

Proyecto Final Robótica I:

Análisis cinemático de robot LBR iiwa para trabajos colaborativos

Gino Avanzini*, Gonzalo Fernández† y Jeremías Pino‡

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

Mendoza, Argentina

*gino.avanzini@hotmail.com, †fernandez.gfg@gmail.com, ‡jerepino@gmail.com

Resumen

El presente trabajo es el proyecto integrador de la cátedra Robótica I de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo. Consiste en el análisis cinemático del robot manipulador LBR iiwa del fabricante KUKA, con el objetivo de su implementación en tareas colaborativas y cooperativas dentro de un entorno de trabajo relacionado con laboratorios químicos, donde se manipulan materiales peligrosos, o se ejecutan procedimientos dentro de un ambiente nocivo para los humanos.

Para el proyecto no se construyó un prototipo del sistema, sino que se utilizó como herramienta de simulación el toolbox *Robotics, Vision & Control* desarrollado por Peter Corke para MATLAB. Al igual que se utilizó MATLAB y su toolbox para trabajo simbólico en cálculos matemáticos de relativa complejidad.

Este estudio inicia en la sección III y IV con el modelado de la cadena cinemática del robot siguiendo la convención de Denavit-Hartenberg y su aplicación en el cálculo de la cinemática directa. Luego, se propone un posible método para el cálculo de la cinemática inversa del robot (sección V), teniendo en cuenta su redundancia cinemática. Este método consiste en una combinación de los métodos geométrico y algebraico aplicando el método de Pieper para robots con muñeca esférica. Además se propone un criterio para la determinación de la tercera articulación de forma tal de reducir las infinitas soluciones a un número finito. Este criterio se basa en la optimización de la manipulabilidad del robot en la dirección del movimiento.

En la sección VI y VII se realiza un comentario sobre el procedimiento para encontrar una relación de velocidades entre espacio articular y cartesiano, y se estudian analíticamente las singularidades matemáticas de la estructura siguiendo los métodos propuestos en “Análisis Cinemático de Robots Manipuladores Redundantes: Aplicación a los Robot Kuka LWR 4+ y ABB Yumi” de Zaplana, Claret y Basanez [11].

En la sección VIII se profundiza en la generación de trayectorias. Y se muestran los resultados obtenidos en una simulación para 2 robots colaborando en realizar una tarea específica.

Finalmente en la sección X y XI se discuten las conclusiones y los trabajos futuros respectivamente.

ÍNDICE

| | | |
|--------------|---|-----------|
| I. | Introducción | 2 |
| II. | Descripción del manipulador | 2 |
| II-A. | Modelo seleccionado | 2 |
| II-B. | Datos técnicos | 2 |
| II-C. | Límites articulares | 3 |
| II-D. | Espacio de trabajo | 3 |
| III. | Parametrización de la estructura con convención de Denavit-Hartenberg | 3 |
| IV. | Cinemática Directa | 4 |
| V. | Cinemática Inversa | 4 |
| V-A. | Solución mediante método incluido en el toolbox de Peter Corke para MATLAB: SerialLink.ikine . . . | 4 |
| V-B. | Solución mediante método geométrico basada en la solución de Pieper | 5 |
| V-C. | Validación | 6 |
| V-D. | Reconfiguración | 6 |
| V-E. | Elección de q_3 . Dirección de mayor manipulabilidad para planificación de trayectorias | 6 |
| VI. | Relación de Velocidades | 8 |
| VI-A. | Matriz Jacobiana y configuraciones singulares | 8 |
| VI-B. | Rango y función jsingu | 8 |
| VI-C. | Número de condición | 8 |
| VI-D. | Manipulabilidad | 8 |
| VII. | Análisis de singularidades siguiendo el procedimiento propuesto por Zaplana, Claret y Basanez [11] | 9 |
| VII-A. | Singularidades de posición | 10 |
| VII-B. | Singularidades de orientación | 11 |
| VII-C. | Singularidades acopladas | 11 |
| VII-D. | Direcciones singulares | 12 |
| VIII. | Planificación y Generación de Trayectorias | 12 |
| VIII-A. | Ley de tiempo | 13 |
| VIII-B. | Movimiento punto a punto en espacio articular | 14 |
| VIII-C. | Movimiento en línea recta | 14 |
| VIII-C1. | Movimiento inicio-parada | 15 |
| VIII-C2. | Movimiento continuo | 15 |
| VIII-D. | Movimiento en trayecto circular | 15 |
| VIII-E. | Trayectoria para tareas colaborativas entre robots | 16 |
| IX. | Sugerencia de sensores y actuadores adecuados a la estructura y a la aplicación | 16 |
| X. | Conclusión | 16 |
| XI. | Trabajo a futuro | 17 |

I. INTRODUCCIÓN

Es de especial interés en el trabajo la aplicación de la robótica en diversas áreas de la industria, en tareas tanto colaborativas donde la interacción es entre humano y robot, como cooperativas donde la interacción es entre robots del mismo tipo o diferentes. Para el trabajo se supone que el robot no conoce el modo en que reacciona y se desenvuelve su entorno, sea ese entorno un humano u otro robot.

Una aplicación de la robótica en trabajos colaborativos interesante, es en laboratorios químicos donde se ejecuten procedimientos con cierto grado de riesgo para el humano, donde hay exposición a químicos como soluciones ácidas, gases tóxicos, radiación, etc. Por lo tanto, se propone que un brazo robótico realice tareas como agitar líquidos, manipular objetos de un lugar a otro, mantener en posición y orientación cierto objeto mientras su entorno ejecuta algún otro procedimiento, o desplazamientos siguiendo determinadas trayectorias con herramientas.

El robot seleccionado para el trabajo es el brazo comercial del fabricante **KUKA**, dentro de la línea **LBR iiwa** específicamente el modelo **LBR iiwa 14 R820**. Este robot es un robot manipulador tipo serie, de 7 grados de libertad, con todas sus articulaciones rotacionales.

El motivo de esta elección, es la principal característica de éste robot que es ser **redundante**. Existen múltiples y diferentes definiciones de redundancia, de Conkur y Buckingham [2] la definición de **redundancia cinemática** es que la dimensión del espacio articular del robot sea mayor que la dimensión del espacio del efector final. Esta redundancia permite, además de poder colocar el extremo del robot en cualquier posición y orientación dentro del espacio de trabajo, poder adoptar otras configuraciones sin cambiar dicha posición y orientación. Esta habilidad es especialmente útil en el trabajo de interés, donde es necesario evadir obstáculos, ejecutar trayectorias de forma suave y demás. Es por esto, su amplio espacio de trabajo, su tamaño y características dinámicas, que el robot **KUKA LBR iiwa** es ampliamente utilizado en la industria para trabajos colaborativos.

II. DESCRIPCIÓN DEL MANIPULADOR

II-A. Modelo seleccionado

KUKA Roboter GmbH es uno de los principales fabricantes mundiales de robots industriales y sistemas de soluciones automatizadas de fabricación. De GmbH [4], **LBR** es la abreviatura utilizada para “robot de estructura liviana”, mientras que **iiwa** es la abreviatura de “intelligent industrial work assistant”. El robot manipulador serie, **LBR iiwa**, está disponible en dos variantes con capacidades de carga de 7 y 14 kg. Para el estudio se seleccionó la variante en 14kg y 820mm de alcance.

Un robot manipulador serie es una cadena cinemática abierta compuesta de una secuencia de elementos estructurales rígidos, denominados eslabones, conectados entre sí a través de articulaciones, que permiten el movimiento relativo de cada par de eslabones consecutivos, Zaplana, Claret y Basanez [11].

La línea **LBR iiwa** posee robots serie de 7 articulaciones (7 grados de libertad), todas ellas rotacionales y activas o controladas, como se puede observar en la figura 1.

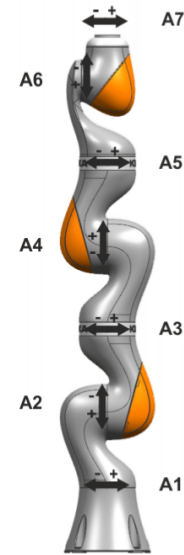


Figura 1. Esquema del robot brindado por la hoja de datos técnicos

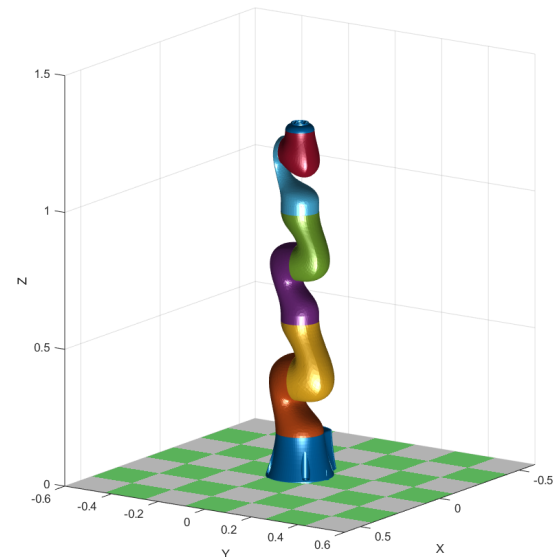


Figura 2. Representación del robot haciendo uso del toolbox RVCtools de Peter Corke para MATLAB.

Otra característica importante es que este robot tiene lo que se denomina muñeca esférica, donde (dependiendo la descripción) los ejes de las últimas 3 articulaciones del manipulador se intersectan en un punto, Torres y col. [10].

II-B. Datos técnicos

Específicamente el modelo **LBR iiwa 14 R820**, según su hoja de datos, posee un espacio de trabajo de $1,8m^3$, un peso de aproximadamente 29.9kg y una repetitibilidad de $\pm 0,15mm$. Su capacidad de carga es de 14kg y su máximo alcance 820mm, lo que se supuso suficiente para realizar procedimientos e interactuar con equipo de un laboratorio químico. El controlador comercial que viene con el robot es un **KUKA Sunrise Cabinet**.

Otros datos que deberían tenerse en cuenta a la hora de implementar la solución en un laboratorio, es que el robot genera ruido menor a 75 dB, tolera humedades entre 20 % y 80 %, y el rango de temperaturas en operación es entre 5°C y 33°C.

II-C. Límites articulares

Los límites articulares tanto de posición como velocidad angular de cada articulación del robot se exponen en el cuadro I.

| Articulación | Límite articular | |
|--------------|------------------|-----------|
| | Posición | Velocidad |
| A1 | $\pm 170^\circ$ | 85°/s |
| A2 | $\pm 120^\circ$ | 85°/s |
| A3 | $\pm 170^\circ$ | 100°/s |
| A4 | $\pm 120^\circ$ | 75°/s |
| A5 | $\pm 170^\circ$ | 130°/s |
| A6 | $\pm 120^\circ$ | 135°/s |
| A7 | $\pm 175^\circ$ | 135°/s |

Cuadro I

VALORES DE LÍMITES ARTICULARES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD PARA ROBOT LBR iiwa 14 R820

II-D. Espacio de trabajo

El esquema del espacio de trabajo brindado por la hoja de datos del robot es el de la figura, donde también se puede apreciar las dimensiones del robot en milímetros.

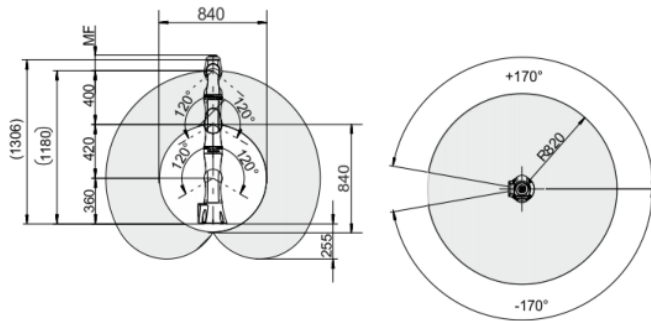


Figura 3. Espacio de trabajo, en mm, en hoja de datos de robot LBR iiwa 14 R820

Se realizó un bosquejo del espacio de trabajo del robot en *MATLAB* con el toolbox *RVCtools* de Peter Corke [3], y se expone en la figura 4.

III. PARAMETRIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA CON CONVENCIÓN DE DENAVIT-HARTENBERG

Para la descripción matemática del robot, se utiliza la convención propuesta en 1955 por Denavit y Hartenberg para la descripción sistemática de cadenas cinemáticas en serie.

En el cuadro II, se encuentran los parámetros de Denavit-Hartenberg planteados para la estructura del robot seleccionado (cabe destacar que existe más de una posible descripción para una misma cadena cinemática).

De Corke [3], el significado físico de dichos parámetros para una articulación i son:

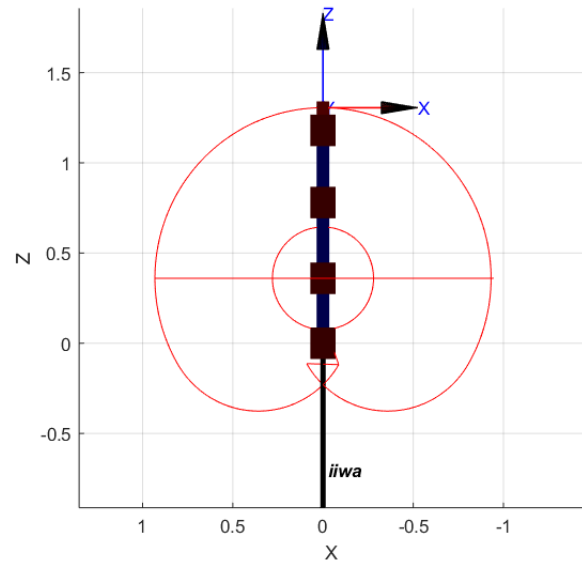


Figura 4. Espacio de trabajo generado en *MATLAB* con toolbox *RVCtools* de robot LBR iiwa 14 R820

| Articulación | θ_i [rad] | d_i [mm] | a_i [mm] | α_i [rad] |
|--------------|------------------|------------|------------|------------------|
| A1 | q_1 | 360 | 0 | $-\frac{\pi}{2}$ |
| A2 | q_2 | 0 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| A3 | q_3 | 420 | 0 | $-\frac{\pi}{2}$ |
| A4 | q_4 | 0 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| A5 | q_5 | 400 | 0 | $-\frac{\pi}{2}$ |
| A6 | q_6 | 0 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| A7 | q_7 | 126 | 0 | 0 |

Cuadro II

PARÁMETROS DE DENAVIT-HARTENBERG PARA EL ROBOT LBR iiwa 14 R820

- θ_i : Ángulo entre los ejes x_{i-1} y x_i sobre el eje z_{i-1} . En articulaciones rotacionales o de revolución el ángulo que toma la articulación, es decir, la variable articular.
- d_i : Distancia desde el origen del sistema de referencia $i-1$ al eje x_i a lo largo del eje z_{i-1} .
- a_i : Distancia entre los ejes z_{i-1} y z_i a lo largo del eje x_i . En el caso del robot seleccionado es un parámetro nulo en todas las articulaciones.
- α_i : Ángulo desde el eje z_{i-1} al eje z_i sobre el eje x_i . El robot seleccionado tiene la característica de que los sucesivos ejes z son perpendiculares entre sí, por lo que el valor absoluto de este parámetro es $\frac{\pi}{2}$ en todas las articulaciones.

Otro parámetro que podría agregarse es un *offset* en cada articulación para poder centrar su rango de valores y que el cero de cada una coincida con el de la posición en reposo o inicial. Sin embargo, dado que se considera como posición de reposo al robot completamente extendido en forma vertical, los parámetros elegidos colocan a la cadena cinemática en ésta posición y no es necesario agregar ningún *offset*.

