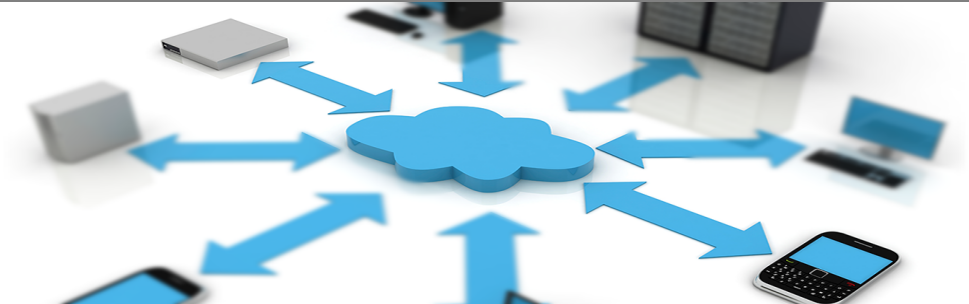


# GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 13

Vincent Hahn – [vincent.hahn@student.kit.edu](mailto:vincent.hahn@student.kit.edu) | 31. Januar 2013



Wiederholung

Unentscheidbare Probleme

Äquivalenzrelationen

- 1 Wiederholung
- 2 Unentscheidbare Probleme
- 3 Äquivalenzrelationen

## Wiederholung

Unentscheidbare Probleme

Äquivalenzrelationen

- 1 Wiederholung
- 2 Unentscheidbare Probleme
- 3 Äquivalenzrelationen

## Wiederholung

Unentscheidbare Probleme

Äquivalenzrelationen

- Irgendwas zu Turingmaschinen
- Irgendwas zu Codierungen
- Irgendwas zu Relationen
- Reflexiv
- Transitiv
- Symmetrisch

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

- 1 Wiederholung
- 2 Unentscheidbare Probleme**
- 3 Äquivalenzrelationen

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

Es gibt Probleme, die lassen sich mit einer Turing-Maschine (oder äquivalent: einem Java-Programm) nicht lösen. (Auch nicht mit unendlich viel Zeit und Platz.)

Ein solches Problem ist nicht **entscheidbar**

## Entscheidbarkeit

Für ein entscheidbares Problem gibt es eine Turingmaschine, die für jede Eingabe hält und das Eingabewort entweder akzeptiert oder nicht.

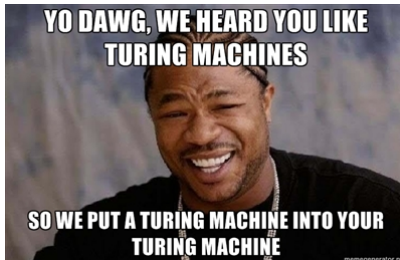
# Codierung von Turingmaschinen

Bisher haben wir eine Turingmaschine formal so geschrieben

$T = (Z, Z_0, X, f, g, m)$ . Wir bauen uns eine Codierung, die die ganze Turingmaschine in ein Wort  $w_1$  “packt”.

Dieses Wort  $w_1$  übergeben wir dann einer universellen Turingmaschine  $U$ , die

- überprüft, ob  $w_1$  eine Turingmaschine  $T$  codiert
- dann die Turingmaschine  $T$  “simuliert” und als Eingabe  $w_2$  verwendet
- und schließlich das Ergebnis davon ausgibt



## Satz

Es ist nicht möglich, eine Turingmaschine  $U$  zu bauen, die für jede Turingmaschine  $T$  (codiert als  $w_1$ ) und jede Eingabe  $w_2$  entscheidet, ob  $T$  bei der Eingabe von  $w_2$  hält.

Das lässt sich auch beweisen. Halteproblembeweis (verdorbene Diagonale)



Wiederholung

Unentscheidbare Probleme

Äquivalenzrelationen

- 1 Wiederholung
- 2 Unentscheidbare Probleme
- 3 Äquivalenzrelationen

Wiederholung

Unentscheidbare Probleme

Äquivalenzrelationen

## Definition: Äquivalenzrelation

Eine Relation  $R$  ist genau dann eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie

- symmetrisch,
- reflexiv und
- transitiv

ist.

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

■  $\leq$

■  $>$

■  $=$

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

■  $\leq$  reflexiv, transitiv

■  $>$

■  $=$

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

- $\leq$  reflexiv, transitiv
- $>$  transitiv
- $=$

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

Welche Eigenschaften haben diese Relationen (stets auf ganze Zahlen)?

- $\leq$  reflexiv, transitiv
- $>$  transitiv
- $=$  reflexiv, transitiv, symmetrisch

Wie sieht das in einem Graphen aus? (Tafel)

## Definition: Äquivalenzklasse

Sind zwei Elemente  $(x, y) \in R$ , so schreibt man auch  $xRy$  (Infixschreibweise). Alle Elemente, die miteinander in Relation stehen, befinden sich in der selben **Äquivalenzklasse**:

$$[x]_R = \{y | yRx\}$$

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

- Stimmt es, dass auch  $xRy$  folgt:  $[x]_R = [y]_R$ ?
- Existiert ein  $z \in [x]_R$  und  $z \in [y]_R$ , so ist  $[x]_R = [y]_R$ .
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu  $R = \text{mod } 6$ ?



## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

- Stimmt es, dass auch  $xRy$  folgt:  $[x]_R = [y]_R$ ? Ja.
- Existiert ein  $z \in [x]_R$  und  $z \in [y]_R$ , so ist  $[x]_R = [y]_R$ .
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu  $R = \text{mod } 6$ ?

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

- Stimmt es, dass auch  $xRy$  folgt:  $[x]_R = [y]_R$ ? Ja.
- Existiert ein  $z \in [x]_R$  und  $z \in [y]_R$ , so ist  $[x]_R = [y]_R$ . Ja.
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu  $R = \text{mod } 6$ ?

## Wiederholung

## Unentscheidbare Probleme

## Äquivalenzrelationen

- Stimmt es, dass auch  $xRy$  folgt:  $[x]_R = [y]_R$ ? Ja.
- Existiert ein  $z \in [x]_R$  und  $z \in [y]_R$ , so ist  $[x]_R = [y]_R$ . Ja.
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es zu  $R = \text{mod } 6$ ? 6

## Definition: Nerode-Äquivalenzrelation

Sei  $L \subseteq A^*$  eine formale Sprache.  $w_1$  und  $w_2$  seien Wörter  $\in A^*$ . Die Wörter heißen **Nerode-Äquivalent** ( $\equiv_L$ ), falls gilt:

$$w_1 \equiv_L w_2 \leftrightarrow (\forall w \in A^* : w_1 w \in L \leftrightarrow w_2 w \in L)$$

- Alphabet  $A = \{a, b\}$
- Sprache  $L \subset A^*$ ,  $L$  enthält alle Wörter ohne das Teilwort  $ba$ :  

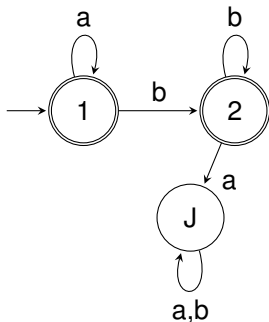
$$L = \langle a^*b^* \rangle$$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?

Nerode-Äquivalenzklassen:

- Alphabet  $A = \{a, b\}$
- Sprache  $L \subset A^*$ ,  $L$  enthält alle Wörter ohne das Teilwort  $ba$ :  
 $L = \langle a^*b^* \rangle$

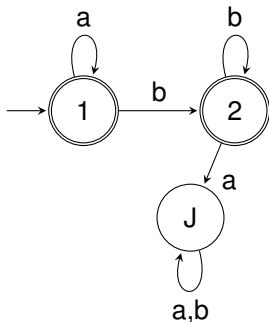
Wie sieht der zugehörige Automat aus?



Nerode-Äquivalenzklassen:

- Alphabet  $A = \{a, b\}$
- Sprache  $L \subset A^*$ ,  $L$  enthält alle Wörter ohne das Teilwort  $ba$ :  
 $L = \langle a^*b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?

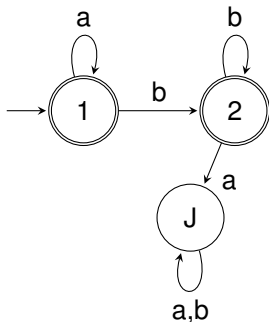


Wie kann jeder Zustand erreicht werden?

Nerode-Äquivalenzklassen:

- Alphabet  $A = \{a, b\}$
- Sprache  $L \subset A^*$ ,  $L$  enthält alle Wörter ohne das Teilwort  $ba$ :  
 $L = \langle a^*b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?



Wie kann jeder Zustand erreicht werden?

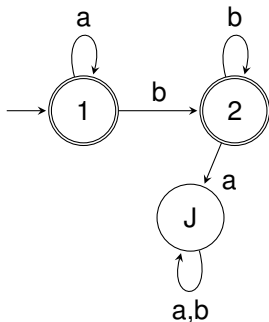
- $a^*$
- $a^*bb^*$
- $a^*bb^*a\{a,b\}^*$

Nerode-Äquivalenzklassen:



- Alphabet  $A = \{a, b\}$
- Sprache  $L \subset A^*$ ,  $L$  enthält alle Wörter ohne das Teilwort  $ba$ :  
 $L = \langle a^*b^* \rangle$

Wie sieht der zugehörige Automat aus?



Wie kann jeder Zustand erreicht werden?

- $a^*$
- $a^*bb^*$
- $a^*bb^*a\{a,b\}^*$

Nerode-Äquivalenzklassen:  
 $[\epsilon]$ ,  $[b]$ ,  $[ba]$ .

## Definition: Faktormenge

Die Menge aller Äquivalenzklassen einer Menge zur Relation  $R$  bezeichnet man als **Faktormenge** und schreibt  $M/R$ .