

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 14

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 7. Februar 2013



Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

- 1 Statistik
- 2 Wiederholung
- 3 Kongruenzrelationen
- 4 Halbordnungen

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

- 1 Statistik
- 2 Wiederholung
- 3 Kongruenzrelationen
- 4 Halbordnungen

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

Die folgenden Grafiken beziehen sich

- bei den Übungsblättern auf diejenigen, die den Übungsschein erhalten haben und
- bei der Übungsklausur auf diejenigen, die abgegeben haben.

Statistik

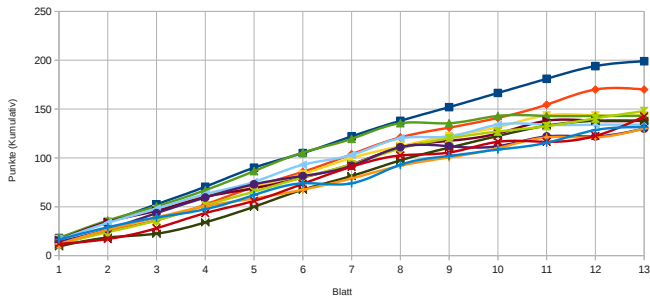
Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

Verlauf der Punkteverteilung

Tutorium 41

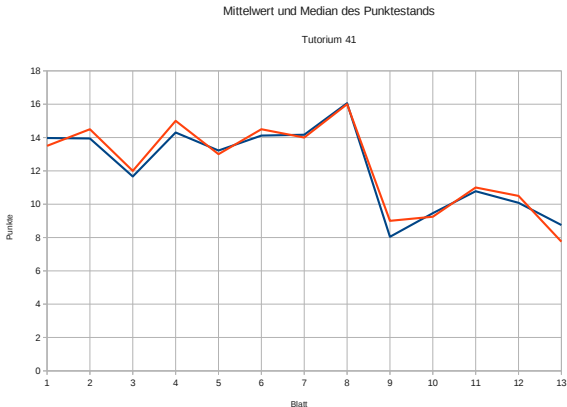


Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen



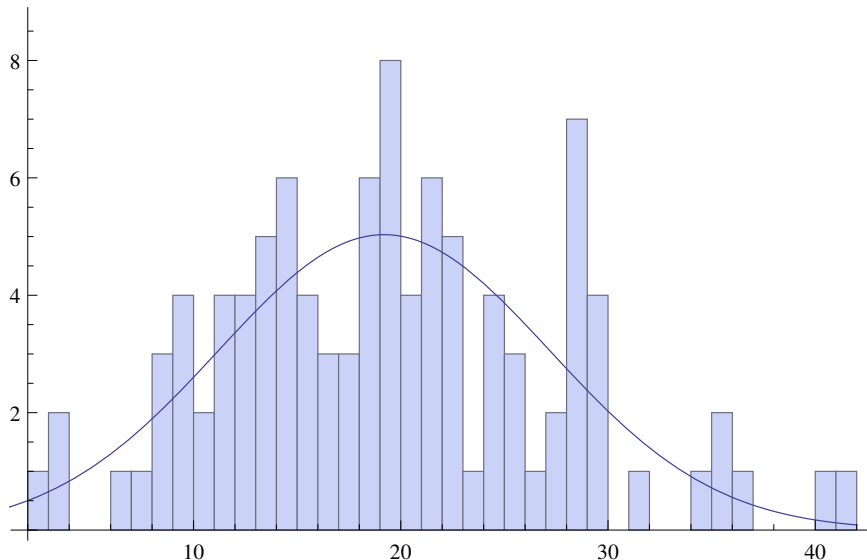
blau: Mittelwert, rot: Median

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen



Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

- 1 Statistik
- 2 Wiederholung**
- 3 Kongruenzrelationen
- 4 Halbordnungen

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Warum?
- Gilt $P \subset PSPACE$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L , die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
Nein.
- Warum?
- Gilt $P \subset PSPACE$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L , die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Warum? Siehe Halteproblem.
- Gilt $P \subset PSPACE$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L , die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Warum?
- Gilt $P \subset PSPACE$? Ja.
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L , die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen?

