Karlsruher Institut für Technologie

GBI Tutorium Nr. 41

Foliensatz 02

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu | 1. November 2012

Outline/Gliederung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Typische Fehler

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Anzahl der Elemente einer Menge

$$A = \{a, b, c\} \Rightarrow |A| = 3$$
$$B = \{c, d, e\} \Rightarrow |A \cup B| = 5$$

Weitere

- Mengenäquivalenz wird nicht mit Wahrheitstabellen bewiesen
- Für einen Gegenbeweis reicht ein widerlegendes Beispiel, für einen Beweis nicht!

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Alphabete

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Ein Alphabet ist eine endliche, nichtleere Menge an „Zeichen“ oder „Symbolen“.

Beispiele

- $A = \{a, b, d\}$
- $B = \{3, 9, V, k\}$
- Der ASCII-Zeichensatz

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wörter

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Ein Wort über einem Alphabet A ist eine Folge von Zeichen aus A.

Beispiele

- $A = \{H, a, l, o, \textvisiblespace, W, e, t\}$ enthält das Wort Hallo Welt
- ...

Menge aller Wörter

Definition

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet A sind alle Wörter, in denen nur Zeichen aus A enthalten sind. Dies wird als A^* geschrieben.

Beispiele

Alphabet set $A = \{a, b\}$, dann enthält $A*$:

- a
- b
- aa
- ab
- ba
- $\ldots$

Konkatenation von Wörtern

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Konkatenation zweier Worte w_1 und w_2 aus den Alphabeten A und B wird geschrieben als $w_1 \circ w_2 \in (A \cup B)$

Beispiele

- $A = \{B, e, t\}$ enthält das Wort $w_1 = Bett$
- $B = \{w, a, n, z, e\}$ enthält das Wort $w_2 = wanze$
- $w_1 \circ w_2 = Bettwanze \neq w_2 \circ w_1 = wanzeBett$
- $A \cup B = \{B, e, t, w, a, n, z\}$ (e nur einmal!)

Konkatenation von Wörtern

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Konkatenation zweier Worte w_1 und w_2 aus den Alphabeten A und B wird geschrieben als $w_1 \circ w_2 \in (A \cup B)$

Beispiele

- $A = \{B, e, t\}$ enthält das Wort $w_1 = Bett$
- $B = \{w, a, n, z, e\}$ enthält das Wort $w_2 = wanze$
- $w_1 \circ w_2 = Bettwanze \neq w_2 \circ w_1 = wanzeBett$
- $A \cup B = \{B, e, t, w, a, n, z\}$ (e nur einmal!)

Konkatenation von Wörtern

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Konkatenation zweier Worte w_1 und w_2 aus den Alphabeten A und B wird geschrieben als $w_1 \circ w_2 \in (A \cup B)$

Beispiele

- $A = \{B, e, t\}$ enthält das Wort $w_1 = Bett$
- $B = \{w, a, n, z, e\}$ enthält das Wort $w_2 = wanze$
- $w_1 \circ w_2 = Bettwanze \neq w_2 \circ w_1 = wanzeBett$
- $A \cup B = \{B, e, t, w, a, n, z\}$ (e nur einmal!)

Mehrfachkonkatenation

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Beispiel

w sei ein Wort (zum Beispiel über dem vorherigen Alphabet A).

- $w = Bett$
- $w^3 = BettBettBett$

Das leere Wort

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Das leere Wort wird mit ϵ geschrieben und hat die Länge 0.

Beispiele

Das leere Wort ist *nicht das Leerzeichen*.

- $\epsilon \circ w \circ \epsilon = w$
- $w^0 = \epsilon$

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Wortlänge

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol“ $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Wortlänge

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol" $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Wortlänge

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol“ $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Wortlänge

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die Länge eines Wortes w gibt die Anzahl der darin enthaltenen Zeichen an. Gekennzeichnet wird dies mit dem „Pipe-Symbol“ $|w|$.

Beispiel

- $|Hallo| = 5$
- $|w^k| = k \cdot |w|$
- $|\epsilon| = 0$
- $|w_1 \circ w_2| = |w_1| + |w_2|$

Präfix und Suffix

Definition: Präfix

Ein Präfix ist ein beliebig langer Teil am Anfang eines Wortes. a ist ein Präfix von w, falls gilt: $w = a \circ b$.

Definition: Suffix

Ein Suffix ist ein beliebig langer Teil am Ende eines Wortes. b ist ein Suffix von w, falls gilt: $w = a \circ b$.

Präfix und Suffix

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition: Präfix

Ein Präfix ist ein beliebig langer Teil am Anfang eines Wortes. a ist ein Präfix von w, falls gilt: $w = a \circ b$.

Definition: Suffix

Ein Suffix ist ein beliebig langer Teil am Ende eines Wortes. b ist ein Suffix von w, falls gilt: $w = a \circ b$.

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe

Gegeben sei das Alphabet $A = \{0, 1\}$.

- Welche Worte befinden sich in A^5?
- Ist auch das leere Wort darin enthalten?
- Was ist der Unterschied zwischen $A^2 \times A^2$ und $A^2 \cdot A^2$?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe

Gegeben sei das Alphabet $A = \{0, 1\}$.

