

Trabajo Práctico 2:

Ecuaciones diferenciales ordinarias

[75.12 - 95.04] Análisis Numérico

Curso 5

Segundo cuatrimestre de 2020

Aveni, Lucas Daniel	103813
Becker, Gonzalo	104291
Belaga, Benjamín	103593
Capón Blanquer, Mateo	104258
Ramognini, Lucas	103794
Topp, Alejandro	103772

Índice

1. Introducción	2
2. Objetivos	2
3. Descripción del problema	2
4. Desarrollo	3
4.1. Método de resolución utilizado: Runge-Kutta de orden 4	3
4.2. Resolución de sistema de EDOs (caso 1)	3
4.3. Resolución de sistema de EDOs (caso 2)	5
4.4. Representación estado-espacio	6
5. Conclusiones	8

1. Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO), es una ecuación matemática que relaciona una función de una variable independiente con una o más de sus derivadas respecto de una variable.

Son utilizadas como modelos matemáticos en el estudio de diversas ciencias, por ejemplo la dinámica de poblaciones, las leyes de la termodinámica, reacciones químicas, el cálculo de circuitos, entre otras.

En este caso, se buscará utilizarlas para un modelo de una población de depredador-presa de Lotka-Volterra.

2. Objetivos

Se pretende abordar desde una perspectiva analítica la simulación del modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra, utilizando el método numérico Runge-Kutta de orden cuatro.

En ese sentido, se utilizarán conceptos relacionados a las ecuaciones diferenciales ordinarias, los sistemas de ecuaciones no lineales, los métodos numéricos de integración, y el cómputo de los mismos. Posteriormente, se pretende evaluar mediante un análisis comparativo las variaciones de parámetros, períodos y picos de las curvas soluciones obtenidas.

3. Descripción del problema

El modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra a analizar es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax - bxy \\ \frac{\partial y}{\partial t} = cxy - dy \end{cases}$$

Donde x representa el número de presas, y representa el número de depredadores, a es la tasa de crecimiento de las presas, d es la tasa de mortalidad de los depredadores, y b y c relacionan las interacciones entre ambas poblaciones respecto a la muerte de presas, y el crecimiento de los depredadores.

En ese sentido, se trata de un modelo que pretende explicar la dinámica de dos poblaciones que interactúan en un único ecosistema aislado de cualquier efecto externo.

Esta dinámica puede ser explicada de la siguiente manera. En primer lugar, en ausencia de depredadores, se observa que la cantidad de presas aumenta exponencialmente. Después, a causa del incremento en esta población, el número de depredadores comienza a crecer, también de forma exponencial, por tener un exceso de alimento. Luego, a medida que hay cada vez más depredadores, la población de presas eventualmente comienza a decrecer. Pero entonces, los depredadores verían reducida su fuente de alimentación, y es esperable que su población disminuya nuevamente. Así se esperaría observar una alternancia en ambas poblaciones, con intervalos de crecimiento y decrecimiento

4. Desarrollo

4.1. Método de resolución utilizado: Runge-Kutta de orden 4

El método de Runge-Kutta de orden 4 para resolución numérica de un sistema de dos ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Involucra expresar el sistema de soluciones como:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \cdot \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \end{pmatrix}$$

Donde los coeficientes m_i y k_i cumplen:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_n, x_n, y_n) \\ m_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h \cdot m_1}{2}, y_n + \frac{h \cdot k_1}{2}\right) \\ m_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h \cdot m_2}{2}, y_n + \frac{h \cdot k_2}{2}\right) \\ m_4 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h \cdot m_3, y_n + h \cdot k_3\right) \\ k_1 &= g(t_n, x_n, y_n) \\ k_2 &= g\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h \cdot m_1}{2}, y_n + \frac{h \cdot k_1}{2}\right) \\ k_3 &= g\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h \cdot m_2}{2}, y_n + \frac{h \cdot k_2}{2}\right) \\ k_4 &= g\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h \cdot m_3, y_n + h \cdot k_3\right) \end{aligned}$$

El coeficiente h se denomina paso e involucra la distancia que se toma entre t_i y t_{i+1} .

De este modo, se podrá estimar para varios puntos en un intervalo $x(t)$ y $y(t)$ y aproximar las gráficas correspondientes.

4.2. Resolución de sistema de EDOs (caso 1)

Considerando el método de Runge-Kutta de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales descripto, se procede a obtener los resultados para el caso en el que los coeficientes del problema son:

$$a = 1,2$$

$$b = 0,6$$

$$c = 0,3$$

$$d = 0,8$$

Luego, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 1,2x - 0,6xy \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0,3xy - 0,8y \end{cases}$$

Aplicando RK4 con paso $h = 0,1$, se obtiene la siguiente gráfica, donde se esboza $x(t)$ y $y(t)$ hasta 30 unidades de tiempo.

