GBI Tutorium Nr. 32

Tutorium 2

Dominik Muth - dominik.muth@student.kit.edu | 31. Oktober 2012

INSTITUT FÜR INFORMATIK

Outline/Gliederung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.2

Gegeben seien zwei beliebige, nichtleere, endliche Mengen A und B, sowie eine injektive Abbildung $f : A \to B$.

b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g : B \to A$ an.

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.2

Gegeben seien zwei beliebige, nichtleere, endliche Mengen A und B, sowie eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$.

b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g : B \rightarrow A$ an.

$g(x) = f(x)^{-1}$?

Aufgabe 1.2

Gegeben seien zwei beliebige, nichtleere, endliche Mengen A und B, sowie eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$.

b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g : B \rightarrow A$ an.

$g(x) = f(x)^{-1}$!

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe 1.2

Gegeben seien zwei beliebige, nichtleere, endliche Mengen A und B, sowie eine injektive Abbildung $f : A \to B$.

b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g : B \to A$ an.

$g(x) = f(x)^{-1}$!

$$g(x) = \begin{cases} a & , falls\ f(a) = x \\ a' & , sonst \end{cases} .$$

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.2

Gegeben seien zwei beliebige, nichtleere, endliche Mengen A und B, sowie eine injektive Abbildung $f : A \to B$.

b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g : B \to A$ an.

$g(x) = f(x)^{-1}$!

$$g(x) = \begin{cases} a & \text{, falls } f(a) = x \\ a' & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Wiederholung

- $f(x) = x + 1$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $f(x) \in \mathbb{N}$ ist surjektiv.
- $A \times B$ ist eine Relation.
- Eine Rechtstotale und Linkseindeutige Relation nennt man auch Abbildung/Funktion.

Wiederholung

- $f(x) = x + 1$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $f(x) \in \mathbb{N}$ ist surjektiv.
  falsch
- $A \times B$ ist eine Relation.
- Eine Rechtstotale und Linkseindeutige Relation nennt man auch Abbildung/Funktion.

Wiederholung

- $f(x) = x + 1$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $f(x) \in \mathbb{N}$ ist surjektiv.
  falsch
- $A \times B$ ist eine Relation.
  richtig
- Eine Rechtstotale und Linkseindeutige Relation nennt man auch Abbildung/Funktion.

Wiederholung

- $f(x) = x + 1$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $f(x) \in \mathbb{N}$ ist surjektiv.
  falsch
- $A \times B$ ist eine Relation.
  richtig
- Eine Rechtstotale und Linkseindeutige Relation nennt man auch Abbildung/Funktion.
  falsch

Aussagenlogik
- Logische Aussagen 1

Einfache Logische Aussagen:

- Negation $\neg A$: "nicht A"
- Logisches Und $(A \wedge B)$: "A und B"
- Logisches Oder $(A \vee B)$: "A oder B"

Aussagenlogik
- Logische Aussagen 1

Einfache Logische Aussagen:

- Negation $\neg A$: ”nicht A”
- Logisches Und $(A \wedge B)$: ”A und B”
- Logisches Oder $(A \vee B)$: ”A oder B”

Aussagenlogik
- Logische Aussagen 1

Einfache Logische Aussagen:

- Negation $\neg A$: ”nicht A”
- Logisches Und $(A \wedge B)$: ”A und B”
- Logisches Oder $(A \vee B)$: ”A oder B”

Aufgabenteil 1

Aufgabe 1

Stelle die Wahrheitstabelle auf:

$(\neg A \wedge B) \vee \neg B$

Aufgabe 2

Stelle die Wahrheitstabelle auf:

$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$

Aussagenlogik
- Logische Aussagen 2

- Implikation ($A \Rightarrow B$): ”Wenn A, dann B”
- Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$): ”A genau dann, wenn B”(Implikation in beide Richtungen)

Aussagenlogik
- Logische Aussagen 2

- Implikation ($A \Rightarrow B$): ”Wenn A, dann B”
- Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$): ”A genau dann, wenn B”(Implikation in beide Richtungen)

Aufgabenteil 2

Aufgabe 1

Stelle die Wahrheitstabelle auf:

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

Aufgabe 2

Sind die Beiden Aussagen Äquivalent?:

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$

Wörter

Definition

Ein Wort ist eine Folge an Zeichen aus einem Alphabet A.
Wobei ein Alphabet eine nichtlehre Menge an Zeichen ist.

