Grundbegriffe der Informatik
WS 2011/12
Tutorium in der Woche 14
Gehalten in den Tutorien Nr. 10, Nr. 14

Philipp Basler (philippbasler@googlemail.com)
Nils Braun (area51.nils@googlemail.com)

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

06.02.2012 & 07.02.2012

Inhaltsverzeichnis

Top 5 Übungsblätter

Tut Phil

1. 221.5
2. 170
3. 166
4. 164.5
5. 157.5

Mittelwert der regelmäßig abgegebenen : 148.675

Tut Nils

1. 243.5
2. 242.5
3. 241
4. 234
5. 225.5

Mittelwert der regelmäßig abgegebenen : 179.46

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Es gilt $\mathbf{P} \subset \mathbf{PSPACE}$

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Es gilt $\mathbf{P} \subset \mathbf{PSPACE}$

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Es gilt $\mathbf{P} \subset \mathbf{PSPACE}$
- Es gibt einen endlichen Akzeptor, der weniger Zustände hat als die entsprechende Anzahl von Nerode-Äquivalenzklassen.

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Es gilt $\mathbf{P} \subset \mathbf{PSPACE}$
- Es gibt einen endlichen Akzeptor, der weniger Zustände hat als die entsprechende Anzahl von Nerode-Äquivalenzklassen.

Betrachten wir die Operation **mod** $n, n \in \mathbb{N}$. Betrachte

$$x_1 \equiv x_2 \iff x_1 - x_2 = kn$$
$$y_1 \equiv y_2 \iff y_1 - y_2 = mn$$

Betrachten wir die Operation $\mathbf{mod}\ n, n \in \mathbb{N}$. Betrachte

$$x_1 \equiv x_2 \iff x_1 - x_2 = kn$$
$$y_1 \equiv y_2 \iff y_1 - y_2 = mn$$

Dann gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \tag{1}$$
$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \tag{2}$$

Beweis von (1)

$$
\begin{aligned}
x_1 + y_1 &= x_2 + kn + y_2 + mn \\
(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) &= (k + m)\, n \\
\iff x_1 + y_1 &\equiv x_2 + y_2
\end{aligned}
$$

Beweis von (2)

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot y_1 &= (x_2 + kn) \cdot (y_2 + mn) \\
&= x_2 \cdot y_2 + n\,(mx_2 + ky_2 + kmn) \\
x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 &= n\,(mx_2 + ky_2 + kmn) \\
\iff\ x_1 \cdot y_1 &\equiv x_2 \cdot y_2
\end{aligned}$$

Folgerung: Also lässt sich das Rechnung mit Äquivalenzklassen auf ihre Repräsentant beschränken. *Beispiel*: $n = 5$

$$[2] + [3] = [2 + 3] = [5] = [0]$$
$$[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [1]$$

Was bringt uns das ganze?

Was bringt uns das ganze? Es ermöglicht uns das arbeiten mit folgender Funktion

$$f'_x : A^*_{\backslash \equiv_L} \to A^*_{\backslash \equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Ändert diese Funktion etwas an der Äquivalenzbeschaffenheit?

Was bringt uns das ganze? Es ermöglicht uns das arbeiten mit folgender Funktion

$$f'_x : A^*_{\backslash \equiv_L} \to A^*_{\backslash \equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Ändert diese Funktion etwas an der Äquivalenzbeschaffenheit?
Nein, denn:
Wähle $w_1 \equiv_L w_2$, dann gilt

$$w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$$

Was bringt uns das ganze? Es ermöglicht uns das arbeiten mit folgender Funktion

$$f'_x : A^*_{\backslash\equiv_L} \to A^*_{\backslash\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Ändert diese Funktion etwas an der Äquivalenzbeschaffenheit?
Nein, denn:
Wähle $w_1 \equiv_L w_2$, dann gilt

$$w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$$

und somit

$$\begin{aligned}(w_1 x)\, v \in L &\iff w_1\,(xv)\\ &\overset{w=xv}{\iff} w_2\,(xv)\\ &\iff (w_2 x)\, v \in L\end{aligned}$$

und somit

$$w_1 \equiv_L w_2 \implies w_1 x \equiv_L w_2 x = f'_x(w_1) \equiv_L f'_x(w_2)$$

Doch wofür eigentlich das ganze?

