Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 2^5

Tutorium 13

Dominik Muth - dominik.muth@student.kit.edu | 30. Januar 2013

INSTITUT FÜR INFORMATIK

Outline/Gliederung

Überblick

Wiederholung - Quiz

- Rechtslineare Grammatiken lassen sich durch Automaten darstellen.
- $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 1000n^2 \in \Theta(n^4)$
- Mit Touringmaschinen lassen sich alle Probleme lösen.
- Mit Touringmaschinen kann man Touringmaschinen simulieren.

Wiederholung - Quiz

- Rechtslineare Grammatiken lassen sich durch Automaten darstellen.
  $\surd$
- $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 1000n^2 \in \Theta(n^4)$
- Mit Touringmaschinen lassen sich alle Probleme lösen.
- Mit Touringmaschinen kann man Touringmaschinen simulieren.

Wiederholung - Quiz

- Rechtslineare Grammatiken lassen sich durch Automaten darstellen. $\surd$
- $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 1000n^2 \in \Theta(n^4)$ X
- Mit Touringmaschinen lassen sich alle Probleme lösen.
- Mit Touringmaschinen kann man Touringmaschinen simulieren.

Wiederholung - Quiz

- Rechtslineare Grammatiken lassen sich durch Automaten darstellen. $\surd$
- $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 1000n^2 \in \Theta(n^4)$ *X*
- Mit Touringmaschinen lassen sich alle Probleme lösen. *X*
- Mit Touringmaschinen kann man Touringmaschinen simulieren.

Wiederholung - Quiz

- Rechtslineare Grammatiken lassen sich durch Automaten darstellen. $\surd$
- $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 1000n^2 \in \Theta(n^4)$ *X*
- Mit Touringmaschinen lassen sich alle Probleme lösen. *X*
- Mit Touringmaschinen kann man Touringmaschinen simulieren. $\surd$

Wiederholung - Induktion

Übungsblatt 10- Aufgabe 10.2

Gegeben sei folgende Funktion $T(n)$, für $n \in \mathbb{N}_+$:

$$T(1) = 0, \qquad \forall n > 2; T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + n$$

- Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $T(n) \in \mathcal{O}(n\, log_2(log_2(n))$

Überblick

Fragen

- Fragen zum Stoff?
- Fragen zum nächsten Übungsblatt?
- Generelle Fragen?
- Feedback?

Überblick

Unentscheidbare Probleme

Entscheidbar

Für ein entscheidbares Problem gibt es eine Turingmaschine, welche für jede Eingabe hält und das Eingabewort entweder akzeptiert oder nicht.

Unentscheidbar

Unentscheidbare Probleme

Karlsruher Institut für Technologie

Entscheidbar

Für ein entscheidbares Problem gibt es eine Turingmaschine, welche für jede Eingabe hält und das Eingabewort entweder akzeptiert oder nicht.

Unentscheidbar

Unentscheidbare Probleme

Karlsruher Institut für Technologie

Entscheidbar

Für ein entscheidbares Problem gibt es eine Turingmaschine, welche für jede Eingabe hält und das Eingabewort entweder akzeptiert oder nicht.

Unentscheidbar

Unentscheidbare Probleme

Karlsruher Institut für Technologie

Entscheidbar

Für ein entscheidbares Problem gibt es eine Turingmaschine, welche für jede Eingabe hält und das Eingabewort entweder akzeptiert oder nicht.

Unentscheidbar

Für ein unentscheidbares Problem existiert keine Turingmaschine, welche für jede Eingabe hält und das Eingabewort entweder akzeptiert oder nicht.

Unentscheidbare Probleme

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel

$n \leftarrow Eingabe$
while $n > 1$ **do**
    if $n \; mod \; 2 = 0$ **then**
        $n \leftarrow n/2$
    else
        $n \leftarrow 3n + 1$
    end if
od

Überblick

Äquivalenzrelationen

Wie war eine Äquivalenzrelation definiert?

