GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 14

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 7. Februar 2013

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

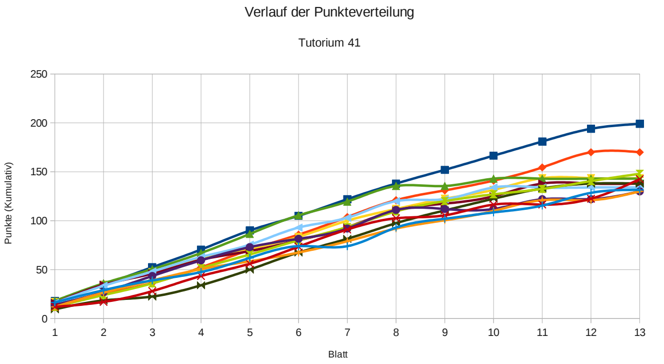
Statistiken

Die folgenden Grafiken beziehen sich

- bei den Übungsblättern auf diejenigen, die den Übungsschein erhalten haben und
- bei der Übungsklausur auf diejenigen, die abgegeben haben.

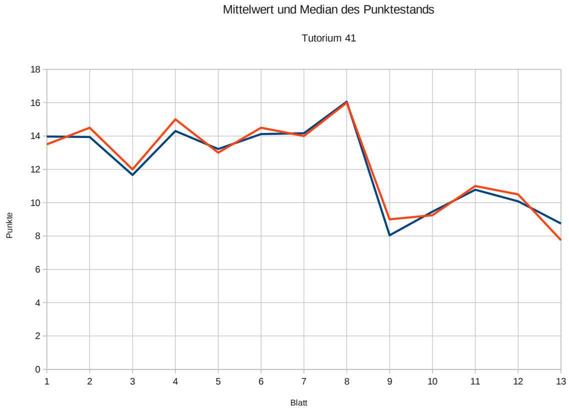
Verlauf des Punktestands

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Verlauf des Punktestands

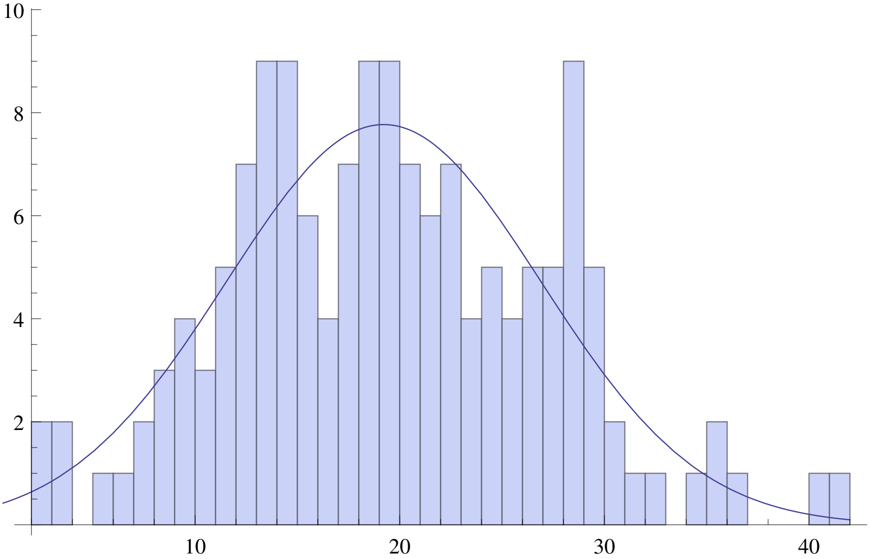
Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



blau: Mittelwert, rot: Median

Punkteverteilung in der Probleklausur

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden. Nein.
- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum? Siehe Halteproblem.
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$? Ja.
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

Wiederholung - Quiz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Warum?
- Gilt $\mathrm{P} \subset \mathrm{PSPACE}$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L, die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen? Nein.

