Métodos de Optimização em Finanças

Gonçalo Gouveia
2018277419|MEF

Departamento De Matématica - Universidade de Coimbra

28 de dezembro de 2021

$$\begin{aligned}
\min \quad & x^T Q x \\
\text{s.t.} \quad & \mu^T x \geq r, \\
& x \in X
\end{aligned}$$

com $r \geq 0$ e $X = \left\{ x \in R^2 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \wedge x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$

1.

Aplicando as matrizes dadas no enunciado obtem-se que:

$$\begin{aligned}
\min \quad & x^T Q x = x^T Q x = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 x_1 + 2x_2 x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \mu^T x = 8x_1 + 5x_2 + x_3 \geq r, \\
& x \in X
\end{aligned}$$

Que eliminando a variável x_3, fazendo $x_3 = 1 - x_1 - x_2$:

$$\begin{cases} x^T Q x = 5x_1^2 + 3x_2^2 + (1 - x_1 - x_2)^2 - 4x_2 x_1 + 2x_2(1 - x_1 - x_2) \\ \mu^T x = 8x_1 + 5x_2 + (1 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x^T Q x = 6x_1^2 - 4x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 1 \\ \mu^T x = 7x_1 + 4x_2 + 1 \end{cases}$$

Obtenho o problema reduzido:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 6x_1^2 - 4x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 1 \\
\text{s.t.} \quad & 7x_1 + 4x_2 + 1 \geq r, \\
& x_1, x_2 > 0, \\
& x_1 + x_2 \leq 1
\end{aligned}$$

2.

a)

Considerando o problema reduzido obtido na alínea anterior com r = 4.5.

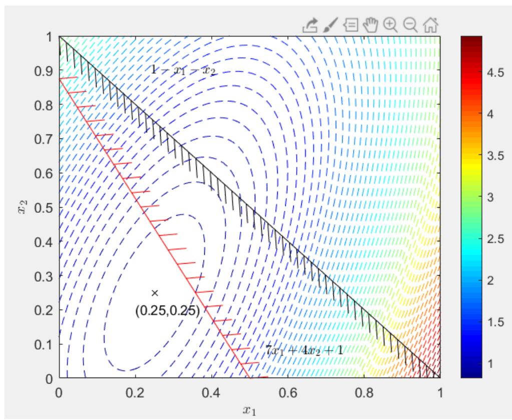

Figura 1: Curvas de nível da função objectivo e a região admissível do problema reduzido.

A região admissível (região do primeiro quadrante que está entre as retas preta e vermelha).

b)

Recorrendo a funcionalidades do *MatLab* obtenho as coordenadas do centro da elipse. $x_1^* = 1/4, x_2^* = 1/4$ ($x_3^* = 1/2$). Que se encontra fora da região admissível.

Deste modo, a partir da figura 1, concluímos que a restrição correspondente a reta vermelha será ativa, pelo que $7x_1 + 4x_2 + 1 = 4.5 \leftrightarrow x_2 = \frac{3.5 - 7x_1}{4}$. Que aquando substituindo no problema reduzido.

$$\begin{aligned} \min \quad & 13.125x_1^2 - 5.625x_1 + 2.53125 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Para obter o minimizante deste ultimo problema resolvemos $\frac{d}{dx}(13.125x_1^2 - 5.625x_1 + 2.53125) = 0 \leftrightarrow x_1^* = \frac{3}{14}$ pelo que, $x_2^* = \frac{1}{2}$ e $x_3^* = \frac{4}{14}$

3.

Na alínea anterior calculamos o minimizaste de f em R^2. A solução encontrada corresponde ao portefolio de variância mínima, pelo que o seu retorno nos dá o valor de $\boxed{r_{min} = 3.75}$. O valor de $\boxed{r_{max} = 8}$, corresponde ao portefolio [1,0,0]. Deste modo, se $r > r_{\max}$, o problema é impossível e no caso de $r < r_{\min}$, a solução óptima será sempre $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, centro da elipse calculado anteriormente .

No caso de $r \in [r_{\min}, r_{\max}] = [3.75, 8]$, é fácil de observar na figura anterior que as curvas de nível atingem (dentro da região admissível) primeiro a reta vermelha do que a reta preta. Desse modo, a restrição correspondente à reta reta vermelha deve ser ativa, isto é $7x_1 + 4x_2 + 1 = r \Leftrightarrow x_2 = \frac{r-1-7x_1}{4}$. Atendendo a esta restrição, podemos reduzir novamente o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{r^2 + 105x_1^2 + 54x_1 - 22rx_1 - 2r + 9}{8} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq \frac{r-1}{7}, \\ & x_1 \geq \frac{r-5}{3} \end{aligned}$$

O minimizante desta função obtém-se resolvendo $\frac{d}{dx_1}\left(\frac{r^2+153x^2+38x-22rx-2r+9}{8}\right) = 0$, o que corresponde a $153x_1 + 3 - 11r = 0$. Esta solução corresponde à solução ótima do problema se for admissível, isto é,:

- $\frac{11r-3}{153} \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \frac{3}{11}$ (corresponde à restrição $x_1 \geq 0$ e é redundante);
- $\frac{11r-3}{153} \leq \frac{r-1}{7} \Leftrightarrow r \geq \frac{33}{19}$ (corresponde à restrição $x_2 \geq 0$ e é redundante);
- $\frac{11r-3}{153} \geq \frac{r-5}{3} \Leftrightarrow r \leq \frac{63}{10} \approx 6.3$ (corresponde à restrição $x_3 \geq 0$);

Assim, se $r \in [3.75, 6.3]$, temos $x_1 = \frac{11r-3}{153} \Rightarrow \boxed{x^*(r) = \left(\frac{11r-3}{153}, \frac{19r-33}{153}, \frac{189-30r}{153}\right)}$

Caso $r \in]6.3, 8]$, temos que a restrição $x_3 \geq 0$ deve ser ativa e, portanto, a solução ótima é $\boxed{x^*(r) = \left(\frac{r-5}{3}, \frac{8-r}{3}, 0\right)}$.

Caso $r < 3.75$, a solução corresponderá a $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Impossível caso $r > 8$.

4.

Calculando $\sqrt{x^tQx}$ para $\in]3.75, 6.16]$:

$$\sqrt{x^tQx} = \sqrt{6\left(\frac{11r-3}{153}\right)^2 - 4\left(\frac{11r-3}{153}\right)\left(\frac{19r-33}{153}\right) + 2\left(\frac{19r-33}{153}\right)^2 - 2\left(\frac{11r-3}{153}\right) + 1}$$

$$\sqrt{x^tQx} = \sqrt{\frac{4r^2-30r+171}{153}}$$

Calculando $\sqrt{x^tQx}$ para $rr \in]6.16, 8]$:

$$\sqrt{x^tQx} = \sqrt{6\left(\frac{r-5}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{r-5}{3}\right)\left(\frac{8-r}{3}\right) + 2\left(\frac{8-r}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{r-5}{3}\right) + 1}$$

$$\sqrt{x^tQx} = \sqrt{\frac{4r^2-50r+159}{3}}$$

Na figura seguinte está representada a fronteira de eficiência (curva vermelha) que indica a relação entre o retorno e o risco da solução óptima $x^*(r)$ encontrada na alínea anterior. Estão também representados o risco e o retorno (pontos pretos) correspondentes a outros portefólios admissíveis.
Assim escrevo:

$$E = \left\{ \left(\sqrt{\frac{4r^2-50r+159}{3}} \right) : r \in [6.16, 8], \left(\sqrt{\frac{172r^2-1818r+8073}{3675}} \right) : r \in [3.75, 6.16] \right\}$$

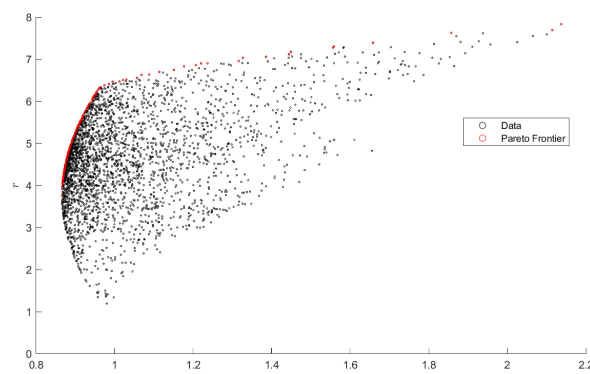

Figura 2: Simulação 7500 iterações.

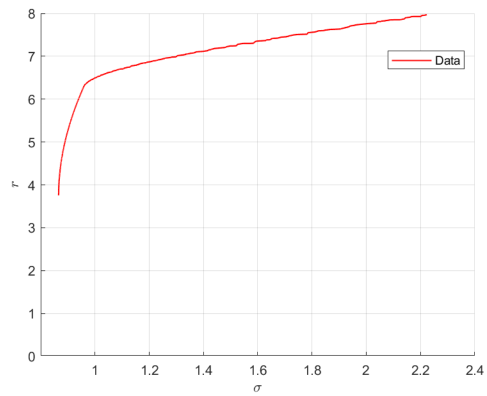

Figura 3: Simulação 100000 iterações

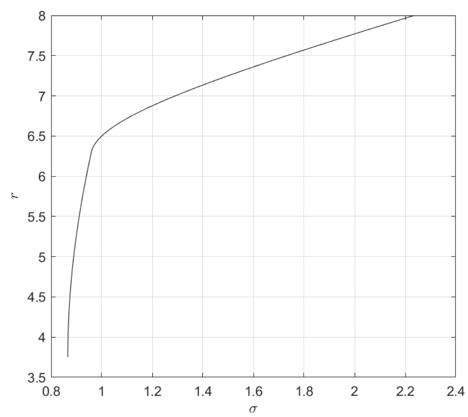

Figura 4: Reta teórica

5.