Con esta descripción del robot es posible utilizar el toolbox *RVCtools* de Peter Corke, obtener una representación como la de la figura 2, y utilizar esta herramienta para posteriores simulaciones y análisis.

En la figura 5 puede observarse los sistemas de referencia

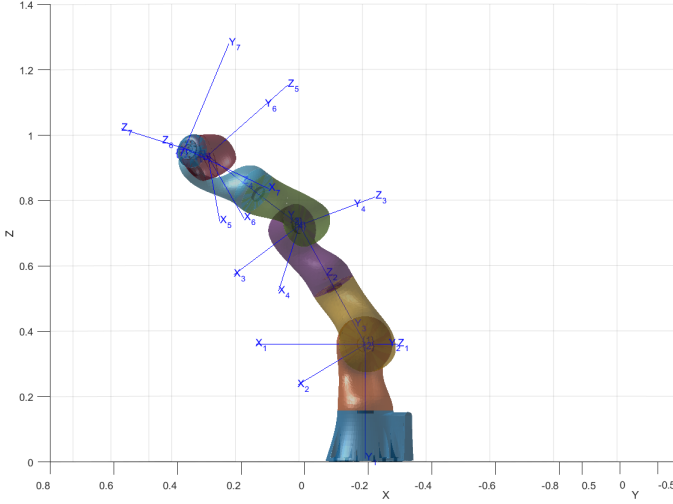


Figura 5. Sistemas de referencia de cada articulación, con la descripción de Denavit-Hartenberg realizada.

resultantes, para una configuración del robot donde todas sus articulaciones tienen un valor de $\pi/6$, con la descripción de Denavit-Hartenberg planteada.

IV. CINEMÁTICA DIRECTA

La cinemática directa es la obtención de la matriz de transformación homogénea del extremo de la cadena cinemática, o en este caso el extremo del robot, en relación al sistema de referencia de la base. Esto queda expresado por la ecuación:

$$T = f(\bar{q})$$

Donde T es la transformación homogénea de dimensión 4×4 a obtener, y \bar{q} el vector de variables articulares del robot. Para la aplicación de este trabajo el efector final posee 6 grados de libertad (3 de traslación y 3 de rotación), y dado que el robot es de 7 articulaciones el vector de variables articulares será de dimensión 1×7 .

Esta matriz de transformación homogénea T , se obtiene como una multiplicación de las sucesivas matrices de transformación homogénea de los sistemas de referencia de cada eslabón del robot. Por lo tanto, si la matriz ${}^A T_B$ es la matriz de transformación del sistema de referencia B respecto del sistema de referencia A , la matriz de transformación T se obtiene con la ecuación 1.

$$T = {}^0 T_7 = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot {}^2 T_3 \cdot {}^3 T_4 \cdot {}^4 T_5 \cdot {}^5 T_6 \cdot {}^6 T_7 \quad (1)$$

La descripción del robot con parámetros de Denavit-Hartenberg que se obtuvo en la sección III, permite hallar la matriz de transformación homogénea del sistema de referencia de cada eslabón mediante cuatro transformaciones primitivas: 2 de rotación y 2 de traslación, en el orden de la ecuación 2.

$${}^{i-1} T_i = RotZ_{i-1}(\theta_i) \cdot translZ_{i-1}(d_i) \cdot \dots \cdot translX_i(a_i) \cdot RotX_i(\alpha_i) \quad (2)$$

Donde $RotZ$ y $RotX$ son rotaciones alrededor del eje Z y el eje X respectivamente, y $translZ$ y $translX$ son traslaciones a lo largo del eje Z y el eje X respectivamente.

Reemplazando la matriz de transformación homogénea de cada articulación respecto a la anterior, en la ecuación 1 que describe la matriz de transformación homogénea del extremo respecto la base, se obtiene la ecuación matricial de cinemática directa. Todo este procedimiento se resume en el método *SerialLink.fkine* de MATLAB, contenido en el toolbox *RCVtools* de Peter Corke. Dado que la cinemática directa del robot seleccionado no posee ninguna particularidad, simplemente se utiliza dicha función para calcularla.

V. CINEMÁTICA INVERSA

La cinemática inversa es el proceso contrario a la cinemática directa. Consiste en la obtención de los valores que debe tener cada variable articular para que el extremo tenga la posición y orientación deseada. Siguiendo la notación de la sección IV, esto queda expresado por la ecuación:

$$\bar{q} = g(T)$$

A diferencia de lo que sucede con el cálculo de la cinemática directa, en el robot seleccionado, el cálculo de la cinemática inversa posee una particularidad que implica que su análisis no sea tan sencillo. Esta particularidad la da la característica principal del robot que es la redundancia, como se mencionó en la sección I. La redundancia queda expuesta al observar que el espacio articular es de 7 dimensiones, más dimensiones de las que posee el espacio del efector final o espacio cartesiano que son 6.

Esto último se relaciona con la cinemática inversa en que para su cálculo, se tienen 7 incógnitas (cada variable articular), y se poseen 6 ecuaciones linealmente independientes, relacionadas con cada dato de entrada, en este caso la posición y orientación deseadas del extremo. Por lo tanto, es un sistema de ecuaciones subdeterminado.

La ecuación que falta puede interpretarse como un problema, lo que es contradictorio ya que se plantea al robot redundante como una ventaja. Que el sistema sea subdeterminado implica múltiples soluciones, lo que se traduce en que para una misma consigna de posición y orientación del extremo existen múltiples configuraciones posibles, como también se menciona en la sección I. Entonces, el objetivo es encontrar la ecuación que falta o algún criterio que reduzca las infinitas soluciones del problema a una única o a un número finito que sean de máxima utilidad para la aplicación propuesta.

V.A. Solución mediante método incluido en el toolbox de Peter Corke para MATLAB: SerialLink.ikine

La forma más sencilla y rápida de obtener una solución para la cinemática inversa fue a través del método numérico incluido en el toolbox *RVCtools* de Peter Corke para MATLAB, *SerialLink.ikine*. Este es un método numérico que requiere de un posición articular "semilla" para encontrar la solución. Por la particularidad de la redundancia del robot este método no es el más adecuado ya que no permite tener control sobre

todas las soluciones que hay a la cinemática inversa. Por este motivo se dejó de lado y se desarrolló un método propio con ecuaciones cerradas.

V-B. Solución mediante método geométrico basada en la solución de Pieper

La solución encontrada al problema de la cinemática inversa se basa en el método de desacople cinemático o método de Pieper. Este método, originalmente descrito en Pieper [6] para cadenas cinemáticas de 6 GDL con muñeca esférica, se basa en la separación de la resolución de la cinemática inversa en dos partes. Dados una posición y orientación del efector final, se encuentra la posición de la muñeca, es decir, el punto en el que se cruzan los ejes de las últimas tres articulaciones. Luego se intenta posicionarla mediante el cálculo de las primeras tres articulaciones. Por otro lado, se usan las últimas tres para obtener la orientación deseada del efector final. Con este método se obtienen ecuaciones cerradas para los valores de las 6 articulaciones y se pueden obtener las 8 configuraciones que combinan hombro-derecha/hombro-izquierda, codo-arriba/codo-abajo y muñeca-arriba/muñeca-abajo.

Inspeccionando la configuración de nuestro robot, se ve que si se fija $q_3 = 0$ se obtiene un robot de 6 GDL idéntico al analizado mediante el método de Pieper. Esta solución, aunque válida, limita mucho las posibilidades de este robot por lo que se continuó con la búsqueda de un conjunto de ecuaciones cerradas, esta vez, para *cualquier* valor de q_3 , fijado a priori. Esto otorga una gran flexibilidad a la hora de encontrar soluciones a la cinemática inversa ya que se obtienen, para un valor de q_3 arbitrario, las 8 soluciones correspondientes. Luego se deberá aplicar un criterio para reducir las infinitas soluciones que se derivan de poder seleccionar cualquier q_3 y así obtener un número finito.

Siguiendo el método de Pieper con el robot analizado, primero se obtiene la posición de la muñeca, la cual coincide con el vector de posición de la transformación 0T_5 . Siendo

$${}^0T_7 = \begin{pmatrix} {}^0n_7 & {}^0o_7 & {}^0a_7 & {}^0p_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La posición de la muñeca respecto a la base del robot es

$${}^0p_5 = {}^0p_7 - d_7 \cdot {}^0a_7$$

Haciendo uso del método geométrico, se ve en la figura 5 que se forma un plano con tres puntos: el origen de los sistemas 1, 2; el origen de los sistemas 3, 4 y el origen de los sistemas 5, 6. Estos tres puntos además generan un triángulo del cual se conocen los tres lados: dos son las longitudes de eslabón d_3 y d_5 y el tercero es la longitud del vector que une 0p_1 y 0p_5 , es decir, 1p_5 . Con la ayuda del teorema del coseno, se puede obtener una forma cerrada para q_4 , siendo este ángulo el complementario al ángulo opuesto al vector 1p_5 , cuya norma es 1r_5 :

$$q_4 = \pi \pm \arccos \frac{d_3^2 + d_5^2 - {}^1r_5^2}{2 \cdot d_3 \cdot d_5} \quad (4)$$

Los dos valores de q_4 nos dan las dos soluciones de codo-arriba/codo-abajo. Se podría haber intentado seguir con el

análisis geométrico pero debido a la complejidad y porque se necesitaba tener la función de cinemática inversa con cierta urgencia para poder avanzar con otros análisis, acudimos al método algebraico. Debemos encontrar los pares q_1, q_2 que resuelven

$${}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_5 = {}^0T_5 \quad (5)$$

Recordando que q_3 es un dato de entrada. El problema radica en que tenemos las ecuaciones

$${}^2T_5 = {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 = f(q_3, q_4, q_5)$$

$${}^0T_5 = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$$

Y q_5 no es conocido a priori. Sin embargo, sí conocemos los valores de los vectores de posición de las matrices 2T_5 y 0T_5 , 2p_5 y 0p_5 respectivamente. A partir de la ecuación 5 con ${}^0p_5 = [x_w, y_w, z_w]$ es posible encontrar una expresión para q_2 de la forma

$$z_w - d_1 = {}^2p_5(3) \cdot \cos q_2 - {}^2p_5(1) \cdot \sin q_2 \quad (6)$$

Haciendo uso de la identidad geométrica

$$\begin{aligned} a \cdot \cos x + b \cdot \sin x &= R \cdot \cos(x - \alpha) \\ R^2 &= a^2 + b^2 \\ \tan \alpha &= \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (7)$$

Se deduce la expresión para q_2 , siguiendo la convención de las ecuaciones en 7

$$q_2 = \alpha \pm \arccos\left(\frac{z_w - d_1}{R}\right) \quad (8)$$

Con $a = {}^2p_5(3)$ y $b = -{}^2p_5(1)$

Los dos valores de q_2 nos darán las configuraciones hombro-derecha/hombro-izquierda. De esta forma, solo necesitamos conocer los valores de q_1 que satisfacen la expresión

$${}^0T_1 \cdot {}^1T_5 = {}^0T_5$$

De la que solo conocemos 0p_5 , 1p_5 y 0T_1 . Siguiendo un procedimiento idéntico al realizado para obtener la ecuación de q_2 se puede demostrar que

$$q_1 = \alpha \pm \arccos\left(\frac{x_w}{R}\right) \quad (9)$$

Donde nuevamente se hizo uso de la identidad geométrica planteada en 7 con $a = {}^1p_5(1)$ y $b = -{}^1p_5(3)$. Para cada uno de los valores de q_2 solo uno de los dos resultados de la ecuación 9 dará una solución válida. Para poder confirmar cuál de los ángulos correspondientes a q_1 es el válido se calcula la cinemática directa del robot para cada uno y nos quedamos con aquella configuración que tenga el codo correctamente posicionado respecto a 0p_5 .

Finalmente solo es necesario encontrar las expresiones para orientar correctamente el robot, esto es, las expresiones para q_5, q_6 y q_7 . Estas expresiones son cerradas y nos otorgan las dos configuraciones muñeca-arriba/muñeca-abajo. Las expresiones se derivan de

$${}^4T_7 = {}^0T_4^{-1} \cdot {}^0T_7$$

Y se obtienen los dos grupos de soluciones

$$\begin{aligned} q_6 &= -\text{atan2}(\sqrt{{}^4T_7(3,1)^2 + {}^4T_7(3,2)^2}, {}^4T_7(3,3)) \\ q_7 &= \text{atan2}(-{}^4T_7(3,2), {}^4T_7(3,1)) \\ q_5 &= \text{atan2}({}^4T_7(2,3), {}^4T_7(1,3)) + \pi \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} q_6 &= \text{atan2}(\sqrt{{}^4T_7(3,1)^2 + {}^4T_7(3,2)^2}, {}^4T_7(3,3)) \\ q_7 &= \text{atan2}(-{}^4T_7(3,2), {}^4T_7(3,1)) - \pi \\ q_5 &= \text{atan2}({}^4T_7(2,3), {}^4T_7(1,3)) \end{aligned} \quad (11)$$

De esta forma, con las ecuaciones 4, 8, 9, 10 y 11 para un q_3 dado, se obtienen las 8 configuraciones matemáticamente posibles, esto es, sin tener en cuenta límites articulares.

En la implementación, esto significa que la función de cinemática inversa es función de la transformación objetivo 0T_7 y del q_3 para el cual se quiere la solución. Se devuelven las 8 configuraciones posibles

$$q = f({}^0T_7, q_3)$$

Como q_3 puede ser, al menos matemáticamente, cualquier valor en el intervalo continuo $[-170, 170]$ entonces existen infinitas soluciones para la cinemática inversa. El desafío es, mediante algún criterio, como el detallado en la sección V-E, seleccionar un q_3 para reducir el problema: de infinitas soluciones a un número finito. Así, cuando se elija q_3 contaremos con las 8 soluciones clásicas.

V-C. Validación

Para poder verificar que el método propuesto efectivamente dé una solución al problema de la cinemática inversa se realizaron verificaciones numéricas.

Para esto, a partir de una configuración articular q_0 aleatoria se obtiene una matriz de transformación homogénea inicial T_0 mediante cinemática directa. Al realizar la cinemática inversa a partir de T_0 y $q_0(3)$ obtenemos 8 soluciones, de las cuales una, la cual llamamos q_{inv} , debe estar muy próxima en espacio articular a q_0 .

Si realizamos la diferencia entre q_0 y q_{inv} obtendremos un vector de errores. Si sumamos, en valor absoluto, las componentes de este vector se obtiene un número que es representativo del error de la cinemática inversa. Al repetir 1000 veces este procedimiento vemos que este valor tiene, para algunas configuraciones iniciales, picos del orden de $1e-12\text{rad/s}$ con una media en el orden de $1e-14\text{rad/s}$. Estos valores se pueden apreciar en la figura 6. Los valores obtenidos son muy bajos y se deben a errores numéricos. Se concluye que el método propuesto de cinemática inversa genera errores despreciables desde el punto de vista ingenieril.

