Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 7

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 6. Dezember 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Allgemeine Fehler, Fragen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Allgemeines

- Bei der vollständige Induktion können noch viele Punkte geholt werden
- Beweis zu Injektiv und Surjektiv mittels Definitionen

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei.
- Was macht $\mathrm{Num}_b(w)$?
- Gilt für einen Homomorphismus $h(xy) = h(x) \circ h(y)$?
- $(y, x) \in R$ kann als yRx geschrieben werden.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei. Wahr
- Was macht $\mathrm{Num}_b(w)$?
- Gilt für einen Homomorphismus $h(xy) = h(x) \circ h(y)$?
- $(y, x) \in R$ kann als yRx geschrieben werden.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei. Wahr
- Was macht $\mathrm{Num}_b(w)$?
- Gilt für einen Homomorphismus $h(xy) = h(x) \circ h(y)$? Wahr
- $(y, x) \in R$ kann als yRx geschrieben werden.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Die Huffman-Codierung ist präfixfrei. Wahr
- Was macht $\mathrm{Num}_b(w)$?
- Gilt für einen Homomorphismus $h(xy) = h(x) \circ h(y)$? Wahr
- $(y, x) \in R$ kann als yRx geschrieben werden.Wahr.

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Graphen: Definition

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gerichteter Graph

Ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der nichtleeren *Knotenmenge* V und
- der *Kantenmenge* $E \subseteq \{V \times V\}$

nennen wir *gerichteten Graph*.

Ungerichteter Graph

Ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der nichtleeren *Knotenmenge* V und
- der *Kantenmenge* $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V, y \in V\}$

nennen wir *ungerichteten Graph*.

Wo ist der Unterschied?

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Graphen: Definition

Gerichteter Graph

Ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der nichtleeren *Knotenmenge* V und
- der *Kantenmenge* $E \subseteq \{V \times V\}$

nennen wir *gerichteten Graph*.

Ungerichteter Graph

Ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der nichtleeren *Knotenmenge* V und
- der *Kantenmenge* $E \subseteq \left\{\{x, y\} \,\middle|\, x \in V, y \in V\right\}$

nennen wir *ungerichteten Graph*.

Wo ist der Unterschied?

Graphen: Definition

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gerichteter Graph

Ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der nichtleeren *Knotenmenge* V und
- der *Kantenmenge* $E \subseteq \{V \times V\}$

nennen wir *gerichteten Graph*.

Ungerichteter Graph

Ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der nichtleeren *Knotenmenge* V und
- der *Kantenmenge* $E \subseteq \left\{\{x, y\} \,\middle|\, x \in V, y \in V\right\}$

nennen wir *ungerichteten Graph*.

Wo ist der Unterschied?

Schlingen

Definition

Eine Kante mit identischem Start- und Endpunkt nennt man *Schlinge*.

Ein Graph ohne Schlinge ist *schlingenfrei*.

Teilgraph

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Ein *Teilgraph* T von G ist ein Graph $T = (V', E')$, bei dem

- Knoten- und Kantenmenge Teilmengen des Graphen G sind und
- deren Kanten nicht aus dem Teilgraph hinausführen.

Formell (hier für gerichtete Graphen):

$$V' \subseteq V$$
$$E' \subseteq E \cap V' \times V'$$

Teilgraph

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Ein *Teilgraph* T von G ist ein Graph $T = (V', E')$, bei dem

- Knoten- und Kantenmenge Teilmengen des Graphen G sind und
- deren Kanten nicht aus dem Teilgraph hinausführen.

Formell (hier für gerichtete Graphen):

$$V' \subseteq V$$
$$E' \subseteq E \cap V' \times V'$$

Grad

Definition

Der Eingangsgrad eines Knoten k ist die Anzahl der Knoten x, di emit der Kante zum Knoten k verbunden sind. Also

$$d^{+}(k) = \left| \{x \mid (x, k) \in E\} \right|$$

Der Ausgangsgrad wird analog definiert.

Analog für Ausgangsgraphen. Als "Grad" wird die Summe von Eingangs- und Ausgangsknoten bezeichnet.

Pfad

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Ein *Pfad* ist ein möglicher Weg über Knoten und Kanten im Graphen.
Formal: eine nichtleere Liste

$$P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$$
$$\forall v_i \in P : (v_i, v_{i+1}) \in E$$

Der Pfad hat als Länge die Anzahl seiner Kanten.

