

Trabajo práctico

Diseño de un filtro analógico

Análisis de circuitos
Segundo cuatrimestre de 2020

Becker, Gonzalo Agustín	104291
-------------------------	--------

Índice

1. Objetivos	3
2. Introducción	3
3. Análisis de la transferencia	4
3.1. Cálculo de polos y ceros	4
3.2. Cálculo de la frecuencia de corte	4
4. Diseño del circuito	6
4.1. Filtro pasa altos con retroalimentación múltiple	6
4.2. Selección de los valores de los componentes	6
4.3. Circuito completo	9
5. Análisis del circuito	10
5.1. Diagrama de Bode	10
5.1.1. Simulaciones	10
5.1.2. Observaciones	11
5.2. Respuesta al impulso	12
5.2.1. Cálculo analítico	12
5.2.2. Simulaciones	13
5.2.3. Observaciones	13
5.3. Respuesta al escalón	14
5.3.1. Cálculo analítico	14
5.3.2. Simulaciones	15
5.3.3. Observaciones	15
5.4. Respuesta a la señal cuadrada	16
5.4.1. simulaciones	16
5.4.2. Observaciones	18
5.5. Respuesta a la señal senoidal	18
5.5.1. Cálculo analítico	18

5.5.2. simulaciones	19
5.5.3. Observaciones	21
6. Conclusión	22

1. Objetivos

En el presente informe, se busca construir un filtro analógico a partir de una transferencia dada. Este se construye a partir de resistores, capacitores y amplificadores operacionales. A su vez, se comparan en este texto las diferencias existentes entre la transferencia ideal y la transferencia adaptada a los valores comerciales de los componentes, como también se contrasta el resultado analítico de determinadas respuestas del circuito contra las simulaciones numéricas.

2. Introducción

Los circuitos que sean sistemas lineales e invariantes (LTI), admiten una función de transferencia, la cual se define por

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i(s)}$$

donde $V_i(s)$ representa la transformada de Laplace de la señal entrante, mientras que $V_o(s)$ es la transformada de la señal saliente.

Una vez definidos los puntos de entrada y salida de un circuito, la función de transferencia es, en teoría, una característica intrínseca del sistema en estudio. En otras palabras, esta no debería modificarse, sin importar cual sea el estímulo a la entrada. Además, la función de transferencia permite obtener la respuesta del circuito a la salida según cual sea la señal a la entrada. En efecto,

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i(s)} \Rightarrow V_o(s) = V_i(s)H(s) \Rightarrow V_o(t) = \mathcal{L}^{-1}(V_i(s)H(s))$$

Se destacan los casos particulares en los que $v_i(t) = H(t)$, donde $V_i(s) = \frac{1}{s}$, y $v_i(t) = \delta(t)$, donde $V_i(s) = 1$. Luego, es posible modelar matemáticamente al circuito a partir de su función de transferencia.

Así mismo, es importante saber como interpretar la información contenida en $H(s)$. Recordando que $s = jw$, en donde j es la unidad imaginaria y $w = 2\pi f$ es la frecuencia angular, se observa que $H(s)$ es una función compleja. Considerando las propiedades de la transformada de Laplace, se puede demostrar que $|H(jw)|$ es la ganancia del circuito, mientras que $\text{Arg}(H(jw))$ es el desfase entre la salida y la entrada; notar que ambas son funciones reales de w . De aquí se desprenden los diagramas de Bode, que representan gráficamente la ganancia y la variación en la fase del dispositivo.

En cuanto a los filtros analógicos, estos son dispositivos que permiten atenuar determinadas frecuencias de la señal entrante, y amplificar otras. Así, se definen los filtros pasa-altos, pasa-bajos, pasa-banda y rechaza-banda, entre otros. Es posible entonces definir su función de transferencia, y realizar simulaciones en MatLab, o otro programa, para estudiar su comportamiento.

La transferencia que se intenta implementar aquí es la siguiente:

$$H(s) = \frac{0.8911s^4}{s^4 + 2539s^3 + 4.686 \cdot 10^6 s^2 + 2.894 \cdot 10^9 s + 2.863 \cdot 10^{12}}$$

3. Análisis de la transferencia

3.1. Cálculo de polos y ceros

Una función de transferencia queda unívocamente determinada por tres elementos fundamentales: sus ceros, sus polos y su ganancia. Además, los polos no tienen por qué ser reales, y de hecho en este caso se observa que los polos son números complejos.

Factorizando a la función de transferencia, se obtiene

$$H(s) = \frac{0.8911s^4}{(s^2+266.68s+900431)(s^2+2272.32s+3.17959 \cdot 10^6)}$$

De aquí se desprende que existe un único cero, 0, de orden 4, y cuatro polos. Para calcular los polos, se factorizan las funciones cuadráticas del denominador. Los polos son los siguientes:

$$\begin{aligned} &-133.34 - 939.50j \\ &-133.34 + 939.50j \\ &-1136.2 - 1374.3j \\ &-1136.2 + 1374.3j \end{aligned}$$

Dado que se trata de polos complejos conjugados, se pueden calcular ciertos parámetros, como w_0 , que es el módulo de cada polo complejo, y Q , el factor de calidad. Estos parámetros influyen en el comportamiento de la transferencia de diferentes formas. Por ejemplo, en el diagrama de Bode, se cumple que cuanto mayor es Q más abrupta es la transición en el diagrama de fase en $w = w_0$, y mayor es el pico que se da en el diagrama de ganancia ($20 \log Q$, exactamente). También, se suele aproximar a cada pareja de ceros o polos complejos conjugados por un cero o polo doble, respectivamente, en w_0 .

Utilizando la siguiente expresión, es posible obtener estos parámetros de las expresiones cuadráticas.

$$s^2 + \frac{w_0}{Q} + w_0^2$$

Entonces, se obtiene

$$w_{01} = 948.91 \text{ rad / s}$$

$$w_{02} = 1783.14 \text{ rad / s}$$

$$Q_1 = 3.56$$

$$Q_2 = 0.785$$

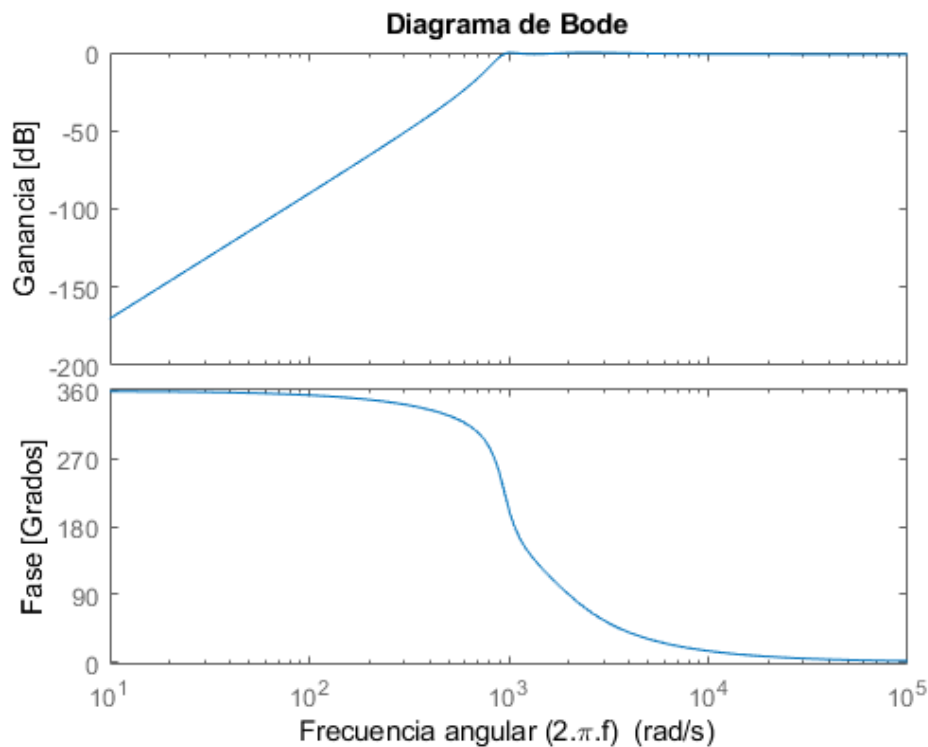
Las siguientes simulaciones se realizaron exclusivamente a partir de la función de transferencia. Todos los gráficos fueron realizados en MATLAB.

