Grundbegriffe der Informatik
WS 2011/12
Tutorium in der Woche 7
Gehalten in den Tutorien Nr. 10, Nr. 14

Philipp Basler (philippbasler@googlemail.com)
Nils Braun (area51.nils@googlemail.com)

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

5.12.2011 & 6.12.2011

Inhaltsverzeichnis

1 **Übungsblätter**

2 Graphen

3 Aufgaben

4 Schluss

Informationen zum nächsten Blatt

Blatt Nr. 7

Abgabetermin	9.12.2011 um 12:30 Uhr
Abgabeort	**Der** Briefkasten
Themen	Graphen, Graphen und Graphen
Maximale Punkte	20

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei

Quiz

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei
- $\mathrm{Num}_b(w)$ übersetzt das Wort w aus dem Zehner-System in die Basis b

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei
- $\mathrm{Num}_b(w)$ übersetzt das Wort w aus dem Zehner-System in die Basis b

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei
- $\mathrm{Num}_b(w)$ übersetzt das Wort w aus dem Zehner-System in die Basis b
- Für einen Homomorphismus gilt $h(xy) = h(x) \circ h(y)$

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei
- $\mathrm{Num}_b(w)$ übersetzt das Wort w aus dem Zehner-System in die Basis b
- Für einen Homomorphismus gilt $h(xy) = h(x) \circ h(y)$

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei
- $\mathrm{Num}_b(w)$ übersetzt das Wort w aus dem Zehner-System in die Basis b
- Für einen Homomorphismus gilt $h(xy) = h(x) \circ h(y)$
- $y = R(x)$ ist eine gute Notation für yRx

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei
- $\mathrm{Num}_b(w)$ übersetzt das Wort w aus dem Zehner-System in die Basis b
- Für einen Homomorphismus gilt $h(xy) = h(x) \circ h(y)$
- $y = R(x)$ ist eine gute Notation für yRx

Entschuldigung!

Definition

Zwei Relationen $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times L$ definieren die Relation des **Produktes von** R **und** S als

$$S \circ R = \{(x,z) \in M \times L \mid \exists y \in N \ : \ (x,y) \in R \text{ und } (y,z) \in S\}$$

Häufige Fehler auf dem letzten Übungsblatt

Blatt Nr. 6

- 1. Aufgabe Mit Begründung!
- 2. Aufgabe Immer die zwei kleinsten Elemente verbinden!
- 3. Aufgabe Blöcke sind zu einfach!
- 4. Aufgabe a) Was soll $y = (R \circ S)(x)$ bedeuten? Wir haben hier Relationen, nicht Funktionen! b) R^* war gefragt!

1. Übungsblätter
2. **Graphen**
3. Aufgaben
4. Schluss

Wie konstruiere ich eine LAN-Party?

Definition - gerichteter Graph

Definition

Ein Paar $G = (V, E)$ mit der nichtleeren, endlichen **Knotenmenge** V und der **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V\}$ nennen wir **gerichteten Graph**

Definition - gerichteter Graph

Definition

Ein Paar $G = (V, E)$ mit der nichtleeren, endlichen **Knotenmenge** V und der **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V\}$ nennen wir **gerichteten Graph**

V ist eine Menge von einzelnen Elementen. E enthält Paare von Elementen aus V.

Definition - gerichteter Graph

Definition

Ein Paar $G = (V, E)$ mit der nichtleeren, endlichen **Knotenmenge** V und der **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V\}$ nennen wir **gerichteten Graph**

V ist eine Menge von einzelnen Elementen. E enthält Paare von Elementen aus V. Üblich ist eine graphische Darstellung. Ein Graph kann verschiedene graphische Darstellungen haben. Manchmal setzt man auch Markierungen (Gewichtungen) an die Kanten.

Definition - ungerichteter Graph

Definition

Ein Paar $G = (V, E)$ mit der nichtleeren, endlichen **Knotenmenge** V und der **Kantenmenge** $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V \text{ und } y \in V\}$ nennen wir **ungerichteten Graph**

Definition - ungerichteter Graph

Definition

Ein Paar $G = (V, E)$ mit der nichtleeren, endlichen **Knotenmenge** V und der **Kantenmenge** $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V \text{ und } y \in V\}$ nennen wir **ungerichteten Graph**

E enthält jetzt Mengen von Elementen aus V! Keine Paare mehr.
Wie ist das bei Schlingen?