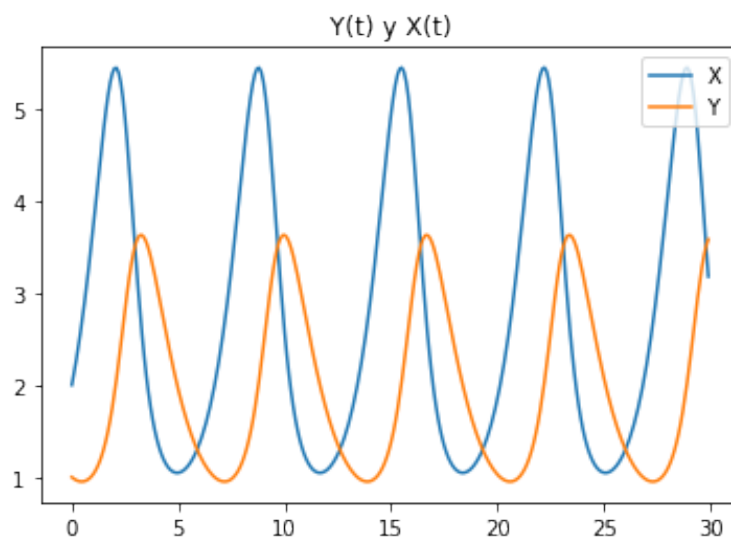


Figura 1: Gráfico de $x(t)$ y $y(t)$ para caso 1

Recordando que $x(t)$ representa en número de presas en el tiempo, y $y(t)$ el de depredadores, se otorga un análisis.

En primer lugar se destaca el comportamiento cíclico, en el que a partir de una pequeña población de presas (condiciones iniciales), las cantidades de presas y depredadores adquieren una naturaleza repetitiva. En ese sentido, al inicio corresponde un crecimiento de orden exponencial para las presas, y ligeramente desfasado para el caso de los depredadores. En esta situación se observa que el crecimiento de depredadores involucra consigo un descenso en la población de presas. A su vez, tal que como es de natural pensamiento, la fuerte reducción de la población de presas implica la disminución en la población de depredadores, y a su vez esto conlleva al aumento de presas. Finalmente, este proceso se repite indefinidamente. Luego se destacan las siguientes características:

- Se evidencia un comportamiento cíclico.
- Existe un ligero desfasaje entre las curvas de x y y .
- No existe variación de amplitud para cada ciclo, obteniendo para cada período las mismas curvas.
- La población de presas adquiere un crecimiento más veloz que el de depredadores, y de igual forma para el decrecimiento.
- La población de presas alcanza un máximo más alto que el de depredadores.
- Los períodos para cada curva adquieren la misma magnitud.

A través del cómputo adecuado, se conocen los valores que adquieren los máximos para las presas x_{MAX} , para los depredadores y_{MAX} , y los períodos respectivos T_x y T_y .

$$x_{MAX} = 5,441483493980046$$

$$y_{MAX} = 3,6261146861102413$$

$$T_x = 6,7 \text{ unidades}$$

$$T_y = 6,7 \text{ unidades}$$

4.3. Resolución de sistema de EDOs (caso 2)

Con el mismo procedimiento utilizado anteriormente, se duplican los parámetros del problema, de modo que:

$$a = 2,4$$

$$b = 1,2$$

$$c = 0,6$$

$$d = 1,6$$

Luego, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 2,4x - 1,2xy \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0,6xy - 1,6y \end{cases}$$

Aplicando RK4 con paso $h = 0,1$, se obtiene la siguiente gráfica, donde se esboza $x(t)$ y $y(t)$ hasta 30 unidades de tiempo.