Doch wofür eigentlich das ganze? Wähle

$$z_0 = [\varepsilon]$$
$$F = \{[w] | w \in L\}$$

so erhalten wir einen endlichen Akzeptor über der Sprache L durch die Nerode-Äquivalenzklassen.

Definition

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt

$$xRy \wedge yRx \implies x = y$$

Definition

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt

$$xRy \land yRx \implies x = y$$

Definition

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie

- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv

ist.

Beispiel Sei $\sqsubseteq_p$ derart, dass für $v, w \in A^*$

$$v \sqsubseteq_p w \iff \exists u \in A^* : vu = w$$

Beispiel Sei $\sqsubseteq_p$ derart, dass für $v, w \in A^*$

$$v \sqsubseteq_p w \iff \exists u \in A^* : vu = w$$

Was sagt diese Halbordnung aus?

Beispiel Sei $\sqsubseteq_p$ derart, dass für $v, w \in A^*$

$$v \sqsubseteq_p w \iff \exists u \in A^* : vu = w$$

Was sagt diese Halbordnung aus? $v \sqsubseteq_p w$ heißt , dass v ein Präfix von w ist.

Beispiel Sei $\sqsubseteq_p$ derart, dass für $v, w \in A^*$

$$v \sqsubseteq_p w \iff \exists u \in A^* : vu = w$$

Beweis

- *Reflexivität*

$$v \sqsubseteq_p v \iff \exists u \in A^* : vu = v \implies u = \varepsilon$$

Dies ist möglich, da $\varepsilon \in A^*$

Beispiel Sei $\sqsubseteq_p$ derart, dass für $v, w \in A^*$

$$v \sqsubseteq_p w \iff \exists u \in A^* : vu = w$$

Beweis

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned} v \sqsubseteq_p w \land w \sqsubseteq_p v &\iff \exists u \in A^* : vu = w \land \exists \kappa \in A^* : w\kappa = v \\ &\implies w\kappa u = w \\ &\implies \kappa = u = \varepsilon \\ &\implies v = w \end{aligned}$$

Beispiel Sei $\sqsubseteq_p$ derart, dass für $v, w \in A^*$

$$v \sqsubseteq_p w \iff \exists u \in A^* : vu = w$$

Beweis

- *Transitivität*

$$\begin{aligned} v \sqsubseteq_p w \wedge w \sqsubseteq_p x &\iff \exists u \in A^* : vu = w \wedge \exists \kappa \in A^* : w\kappa = x \\ &\implies vu\kappa = x \\ &\overset{\alpha = u\kappa}{\iff} \exists \alpha \in A^* : v\alpha = x \\ &\iff v \sqsubseteq_p x \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\leq$ und $\subseteq$ Halbordnungen sind.

Lösung

Betrachte die Relation $\leq$. Dann gilt mit

$$a \leq b \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b$$

Betrachte die Relation $\leq$. Dann gilt mit

$$a \leq b \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b$$

- *Reflexivität*

$$\begin{aligned} a \leq a \iff & \exists \alpha \geq 0 : a + \alpha = a \\ \implies & \alpha = 0 \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

Betrachte die Relation $\leq$. Dann gilt mit

$$a \leq b \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b$$

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned} a \leq b \wedge b \leq a &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b \wedge b + \beta = a \\ &\implies a + \alpha + \beta = a \\ &\overset{\alpha,\beta \geq 0}{\implies} \alpha = \beta = 0 \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Betrachte die Relation $\leq$. Dann gilt mit

$$a \leq b \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b$$

- *Transitivität*

$$\begin{aligned} a \leq b \wedge b \leq c &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b \wedge b + \beta = c \\ &\implies a + \alpha + \beta = c \\ &\overset{\gamma = \alpha + \beta}{\implies} \exists \gamma \in \mathbb{R}_0^+ : a + \gamma = c \\ &\implies a \leq c \end{aligned}$$

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Reflexivität*

$$A \subseteq A \iff (A \subset A) \vee (A = A)$$

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Reflexivität*

$$A \subseteq A \iff (A \subset A) \vee (A = A)$$

Dies ist eine wahre Aussage.