Definition - ungerichteter Graph

Definition

Ein Paar $G = (V, E)$ mit der nichtleeren, endlichen **Knotenmenge** V und der **Kantenmenge** $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V \text{ und } y \in V\}$ nennen wir **ungerichteten Graph**

E enthält jetzt Mengen von Elementen aus V! Keine Paare mehr.
Wie ist das bei Schlingen? $\{x, y\} = \{x\}$

Schlingen

Definition

Eine Kante mit identischen Start- und Endpunkt nennt man **Schlinge**.

Graphen ohne Schlingen nennt man schlingenfrei.

Beispiel

Wir betrachten den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit den Knoten

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

und der Kantenmenge

$$E = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 5)\}$$

Beispiel

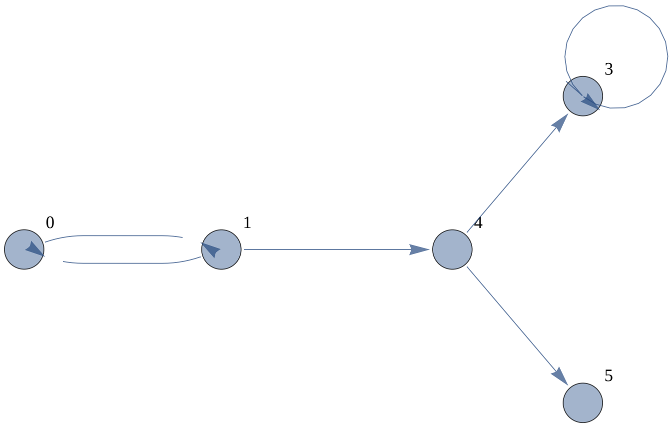
Wir betrachten den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit den Knoten

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

und der Kantenmenge

$$E = \{(0,1), (1,0), (1,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,5)\}$$

Weitere Zeichnungen an der Tafel!


0
1
4
3
5

Teilgraph

Definition

Ein **Teilgraph** T von G ist ein Graph $T = (V', E')$ bei dem Knoten- und Kantenmenge Teilmengen des Graphens G sind und deren Kanten nicht aus dem Teilgraph hinausführen. Also

$$V' \subseteq V \qquad E' \subseteq E \cap V' \times V'$$

Teilgraph

Definition

Ein **Teilgraph** T von G ist ein Graph $T = (V', E')$ bei dem Knoten- und Kantenmenge Teilmengen des Graphens G sind und deren Kanten nicht aus dem Teilgraph hinausführen. Also

$$V' \subseteq V \qquad E' \subseteq E \cap V' \times V'$$

Wie geht das bei ungerichteten Graphen?

Teilgraph

Definition

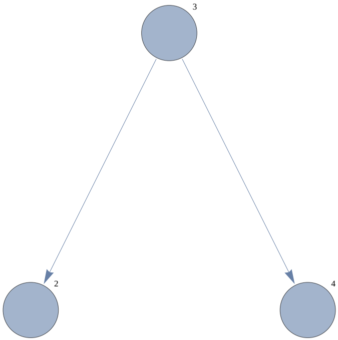
Ein **Teilgraph** T von G ist ein Graph $T = (V', E')$ bei dem Knoten- und Kantenmenge Teilmengen des Graphens G sind und deren Kanten nicht aus dem Teilgraph hinausführen. Also

$$V' \subseteq V \qquad E' \subseteq E \cap V' \times V'$$

Wie geht das bei ungerichteten Graphen? Was sind bei unserem Graph die Teilgraphen?

Gerichtete und ungerichtete Graphen

Gerichtete und ungerichtete Graphen



Grad

Definition

Der Eingangsgrad eines Knoten k ist die Anzahl der Knoten x, die mit einer Kante **zum** Knoten k verbunden sind. Also

$$d^+(k) = |\{x \mid (x, k) \in E\}|$$

Der Ausgangsgrad wird analog definiert.

Die Summe ist der Grad eines Knotens.

Grad

Definition

Der Eingangsgrad eines Knoten k ist die Anzahl der Knoten x, die mit einer Kante **zum** Knoten k verbunden sind. Also

$$d^+(k) = |\{x \mid (x, k) \in E\}|$$

Der Ausgangsgrad wird analog definiert.