3.2. Cálculo de la frecuencia de corte

La frecuencia de corte, f_0 , la cual será utilizada para determinar las frecuencias en la respuesta a la señal senoidal y cuadrada, es aquella en la que la señal deja de ser atenuada y comienza a

ser amplificada, o viceversa, dependiendo del tipo de filtro. Es necesario aclarar que en el caso del filtro pasa banda, existen dos frecuencias de corte.

Se observa en el diagrama de Bode que se trata de un filtro pasa altos. Entonces, existirá una única frecuencia de corte, que marcará hasta que frecuencia la señal es atenuada.



En este cálculo se adopta la convención de que la frecuencia de corte es aquella en la que la señal se ha atenuado 3 dB. Equivalentemente, es aquella en la que la ganancia máxima se ha reducido en un 29.3% (equivalente a dividir por la raíz de dos)

Resolviendo numericamente, se obtiene $f_0 = \frac{877.3946}{2\pi} = 139.64 Hz$, recordando que MATLAB trabaja sobre la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$.

4. Diseño del circuito

4.1. Filtro pasa altos con retroalimentación múltiple

En el circuito de la Figura 1, la función de transferencia está definida por¹

$$G(s) = \frac{-\frac{C_1}{C_3}s^2}{s^2 + \frac{C_1+C_2+C_3}{R_2C_2C_3}s + \frac{1}{R_1R_2C_2C_3}}$$

Se evidencia entonces que sería posible obtener la transferencia buscada $H(s)$ a partir de una conexión en cascada de dos circuitos como el aquí expuesto. En efecto, cuando se tienen dos circuitos A y B como los de la Figura 2, la función de transferencia total puede calcularse como

$$H_{ca}(s) = \frac{V_c(s)}{V_a(s)} = \frac{V_c(s)}{V_b(s)} \frac{V_b(s)}{V_a(s)} = H_{cb}(s)H_{ba}(s)$$

Por supuesto, existen otros circuitos que pueden resultar en la misma transferencia. No obstante, como en este caso la ganancia cuando $\omega \rightarrow \infty$ es 0.8911, que es menor a 1, es recomendable evitar la utilización de operacionales amplificadores en modo no inversor, ya que este no permite ganancias menores a 1.

4.2. Selección de los valores de los componentes

Al momento de elegir los valores de los componentes, es fundamental elegir valores que sean de uso comercial. En este caso, se han definido valores tanto de capacitores como de resistores en la serie E12. Para definir los valores numéricos, se opta en este caso por considerar la transferencia total en función de las incógnitas. Por supuesto, al momento de definir los valores la utilización de cualquier tipo de cómputo para facilitar el proceso será favorable. Así, se tiene

$$H(s) = \frac{\frac{C_{11}C_{12}}{C_{31}C_{32}}s^4}{(s^2 + \frac{C_{11}+C_{21}+C_{31}}{R_{21}C_{21}C_{31}}s + \frac{1}{R_{11}R_{21}C_{21}C_{31}})(s^2 + \frac{C_{12}+C_{22}+C_{32}}{R_{22}C_{22}C_{32}}s + \frac{1}{R_{12}R_{22}C_{22}C_{32}})}$$

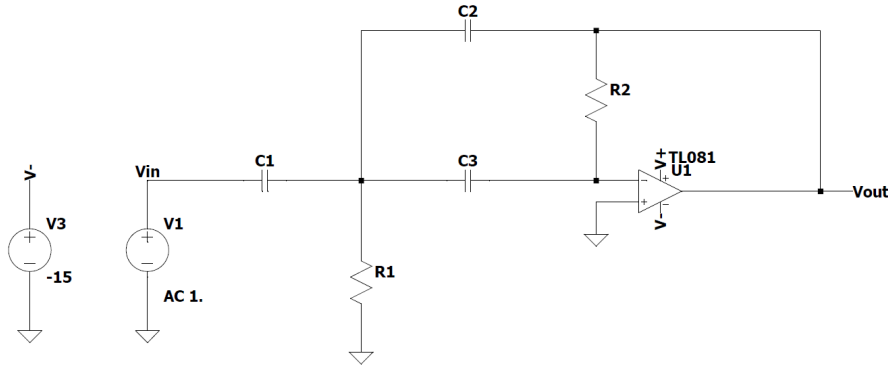


Figura 1: Circuito

¹<http://sim.okawa-denshi.jp/en/OPTazyuHikeisan.htm>

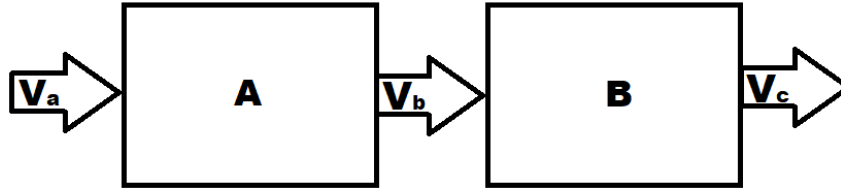


Figura 2: Conexión en cascada

Notar que la notación R_{xy} significa que este resistor es el resistor número x en el circuito número y. Análogamente con los capacitores. También se define la siguiente forma genérica:

$$H(s) = \frac{Ks^4}{(s^2+b_1s+c_1)(s^2+b_2s+c_2)}$$

Luego, se quiere llegar a una transferencia cuyos coeficientes sean lo más parecidos posible a la transferencia ideal:

$$H(s) = \frac{0.8911s^4}{(s^2+266.68s+900431)(s^2+2272.32s+3.17959 \cdot 10^6)}$$

Notar que la notación R_{xy} significa que este resistor es el resistor número x en el circuito número y (análogamente con los capacitores).

Es posible variar los valores de los componentes hasta encontrar los que mejor se ajusten al resultado buscado. Las asignaciones realizadas en este caso son las siguientes.

Componente	Valor	Componente	Valor
C_{11}	33n	C_{12}	27n
C_{21}	680n	C_{22}	33n
C_{31}	10n	C_{32}	100n
R_{11}	1k	R_{12}	1.8k
R_{21}	47k	R_{22}	180k

La función de transferencia adaptada a estos valores se puede calcular fácilmente, y resulta ser

$$H_{nueva}(s) = \frac{0.891s^4}{(s^2+269.36s+935278)(s^2+2262.20s+3.12891 \cdot 10^6)}$$

Es evidente que los coeficientes involucrados son muy cercanos a los de la transferencia original. En la siguiente tabla se comparan los errores porcentuales entre cada coeficiente.

