

Estudio de la composición de frecuencias de distintos sistemas mediante Transformada de Fourier

-Juan Manuel Carrizo- jnmcrz@gmail.com

-Gonzalo Gareis Arnedo- gonzagareis2003@gmail.com

-Valentino Giovannelli - valentinog491@gmail.com

*Laboratorio de ondas, Departamento de Física, Facultad de ciencias exactas de la
Universidad de Buenos Aires*

Resumen:

El objetivo de este informe será evaluar la eficacia de utilizar la transformada de Fourier para hallar la frecuencia de resonancia y los modos normales de un sistema. Para poder llevarlo a cabo se calculó la transformada de un pulso cuadrado en un tubo de Kundt y en un par de piezoeléctricos, y a su vez se utilizó un script para automatizar el cálculo manual y poder comparar los resultados. Haciendo uso de estos métodos se pudo concluir que la transformada de Fourier es una herramienta muy eficaz y útil para hallar los parámetros antes mencionados.

Introducción:

Las ondas que se propagan en medios continuos limitados pueden describirse como una superposición de los modos normales del sistema, los cuáles son soluciones armónicas con frecuencias discretas determinadas por las condiciones de contorno. Esta propiedad es posible gracias a la linealidad de la ecuación de ondas clásica, que permite aplicar el principio de superposición.

Una herramienta útil para descomponer estas ondas en todas sus componentes frecuenciales es la transformada de Fourier, el cuál indica la contribución de cada frecuencia a la serie original. Particularmente, descomponer una función temporal como lo son las señales en sus componentes frecuenciales corresponde a lo que se conoce como el análisis de Fourier. Este análisis nos permite pasar del dominio temporal al dominio frecuencial, facilitando la identificación de modos normales o frecuencias de resonancia en sistemas físicos.

En notación exponencial, la transformada de Fourier puede ser calculada por la siguiente ecuación:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad (1)$$

donde $F(w)$ representa el contenido espectral de la señal y $f(t)$ es la señal.

Las ventanas temporales influyen de manera significativa a la hora de realizar un análisis de Fourier. Ventanas más largas permiten distinguir con mayor detalle las frecuencias cercanas entre sí, mientras que ventanas muy cortas generan un ensanchamiento del espectro. Si la ventana temporal es demasiado breve, pueden aparecer componentes espurias, producto de la pérdida de información temporal y del truncamiento de la señal.

Desarrollo experimental:

La principal motivación de la realización de este experimento es determinar las frecuencias fundamentales de un tubo de Kundt y la campana de frecuencias de resonancia de un sistema piezoeléctrico emisor-receptor a través del uso de la transformada de Fourier. A su vez, se buscó comparar dichos resultados con lo obtenido realizando un análisis de dichas frecuencias de forma automática, mediante el uso de un script en Spyder.

Para ambos sistemas se emitió una señal cuadrada a una frecuencia de 1 Hz, la cuál fue analizada para distintas ventanas temporales (ver Figuras 1 y 2), donde a cada una de éstas se les realizó un análisis de Fourier (1), con el objetivo de determinar cuál es el intervalo temporal más óptimo para determinar las frecuencias buscadas.