Die Summe ist der Grad eines Knotens. Beachte: bei ungerichteten Graphen

Definition

Definition

Ein **Pfad** ist ein möglicher Weg über Knoten und Kanten im Graphen. Also eine nichtleere Liste

$$p = (v_0, v_1, \dots, v_n) \qquad (v_i, v_{i+1}) \in E$$

Die Länge eines Pfades ist die Anzahl der Kanten (!)

Wann ist ein Pfade $p = (v_0, \ldots, v_n)$

Wann ist ein Pfade $p = (v_0, \ldots, v_n)$

geschlossen Wenn $v_0 = v_n$ gilt (dann heißt er auch Zyklus)

Wann ist ein Pfade $p = (v_0, \ldots, v_n)$

geschlossen Wenn $v_0 = v_n$ gilt (dann heißt er auch Zyklus)

wiederholungsfrei Wenn alle Knoten paarweise verschieden sind

Wann ist ein Pfade $p = (v_0, \ldots, v_n)$

geschlossen Wenn $v_0 = v_n$ gilt (dann heißt er auch Zyklus)

wiederholungsfrei Wenn alle Knoten paarweise verschieden sind
Bis auf den ersten und letzten Knoten

Wann ist ein Pfade $p = (v_0, \ldots, v_n)$

geschlossen Wenn $v_0 = v_n$ gilt (dann heißt er auch Zyklus)

wiederholungsfrei Wenn alle Knoten paarweise verschieden sind
Bis auf den ersten und letzten Knoten

ein einfacher Zyklus wenn er geschlossen und wiederholungsfrei ist

Was sind in unserem Graph mögliche Pfade?

Wenn ein Graph n Knoten hat, dann kann er maximal x Kanten haben:

Wenn ein Graph n Knoten hat, dann kann er maximal x Kanten haben:

Wenn er gerichtet und schlingenfrei ist? $n \cdot (n-1) = n^2 - n$

Wenn ein Graph n Knoten hat, dann kann er maximal x Kanten haben:

Wenn er gerichtet und schlingenfrei ist? $n \cdot (n-1) = n^2 - n$

Wenn er nur gerichtet ist? n^2

Wenn ein Graph n Knoten hat, dann kann er maximal x Kanten haben:

Wenn er gerichtet und schlingenfrei ist? $n \cdot (n-1) = n^2 - n$

Wenn er nur gerichtet ist? n^2

Wenn er ungerichtet ist? $n(n-1)/2$ ohne Schlingen und
$n(n+1)/2$ mit Schlingen

Einteilung

Was wünsche ich mir für meine LAN-Party?

- streng zusammenhängend: Für jedes Knotenpaar gibt es einen Pfad.

Einteilung

Was wünsche ich mir für meine LAN-Party?

- streng zusammenhängend: Für jedes Knotenpaar gibt es einen Pfad. zB. Straßennetz
- Baumstruktur: Es gibt einen Knoten (Wurzel) von dem es **genau einen** Pfad zu jedem Knoten gibt
- Optimierung und Gewichtung: Nur wenige Kabel und trotzdem kurze Entfernungen

Einteilung

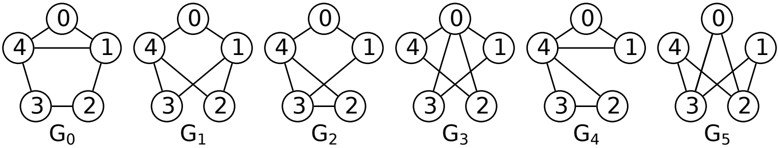
Was wünsche ich mir für meine LAN-Party?

- streng zusammenhängend: Für jedes Knotenpaar gibt es einen Pfad. zB. Straßennetz
- Baumstruktur: Es gibt einen Knoten (Wurzel) von dem es **genau einen** Pfad zu jedem Knoten gibt
- Optimierung und Gewichtung: Nur wenige Kabel und trotzdem kurze Entfernungen

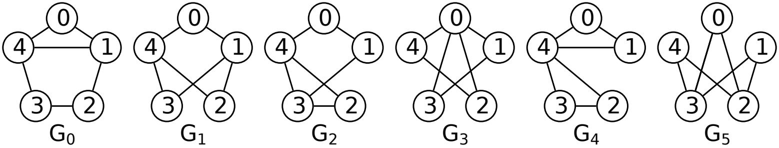
Die Definitionen aus dem gerichteten Fall übertragen sich auf den ungerichteten Fall!

Aufgabe (WS 2010)

Für welche der folgenden sechs Graphen gibt es einen Isomorphismus zu einem der anderen fünf Graphen? Geben Sie jeweils den zugehörigen Isomorphismus an.