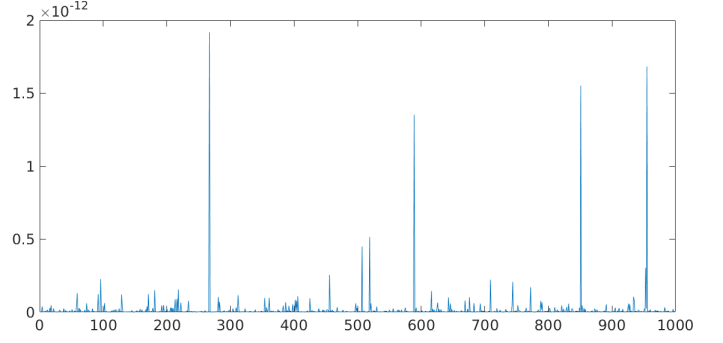


Figura 6. Error en la cinemática inversa para 1000 casos

V-D. Reconfiguración

El robot analizado, como ya se dijo anteriormente, es redundante. En este caso esto permite, además de infinitas soluciones a la cinemática inversa debido al rango de q_3 , poder realizar un movimiento de las articulaciones sin que haya variación en la posición y orientación del efector final. Esto es, existe un vector de velocidades articulares *no nulo* que genera velocidades *nulas* en el efector final para cada configuración articular dada.

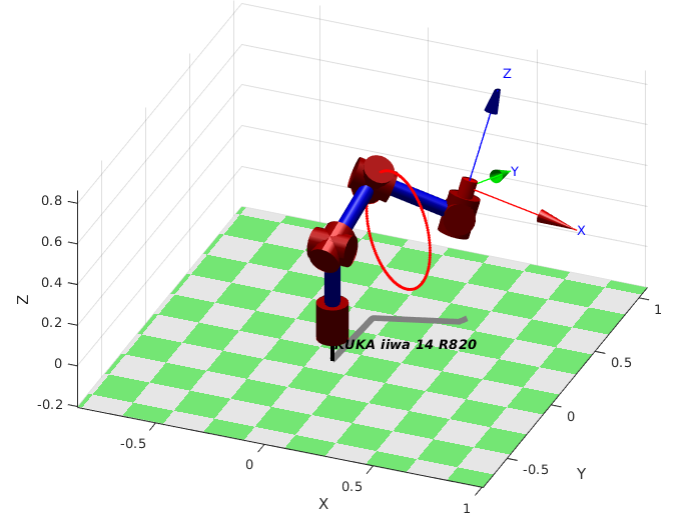


Figura 7. Posición del codo del robot al variar q_3 de forma suave manteniendo posición y orientación del efector final

Como se puede ver en la figura 7, al variar de forma suave la articulación q_3 se puede reconfigurar el robot de forma tal que el codo quede en la posición que se desee. Para una posición y orientación del efector final constantes y modificando q_3 , los puntos que puede tomar el codo vienen dados por la circunferencia que se observa en la figura 7. Esto otorga mucha flexibilidad a la hora de planear trayectorias y al elegir con qué q_3 se calculará la cinemática inversa descrita en la sección V-B.

V-E. Elección de q_3 . Dirección de mayor manipulabilidad para planificación de trayectorias

Como se planteó anteriormente, para poder calcular la cinemática inversa se requiere como dato de entrada un valor

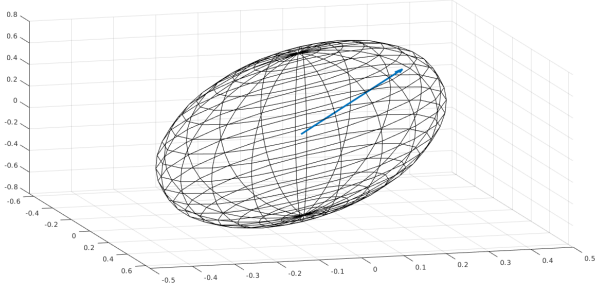


Figura 8. Segmento resultante para una velocidad $v = [-0,4; 0,5; 0,75]$ en una configuración $\bar{q} = [-2,5; -1; -2,7; 1,37; -0,42; -1,88; -1,24]$

de q_3 para el cual se encontrarán las 8 soluciones posibles. Si se puede elegir cualquier valor de q_3 dentro de los rangos articulares entonces la pregunta es cuál es buena elección. Se podrían tomar numerosos enfoques para determinar este valor como podría ser el volumen del elipsoide de manipulabilidad, qué tan lejos de los límites articulares está la configuración elegida, lejanía respecto a un obstáculo, etc. Luego, ya tomado un criterio, se podrían implementar algoritmos de búsqueda o técnicas basadas en inteligencia artificial para no tener que realizar una búsqueda exhaustiva y con eso ahorrar mucho tiempo de cálculo.

El criterio planteado se basa en el elipsoide de manipulabilidad. Este concepto se expande más en la sección VI-D. El método intenta encontrar, entre todos los q_3 , aquel que provea la máxima manipulabilidad en la dirección del movimiento. Como este criterio, si bien válido, por sí solo no otorga resultados del todo satisfactorios se combina con la restricción de obtener una configuración del tipo codo-arriba. Esta restricción se seleccionó de forma arbitraria por lo que podría ser intercambiada por otra restricción similar u otro tipo de condición. Si la configuración no es codo-arriba entonces se modificará q_3 con el objetivo de acercarse a una. Luego, si \bar{q} ya es una configuración codo-arriba, se buscará encontrar aquel q_3 que optimice la manipulabilidad en la dirección instantánea de movimiento. Es decir, se intenta orientar el robot de forma tal que la configuración elegida sea la más provechosa según el vector de velocidad que tenga en ese instante. Para esto se toma el elipsoide correspondiente a las velocidades tranlacionales dado por la ecuación 15. Si se sabe la velocidad instantánea de movimiento v , la manipulabilidad en esa dirección será la longitud del segmento que se genera al realizar la intersección entre una recta paralela al vector v y el elipsoide, tal como se ve en la figura 8.

Con la ecuación 15 que determina el elipsoide, a partir de la matriz que lo describe se puede encontrar la ecuación general, cuyos coeficientes están dados por dicha matriz en Raichman y Totter [7]

$$(J(q) \cdot J(q)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + 2d \cdot xy + 2e \cdot xz + 2f \cdot yz + j = 0 \quad (12)$$

Dada una velocidad translacional instantánea de movimiento $\bar{v} = [v_x, v_y, v_z]$ la recta paralela a este vector que cruza el origen de coordenadas viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = t \cdot v_x \quad y = t \cdot v_y \quad z = t \cdot v_z \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

Reemplazando en la ecuación 12 y resolviendo para el parámetro t se pueden encontrar las componentes del vector que va del origen de coordenadas al punto de intersección de la recta y el elipsoide. Se toma el valor positivo de la raíz ya que a los efectos del presente análisis es indiferente.

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \\ \delta &= a \cdot v_x^2 + b \cdot v_y^2 + c \cdot v_z^2 + 2d \cdot v_x \cdot v_y + \dots \\ &\dots 2e \cdot v_x \cdot v_z + 2f \cdot v_y \cdot v_z \end{aligned}$$

La norma del vector obtenido $\bar{u} = t \cdot \bar{v}$ será la longitud del segmento buscado (ver figura 8) que se quiere maximizar.

Este método por sí solo no es totalmente efectivo así que como se mencionó anteriormente se propone combinarlo con una preferencia o restricción de la posición del codo. Por ejemplo, se prefiere tener el codo arriba y a la vez, de todas esas configuraciones, encontrar aquella que maximiza la manipulabilidad en la dirección del movimiento. Otra propuesta que no fue explorada fue la posibilidad de otorgarle un peso al factor que corresponde a la manipulabilidad que sea decreciente a lo largo de la trayectoria. De esta forma no se intentaría mejorar la configuración para la dirección del movimiento en los tramos finales ya que en aquellos podría ser más provechoso definir de otra forma el ángulo q_3 .

Al momento de utilizar la cinemática inversa durante la planificación de trayectorias primero se intenta, a partir de la configuración anterior y la transformación homogénea objetivo, llevar al robot a una configuración del tipo codo-arriba. Si esta condición ya se cumple, entonces se realiza una búsqueda variando q_3 en una región cercana al q_3 de la configuración anterior y se elige aquel que provee la mejor manipulabilidad en la dirección de la velocidad instantánea de movimiento tal como se describió anteriormente. Al mismo tiempo que se va variando q_3 dentro de la región nombrada, de las 8 soluciones que se obtienen para ese q_3 se elige aquella que está más cerca en espacio articular. De esta forma se asegura la suavidad de la solución.

Así, la función de cinemática inversa que se debe llamar al realizar la planificación de trayectorias dependerá de la configuración articular anterior en q_{k-1} y de la transformación objetivo en T_k

$$q_k = f(q_{k-1}, T_k)$$

La exploración de otros métodos de elección de q_3 distintos al planteado y una implementación más óptima en términos computacionales y algorítmicos se dejan como posibilidad de trabajo futuro.

VI. RELACIÓN DE VELOCIDADES

De Barrientos y col. [1], el método más directo para obtener la relación entre velocidades articulares y del extremo del robot consiste en diferenciar las ecuaciones correspondientes al modelo cinemático directo. De esta forma se puede llegar a la siguiente ecuación matricial:

$$\bar{p} = J(\bar{q}) \cdot \bar{q} \quad (13)$$

Donde \bar{p} es el vector de velocidad del extremo respecto la base, en esta aplicación de dimensión 6×1 ; \bar{q} el vector de velocidades articulares, en esta aplicación de dimensión 7×1 ; y la matriz J se denomina matriz Jacobiana, es función de la configuración articular del robot y en la aplicación de este trabajo es de dimensión 6×7 .

Para la obtención en MATLAB de dicha matriz, se utiliza el toolbox de Peter Corke, específicamente los métodos *SerialLink.jacob0* y *SerialLink.jacobn* que mapean la velocidad en espacio del efector final del robot respecto al sistema de referencia de la base o al sistema de referencia del extremo respectivamente, Corke [3].

VI-A. Matriz Jacobiana y configuraciones singulares

Se denominan configuraciones singulares de un robot a aquellas en las que el determinante de su matriz Jacobiana se anula. Por esta circunstancia, en las configuraciones singulares no existe Jacobiana inversa. Al anularse el determinante, un incremento infinitesimal de las coordenadas cartesianas supondría un incremento infinito de las coordenadas articulares, Barrientos y col. [1]. Por lo tanto resulta de especial interés el problema inverso al de la ecuación 13, expresado en la siguiente ecuación:

$$\bar{q} = J(\bar{q})^{-1} \cdot \bar{p} \quad (14)$$

La matriz Jacobiana tiene tantas columnas como variables articulares posee el robot, y tantas filas como grados de libertad posee el extremo. Entonces, para el caso de la cadena cinemática del *LBR iiwa* la matriz es de 6 filas y 7 columnas. Esto implica la complejidad de que la matriz no es cuadrada producto de la redundancia del robot seleccionado, y por lo tanto, no se puede calcular su matriz inversa y tampoco su determinante y analizar con él la existencia de singularidades.

Teniendo imposibilitado el cálculo del determinante de la matriz J , se utilizaron otro tipo de herramientas algebraicas para analizar la matriz y obtener información sobre configuraciones articulares del robot.

Barrientos y col. [1] clasifican las singularidades en dos (en la sección VII, se utilizará una clasificación diferente):

- *Singularidades en los límites del espacio de trabajo del robot.* Se presentan cuando el extremo del robot está en algún punto del límite del espacio de trabajo interior o exterior.
- *Singularidades en el interior del espacio de trabajo del robot.* Se producen generalmente por el alineamiento de dos o más ejes de las articulaciones del robot.

VI-B. Rango y función jsingu

En ambos casos, la singularidad se traduce en pérdidas de grados de libertad en el robot. En las singularidades de primer tipo porque el extremo no puede trasladarse hacia afuera del espacio de trabajo, y en las singularidades del segundo tipo porque dos articulaciones alineadas imprimen en el extremo una sola rotación equivalente. Esta observación permite resaltar que las singularidades aumentan el número de filas o columnas linealmente dependientes, o lo que es lo mismo, que el rango de la matriz es menor al número de grados de libertad del extremo. Entonces, la primera herramienta utilizada para el análisis de singularidades es la función de MATLAB *rank*.

La segunda herramienta es la función *jsingu* implementada en el toolbox de Peter Corke, que realiza un análisis automático de las dependencias de la matriz J e informa por consola la dependencia entre articulaciones. En otras palabras, informa que la velocidad de una articulación q_i puede ser completamente expresada en términos de la velocidad de la articulación q_j , Corke [3].

VI-C. Número de condición

El número de condición de una matriz es la razón entre el valor singular mínimo y máximo de dicha matriz. Se utiliza para medir cuán sensible resulta una función a cambios o errores en el valor de entrada, y cuál será el error en el valor de salida debido a este. Si el número de condición está cerca de 1 se dice bien condicionada, y mal condicionada si el número de condición es significativamente mayor que 1. La cuarta herramienta utilizada es el número de condición con la función de MATLAB, *cond*, donde mientras mayor es el número resultante, más cerca está la configuración articular de ser singular.

VI-D. Manipulabilidad

Corke [3] menciona que para algunos movimientos, una matriz mal condicionada no es problemática. Por lo tanto, se plantea el concepto de manipulabilidad, considerando el conjunto de velocidades angulares con norma unitaria $\bar{q}^T \cdot \bar{q} = 1$, que genera una elipsoide que puede describirse con la siguiente ecuación:

$$\bar{v}^T \cdot (J(\bar{q})J(\bar{q})^T)^{-1} \cdot \bar{v} = 1 \quad (15)$$

Donde $\bar{v} = \bar{q}$ y $J(\bar{q})$ es una versión reducida de la matriz jacobiana, de dimensión 3×7 para la cadena cinemática en análisis. Esta matriz reducida consiste en las primeras tres filas de la matriz jacobiana ($J_v(\bar{q})$) para obtener un elipsoide de manipulabilidad asociado a velocidades traslacionales del extremo, o las últimas tres filas ($J_\omega(\bar{q})$) para obtener un elipsoide de manipulabilidad asociado a velocidad angulares del extremo. Matemáticamente se definen de la siguiente forma:

$$J(\bar{q}) = \begin{bmatrix} J_v(\bar{q}) \\ J_\omega(\bar{q}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Este elipsoide de manipulabilidad es realmente útil para visualmente analizar la presencia de singularidades y ver las posibilidades de movimiento del extremo (ya sea en traslación o en rotación) para una determinada configuración articular.

En la figura 9, puede apreciarse la obtención del elipse de manipulabilidad asociado a la velocidad traslacional y el elipse de manipulabilidad asociado a la velocidad rotacional o angular en la figura 10 para el robot manipulador seleccionado, ambas generadas con el software MATLAB y el toolbox *RVCtools* para la configuración articular $\bar{q} = (0; \pi/6; 0; -\pi/3; 0; -\pi/3; 0)$. Cabe destacar que la ecuación 15 da como resultado una elipse centrada en el origen, sin embargo para una representación visual más acorde con el concepto se optó por centrarlas en el extremo de la representación del robot.

