数据科学与工程算法基础 习题9

10195501436 龚敬洋

1

（1）

$$A^TA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

其特征值与特征向量

$$\lambda_1=10,\alpha_1=(1,1)^T$$
$$\lambda_2=0,\alpha_2=(-1,1)^T$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其特征值与特征向量

$$\lambda_1'=10,\alpha_1'=(1,2,0)^T$$
$$\lambda_2'=0,\alpha_2'=(0,0,1)^T$$
$$\lambda_3'=0,\alpha_3'=(-2,1,0)^T$$

因此 A 的奇异值 $\sigma_1=\sqrt{10},\sigma_2=0$

（2） 由**（1）**易得 A 的奇异值分解为

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

2

（1） 协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix}\frac{19}{3} & \frac{5}{2} & -5\\ \frac{5}{2} & 1 & -2\\ -5 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

（2） 对于协方差矩阵 C，其特征多项式

$$|\lambda I-C|=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{19}{3} & -\frac{5}{2} & 5\\ -\frac{5}{2} & \lambda-1 & 2\\ 5 & 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{34}{3}\lambda^2+\frac{5}{12}\lambda$$

因此其特征值 $\lambda_1=\frac{1}{6}(34+\sqrt{1141}),\lambda_2=\frac{1}{6}(34-\sqrt{1141}),\lambda_3=0$

易见，最大特征值为 $\lambda_1\approx 11.2964$

其对应的特征向量 $\alpha_1\approx(-0.7478,-0.2969,0.5938)^T$

由此可知这组数据的主成分

$$Z=(-0.7478,-0.2969,0.5938)\begin{pmatrix}1&-1&4\\2&1&3\\1&3&-1\end{pmatrix}=(-0.7478,2.2323,-4.4757)$$

3

A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-4\\-\frac{1}{2}&\lambda&-2\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

因此其特征值 $\lambda_1=2$,$\lambda_2=-1$（二重根）

对于 $\lambda_1=2$,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-\frac{1}{2}&2&-2\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量 $\alpha_1=(4,2,1)^T$

对于 $\lambda_2=-1$,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}-1&-2&-4\\-\frac{1}{2}&-1&-2\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量 $\alpha_2=(-4,0,1)^T,\alpha_3=(-2,1,0)^T$

因此 A 的特征值分解

$$A=\begin{pmatrix}0&2&4\\\frac{1}{2}&0&2\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{12}&-\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{12}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

7

(1) A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\-3&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)$$

因此其特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=0$

对于 $\lambda_1=-2$,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量为 $\alpha_1=(1,3)^T$

对于 $\lambda_2=0$,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量为 $\alpha_2=(1,1)^T$

可见二阶矩阵 A 有两个线性无关的特征向量，因此**可对角化**

（2） B 的特征多项式

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-5 & 2\\ 0 & -6 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

因此其特征值为 $\lambda_1=2$（二重根），$\lambda_2=1$

对于 $\lambda_1=2$,

$$\lambda I-B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & -6 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量为 $\alpha_1=(0,2,3)^T,\alpha_2=(1,0,0)^T$

对于 $\lambda_2=1$,

$$\lambda I-B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & -6 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量为 $\alpha_3=(0,1,2)^T$

可见三阶矩阵 B 有三个线性无关的特征向量，因此**可对角化**