

# **Tratamiento computacional de varios objetos fractales**

Gonzalo Gómez Abejón  
Nº de candidato 000241-0160

# Índice

1. Resumen	3
2. Introducción	3
3. Conjunto de Mandelbrot	3
4. Conjuntos de Julia	5
5. Métodos iterativos	7
6. El método de Newton	10
7. Fractales producidos por el método de Newton	12
8. La ecuación logística	16
9. Conclusión	18
10. Bibliografía y recursos	19

## 1. Resumen

El objeto de esta monografía es analizar varios objetos matemáticos que, debido a sus propiedades recursivas, presentan una estructura fractal, de autosemejanza. Estos objetos se definen como el conjunto de puntos que, si se utilizan como valor inicial en una sucesión recursiva, hacen que esta sucesión sea convergente. Debido a que una representación gráfica (un mapa) del conjunto permite deducir gran parte de sus propiedades, utilizaremos varios programas para la calculadora TI-84.

Primero analizaremos el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia, definidos en los números complejos, y, tras hallar un método para calcular computacionalmente si un punto está dentro o fuera de él, veremos algunas de sus propiedades y deduciremos la relación que existe entre los dos.

Más adelante, pasaremos a funciones iterativas de variable real, como la del método de Newton y la función logística, que consideraremos desde el punto de vista del teorema del punto fijo, y para los que explicaremos la naturaleza de su estructura fractal, utilizando los conceptos de continuidad y convexidad.

## 2. Introducción

Comencé a interesarme en este tema para hacer mi monografía cuando obtuve la calculadora reglamentaria del bachillerato internacional, la TI-84 en color, con la que aprendí a programar rápidamente. Ya conocía la existencia de fractales como el conjunto de Mandelbrot, y, tras experimentar con el programa que se usa para dibujarlos, sentí curiosidad por saber cómo funcionaba el proceso, y por qué la imagen era fractal.

La geometría fractal surgió como disciplina en la segunda mitad del siglo XX, aun cuando ya se habían producido representaciones de fractales como tales desde mucho antes, por ejemplo en el arte pictórico. Los fractales son figuras en las que una parte es similar al todo, es decir, que constan de autosimilitud. Una característica de estos objetos es que tienen una dimensión llamada dimensión fractal ( $D$ ) mayor que la dimensión topológica, es decir, el número de dimensiones en las que el fractal se puede representar.

Muchos fractales se caracterizan por producirse a partir de un objeto inicial al que se aplica una transformación una y otra vez, de modo que es sencillo dibujar o calcular el resultado de las primeras transformaciones, pero cada vez que se le aplica la transformación el fractal se hace más complejo, y muchas veces un ordenador facilita el trabajo pesado. El número de veces que se le ha aplicado esta transformación se conoce como el número de iteraciones.

## 3. Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot (por Benoît Mandelbrot, 1924-2010) es el fractal por excelencia en variable compleja. Se trata de un conjunto de puntos del plano complejo que cumplen la siguiente propiedad: si un complejo  $z$  está dentro del conjunto de Mandelbrot, la sucesión  $\{z_n\}$  definida por

$$\begin{cases} z_0 = z \\ z_{n+1} = z_n^2 + z \end{cases}$$

no es divergente, es decir, está acotada. A pesar de la sencilla fórmula que lo define, el conjunto de Mandelbrot tiene una forma complicada:

Está claro que para hallar computacionalmente qué puntos están en el conjunto de Mandelbrot, lo mejor es probar, uno a uno, con todos los puntos de una cuadrícula (recorriendo distintos valores de  $a$  y  $b$  para  $z = a + bi$ ) y luego traducirlos a píxeles blancos y negros. La cuestión es cómo saber si cierta función es divergente. Una de las formas más simples es comprobar si el módulo del complejo  $z$  se hace cada vez mayor una vez que el módulo de  $z$  supera cierto valor. A continuación se demuestra que el mínimo valor para el que este método da resultado es 2:

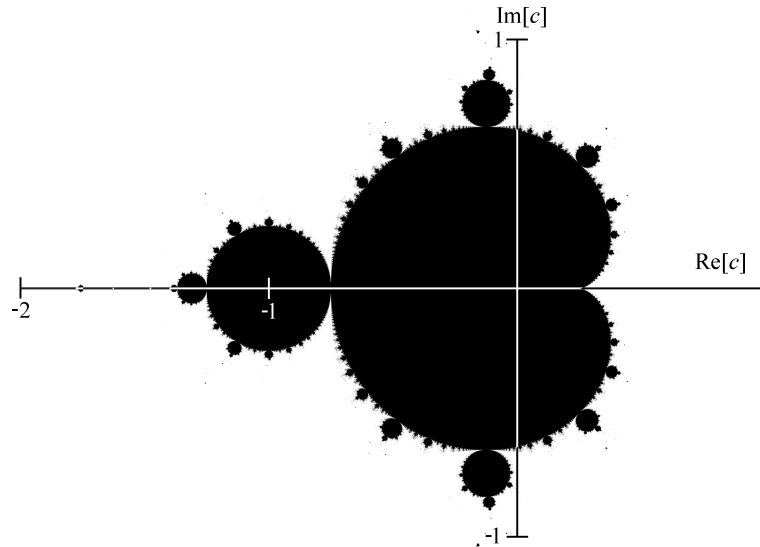


Figura 1: Conjunto de Mandelbrot

**Teorema.** Si  $|z_0| > 2$  la sucesión  $\{|z_n|\}$  es divergente.

*Demostración.* Sea  $|z_0| > 2$ . Llamemos  $r = |z_0| - 1 > 1$ . Vamos a demostrar en primer lugar que  $|z_{n+1}| \geq r|z_n|$ . Haremos la demostración por inducción:

Para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}
 |z_1| &= |z^2 + z| && \text{por la desigualdad triangular} \\
 &\leq |z^2| + |z| \\
 &= |z|^2 + |z| \\
 &= |z|(|z| + 1) \\
 &= r|z_0|
 \end{aligned}$$

Suponemos que se cumple para  $n = h$ , es decir que  $|z_h| \geq |z_0|$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 |z_{h+1}| &= |z_h^2 + z_h| && \text{por la desigualdad triangular} \\
 &\geq |z_h|^2 - |z_h| && \text{por la hipótesis de inducción} \\
 &\geq |z_h|^2 - |z_h| \\
 &= |z_h|(|z_h| - 1) && \text{por la hipótesis de inducción} \\
 &\geq |z_h|(|z_0| - 1) \\
 &= r|z_h|
 \end{aligned}$$

Entonces, la sucesión crece más rápidamente que una progresión geométrica de razón mayor que uno y, en consecuencia es divergente.  $\square$

Del teorema se desprende que si algún término de la sucesión llega a ser mayor que 2 en módulo, la sucesión también es divergente.