Coeficiente	Transferencia ideal	Transferencia adaptada	Error(%)
K	0.8911	0.891	0.01
b_1	266.68	269.36	1.00
c_1	900431	935278	3.87
b_2	2272.32	2262.20	0.45
c_2	$3.1796 \cdot 10^6$	$3.1289 \cdot 10^6$	1.59

En este caso particular, se logró una cierta optimización de la tarea a través de los siguientes códigos en Python:

```

values1=[10,12,15,18,22,27,33,39,47,56,68,82,
100,120,150,180,220,270,330,390,470,560,680,820,1000]
values2=[1,1.2,1.5,1.8,2.2,2.7,3.3,3.9,4.7,5.6,6.8,8.2,10,12,15,18,
22,27,33,47,56,68,82,100,120,150,180,220,270,330,470,560,680,820,1000]

valuesC=[element * 1E-9 for element in values1]
valuesR=[element * 1000 for element in values2]
for C11 in valuesC:
    for C12 in valuesC:
        for C31 in valuesC:
            for C32 in valuesC:
                ans=C11*C12/(C31*C32)
                dif=ans-0.8911
                if(abs(dif)<0.0001):
                    print("C11={}, C12={}, C31={},C32={},
dif={} ".format(C11,C12,C31,C32,dif))
print("."*50)
#Definir el valor de C1 y C3 previamente
C1=33E-9
C3=10E-9
for C2 in valuesC:
    for R2 in valuesR:
        ans=(C2+C1+C3)/(R2*C2*C3)
        dif=abs(2272.32-ans)
        if(dif<20):
            print("R2={}, C2={}, dif={} ".format(R2,C2,dif))

print("."*50)
#Definir ahora R2 y C2
R2=47E3
C2=6.8E-7

for R1 in valuesR:
    ans=1/(R1*R2*C2*C3)
    dif=abs(ans-3.17959E6)
    if(dif<70000 ):
        print("R={}, dif={} ".format(R1,dif))

```

4.3. Circuito completo

Una vez calculados todos los valores de los resistores y capacitores, el circuito completo se encuentra en la Figura 3.

