

# 线性化Vicsek模型的同步性分析

唐共国, 郭雷

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京100080  
E-mail: Lguo@iss.ac.cn

**摘要:** 本文研究了线性化Vicsek模型, 给出了一个仅加在模型参数上的充分条件, 保证当模型中个体数量充分大时, 所有个体运动方向的大概率同步。

**关键词:** 多个体系统, 群体行为, 线性化Vicsek模型, 大概率同步, 图的Laplace矩阵, 规范化代数连通度

## Convergence Analysis of Linearized Vicsek's Model

Gongguo Tang, Lei Guo

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080  
E-mail: Lguo@iss.ac.cn

**Abstract:** In this paper, the linearized Vicsek's Model will be considered. A sufficient condition will be established to guarantee the convergence of the agents' fly headings in large probability when the number of agents in the model is sufficiently large.

**Key Words:** multi-agent system, collective behavior, linearized Vicsek's Model, convergence in large probability, graph Laplacians, normalized algebraic connectivity

### 1 引言(Introduction)

近年来, 多个体系统群体行为的研究引起了广泛关注[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]。这类系统有一个显著的特点, 即个体间的相互作用遵循某种局部规则, 也就是说每个个体只与在某种意义下跟它邻近的个体相联系。颇令人惊奇的是, 在没有中心控制和全局信息交流的情况下, 仅靠个体的局部相互作用, 系统作为一个整体能够自发的产生各种“宏观”行为, 如同步, 环状漩涡等。尽管更为简单, 这种“宏观”行为的出现与更加复杂的系统里的涌现现象有一定的相似性。正是由于这种简单性, 使对群体行为的计算机建模仿真和理论分析更加方便。这些仿真和分析的结果也可以为揭示更复杂的涌现现象提供一些启示。因此, 来自各个不同领域的专家从不同方面对多个体系统的群体行为进行了深入探索。

生物学中动物群体, 如鸟群, 鱼群, 兽群和细菌菌落等, 都是多个体系统的典型例子。生物学家对它们飞行, 游动和迁徙的机制进行了详细描述和探

讨[1, 2, 3, 4]。在移动过程中, 群体中的个体倾向于与自己的“邻居”保持一致[7]。或多或少的受到这种规律的启示, T.Vicsek等提出了一个模型来模拟和解释非平衡系统中的聚类, 输运和相变[5, 6]。该模型由平面上的有限个个体(粒子, 点, 动物个体等)组成, 每个个体以固定的速率运动。在给定时刻, 个体的运动方向为上一时刻它的“邻居”运动方向的平均, 其中如果两个个体之间的距离小于某个给定的值 $r$ , 则它们互相称为对方的邻居。通过计算机仿真, T.Vicsek等用自发对称性破缺(spontaneous symmetry breaking)解释了该模型中展现的热力学相变行为。

实际上早在1987年, C.Reynolds就构造了一个模型来探讨如何在计算机动画中模仿鸟群和鱼群的行为, 这个模型被称为Boid模型[7]。Boid模型中的个体在运动过程中遵循三条基本规则, 即避免碰撞, 保持速度一致和尽量靠拢。这三条规则都是局部规则, 每个个体仅仅根据它附近个体的行为调整自己的行为。Vicsek模型可以看作Boid模型的一个特例, 但是它们的出发点是完全不同的。

在对自然现象进行观察和利用计算机进行仿真的同时, 研究者们也一直试图对这些现象给

IEEE Catalog Number: 06EX1310

此项工作得到国家自然科学基金资助, 项目批准号: 60221301, 60334040。

出严格的理论分析。在这方面一个重要的尝试是A.Jadbabaie等2003年的文章[8]。文中对Vicsek模型中非线性的运动方向迭代规则进行了线性化,并且证明了,如果系统中的个体在邻居规则下形成的图,每隔固定的时间段便连通一次,则所有个体的速度方向最终趋于一致。后来又有研究者对图的要求进行了减弱[9]。当然这些结果都是非常一般的,能应用在不同的情形下,但是单纯从解决Vicsek模型或其线性化模型的角度来说,它们都有不能令人满意之处。主要是因为这些结果都是把条件加在闭环形成的图上,然而在没有任何噪声的情况下,系统通过迭代所形成的闭环图完全由初始状态和模型参数决定,这些结果都没有给出闭环图如何演化的线索。实际上,在给定初始状态和模型参数的条件下,这些结果中的条件能否被满足是很难验证的。

