数据科学与工程算法基础 习题8

10195501436 龚敬洋

1

由于主特征值 $2 \in \mathbb{R}$ 且不是重根，因此可以使用幂法求出。

收敛速度正相关于 $\lambda_2/\lambda_1 = 1.7/2 = 0.85$

2

(1) A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

因此其特征值 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$

对于 $\lambda_1 = 6$，

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量 $\alpha_1 = (1, 4)^T$

对于 $\lambda_2 = 1$，

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量 $\alpha_2 = (1, -1)^T$

(2)

k	v^T	$\|\|v\|\|_2$	u^T
1	$(3, 9)$	9.4868	$(0.3162, 0.9487)$
2	$(1.5811, 6.0083)$	6.2129	$(0.2545, 0.9671)$
3	$(1.4761, 5.8535)$	6.0368	$(0.2445, 0.9696)$
4	$(1.4586, 5.8260)$	6.0058	$(0.2429, 0.9701)$
5	$(1.4559, 5.8221)$	6.0014	$(0.2426, 0.9701)$
6	$(1.4553, 5.8209)$	6.0001	$(0.2425, 0.9701)$
7	$(1.4551, 5.8205)$	5.9996	$(0.2425, 0.9701)$

因此主特征值 $\lambda_1 \approx 6$，对应的特征向量为 $\alpha_1 = (0.2425, 0.9701)^T$

4

(1) 设 $v_0=(1,1)^T$，，因此

$$u_0=\frac{v_0}{||v_0||_2}\approx(0.7071,0.7071)^T,\mu_0=\langle Au_0,u_0\rangle=5.5$$

u	μ
$(0.5145,0.8575)$	5.8530
$(0.5257,0.8506)$	5.8541
$(0.5257,0.8507)$	5.8541
$(0.5257,0.8507)$	5.8541

因此矩阵 A 的一个特征值为 5.8541，其对应的特征向量为 $(0.5257,0.8507)^T$

(2) 使用反幂法，取 $\mu=1$

设 $v_0=(1,1)^T$，因此

$$u_0=\frac{v_0}{||v_0||_2}\approx(0.7071,0.7071)^T$$

迭代求解方程 $(A-I)v_i=u_{i-1}$ 并归一化得到 u_i

i	u_i^T
1	$(0,1)$
2	$(1,0)$
3	$(-0.7071,0.7071)$
4	$(0.8944,-0.4472)$
$\dots$	$\dots$
16	$(0.8507,-0.5257)$
17	$(-0.8507,0.5257)$
18	$(0.8507,-0.5257)$

此时已收敛

因此 A 的第二大特征值 $\lambda_2=u_{18}^TAu_{18}\approx-0.8541$，其对应的特征向量为 $\alpha_2\approx(0.8507,-0.5257)^T$

6

A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -3\\ -1 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4+\sqrt{15})(\lambda-4-\sqrt{15})$$

因此其特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=4-\sqrt{15},\lambda_3=4+\sqrt{15}$

对于 $\lambda_1=1$,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -3\\ -1 & -3 & -5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量 $\alpha_1=(-2,-1,1)^T$

对于 $\lambda_2=4-\sqrt{15}$,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}3-\sqrt{15} & -1 & -1\\ -1 & 2-\sqrt{15} & -3\\ -1 & -3 & -2-\sqrt{15}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{15}-5}\\ 0 & 1 & \frac{1-\sqrt{15}}{\sqrt{15}-5}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量 $\alpha_2=\left(\frac{2}{5-\sqrt{15}},\frac{\sqrt{15}-1}{\sqrt{15}-5},1\right)^T$

对于 $\lambda_3=4+\sqrt{15}$,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}3+\sqrt{15} & -1 & -1\\ -1 & 2+\sqrt{15} & -3\\ -1 & -3 & -2+\sqrt{15}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{5+\sqrt{15}}\\ 0 & 1 & -\frac{1+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此其对应的特征向量 $\alpha_3=\left(\frac{2}{5+\sqrt{15}},\frac{1+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}},1\right)^T$