

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 02

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 1. November 2012



Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

1 Besprechung des 1. Übungsblattes

2 Alphabete

3 Wörter

4 Vollständige Induktion

Besprechung des 1. Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

1 Besprechung des 1. Übungsblattes

2 Alphabete

3 Wörter

4 Vollständige Induktion

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

Anzahl der Elemente einer Menge

$$A = \{a, b, c\} \Rightarrow |A| = 3$$

$$B = \{c, d, e\} \Rightarrow |A \cup B| = 5$$

Weitere

- Mengenäquivalenz wird nicht mit Wahrheitstabellen bewiesen
- Für einen Gegenbeweis reicht ein widerlegendes Beispiel, für einen Beweis nicht!

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

1 Besprechung des 1. Übungsblattes

2 Alphabete

3 Wörter

4 Vollständige Induktion

Definition

Ein Alphabet ist eine endliche, nichtleere Menge an „Zeichen“ oder „Symbolen“.

Beispiele

- $A = \{a, b, d\}$
- $B = \{3, 9, V, k\}$
- Der ASCII-Zeichensatz

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

1 Besprechung des 1. Übungsblattes

2 Alphabete

3 Wörter

4 Vollständige Induktion

Definition

Ein Wort über einem Alphabet A ist eine Folge von Zeichen aus A .

Beispiele

- $A = \{H, a, l, o, _, W, e, t\}$ enthält das Wort
Hallo Welt
- ...

Definition

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet A sind alle Wörter, in denen nur Zeichen aus A enthalten sind. Dies wird als A^* geschrieben.

Beispiele

Alphabet set $A = \{a, b\}$, dann enthält A^* :

- a
- b
- aa
- ab
- ba
- ...

Definition

Die Konkatenation zweier Worte w_1 und w_2 aus den Alphabeten A und B wird geschrieben als $w_1 \circ w_2 \in (A \cup B)$

Beispiele

- $A = \{B, e, t\}$ enthält das Wort $w_1 = Bett$
- $B = \{w, a, n, z, e\}$ enthält das Wort $w_2 = wanze$
- $w_1 \circ w_2 = Bettwanze \neq w_2 \circ w_1 = wanzeBett$
- $A \cup B = \{B, e, t, w, a, n, z\}$ (e nur einmal!)

Definition

Die Konkatenation zweier Worte w_1 und w_2 aus den Alphabeten A und B wird geschrieben als $w_1 \circ w_2 \in (A \cup B)$

Beispiele

- $A = \{B, e, t\}$ enthält das Wort $w_1 = Bett$
- $B = \{w, a, n, z, e\}$ enthält das Wort $w_2 = wanze$
- $w_1 \circ w_2 = Bettwanze \neq w_2 \circ w_1 = wanzeBett$
- $A \cup B = \{B, e, t, w, a, n, z\}$ (e nur einmal!)

Definition

Die Konkatenation zweier Worte w_1 und w_2 aus den Alphabeten A und B wird geschrieben als $w_1 \circ w_2 \in (A \cup B)$

Beispiele

- $A = \{B, e, t\}$ enthält das Wort $w_1 = Bett$
- $B = \{w, a, n, z, e\}$ enthält das Wort $w_2 = wanze$
- $w_1 \circ w_2 = Bettwanze \neq w_2 \circ w_1 = wanzeBett$
- $A \cup B = \{B, e, t, w, a, n, z\}$ (e nur einmal!)

Beispiel

w sei ein Wort (zum Beispiel über dem vorherigen Alphabet A).

- $w = Bett$
- $w^3 = BettBettBett$

Definition

Das leere Wort wird mit ϵ geschrieben und hat die Länge 0.

Beispiele

Das leere Wort ist *nicht das Leerzeichen*.

- $\epsilon \circ w \circ \epsilon = w$

- $w^0 = \epsilon$

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol“ $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol“ $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol“ $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol“ $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Besprechung des 1. Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

Definition: Präfix

Ein Präfix ist ein beliebig langer Teil am Anfang eines Wortes. a ist ein Präfix von w , falls gilt: $w = a \circ b$.

Definition: Suffix

Ein Suffix ist ein beliebig langer Teil am Ende eines Wortes. b ist ein Suffix von w , falls gilt: $w = a \circ b$.

Definition: Präfix

Ein Präfix ist ein beliebig langer Teil am Anfang eines Wortes. a ist ein Präfix von w , falls gilt: $w = a \circ b$.

Definition: Suffix

Ein Suffix ist ein beliebig langer Teil am Ende eines Wortes. b ist ein Suffix von w , falls gilt: $w = a \circ b$.

Aufgabe

Gegeben sei das Alphabet $A = \{0, 1\}$.

- Welche Worte befinden sich in A^5 ?
- Ist auch das leere Wort darin enthalten?
- Was ist der Unterschied zwischen $A^2 \times A^2$ und $A^2 \cdot A^2$?