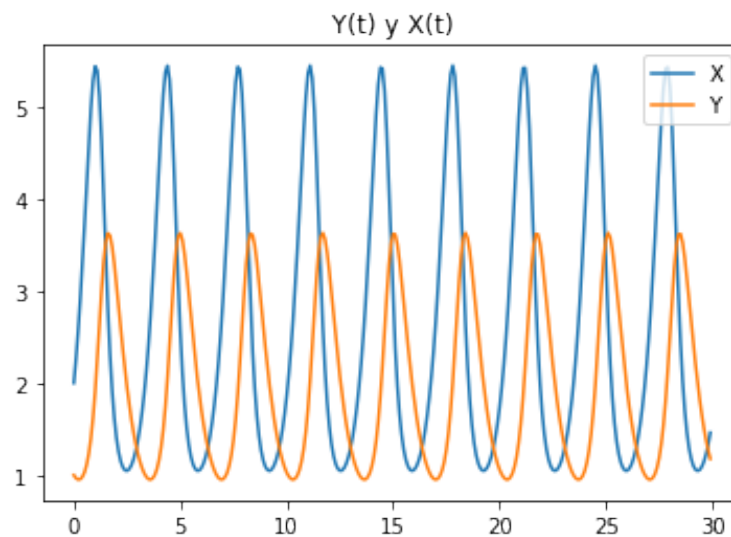


Figura 2: Gráfico de $x(t)$ y $y(t)$ para caso 2

Recordando que $x(t)$ representa en número de presas en el tiempo, y $y(t)$ el de depredadores, se otorga un análisis.

Al igual que para el primer caso, se destaca el comportamiento cíclico, que se rige mediante la misma naturaleza. Un crecimiento de orden exponencial en las presas, y lo mismo para los depredadores, aunque desfasado. El crecimiento de depredadores involucra el descenso en la población de presas. La disminución en la población de presas implica la reducción de la población de depredadores, y esto después conlleva al aumento de presas.

A través del cómputo adecuado, se conocen los valores que adquieren los máximos para las presas x_{MAX} , para los depredadores y_{MAX} , y los períodos respectivos T_x y T_y .

$$x_{MAX} = 5,441549395876253$$

$$y_{MAX} = 3,626898391634355$$

$$T_x = 3,3 \text{ unidades}$$

$$T_y = 3,3 \text{ unidades}$$

En comparación con el caso 1, se observa que la amplitud no ofrece ningún cambio al respecto. En ese sentido, las ligeras variaciones adquiridas se relacionan a la aproximación numérica del método. Respecto al período, los coeficientes duplicados implican una reducción a la mitad del período en x e y , de modo que existe una relación inversamente proporcional.

4.4. Representación estado-espacio

La representación estado-espacio otorga una relación, en forma de función vectorial de $R \rightarrow R^2$ que representa una curva, con la siguiente expresión:

$$C : \vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$$

En este problema, si bien no se obtuvieron expresiones analíticas para x o y , se han calculado una serie de valores para cada función. Dado que las soluciones obtenidas sugieren un comportamiento a modo de composición de funciones trigonométricas, es de esperar que al graficar $\vec{\sigma}(t)$ se consiga aproximadamente una curva cónica.

Recordando los parámetros del caso 1:

$$a = 1,2$$

$$b = 0,6$$

$$c = 0,3$$

$$d = 0,8$$

La representación estado-espacio es la siguiente:

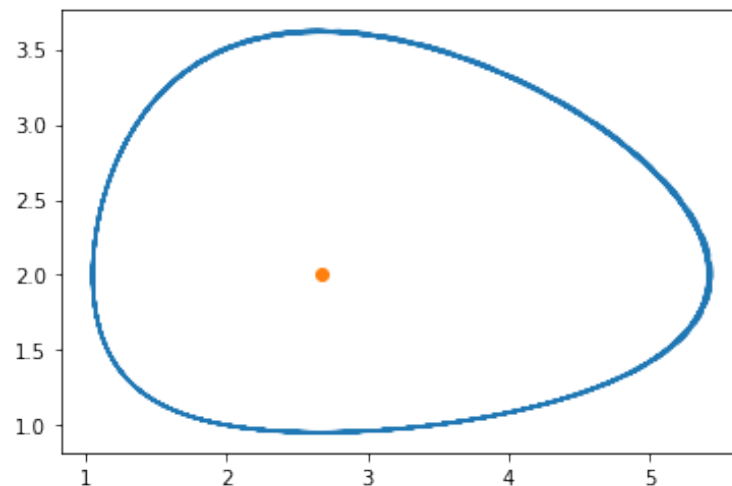


Figura 3: Representación estado-espacio para caso 1

Para un t creciente se obtiene una circulación en sentido antihorario. La explicación de este fenómeno se obtiene en la naturaleza cíclica del problema. Por ejemplo, en la sección inferior de la gráfica, al crecer la población de presas, se observa un crecimiento de los depredadores, sin embargo, en el lado superior, al crecer los depredadores, disminuyen las presas. Esto define el sentido.

