Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 3

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 8. November 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Best of Fehler

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates $B(x, y)$ in Prädikatenlogik:
$B(x, y) \mathrel{\widehat{=}} y$ ist bester Freund von x.
M sei die Menge aller Menschen.

Lösung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Best of Fehler

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates $B(x, y)$ in Prädikatenlogik:
$B(x, y) \hat{=} y$ ist bester Freund von x.
M sei die Menge aller Menschen.

Lösung

$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)$?

Best of Fehler

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates $B(x, y)$ in Prädikatenlogik:
$B(x, y) \hat{=} y$ ist bester Freund von x.
M sei die Menge aller Menschen.

Lösung

$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)$!

Best of Fehler

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates $B(x, y)$ in Prädikatenlogik:
$B(x, y) \hat{=} y$ ist bester Freund von x.
M sei die Menge aller Menschen.

Lösung

$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)!$

$\forall x \in M : \exists y \in M : B(x, y)$

Best of Fehler

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates $B(x, y)$ in Prädikatenlogik:
$B(x, y) \mathrel{\widehat{=}} y$ ist bester Freund von x.
M sei die Menge aller Menschen.

Lösung

$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)!$

$\forall x \in M : \exists y \in M : B(x, y) \land \forall z \in M \setminus y : \neg B(x, z)$

Best of Fehler

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates $B(x, y)$ in Prädikatenlogik:
$B(x, y) \mathrel{\widehat{=}} y$ ist bester Freund von x.
M sei die Menge aller Menschen.

Lösung

$\forall x \in M : \exists_1 y \in M : B(x, y)!$

$\forall x \in M : \exists y \in M : B(x, y) \land \forall z \in M \backslash y : \neg B(x, z)$

Überblick

Quickies

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe 1

Was ist $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$?

Aufgabe 2

Frage: Was ist $M \cup \{\}$?

Aufgabe 3

Frage: Was ist $M \cap \{\}$?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 1

Was ist $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$?
Antwort: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Aufgabe 2

Frage: Was ist $M \cup \{\}$?

Aufgabe 3

Frage: Was ist $M \cap \{\}$?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 1

Was ist $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$?
Antwort: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Aufgabe 2

Frage: Was ist $M \cup \{\}$?
Antwort: M

Aufgabe 3

Frage: Was ist $M \cap \{\}$?

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 1

Was ist $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$?
Antwort: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Aufgabe 2

Frage: Was ist $M \cup \{\}$?
Antwort: M

Aufgabe 3

Frage: Was ist $M \cap \{\}$?
Antwort: $\{\}$.

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 4

Die Mengendifferenz: Was ist $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}$?

Aufgabe 5

Alles zusammen: Was ist $((\{1, 2, 3\} \cup \{2, a, b\}) \cap \{1, 2, a, b, ?\}) \setminus \{1, a\}$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Quickies

Aufgabe 4

Die Mengendifferenz: Was ist $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}$?
Antwort: $\{1\}$

Aufgabe 5

Alles zusammen: Was ist $((\{1, 2, 3\} \cup \{2, a, b\}) \cap \{1, 2, a, b, ?\}) \setminus \{1, a\}$

Quickies

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe 4

Die Mengendifferenz: Was ist $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}$?
Antwort: $\{1\}$

Aufgabe 5

Alles zusammen: Was ist $((\{1, 2, 3\} \cup \{2, a, b\}) \cap \{1, 2, a, b, ?\}) \setminus \{1, a\}$
Antwort: $\{2, b\}$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: formale Sprache

Eine *formale Sprache* (über einem Alphabet A) ist eine Teilmenge $L \subseteq A*$.

Vorsicht

$abb \neq \{abb\}$, aber das Wort *abb* ist in der Sprache $\{abb\}$.

Erklärung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Erklärung

L ist also eine Menge. Darin sind alle syntaktisch korrekten Gebilde enthalten.

Beispiel 1

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Schlüsselwörter in Java

Eine formale Sprache wäre etwa die Menge der Schlüsselwörter in der Programmiersprache Java:

Beispiele:

Größe:

Beispiel 1

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Schlüsselwörter in Java

Eine formale Sprache wäre etwa die Menge der Schlüsselwörter in der Programmiersprache Java:

Beispiele: $\{class, if, else, for, while, \ldots\}$

Größe:

Beispiel 1

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Schlüsselwörter in Java

Eine formale Sprache wäre etwa die Menge der Schlüsselwörter in der Programmiersprache Java:
Beispiele: $\{class, if, else, for, while, \dots\}$
Größe: Endlich

Beispiel 2

Beispiel:

Gesucht ist eine Sprache L über $A = \{a, b\}$, in denen kein Wort das Teilwort ab enthält.

Deklaration:

Alternativ:

Beispiel 2

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel:

Gesucht ist eine Sprache L über $A = \{a, b\}$, in denen kein Wort das Teilwort *ab* enthält.
Deklaration: $L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 abw_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$.
Alternativ:

Beispiel 2

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel:

Gesucht ist eine Sprache L über $A = \{a, b\}$, in denen kein Wort das Teilwort *ab* enthält.
Deklaration: $L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 abw_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$.
Alternativ: $L = \{w_1 w_2 | w_1 \in \{b\}^* \wedge w_2 \in \{a\}^*\}$.

