^2 + n + 2n + 2\right)\end{aligned}$$

Induktionsschluss

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 2\right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&\overset{IV}{=} \frac{1}{2} n(n+1) + n + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + n + 2n + 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 2\right)
\end{aligned}$$

1. Übungsblätter
2. Wörter
3. Vollständige Induktion
4. **Schluss**

Was ihr nun wissen solltet

- Was ein Wort, Praefix, Suffix ist.
- Was das leere Wort ist.
- Wie eine vollständige Inudktion funktioniert.

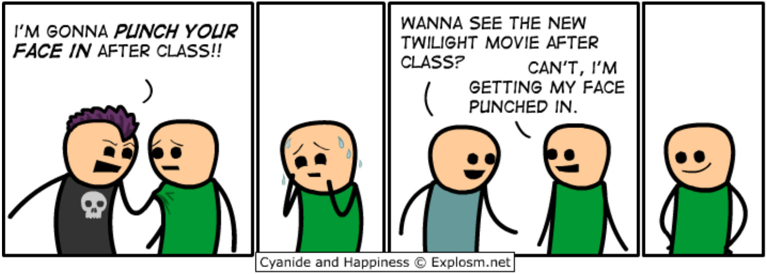

Abbildung: `http://explosm.net/comics/1867/`

Kontakt via E-Mail an Philipp Basler oder Nils Braun
gbi.ugroup.hostzi.com