Como consecuencia de esto, el conjunto de Mandelbrot está en el interior de una circunferencia de centro en el origen y radio 2, pues para cualquier punto del exterior de esta circunferencia la condición se cumple, y por tanto la sucesión es divergente. Además no se puede decir lo mismo de un módulo menor, pues

$z_0 = -2$  produce una sucesión acotada:

$$\begin{aligned} z_0 &= -2 \\ z_1 &= (-2)^2 - 2 = -2 \\ z_2 &= (-2)^2 - 2 = -2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Así pues, el programa recorrerá una cuadrícula de puntos correspondiente a la pantalla de la calculadora probando un valor de  $a$  y otro de  $b$  para cada pixel de la pantalla, para después definir  $z = a + bi$ , y generar la sucesión que hemos definido antes. El programa comprobará, con cada iteración, si el módulo de  $z$  es menor de 2, y, en caso contrario, pasará al siguiente punto. Si al cabo de un número dado de iteraciones,  $z$  conserva un módulo inferior a 2, se colocará un pixel negro en el lugar correspondiente al punto. El programa y sus resultados son los siguientes:

```
For(A,Xmin,Xmax,(Xmax-Xmin)/264)
For(B,Ymin,Ymax,(Ymax-Ymin)/164)
A+Bi → C : 0 → Z : 0 → I
WhileAbs(Z) < 2 and I < 5
I + 1 → I
Z^2 + C → Z
End
If I = 5
PtOn(A,B,12,4)
End : End
```

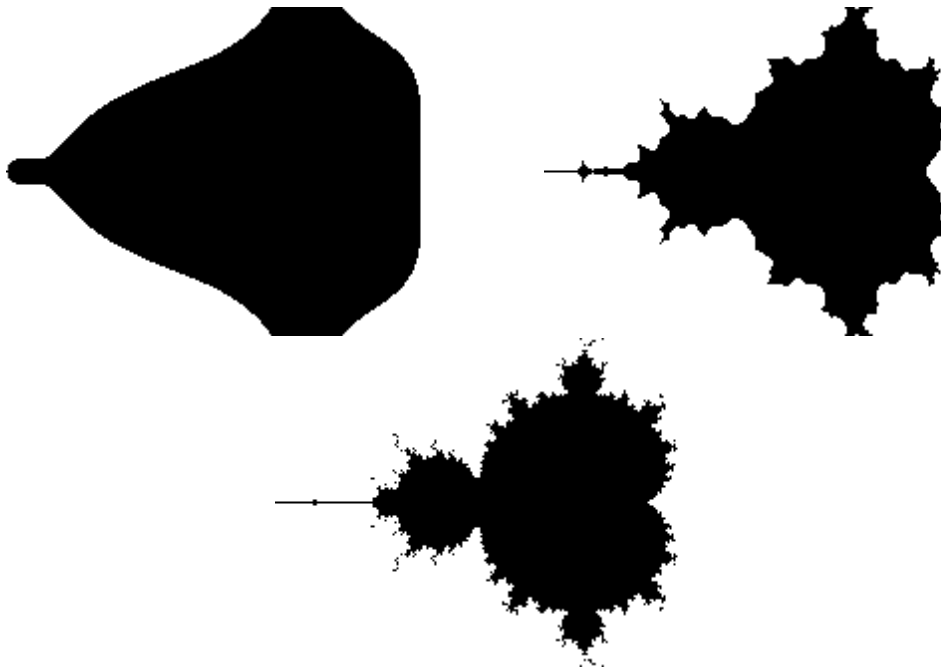


Figura 2: Representación del conjunto de Mandelbrot con 5, 10 y 20 iteraciones (TI-84)

## 4. Conjuntos de Julia

Si  $z_i$ , al cabo de unas cuantas iteraciones, queda fuera del círculo de centro el origen y radio 2, entonces  $z_0$  no está en el conjunto de Mandelbrot, pero, ¿cómo podemos encontrar otro objeto más pequeño en el

que deba estar  $z$  para que la función cuadrática no sea divergente?

Una posible respuesta es ver qué valores de  $z$  se salen de este círculo con la primera iteración, con la segunda, con la tercera, y con esto cada vez obtendríamos un objeto menor, pero al hacer esto, lo único que hacemos es hallar objetos cada vez más parecidos a el conjunto de Mandelbrot, y comprobar si el punto está dentro.

Una respuesta más compleja se encuentra si este objeto, está en función del valor de  $z$ . Así, en lugar de verificar si la sucesión converge o no según el valor de la constante de la fórmula de iteración, lo comprobamos en función de  $z_0$ , y definimos la sucesión  $\{z_n\}$  así:

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2 + c \\ z_0 = z \end{cases}$$

Al igual que antes, un número complejo  $z$  pertenece al objeto de la constante  $c$  cuando esta sucesión está acotada. El valor de  $c$  debe estar en la definición del objeto, al que llamaremos conjunto de Julia, y por lo tanto hay un conjunto de Julia por cada número complejo.

Por lo tanto, si  $z_0$  está en el conjunto de Mandelbrot, ha de estar en el conjunto de Julia  $J_c$  con  $c = z_0$ , y entonces 0 también está en este conjunto de Julia, pues ya hemos visto que la sucesión es la misma. Los conjuntos de Julia, además, tienen simetría radial, porque  $z_0$  y  $-z_0$  tienen el mismo cuadrado. Por el mismo motivo,  $z_n$  y  $-z_n$  llevan a la misma sucesión, y esta propiedad hace que los conjuntos de Julia tengan una estructura fractal. Por ello, si el punto  $z_0 = 0$  no está en el conjunto, éste es totalmente inconexo.