Überblick

Verträglichkeit

Definition: Verträglichkeit

Es sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M und $f : M \to M$ eine Abbildung. Man sagt, dass $\equiv$ mit f verträglich ist, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \Longrightarrow f(x_1) \equiv f(x_2)$$

Was bedeuted das anschaulich? Fallen euch Beispiele ein?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel modulo n

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \tag{1}$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \tag{2}$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \tag{3}$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \tag{4}$$

Beweis.

Beispiel modulo n

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \tag{1}$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \tag{2}$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \tag{3}$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \tag{4}$$

Beweis.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel modulo n

Karlsruher Institut für Technologie

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \tag{1}$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \tag{2}$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \tag{3}$$
$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \tag{4}$$

Beweis.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel modulo n

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \tag{1}$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \tag{2}$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \tag{3}$$
$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \tag{4}$$

Beweis.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beweis von (3)

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)\,n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod n$$

Beweis von (3)

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)\, n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beweis von (3)

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)\, n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Beweis von (4)

Löse Gleichung (1) nach x_1 auf und Gleichung (2) nach y_1 und multipliziere beide Seiten:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot y_1 &= (x_2 + kn) \cdot (y_2 + mn) \\ &= x_2 \cdot y_2 + n\,(mx_2 + ky_2 + kmn) \\ x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 &= n\,(mx_2 + ky_2 + kmn) \\ \iff x_1 \cdot y_1 &\equiv x_2 \cdot y_2 \pmod n \end{aligned}$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Kongruenz

Damit können wir auch “nur mit Repräsentanten” der Äquivalenzklasse rechnen:

$$[2] + [3] = [2 + 3] = [5] = [0]$$
$$[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [1]$$

Nennt weitere Beispiele für die Äquivalenzrelation Kongruent Modulo *i*, wobei sich *i* bei jedem von euch erhöht.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Verträglichkeit und Kongruenzrelationen

Karlsruher Institut für Technologie

Die Operationen $+$ und $\cdot$ sind also verträglich mit unserer Relation “kongruent modulo n”.

Definition: Kongruenzrelation

Eine Funktion, die mit allen gerade interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträgich ist, nennt man auch **Kongruenzrelation**.

Kongruenz und die Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei die Funktion:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Warum ist die Nerode-Äquivalenz mit dieser Abbildung verträglich?

Kongruenz und die Nerode-Äquivalenz

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei die Funktion:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Warum ist die Nerode-Äquivalenz mit dieser Abbildung verträglich?
Gegeben sei $w_1 \equiv_L w_2$, das heißt nach Definition der Nerode-Äquivalenz:

$$\begin{aligned} w_1 w \in L &\Leftrightarrow w_2 w \in L \\ (w_1 x)\, v \in L &\Leftrightarrow w_1 (xv) \in L \\ &\Leftrightarrow w_2 (xv) \in L \text{ weil } w_1 \equiv_L w_2 \\ &\Leftrightarrow (w_2 x)\, v \in L \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Nerode-Äquivalenz mit der Konkatenation verträglich ist.

Induzierte Operationen

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit $\equiv_L$ (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?
Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)
Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] | w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Induzierte Operationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit $\equiv_L$ (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?

Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)

Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] | w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Induzierte Operationen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit $\equiv_L$ (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?
Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)
Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] | w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Induzierte Operationen

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit $\equiv_L$ (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?
Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)
Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] | w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Überblick

1. Statistik
2. Wiederholung
3. Kongruenzrelationen
4. Halbordnungen
5. Hasse-Diagramm

Antisymmetrie

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Antisymmetrie

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$xRy \land yRx \Rightarrow x = y$$

Definition: Halbordnung

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Halbordnung**, wenn sie

- reflexiv,
- antisymmetrisch und
- und transitiv

ist.

Antisymmetrie

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Antisymmetrie

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

Definition: Halbordnung

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Halbordnung**, wenn sie

- reflexiv,
- antisymmetrisch und
- und transitiv

ist.

Beispiel: Halbordnung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben seien $v, w \in A^*$.

