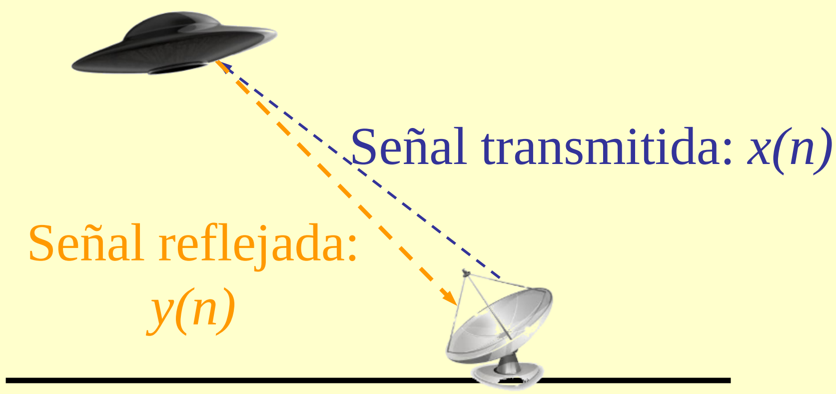
Sistemas y Señales I

Correlación de Señales en TD

Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

- <u>Correlación de señales en TD</u>
  - La correlación de dos señales mide el grado de similitud de las mismas.
  - Aplicaciones en radar, sonar, comunicaciones digitales, reconocimiento de voz, etc.

<u>Ejemplo</u>: radar



$$y(n)= \alpha\, x(n-D) + W(n)$$

α: factor de atenuación

$W(n)$: ruido aditivo

D: retardo transmisión/recepción

Problema de radar: determinar si existe un blanco, y si existe determinar el retardo D que permite determinar la distancia al blanco.

- Si la componente de ruido es muy grande, la simple inspección de $y(n)$ no permitirá determinar si existe un blanco.

  La correlación permitirá extraer esta información de $y(n)$.

• Secuencia de auto-correlación y correlación cruzada

Supongamos dos señales *x(n)* e *y(n)* de energía finita. La secuencia de correlación cruzada de las dos señales se define como:

$$r_{xy}(\ell)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-\ell) \qquad \ell=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

o equivalentemente

$$r_{xy}(\ell)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell)y(n) \qquad \ell=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

• El orden de los subíndices en $r_{xy}(\ell)$ indica la dirección en que la primer señal es desplazada con respecto a la otra.

Similarmente se definen

$$r_{yx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-\ell) \qquad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o equivalentemente

$$r_{yx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+\ell)x(n) \qquad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Es fácil verificar que

$$r_{xy}(\ell) = r_{yx}(-\ell)$$

por lo que $r_{xy}(\ell)$ provee exactamente la misma información que $r_{yx}(\ell)$.

- Puede probarse que:

$$\boxed{r_{xy}(\ell) = x(\ell) * y(-\ell)}$$

- En el caso especial de $x(n) = y(n)$, se tiene la secuencia de autocorrelación de $x(n)$.

$$r_{xx}(\ell)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-\ell)$$

o equivalentemente

$$r_{xx}(\ell)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell)x(n)$$

- Si $x(n)$ e $y(n)$ son señales de duración finita N, resulta

$$r_{xy}(\ell)= \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)y(n-\ell) \quad \text{y} \quad r_{xx}(\ell)= \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)x(n-\ell)$$

donde $i=\ell, \;\; k=0$ para $\ell \geq 0$

$i=0, \;\; k=\ell$ para $\ell < 0$

Correlación de señales de potencia

- Para señales de potencia *x(n)* e *y(n)* la **correlación cruzada** se define

$$r_{xy}(\ell) = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)y(n-\ell) \qquad (1)$$

- Si *x(n)* = *y(n)* resulta la **autocorrelación** de la señal de potencia

$$r_{xx}(\ell) = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x(n-\ell) \qquad (2)$$