Otra propiedad de este conjunto es esta: si un número complejo  $z$  está en el conjunto de Julia de la constante  $c$ , entonces también pertenecen al conjunto de Julia los números  $\pm\sqrt{z-c}$  (las dos raíces cuadradas que existen). El motivo de ello es que la sucesión que se obtiene con cualquiera de estos números es la misma, a excepción de los primeros elementos:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{z-c} \\ z_1 &= (\sqrt{z-c})^2 + c = z \\ z_2 &= z^2 + c \end{aligned}$$

Dicho de otra manera, podemos obtener algebraicamente  $z-1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ , y en general  $z_n$  para  $n < 0$ , si usamos esta otra forma de iterar:

$$z_{n-1} = \sqrt{z_n - c}$$

(para esto debemos escoger un único valor de la raíz; aleatoriamente, por ejemplo). Todos estos valores acabarán produciendo la misma sucesión que el número  $z$ , y por tanto también pertenecen al conjunto de Julia. Estos conjuntos, como se puede observar en las figuras, están acotados, y por consiguiente la sucesión  $z_{-1}$ ,  $z_{-2}$ ,  $z_{-3}$ ,  $\dots$ , también lo está. Así pues, podríamos generar el conjunto con esta otra fórmula, obteniendo el mismo resultado.

Si  $|c| > 2$ ,  $c$  no está en el conjunto de Mandelbrot, y en caso contrario ya hemos comprobado que si  $|z_i| > 2$ , la sucesión diverge. Por lo tanto, podemos utilizar esta propiedad para elaborar un programa que muestre el conjunto de Julia dada la constante  $c$ , de manera totalmente análoga al que se hizo para

el conjunto de Mandelbrot.

```
Prompt C
For(A,Xmin,Xmax,(Xmax - Xmin)/264)
For(B,Ymin,Ymax,(Ymax - Ymin)/164)
A + Bi → C : 0 → Z : 0 → I
While Abs(Z) < 2 and I < 5
I + 1 → I
Z^2 + C → Z
End
If I = 5
Pt-On(A,B,12,4)
End : End
```



Figura 3: Conjuntos de Julia para  $c = 1$  y para  $c = -0,5$  (TI-84)

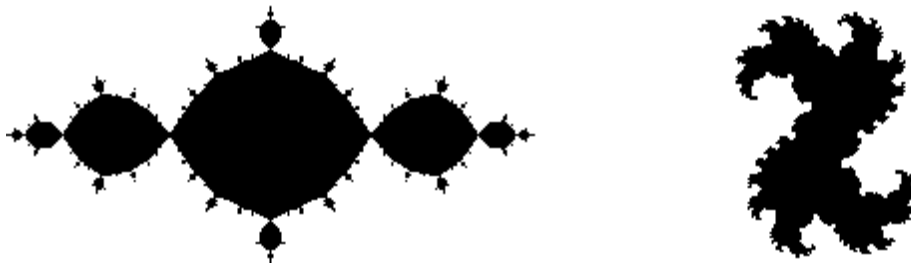


Figura 4: Conjuntos de Julia para  $c = i$  y para  $c = -0,36 + 0,1i$  (TI-84)

## 5. Métodos iterativos

Como veremos más adelante, los métodos iterativos son muy importantes para construir objetos fractales. Una función de iteración es una función del tipo:

$$x' = g(x)$$

que se utiliza para generar una sucesión:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

Si esta sucesión tiene límite, converge hacia un valor  $x$  que cumple que  $x = g(x)$  llamado punto fijo de la función de iteración. Una función de iteración puede tener varios puntos fijos y, dependiendo del valor inicial converger a uno u otro o a ninguno de ellos.

Antes de proseguir, vamos a analizar, desde un punto de vista general, el comportamiento de las funciones de iteración en variable real. Una función de iteración es una forma de modificar varias veces un número, a partir de un valor inicial,  $x_0$ , al que se aplica la función para obtener  $x' = g(x)$ . Esta transformación puede observarse gráficamente: representamos en el plano la función  $y = g(x)$  la recta  $y = x$ . Partiendo de un punto  $(x, x)$ , trazamos por él una recta vertical, y tomamos el punto de corte con la función,  $(x, g(x))$ , es decir,  $(x, x')$ . Luego trazamos una recta horizontal y tomamos el punto de corte de ambas,  $(x', x')$ , para repetir el proceso. Repitiendo este proceso varias veces (llamaremos a estas repeticiones iteraciones), se genera una sucesión  $\{x_n\}$  que puede presentar varias estructuras:

- ◊ **Cíclica:** al cabo de un número finito de iteraciones,  $n$ , el valor de  $x$  vuelve a ser el que tenía al comienzo, y, por tanto, los valores que toma la variable son también finitos, pero no sucede lo mismo para un valor de  $n$  menor. Si el valor inicial es cualquiera de los otros valores que se repiten, sucesión es esencialmente la misma. Eso sucede con la iteración:

$$x' = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2; \quad x_0 = \frac{2}{3}$$

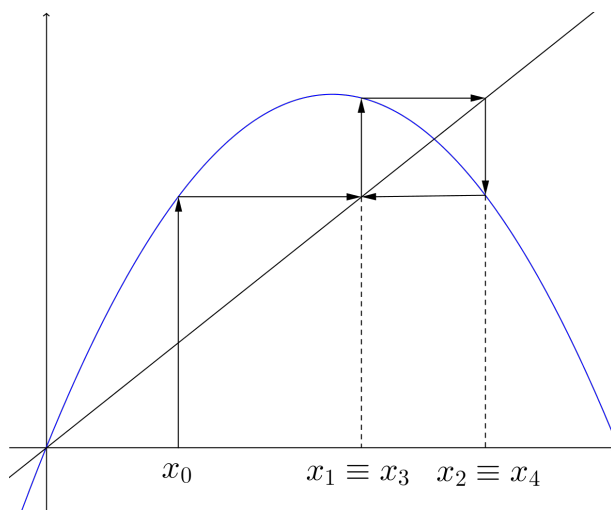


Figura 5: Iteración cíclica (GeoGebra)

- ◊ **Convergente:** al cabo de un número finito de iteraciones, los valores que toma la sucesión están cada vez más próximos a los de una estructura cíclica de  $n$  iteraciones, o, formalmente, las sucesiones formadas por  $x_i, x_{i+n}, x_{i+2n}, \dots$  son convergentes, para cualquier valor de  $i$  pero para un valor concreto de  $n$ . Una estructura cíclica podría considerarse un caso especial de convergencia. Por ejemplo:

$$x' = \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}x^2; \quad x_0 = 0,126$$

- ◊ **Caótica:** la sucesión que se forma está acotada, pero no es cíclica ni convergente, y por consiguiente es difícil predecir el valor de  $x$  al cabo de un número suficientemente grande de iteraciones.
- ◊ **Divergente:** la sucesión que se forma no está siquiera acotada.