Beispiel

- $A = \{H, a, l, o, \text{␣}, W, e, t\}$ enthält das Wort Hallo Welt
- Hallo Welt $\in \mathbb{G}_{10} \to A = A^{10}$
- $\Rightarrow$ die Relation $\mathbb{G}_{10} \to A$ enthällt alle Wörter der Länge 10, welche mit dem Alphabet A gebildet werden können.

Wörter

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ein Wort ist eine Folge an Zeichen aus einem Alphabet A.
Wobei ein Alphabet eine nichtlehre Menge an Zeichen ist.

Beispiel

- $A = \{H, a, l, o, \textvisiblespace, W, e, t\}$ enthält das Wort Hallo Welt
- Hallo Welt $\in \mathbb{G}_{10} \rightarrow A = A^{10}$
- $\Rightarrow$ die Relation $\mathbb{G}_{10} \rightarrow A$ enthällt alle Wörter der Länge 10, welche mit dem Alphabet A gebildet werden können.

Wörter

Definition

Ein Wort ist eine Folge an Zeichen aus einem Alphabet A.
Wobei ein Alphabet eine nichtlehre Menge an Zeichen ist.

Beispiel

- $A = \{H, a, l, o, \text{␣}, W, e, t\}$ enthält das Wort Hallo Welt
- Hallo Welt $\in \mathbb{G}_{10} \rightarrow A = A^{10}$
- $\Rightarrow$ die Relation $\mathbb{G}_{10} \rightarrow A$ enthällt alle Wörter der Länge 10, welche mit dem Alphabet A gebildet werden können.

Wörter

Definition

Ein Wort ist eine Folge an Zeichen aus einem Alphabet A.
Wobei ein Alphabet eine nichtlehre Menge an Zeichen ist.

Beispiel

- $A = \{H, a, l, o, \textvisiblespace, W, e, t\}$ enthält das Wort Hallo Welt
- Hallo Welt $\in \mathbb{G}_{10} \rightarrow A = A^{10}$
- $\Rightarrow$ die Relation $\mathbb{G}_{10} \rightarrow A$ enthällt alle Wörter der Länge 10, welche mit dem Alphabet A gebildet werden können.

Menge aller Wörter

Definition

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet A sind alle Wörter, in denen nur Zeichen aus A enthalten sind. Dies wird als A^* geschrieben.

Beispiel

Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b\}$, dann enthält A*:

- ϵ (Das leere Wort)
- a
- b
- aa
- ab
- ba
- ...

Menge aller Wörter

Definition

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet A sind alle Wörter, in denen nur Zeichen aus A enthalten sind. Dies wird als A^* geschrieben.

Beispiel

Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b\}$, dann enthält A*:

- ϵ (Das leere Wort)
- a
- b
- aa
- ab
- ba
- ...

Das leere Wort ϵ

Definition

Das leere Wort (ϵ) bezeichnet ein Wort ohne Inhalt und hat die Länge 0. Aus der Länge von ϵ folgt, dass $\epsilon \neq$ *Leerzeichen*, da das Leerzeichen die Länge 1 hat.

Konkatenation von Wörtern

Definition

Eine Konkatenation von Wörtern ist das zusammensetzten dieser Wörter.

Formal: $\omega_1 \cdot \omega_2$

Beispiel

- $A = \{K, l, e\}$ enthällt das Wort $\omega_1 = Klee$
- $B = \{b, l, a, t\}$ enthällt das Wort $\omega_2 = blatt$
- $\omega_1 \cdot \omega_2 = Kleeblatt \neq \omega_2 \cdot \omega_1 = blattKlee$
- $\omega_1 \cdot \epsilon \cdot \omega_2 = Kleeblatt$

Konkatenation von Wörtern

Definition

Eine Konkatenation von Wörtern ist das zusammensetzten dieser Wörter.