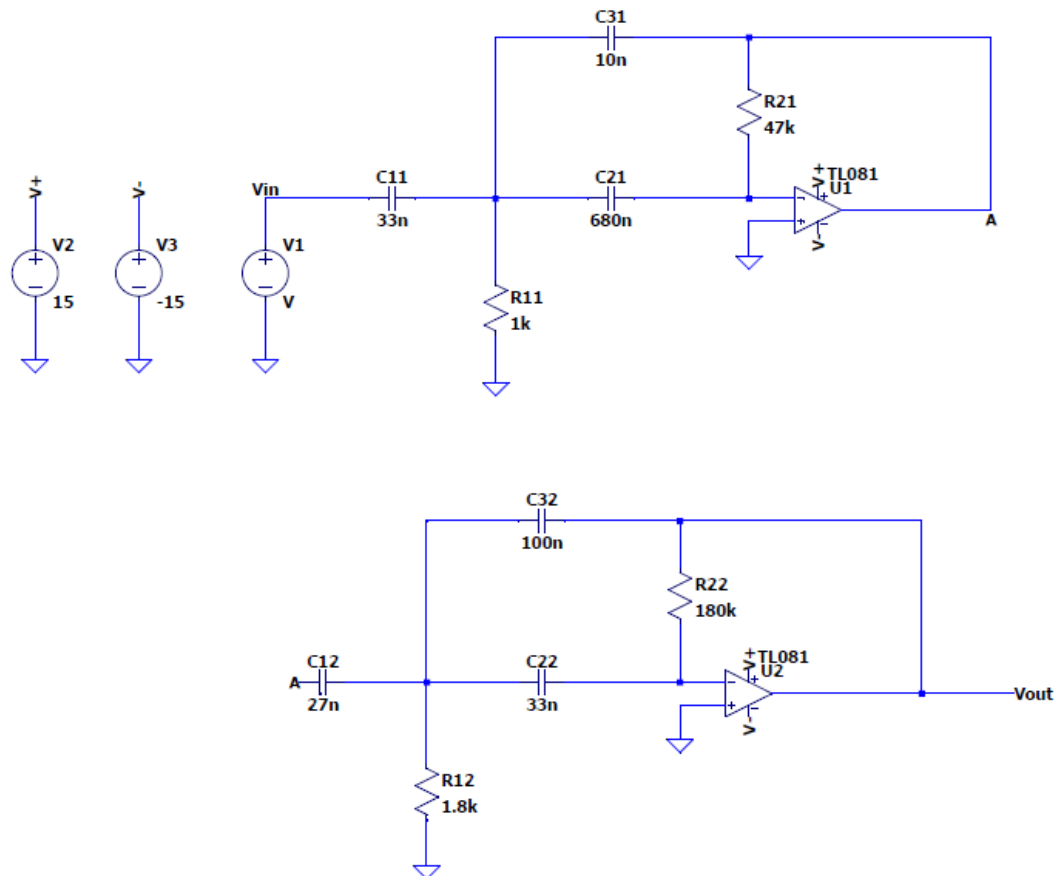


Figura 3: Circuito completo con los valores de los componentes

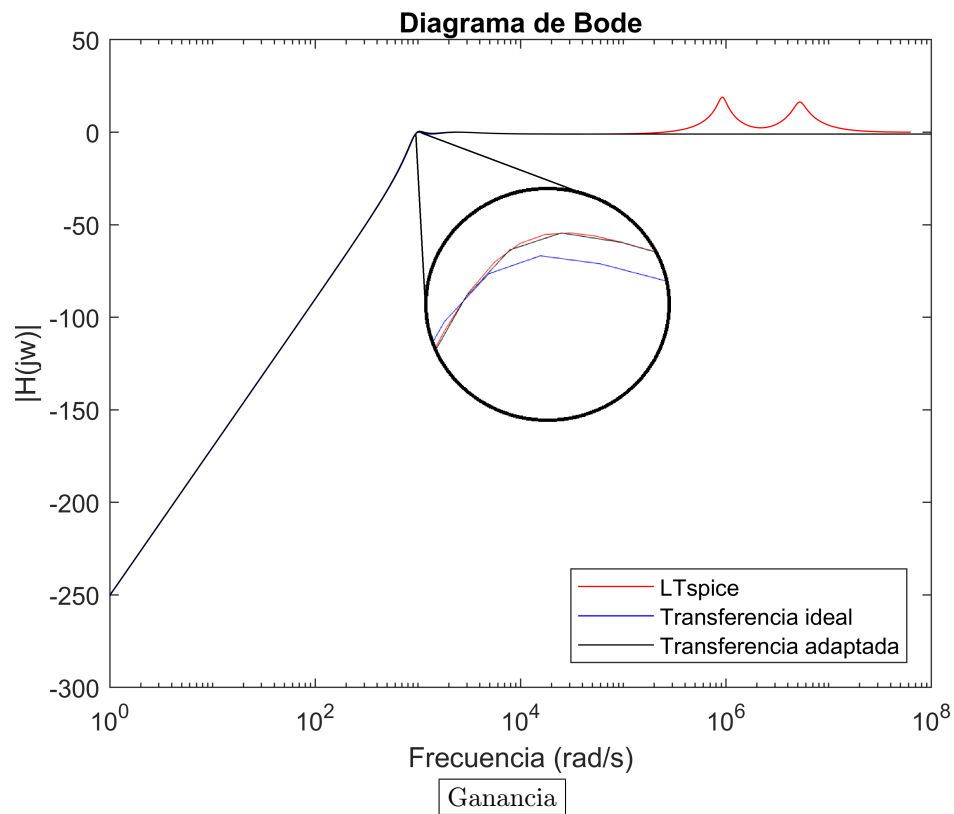
5. Análisis del circuito

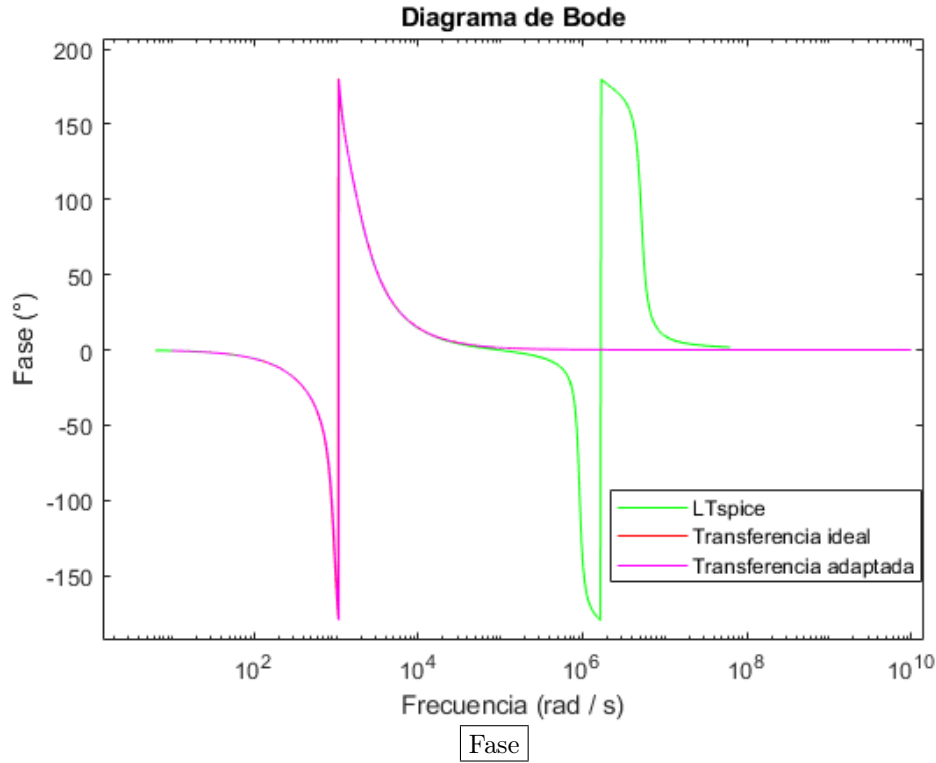
En esta sección, se busca modelizar el comportamiento real del circuito a partir de simulaciones en LTspice y MATLAB, además del contraste contra cálculos analíticos.

5.1. Diagrama de Bode

5.1.1. Simulaciones

En los siguientes gráficos, los diagramas correspondientes a las transferencias ideal y adaptada (a los valores comerciales de los componentes, ver sección anterior) fueron realizados en MATLAB.





5.1.2. Observaciones

Como ya se ha mencionado, se trata de un filtro pasa altos, pues las frecuencias menores a f_0 son significativamente atenuadas, como se evidencia claramente en el diagrama de Bode. Así mismo, se observa que la fase también varía significativamente.

Esto se explica a partir de los ceros y polos de la función de transferencia. Dado que 0 es un cero de orden 4, se puede ver que la ganancia del filtro decrece linealmente a medida que w se acerca a 0. Pero a su vez, el polo doble, aproximado, en w_{01} , conlleva a una reducción de la tasa de crecimiento en el intervalo $[w_{01}, w_{02}]$. Sin embargo, bajo la consideración de que además en w_{01} existe un pico de valor $20\log(Q_1) = 11.03\text{dB}$, se observa en torno a esta frecuencia un incremento que alcanza a sobrepasar los 0dB , y se pierde visibilidad del cambio de pendiente en $[w_{01}, w_{02}]$. Por otro lado, el pico en w_{02} es solamente de $20\log(Q_2) = -2\text{dB}$, y por lo tanto no es notoria esta perturbación en el diagrama. Por supuesto, es gracias al polo doble en w_{02} que la ganancia se vuelve constante a medida que $w \rightarrow \infty$. Específicamente, $\lim_{w \rightarrow \infty} 20\log(|H(s)|) = 20\log(0.8911) = -1\text{dB}$.

En el gráfico expuesto, se evidencia que la diferencia entre los diagramas de Bode de la transferencia adaptada y de LTspice es despreciable, salvo en ciertos puntos. En efecto, a causa del funcionamiento real de los operacionales amplificadores, existen dos picos en el gráfico de LTspice, a partir de $w = 10^5 \text{ rad/s}$, que en este caso no fueron tenidos en cuenta en la simulación de MATLAB. Por otro lado, el diagrama de la transferencia ideal presenta una mayor diferencia respecto de los otros dos gráficos, pero esto es esperable, pues por construcción la transferencia asociada al LTspice es la transferencia adaptada.

En relación al diagrama de fase, basta notar que la fase total de $H(s)$ es simplemente la fase del numerador menos la del denominador. Así, el numerador tiene una fase constante de 2π . En cambio, el denominador posee una fase variable: a bajos valores de w , se comporta como un

número real, pero a altos valores, tiende a comportarse como s^4 , anulando entonces a la fase del denominador. De aquí proviene la variación entre $-\pi$ y π de la fase total.

Además, al comparar los diagramas de fase del diagrama de Bode de las tres simulaciones, se observa que en las simulaciones de MATLAB la fase tiende a mantenerse constante a partir de $w = 10^5 \text{ rad} / \text{s}$. No obstante, en la simulación de LTspice se ve que la frecuencia varía desde este valor de w hasta $w = 1.10^7 \text{ rad} / \text{seg}$, aproximadamente, para luego volver a mantenerse en 0 a medida que w sigue creciendo.

En resumen, los tres diagramas, tanto de ganancia como de fase, son muy similares hasta $w = 10^5 \text{ rad} / \text{seg}$. A su vez los diagramas de la transferencia ideal y adaptada presentan una muy baja diferencia para todo w , porque sus coeficientes son muy parecidos.

5.2. Respuesta al impulso

5.2.1. Cálculo analítico

Dado que

$$V_o(s) = H(s)V_i(s)$$

$$\Rightarrow v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)V_i(s))$$

Además, cuando $v_i(t) = \delta(t)$, $V_i(s) = 1$. Por lo tanto, se busca calcular la transformada inversa de Laplace de

$$V_o(s) = H(s) = \frac{0.891s^4}{s^4 + 2531.56s^3 + 4.673 \cdot 10^6 s^2 + 2.959 \cdot 10^9 s + 2.926 \cdot 10^{12}}$$

Al factorizar el denominador se tiene

$$V_o(s) = \frac{0.891s^4}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)}$$

donde

$$\begin{aligned} z_1 &= -1131.03 + 1359.67j \\ z_2 &= -1131.03 - 1359.67j \\ z_3 &= -134.749 + 957.749j \\ z_4 &= -134.749 - 957.749j \end{aligned}$$

Luego, se procede a separar a la expresión $V_o(s)$ en fracciones simples.

$$V_o(s) = \frac{A}{s-z_1} + \frac{B}{s-z_2} + \frac{C}{s-z_3} + \frac{D}{s-z_4}$$