El caso más interesante de estos cuatro es el de convergencia, pues muchas veces es difícil precisar cuándo una función converge y cuándo no, según el valor inicial. Para ello analizaremos el caso en que  $n = 1$ , pues ya hemos visto que a éste se reducen los demás.



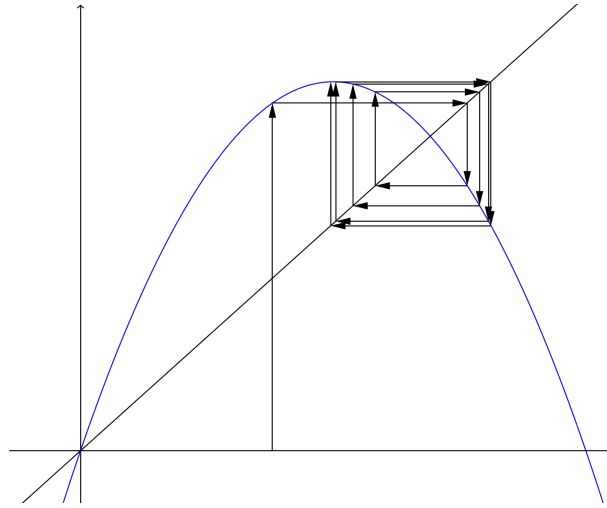


Figura 6: Iteración convergente (GeoGebra)

Lo primero que debemos comprobar es que la función tiene un punto fijo, es decir, que hay un valor de la variable,  $c$ , que satisface  $g(c) = c$ ; este será el valor hacia el que converge la variable. Además, es preciso que la diferencia  $|x - c|$  tienda a cero. Se cumple el siguiente teorema:

**Teorema** (Teorema del punto fijo). *Sea  $g(x)$  una función derivable en  $[a, b]$  que verifica:*

- $g(a) > a$ ,  $g(b) < b$
- $\max |g'(x)| = r < 1$

*Entonces, la sucesión definida por esta función de iteración converge hacia un punto fijo  $c$  tal que  $c = f(c)$ .*

*Demostración.* Sea  $f(x) = x - g(x)$ . Entonces se verifica que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ . Por el teorema de Bolzano existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = c - g(c) = 0$ . Por consiguiente, en el interior del intervalo  $(a, b)$  existe un punto fijo  $c$ .

Además, el punto fijo cuya existencia hemos demostrado en el párrafo anterior es único. En efecto, supongamos que existan dos puntos fijos  $c_1$  y  $c_2$ . Por el teorema de Rolle, debería existir un punto  $\xi$  entre  $c_1$  y  $c_2$  tal que  $f'(\xi) = 0$ , pero en este caso:

$$f'(\xi) = 0 \implies 1 - g'(\xi) = 0 \implies g'(\xi) = 1$$

en contra de la segunda hipótesis del teorema.

Hemos demostrado la existencia de un único punto fijo  $c$  de la función de iteración. Demostraremos ahora que la sucesión definida por esta función converge a  $c$ .

sea  $x$  un término cualquiera de la sucesión. Por el teorema del valor medio, para algún  $k$  entre  $c$  y  $x$  se cumple que:

$$f'(k) = \frac{g(c) - g(x)}{c - x} = \frac{c - g(x)}{c - x} \quad \text{y entonces}$$

$$|c - f(x)| = |(c - x)g'(k)| < r|c - x|$$

La diferencia, por lo tanto, disminuye más deprisa que una progresión geométrica de razón  $r < 1$ , es decir, tiende a cero.  $\square$

No obstante, debemos tener presente que, si bien bajo estas condiciones la función es convergente al punto fijo del interior del intervalo, no sucede al revés, y la función puede ser convergente aunque estas tres condiciones no se cumplan. En otras palabras, son condiciones suficientes pero no necesarias.

## 6. El método de Newton

El método de Newton-Raphson es una forma de hallar las raíces de un polinomio o los ceros de una función  $f(x)$ , comenzando en un valor de  $x$ , y tratando de encontrar la raíz más cercana, aplicando una función de iteración en ese valor de  $x$ :

La explicación de la fiabilidad de este método para encontrar las raíces de una función se basa en que aunque la derivada se define como la pendiente de la recta tangente a la función, también es la pendiente de la función en ese punto, y por lo tanto si hallamos el valor de  $x$  en el que la recta tangente en un punto corta al eje de abscisas ( $y = 0$ ), tendremos, normalmente, un valor de  $x$  más cercano a una raíz que el del punto con el que comenzamos.

Partiendo de un punto  $x_0$ , la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{y la intersección } x_1 \text{ con el eje } OX$$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \text{despejando}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

En general, la función de iteración para el método de Newton es:

$$x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

El teorema del punto fijo para el método de Newton se expresa de la siguiente manera:

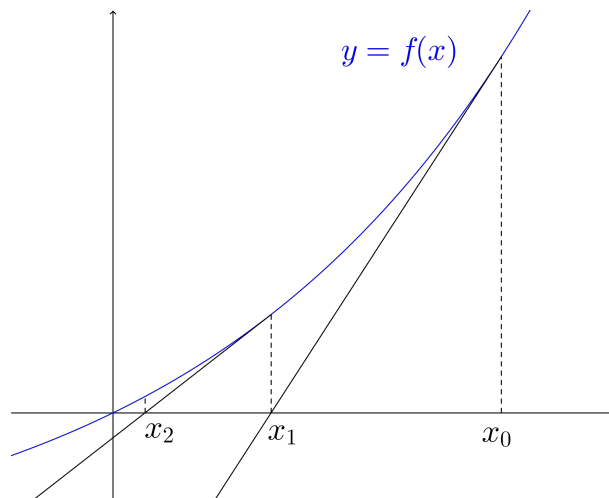


Figura 7: Método de Newton (GeoGebra)

**Teorema.** Sea  $f(x)$  una función dos veces derivable en el intervalo  $[a, b]$  que verifica:

- $f(a)f(b) > 0$  (es decir, la función toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo).
- $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$
- $f''(x)f''(y) \geq 0 \forall x, y \in [a, b]$  (no hay puntos de inflexión)
- $\max \left\{ \frac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} \right\} \leq b - a$

Entonces, existe un único  $s \in [a, b]$  tal que  $f(s) = 0$  y la sucesión definida por el método de Newton converge a  $s$ .