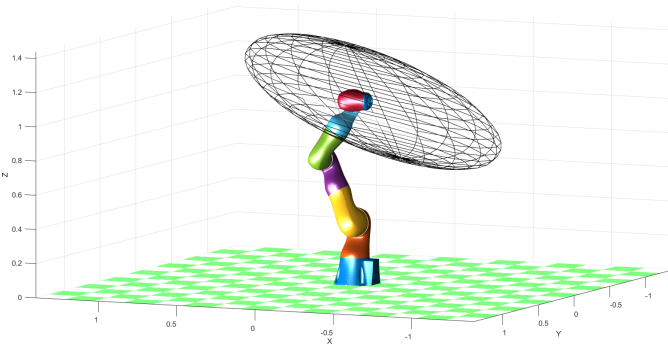


Figura 9. Elipse de manipulabilidad asociado a la velocidad traslacional, en la configuración articular $\bar{q} = (0; \pi/6; 0; -\pi/3; 0; -\pi/3; 0)$

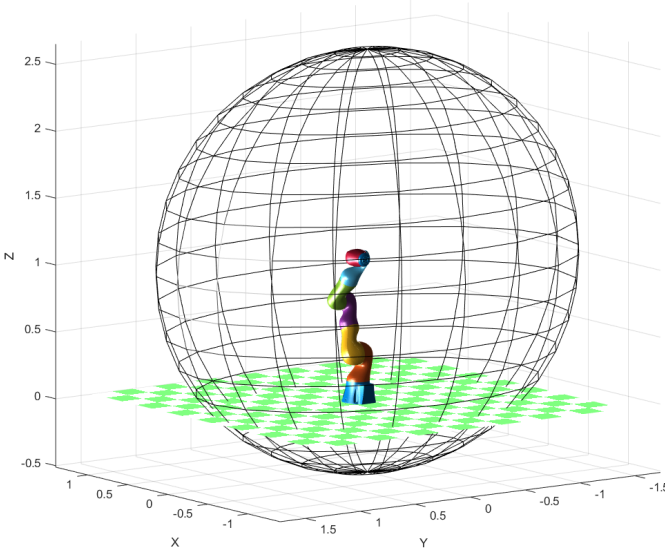


Figura 10. Elipse de manipulabilidad asociado a la velocidad angular, en la configuración articular $\bar{q} = (0; \pi/6; 0; -\pi/3; 0; -\pi/3; 0)$.

La **manipulabilidad de Yoshikawa**, es una medida de manipulabilidad basada en la ecuación 15, que se obtiene de la siguiente forma:

$$m = \sqrt{\det(J(\bar{q})J(\bar{q})^T)} \quad (17)$$

El valor resultante es proporcional al volumen del elipsoide de manipulabilidad. Esta medida está implementada en el toolbox de Peter Corke, función *maniply* y se suma al conjunto de herramientas para el análisis de singularidades.

VII. ANÁLISIS DE SINGULARIDADES SIGUIENDO EL PROCEDIMIENTO PROPUESTO POR ZAPLANA, CLARET Y BASANEZ [11]

Para un análisis más detallado de las singularidades que posee el robot manipulador modelo LBR iiwa 14 R820, se aplicó el procedimiento propuesto por Zaplana, Claret y Basanez [11] en cuya publicación sobre análisis cinemático de robots manipuladores redundantes utilizan los modelos KUKA LWR 4+ y ABB Yumi. Es importante aclarar que las singularidades que aquí se analizan son singularidades matemáticas y no singularidades físicas dadas, por ejemplo, por los límites articulares. Además, se destaca que el autor utiliza el Jacobiano geométrico, distinto del jacobiano analítico mencionado previamente, que se obtiene derivando geométricamente la ecuación 13, y es de la forma:

$$J_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{z}_i \times (\bar{o}_n - \bar{o}_i) \\ \bar{z}_i \end{bmatrix} & \text{para articulaciones de revolución} \\ \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} & \text{para articulaciones prismáticas} \end{cases} \quad (18)$$

Donde J_i es la columna i de la matriz jacobiana geométrica, \bar{z}_i el vector con dirección z del sistema de referencia del eslabón i respecto la base, y por último el vector \bar{o}_i une el origen del sistema de referencia de la base con el origen del sistema de referencia del eslabón i , de Spong, Hutchinson y Vidyasagar [9].

$$J_G(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \times (\bar{o}_7 - \bar{o}_1) & \dots & \bar{z}_7 \times (\bar{o}_7 - \bar{o}_7) \\ \bar{z}_1 & \dots & \bar{z}_7 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana geométrica para el robot seleccionado será de la forma de la ecuación 19.

La diferencia conceptual entre el jacobiano analítico y el jacobiano geométrico es que el primero relaciona, mediante la ecuación 13, las velocidades articulares y las velocidades del extremo respecto los ejes del sistema de referencia de la base. En cambio, el jacobiano geométrico relaciona las velocidades articulares con la velocidad lineal y angular del efector final.

Dado que tanto el modelo de la referencia como el de este trabajo poseen muñeca esférica, el autor propone desplazar el sistema de referencia del último eslabón y colocar su origen en la muñeca, es decir, donde se intersectan los 3 últimos ejes z . Esto equivale a tomar el parámetro de Denavit-Hartenberg d_7 igual a 0, lo que convierte a la matriz jacobiana geométrica en una matriz como la que sigue:

$$J_G(\bar{q}) = \begin{bmatrix} J_{11} & 0_{3 \times 3} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Donde puede observarse que la matriz jacobiana se simplifica al ser el bloque superior derecho de la matriz nulo. Esto fue validado en el análisis propio.

De Zaplana, Claret y Basanez [11], para robots manipuladores redundantes, las singularidades pueden obtenerse mediante dos enfoques diferentes:

- Mediante el cálculo de la ecuación $\det(J(\bar{q})J(\bar{q})^T) = 0$, la más general, sin embargo demasiado compleja y debe recurrirse a métodos numéricos para su resolución.
- Para aquellos manipuladores redundantes con muñeca esférica, las singularidades pueden desacoplarse en: singularidades de posición, orientación y acopladas, y mediante la ecuación 20 resolver el caso no redundante $\det(J(\bar{q})) = \det(J_{11}) \cdot \det(J_{22})$.

En el último caso, J_{11} no es una matriz cuadrada, entonces el procedimiento es distinguir entre los diferentes tipos de singularidades mencionados:

- **Singularidades de posición:** Resolviendo la ecuación

$$\det(J_{11}(\bar{q})J_{11}(\bar{q})^T) = 0$$

- **Singularidades de orientación:** Resolviendo la ecuación:

$$\det(J_{22}(\bar{q})) = 0$$

- **Singularidades acopladas:** Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \det(J_{22}(\bar{q})) = 0 \\ \det(J_{21}(\bar{q})J_{21}(\bar{q})^T) = 0 \\ \det(J_{\omega}(\bar{q})J_{\omega}(\bar{q})^T) = 0 \end{cases}$$

Para poder simplificar las ecuaciones de tipo $\det(J_{ij}(\bar{q})J_{ij}(\bar{q})^T) = 0$, se utiliza la fórmula de Gauss-Binnet. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, entonces:

$$\det(A \cdot A^T) = \sum_{i=1}^N M_i^2 \quad (21)$$

Donde $N = \min(n, m)$ y M_i es el determinante del menor i -ésimo de A . Por lo tanto,

$$\det(A \cdot A^T) = 0 \iff M_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (22)$$

Con el objetivo de simplificar los cálculos, se cambia el sistema de referencia de la matriz jacobiana a otro diferente de $\{0\}$ mediante la siguiente ecuación válida para la matriz jacobiana geométrica:

$${}^i J_G(\bar{q}) = B \cdot J_G(\bar{q})$$

Donde:

$$B = \begin{bmatrix} {}^i R_0 & 0 \\ 0 & {}^i R_0 \end{bmatrix}$$

Y donde la matriz ${}^i R_0$ es una matriz de rotación que cumple ${}^i R_0 = ({}^i R_0)^{-1} = ({}^i R_0)^T$. Luego de intentar distintos sistemas de referencias, se decidió elegir el del segundo eslabón, $\{4\}$, que es el sistema que da como resultado las submatrices de la ecuación 20 menos complejas.

VII-A. Singularidades de posición

Para la ecuación de singularidades de posición:

$$\det(J_{11}(\bar{q})J_{11}(\bar{q})^T) = 0 \quad (23)$$

Siguiendo la ecuación de Gauss-Binnet, ecuaciones 21 y 22, para resolver la ecuación 23 se obtienen los siguientes determinantes de los 4 menores de J_{11} :

$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = \frac{42}{625} c_3 \cdot (c_4^2 - 1) \\ M_3 = -\frac{42}{625} s_2 \cdot s_3 \cdot s_4^2 \\ M_4 = \frac{42}{625} c_2 \cdot c_3 + \frac{441}{6250} s_2 \cdot s_4 - \dots \\ \dots \frac{42}{625} c_2 \cdot c_3 \cdot c_4^2 + \frac{42}{625} c_4 \cdot s_2 \cdot s_4 \end{cases} \quad (24)$$

Igualando los determinantes obtenidos a cero, se puede resolver el sistema de ecuaciones dando como resultado dos soluciones diferentes:

$$\begin{aligned} \sin(q_4) = 0 \quad \& \quad \begin{cases} \sin(q_2) = 0 \\ \cos(q_3) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad q_4 = 0 \quad \& \quad \begin{cases} q_2 = 0 \\ q_3 = \pm\pi/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Las dos singularidades de posición obtenidas son diferentes a las del autor, sin embargo son consistentes y la diferencia solo se debe a la descripción de Denavit-Hartenberg planteada para el manipulador seleccionado.

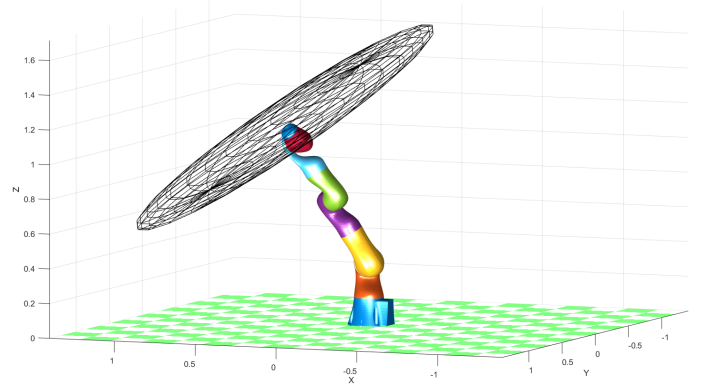


Figura 11. Singularidad de posición, $q_4 = 0$. Configuración articular $\bar{q} = (\pi/6, \pi/6, \pi/6, 0, \pi/6, \pi/6, \pi/6)$.

En la figura 11, se puede observar un ejemplo de singularidad de posición con $q_4 = 0$ (configuración articular $\bar{q} = (\pi/6, \pi/6, \pi/6, 0, \pi/6, \pi/6, \pi/6)$), donde el elipsoide asociado a traslación tiende a una elipse planar, indicando la imposibilidad del extremo del robot de moverse en la dirección Z positiva de su sistema de referencia. En la figura 12, se puede observar un ejemplo de la segunda singularidad de posición con $q_2 = 0$ y $q_3 = \pm\pi/2$ (configuración articular $\bar{q} = (\pi/6, 0, \pi/2, \pi/6, \pi/6, \pi/6, \pi/6)$), donde el elipsoide asociado a traslación también tiende a una elipse planar.

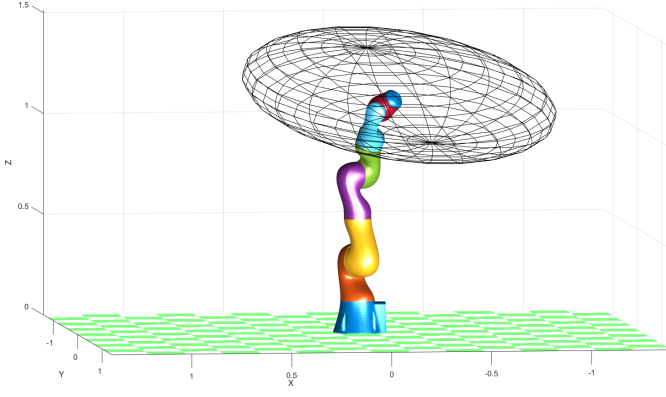


Figura 12. Singularidad de posición, $q_2 = 0$ y $q_3 = \pm\pi/2$. Configuración articular $\bar{q} = (\pi/6, 0, \pi/2, \pi/6, \pi/6, \pi/6, \pi/6)$.

VII-B. Singularidades de orientación

Para la ecuación de singularidades de orientación:

$$\det(J_{22}(\bar{q})) = 0 \quad (26)$$

Se obtuvo que el determinante es directamente igual a cero, por lo que, a diferencia del autor, para la descripción de Denavit-Hartenberg planteada no se tienen singularidades de orientación.

VII-C. Singularidades acopladas

Por último, las singularidades acopladas dadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \det(J_{22}(\bar{q})) = 0 \\ \det(J_{21}(\bar{q})J_{21}(\bar{q})^T) = 0 \\ \det(J_{\omega}(\bar{q})J_{\omega}(\bar{q})^T) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Donde $\det(J_{22}(\bar{q})) = 0$ ya se resolvió dando como resultado la inexistencia de singularidades de orientación. Para resolver la siguiente ecuación, se procede con la fórmula de Gauss-Binnet encontrando los 4 menores de J_{21} y calculando su determinante, obteniendo resultados similares a los del autor:

$$\begin{cases} M_1 = -s_2 \\ M_2 = -s_3 \\ M_3 = c_3 \cdot s_2 \\ M_4 = c_2 \cdot s_3 \end{cases} \quad (28)$$

Igualando los determinantes obtenidos a cero, se puede resolver el sistema de ecuaciones dando como resultado dos soluciones diferentes:

$$\begin{cases} \sin(q_2) = 0 \\ \sin(q_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Para la resolución de la tercer y última ecuación, $\det(J_{\omega}(\bar{q})J_{\omega}(\bar{q})^T) = 0$, vuelve a utilizarse la fórmula de Gauss-Binnet, por lo que se procede encontrando los 7 menores de la matriz J_{ω} y luego calculando su determinante:

$$\begin{cases} M_1 = -s_2 \\ M_2 = -s_3 \\ M_3 = -s_4 \\ M_4 = -s_5 \\ M_5 = 0 \\ M_6 = 0 \\ M_7 = c_2 \cdot c_5 \cdot s_3 - s_2 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 \end{cases} \quad (30)$$

Igualando los determinantes obtenidos a cero, se resuelve el sistema de ecuaciones, dando como resultado:

$$\begin{cases} \sin(q_2) = 0 \\ \sin(q_3) = 0 \\ \sin(q_4) = 0 \\ \sin(q_5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Y si se observan los resultados de las primeras dos ecuaciones, puede notarse que están contenidos en el sistema 31, por lo que puede concluirse que la única singularidad acoplada del robot es la de dicho sistema.

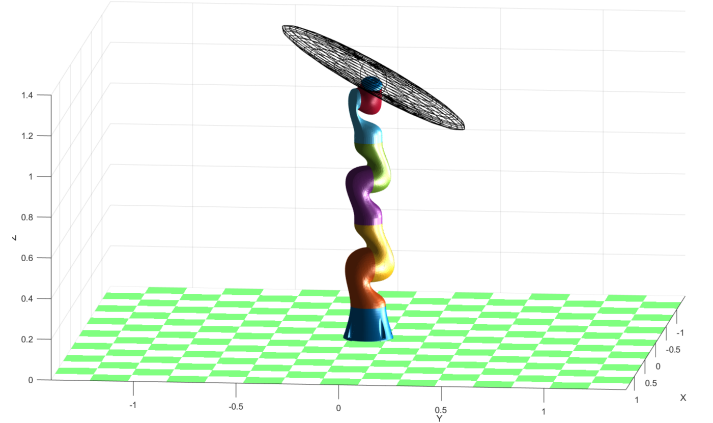


Figura 13. Ejemplo de singularidad acoplada para robot LBR iiwa 14 R820. $q_i = 0$, $i = 2, \dots, 6$. Configuración articular $\bar{q} = (\pi/6, 0, 0, 0, 0, \pi/6, \pi/3)$.