Lösung



G_0 :	0	1	2	3	4
G_2 :	2	3	1	0	4
G_3 :	0	1	2	3	4
G_4 :	4	0	2	1	3
G_1 :	0	1	2	3	4
G_5 :	0	2	1	4	3

Wenn $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph ist, dann ist E eine binäre Relation. Ist sie symmetrisch, transitiv, reflexiv? Was bedeutet das? Was ist E^i? Was ist E^*? Was heißt $E^* = V \times V$?

Wenn $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph ist, dann ist E eine binäre Relation. Ist sie symmetrisch, transitiv, reflexiv? Was bedeutet das? Was ist E^i? Was ist E^*? Was heißt $E^* = V \times V$? Zeichnung an der Tafel!

Aufgabe (WS 2008) ★★☆☆☆

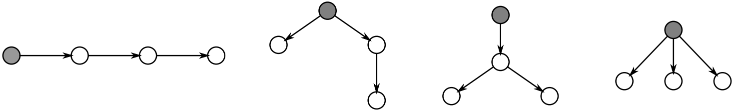
- Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
- Zeichnen Sie alle möglichen ungerichteten Bäume mit genau fünf Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

Lösung

Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

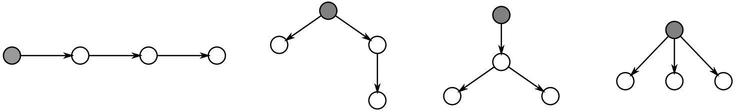
Lösung

Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.



Lösung

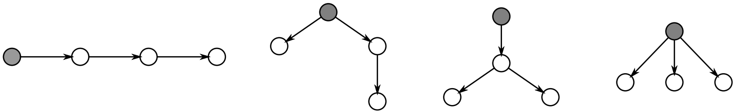
Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.



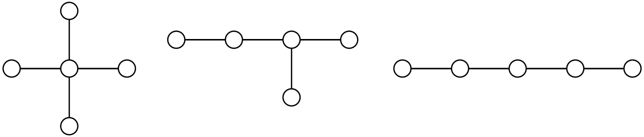
Zeichnen Sie alle möglichen ungerichteten Bäume mit genau fünf Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

Lösung

Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.



Zeichnen Sie alle möglichen ungerichteten Bäume mit genau fünf Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.



Aufgabe (WS 2009) ★★★★☆

Eine Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn sie eine positive ganze Zahl ist und genau zwei Teiler hat, nämlich 1 und n. Insbesondere ist 1 keine Primzahl.
Für $n \in \mathbb{N}^+$ sei der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ gegeben durch

$$V_n = \{m \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ teilt } n\}$$

$$E_n = \{(k, m) \in V_n \times V_n \mid k \text{ teilt } m \text{ und } m/k \text{ ist eine Primzahl}\}$$

- Zeichnen Sie G_{12} , G_{16} und G_{30}.
- Zeigen Sie:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}^+ : n \text{ teilt } m \implies G_n \text{ ist Teilgraph von } G_m$$

.

Lösung

$$V_n = \{m \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ teilt } n\}$$

$$E_n = \{(k, m) \in V_n \times V_n \mid k \text{ teilt } m \text{ und } m/k \text{ ist eine Primzahl}\}$$

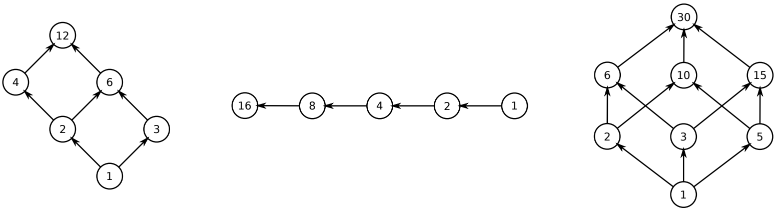
Zeichnen Sie G_{12} , G_{16} und G_{30}.