*Demostración.* Por la primera condición y aplicando el teorema de Bolzano se deduce que existe  $s \in (a, b)$  tal que  $f(s) = 0$ . Además, por el teorema de Rolle y puesto que la derivada no se anula, el cero de la función es único. Nos queda por demostrar que la sucesión definida por el método de Newton converge a  $s$ .

Por la segunda y tercera condición  $f'(x)$  y  $f''(x)$  no cambian de signo en  $[a, b]$ . Supongamos que ambas son positivas; de no ser así, la demostración es similar.

Sea la función de iteración:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

El cero de  $f(x)$  es un punto fijo de  $g(x)$ , es decir,  $f(s) = s$ .

La derivada de  $g(x)$  es:

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

o sea que  $g'(x)$  tiene el mismo signo que  $f(x)$  es decir, negativa en  $[a, s)$  y positiva en  $(s, b]$ . Entonces:

$$\begin{aligned} x \in [a, s) &\implies s = g(s) \leq g(x) \leq g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a + \frac{|f(a)|}{|f'(a)|} \leq a + (b - a) = b \\ &\implies g(x) \in [s, b] \\ x \in (s, b] &\implies s = g(s) \leq g(x) \leq g(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \leq b \\ &\implies g(x) \in [s, b] \end{aligned}$$

Además

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

Por consiguiente, la sucesión es decreciente y acotada y, en consecuencia, tiene límite.  $\square$

Lo que nos interesa de este método, sin embargo, es hacia qué raíz de la función original nos lleva la de iteración, según el valor de  $x_0$ , y para ello usaremos de nuevo un programa. Debemos escoger un parámetro para juzgar cuando la aproximación es suficientemente buena, y este parámetro será el valor absoluto de  $f(x)$ . Si es lo suficientemente pequeño, consideraremos que  $x$  es casi una raíz porque  $f(x)$  es casi 0.

Comencemos con una función sencilla con 2 ceros. Esta función va a ser  $f(x) = x^2 - 1$ . Para un número máximo de iteraciones que fijamos en 10, si a partir de un  $x_0$  ha llegado a cierta raíz, se dibujará una línea negra en  $x_0$  y si ha llegado a la otra, se dibujará una línea blanca. Si no ha llegado a la solución en 10 iteraciones, se dibujará una línea gris. El programa es el siguiente:

```
For(P,Xmin,Xmax,(Xmax - Xmin)/264
0 → I : P → A
While I < 10
A - (A2 - 1)/(2A) → A
I + 1 → I
If(A2 - 1)2 < 0,01 : Then
If A > 0 : VerticalP,12
If A < 0 : VerticalP,20
11 → I
End : End
If I = 10 : VerticalP,22
End
```

y el resultado lo podemos ver en la figura 8 Si comenzamos con un  $x_0$  positivo la sucesión converge a 1 y

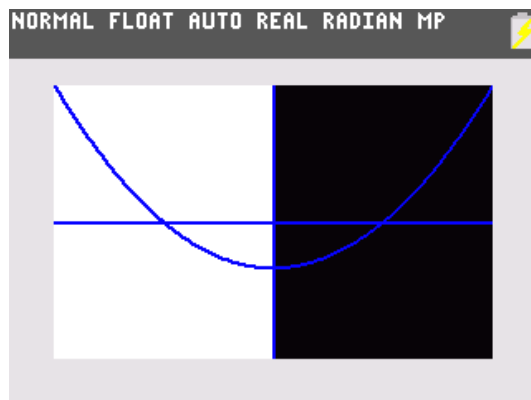


Figura 8: Raíces de  $f(x) = x^2 - 1$  (TI-84)

si comenzamos con un  $x_0$  negativo converge a  $-1$ . Solamente para  $x_0 = 0$  la sucesión no es convergente pues al ser la tangente en ese punto horizontal, no existe  $x_1$ . Esto es lo que podía esperarse de acuerdo con el teorema que hemos demostrado.

## 7. Fractales producidos por el método de Newton

Ahora repetiremos el estudio con una función algo más complicada:

$$f(x) = 2x^4 - \frac{9}{2}x^2 + \sqrt{2}x + 2$$

El programa escrito para esta función es:

```
For(P,Xmin,Xmax,(Xmax - Xmin)/264)
0 → I : P → A
While I < 10
A - (2A^4 - 4,5A2 + √(2)A + 2)/(8A^39A + √(2)) → A
I + 1 → I
If(2A^4 - 4,5A2 + √(2)A + 2)2 < 0,01 : Then
If A > 1 : Vertical P,12
If A < 1 : Vertical P,20
11 → I
End : End
If I = 10 : Vertical P,22
End
```

y el resultado se muestra en la figura 9.

En lo que sigue vamos a tratar de explicar la estructura que se observa en esta imagen (figura 9).

En este caso, hay un intervalo, llamémoslo  $(\infty, M)$ , alrededor de la raíz de la izquierda y otro, sea  $(A, B)$  alrededor de la raíz de la derecha tales que al tomar el término inicial de la sucesión en uno o en otro, la sucesión converge a una u tra raíz. Llamaremos a estas zonas *estables* y trataremos de explicar lo que ocurre fuera de ellas.

Lo que sucede en la otra región (parte derecha) es lo siguiente: el mapa de colores de la raíz a la que se llega está formado por copias a distinta (y menor) escala de la zona estable y de otras regiones, y es por lo tanto un fractal.