Como todos los polos involucrados son simples, los coeficientes A , B , C y D pueden calcularse sencillamente a partir de las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}
A &= \text{Res}(V_o(s), z_1) = \frac{0.891s^4}{(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)} = -1094.71 + 448.364j \\
B &= \text{Res}(V_o(s), z_2) = \frac{0.891s^4}{(s-z_1)(s-z_3)(s-z_4)} = -1094.71 - 448.364j \\
C &= \text{Res}(V_o(s), z_3) = \frac{0.891s^4}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_4)} = -33.1033 - 146.508j \\
D &= \text{Res}(V_o(s), z_4) = \frac{0.891s^4}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)} = -33.1033 + 146.508j
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}$$

por lo que

$$v_o(t) = Ae^{z_1 t} + Be^{z_2 t} + Ce^{z_3 t} + De^{z_4 t}$$

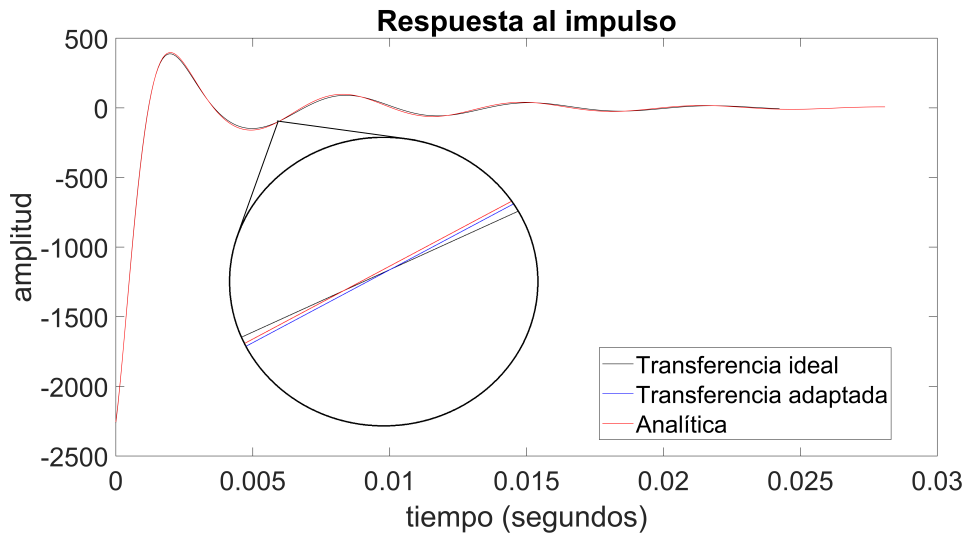
Pero como $A = B^*$ y $z_1 = z_2^*$, se tiene $Ae^{z_1 t} = (Be^{z_2 t})^*$ (donde * denota un número complejo conjugado). Entonces,

$$v_o(t) = 2\text{Re}(Ae^{z_1 t}) + 2\text{Re}(Ce^{z_3 t})$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned}
v_o(t) &= -896.728 e^{-134.749t} \sin(957.749t) - 2189.42 e^{-134.749t} \cos(957.749t) \\
&\quad + 293.016 e^{-1131.03t} \sin(1359.67t) - 66.2066 e^{-1131.03t} \cos(1359.67t)
\end{aligned}$$

5.2.2. Simulaciones



5.2.3. Observaciones

Las tres respuestas son similares, siendo las respuestas de la transferencia adaptada y la analítica las más coincidentes. La respuesta de la transferencia ideal presenta una leve diferencia respecto de las otras, como es esperable.

Es notorio que la respuesta al impulso coincide con la derivada de la respuesta al escalón (Ver sección 5.3.2 más adelante). Esto se puede demostrar a partir del hecho de que la función del impulso es la derivada de la función escalón.

5.3. Respuesta al escalón

5.3.1. Cálculo analítico

Cuando $v_i(t) = H(t)$, $V_i(s) = \frac{1}{s}$. Por lo tanto, se busca calcular la transformada inversa de Laplace de

$$V_o(s) = H(s) = \frac{0.891s^3}{s^4 + 2531.56s^3 + 4.673 \cdot 10^6 s^2 + 2.959 \cdot 10^9 s + 2.926 \cdot 10^{12}}$$

Luego, se procede a separar a la expresión $V_o(s)$ en fracciones simples.

$$V_o(s) = \frac{A}{s-z_1} + \frac{B}{s-z_2} + \frac{C}{s-z_3} + \frac{D}{s-z_4}$$

Como todos los polos involucrados son simples, los coeficientes A , B , C y D pueden calcularse sencillamente a partir de las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} A &= \text{Res}(V_o(s), z_1) = \frac{0.891s^3}{(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)} = 0.59 + 0.31j \\ B &= \text{Res}(V_o(s), z_2) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_3)(s-z_4)} = 0.59 - 0.31j \\ C &= \text{Res}(V_o(s), z_3) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_4)} = -0.14 + 0.05j \\ D &= \text{Res}(V_o(s), z_4) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)} = -0.14 - 0.05j \end{aligned}$$

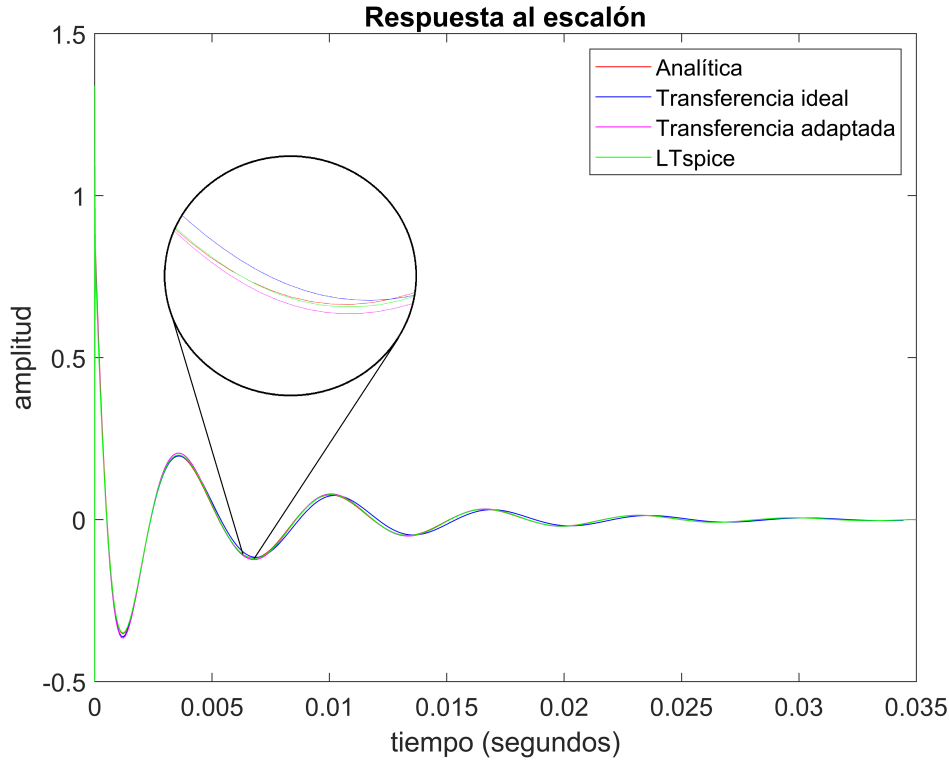
Luego,

$$v_o(t) = 2\text{Re}(Ae^{z_1 t}) + 2\text{Re}(Ce^{z_3 t})$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} v_o(t) &= -0.1 e^{-134.749t} \sin(957.749t) - 0.62 e^{-1131.03t} \sin(1359.67t) \\ &\quad - 0.28 e^{-134.749t} \cos(957.749t) + 1.18 e^{-1131.03t} \cos(1359.67t) \end{aligned}$$

5.3.2. Simulaciones



5.3.3. Observaciones

En el caso del escalón, se observa que, como la corriente continua es equivalente a una frecuencia nula, la señal tiende a anularse en la salida, pues se trata de un filtro pasa altos. Por lo tanto, existe una perturbación inicial, que rápidamente se ve atenuada. Esto se corresponde con el comportamiento esperado del filtro.

En relación a las diferentes simulaciones, se observa que las respuestas debidas a la transferencia adaptada, al LTspice y a la analítica son muy similares entre sí. La respuesta de la transferencia ideal se desvía de estas tres, como se esperaba.

Notar también que la señal se vuelve nula aproximadamente a $t = 35 \text{ ms}$. Este valor puede calcularse, de forma aproximada, a partir de las exponenciales decrecientes que aparecen en la respuesta analítica calculada previamente.