Lösung

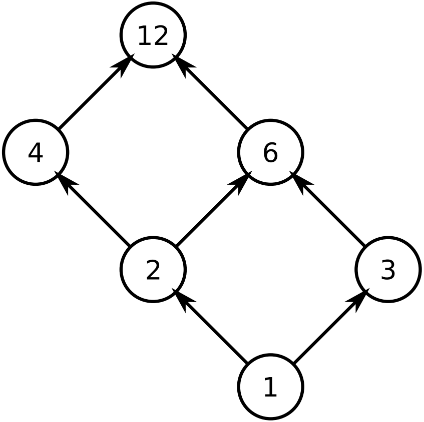
$$V_n = \{m \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ teilt } n\}$$

$$E_n = \{(k, m) \in V_n \times V_n \mid k \text{ teilt } m \text{ und } m/k \text{ ist eine Primzahl}\}$$

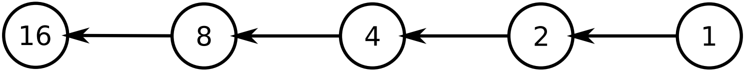
Zeichnen Sie G_{12} , G_{16} und G_{30}.



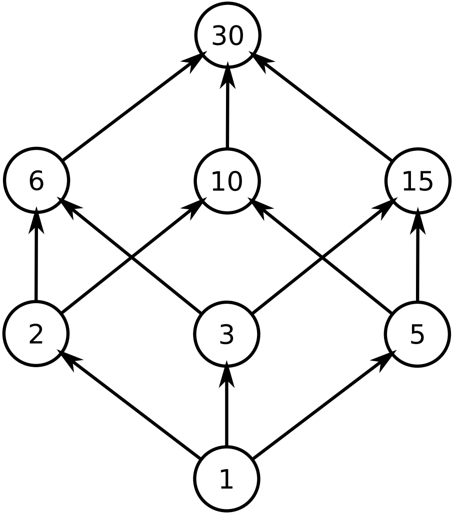
Lösung G_{12}



Lösung G_{16}



Lösung G_{30}



Lösung

Zeigen Sie:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}^+ : n \text{ teilt } m \implies G_n \text{ ist Teilgraph von } G_m$$

Lösung

Zeigen Sie:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}^+ : n \text{ teilt } m \implies G_n \text{ ist Teilgraph von } G_m$$

Gelte also n teilt m. Zu zeigen sind zwei Dinge:

- $V_n \subseteq V_m$
- $E_n \subseteq E_m \cap V_n \times V_n$

Lösung

Zuerst $V_n \subseteq V_m$.

Lösung

Zuerst $V_n \subseteq V_m$.

Sei $v \in V_n$ beliebig. Nach Definition gilt: v teilt n. Da n aber m teilt, muss v auch m teilen, liegt also in V_m. Also gilt

$$V_n \subseteq V_m$$

Lösung

Zuerst $V_n \subseteq V_m$.

Sei $v \in V_n$ beliebig. Nach Definition gilt: v teilt n. Da n aber m teilt, muss v auch m teilen, liegt also in V_m. Also gilt

$$V_n \subseteq V_m$$

Jetzt $E_n \subseteq E_m \cap V_n \times V_n$.

Lösung

Zuerst $V_n \subseteq V_m$.

Sei $v \in V_n$ beliebig. Nach Definition gilt: v teilt n. Da n aber m teilt, muss v auch m teilen, liegt also in V_m. Also gilt

$$V_n \subseteq V_m$$

Jetzt $E_n \subseteq E_m \cap V_n \times V_n$.

Sei p eine Kante mit $p = (x, y) \in E_n$. Wir haben gezeigt, dass dann $x, y \in V_m$ gilt. Außerdem gilt nach der Definition von E_n:

$$x \text{ teilt } y \text{ und } y/x \text{ ist eine Primzahl}$$

Somit ist p auch in E_m und es gilt

$$E_n \subseteq E_m$$

.

Aufgabe (WS 2010) ★☆☆☆☆

Sei $T_1 = (V_1, E_1)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_1,
$T_2 = (V_2, E_2)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_2, und es gelte
$V_1 \cap V_2 = \{\}$. Sei $r \notin V_1 \cup V_2$.
Zeigen Sie:

$$T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup r, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$$

ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.

Lösung

Zeigen Sie:

$$T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup r, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$$

ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.

Lösung

Zeigen Sie:

$$T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup r, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$$

ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.

Zwei Dinge sind zu zeigen:

- Zu jedem $v \in V_1 \cup V_2 \cup r$ gibt es einen Pfad von r aus

Lösung

Zeigen Sie:

$$T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup r, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$$

ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.

Zwei Dinge sind zu zeigen:

- Zu jedem $v \in V_1 \cup V_2 \cup r$ gibt es einen Pfad von r aus
- Dieser Pfad ist eindeutig.

Lösung

Wir zeigen zuerst, dass es von r zu jedem Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad gibt.