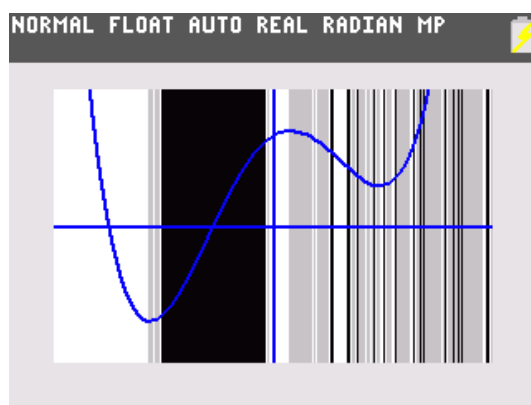


Figura 9: Raíces de  $f(x) = 2x^4 - \frac{9}{2}x^2 + \sqrt{2}x + 2$  (TI-84)

Para comprender mejor este efecto, que recibe el nombre de recursividad o autorreferencia, consideremos una imagen en la que aparece una persona sosteniendo esa misma imagen con menor tamaño (figura 10), y dentro de esa imagen, la misma persona sosteniendo la misma imagen con un tamaño aún más pequeño. Tanto la persona como la imagen aparecen un número infinito de veces, cada vez a un tamaño menor. Sin embargo tantas personas e imágenes ocupan un tamaño finito, el de la primera imagen, ya que sus áreas forman una serie geométrica cuya razón es la escala a la que se replica la imagen.

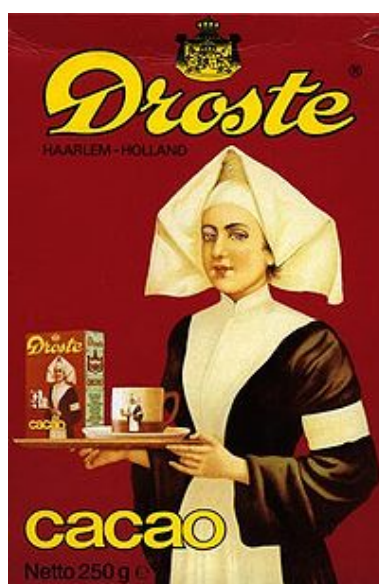


Figura 10: Autorreferencia

En el caso del método de Newton sucede lo mismo, ya que las tangentes a lo largo de un intervalo de  $x$  cortan al eje de abscisas a lo largo de otro intervalo. Como se ve en la figura 11, las raíces que se obtienen comenzando con los puntos del segmento  $JM$  son las mismas que las que se obtienen con los puntos de  $NQ$ , pero, no obstante, el patrón de las raíces resulta deformado; no se trata de una transformación lineal sino de una de otro tipo que depende de la función que utilizemos.

Para la función vista anteriormente, podemos hallar la zona en la que se cumple lo que hemos demostrado, que será esta la que comprende el intervalo  $(-\infty, M) \cup (A, B)$ . Si hallamos ahora las rectas tangentes a la función desde puntos en el interior de estos dos intervalos, podremos averiguar qué raíz estamos aproximando en cada caso.

Ahora que conocemos la zona estable podemos hacer una construcción del resultado por el proceso inverso al anteriormente descrito en el programa: partiendo de esta primera zona, hallar las tangentes a la función

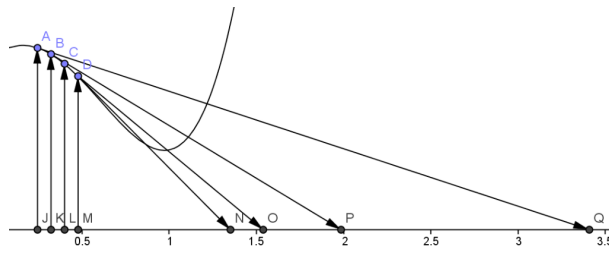


Figura 11: Deformación de un segmento producida por las tangentes (GeoGebra)

por sus extremos y delimitar otras áreas que conducen a la misma raíz (ver figura 11).

Para empezar, hallar los extremos de la zona estable es un proceso complicado, pues, en el caso de que la curva, como es el caso, tenga un punto de inflexión, y no, por ejemplo, una asíntota, lleva a que existan dos extremos de la zona estable de la raíz, y dado que los valores de  $x$  dentro del intervalo convergen hacia la raíz, y los valores fuera del intervalo divergen, es necesario que los extremos formen un bucle y que el método de Newton lleve de uno a otro. Es decir, si los extremos son  $x = a$  y  $x = b$ , entonces

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}; \quad a = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Y si, para simplificar llamamos:

$$h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

resulta que:

$$a = b - h(b) = a - h(a) - h(a - h(a)) \implies h(a)h(a - h(a)) = 0$$

Aunque no es posible hallar los extremos algebraicamente, se puede hallar el corte de la función  $y = h(x) + h(x - h(x))$  con el eje de abscisas para obtener los puntos  $A(a, 0)$  y  $B(b, 0)$  gráficamente. Aunque hay varios cortes con el eje, no todos son los que buscamos, ya que si  $x$  es un cero de la función también se cumple la condición dada.

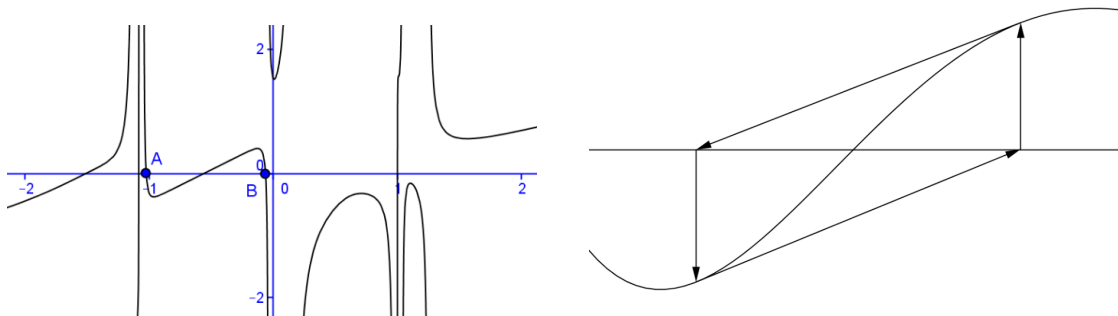


Figura 12: Representación de  $h(x) + h(x - h(x))$  y bucle (GeoGebra)

Posteriormente, se hallan todas las tangentes a la curva por estos dos puntos, para hallar otros intervalos en cuyo interior la raíz que se encuentra es la misma (ver figura 13).