F.Cucker和S.Smale在[11]中也提出了一个模型,并给出了严格的理论分析,其关于同步的结果是完全加在系统的初始条件和模型参数上的。遗憾的是,此模型中局部规则被作了修改,变成了一个全局的规则,即每个个体通过对所有个体上一时刻的运动速度进行加权平均,确定自己当前时刻的运动速度。当然,距离越远的个体其权值越小。文献[8, 9, 11]的结果都表明,系统迭代形成的闭环图的连通性对同步与否非常重要。

由于通过初始状态和模型参数来严格确定闭环图的演化是非常困难的[8],我们的思路是采用概率的方法,只关心那些处于大概率情形的初始状态,然后考察在这些初始状态下系统闭环图的连通性,最终给出一个加在模型参数上的条件,保证系统同步。我们的结果是渐近性的,只对大量个体的系统有效。在第二节中,我们给出问题的形式化描述和一些记号,第三节给出主要的结果,第四节是总结。

## 2 问题的叙述(Problem Formulation)

Vicsek模型由 $x - y$ 平面上的 $n$ 个个体(粒子,点等)组成,将它们标号为 $1, 2, \dots, n$ 。 $n$ 个个体以相同的速率运动,在 $t$ 时刻,个体的运动方向为它的全体邻居 $t - 1$ 时刻运动速度矢量平均的方向。这里 $t$ 时刻个体 $k$ 的邻居定义为:

$$\mathcal{N}_k(t) = \{j : (x_k(t) - x_j(t))^2 + (y_k(t) - y_j(t))^2 < r_n^2\}$$

其中 $x_k(t), y_k(t)$ 为个体在 $x - y$ 平面上位置的横坐标和纵坐标, $r_n > 0$ 为邻域半径。记邻居个数 $n_k(t) = \#\mathcal{N}_k(t)$ 。为简便起见,将 $x - y$ 平面等同于复平面,并记 $z_k(t) = x_k(t) + iy_k(t)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ 。对于原始的Vicsek模型,其运动方向用复平面上与实轴的夹角 $\theta$ 来表示,则个体 $k$ 运动方向的迭代规则为:

$$\theta_k(t) = \arctan \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_k(t-1)} \sin \theta_j(t-1)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_k(t-1)} \cos \theta_j(t-1)}.$$

设个体运动速率为 $v_n$ ,则个体 $k$ 的位置迭代规则为:

$$\begin{cases} x_k(t) = x_k(t-1) + v_n \cos \theta_k(t-1) \\ y_k(t) = y_k(t-1) + v_n \sin \theta_k(t-1) \end{cases}$$

或

$$z_k(t) = z_k(t-1) + v_n e^{i\theta_k(t-1)} \quad (1)$$

本文将考虑线性化Vicsek模型[8],即将个体运动方向的迭代规则改为:

$$\theta_k(t) = \frac{1}{n_k(t-1)} \sum_{j \in \mathcal{N}_k(t-1)} \theta_j(t-1) \quad (2)$$

假定在时刻 $t = 0$ ,  $n$ 个个体的初始位置 $\{z_k(0), 1 \leq k \leq n\}$ 服从平面上单位正方形内相互独立的均匀分布, $n$ 个初始运动方向的角度 $\{\theta_k(0), 1 \leq k \leq n\}$ 服从 $(-\pi, \pi)$ 之间相互独立的均匀分布。初始状态确定后,系统将按(1)和(2)式演化下去。在给定的时刻 $t$ ,把 $n$ 个个体看成平面上的 $n$ 个点,其标号与个体标号相同。每个点与其邻居 $\mathcal{N}_k(t)$ 内的点(个体)有一条无向边相连,这样就构成了一个无向图,记作 $G(n, r_n, t)$ 或 $G(t)$ 。本文中图论的记号来自文献[12]。对某无向图 $G$ ,它的第 $k$ 个节点的度为 $d_k$ ,记