Lösung

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Antisymmetrie*

$$A \subseteq B \land B \subseteq A \Leftrightarrow (A \subset B \lor A = B) \land (B \subset A \lor B = A)$$

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned} A \subseteq B \land B \subseteq A &\Leftrightarrow (A \subset B \lor A = B) \land (B \subset A \lor B = A) \\ &\Leftrightarrow ((A \subset B) \land (B \subset A \lor B = A)) \\ &\quad \lor ((A = B) \land (B \subset A \lor B = A)) \end{aligned}$$

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned}
A \subseteq B \wedge B \subseteq A &\Leftrightarrow (A \subset B \vee A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A) \\
&\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\
&\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\
&\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A \subset B) \wedge (B = A)) \\
&\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A = B) \wedge (B = A))
\end{aligned}$$

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned}
A \subseteq B \wedge B \subseteq A &\Leftrightarrow (A \subset B \vee A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A) \\
&\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\
&\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\
&\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A \subset B) \wedge (B = A)) \\
&\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A = B) \wedge (B = A))
\end{aligned}$$

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned}
A \subseteq B \wedge B \subseteq A &\Leftrightarrow (A \subset B \vee A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A) \\
&\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\
&\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\
&\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A \subset B) \wedge (B = A)) \\
&\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A = B) \wedge (B = A))
\end{aligned}$$

Also folgt

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$$

Dies benutzen wir um Mengengleichheit zu zeigen.

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Transitivität*

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B \land B \subseteq C &\iff \forall a \in A : a \in B \land \forall b \in B : b \in C \\
&\implies a \in C \\
&\implies A \subseteq C
\end{aligned}
$$

Definition

Als *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X ist definiert.

$$\mathcal{P}(X) = \{U | U \subseteq X\}$$

Weitere Notation : $\mathcal{P}(X) = 2^X$
Für die Mächtigkeit finden wir

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Definition

Als *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X ist definiert.

$$\mathcal{P}(X) = \{U | U \subseteq X\}$$

Weitere Notation : $\mathcal{P}(X) = 2^X$
Für die Mächtigkeit finden wir

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Beispiel

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Definition

Als *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X ist definiert.

$$\mathcal{P}(X) = \{U | U \subseteq X\}$$

Weitere Notation : $\mathcal{P}(X) = 2^X$
Für die Mächtigkeit finden wir

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Beispiel

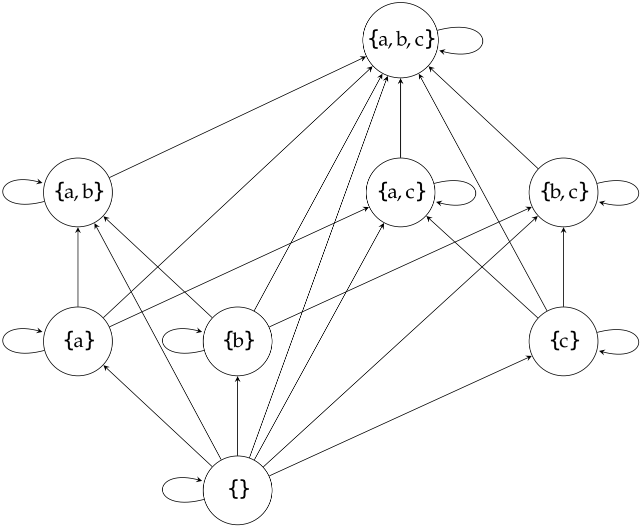
$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

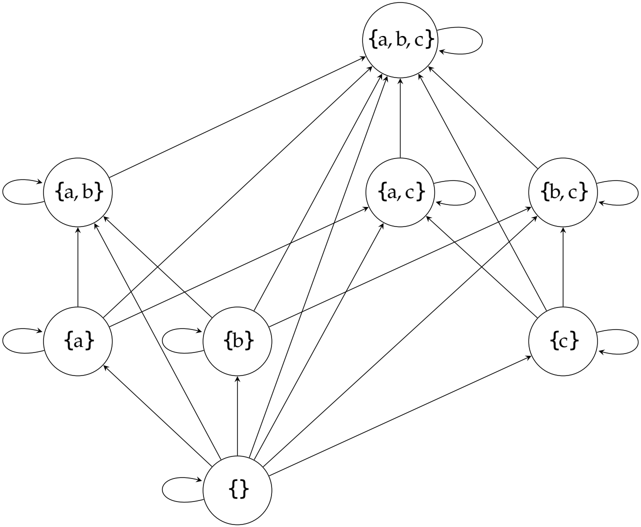
Betrachten wir nun die Halbordnung $\subseteq$ auf der Menge $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$