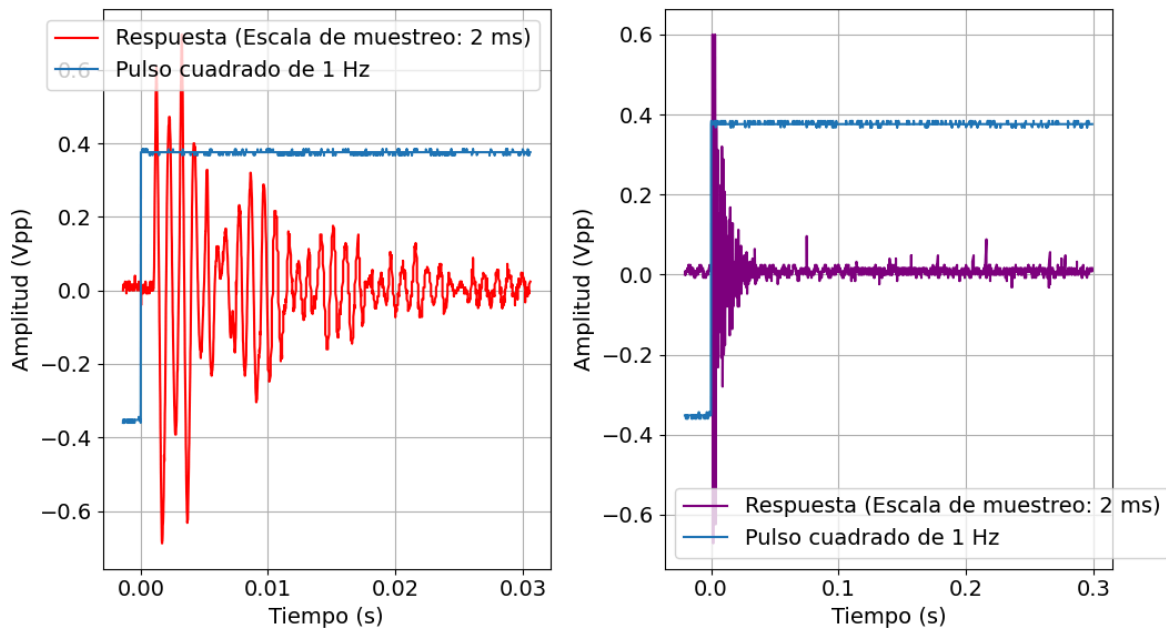


Figura 1: Señales emitidas en el tubo con menor y mayor escala temporal correspondientemente, usadas para obtener la transformada de fourier. Se usaron dos escalas temporales más además de las ilustradas, intermedias entre éstas dos, las cuáles difieren en la anchura de la señal. Se observa además el pulso cuadrado emitido.

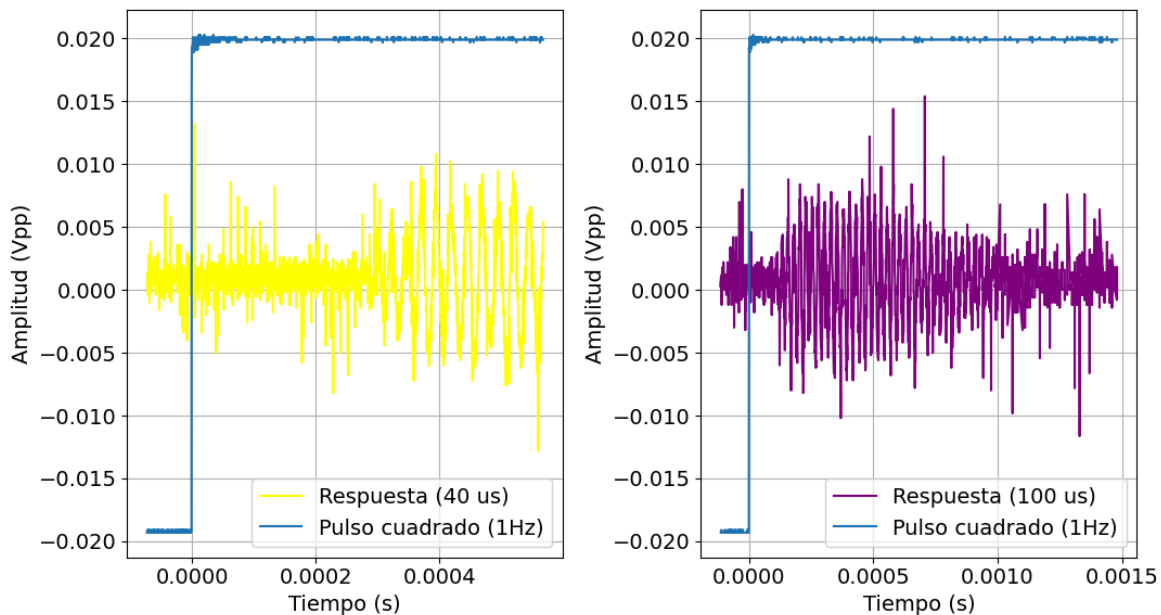


Figura 2: Señales emitidas por un par Emisor-Receptor de piezoeléctricos, con menor y mayor escala temporal correspondientemente, usadas para obtener la transformada de fourier. Se observa además el pulso cuadrado emitido.