Formal: $\omega_1 \cdot \omega_2$

Beispiel

- $A = \{K, l, e\}$ enthällt das Wort $\omega_1 = Klee$
- $B = \{b, l, a, t\}$ enthällt das Wort $\omega_2 = blatt$
- $\omega_1 \cdot \omega_2 = Kleeblatt \neq \omega_2 \cdot \omega_1 = blattKlee$
- $\omega_1 \cdot \epsilon \cdot \omega_2 = Kleeblatt$

Konkatenation von Wörtern

Definition

Eine Konkatenation von Wörtern ist das zusammensetzten dieser Wörter.
Formal: $\omega_1 \cdot \omega_2$

Beispiel

- $A = \{K, l, e\}$ enthällt das Wort $\omega_1 = Klee$
- $B = \{b, l, a, t\}$ enthällt das Wort $\omega_2 = blatt$
- $\omega_1 \cdot \omega_2 = Kleeblatt \neq \omega_2 \cdot \omega_1 = blattKlee$
- $\omega_1 \cdot \epsilon \cdot \omega_2 = Kleeblatt$

Konkatenation von Wörtern

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Eine Konkatenation von Wörtern ist das zusammensetzten dieser Wörter.
Formal: $\omega_1 \cdot \omega_2$

Beispiel

- $A = \{K, l, e\}$ enthällt das Wort $\omega_1 = Klee$
- $B = \{b, l, a, t\}$ enthällt das Wort $\omega_2 = blatt$
- $\omega_1 \cdot \omega_2 = Kleeblatt \neq \omega_2 \cdot \omega_1 = blattKlee$
- $\omega_1 \cdot \epsilon \cdot \omega_2 = Kleeblatt$

Potenzen von Wörtern

Beispiel

- $\omega = ha$
- $\omega^2 = haha$
- $\omega^3 = hahaha$

Aufgabenteil 3

- was ist a^k, was ist b^k ?
- was ist $a^k b^k$?
- was ist $(ab)^k$?

Aufgabenteil 3

- was ist a^k, was ist b^k ?
- was ist $a^k b^k$?
- was ist $(ab)^k$?

Aufgabenteil 3

- was ist a^k, was ist b^k ?
- was ist $a^k b^k$?
- was ist $(ab)^k$?

Wortlänge

Definition

Die Länge eines Wortes ω gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an.

Formal: $|\omega|$

Beispiel

- $|HalloWelt| = 10$
- $|\omega^k| = k \cdot |\omega|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|\omega_1 \cdot \omega_2| = |\omega_1| + |\omega_2|$

Wortlänge

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Die Länge eines Wortes ω gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an.
Formal: $|\omega|$

Beispiel

- $|HalloWelt| = 10$
- $|\omega^k| = k \cdot |\omega|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|\omega_1 \cdot \omega_2| = |\omega_1| + |\omega_2|$

Wortlänge

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Die Länge eines Wortes ω gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an.
Formal: $|\omega|$

Beispiel

- $|HalloWelt| = 10$
- $|\omega^k| = k \cdot |\omega|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|\omega_1 \cdot \omega_2| = |\omega_1| + |\omega_2|$

Wortlänge

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Die Länge eines Wortes ω gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an.
Formal: $|\omega|$

Beispiel

- $|HalloWelt| = 10$
- $|\omega^k| = k \cdot |\omega|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|\omega_1 \cdot \omega_2| = |\omega_1| + |\omega_2|$

Vollständige Induktion

Definition

Die vollständige Induktion ist ein mathematisches Beweisverfahren.

Struktur

- Induktionsanfang (IA)
- Induktionsvoraussetzung (IV)
- Induktionsschluss / Induktionsschritt (IS)

Funktionsweise

- IA: wir beweisen, dass das Problem für das kleinst mögliche n gültig ist.
- IV: Wir nehmen an, dass wenn das Problem für n gültig ist, dass es ebenso für $n+1$ gültig ist.
- IS: Wir beweisen, dass wenn wir für n, $n+1$ einsetzten das Problem gültig ist.

Funktionsweise

- IA: wir beweisen, dass das Problem für das kleinst mögliche n gültig ist.
- IV: Wir nehmen an, dass wenn das Problem für n gültig ist, dass es ebenso für $n+1$ gültig ist.
- IS: Wir beweisen, dass wenn wir für n, $n+1$ einsetzten das Problem gültig ist.

Funktionsweise

- IA: wir beweisen, dass das Problem für das kleinst mögliche n gültig ist.
- IV: Wir nehmen an, dass wenn das Problem für n gültig ist, dass es ebenso für $n + 1$ gültig ist.
- IS: Wir beweisen, dass wenn wir für n, $n + 1$ einsetzten das Problem gültig ist.

Beispiel Vollständige Induktion

Karlsruher Institut für Technologie

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

- IA: Für $n = 1$: $1^3 + 5 = 6 \ \surd$
- IV: Für alle $\forall n \in \mathbb{N}_+$ gelte, $n^3 + 5n$ sei durch 6 teilbar.
- IS: Für $n = n + 1$:
  $(n+1)^3 + 5(n+1)$
  $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$
  $= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$
  $\Rightarrow IV + 3(n^2 + n + 2) \ \surd$
  Da $3 * (n^2 + n + 2)$ immer ein gerades Vielfaches von 3 ist.