Potenzmengen

Betrachten wir nun die Halbordnung $\subseteq$ auf der Menge $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$



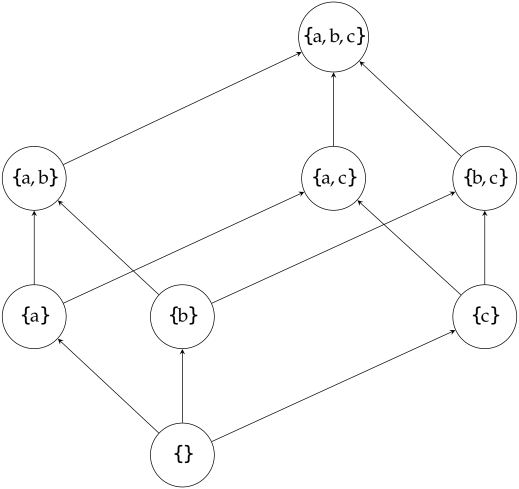
Betrachten wir nun die Halbordnung $\subseteq$ auf der Menge $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$



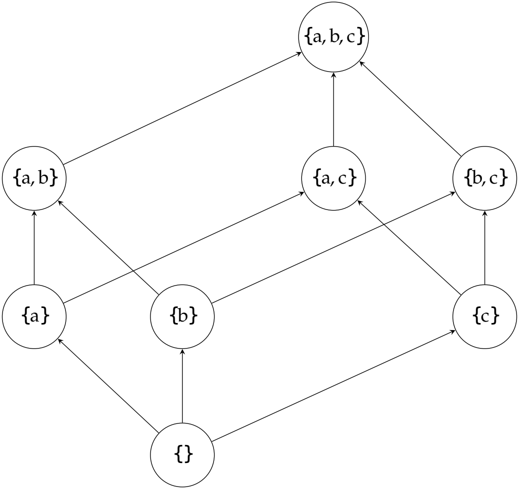
Wird doch recht bald unübersichtlich!

Lassen wir nun einfach die Kanten weg, die durch transitivität und reflexivität sich ergeben

Lassen wir nun einfach die Kanten weg, die durch transitivität und reflexivität sich ergeben



Lassen wir nun einfach die Kanten weg, die durch transitivität und reflexivität sich ergeben



Dies nennen wir das *Hasse-Diagramm*.

Definition

Eine Diagramm einer Halbordnung $\sqsubseteq$ auf einer Menge M heißt *Hasse-Diagramm*, wenn es im Diagramm eine Kante gibt von a nach b, $a, b \in M$, sofern gilt

$$\nexists c \in M : a \sqsubseteq c \sqsubseteq b$$

Definition

Eine Diagramm einer Halbordnung $\sqsubseteq$ auf einer Menge M heißt *Hasse-Diagramm*, wenn es im Diagramm eine Kante gibt von a nach b, $a, b \in M$, sofern gilt

$$\nexists c \in M : a \sqsubseteq c \sqsubseteq b$$

Definition

Es sei $(M, \sqsubseteq)$ eine halbgeordnete Menge und $T \subseteq M$. Ein Element $x \in T$ heißt

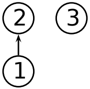
- *minimales Element* von T, wenn es kein $y \in T, y \neq x$ gibt, mit $y \sqsubseteq x$.
- *maximales Element* von T, wenn es kein $y \in T, y \neq x$ gibt, mit $x \sqsubseteq y$.
- *größtes Element* von T, wenn für alle $y \in T$ gilt $y \sqsubseteq x$
- *kleinstes Element* von T, wenn für alle $y \in T$ gilt $x \sqsubseteq y$

Beispiele an der Tafel zu $\sqsubseteq = \subseteq$ und
$M \in \{\mathcal{P}(\{a\}), \mathcal{P}(\{a\}) \cup \{d\}, \{a\} \cup \{d\}\}$

WS 10/11

Geben Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer dreielementigen Menge an, die genau zwei maximale und zwei minimale Elemente besitzt.

Lösung



Was ihr nun wissen solltet

- Was ein Hasse-Diagramm ist
- Das man manchmal triviales wirklich beweisen muss
- Das es nun zu Ende ist.

Abbildung: `http://xkcd.com/329/`

Kontakt via E-Mail an Philipp Basler oder Nils Braun
gbi.ugroup.hostzi.com