En la figura 13, se puede observar un ejemplo de singularidad acoplada, específicamente el caso de la configuración articular $\bar{q} = (\pi/6, 0, 0, 0, 0, \pi/6, \pi/3)$. Puede observarse cómo el elipsoide asociado a la velocidad de traslación tiene una recta, lo que implica que el extremo solo puede desplazarse sobre esa dirección.

Cabe aclarar, que se consideraron en las diferentes soluciones solo aquellos valores dentro de los correspondientes límites articulares.

En el cuadro III pueden observarse cómo, para los ejemplos de singularidad anteriores, el rango de la matriz jacobiana (analítica) es menor a 6, cómo el número de condición es muy elevado y la manipulabilidad de Yoshikawa tiende o es igual a 0.

| | Singularidad de posición | | Singularidad acoplada |
|------------------------------|--------------------------|------------------------|----------------------------|
| Valor articular | $q_4 = 0$ | $q_2 = 0; q_3 = \pi/2$ | $q_i = 0, i = 2, \dots, 5$ |
| Rango | 5 | 5 | 4 |
| Nº Condición | 2.493674757556518e+16 | 1.236525003273393e+16 | 4.672415464349288e+17 |
| Manipulabilidad de Yoshikawa | 0 | 1.2395e-09 | 6.1334e-18 |

Cuadro III

VALORES OBTENIDOS DE RANGO, NÚMERO DE CONDICIÓN Y MANIPULABILIDAD DE YOSHIKAWA PARA LOS DIFERENTES EJEMPLOS DE SINGULARIDAD EXPUESTOS

VII-D. Direcciones singulares

Para obtener las direcciones singulares asociadas a cada singularidad, Zaplana, Claret y Basanez [11], se utilizaron los siguientes dos métodos:

- Expresando $J_G(\bar{q})$ en los distintos sistemas de referencia de cada articulación (${}^i J_G(\bar{q})$), y evaluar dicha matriz en las distintas configuraciones singulares. Si se anulan filas, la dirección singular se alinea con uno de los ejes principales del sistema correspondiente.
- Utilizando la descomposición en valores singulares (SVD), implementado en MATLAB. La implementación devuelve los valores singulares de la matriz, y la cantidad de estos valores nulos es equivalente a la cantidad de grados de libertad que se pierden.

Para la primer singularidad, $q_4 = 0$, se realiza la descomposición en valores singulares y se obtiene un solo valor nulo. Por lo tanto, en esta singularidad se pierde un grado de libertad en el extremo. Si se realiza el análisis por observación de filas anuladas del jacobiano geométrico respecto los distintos sistemas de referencia, se puede obtener que ese grado de libertad menos es de traslación, y en la dirección del eje Y del sistema de referencia de la segunda articulación (igual a las direcciones Z de los sistemas de referencia 3 y 5, y la dirección Y del sistema de referencia 4).

Para la segunda singularidad, $q_2 = 0$ y $q_3 = \pi/2$, se pierde un grado de libertad en el movimiento del extremo. Ese grado de libertad es de traslación, y en la dirección del eje Y del sistema de referencia de la cuarta articulación (igual a la dirección Z del sistema de referencia 5).

Para la singularidad acoplada, donde desde la segunda articulación a la quinta los valores son nulos, se pierden 3 grados de libertad. Para este caso esos grados de libertad están asociados tanto a la imposibilidad de traslación del extremo en ciertas direcciones como la rotación respecto a ciertos ejes. Los movimientos a tener en cuenta segun cada sistema de referencia son:

- Dirección Y del sistema de referencia 0.
- Direcciones Y, Z y rotación alrededor del eje X del sistema de referencia 1.
- Direcciones Y, Z y rotación alrededor del eje X del sistema de referencia 2, 3, 4 y 5.
- Dirección Y del sistema de referencia 6.
- Dirección Z del sistema de referencia 7.

La numeración de los sistemas de referencia se puede observar en la figura 5.

VIII. PLANIFICACIÓN Y GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

La planificación de trayectorias es la generación de perfiles de tiempo en el espacio articular o espacio cartesiano para la coordinación de las distintas variables articulares, de tal forma que permitan al efector final del manipulador llegar a determinados puntos del espacio con determinada orientación, teniendo en cuenta la capacidad de los actuadores y el robot en general.

Para la planificación de una trayectoria determinada, es necesario especificar un camino geométrico, función vectorial paramétrica $p(s)$, que describe el movimiento en el espacio mediante la función o ley de tiempo $s(t)$, que caracteriza la evolución en el tiempo a lo largo de dicho camino geométrico. La ley de tiempo es adoptada para garantizar que la trayectoria cumpla con las restricciones de velocidad y aceleración. Por lo tanto, la trayectoria se describe como $p(t) = p(s(t))$, y es el movimiento en el tiempo a lo largo del camino geométrico. Este tipo de planteo resulta en una trayectoria coordinada o isocrona.

En la práctica, el camino geométrico se obtiene de una secuencia de puntos en el espacio cartesiano o espacio de tarea. Existen, en general, tres tipos de movimientos entre dichos puntos:

- Movimiento PTP: Del inglés *Point To Point*, donde cada articulación evoluciona desde su posición inicial a la final sin realizar consideración alguna sobre el estado o evolución de las demás articulaciones, Barrientos y col. [1].
- Movimiento CIRC: Donde el camino geométrico entre un punto y otro es un arco de circunferencia, y se obtiene mediante interpolación en el espacio cartesiano.
- Movimiento LIN: Donde el camino geométrico entre un punto y otro es una línea recta, y se obtiene mediante interpolación en el espacio cartesiano.

Es importante diferenciar entre **planificación de tarea** y **planificación de camino**. La primera, es la determinación de la secuencia de puntos o nodos en el espacio de tarea, mientras que la segunda es la secuencia de nodos en el espacio articular. Según sea la complejidad del trayecto a realizar, será necesario primero realizar una planificación de tarea para luego pasar a la planificación en espacio articular o simplemente trabajar desde el inicio en espacio articular.

La planificación en espacio de tarea tiene ventajas como la fácil visualización de la trayectoria generada y simplifica la evasión de obstáculos. En cambio, la planificación en espacio articular no necesita cálculos de cinemática inversa y gracias

a esto es posible sortear las singularidades que pudieren estar presentes.

VIII-A. Ley de tiempo

Para obtener una determinada trayectoria, el camino es regido por una ley de tiempo. Esta ley de tiempo depende de:

- Especificaciones de tarea: Características que tiene la tarea a realizar, como detenerse en algún punto del espacio, moverse a velocidad constante, etc.
- Criterio de optimización: Realizar los caminos en el menor tiempo posible, minimizar energía, camino con las configuraciones articulares que provoquen menor torque sobre la estructura del robot, etc.
- Restricciones diversas: Las impuestas por las capacidades de los actuadores o por la tarea en sí, máximo torque, máxima velocidad, máxima aceleración, etc.

Los requisitos en general para la generación de una ley de tiempo son que los perfiles de posición y velocidad (por lo menos) sean continuos en el tiempo; que los algoritmos para su generación sean relativamente eficientes; y evitar o minimizar efectos indeseados como curvaturas irregulares, etc.

Las principales técnicas para su generación son el uso de perfiles de velocidad trapezoidal o perfiles S, con velocidad, aceleración y jerk¹ acotado; o el uso de polinomios de tercer o quinto grado.

Para el análisis se optó por una ley de tiempo con perfil de velocidad trapezoidal. Para esto, se divide el movimiento en tres etapas:

Aceleración → Desplazamiento → Desaceleración

Las distintas ecuaciones utilizadas son:

- Etapa de aceleración:

$$s(t) = at^2/2 \quad t \in [0, \tau]$$

- Etapa de velocidad constante:

$$s(t) = s(\tau) + v(t - \tau) \quad t \in [\tau, T]$$

- Etapa de desaceleración:

$$s(t) = s(T) + v(t - T) - a(t - T)^2/2 \quad t \in [T, T + \tau]$$

Donde $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ es la velocidad en función del tiempo, y $a(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$ es la aceleración en función del tiempo. Con estas ecuaciones se puede obtener una ley de tiempo como la de la figura 14.

A las ecuaciones anteriores se imponen condiciones de borde como las que siguen:

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(T + \tau) = 1 \\ \dot{s}(0) = 0 \\ \dot{s}(T + \tau) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

¹Jerk: Derivada de la aceleración respecto al tiempo, o cuarta deriva de la posición respecto al tiempo.

Mediante trabajo algebraico puede obtenerse que $V = 1/T$ y $a = 1/(T\tau)$. Esto hace que nuestra ley de tiempo quede totalmente definida por los parámetros T y τ .

Como se observa en el perfil de velocidad en la figura 14, se asume velocidades inicial y final nulas y los segmentos de aceleración constantes con la misma duración. Esto implica una magnitud de aceleración igual en estos dos segmentos. Todo esto hace que el perfil sea simétrico respecto al punto medio donde $p_m = (p_f + p_i)/2$ y $t_m = (T + \tau)/2$, Siciliano y col. [8].

Como la velocidad al finalizar la etapa de aceleración debe ser igual a la etapa de velocidad constante, se obtiene τ de la ecuación 33. Además como el perfil es simétrico respecto al punto medio se tiene la ecuación 34 donde $p(\tau)$ es el valor en el final de la parábola para la posición, ecuación 35.

$$a_{max}\tau = v_{max} \Rightarrow \tau = \frac{v_{max}}{a_{max}} \quad (33)$$

$$a_{max}\tau = \frac{p_m - p(\tau)}{t_m - \tau} \quad (34)$$

$$p(\tau) = p_i + \frac{1}{2}a_{max}\tau^2 \quad (35)$$

Combinando 34, 35 y 33 y trabajando algebraicamente se obtiene finalmente T como se muestra en la ecuación 36.

$$T = \frac{\Delta p}{v_{max}} \quad (36)$$

Teniendo en cuenta que el tiempo de la etapa de velocidad constante es $T - \tau$ esta puede ser 0 o negativa si $T < \tau$. Esto pasa cuando el desplazamiento, Δp , es relativamente pequeño. En este caso la máxima velocidad no es alcanzada si la máxima aceleración es impuesta, entonces, T y τ necesitan ser recalculados, Hyun Joong Yoon y Hwang [5].

Para calcular τ se usa la ecuación 37. Este valor de τ genera un perfil triangular, para evitar esto, se usa el valor de $T = v_{max}/a_{max}$, así se mantiene nuestro perfil trapezoidal. Esto provoca que se alcance una velocidad menor a la máxima en esta trayectoria.

$$\Delta p = v_{max}\tau = a_{max}\tau^2 \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{\Delta p}{a_{max}}} \quad (37)$$

Cabe destacar que si se tiene que coordinar varios actuadores, se computan los parámetros T y τ de cada una de las articulaciones y para el espacio de tarea, eligiéndose el máximo de estos y computando una sola ley de tiempo para todo el movimiento.

Por cuestiones de simplicidad en nuestra generación de trayectorias se optó por solo computar los parámetros del espacio de tarea, que en muchas ocasiones suele ser el movimiento más largo y/o más lento. Luego inspeccionar visualmente las curvas de las articulaciones verificando que no se sobrepasen ningún parámetro.

Las ventajas de haber seleccionado una ley de tiempo con perfil de velocidad trapezoidal, son la limitación de los picos de aceleración, la posibilidad de implementar perfiles tales que

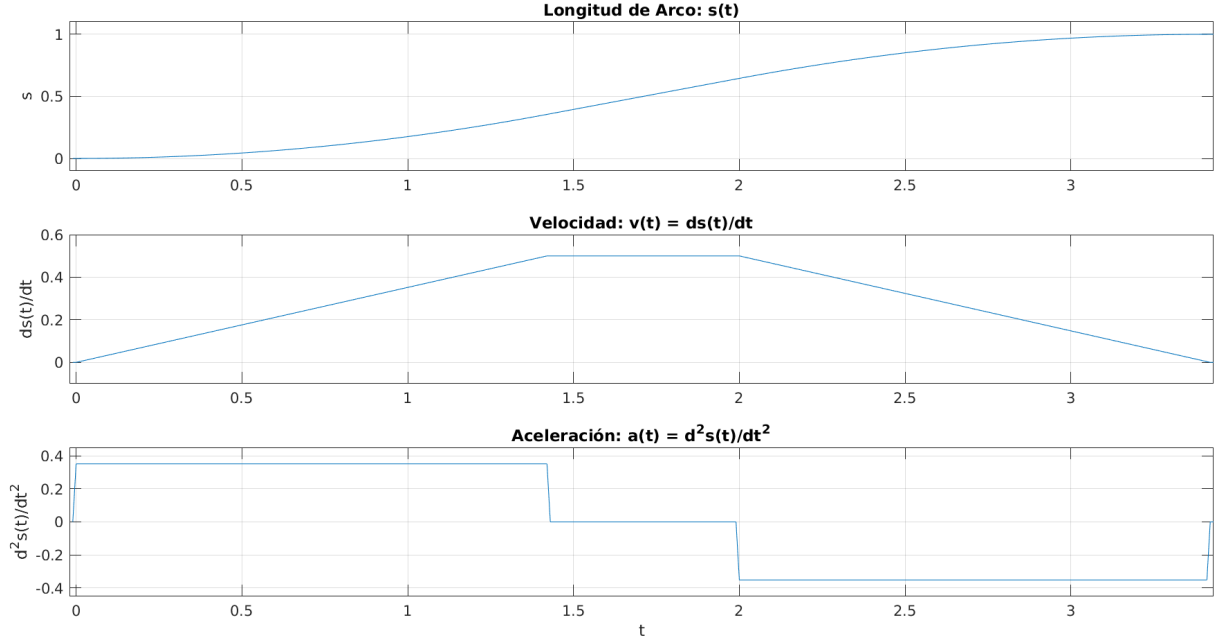


Figura 14. Ley de tiempo con perfil de velocidad trapezoidal generado con MATLAB.

los actuadores trabajen en su zona de mayor rendimiento y menor exigencia y ser ampliamente utilizados en la industria por ser muy práctica su implementación. Su principal desventaja es que, a pesar de que el jerk se ve mejorado en comparación a un perfil de velocidad escalonado, siguen existiendo picos en cada cambio de etapa, que pueden provocar, por ejemplo, vibración en el sistema. Sin embargo, se asume que el controlador comercial del robot posee las características suficientes para cumplir los perfiles planteados.

VIII-B. Movimiento punto a punto en espacio articular

Como se dijo anteriormente se usara la misma ley de tiempo para todas las articulaciones.

Para generar nuestra ley de tiempo se busco el actuador más lento y la articulación que mayor desplazamiento debería hacer, esto no es lo más eficiente pero fue simple de implementar y nos asegura que siempre todas las articulaciones estén por debajo de su velocidad y aceleración máxima. Luego se calcularon los parámetros T y τ y se obtuvo nuestra ley $s(t)$. Cabe destacar que $s(t)$ controla que tan rápido el camino va a ser seguido. Luego mediante la ecuación 38 se obtienen los puntos entre el punto objetivo y el inicial de cada articulación.

$$q_i(t) = q_i^{ini} + s(t)(q_i^{obj} - q_i^{ini}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, 7 \quad (38)$$

A continuación se muestran los resultados para una trayectoria desde la configuración articular q^{ini} :

$$q^{ini} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Hasta la configuración articular q^{obj} :

$$q^{obj} = \begin{bmatrix} -0,1090 & 1,2417 & 0,4463 & 1,9156 & \dots \\ \dots & -0,9695 & -1,8728 & 0,4876 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver en la figura 20 las velocidades y posiciones articulares están dentro de los límites y se observa claramente que la forma de nuestros perfiles son respetadas. Luego en las figuras 21 y 15 se muestra como es el movimiento en el espacio cartesiano.