Para el caso del tubo de Kundt, como puede observarse en la Figura 3, se utilizó un generador de funciones (Tektronix AFG1022), el cuál alimenta al parlante que se encarga de emitir las ondas sonoras a través del tubo, un micrófono para detectar dichas ondas, un pistón para poder variar las condiciones de contorno en el tubo, y un osciloscopio (Tektronix TBS1000c series) para poder analizar el comportamiento de las ondas sonoras.

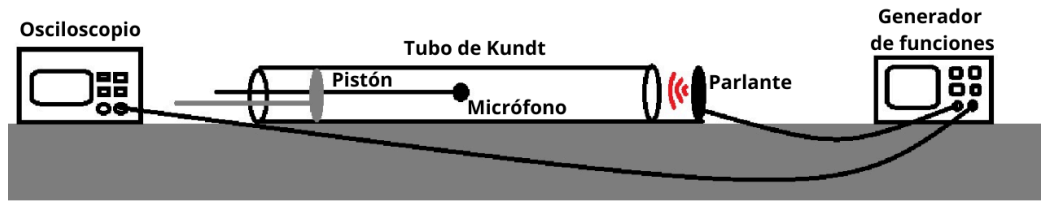


Figura 3: Esquema experimental utilizado para el estudio en el caso del tubo, donde se observa el generador de funciones alimentando a un parlante, el cuál genera ondas estacionarias sobre el tubo de Kundt, un micrófono que permite captar estas ondas, un pistón que permite variar la condición de contorno en el otro extremo, además de un osciloscopio.

Para el estudio en el caso de los piezoeléctricos, como puede observarse en la Figura 4, se utilizó nuevamente el generador de funciones, que se encargó de alimentar al piezoeléctrico emisor, el cuál emite ondas de ultrasonido que son captadas por el piezoeléctrico receptor, y cuyas lecturas pueden ser observadas en el osciloscopio.

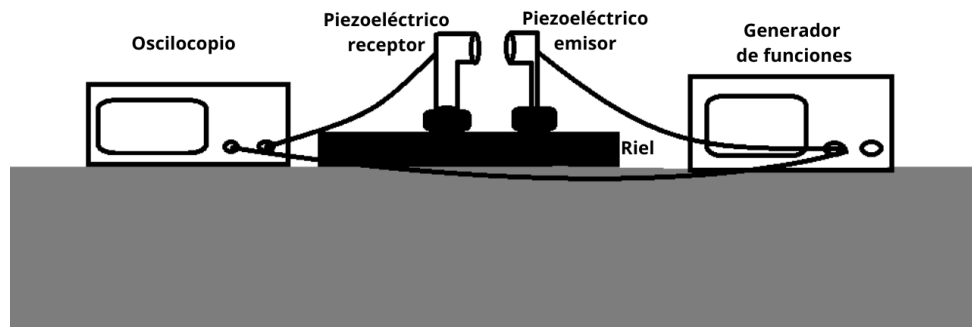


Figura 4: Esquema experimental utilizado para el estudio en el caso de los piezoeléctricos, donde se utilizó un receptor y un emisor, montados sobre un riel, un generador de funciones que se encarga de alimentar al emisor, y un osciloscopio que lee las perturbaciones captadas por el receptor.

Finalmente, las señales adquiridas en ambos casos fueron procesadas mediante análisis espectral de Fourier para identificar las frecuencias de los modos normales en el caso del tubo y la campana de frecuencias de resonancia en el caso de los piezoeléctricos, para luego comparar dichos resultados con los obtenidos mediante un análisis automatizado de dichas frecuencias.

Resultados:

Puede observarse en la figura 5 el espectro obtenido para el caso del tubo de Kundt, y en la figura 6 el correspondiente obtenido para el caso del par piezoeléctrico, ambos calculados para diferentes ventanas temporales.