Eine Relation R ist genau dann eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie

-
-
-

ist.

Äquivalenzrelationen

Karlsruher Institut für Technologie

Wie war eine Äquivalenzrelation definiert?

Eine Relation R ist genau dann eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie

- symmetrisch,
-
-

ist.

Äquivalenzrelationen

Wie war eine Äquivalenzrelation definiert?

Eine Relation R ist genau dann eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie

- symmetrisch,
- reflexiv und
-

ist.

Äquivalenzrelationen

Wie war eine Äquivalenzrelation definiert?

Eine Relation R ist genau dann eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie

- symmetrisch,
- reflexiv und
- transitiv

ist.

Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben folgende Relationen ($\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$)

- $\leq$
- $>$
- $=$

Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben folgende Relationen ($\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$)

- $\leq$ reflexiv, transitiv
- $>$
- $=$

Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben folgende Relationen ($\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$)

- $\leq$ reflexiv, transitiv
- $>$ transitiv
- $=$

Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben folgende Relationen ($\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$)

- $\leq$ reflexiv, transitiv
- $>$ transitiv
- $=$ reflexiv, transitiv, symmetrisch

Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben folgende Relationen ($\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$)

- $\leq$ reflexiv, transitiv
- $>$ transitiv
- $=$ reflexiv, transitiv, symmetrisch

Wie sehen die Relationen in einem Graphen aus?

Äquivalenzklassen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Sind zwei Elemente $(x, y) \in R$, so schreit man auch xRy (Infixschreibweise).
Alle Element, welche miteinander in Relation stehen (vorausgesetzt R ist eine Äquivalenzrelation, auf der Menge M), befinden sich in der selben Äquivalenzklasse.
Wir schreiben dann:

$$[y]_R = \{x \in M \mid xRy\}$$

Nerode-Äquivalenz

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Zwei Wörter sind bezüglich der Nerode-Relation($\equiv_L$) genau dann äquivalent zueinander, wenn sie beide durch exakt dieselben Suffixe zu Wörtern der Sprache L ergänzt werden.

Beispiel

Sei $A = 0, 1$ und $L = \langle 0 * 1 * \rangle$

Es gibt also exakt 3 Nerode Äquivalenzklassen für die gegebene Sprache:

- Die Äquivalenzklasse [0] enthält alle Wörter ohne eine 1: $\{0\}^*$
- Die Äquivalenzklasse [1] enthält alle Wörter mit min. einer 1 am Ende: $\{0\}^*\{1\}^+$
- Die Äquivalenzklasse [10] enthält alle ungültigen Wörter: $\{0, 1\}^*\{10\}\{0, 1\}^*$

Quiz

- $xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$
- $\exists z \in M \mid z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Rightarrow [x]_R = [y]_R$
- Wie viele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \mathbb{N} \to \mathbb{N} : y = x \; mod \; 6$?

Quiz

- $xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$ $\checkmark$
- $\exists z \in M \mid z \in [x]_R \land z \in [y]_R \Rightarrow [x]_R = [y]_R$
- Wie viele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \mathbb{N} \to \mathbb{N} : y = x \; mod \; 6$?

Quiz

Karlsruher Institut für Technologie

- $xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$ $\surd$
- $\exists z \in M \mid z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Rightarrow [x]_R = [y]_R$ $\surd$
- Wie viele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \mathbb{N} \to \mathbb{N} : y = x \; mod \; 6$?

Quiz

- $xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R \checkmark$
- $\exists z \in M \mid z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Rightarrow [x]_R = [y]_R \checkmark$
- Wie viele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \mathbb{N} \to \mathbb{N} : y = x \; mod \; 6$?
  Keine, R ist keine Äquivalenzrelation!

Quiz

- $xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$ $\checkmark$
- $\exists z \in M \mid z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Rightarrow [x]_R = [y]_R$ $\checkmark$
- Wie viele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : y = x \; mod \; 6$?
  Keine, R ist keine Äquivalenzrelation!

