数据科学与工程算法基础 习题11

10195501436 龚敬洋

1

引入 $0-1$ 变量

$$w=\begin{cases}1, x_1+x_2+x_3+x_4\leq 4\\0, 3x_1-x_2-x_3+x_4\leq 3\end{cases}$$

则对于足够大的正数 M，其对应的约束可以改写为

$$x_1+x_2+x_3+x_4\leq 4+M(1-w)$$
$$3x_1-x_2-x_3+x_4\leq 3+Mw$$

4

设变量

$$x_i=\begin{cases}1, \text{choose } S_i\\0, \text{otherwise}\end{cases},1\leq i\leq m$$

因此原问题可以写为

$$\begin{aligned}\textbf{max}\quad & c_1x_1+\cdots+c_mx_m\\ \textbf{s.t}\quad & S_i\cap S_j=\varnothing, 1\leq i<j\leq m\end{aligned}$$

6

1. LP（1）：

$$\begin{aligned}\textbf{max}\quad & 10x_1+4x_2+9x_3\\ \textbf{s.t}\quad & 5x_1+4x_2+3x_3\leq 9, 0\leq x_i\leq 1(1\leq i\leq 3)\end{aligned}$$

2. 当 $x_1=1$ 时，

LP（1）：

$$\begin{aligned}\textbf{max}\quad & 10+4x_2+9x_3\\ \textbf{s.t}\quad & 5+4x_2+3x_3\leq 9, 0\leq x_i\leq 1(2\leq i\leq 3)\end{aligned}$$

该问题的最优解为 $x_2=\frac{1}{4}, x_3=1, z=20$

因此 IP（1）的上界为 $Z_{LP(1)}=20$

3. IP（1）的松弛线性规划LP（1）作为枚举树的根结点被标记为active

当前最优解 $Z_1=-\infty$

LP（1）的最优解：$x_1=1, x_2=\frac{1}{4}, x_3=1, z=20$

$Z_{LP(1)}>Z_1$，且 $x(1)$ 为非整数解

IP（1）置为inactive，IP（2）和IP（3）置为active

LP（2）：

$$\begin{aligned} &\textbf{max} && 10x_1+4x_2+9x_3 \\ &\textbf{s.t} && 5x_1+4x_2+3x_3\leq 9, x_1=0, 0\leq x_i\leq 1(2\leq i\leq 3) \end{aligned}$$

LP（2）最优解：$x_1=0, x_2=1, x_3=1, z=13$

$Z_{LP(2)}>Z_1$，且 $x(2)$ 为整数解，即 $x(2)$ 是IP（2）的可行解

更新 $Z_1=Z_{LP(2)}=Z_{IP(2)}=13$

LP（3）：

$$\begin{aligned} &\textbf{max} && 10x_1+4x_2+9x_3 \\ &\textbf{s.t} && 5x_1+4x_2+3x_3\leq 9, x_1=1, 0\leq x_i\leq 1(2\leq i\leq 3) \end{aligned}$$

LP（3）最优解：$x_1=1, x_2=\frac{1}{4}, x_3=1, z=20$

$Z_{LP(3)}>Z_1$，且 $x(3)$ 为非整数解

IP（3）置为inactive，IP（4）和IP（5）置为active

LP（4）：

$$\begin{aligned} &\textbf{max} && 10x_1+4x_2+9x_3 \\ &\textbf{s.t} && 5x_1+4x_2+3x_3\leq 9, x_1=1, x_2=0, 0\leq x_3\leq 1 \end{aligned}$$

LP（4）最优解：$x_1=1, x_2=0, x_3=1, z=19$

$Z_{LP(4)}>Z_1$，且 $x(4)$ 为整数解，即 $x(4)$ 是IP（4）的可行解

更新 $Z_1=Z_{LP(4)}=Z_{IP(4)}=19$

LP（5）：

$$\begin{aligned} &\textbf{max} && 10x_1+4x_2+9x_3 \\ &\textbf{s.t} && 5x_1+4x_2+3x_3=9, x_1=1, x_2=1, 0\leq x_3\leq 1 \end{aligned}$$

LP（5）最优解：$x_1=1, x_2=1, x_3=0, z=14$

$Z_{LP(5)}<Z_1$

至此，分支定界算法结束

最优解为 $x_1=1, x_2=0, x_3=1, z=19$