变分整理

November 5, 2018

1 变分定义

函数 $y(x)$ 的变分:在同一定义域上的两个函数 $y(x), m(x)$, 若彼此任意接近, 那么 $m(x)$ 与 $y(x)$ 之差, 记 $\delta y(x) = m(x) - y(x)$ 称 $y(x)$ 的变分。

变分 δy 反映了整个函数的变化,而函数增量 Δy 反应的是同一个函数由于自变量的取值不同引起的变化。

泛函的变分: 对任意一个泛函 $J[y]$, 函数 y 引起的泛函增量为 $\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = L[y,\delta y] + \dfrac{1}{2!}Q[y,\delta y] + o(||\delta y||^2)$

其中 $L(y,\delta y)$ 是关于 δy 的线性泛函,$Q[y,\delta y]$ 是关于 δy 的两次线性泛函。

则泛函的一阶变分 $\delta J = L[y,\delta y]$, 二阶变分 $\delta^2 J = Q[y,\delta y]$

变分的另一种求法,任给一个齐次函数 $\eta(x)$, 边界值为零,对任意小的一个实数 ε,$y^*(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ 当 $\varepsilon = 0$

$\delta J = \varepsilon \frac{dJ[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}$

$\delta^2 J = \frac{1}{2!}\varepsilon^2 \frac{d^2 J[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon^2}$

2 泛函例子

例:已知泛函 $J[y] = \int_a^b F(x,y,y^{'})\,\mathrm{d}x$

$\delta J[y] = \int_a^b [\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y^{'}}\delta y^{'}]\,\mathrm{d}x$

$= \frac{\partial F}{\partial y^{'}}(\delta y) + \int_a^b [\frac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^{'}})]\delta y\,\mathrm{d}x$

例:最短线问题,设经过 A,B 两点距离最短曲线方程为 $y^*(x)$, 另有任意连续可导函数 $\eta = \eta(x)$, 且 $\eta(x)$ 满足 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, 则 $y = y^* + \alpha\eta(x)$ 仍是过 A,B 的连续曲线,其对应长度为

$L(a) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y^*)^{'} + \alpha\eta^{'})^2}\,\mathrm{d}x$

当 $a = 0, y = y^*(x)$ 时 $L(a)$ 取极小值,即 $\frac{dL(a)}{da} = 0$ 在 $a = 0$ 的地方

$\frac{dL(a)}{da} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{((y^*)^{'}+\alpha\eta^{'})\eta^{'}}{\sqrt{1+((y^*)^{'})^2}}\,\mathrm{d}x$

$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{(y^*)^{'}\eta^{'}}{\sqrt{1+(y^*)^2}}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{(y^*)^{'}\eta}{\sqrt{1+(y^*)^2}} - \int_{x_0}^{x_1}(\frac{(y^*)^{'}}{\sqrt{1+((y^*)^{'})^2}})^{'}\eta\,\mathrm{d}x$

$= -\int_{x_0}^{x_1}(\frac{(y^*)^{''}}{\sqrt{1+(y^*)^2}} - \frac{(y^*)^{'}(y^*)^{'}(y^*)^{''}}{\sqrt{1+(y^*)^3}}))\eta\,\mathrm{d}x$

$= -\int_{x_0}^{x_1}\frac{y^{''}}{(\sqrt{1+(y^*)^2})^3}\eta\,\mathrm{d}x$

由 $\eta(x)$ 的任意性,由变分引理可得 $\frac{y^{''}}{(\sqrt{1+(y^*)^2})^3} = 0$