Con este intervalo se repite el mismo proceso, y en este caso son dos los intervalos que resultan de trazar las tangentes. Así, al repetir el proceso una y otra vez, se puede determinar qué zonas conducirán a la raíz de la que partimos.

En el caso de la otra raíz, el proceso es algo más complejo en este caso, porque la zona del comienzo comprende toda la zona a la izquierda del punto, y es preciso darse cuenta que entonces, los extremos de

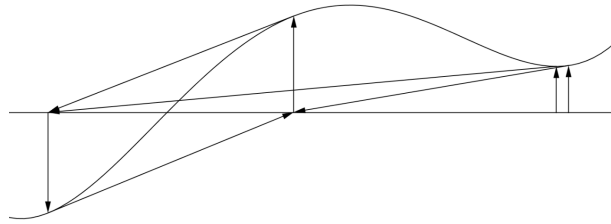


Figura 13: Intervalos que convergen sobre la primera raíz (GeoGebra)

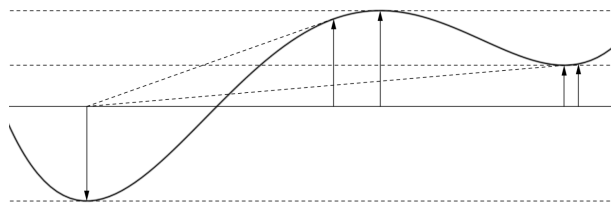


Figura 14: Obtención de intervalos que convergen sobre la segunda raíz (GeoGebra)

las zonas que hallaremos serán puntos en los que la pendiente es cero, además de los que corresponden a las tangentes por el otro extremo de la primera zona (ver figura 14).

Estas propiedades fractales, aunque parecen artificiales y poco rigurosas en lo que se refiere a funciones de variable real, adquieren mayor profundidad cuando el mismo proceso se repite en variable compleja. Para ver estos resultados, elaboraremos un programa parecido, pero esta vez comprobando si el valor de  $z$  está a poca distancia de las raíces en el plano. Si no es este el caso, entonces habremos llegado a una de las dos soluciones complejas de la ecuación  $f(z) = 0$ . Como puede comprobarse, la imagen presenta cierta autosimilitud.

```

For(P,Xmin,Xmax,(Xmax - Xmin)/264)
For(Q,Ymin,Ymax,(Ymax - Ymin)/164)
0 → I : P + Q * i → A
While I < 20
A - (2A^4 - 4,5A2 + √(2)A + 2)/(8A^3 - 9A + √(2)) → A
I + 1 → I
If abs(2A^4 - 4,5A2 + √(2)A + 2)2 < 0,01 : Then
Pt - On(P,Q,10,4)
If abs(A + 0,56) < 0,05 : Pt - On(P,Q,12,4)
If abs(A + 1,51) < 0,05 : Pt - On(P,Q,20,4)
21 → I
End : End
If I = 20 : Pt - On(P,Q,22,4)
End : End

```

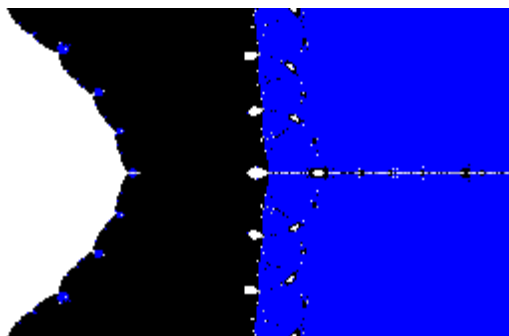


Figura 15: Convergencia para varios valores iniciales complejos (TI-84)

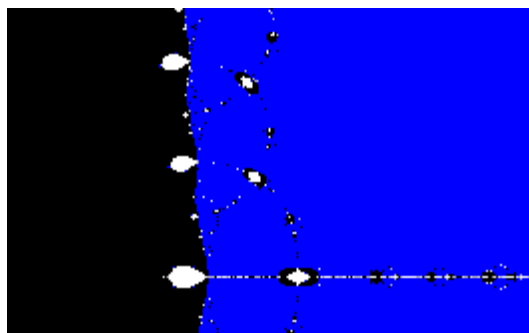


Figura 16: Ampliación de la figura anterior (TI-84)

## 8. La ecuación logística

Los objetos fractales aparecen en otros muchos modelos matemáticos, y no solamente en procesos de análisis complejo, sino también en casos más sencillos, en particular en multitud de modelos creados para predecir comportamientos biológicos y orgánicos, que, debido a que deben tenerse en cuenta una vez que se han producido durante largos períodos de tiempo, requieren un ordenador para obtener resultados.

Un ejemplo de este tipo de procesos es el que viene dado por la ecuación logística, que trata de explicar el comportamiento de un grupo de animales de la misma índole cuando se reproducen en un entorno cerrado, como un pantano. Cada iteración de la ecuación logística corresponde a una generación de animales.

$$x_{n+1} = Cx_n(1 - x_n)$$

Donde  $x$  es la población de animales (entre 0 y 1) y  $C$  es un parámetro invariante en el proceso, pero que da lugar a distintos resultados según tome distintos valores entre 1 y 4. En concreto, si el valor que toma  $C$  está entre 2 y 3, el valor de  $x$  tiende a estabilizarse en un número que es ligeramente mayor cuanto mayor es  $C$ . Si el valor de  $C$  está comprendido entre 3 y aproximadamente 3,45 entonces  $x$  tiende a estabilizarse en un ciclo de dos valores, que se repiten uno detrás del otro. Si  $x$  está entre 3,45 y 3,55 el ciclo es de 4 valores, y para valores de  $C$  entre 3,55 y 4 los valores de  $x$  no forman un ciclo, sino que son totalmente caóticos e impredecibles.