Lösung

Wir zeigen zuerst, dass es von r zu jedem Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad gibt.

- Es gibt offensichtlich einen Pfad (der Länge 0) von r nach r.

Lösung

Wir zeigen zuerst, dass es von r zu jedem Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad gibt.

- Es gibt offensichtlich einen Pfad (der Länge 0) von r nach r.
- Sei $v \in V_1$. Dann gibt es nach Definition einen Pfad von r_1 nach v über den Baum T_1 und dessen Kanten E_1. Da in $T_1 \circ_r T_2$ auch der Pfad r nach r_1 liegt, gibt es also einen Pfad von r nach v in $T_1 \circ_r T_2$.

Lösung

Wir zeigen zuerst, dass es von r zu jedem Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad gibt.

- Es gibt offensichtlich einen Pfad (der Länge 0) von r nach r.
- Sei $v \in V_1$. Dann gibt es nach Definition einen Pfad von r_1 nach v über den Baum T_1 und dessen Kanten E_1. Da in $T_1 \circ_r T_2$ auch der Pfad r nach r_1 liegt, gibt es also einen Pfad von r nach v in $T_1 \circ_r T_2$.
- Analog zu $v \in V_2$.

Lösung

Wir zeigen zuerst, dass es von r zu jedem Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad gibt.

- Es gibt offensichtlich einen Pfad (der Länge 0) von r nach r.
- Sei $v \in V_1$. Dann gibt es nach Definition einen Pfad von r_1 nach v über den Baum T_1 und dessen Kanten E_1. Da in $T_1 \circ_r T_2$ auch der Pfad r nach r_1 liegt, gibt es also einen Pfad von r nach v in $T_1 \circ_r T_2$.
- Analog zu $v \in V_2$.

Somit gibt es für alle Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad von r nach v.

Lösung

Wir zeigen nun noch, dass es für keinen Knoten zwei verschiedenen Pfade von r nach v gibt.

Lösung

Wir zeigen nun noch, dass es für keinen Knoten zwei verschiedenen Pfade von r nach v gibt.

Für $v = r$ gibt es offensichtlich keine zwei verschiedenen Pfade.

Lösung

Wir zeigen nun noch, dass es für keinen Knoten zwei verschiedenen Pfade von r nach v gibt.

Für $v = r$ gibt es offensichtlich keine zwei verschiedenen Pfade. Sei also exemplarisch $v \in V_1$. Da $V_1 \cap V_2 = \{\}$, sind von r_2 nur Elemente aus V_2 zu erreichen. Somit muss ein Pfad von r nach v über r_1 gehen (weil von r_2 kein Pfad zurück führt).

Lösung

Wir zeigen nun noch, dass es für keinen Knoten zwei verschiedenen Pfade von r nach v gibt.

Für $v = r$ gibt es offensichtlich keine zwei verschiedenen Pfade. Sei also exemplarisch $v \in V_1$. Da $V_1 \cap V_2 = \{\}$, sind von r_2 nur Elemente aus V_2 zu erreichen. Somit muss ein Pfad von r nach v über r_1 gehen (weil von r_2 kein Pfad zurück führt). Da T_1 aber ein Baum ist, ist der Pfad von r_1 nach v eindeutig. Der Pfad von r nach r_1 ebenso.

Lösung

Wir zeigen nun noch, dass es für keinen Knoten zwei verschiedenen Pfade von r nach v gibt.

Für $v = r$ gibt es offensichtlich keine zwei verschiedenen Pfade. Sei also exemplarisch $v \in V_1$. Da $V_1 \cap V_2 = \{\}$, sind von r_2 nur Elemente aus V_2 zu erreichen. Somit muss ein Pfad von r nach v über r_1 gehen (weil von r_2 kein Pfad zurück führt). Da T_1 aber ein Baum ist, ist der Pfad von r_1 nach v eindeutig. Der Pfad von r nach r_1 ebenso. Also ist der Pfad von r nach v auch eindeutig. Analog zu $v \in V_2$.

Was ihr nun wissen solltet

- Was die ganzen Begriffe bedeuten
- Wie man Graphen malt
- Wie man Graphen allgemein betrachtet

Abbildung: `http://www.xkcd.com`

Kontakt via E-Mail an Philipp Basler oder Nils Braun
gbi.ugroup.hostzi.com

Alt.text

Every time you email a file to yourself so you can pull it up on your friend's laptop, Tim Berners-Lee sheds a single tear.