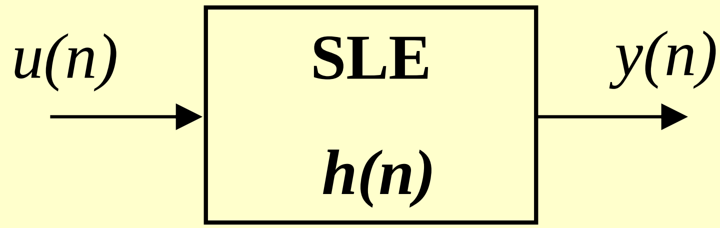
- En particular, si *x(n)* e *y(n)* son **señales periódicas** con período *N*, las relaciones (1) y (2) pueden computarse en un período.

$$r_{xy}(\ell)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-\ell)$$

$$r_{xx}(\ell)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-\ell)$$

- Es fácil ver que en este caso $r_{xy}(\ell)$ y $r_{xx}(\ell)$ resultan secuencias periódicas de período N.

- **Secuencias de correlación Entrada/Salida**



La respuesta a una entrada arbitraria *u(n)* es

$$y(n) = h(n) * u(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)$$

La correlación entre la entrada y la salida es:

$$r_{yu}(\ell) = y(\ell) * u(-\ell)$$

$$= h(\ell) * u(\ell) * u(-\ell) = h(\ell) * r_{uu}(\ell)$$

$$\boxed{r_{yu}(\ell) = h(\ell) * r_{uu}(\ell)} \qquad (3)$$

$$r_{uu}(\ell) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textbf{SLE}\\ h(\ell)\end{array}} \longrightarrow r_{yu}(\ell)$$

- La relación (3) se puede emplear para la estimación de un número finito de términos de la respuesta al impulso *{h(n)}* a partir del cómputo de las secuencias de correlación entrada salida $r_{yu}(\ell)$ y de la autocorrelación de la entrada $r_{uu}(\ell)$.

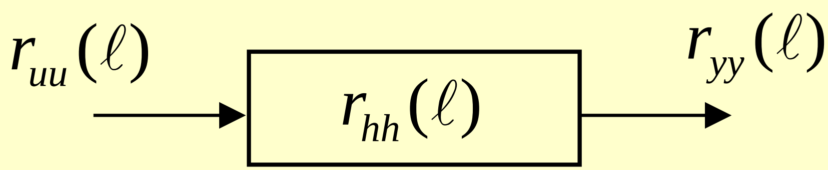
(resolver este problema de estimación)

- La autocorrelación de la salida resulta

$$\begin{aligned} r_{yy}(\ell) &= y(\ell) * y(-\ell) \\ &= \left[h(\ell) * u(\ell)\right] * \left[h(-\ell) * u(-\ell)\right] \\ &= \left[h(\ell) * h(-\ell)\right] * \left[u(\ell) * u(-\ell)\right] \\ &= r_{hh}(\ell) * r_{uu}(\ell) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_{yy}(\ell) = r_{hh}(\ell) * r_{uu}(\ell)}$$

<u>Nota:</u> $r_{hh}(\ell)$ existe si el sistema es estable



Propiedades de la Autocorrelación

- **Simetría**

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell)x(n)$$

Cambio de variable $\longrightarrow$ $$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-\ell) = r_{xx}(-\ell)$$ **Simetría par**

$$m = n + \ell$$

- **Autocorrelación y Energía de la señal**

Calculemos la autocorrelación para $\ell = 0$

$$r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+0)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)^2 = E_x$$ **Energía de la señal**

- **Autocorrelación de una señal periódica**

Sea *x(n)* una señal periódica con periodo N , es decir se verifica que

$$x(n) = x(n+N)$$

Luego, la autocorrelación resulta

$$\boxed{r_{xx}(\ell+N)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n+N+\ell)x(n)$$

ya que

$x(n+N+\ell) = x(n+\ell)$ $\longrightarrow$ $= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n+\ell)x(n) = \boxed{r_{xx}(\ell)}$

Es decir, es periódica con periodo *N*.