  Wie muss man R ändern, damit es eine Äquivalenzrelation ist, und wie viele Äquivalenzklassen hat sie dann?

Quiz

- $xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$ $\surd$
- $\exists z \in M \mid z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Rightarrow [x]_R = [y]_R$ $\surd$
- Wie viele Äquivalenzklassen gibt es zu $R = \mathbb{N} \to \mathbb{N} : y = x \; mod \; 6$?
  Keine, R ist keine Äquivalenzrelation!

  Wie muss man R ändern, damit es eine Äquivalenzrelation ist, und wie viele Äquivalenzklassen hat sie dann?
  $R_2 = \mathbb{N} \to \mathbb{N} : y \; mod \; 6 = x \; mod \; 6$
  Die Äquivalenzrelation R_2 hat 6 Äquivalenzklassen

Überblick

Klausuraufgabe

Karlsruher Institut für Technologie

Sommer Semester 2010 - Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

- Gegeben sei die Formel
  $F = (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.
  Stellen sie eine Wahrheitstabelle für F auf und geben sie eine äquivalente Formel F' an, welche sowohl A als auch B maximal ein mal enthält, und $F = F'$ gilt.
- Gegeben seien die Formeln:
  $F_1 = (((B \Rightarrow A) \vee B) \Rightarrow (\neg A)) \wedge B$
  und
  $F_2 = \neg A \wedge B$
  Zeigen Sie (zum Beispiel mit Wahrheitstabellen), dass F_1 und F_2 äquivalent sind.

Klausuraufgabe

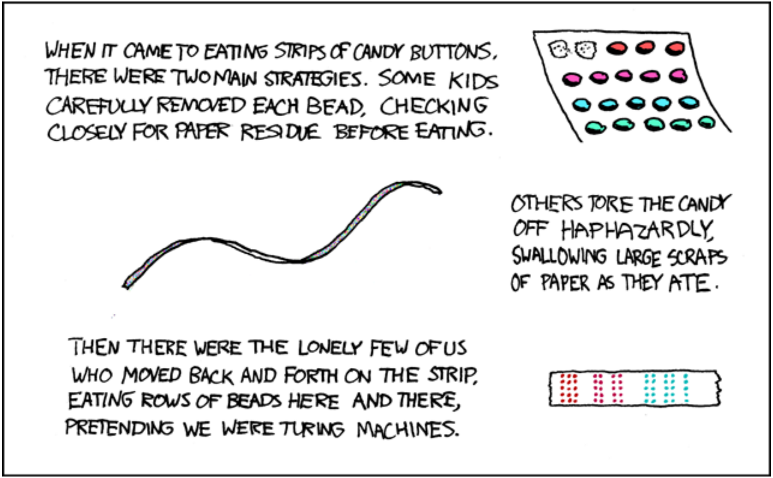
Sommer Semester 2010 - Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben seien 3^n Kugeln, von denen eine Kugel 1,01 kg wiegt und alle anderen Kugeln 1 kg wiegen, und die ansonsten nicht zu unterscheiden sind. Man hat eine Waage, mit der man die Gewichte zweier beliebig großer Mengen von Kugeln vergleichen kann:

- Falls das Gewicht in beiden verglichenen Mengen gleich ist, gibt die Waage den Wert 0 zurück.
- Falls das Gewicht in der linken Waagschale größer als das Gewicht in der rechten Waagschale ist, gibt die Waage den Wert 1 zurück.
- Falls das Gewicht in der linken Waagschale kleiner als das Gewicht in der rechten Waagschale ist, gibt die Waage den Wert -1 zurück.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n :
Man kann durch n-maliges Vergleichen mit der Waage die Kugel K herausfinden, die 1,01 kg wiegt.

EOF



source : http : //imgs.xkcd.com/comics/candy_button_paper.png