Beispiel Vollständige Induktion

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

- IA: Für $n = 1$: $1^3 + 5 = 6 \ \surd$
- IV: Für alle $\forall n \in \mathbb{N}_+$ gelte, $n^3 + 5n$ sei durch 6 teilbar.
- IS: Für $n = n + 1$:
  $(n+1)^3 + 5(n+1)$
  $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$
  $= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$
  $\Rightarrow IV + 3(n^2 + n + 2) \ \surd$
  Da $3 * (n^2 + n + 2)$ immer ein gerades Vielfaches von 3 ist.

Beispiel Vollständige Induktion

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

- IA: Für $n = 1$: $1^3 + 5 = 6 \surd$
- IV: Für alle $\forall n \in \mathbb{N}_+$ gelte, $n^3 + 5n$ sei durch 6 teilbar.
- IS: Für $n = n + 1$:
  $(n+1)^3 + 5(n+1)$
  $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$
  $= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$
  $\Rightarrow IV + 3(n^2 + n + 2) \surd$
  Da $3 * (n^2 + n + 2)$ immer ein gerades Vielfaches von 3 ist.

Beispiel Vollständige Induktion

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

- IA: Für $n = 1$: $1^3 + 5 = 6 \surd$
- IV: Für alle $\forall n \in \mathbb{N}_+$ gelte, $n^3 + 5n$ sei durch 6 teilbar.
- IS: Für $n = n + 1$:
  $(n + 1)^3 + 5(n + 1)$
  $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$
  $= (n^3 + 5n) + 3n(n + 1) + 6$
  $\Rightarrow IV + 3(n^2 + n + 2) \surd$
  Da $3 * (n^2 + n + 2)$ immer ein gerades Vielfaches von 3 ist.

Beispiel Vollständige Induktion

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

- IA: Für $n = 1$: $1^3 + 5 = 6 \surd$
- IV: Für alle $\forall n \in \mathbb{N}_+$ gelte, $n^3 + 5n$ sei durch 6 teilbar.
- IS: Für $n = n + 1$:
  $(n+1)^3 + 5(n+1)$
  $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$
  $= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$
  $\Rightarrow IV + 3(n^2 + n + 2) \surd$
  Da $3 * (n^2 + n + 2)$ immer ein gerades Vielfaches von 3 ist.

Beispiel Vollständige Induktion

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

- IA: Für $n = 1$: $1^3 + 5 = 6 \surd$
- IV: Für alle $\forall n \in \mathbb{N}_+$ gelte, $n^3 + 5n$ sei durch 6 teilbar.
- IS: Für $n = n + 1$:
  $(n+1)^3 + 5(n+1)$
  $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$
  $= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$
  $\Rightarrow IV + 3(n^2 + n + 2) \surd$
  Da $3 * (n^2 + n + 2)$ immer ein gerades Vielfaches von 3 ist.

Aufgabenteil 4

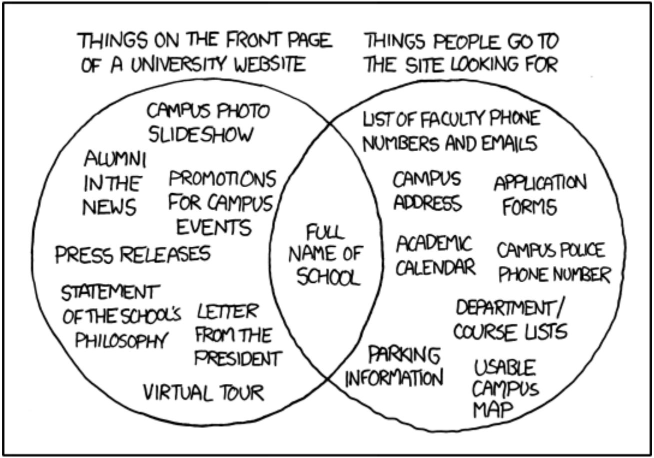
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : 2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}$ ist durch 42 teilbar.

Fragen

- Fragen zum Stoff?
- Fragen zum nächsten Übungsblatt?
- Generelle Fragen?

EOF



source : http : / / imgs.xkcd.com / comics / university$_w$ebsite.png