Ejemplo 1: Sistemas de primer orden

Encontrar la respuesta al escalón unitario $y(t)$ del siguiente sistema de primer orden:

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad \text{donde} \quad \tau = CR \quad \text{y} \quad x(t) \text{ es un escalon unitario}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \longrightarrow Y(s) = H(s)\,X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad X(s) = \frac{1}{s} \quad \therefore \quad Y(s) = \left(\frac{1}{\tau s + 1}\right)\frac{1}{s} = Y(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1}$$

$$Y(s) = \cancel{s(\tau s + 1)}\left(\frac{1}{\cancel{s(\tau s+1)}}\right) = s(\tau s + 1)\left(\frac{A}{\cancel{s}} + \frac{B}{\cancel{\tau s + 1}}\right)$$

$$1 = A(\tau s + 1) + Bs$$

$$1 = A\tau s + A + Bs$$

$$1 = s(A\tau + B) + A$$

Sistema de ecuaciones

$\emptyset = A\tau + B \quad \ldots 2)$

$1 = A \quad \ldots 1)$

En 1)

$A = 1$

En 2)

$\emptyset = \tau + B \quad \therefore \quad B = -\tau$

Despejamos la ecuación con los nuevos valores

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{(-\tau)}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{\cancel{\tau}}{\cancel{\tau}(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right\} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\tau}$$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$