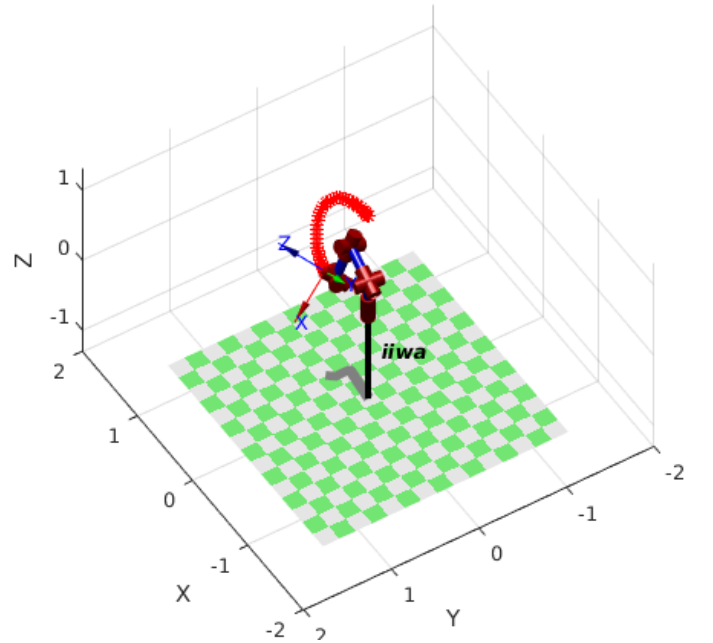


Figura 15. Movimiento del robot para una trayectoria PTP en espacio articular.

VIII-C. Movimiento en línea recta

Para un movimiento en línea recta entre nodos consecutivos, existen varias maneras de realizar dicho movimiento. Una

de ellas es definir puntos de inicio y objetivos y proponer velocidad cero en cada nodo del camino geométrico, esto hace ineficiente la tarea si el punto objetivo es solo un punto de paso y no se requiere que el robot pase obligadamente por ese punto. Para mejorar esto, se puede utilizar otra técnica que le dan continuidad al movimiento. Esto evade el problema de estar frenándose en cada nodo, entonces mediante el redondeo de las esquinas y la anticipación al cambio de nodo, se logra trayectorias más continuas.

VIII-C1. Movimiento inicio-parada: Se utilizara una ley de tiempo para una v_{max} , a_{max} y $max(\Delta p, \Delta \Phi)$ dadas en el espacio de tarea. Luego se calcularon los parámetros T y τ y se obtiene nuestra ley $s(t)$.

Luego mediante la ecuación 39 se obtienen los puntos x , y y z entre la posición objetivo y la inicial de cada articulación. Y usando la ecuación 40 se obtienen las orientaciones interpoladas en los ángulos de *roll*, *pitch* y *yaw*.

$$P_i(t) = P_i^{ini} + s(t)(P_i^{obj} - P_i^{ini}) \quad \forall i = x, y, z \quad (39)$$

$$\Phi_i(t) = \Phi_i^{ini} + s(t)(\Phi_i^{obj} - \Phi_i^{ini}) \quad \forall i = \alpha, \beta, \gamma \quad (40)$$

A continuación se muestran los resultados para una trayectoria desde $P^{ini} = [0,7373 \quad -0,3271 \quad 0,7325]$ y $\Phi^{ini} = [-0,6595 \quad 1,4584 \quad 1,2113]$ hasta $P^{obj} = [0,6 \quad -0,6 \quad 0,3]$ y $\Phi^{obj} = [0 \quad 1,5708 \quad 0]$. Como se puede ver en la figura 22 las velocidades y posiciones cartesianas están dentro de los límites y se observa claramente que la forma de nuestros perfiles son respetadas. Luego en la figura 23 se muestra el movimiento en el espacio articular y en la figura 16 se muestra como es el movimiento en el espacio cartesiano.

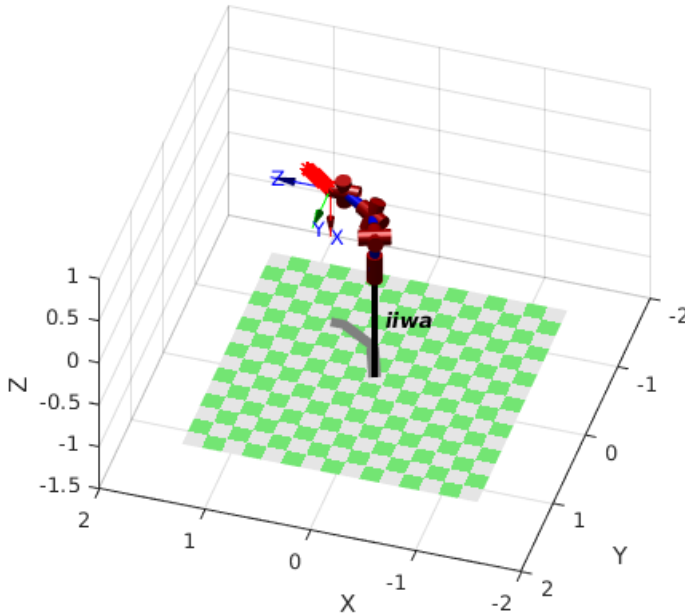


Figura 16. Movimiento del robot para una trayectoria lineal en espacio de tarea.

VIII-C2. Movimiento continuo: En este movimiento se necesitan 3 puntos, P^{ini} , P^{obj} y P^{sig} , siendo el segundo de estos el punto de paso, el cual se aproxima.

Para realizar esta trayectoria se necesita computar 2 leyes de tiempo (una para cada tramo), $s(t)$ y $s'(t)$, con diferentes parámetros T y τ .

Luego mediante la ecuación 41 se obtienen los puntos x , y y z entre la posición objetivo y la inicial de cada articulación. Teniendo expresiones similares para la orientación y para el espacio articular.

$$\begin{cases} P(t) = P^{ini} + s(t)(P^{obj} - P^{ini}) & \text{si } t < t_s \\ P(t) = P^{ini} + s(t)(P^{obj} - P^{ini}) + \dots \\ \dots s'(t - t_s)(P^{sig} - P^{obj}) & \text{si } t \geq t_s \end{cases} \quad (41)$$

Donde t_s puede ser elegido debido a diferentes criterios. En nuestro caso se eligió $t_s = T_1$ por ser una de las más simple.

A continuación se muestran los resultados para una trayectoria desde $P^{ini} = [0,6 \quad -0,6 \quad 0,1]$ y $\Phi^{ini} = \Phi^{obj} = \Phi^{sig} = [0 \quad 1,5708 \quad 0]$, pasando por $P^{obj} = [0,6 \quad -0,6 \quad 0,3]$ hasta $P^{sig} = [0,6 \quad 0 \quad 0,2]$.

Como se puede ver en la figura 24 las velocidades, posiciones y aceleraciones cartesianas están dentro de los límites y se observa un cambio en los perfiles de velocidades y aceleraciones gracias a la técnica de continuidad. Luego en la figura 25 se muestra el movimiento en el espacio articular el cual pasa por una singularidad en $t = 3,25s$ aproximadamente. En nuestro caso es aceptable ya que nuestras velocidades son acotadas. En la figura 17 se muestra como es el movimiento en el espacio cartesiano, en esta se puede observar el redondeo de la esquina de la trayectoria.

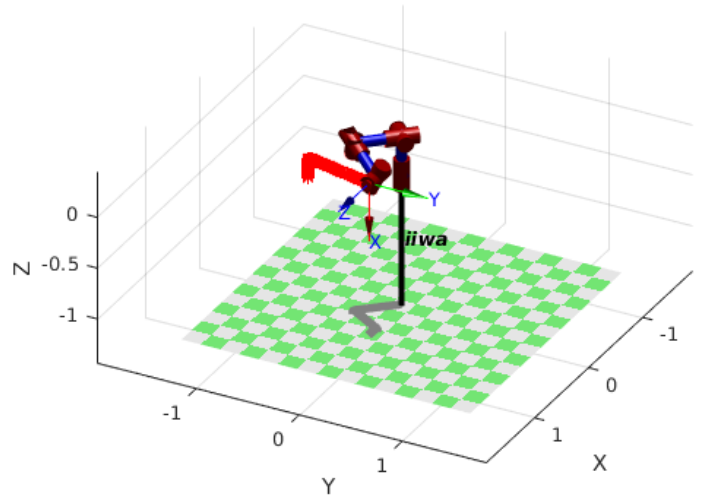


Figura 17. Movimiento del robot para una trayectoria lineal continua en espacio de tarea.

VIII-D. Movimiento en trayecto circular

Para generar una trayectoria circular se utiliza una matriz de transformación homogénea 0T_C para definir el centro del círculo y se utiliza la representación en coordenadas polares

referidos al sistema del centro parametrizadas por la longitud de arco ψ . Además se selecciona un punto P^{ini} para comenzar la trayectoria.

$$P'(\psi) = \begin{bmatrix} \rho \cos \frac{\psi}{\rho} \\ \rho \sin \frac{\psi}{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde $\rho = \sqrt{\sum (P_i^{ini} - C_i)^2}$ $\forall i = x, y, z$, siendo C_i igual a la traslación de 0T_C .

Ahora para un sistema de referencia distinto el camino se convierte en $P(\psi) = C + R_C P'(\psi)$, donde 0R_C es igual a la rotación de 0T_C . Así para interpolar nuestra trayectoria queda solamente definir la evolución de $\psi(t)$ en base a nuestra ley de tiempo.

$$\psi(t) = \psi^{ini} + s(t)(\psi^{obj} - \psi^{ini})$$

A continuación se muestra los resultados para una trayectoria circular. Como se ve en las imágenes 26, 27 y 18, esta es la trayectoria más comprometida y que exige más al robot.

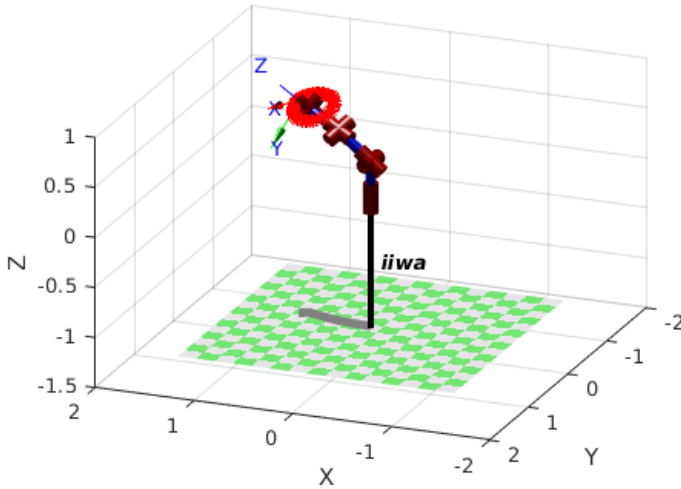


Figura 18. Movimiento del robot para una trayectoria circular en espacio de tarea.

VIII-E. Trayectoria para tareas colaborativas entre robots

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en la generación de trayectorias para nuestros 2 robots (ver figura 19). Cabe destacar que estas trayectorias se generaron utilizando una combinación de los movimientos anteriores.

En las figuras 28 y 31 se muestran las velocidades y posiciones articulares para el robot 1 y 2. Como se puede observar, las velocidades articulares calculadas por el jacobiano presentan algunas pequeñas incongruencias con las posiciones de las articulaciones, esto es debido a que se utilizó la pseudo inversa y esta distribuye las velocidades en todas las articulaciones. Por esto se muestran las velocidades articulares obtenidas por derivación de primer orden, aunque esta no es muy precisa y se ve ruido, con esta podemos verificar que las velocidades máximas no son sobrepasadas. Así, con ayuda

de las 2 gráficas podríamos decir que nuestra trayectoria es realizable por nuestros robots.

En las figuras 29 y 32 se pueden ver los valores que adoptan las posiciones, velocidades y aceleraciones cartesianas. En la figura 32, se puede distinguir la curva característica del círculo en el espacio realizado por el 2do robot.

En las figuras 30 y 33 se ven representadas la manipulabilidad del robot 1 y 2 respectivamente. En la primera se ve una parte constante, esta es debido a que se muestra la manipulabilidad de traslación y no de orientación y en este tramo el efector del robot 1 solo se encuentra girando.

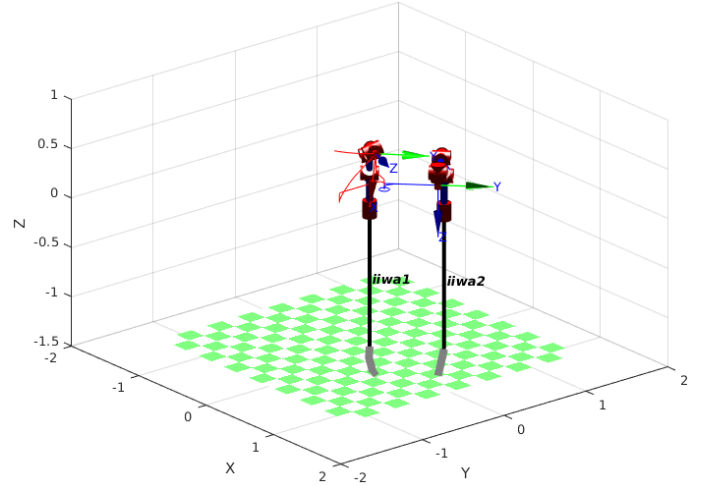


Figura 19. Trayectorias del robot 1 (rojo) y robot 2 (azul)

IX. SUGERENCIA DE SENSORES Y ACTUADORES ADECUADOS A LA ESTRUCTURA Y A LA APLICACIÓN

El análisis de sensores y actuadores no es el objetivo principal de este trabajo. Esto es así porque el robot seleccionado para el estudio es un robot comercial, por lo tanto la libertad de selección de actuadores, por ejemplo, es nula.

Los robots de la gama *LBR iiwa* poseen sensores de torque en todas sus articulaciones, como también los correspondientes *encoders* que nos permiten conocer su posición en todo momento, finales de carrera, etc.

Dicho esto, los sensores que se sugieren son específicos a la tarea a ejecutar. Estos podrían ser cámaras industriales ubicadas estratégicamente en el espacio donde se lleva a cabo el proceso, con el fin de poder implementar técnicas de visión artificial para poder identificar obstáculos y los objetos y herramientas con los que se interacciona; más otra cámara en el extremo operativo del robot, que permitiría obtener una vista detallada del entorno del extremo en las tareas que requieran un control más fino de posición y orientación.

X. CONCLUSIÓN

En este documento se presentó un análisis cinemático del *LBR iiwa* en el cual se realizó el modelado mediante la convención de *Denavit-Hartenberg*. Se planteó la cinemática directa e inversa. En cuanto a esto último, a pesar de la redundancia del robot, se propuso un método para la resolución de la

cinemática inversa mediante el uso de los métodos geométrico y algebraico de forma tal de encontrar una serie de ecuaciones cerradas con la que obtenemos, para un q_3 arbitrario, las 8 soluciones clásicas. Se necesita especificar q_3 porque de no hacerlo nos encontraríamos en una situación con infinitas soluciones. Es valioso remarcar que la función desarrollada otorga gran flexibilidad a la hora de encontrar soluciones, esto es debido a que con este método se pueden encontrar *todas* las infinitas soluciones variando adecuadamente q_3 además de poder elegir entre las 8 configuraciones para cada q_3 , cosa que es imposible lograr usando un método como *ikine*. La desventaja es la necesidad de encontrar otra ecuación o criterio con el cual evaluar q_3 .