- Welche Worte befinden sich in A^5?
- Ist auch das leere Wort darin enthalten?
- Was ist der Unterschied zwischen $A^2 \times A^2$ und $A^2 \cdot A^2$?

Aufgaben

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Aufgabe

Gegeben sei das Alphabet $A = \{0, 1\}$.

- Welche Worte befinden sich in A^5?
- Ist auch das leere Wort darin enthalten?
- Was ist der Unterschied zwischen $A^2 \times A^2$ und $A^2 \cdot A^2$?

Überblick

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vollständige Induktion

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Definition

Die vollständige Induktion ist eine mathematische Beweismethode, mit der die Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden kann.

Vollständige Induktion

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.

Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

1. *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
2. *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
3. *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Vollständige Induktion

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.
Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

1. *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
2. *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
3. *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Vollständige Induktion

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.
Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

1. *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
2. *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
3. *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Vollständige Induktion

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Vorgehen

Eine Behauptung ist gegeben.
Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

1. *Induktionsanfang IA*: Zeige die Gültigkeit der Behauptung für das erste Element.
2. *Induktionsvoraussetzung IV*: Wir wissen, dass die Behauptung für ein beliebiges, aber festes Element n gilt.
3. *Induktionsschritt IS*: Prüfe die Gültigkeit für ein darauffolgendes Element $n + 1$.

Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis

1. *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
2. *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
3. *IS*: $k \to k + 1$:
   - Links: $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1)$
   - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
4. Die Behauptung stimmt.

Beispiel

Behauptung

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Beweis

1. *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
2. *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
3. *IS*: $k \to k + 1$:
   - Links: $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1)$
   - Rechts: $\frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2} = \frac{(k+1)\cdot k}{2} + \frac{(k+1)\cdot 2}{2}$
4. Die Behauptung stimmt.

Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis

1. *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
2. *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
3. *IS*: $k \to k + 1$:
   - Links: $1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
   - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
4. Die Behauptung stimmt.

Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis

1. *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
2. *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
3. *IS*: $k \to k + 1$:
   - Links: $1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
   - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
4. Die Behauptung stimmt.

Beispiel

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis

1. *IA*: $n = 1$: Oben einsetzen, passt: $1 = 1$.
2. *IV*: „Es gibt ein beliebiges, aber festes n für das die obige Behauptung gilt.“ Dieses n möchte ich nun k nennen, einfach so :-)
3. *IS*: $k \rightarrow k + 1$:
   - Links: $1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$
   - Rechts: $\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$
4. Die Behauptung stimmt.

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{\mathrm{n}+1} = x_{\mathrm{n}} + 2 \wedge x_0 = 0 \Leftrightarrow x_{\mathrm{n}} = 2\,n$

Lösung

1. *IA*: $n = 0$.
2. *IV*:
3. *IS*:

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2 \wedge x_0 = 0 \Leftrightarrow x_n = 2\,n$

Lösung

1. *IA*: $n = 0$. $x_0 = 0$ (nach Vorgabe) und $2 \cdot 0 = 0$ (die rechte Seite)
2. *IV*:
3. *IS*:

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2 \land x_0 = 0 \Leftrightarrow x_n = 2\,n$

Lösung

1. *IA*: $n = 0$. $x_0 = 0$ (nach Vorgabe) und $2 \cdot 0 = 0$ (die rechte Seite)
2. *IV*: „Für ein beliebiges, aber festes n gilt die obige Behauptung:$x_n = 2\,n$“
3. *IS*:

Übung

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu

Behauptung

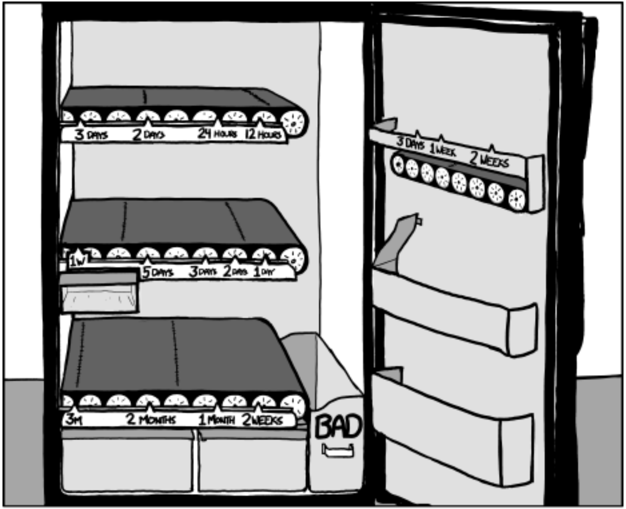
$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2 \land x_0 = 0 \Leftrightarrow x_n = 2n$

Lösung

1. *IA*: $n = 0$. $x_0 = 0$ (nach Vorgabe) und $2 \cdot 0 = 0$ (die rechte Seite)
2. *IV*: „Für ein beliebiges, aber festes n gilt die obige Behauptung:$x_n = 2n$"
3. *IS*:
   Rechte Seite: $x_{n+1} = 2(n+1)$.
   Linke Seite: $x_{n+1} = x_n + 2 \stackrel{\text{IV}}{=} 2n + 2$

xkcd

Vincent Hahn – vincent.hahn@student.kit.edu



MY IDEAL FRIDGE