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Warum?
- Gilt $P \subset PSPACE$?
- Gibt es endliche Akzeptoren für Sprachen L , die weniger Zustände haben als L Nerode-Äquivalenzklassen? Nein.

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

- 1 Statistik
- 2 Wiederholung
- 3 Kongruenzrelationen**
- 4 Halbordnungen

Definition: Verträglichkeit

Es sei \equiv eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M und $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung. Man sagt, dass \equiv mit f verträglich ist, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \implies f(x_1) \equiv f(x_2)$$

Was bedeutet das anschaulich? Fallen euch Beispiele ein?

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \quad (1)$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \quad (2)$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \quad (3)$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \quad (4)$$

Beweis.

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \quad (1)$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \quad (2)$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \quad (3)$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \quad (4)$$

Beweis.

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \quad (1)$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \quad (2)$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \quad (3)$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \quad (4)$$

Beweis.

Wir kennen noch vom letzten Mal:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = kn \quad (1)$$

Das heißt auch, dass x_1 und x_2 bei einer Division mit n den gleichen Rest haben.

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = mn \quad (2)$$

Ich behaupte es gilt:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \quad (3)$$

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n} \quad (4)$$

Beweis.

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m) n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m) n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Addieren nun die beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m) n$$

Und wir sehen, dass gilt

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Löse Gleichung (1) nach x_1 auf und Gleichung (2) nach y_1 und multipliziere beide Seiten:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot y_1 &= (x_2 + kn) \cdot (y_2 + mn) \\&= x_2 \cdot y_2 + n(mx_2 + ky_2 + kmn) \\x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 &= n(mx_2 + ky_2 + kmn) \\&\iff x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n}\end{aligned}$$

Damit können wir auch “nur mit Repräsentanten” der Äquivalenzklasse rechnen:

$$[2] + [3] = [2 + 3] = [5] = [0]$$

$$[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [1]$$

Nennt weitere Beispiele für die Äquivalenzrelation Kongruent Modulo i , wobei sich i bei jedem von euch erhöht.

Die Operationen $+$ und \cdot sind also verträglich mit unserer Relation “kongruent modulo n ”.

Definition: Kongruenzrelation

Eine Funktion, die mit allen gerade interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträglich ist, nennt man auch **Kongruenzrelation**.

Kongruenz und die Nerode-Äquivalenz

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

Gegeben sei die Funktion:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Warum ist die Nerode-Äquivalenz mit dieser Abbildung verträglich?

Gegeben sei die Funktion:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Warum ist die Nerode-Äquivalenz mit dieser Abbildung verträglich?

Gegeben sei $w_1 \equiv_L w_2$, das heißt nach Definition der Nerode-Äquivalenz:

$$\begin{aligned} w_1 w \in L &\Leftrightarrow w_2 w \in L \\ (w_1 x) v \in L &\Leftrightarrow w_1 (xv) \in L \\ &\Leftrightarrow w_2 (xv) \in L \text{ weil } w_1 \equiv_L w_2 \\ &\Leftrightarrow (w_2 x) v \in L \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Nerode-Äquivalenz mit der Konkatination verträglich ist.

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit \equiv_L (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?

Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)

Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] | w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit \equiv_L (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?

Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)

Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] | w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit \equiv_L (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?

Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)

Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] | w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Wir wissen nun, dass $f_x : A^* : w \mapsto wx$ (Konkatenation) mit \equiv_L (Nerode-Äquivalenz) verträglich ist. Damit gilt auch:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

Was heißt das?

Die Nerode-Äquivalenz ist mit der Konkatenation verträglich. Damit ergibt sich auch eine Relation auf die Äquivalenzmenge $A^*_{/\equiv_L}$. (Die obige Funktion ist **wohldefiniert**.)

Damit können wir uns einen endlichen Akzeptor konstruieren, wähle:

- $z_0 = [\varepsilon]$ (Startzustand) und
- $F = \{[w] \mid w \in L\}$ (akzeptierte Zustände)

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

- 1 Statistik
- 2 Wiederholung
- 3 Kongruenzrelationen
- 4 Halbordnungen**

Definition: Antisymmetrie

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

j++j

Statistik

Wiederholung

Kongruenzrelationen

Halbordnungen