Así es que una vez encontrada la expresión de la cinemática inversa se propuso un criterio para poder seleccionar q_3 entre las infinitas posibilidades. Este método se basa en obtener la máxima manipulabilidad en la dirección del movimiento sumado a la restricción de que la configuración solución sea del tipo codo-arriba. Esta propuesta se pudo validar mediante la simulación de las distintas trayectorias generadas.

Se obtuvieron resultados concretos en el estudio analítico de singularidades en el robot LBR iiwa y diferentes a los publicados por Zaplana, Claret y Basanez [11]. La estructura cinemática analizada en dicha publicación es equivalente a la estudiada en este trabajo, por lo que se esperarían resultados equivalentes. Esta diferencia se estima que es provocada por descripciones de Denavit-Hartenberg desiguales. Esta suposición no pudo ser verificada, sin embargo sería interesante ya que implica que determinadas singularidades dependerán del modelo del robot planteado y no la estructura en sí.

Es importante destacar que las singularidades estudiadas en este trabajo son singularidades matemáticas, y no aquellas generadas por limitaciones físicas como los límites articulares del robot.

Por el otro lado, se concluye en general que el conocimiento de esta cantidad finita de configuraciones y direcciones singulares puede ser de gran ayuda en una implementación más eficiente tanto del cálculo de cinemática inversa como el posterior proceso de generación de trayectorias. Además, es de gran utilidad traducir lo que en primera instancia se obtuvo por observación (generando distintas configuraciones articulares y estudiando los valores de condición, rango y manipulabilidad) en lo mismo pero en un lenguaje matemático donde los resultados son completamente generalizados.

En cuanto a la generación de trayectorias se logró generar una ley de tiempo trapezoidal en velocidad e interpolar 3 tipos de movimientos básicos en el espacio (línea continua, línea entre 2 puntos y círculo) y en el espacio articular. También se generaron trayectorias que respetan velocidades y aceleraciones máximas. Finalmente, se obtuvieron trayectorias realizables para 2 robots que colaboran para completar una tarea específica, logrando evadir puntos singulares.

XI. TRABAJO A FUTURO

En la sección V-E se describe un criterio para poder determinar un q_3 para la resolución de la cinemática inversa. Si bien el criterio descrito es válido, queda a futuro la exploración

de otros métodos o incluso la combinación de varios. Además al utilizar la cinemática inversa para el cálculo de trayectorias se realiza una búsqueda exhaustiva del mejor q_3 dentro de una región cercana al q_3 de la configuración anterior. Se realizó así por cuestiones de tiempo pero se podrían plantear algoritmos complejos de búsqueda y/o optimización con técnicas de la inteligencia artificial.

Por limitaciones de tiempo no fue posible terminar de vincular los resultados obtenidos en el estudio analítico de singularidades con la generación y planificación de trayectorias.

En cuanto a las trayectorias queda mejorar el método de interpolación para la orientación, pasando de la interpolación de rpy a la interpolación en quaternions. Esto mejoraría las trayectorias, sobre todo en las cuales hay que interpolar la orientación además de la posición. También se podría mejorar la ley de tiempo para disminuir el jerk, un ejemplo es el perfil s-smooth, el cual obtiene una aceleración suave redondeando las esquinas del trapecio de velocidad, generando una disminución del jerk.

REFERENCIAS

- [1] Antonio Barrientos y col. *Fundamentos de Robótica*. McGraw Hill, 2007. ISBN: 9788448156367.
- [2] E. Sahin Conkur y Rob Buckingham. «Clarifying the definition of redundancy as used in robotics». En: *Robotica* 15 (1997), págs. 583-586.
- [3] P. I. Corke. *Robotics, Vision & Control*. Springer, 2017. ISBN: 9783319544137.
- [4] KUKA Roboter GmbH. *LBR iiwa*. URL: <https://www.kuka.com/es-es/productos-servicios/sistemas-de-robot/robot-industrial/lbr-iiwa>.
- [5] Han Sol Kang Hyun Joong Yoon Seong Youb Chung y Myun Joong Hwang. «Trapezoidal Motion Profile to Suppress Residual Vibration of Flexible Object Moved by Robot». En: *MDPI Electronics* 1 (2019), págs. 1-17.
- [6] Donald Lee Pieper. «The Kinematics of Manipulators under computer control». 1968.
- [7] Silvia Raichman y Eduardo Totter. *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. 2016. ISBN: 9789875751255.
- [8] Bruno Siciliano y col. *Robotics: Modeling, Planning and Control*. Springer, 2010. ISBN: 9781846286414.
- [9] Mark W. Spong, Seth Hutchinson y M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Inc.
- [10] Fernando Torres y col. *Robots y Sistemas Sensoriales*. Pearson Educación, S. A., 2002. ISBN: 8420535745.
- [11] Isiah Zaplana, Josep Arnau Claret y Luis Basanez. «Análisis Cinemático de Robots Manipuladores Redundantes: Aplicación a los Robot Kuka LWR 4+ y ABB Yumi». En: *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 15 (2018), págs. 192-202.

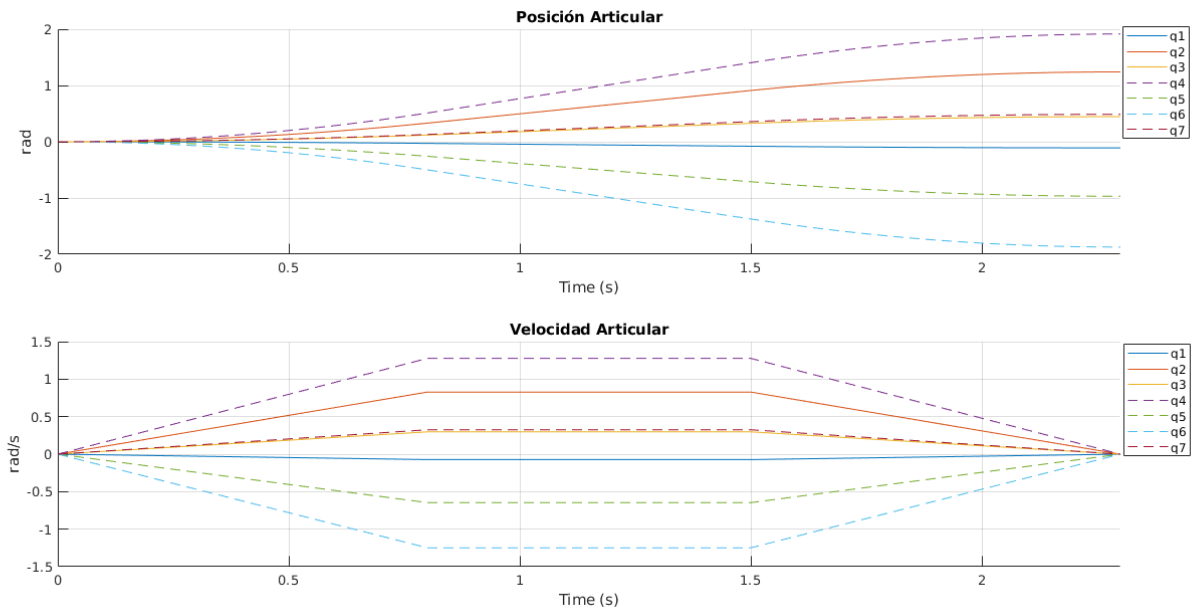


Figura 20. Posición y velocidad articular para una trayectoria PTP en espacio articular.

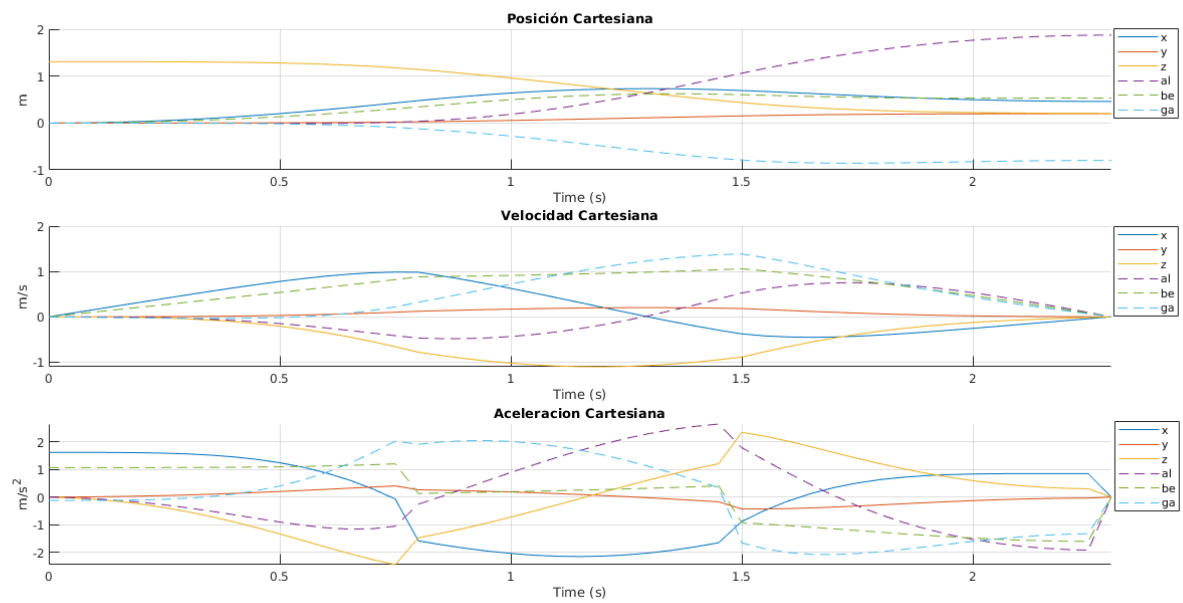


Figura 21. Posición, velocidad y aceleración cartesiana para una trayectoria PTP en espacio articular.

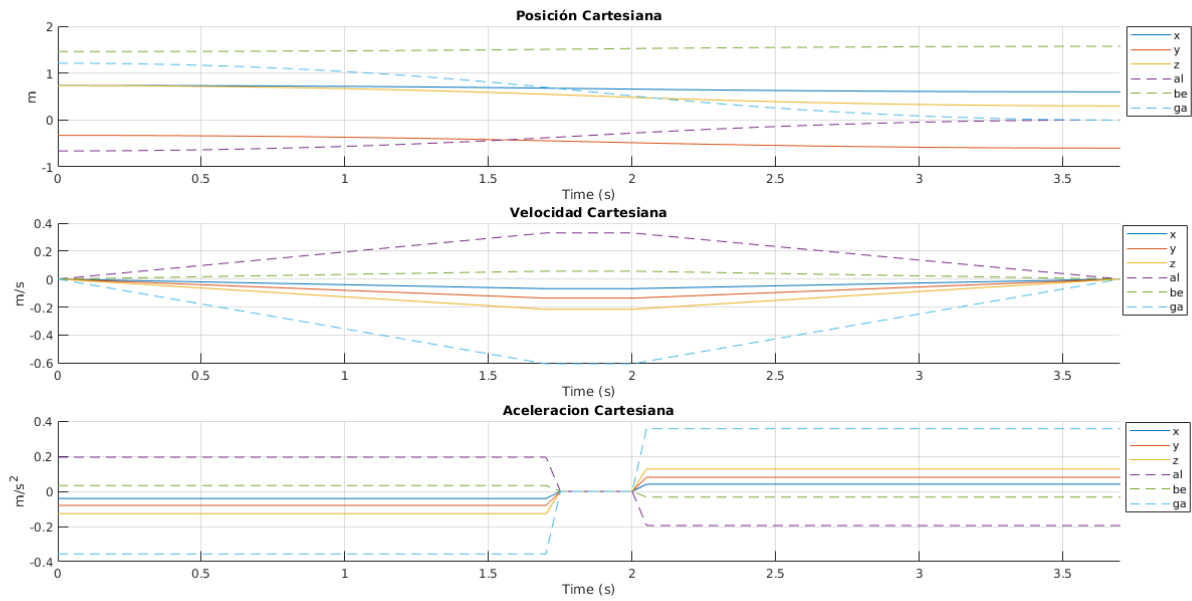


Figura 22. Posición, velocidad y aceleración cartesiana para una trayectoria lineal en espacio de tarea.

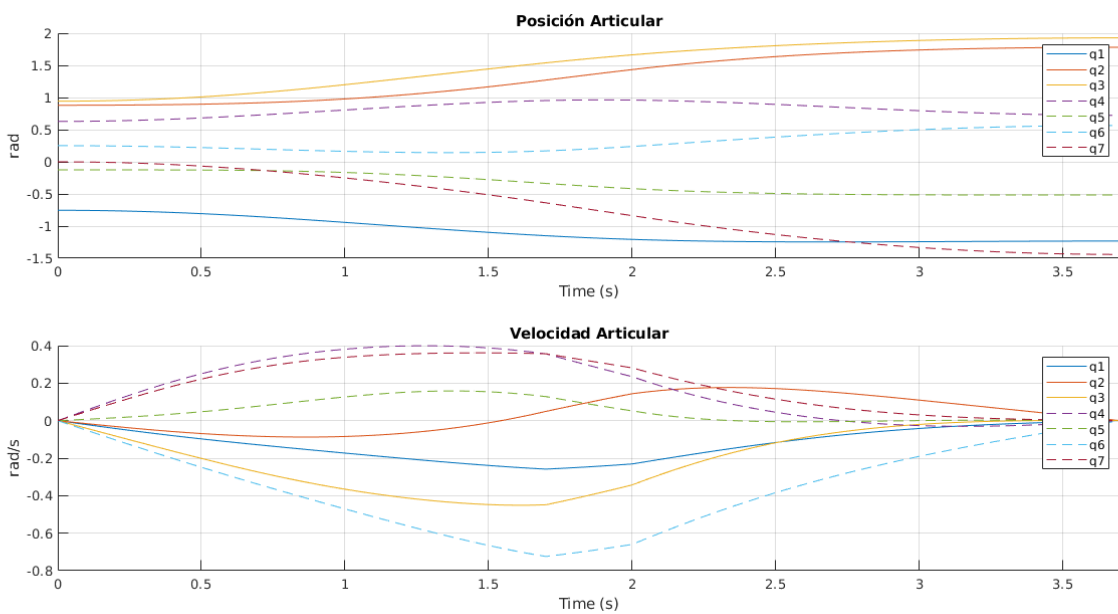


Figura 23. Posición y velocidad articular para una trayectoria lineal en espacio de tarea.