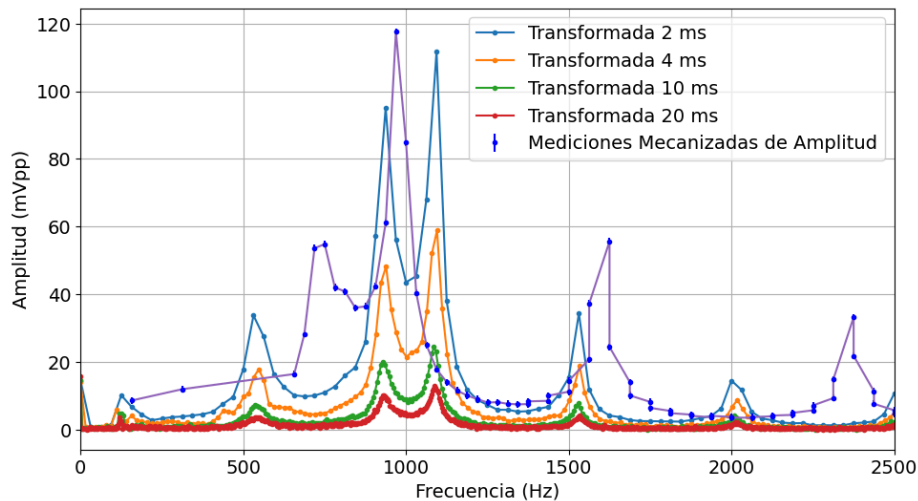


Figura 5: Superposición de gráficos de las transformadas de Fourier para diferentes ventanas de muestreo sobre la misma medición de un pulso cuadrado en el caso de tubo con extremos Abierto-Cerrado. Los datos tienen sus errores, los cuales no fueron graficados para mejor apreciación del comportamiento de las funciones. En azul, mediciones realizadas para un tubo de $(35,0 \pm 0,1)$ cm de longitud y extremos Abierto-Cerrado mediante un script de Spyder que automatizó la recolección de datos. Datos con errores obtenidos del osciloscopio.

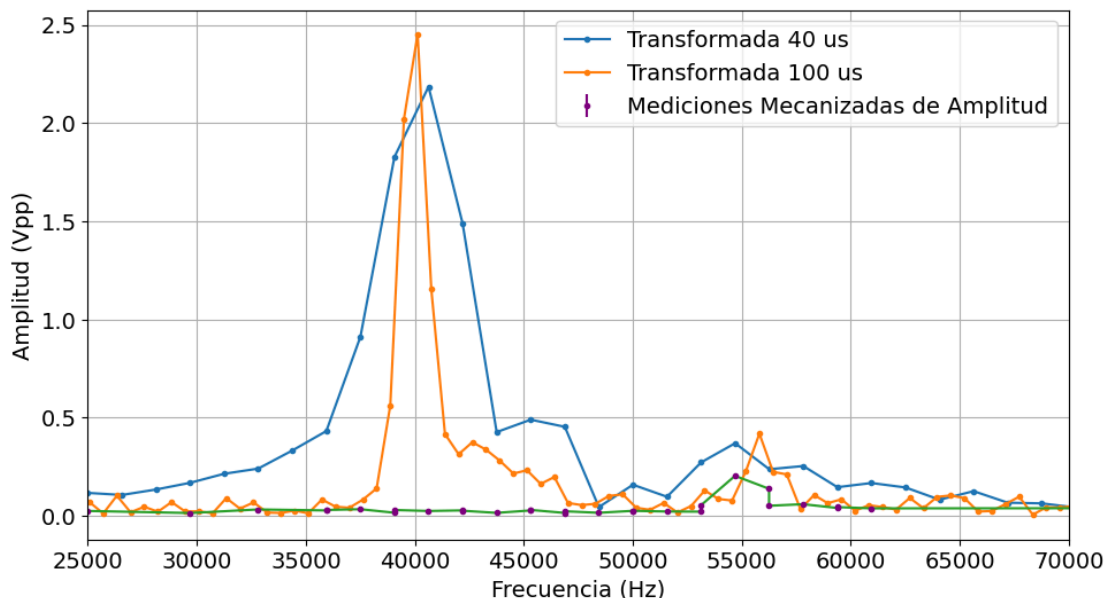


Figura 6: Superposición de dos gráficos de las transformadas de Fourier para diferentes ventanas de muestreo sobre la misma medición de un pulso cuadrado en el caso de piezoeléctricos separados por $(2,0 \pm 0,1)$ cm entre sí. Gráfico de mediciones realizadas para un par Emisor-Receptor de piezoeléctricos mediante un script de Spyder que automatizó la recolección de datos. Datos con errores obtenidos del osciloscopio. Los datos tienen sus errores, los cuales no fueron graficados para mejor apreciación del comportamiento de las funciones.