En efecto, en la respuesta analítica aparecen dos términos exponenciales que se repiten, a saber $e^{-1131.03t}$ y $e^{-134.749t}$. De aquí se desprenden dos tiempos característicos:

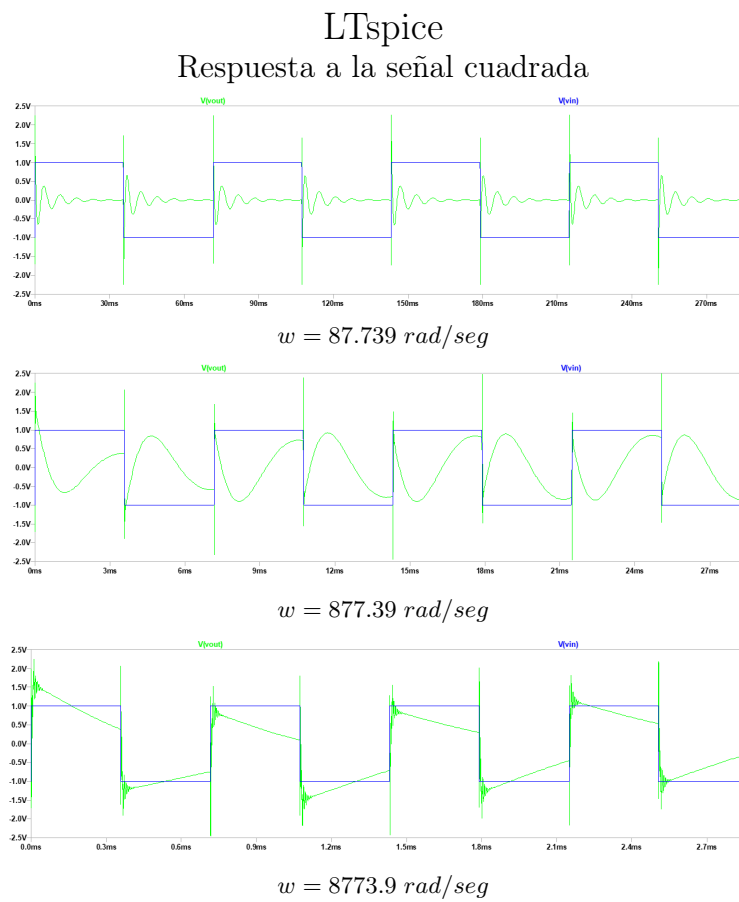
$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{1}{134.749} \text{ s} = 7.42 \text{ ms} \\ \tau_2 &= \frac{1}{1131.03} \text{ s} = 0.88 \text{ ms}\end{aligned}$$

Este valor refleja cuanto tiempo tardará cada término de la respuesta analítica en atenuarse, pues a 5τ se considera que un término ya decreció un 99% respecto a su amplitud máxima. Entonces, de estos valores, τ_1 es el que mayor influencia tendrá, pues los términos que lo contengan tardarán

más tiempo en atenuarse. Se define entonces $\tau = \max(\tau_1, \tau_2) = 7.42ms$. Luego, se podría decir que la señal está atenuada a $t = 5\tau = 37.1ms$. Por supuesto, este cálculo es falible, debido a que no se tienen en cuenta las interferencias en la respuesta de los senos y cosenos, y de las amplitudes asociadas a cada término.

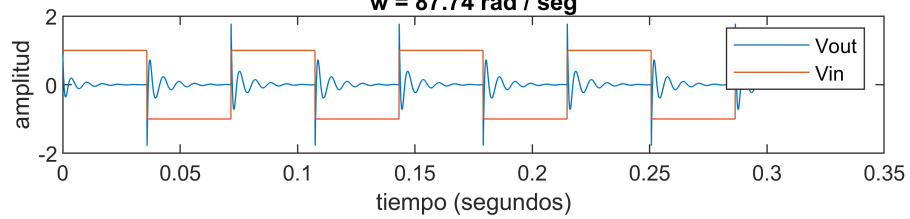
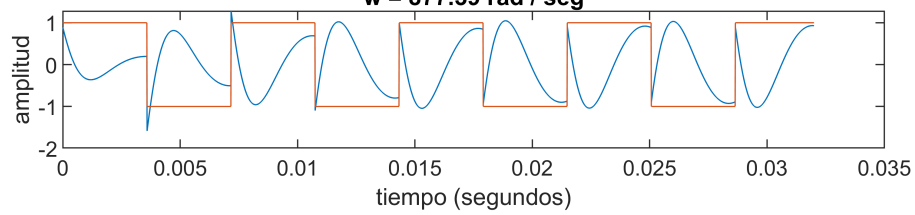
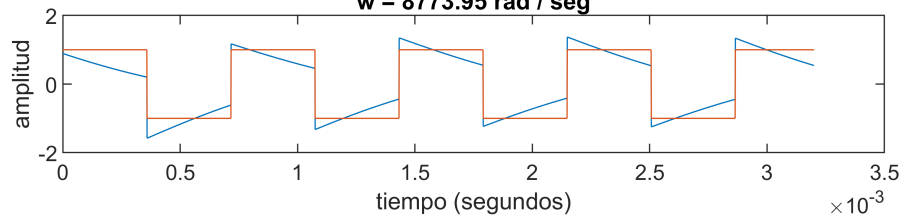
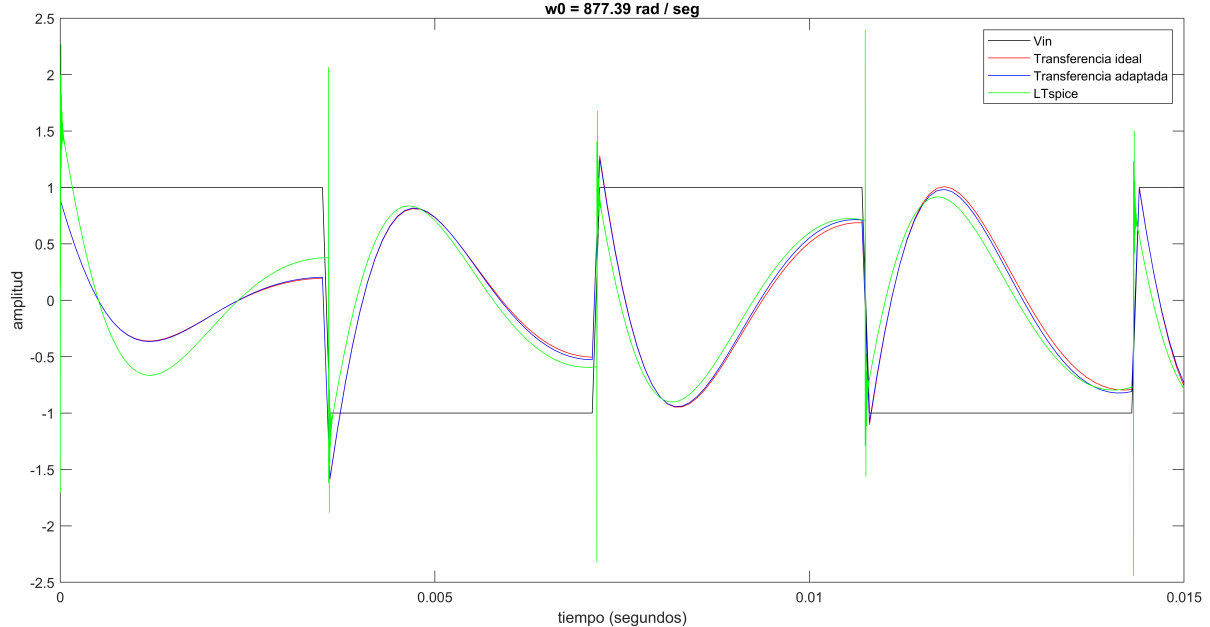
5.4. Respuesta a la señal cuadrada

5.4.1. simulaciones



MATLAB

Respuesta a la señal cuadrada

 $w = 87.74 \text{ rad / seg}$  $w = 877.39 \text{ rad / seg}$  $w = 8773.95 \text{ rad / seg}$ Respuesta a la señal cuadrada
 $w_0 = 877.39 \text{ rad / seg}$ 

5.4.2. Observaciones

Inmediatamente a partir de la respuesta al escalón pueden entenderse las simulaciones sobre la señal cuadrada, pues esta es equivalente a una serie de escalones.