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

Was bedeuted das? Wie kann gezeigt werden, dass das eine Halbordnung ist?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Halbordnung

Gegeben seien $v, w \in A^*$.

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \Longleftrightarrow \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

Was bedeuted das? Wie kann gezeigt werden, dass das eine Halbordnung ist? Nachzuweisen sind:

- Reflexivität
- Antisymmetrie
- Transitivität

Halbordnung $\sqsubseteq_p$ Beweis 1: Reflexivität

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

$$v \sqsubseteq_p v \iff \exists u \in A^* : vu = v \Rightarrow u = \varepsilon$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Halbordnung $\sqsubseteq_p$ Beweis 2: Antisymmetrie

$$v \sqsubseteq_p w \wedge w \sqsubseteq_p v$$
$$\Longleftrightarrow \exists u_1 \in A^* : vu_1 = w \wedge \exists u_2 \in A^* : wu_2 = v$$

$$\Rightarrow wu_1 u_2 = w$$
$$\Rightarrow u_1 u_2 = \varepsilon = u_1 = u_2$$
$$\Rightarrow v = w$$

Halbordnung $\sqsubseteq_p$ Beweis 3: Transitivität

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

$$
\begin{aligned}
& v \sqsubseteq_p w \land w \sqsubseteq_p x \\
\iff & \exists u_1 \in A^* : vu_1 = w \land \exists u_2 \in A^* : wu_2 = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow vu_1 u_2 = x \\
& \overset{y=u_1u_2}{\iff} \exists y \in A^* : vy = x \\
& \iff v \subseteq_p x
\end{aligned}
$$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

Ist dies eine korrekte Halbordnung auf A^*?

$$w_1 \sqsubseteq w_2 \iff |w_1| \leq |w_2|$$

Test:

- Reflexiv?
- Transitiv?
- Antisymmetrisch?

Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Ist dies eine korrekte Halbordnung auf A^*?

$$w_1 \sqsubseteq w_2 \iff |w_1| \leq |w_2|$$

Test:

- Reflexiv? Ja.
- Transitiv?
- Antisymmetrisch?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

Ist dies eine korrekte Halbordnung auf A^*?

$$w_1 \sqsubseteq w_2 \iff |w_1| \leq |w_2|$$

Test:

- Reflexiv? Ja.
- Transitiv? Ja.
- Antisymmetrisch?

Beispiel

Ist dies eine korrekte Halbordnung auf A^*?

$$w_1 \sqsubseteq w_2 \iff |w_1| \leq |w_2|$$

Test:

- Reflexiv? Ja.
- Transitiv? Ja.
- Antisymmetrisch? Nein.

Übung: Beweise

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Zeigen Sie, dass $\leq$ und $\subseteq$ Halbordnungen sind.
Tipp: Diese Definitionen könnten helfen:

$$a \leq b \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b$$
$$A \subseteq B \iff (A \subset B) \vee (A = B)$$

An der Tafel.

Ordnungen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Ordnung

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine (totale) Ordnung, wenn R eine Halbordnung ist und außerdem gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$$

Anschaulich: Wenn man sich zwei beliebige Elemente aus M auswählt, stehen diese in Relation zueinander. Mehr zum Thema im Skript.

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Potenzmenge

Definition: Potenzmenge

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von der Grundmenge X.

$$\mathcal{P}(X) = \{U | U \subseteq X\}$$

Gelegentlich wird auch geschrieben $\mathcal{P}(X) = 2^X$.