En ambos casos es notable destacar la dependencia clara entre extensión temporal y definición espectral de la transformada de Fourier. Puede observarse por ejemplo, que en ambos casos para la ventana temporal más corta, el ancho del espectro es considerablemente mayor, lo que dificulta distinguir a las frecuencias individualmente. Aun así, la utilización de una señal temporalmente corta permite una mejor apreciación de los picos de resonancia, ya que la amplitud de la transformada de Fourier es mayor y facilita su comparación con los datos medidos mediante la automatización. En cambio, al usar una extensión temporal más larga, se genera un espectro angosto, lo que permite identificar mejor a las frecuencias individuales mencionadas anteriormente, pero también produce una reducción en la amplitud de la transformada y puede llevar a la aparición de frecuencias

espurias. Dicha aparición se debe al truncamiento imperfecto de la señal y a las condiciones de borde impuestas por el intervalo de observación.

En la Figura 5 (ver la curva violeta) y la Figura 6 (ver la curva verde con puntos morados) se muestran los datos obtenidos mediante la automatización para el tubo y los piezoeléctricos, respectivamente. Puede observarse, en el caso de tubos, que la transformada de Fourier tiene un comportamiento similar a la automatización, donde se presenta un decaimiento de la amplitud a medida que aumenta la frecuencia, comportamiento esperado para una superposición de modos normales. Mientras que para el caso de los piezoeléctricos puede observarse un comportamiento marcado de campana de resonancia por parte de la transformada de Fourier, con un máximo principal y un decaimiento hacia los costados de este máximo, pero no ocurre lo mismo para las mediciones obtenidas por la automatización. Dichas mediciones muestran cierta respuesta por parte del receptor alrededor de los (54687 ± 314) Hz, el cuál también se observa en las transformadas, pero no se puede observar el comportamiento de la campana principal en estas mediciones.

Se atribuye esta omisión de la campana a un error en la delimitación del tamaño de pasos que separan a cada medición determinada en el script o quizás a un error interno de los piezoeléctricos.

Conclusión:

El uso de la transformada de Fourier para encontrar las frecuencias de resonancia y las frecuencias normales de un sistema es una herramienta muy eficiente, ya que permite recopilar una gran cantidad de datos fehacientes en poco tiempo.

La elección de la ventana temporal es un factor clave a la hora de trabajar con la transformada de Fourier, ya que esto influye directamente en la resolución de nuestros resultados. Por un lado, elegir una ventana temporal corta puede llevar a errores como “evadir” la contribución de ciertas frecuencias debido al ancho considerable del contenido espectral. Mientras que, como ya se mencionó, la elección de una ventana muy larga puede conllevar a la aparición de frecuencias espurias, que podrían conllevar a mediciones falsas.

Puede observarse además, como el micrófono y el parlante tienen una diferencia en sus comportamientos previo a los 1000 hz, ya que el rango reactivo del micrófono previo a dicha frecuencia difiere con el rango del parlante, por lo que es recomendable realizar una calibración futura de ambos transductores.

Finalmente, se puede observar cierta concordancia entre utilizar el método automatizado y el uso de la transformada de Fourier, por lo menos en el caso de la práctica con tubos de Kundt, lo que respalda su uso práctico como herramienta para la caracterización espectral.

En el caso de la práctica de piezoeléctricos, se considera que el equipo utilizado (el par Emisor-Receptor de piezoeléctricos) no se encontraba en condiciones de realizar las mediciones, lo cual tampoco permite concluir la efectividad de la automatización para caracterizaciones espectrales con dicho instrumental. La fundamentación de esta conclusión, se encuentra respaldada en la cantidad de ruido observado en la Figura 2, lo cual indica una mala respuesta a la señal por parte del equipo.

Bibliografía:

- Capeluto, Maria G. 2025. *Apuntes Laboratorio 2. Apunte de cátedra, Capítulo 5: Composición de señales.*