Así, recordando que para esta transferencia la respuesta al escalón tarda aproximadamente $5\tau = 37ms$ en atenuarse, puede analizarse la respuesta a la señal cuadrada en función del período. Luego, en el primer gráfico, donde $w = 87.74rad/s$, el período es $T = \frac{2\pi}{w} = 71.6ms$, de modo que cada escalón dura $35.8ms$. Este es tiempo suficiente para que la señal se atenúe, como se puede observar. Para la segunda, el período es $T = 7.16ms$, comparable al valor de τ , dando lugar a la curva que se observa. En el último, el período es $T = 0.72ms$, tan corto que impide que la señal muestre una atenuación. Si se siguiese aumentando la frecuencia, la señal a la salida se asemejaría cada vez más a la misma señal cuadrada.

Al comparar las distintas señales para una frecuencia $w = 877.39rad/s$, se observa que las señales correspondientes a las transferencias ideal y adaptada difieren en poco. No obstante, en este caso la simulación de LTspice presenta una diferencia significativa, especialmente en el primer período. Una hipótesis para explicar esta situación es que LTspice tiene en cuenta características internas de los componentes, especialmente de los operacionales amplificadores, que no se consideraron en MATLAB.

5.5. Respuesta a la señal senoidal

5.5.1. Cálculo analítico

Se tiene que

$$\mathcal{L}(\sin(wt)) = \frac{w}{w^2 + s^2}$$

Se tomará en este caso $w = w_0 = 877.3946 \text{ rad / seg}$

Se busca entonces calcular la transformada inversa de Laplace de

$$V_o(s) = H(s) = \frac{781.7586 s^3}{(s^4 + 2531.56 s^3 + 4.673 \cdot 10^6 s^2 + 2.959 \cdot 10^9 s + 2.926 \cdot 10^{12})(s^2 + 7.6982 \cdot 10^5)}$$

Existen en esta expresión ahora 6 polos.

$$\begin{aligned} z_1 &= -1131.03 + 1359.67j \\ z_2 &= -1131.03 - 1359.67j \\ z_3 &= -134.749 + 957.749j \\ z_4 &= -134.749 - 957.749j \\ z_5 &= 877.3946j \\ z_6 &= -877.3946j \end{aligned}$$

Siendo que todos los polos continúan siendo simples, se procede a separar a la expresión $V_o(s)$ en fracciones simples.

$$V_o(s) = \frac{A}{s-z_1} + \frac{B}{s-z_2} + \frac{C}{s-z_3} + \frac{D}{s-z_4} + \frac{E}{s-z_5} + \frac{F}{s-z_6}$$

Como todos los polos involucrados son simples, los coeficientes A , B , C , D , E y F pueden calcularse sencillamente a partir de las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}
 A &= \text{Res}(V_o(s), z_1) = \frac{0.891s^3}{(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)(s-z_5)(s-z_6)} = -0.1476 - 0.3027j \\
 B &= \text{Res}(V_o(s), z_2) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_3)(s-z_4)(s-z_5)(s-z_6)} = -0.1476 + 0.3027j \\
 C &= \text{Res}(V_o(s), z_3) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_4)(s-z_5)(s-z_6)} = +0.4432 + 0.1095j \\
 D &= \text{Res}(V_o(s), z_4) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)(s-z_5)(s-z_6)} = +0.4432 - 0.1095j \\
 E &= \text{Res}(V_o(s), z_5) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)(s-z_6)} = -0.2956 + 0.0263j \\
 F &= \text{Res}(V_o(s), z_6) = \frac{0.891s^3}{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)(s-z_5)} = -0.2956 - 0.0263j
 \end{aligned}$$

Luego,

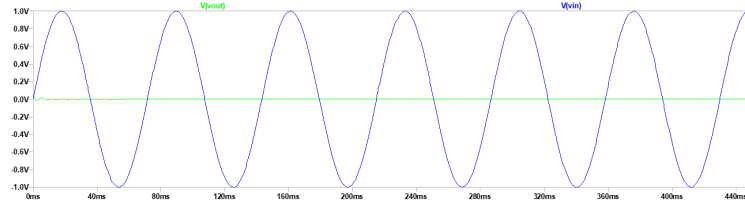
$$v_o(t) = 2\text{Re}(Ae^{z_1 t}) + 2\text{Re}(Ce^{z_3 t}) + 2\text{Re}(Ee^{z_5 t})$$

Desarrollando,

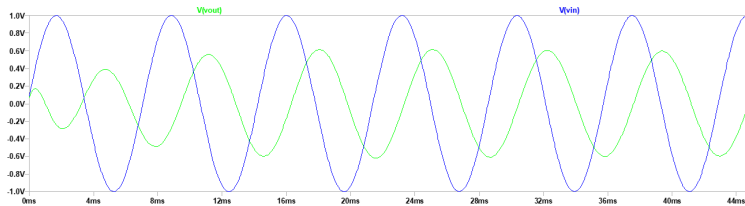
$$\begin{aligned}
 v_o(t) &= -0.0526 \sin(877.395 t) - 0.219 e^{-134.749 t} \sin(957.749 t) + 0.6054 e^{-1131.03 t} \sin(1359.67 t) - \\
 &\quad 0.5912 \cos(877.395 t) + 0.8864 e^{-134.749 t} \cos(957.749 t) - 0.2952 e^{-1131.03 t} \cos(1359.67 t)
 \end{aligned}$$