Eigenschaften von Pfaden

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- *Geschlossen:* Wenn $v_0 = v_n$ gilt (auch "Zyklus")
- *Wiederholungsfrei:* Wenn alle Knoten paarweise verschieden sind (außer erster und letzter Knoten)
- *Einfacher Zyklus:* Wenn er geschlossen und wiederholungsfrei ist.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Wieviel Kanten kann ein gerichteter Graph maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
- Wieviele kanten kann ein gerichteter Graph maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Wieviel Kanten kann ein gerichteter Graph maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?n^2
- Wieviele kanten kann ein gerichteter Graph maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Wieviel Kanten kann ein gerichteter Graph maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?n^2
- Wieviele kanten kann ein gerichteter Graph maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?n$(n-1)$

Eigenschaften von Graphen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Isomorphie

Ein Graph $G_1 = (V_1, e_1)$ heißt *isomorph* zu einem Graphen $G_2 = (V_2, E_s)$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

Und was heißt das?

Das ist eine Relation. Welche Eigenschaften hat sie?

Eigenschaften von Graphen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Isomorphie

Ein Graph $G_1 = (V_1, e_1)$ heißt *isomorph* zu einem Graphen $G_2 = (V_2, E_s)$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

Und was heißt das? Durch Umbenenung der Knoten.

Das ist eine Relation. Welche Eigenschaften hat sie?

Eigenschaften von Graphen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Isomorphie

Ein Graph $G_1 = (V_1, e_1)$ heißt *isomorph* zu einem Graphen $G_2 = (V_2, E_s)$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

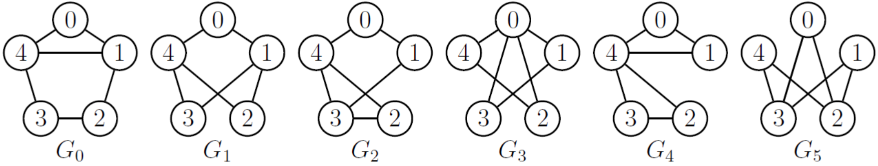
Und was heißt das? Durch Umbenenung der Knoten.
Das ist eine Relation. Welche Eigenschaften hat sie?

- Isomorphie ist reflexiv
- Isomorphie ist transitiv
- Isomorphie ist symmetrisch

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Quickie

Für welche der folgenden sechs Graphen gibt es einen Isomorphismus zu einem der anderen fünf Graphen? Geben Sie jeweils den zugehörigen Isomorphismus an.



Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Produkt von Kanten

Karlsruher Institut für Technologie

E sei die Kantenmenge eines Graphen $G = (V, E)$. Was ist $E \circ E$?

$$E^2 = E \circ E = \{(x,z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x,y) \in E \land (y,z) \in E\}$$

In der Menge E^2 sind also alle Pfade der Länge 2. Sonderfall E^0 - dort sind alle Schleifen. Es gilt:

Produkt von Kanten

Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.

Was ist E^*?

Produkt von Kanten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

E sei die Kantenmenge eines Graphen $G = (V, E)$. Was ist $E \circ E$?

$$E^2 = E \circ E = \{(x,z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x,y) \in E \wedge (y,z) \in E\}$$

In der Menge E^2 sind also alle Pfade der Länge 2. Sonderfall E^0 - dort sind alle Schleifen. Es gilt:

Produkt von Kanten

Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.

Was ist E^*?

Produkt von Kanten

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

E sei die Kantenmenge eines Graphen $G = (V, E)$. Was ist $E \circ E$?

$$E^2 = E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \big| \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

In der Menge E^2 sind also alle Pfade der Länge 2. Sonderfall E^0 - dort sind alle Schleifen. Es gilt:

Produkt von Kanten

Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.

Was ist E^*?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph maximal haben, wenn er Schlingen haben darf?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph maximal haben, wenn er schlingenfrei ist? $\frac{n(n-1)}{2}$
- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph maximal haben, wenn er Schlingen haben darf?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph maximal haben, wenn er schlingenfrei ist? $\frac{n(n-1)}{2}$
- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph maximal haben, wenn er Schlingen haben darf? $\frac{n(n+1)}{2}$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Winter 08/09

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

- Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
- Zeichnen Sie alle möglichen ungerichteten Bäume mit genau fünf Knoten, von denen keine zwei Isomorph sind.

Winter 08/09

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{0, 1\}^3$ und
$E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\}$.

1. Zeichnen Sie den Graphen
2. Geben Sie einen Zyklus in G an, der außer dem Anfangs- und Endknoten jeden Knoten von G genau einmal enthält.
3. Geben Sie einen geschlossenen Pfad in G an, der jede Kante von G genau einmal enthält.

Winter 10/11

Sei $T_1 = (V_1, E_1)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_1, $T_2 = (V_2, E_2)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_2 und es gelte $V_1 \cap V_2 = \{\}$. Sei $r \notin V_1 \cup V_2$. Zeigen Sie:

$$T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup r, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$$

ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.