$$h(x) = \frac{\mu^T x - r_f}{\sqrt{x^T Q x}}$$

Para determinar a solução óptima do rácio de Sharpe para um retorno isento de risco $r_f = 0.25$;

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\mu^T x - r_f}{\sqrt{x^T Q x}} \\ \text{s.t.} \quad & x \in X \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\mu^T - r_f = \frac{\mu}{k}$ em que $y = kx$, sendo $k > 0$. obtenho o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \min \quad & y^T Q y \\ \text{s.t.} \quad & (\mu - r_f)^T y = 1, \\ & y_1 + y_2 + y_3 = k, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Que no Contexto do nosso problema se tem:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 - 4y_2y_1 + 2y_2y_3 \\ \text{s.t.} \quad & (8 - 0.25)y_1 + (5 - 0.25)y_2 + (1 - 0.25)y_3 = 1, \\ & y_1 + y_2 + y_3 = k, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Agora fazendo $y_1 = \frac{1 - 4.75y_2 - 0.75y_3}{7.75}$. A restrição de $k = y_1 + y_2 + y_3$ pode ser ignorada uma vez que apenas serve para atribuir o valor de k e recuperar, posteriormente o valor de x, substituindo y_1 na nossa expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \min \quad & 7.329y_2^2 + 2.980y_2y_3 - 1.306y_2 + 1.046y_3^2 - 0.124y_3 + 0.083 \\ \text{s.t.} \quad & y_2, y_3 \geq 0, \\ & (1 - 4.75y_2 - 0.75y_3)/7.5 \geq 0 \end{aligned}$$

Que é o mesmo que escrever:

$$\begin{aligned} \min \quad & 7.3298y_2^2 + 2.980y_2y_3 - 1.307y_2 + 1.0468y_3^2 - 0.1249y_3 + 0.0834 \\ \text{s.t.} \quad & y_2, y_3 \geq 0, \\ & 4.75y_2 + 0.75y_3 \leq 1 \end{aligned}$$

$\frac{1 - 0.75y_3}{4.75}$ Recorrendo novamente as funcionalidades do *MatLab* , obtenho o minimizante da função objetivo, coordenadas do centro da elipse. $y_1^* = 0.07, y_2^* = 0.10$ ($y_3^* = -0.09$).
Está solução não faz parte da região admissível.

Concluimos que a restrição correspondente a reta $y_3 = 0$ será ativa. Agora fazendo $y_3 = 0$:

$$\begin{aligned} \min \quad & 7.329y_2^2 - 1.306y_2 + 0.083 \\ \text{s.t.} \quad & y_2, y_3 \geq 0, \\ & y_2 \leq \frac{1}{4.75} \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{d}{dy_2}(7.329y_2^2 - 1.306y_2 + 0.083) = 0$, obtém-se $y_2 = 0.089$, pelo que ($y_1 = \frac{1}{4.75}$, k =0.2995).

Voltando a expressão $y = kx$,obtem-se o ponto x_s:

$$x_1 = 0.703$$

$$x_2 = 0.297$$

$$x_3 = 0.$$

Uma vez que esta solução satisfaz todas as restrições do problema, ela será a solução óptima. O ponto $(\sigma(r_s), r_s)$ que maximiza h(x) é:

$$\sigma(r_s) = 1.37$$

$$r_s = 7.07$$

(image difere dos valores calculados devido a aproximações no calculo do racio de sharpe e ao numero de iterações):

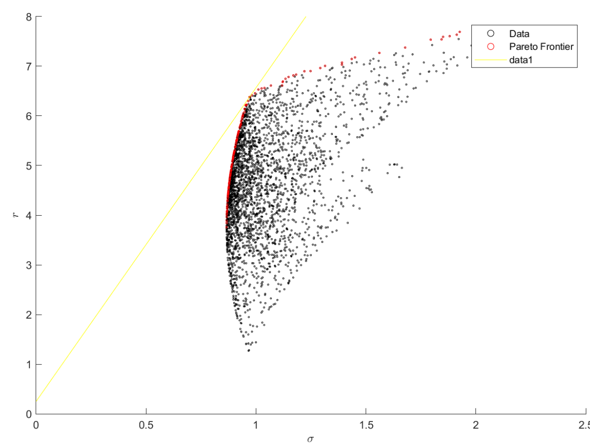

Figura 5: Fronteira de eficiência (curva vermelha). Está também representado o risco e o retorno (pontos pretos) correspondentes a outros portofólios admissíveis, reta amarela para auxilio em determinar a carteira x_s.(difere dos valores calculados devido a aproximações no calculo do rácio de sharpe e ao número de iterações)