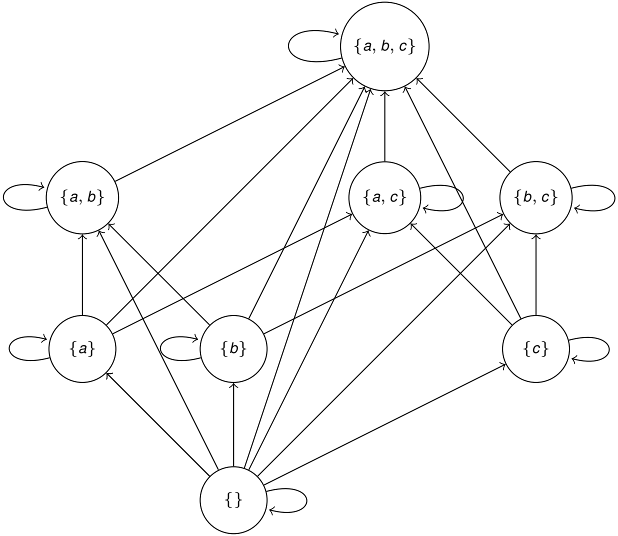
Die Potenzmenge besitzt die Mächtigkeit (Anzahl der Elemente):

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Beispiel:

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Halbordnung $\subseteq$ auf einer Potenzmenge $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$



Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Hasse-Diagramm

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definitoin: Hasse-Diagramm

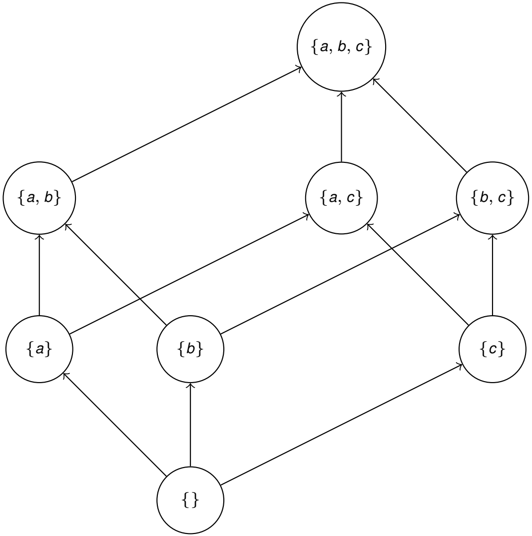
Ein Diagramm einer Halbordnung $\sqsubseteq$ auf einer Menge M heißt **Hasse-Diagramm**, wenn es im Diagramm eine Kante von a nach b ($a, b \in M$), wenn gilt

$$\nexists c \in M : a \sqsubseteq c \sqsubseteq b$$
$$A \neq b$$

Anschaulich gesprochen, werden nur die “notwendigen” Kanten eingezeichnet. Schlaufen und Kanten, die sich durch Transitivität ergeben, werden weggelassen.

Beispiel: Hasse-Diagramm

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



Extreme Elemente im Hasse-Diagram

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: extremale Elemente im Hasse-Diagram

Es sei $(M, \sqsubseteq)$ eine halbgeordnete Menge und $T \subseteq M$. Ein Element $x \in T$ heißt

- minimales Element von T, wenn es kein $y \in T, y \neq x$ gibt, mit $y \sqsubseteq x$
- maximales Element von T, wenn es kein $y \in T, y \neq x$ gibt, mit $x \sqsubseteq y$
- größtes Element von T, wenn für alle $y \in T$ gilt $y \sqsubseteq x$
- kleinstes Element von T, wenn für alle $y \in T$ gilt $x \sqsubseteq y$

Eine Teilmenge T kann mehrere minimale (bzw. maximale) Elemente besitzen, aber nur ein kleinstes (bzw. größtes) Element.

Klausuraufgabe: Winter 2010/2011

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Geben Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer dreielementigen Menge an, die genau zwei maximale und zwei minimale Elemente besitzt.

Klausuraufgabe: Winter 2010/2011

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Geben Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer dreielementigen Menge an, die genau zwei maximale und zwei minimale Elemente besitzt.

Dreielementige Menge: $\{1, 2, 3\}$

Klausuraufgabe: Winter 2010/2011

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Geben Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer dreielementigen Menge an, die genau zwei maximale und zwei minimale Elemente besitzt.

Dreielementige Menge: $\{1, 2, 3\}$