

数据科学与工程算法基础 习题7

10195501436 龚敬洋

1

(1) 可知 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $\pi = (1, 0)$

因此

$$\pi p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\pi p^2 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right)$$

$$\pi p^3 = \left(\frac{11}{32}, \frac{21}{32} \right)$$

$$\pi p^4 = \left(\frac{43}{128}, \frac{85}{128} \right)$$

(2) 由转移矩阵可知该链不可约且反周期，因此其存在平稳分布

设平稳分布为 $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$

故由

$$\begin{cases} \tilde{\pi} = \tilde{\pi} p \\ \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 = 1 \end{cases}$$

解得 $\tilde{\pi} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi p^n = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

2

设 p 的平稳分布为 π

则有 $\pi p = \pi$

因此

$$\frac{\pi}{n}((n-1)I + p) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi + \frac{\pi p}{n} + \pi - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} = \pi$$

也即 p 与 $\frac{1}{n}((n-1)I + p)$ 有相同的平稳分布

3

(1) 多次试验后停留概率不变, 此时可以看做平稳分布 $(0.2, 0.8)$

于是由 $\pi p = \pi$ 可知 $p = 0.125$

(2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.125 & 0.875 \end{pmatrix}$$

不可约: 任意两个状态联连通

反周期: 每个状态的周期都是1

4

(1)

$$\pi p = (0.4, 0.6) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (0.4, 0.6) = \pi$$

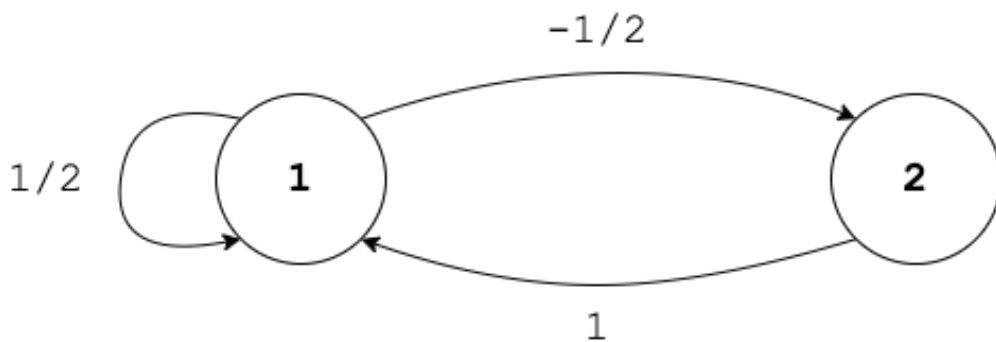
因此 π 为该链的平稳分布

(2)

$$\pi \frac{1}{2} (I + p) = (0.4, 0.6) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = (0.4, 0.6) = \pi$$

因此 π 为该链的平稳分布

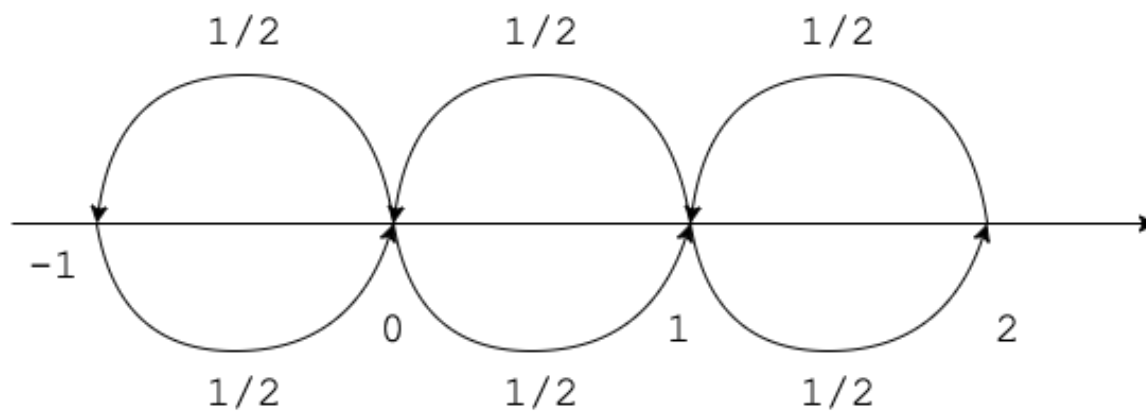
5



周期: 状态 1 : 1, 状态 2 : 1

不可约, 反周期

6



不可约：任意两个状态之间均可通过有限步转移到达

不是反周期的：各个状态的周期均为 2

7

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}(I + p) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi p}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi\end{aligned}$$

因此 p 和 $\frac{1}{2}(I + p)$ 具有相同的平稳分布