Aunque el análisis de esta función es difícil realizarlo de forma algebraica, sí que puede llevarse a cabo utilizando un programa informático. En el siguiente programa iteramos la función 50 veces y representamos en el eje  $y$  los últimos nueve valores obtenidos. Este proceso se realiza para distintos valores de  $C$  (de 1 a 4) que se representan en distintas posiciones del eje  $x$ . Debido a la rápida tendencia de la función a tomar el valor límite, un programa simple puede producir resultados interesantes:



```

1 → Xmin : 4 → Xmax
0 → Ymin : 1 → Ymax
For(C, 1, 4, 1/88)
  rand → N
  For(A, 1, 50)
    CN - CNN → N
    If A > 40 : Pt - On(C, N, 12, 4)
  End : End

```

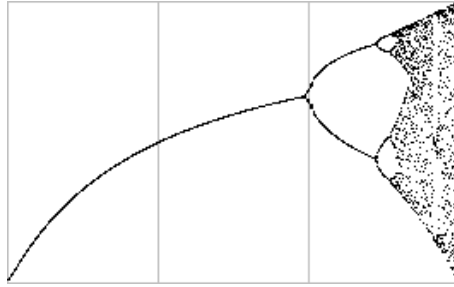


Figura 17: Valores de  $x$  al cabo de 50 iteraciones en función de  $C$  (TI-84)

Para explicar el hecho de que sólo entre 1 y 3 se produzca una convergencia, debemos tener en cuenta que el límite de la convergencia es, de nuevo, un punto fijo de la función de iteración. Así pues, resolviendo la ecuación que resulta, podemos obtener el valor de convergencia  $l$ :

$$\begin{aligned}
 l &= Cl(1-l) \implies 1 = C(1-l) = C - Cl \\
 &\implies l = \frac{C-1}{C}
 \end{aligned}$$

Esta es, en efecto, la función que se obtiene para  $1 < C < 3$ .

Para explicar el comportamiento que presenta la función en el resto de valores, y comprobar que se bifurca en  $C = 3$ , vamos a analizar este sistema de iteración como una función mediante el teorema del punto fijo.

Según vimos anteriormente, si una función definida en  $[a, b]$  cumple que:

$$\begin{aligned}
 f(a) &> a \\
 f(b) &< b \\
 \max|f'(x)| &< 1
 \end{aligned}$$

la sucesión definida por la iteración  $x' = f(x)$  converge al punto fijo  $\xi = f(\xi)$ .

Estas condiciones se cumplen en  $(0, 1)$ , es decir tomando el intervalo  $[a, b]$  con  $a$  muy próximo a cero y  $b$  muy próximo a 1.

En efecto, si  $a$  es muy próximo a cero y  $C > 1$ :

$$f(a) = Ca(1-a) = Ca - Ca^2 \simeq Ca > a$$

y si  $b$  es próximo a 1:

$$f(b) = Cb(1-b) \simeq 0 < b$$

Además:

$$f'(x) = C - 2Cx = C(1-2x)$$

La sucesión es convergente cuando la derivada es menor que 1 en valor absoluto, es decir:

$$\begin{aligned} |C(1-2x)| < 1 &\implies -1 < C(1-2x) < 1 \\ &\implies -\frac{1}{C} < 1-2x < \frac{1}{C} \\ &\implies x \in \left(\frac{C-1}{2C}, \frac{C+1}{2C}\right) \end{aligned}$$

El punto fijo de la función de iteración  $\xi$  cumple que  $\xi = f(\xi)$ . Este punto es:

$$\xi = C\xi(1-\xi) \implies \xi = \frac{C-1}{C}$$

Si este punto se encuentra en el interior del intervalo

$$\left(\frac{C-1}{2C}, \frac{C+1}{2C}\right),$$

podemos estar seguros que la sucesión definida por la iteración será convergente al punto fijo  $\xi$ . Para ello, debe cumplirse que:

$$\frac{C-1}{C} < \frac{C+1}{2C} \implies 2C-2 < C+1 \implies C < 3$$

Este resultado está de acuerdo con lo que hemos obtenido con nuestro programa en la calculadora. Pero con nuestro programa hemos obtenido algo más. Las condiciones suficientes de convergencia que proporciona el teorema del punto fijo son, en este caso, también necesarias pues hemos visto que para  $C > 3$  la sucesión empieza a oscilar entre dos valores antes de volverse caótica para valores más grandes de  $C$ .

## 9. Conclusión

La principal conclusión a la que he llegado analizando todos estos objetos matemáticos, y según los he dibujado con la calculadora, es que un ordenador es una herramienta imprescindible a la hora de indagar sobre fractales, funciones de iteración, y otros procesos repetitivos. Creo que sin usar la calculadora, no hubiera podido obtener ningún resultado, porque, aunque no es necesario usarla para explicar la naturaleza de los objetos, sí es muy útil para conocerlos y observar cómo son.

En especial, me ha quedado claro que en matemáticas los resultados a los que se llegan pueden ser, además de teóricos, experimentales, y que son los que se han obtenido experimentando (como el mapa de la convergencia del método de Newton) los que plantean las preguntas más importantes. Los métodos puramente formales, si bien también son útiles (como en la obtención de el punto de bifurcación en la ecuación logística), y pueden ser necesarios para llevar a cabo la tarea más experimental (como cuando hemos elaborado el programa del conjunto de Mandelbrot), no son, ni mucho menos, lo único que se puede hacer en matemáticas.

También he constatado que, a menudo, un problema se hace más sencillo de resolver si se transforma en otro equivalente. Por ejemplo, analizar la convergencia de una función en variable real me ha parecido más fácil de entender utilizando los diagramas en los que se representa la función y la recta  $y = x$ , y se trasladaba un punto de una a otra.

## 10. Bibliografía y recursos

- Abelson, Harold y di Sessa, Andrea (1986) Geometría de Tortuga - El ordenador como medio de exploración de las matemáticas, Anaya, Madrid
- Barrallo, Javier (1993) Geometría fractal - Algorítmica y representación, Anaya, Madrid
- Gleick, James (1988) Caos - La creación de una ciencia, Seix Barral, Barcelona
- Mandelbrot, Benoît (1984) Los objetos fractales - Forma, azar y dimensión, Tusquets, Barcelona
- Mandelbrot, Benoît (1983) La geometría fractal de la naturaleza, Tusquets, Barcelona
- Geogebra 4.2.56
- Wolfram Mathworld: <http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html>