En el centro, se observa el punto crítico, que, a modo de punto de equilibrio, es el estado en el que las poblaciones de depredadores y presas permanecerá constante. Este efecto es causado por

la anulación de las derivadas que definen el problema con las adecuadas condiciones iniciales, de modo:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax - bxy = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = cxy - dy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ cxy - dy = 0 \end{cases}$$

Sacando factor común para cada expresión:

$$\begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(cx - d) = 0 \end{cases}$$

Si se pide $x \neq 0$, y $y \neq 0$, despejando y de la primer ecuación y x de la segunda, se obtiene:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{c} \\ y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Del análisis matemático se conoce el comportamiento de una función cuya derivada se anula para todo punto, obteniendo como solución una constante. Este resultado puede ser verificado en la resolución de Runge-Kutta de orden 4, con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x(0) = \frac{d}{c} = \frac{0,8}{0,3} = 2,666666667 \\ y(0) = \frac{1,2}{0,6} = 2 \end{cases}$$

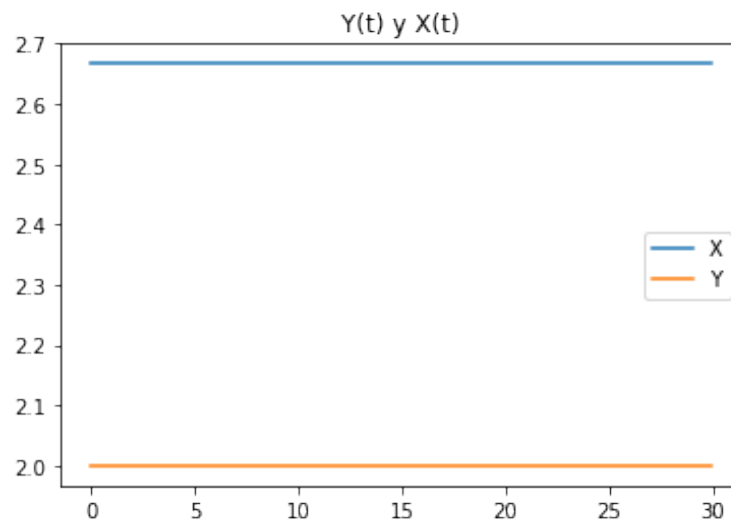


Figura 4: Gráfico de $x(t)$ y $y(t)$ para el punto crítico

En las curvas se observa que se verifican los valores obtenidos analíticamente.

5. Conclusiones

Al margen del análisis realizado en todas las secciones que componen el presente informe, resulta de interés extraer reflexiones generales respecto al desarrollo.

La resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales supone de una tarea de relativa dificultad desde la perspectiva analítica. La introducción de términos no lineales implica la inutilización de técnicas de resolución de estos sistemas, como la transformada de Laplace. En ese sentido, una aproximación numérica implica un recurso de simple utilización, aunque costoso en lo referido al recurso de cómputo. Para los casos planteados en este problema, definiendo el paso en $h = 0,1$ y el límite de cálculo en 30 unidades de tiempo, no significa ningún problema para una estructura de hardware computacional moderno.

En lo que refiere al análisis del problema, se observaron dos casos, con resultados semejantes respecto a las soluciones. Y es que, en las gráficas de x y y se puso de manifiesto el mismo fenómeno. Esto es, el crecimiento de las presas del orden exponencial, el crecimiento de los depredadores al aumentar las presas, el descenso de las presas con el crecimiento de los depredadores, y el decrecimiento de los depredadores con el descenso de las presas. Las variaciones al duplicar los coeficientes a , b , c y d implicaron una reducción a la mitad en el período, sin embargo, las curvas trazadas son idénticas. Para el caso de equilibrio, se explicó el fenómeno desde la perspectiva analítica, y desde la solución numérica, verificando ambos argumentos.

El comportamiento cíclico observado sin embargo, no adquiere relación con la realidad, dado que una de las suposiciones del modelo de Lotka-Volterra es el crecimiento exponencial de las presas, y no acotado. Por otro lado, los depredadores son insaciables, y cuantas más presas hay más comen. Para obtener una mayor precisión en los resultados, habría que tener en cuenta que las tasas de crecimiento de ambas poblaciones deberían verse afectadas también por otros factores, como ser enfermedades, falta de alimentos (para las presas) y variaciones meteorológicas, entre otros. Sin embargo, estas consideraciones implican una complejización del modelo planteado, aunque aproximarían de mejor manera un problema real.

En lo que corresponde al aprendizaje, este trabajo ha resultado en un desafío de análisis, en una oportunidad de poner a prueba un método típico de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de gran poder. Se trata de una herramienta sumamente valiosa en la medida que el comportamiento de diferentes sistemas se encuentra conformado por numerosas ecuaciones diferenciales que explican fenómenos físicos, químicos, biológicos, y sociales. Por otro lado, su implementación es relativamente simple respecto a la complejidad matemática que implica resolver estos sistemas. Es por este punto que, al margen del resultado exitoso, se considera más valioso el camino de aprendizaje transitado, y este informe pretende ser testimonio de dicho proceso.