5.5.2. simulaciones

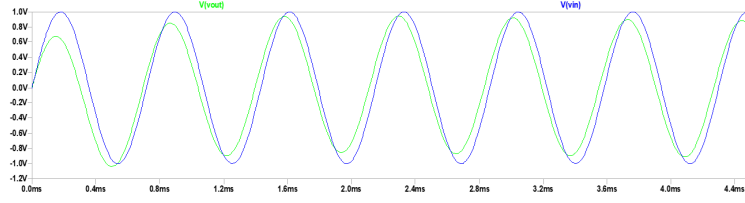
Respuesta a la señal senoidal - LTspice



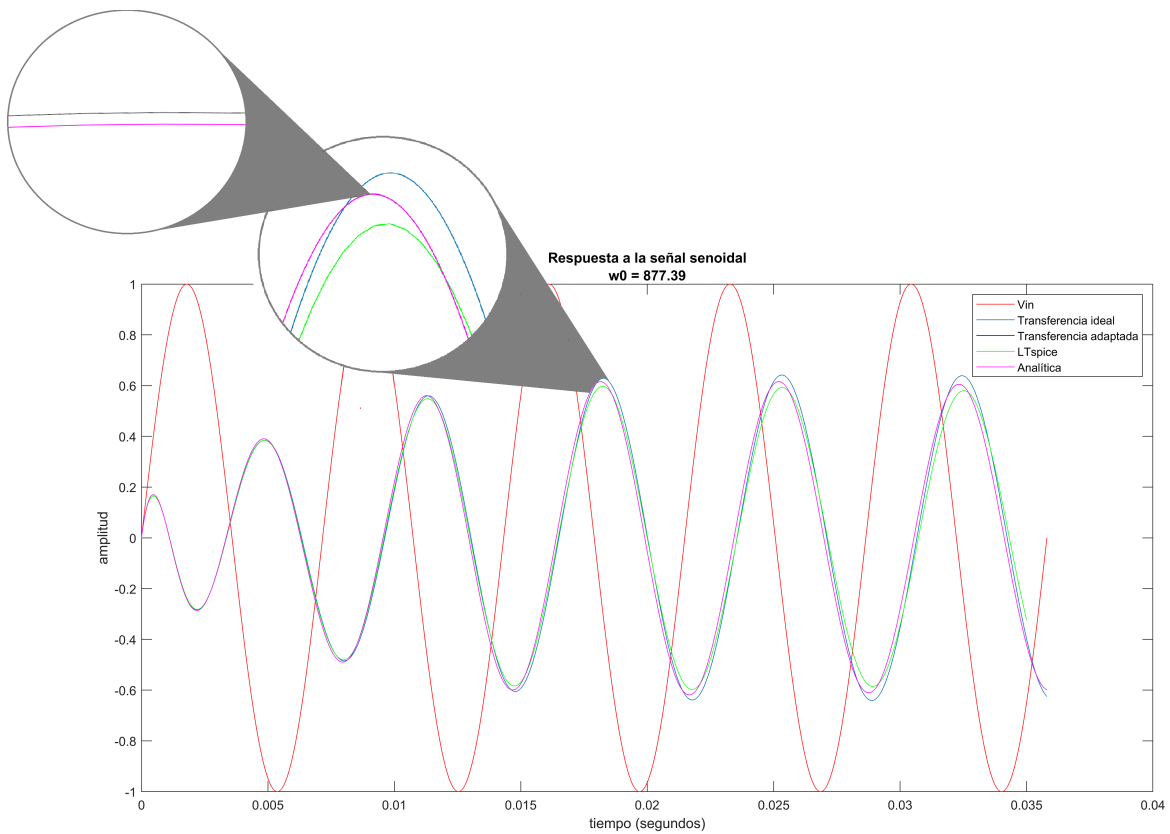
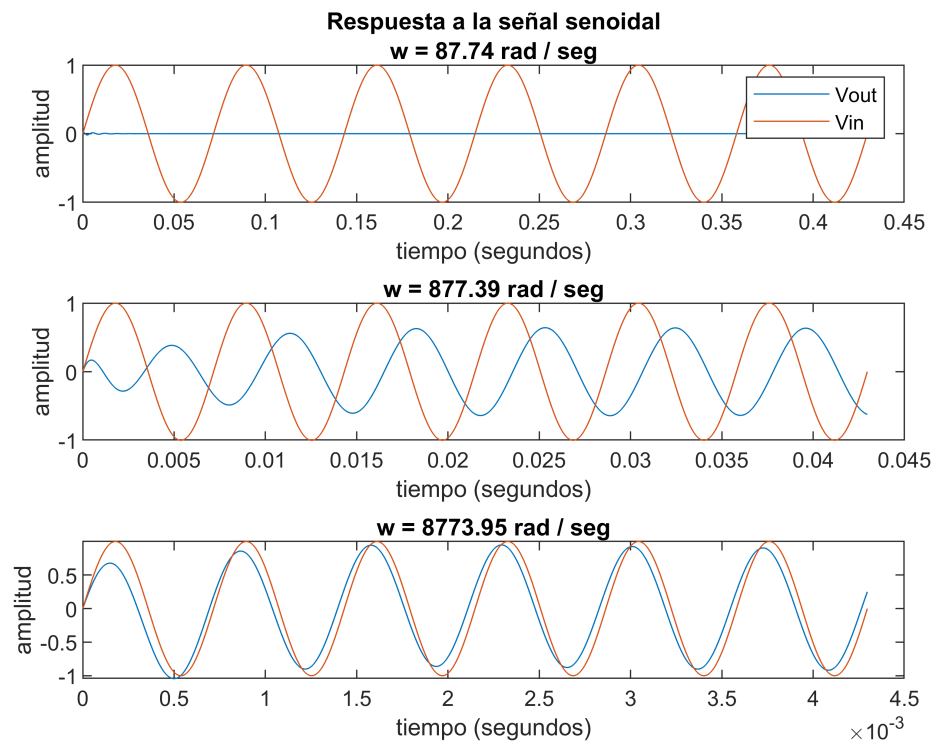
$$w = 87.739 \text{ rad/seg}$$



$$w = 877.39 \text{ rad/seg}$$



$$w = 8773.9 \text{ rad/seg}$$



5.5.3. Observaciones

Nuevamente se estudian tres frecuencias para entender la respuesta a la señal senoidal. En $f = \frac{f_0}{10}$, la frecuencia es mucho menor a la frecuencia de corte, y por lo tanto la señal de entrada se ve totalmente atenuada en la salida. A $f = f_0$, se observa que la señal ya comenzó a disminuir en amplitud a la salida, y que la fase es algún número cercano a $\frac{\pi}{2}$. Finalmente, a $f = 10f_0$, la frecuencia es lo suficientemente grande como para que no se observe atenuación alguna, y para que la fase de la salida del filtro sea prácticamente nula respecto a la de la entrada.

Se destaca de la comparación de las distintas simulaciones, que la respuesta analítica y la de la transferencia ideal son prácticamente coincidentes (existe una mínima diferencia, imperceptible a la vista). Por otra parte, las simulaciones de LTspice y de la transferencia ideal presentan algunas variaciones mínimas.

6. Conclusión

En el presente texto se han expuesto herramientas para analizar y diseñar filtros analógicos. Además, se ha diseñado un filtro pasa altos con una transferencia particular, a partir de amplificadores operacionales. Por último, se ha estudiado de diferentes formas el comportamiento del circuito frente a diferentes estímulos a su entrada, tales como simulaciones en MATLAB y LTspice, o la resolución analítica.

La utilización de las funciones de transferencia permite abstraerse del circuito físico y realizar un análisis puramente matemático. Así, se observa que a partir de la función de transferencia se puede obtener cualquier resultado sobre el comportamiento del filtro. De aquí surgen los diagramas de Bode, que son una gran ventaja para comprender la atenuación o ganancia del filtro en función de la frecuencia. También se estudia la respuesta a otras señales, como ser el escalón o el impulso, que son importantes para entender como se comportaría el circuito bajo ciertas condiciones (por ejemplo, al encender el dispositivo podría aparecer una función escalón a la entrada del filtro). Se estudia además la existencia de los parámetros Q y w_0 , que modelan el comportamiento de la transferencia en caso de existir polos complejos conjugados.

Dada la función de transferencia, existe una infinidad de circuitos que podrían representarla. En este informe, se ha optado por utilizar un filtro conocido, para el cual ya se tiene su función de transferencia en función del valor de sus componentes. Se evidencia en el texto también la ventaja que supone la utilización de diferentes herramientas informáticas al momento de calcular los valores de los componentes involucrados, para obtener así una transferencia específica.

Se ha utilizado LTspice para realizar las simulaciones, que, como se ha observado, permite obtener respuestas del circuito que no se basan exclusivamente en la función de transferencia. Esto es de gran ayuda, ya que para obtener el mismo resultado en MATLAB, sería necesario programar estas características manualmente. Esto se ha evidenciado en el diagrama de Bode, o en la respuesta a la señal cuadrada. Por supuesto, la simulación numérica a partir de la transferencia siempre seguirá siendo una opción complementaria a LTspice.

En este texto se ha buscado explicar los principios básicos del funcionamiento de los filtros, como también analizar la aplicación de diferentes herramientas de simulación. En conclusión, se recomienda aprovechar la eficiencia de las herramientas informáticas al momento de emprender el proceso de diseño de este tipo de circuitos, y no menospreciar a los métodos matemáticos al momento de analizar el comportamiento de filtros analógicos.