Aufgabe

Gegeben sei das Alphabet $A = \{0, 1\}$.

- Welche Worte befinden sich in A^5 ?
- Ist auch das leere Wort darin enthalten?
- Was ist der Unterschied zwischen $A^2 \times A^2$ und $A^2 \cdot A^2$?

Aufgabe

Gegeben sei das Alphabet $A = \{0, 1\}$.

- Welche Worte befinden sich in A^5 ?
- Ist auch das leere Wort darin enthalten?
- Was ist der Unterschied zwischen $A^2 \times A^2$ und $A^2 \cdot A^2$?

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

1 Besprechung des 1. Übungsblattes

2 Alphabete

3 Wörter

4 Vollständige Induktion

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

Definition

Die vollständige Induktion ist eine mathematische Beweismethode, mit der die Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden kann.

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.

Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

- ① *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
- ② *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
- ③ *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.

Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

- ① *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
- ② *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
- ③ *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.

Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

- ① *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
- ② *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
- ③ *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.

Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

- ① *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
- ② *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
- ③ *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Behauptung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis

- ① *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
- ② *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
- ③ *IS*: $k \rightarrow k + 1$:
 - Links: $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \stackrel{IV}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
 - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
- ④ Die Behauptung stimmt.

Behauptung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis

- ① *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
- ② *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
- ③ *IS*: $k \rightarrow k + 1$:
 - Links: $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \stackrel{IV}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
 - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
- ④ Die Behauptung stimmt.

Behauptung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis

- ① *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
- ② *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
- ③ *IS*: $k \rightarrow k + 1$:
 - Links: $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \stackrel{IV}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
 - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
- ④ Die Behauptung stimmt.

Behauptung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis

- ① *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
- ② *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
- ③ *IS*: $k \rightarrow k + 1$:
 - Links: $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \stackrel{IV}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
 - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
- ④ Die Behauptung stimmt.

Behauptung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis

- ① *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
- ② *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
- ③ *IS*: $k \rightarrow k + 1$:
 - Links: $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \stackrel{IV}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
 - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
- ④ Die Behauptung stimmt.

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2 \wedge x_0 = 0 \Leftrightarrow x_n = 2n$$

Lösung

1 $IA: n = 0.$

2 $IV:$

3 $IS:$

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2 \wedge x_0 = 0 \Leftrightarrow x_n = 2n$$

Lösung

① *IA*: $n = 0$. $x_0 = 0$ (nach Vorgabe) und $2 \cdot 0 = 0$ (die rechte Seite)

② *IV*:

③ *IS*:

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2 \wedge x_0 = 0 \Leftrightarrow x_n = 2n$$

Lösung

- ① *IA:* $n = 0$. $x_0 = 0$ (nach Vorgabe) und $2 \cdot 0 = 0$ (die rechte Seite)
- ② *IV:* „Für ein beliebiges, aber festes n gilt die obige Behauptung: $x_n = 2n$ “
- ③ *IS:*

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2 \wedge x_0 = 0 \Leftrightarrow x_n = 2n$$

Lösung

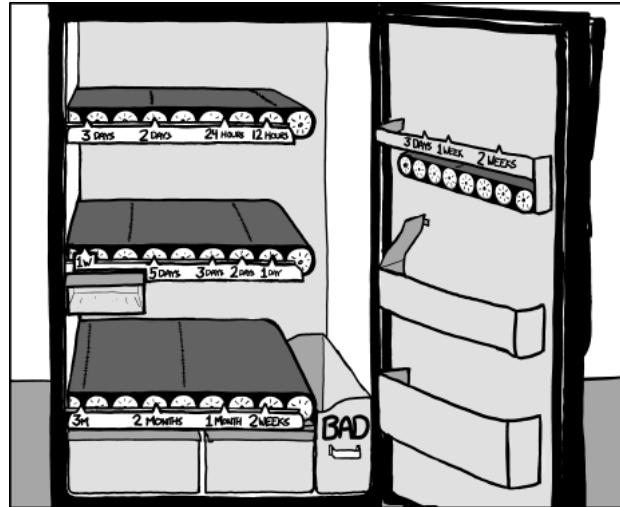
- ① *IA*: $n = 0$. $x_0 = 0$ (nach Vorgabe) und $2 \cdot 0 = 0$ (die rechte Seite)
- ② *IV*: „Für ein beliebiges, aber festes n gilt die obige Behauptung: $x_n = 2n$ “
- ③ *IS*:
Rechte Seite: $x_{n+1} = 2(n+1)$.
Linke Seite: $x_{n+1} = x_n + 2 \stackrel{\text{IV}}{=} 2n + 2$

Besprechung des 1.
Übungsblattes

Alphabete

Wörter

Vollständige Induktion



MY IDEAL FRIDGE