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min_{1 \leq k \leq n} d_k \\ d_{\max} &= \max_{1 \leq k \leq n} d_k \\ T &= \text{diag}(d_k)_{1 \leq k \leq n} \end{aligned}$$

邻接矩阵为 $A$ , Laplace矩阵为 $L$ , 规范化的Laplace阵 $\mathcal{L} = T^{-1/2} L T^{-1/2}$ ,  $P = T^{-1} A$ 。 $\mathcal{L}$ 的 $n$ 个特征根为 $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ ,  $\lambda_1$ 通常称为规范化的代数连通度,在同步分析中至关重要,记 $\bar{\lambda} = \max_{1 \leq k \leq n-1} |1 - \lambda_k|$ 。取 $0 < \eta_n < 1$ ,对每个节点 $k$ ,环形区域 $\mathcal{R}_k = \{z : (1 - \eta_n)r_n \leq |z - z_k(0)| \leq (1 + \eta_n)r_n\}$ 内的节点个数为 $R_k$ ,  $R_{\max} = \max_{1 \leq k \leq n} R_k$ 。对于图 $G(n, r_n, t)$ ,这些量既与时间 $t$ 有关,又与 $n$ 有关,在不至混淆的情况下往往省略 $n$ ,并通过在相应量后面的括号里加 $t$ 来表示。当 $t = 0$ 时,为方便起见时间标号也省略。

记 $\vec{Z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$ ,  $\vec{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t))^T$ 。则演化方程(1)和(2)可记为:

$$\begin{cases} \vec{\theta}(t) = P(t-1) \vec{\theta}(t-1) \\ \vec{Z}(t) = \vec{Z}(t-1) + v_n e^{i\vec{\theta}(t)} \end{cases}$$

其中 $e^{i\vec{\theta}(t)} = (e^{i\theta_1(t)}, e^{i\theta_2(t)}, \dots, e^{i\theta_n(t)})^T$ , 是一个形式化的记号。

### 3 主要结果(Main Results)

记  $\delta(\vec{\theta}(t)) = \max_{1 \leq j \leq n} \theta_j(t) - \min_{1 \leq j \leq n} \theta_j(t)$ .

下面的引理是线性化Vicsek模型动力学行为分析的关键, 证明的思路来自[13]中处理线性时变系统扰动稳定性的方法。

**引理 1**  $\{G(t), t \geq t_0\}$  是一列随时间演化的无向图,  $\{\vec{\theta}(t), t \geq t_0\}$  按公式

$$\vec{\theta}(t+1) = P(t)\vec{\theta}(t)$$

迭代, 若记  $\Delta P(t) \triangleq P(t) - P$  且  $\|\Delta P(t)\| \leq \varepsilon, t \geq t_0$ , 其中  $P(t)$  与图  $G(t)$  相对应, 而  $P$  相应于某图  $G$ , 则有

$$\delta(\vec{\theta}(t)) \leq 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{d_{max}}{d_{min}}} \left( \bar{\lambda} + \sqrt{\frac{d_{max}}{d_{min}}} \varepsilon \right)^{t-t_0} \|\vec{\theta}(t_0)\|.$$

其中  $d_{max}, d_{min}, \bar{\lambda}$  都是相对于图  $G$  而言的。

应用这一引理, 我们可以得到一个系统同步的充分条件, 即下面的定理:

**定理 1** 对线性化Vicsek模型, 在对初始图  $G(n, r_n, 0)$  的下列条件下一定有系统同步,

1) 存在  $\beta \geq 1$  使得当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$d_{min} \leq d_{max} \leq \beta d_{min}(1 + o(1))$$

$$R_{max} = o(d_{min})$$

2) 定义  $\varepsilon = (\frac{9\sqrt{\beta}}{2} + 4\beta^{3/2} + \frac{1}{2})R_{max}/d_{min}$ , 当  $n$  充分大时,

$$\bar{\lambda} + \sqrt{\beta}\varepsilon < 1$$

3)

$$\frac{\log \frac{\delta(\vec{\theta}(1))}{2\sqrt{2\beta}\|\vec{\theta}(1)\|}}{\log(\bar{\lambda} + \sqrt{\beta}\varepsilon)} + 1 + \frac{1}{1 - (\bar{\lambda} + \sqrt{\beta}\varepsilon)} \leq \frac{\eta_n r_n}{v_n \delta(\vec{\theta}(1))}$$