Beispiel 3

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist $A = \{ \qquad \}$
- Die Sprache L sind alle Dezimalzahlen

Beispiel 3

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
- Die Sprache L sind alle Dezimalzahlen
- $\Rightarrow -22 \in L$

Beispiel 3

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
- Die Sprache L sind alle Dezimalzahlen
- $\Rightarrow -22 \in L$
- $\Rightarrow 22 - 0 - - - 3 \notin L$ (aber $\in A^*$!)

Beispiel 3

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Integer-Zahlen

- Das Alphabet ist $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$
- Die Sprache L sind alle Dezimalzahlen
- $\Rightarrow -22 \in L$
- $\Rightarrow 22 - 0 - - - 3 \notin L$ (aber $\in A^*$!)

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Produkt

Definition: Produkt

Seien L_1 und L_2 zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 | w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das Produkt der Sprachen L_1 und L_2.

Beispiel:

Wie vorhin ist die Sprache L über $A = \{a, b\}$ gesucht, wo nirgendwo das Teilwort *ab* vorkommt. Komfortable Prduktschreibweise:

Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Produkt

Seien L_1 und L_2 zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 | w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das Produkt der Sprachen L_1 und L_2.

Beispiel:

Wie vorhin ist die Sprache L über $A = \{a, b\}$ gesucht, wo nirgendwo das Teilwort *ab* vorkommt. Komfortable Prduktschreibweise: $L = \{b\}^* \{a\}^*$

Produkt

Beispiel: Produkt

Gesucht ist die Sprache der nichtleeren Wörter über dem Alphabet A.

Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel: Produkt

Gesucht ist die Sprache der nichtleeren Wörter über dem Alphabet A.
$L = A \cdot A^*$

Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Sind diese Wörter $\in L_1 \cdot L_2$?

- *ab*
- ϵ
- *bab*
- *aab*

Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Sind diese Wörter $\in L_1 \cdot L_2$?

- ab
- ϵ
- bab
- aab

Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Sind diese Wörter $\in L_1 \cdot L_2$?

- *ab*
- ϵ
- *bab*
- *aab*

Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Sind diese Wörter $\in L_1 \cdot L_2$?

- ab
- ϵ
- bab
- aab

Produkt

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 2: Produkt

Gegeben: Die Sprachen $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Sind diese Wörter $\in L_1 \cdot L_2$?

- ab
- ϵ
- bab
- aab

Potenzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Potenzen

L sei eine formale Sprache. Rekursiv lässt sich auch die Potenz davon definieren.

$$L^0 = \{\epsilon\}$$
$$L^{\mathrm{i}+1} = L^{\mathrm{i}} \cdot L$$

Potenzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 1: Potenzen

Es sei $L = \{a\}^* \{b\}^*$. Was ist dann in

- L^0
- L^1
- L^2

Potenzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 1: Potenzen

Es sei $L = \{a\}^* \{b\}^*$. Was ist dann in

- L^0
- L^1
- L^2

Potenzen

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 1: Potenzen

Es sei $L = \{a\}^* \{b\}^*$. Was ist dann in

- L^0
- L^1
- L^2

Konkatenationsabschluss

Definition: Konkatenationsabschluss

L sei eine formale Sprache. Dann ist der Konkatenationsabschluss:

$$L^* = \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{\infty} L^{\mathrm{i}}$$

Der ϵ-freie Konkatenationsabschluss ist:

$$L^+ = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} L^{\mathrm{i}}$$

Konkatenationsabschluss

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

ϵ-freier Konkatenationsabschluss

Falls $\epsilon \in L$, so enthält der ϵ-freie Konkatenationsabschluss auch ϵ.

Konkatenationsabschluss

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 1: Konkatenationsabschluss

Argumentiere, dass $L^* = \{a, b\}^*$ ist.

Beispiel 2: Mengenäquivalenz beweisen

Zeige, dass $L^* \cdot L = L^+$ (Tafel).

Konkatenationsabschluss

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel 1: Konkatenationsabschluss

Argumentiere, dass $L^* = \{a, b\}^*$ ist.

Beispiel 2: Mengenäquivalenz beweisen

Zeige, dass $L^* \cdot L = L^+$ (Tafel).

Beispiele

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiele

1. IP4-Adressen
2. Programmiersprache C
3. HTML
4. E-Mail (RFC 5322)

Wie es geht

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$

Wie es geht

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$

Wie es geht

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

1. Alle Wörter, die genau ein „b“ enthalten
2. Alphabet: $A = \{a, b\}$
3. $L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$ oder
4. $L = \{w_1 b w_2 | w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Übungsaufgabe

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Winter 2010/2011

Es sei $A = \{a, b\}$. Beschreiben Sie die folgenden formalen Sprachen mit den Symbolen $\{$, $\}$, a, b, ϵ, $\bigcup$, $*$, Komma, (,) und +:

1. die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort „ab“ enthalten
2. die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein „b“ ist
3. die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei „b“s hintereinander vorkommen

Übungsaufgabe

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Sommer 2009 (4 von 46 Punkten)

Gegeben seien diese formalen Sprachen:

$$L_1 = \left\{a^k b^m | k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \mod 2 = 0 \wedge m \mod 3 = 1\right\}$$
$$L_2 = \left\{b^k a^m | k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \mod 2 = 1 \wedge m \mod 3 = 0\right\}$$

Geben Sie eine äquivalente Menge in Mengenschreibweise an für:

1. $L = L_1$
2. $L = L_1 \cdot L_2$
3. $L = L_1 \cap L_2$