因为定理1的条件都是加在初始状态上的, 故如果能够分析清楚初始状态的大概率情形, 就可以给出在大概率情形下模型角度最终同步的条件。在本文中我们说一个依赖于  $n$  的性质大概率成立是指其成立的概率为  $1 - O(1/n^{g_n})$ , 其中  $\{g_n\}$  为一趋于无穷的正数列。

**定理 2** 取  $r_n$  满足  $\sqrt{\frac{\log n}{n}} = o(r_n)$  且  $r_n = o(1)$ , 则对初始图  $G(n, r_n, 0)$ , 下列各式大概率成立

$$d_{min} = \frac{n\pi r_n^2}{4}(1 + o(1))$$

$$d_{max} = n\pi r_n^2(1 + o(1))$$

$$1 - \frac{4}{\pi r_n^2} \leq \lambda_{n-1} \leq 2\left(1 - \frac{1}{12\pi}(1 + o(1))\right)$$

$$\frac{r_n^2}{144}(1 + o(1)) \leq \lambda_1 \leq 2r_n(1 + o(1))$$

若进一步要求  $\sqrt{\frac{\log n}{n}} = o(\eta_n r_n)$ , 则

$$R_{max} = 4\pi n \eta_n r_n^2(1 + o(1))$$

大概率成立。

由于  $G(n, r_n, 0)$  也可以用来描述无线传感器网络, Ad Hoc网络等[14, 15], 因此这些结论可以应用到对这些网络的理论分析中来。

定理1和定理2相结合就得到本文的主要定理:

**定理 3** 对线性化Vicsek模型, 假设  $r_n$  满足  $(\frac{\log n}{n})^{1/6} = o(r_n)$  且  $r_n = o(1)$ , 则存在正常数  $c$ , 当

$$\frac{v_n}{r_n^5} \leq c \frac{1}{\log n} \quad (n \text{ 充分大})$$

成立时, 线性化Vicsek模型大概率同步。

证明: 根据定理2, 定理1中的  $\beta$  可取为4, 因此  $\varepsilon = \frac{83}{2} \frac{R_{max}}{d_{min}}$ 。由于

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \max_{1 \leq j \leq n-1} \{1 - \lambda_j\} \\ &= \max\{|1 - \lambda_1|, |1 - \lambda_{n-1}|\} \\ &= 1 - \lambda_1 \leq 1 - \frac{r_n^2}{144}(1 + o(1)) \end{aligned}$$

取  $\eta_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1328} \times \frac{r_n^2}{144}$ , 则  $R_{max} = o(d_{min})$ , 又根据条件  $(\frac{\log n}{n})^{1/6} = o(r_n)$  且  $r_n = o(1)$ , 知  $\sqrt{\frac{\log n}{n}} = o(\eta_n r_n)$ , 从而  $\varepsilon = \frac{83}{2} \frac{R_{max}}{d_{min}} = 664\eta_n$ , 因此当  $n$  充分大时,  $\bar{\lambda} + \sqrt{\beta}\varepsilon \leq 1 - \frac{r_n^2}{288}(1 + o(1)) < 1$ 。这样定理1中的条件1), 2)都得到满足。为保证条件3)成立, 首先注意到当  $n$  充分大时:

$$\begin{aligned} &\log \frac{\delta(\vec{\theta}(1))}{2\sqrt{2\beta}\|\vec{\theta}(1)\|} / \log(\bar{\lambda} + \sqrt{\beta}\varepsilon) \\ &\leq \log \frac{2\pi}{4\sqrt{2}\|\vec{\theta}(1)\|} / \log(\bar{\lambda} + 2\varepsilon) \\ &= \log \frac{2\sqrt{2}\|\vec{\theta}(1)\|}{\pi} / (-\log(\bar{\lambda} + 2\varepsilon)) \\ &\leq \log \frac{2\sqrt{2}\|\vec{\theta}(1)\|}{\pi} / (-\log(1 - \frac{r_n^2}{288}(1 + o(1)))) \\ &\leq \log \frac{2\sqrt{2}\sqrt{n\pi}}{\pi} / \frac{r_n^2}{288}(1 + o(1)) \\ &= 144 \frac{\log n}{r_n^2}(1 + o(1)) \end{aligned}$$

以及

$$\frac{1}{\bar{\lambda} + \sqrt{\beta}\varepsilon} \leq \frac{288}{r_n^2}.$$

故若有

$$v_n \times 2\pi \times 145 \frac{\log n}{r_n^2} \leq r_n \eta_n$$

则当 $n$ 充分大时, 定理1的条件3)被满足。  
上式成立只要

$$\frac{v_n}{r_n^5} \leq \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{145} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1328} \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{\log n}$$

因此取 $c = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{145} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1328} \times \frac{1}{144}$ , 则当

$$\frac{v_n}{r_n^5} \leq c \frac{1}{\log n}$$

成立时, 线性化Vicsek模型大概率同步。

#### 4 结束语(Conclusion Remarks)

本文考虑了线性化Vicsek模型, 与以往研究者要求闭环系统形成的图具有某种连通性不同, 我们给出了一个完全加在模型参数上的条件, 保证系统的大概率同步。据作者所知, 这是文献中第一个这类同步性结果。

#### 参考文献

- [1] E. Shaw, "Fish in schools", *Natural History*, vol. 84, no. 8, pp. 40-46, 1975.
- [2] B. L. Partridge, "The structure and function of fish schools", *Sci. Amer.*, vol. 246, no. 6, pp. 114-123, 1982.
- [3] A. Okubo, "Dynamical aspects of animal grouping: Swarms, schools, flocks and herds," *Adv. Biophys.*, vol. 22, pp. 1-94, 1986.
- [4] J. K. Parrish, S. V. Viscido, and D. Grunbaum, "Self-organized fish schools: An examination of emergent properties," *Biol. Bull.*, vol. 202, pp. 296-305, 2002.
- [5] T. Vicsek, A. Czirok, E. Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, "Novel type of phase transition in a system of self-driven particles," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, no. 6, pp. 1226-1229, 1995.
- [6] A. Czirok, A. Barabasi, T. Vicsek, "Collective Motion of Self Propelled Particles: Kinetic Phase Transition in One Dimension", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82(1), pp. 209-212, 1999.
- [7] C. W. Reynolds, "Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model," in *Comput. Graph. (ACM SIG-GRAPH' 87 Conf. Proc.)*, vol. 21, pp. 25-34, Jul. 1987.
- [8] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile agents using nearest neighbor rules," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988-1001, Jun. 2003.
- [9] W. Ren and R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 5, pp. 655-661, May 2005.
- [10] A. Jadbabaie, "On distributed coordination of mobile agents with changing nearest neighbors," Technical Report, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 2003.
- [11] F. Cucker and S. Smale, "Emergent behavior in flocks", Preliminary Version, [http://www.tti-c.org/smale\\_papers/flock.pdf](http://www.tti-c.org/smale_papers/flock.pdf)
- [12] F. R. K. Chung, "Spectral Graph Theory," Providence, RI:AMS, 2000.
- [13] L. Guo, "Time-Varying Stochastic Systems-Stability, Estimation and Control," Jilin Science and Technology Press, 1993.
- [14] P. Gupta, P. R. Kumar, "Critical power for asymptotic connectivity in wireless networks," *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: A Volume in Honor of W.H.Fleming*, pp. 547-566, 1998.
- [15] F. Xue, P. R. Kumar, "The number of neighbors needed for connectivity of wireless networks," *Wirel. Netw.* vol. 10, no. 2, pp. 169-181, 2004.