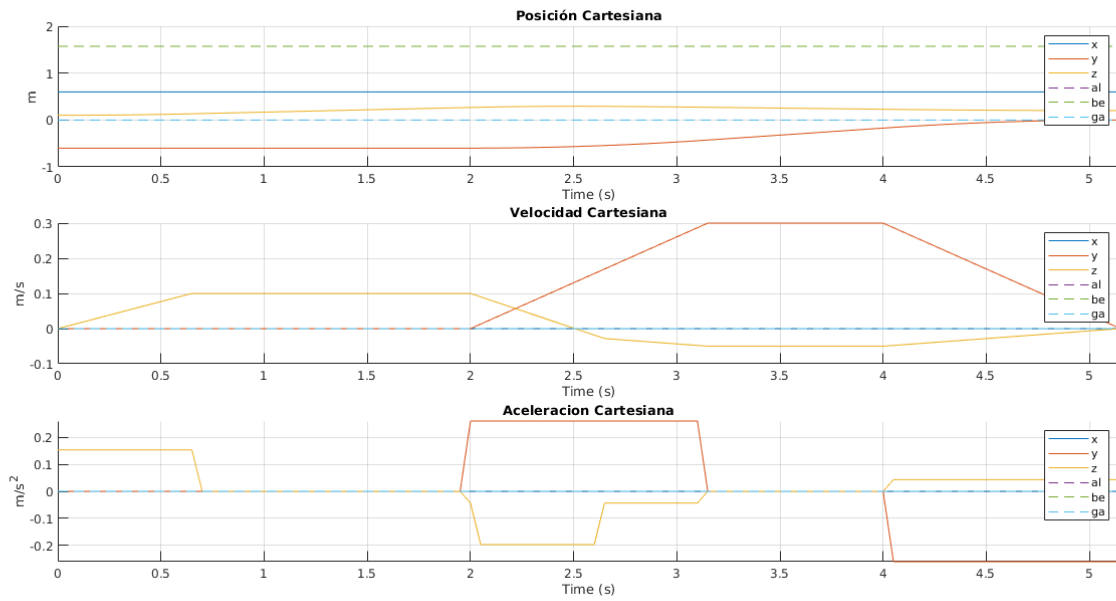


Figura 24. Posición, velocidad y aceleración cartesiana para una trayectoria lineal continua en espacio de tarea.

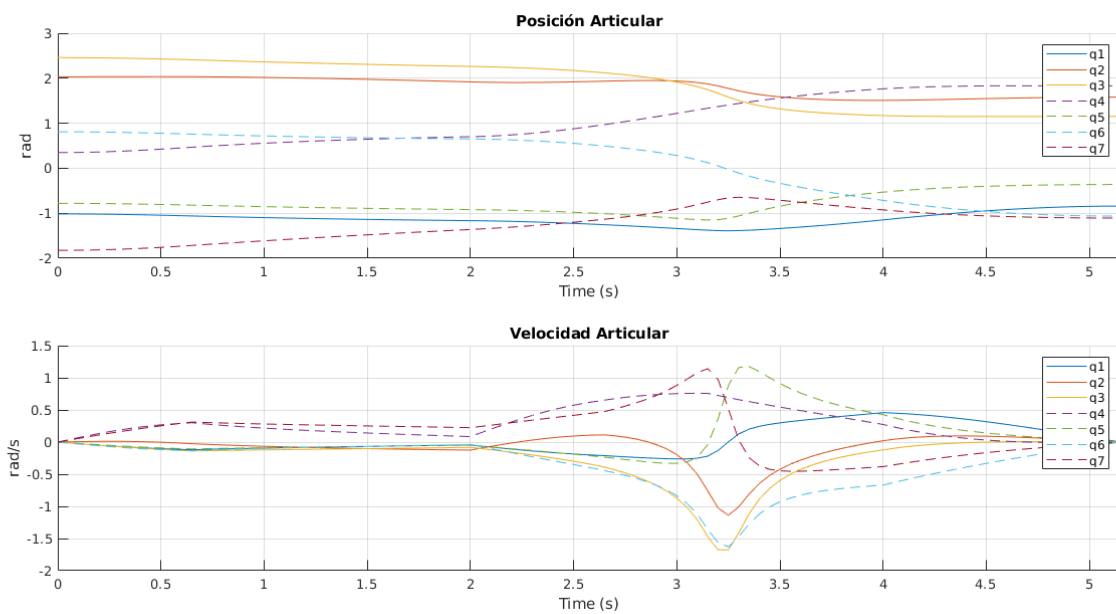


Figura 25. Posición y velocidad articular para una trayectoria lineal continua en espacio de tarea.

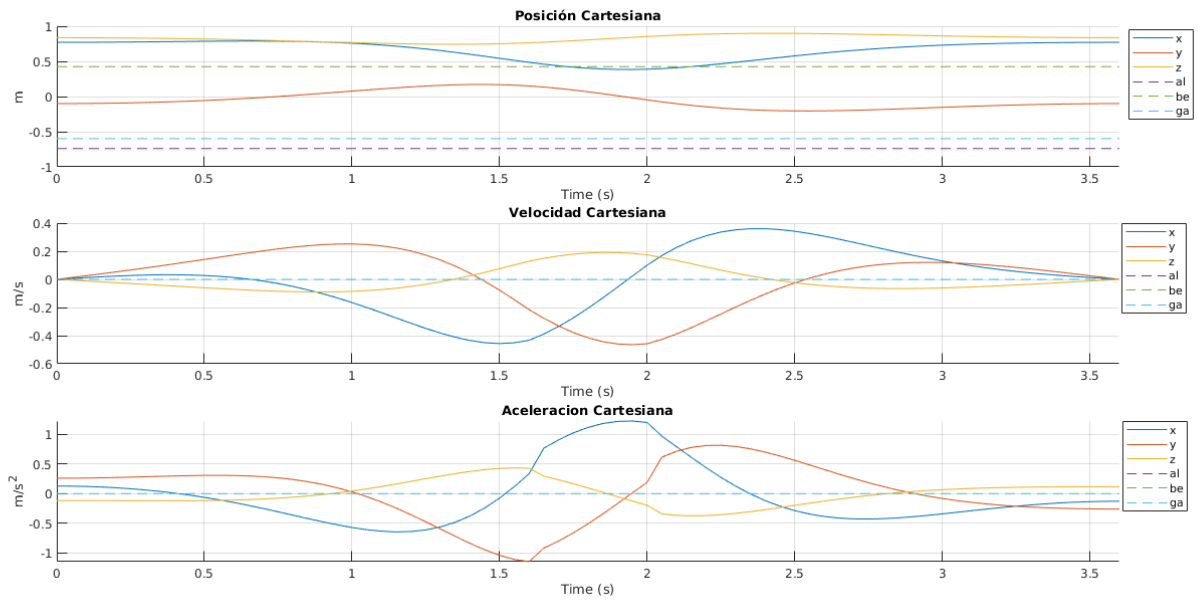


Figura 26. Posición, velocidad y aceleración cartesiana para una trayectoria circular en espacio de tarea.

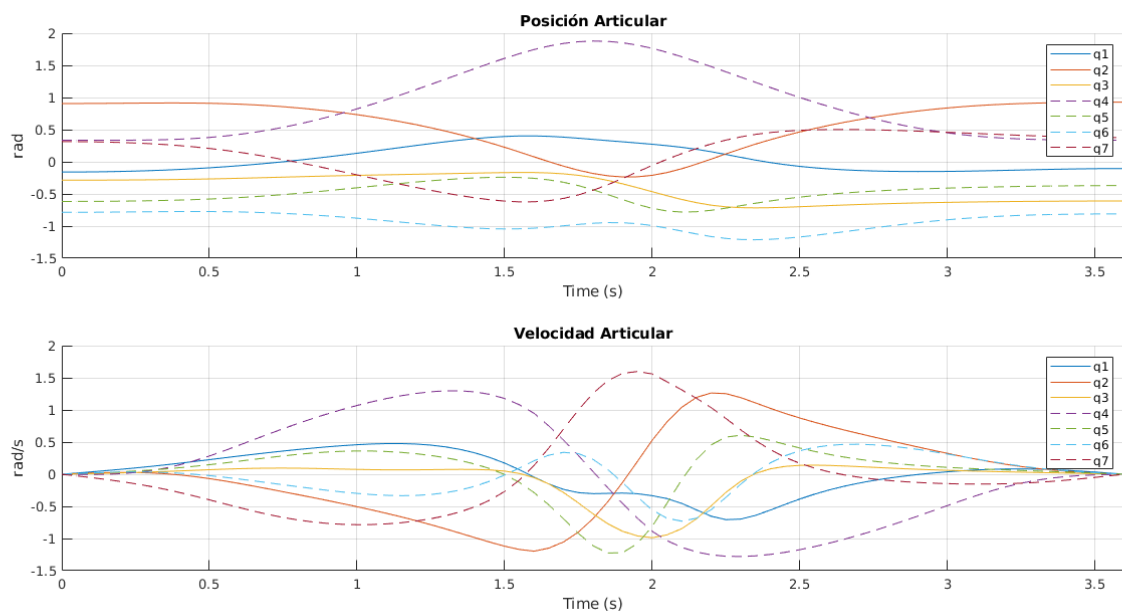


Figura 27. Posición y velocidad articular para una trayectoria circular en espacio de tarea.

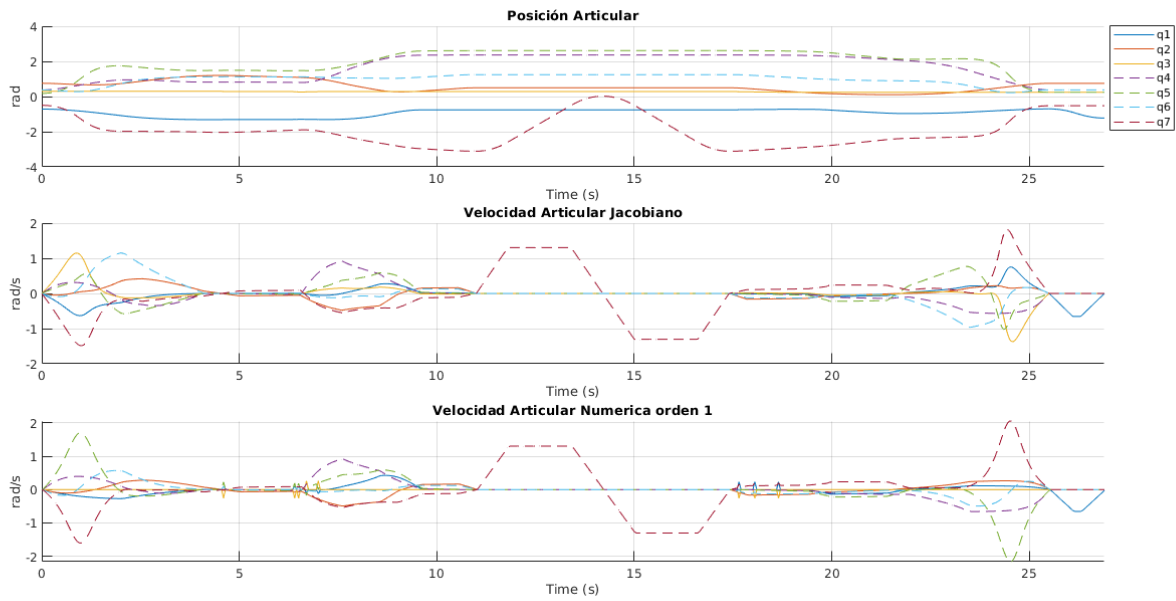


Figura 28. Posición y velocidad articular robot 1

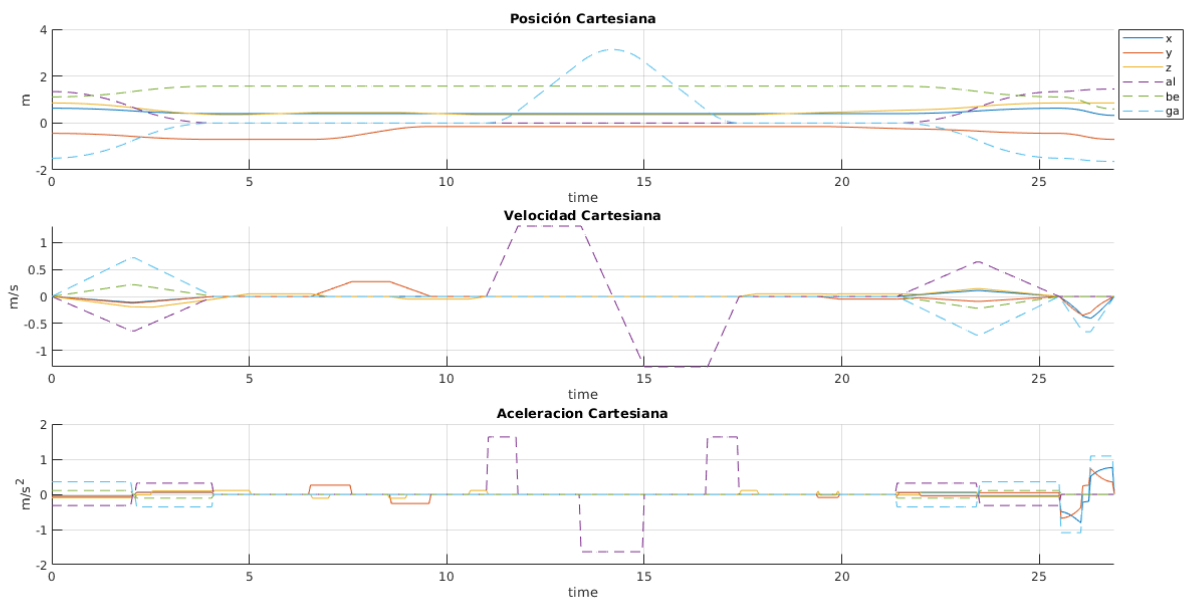


Figura 29. Posición, velocidad y aceleración cartesiana robot 1

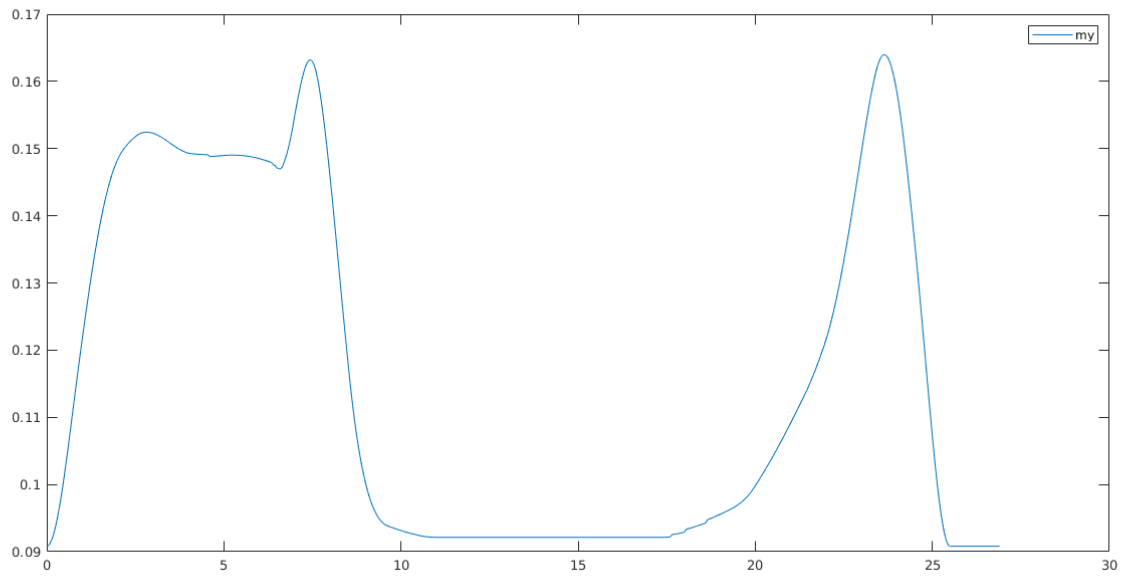


Figura 30. Manipulabilidad para traslación robot 1

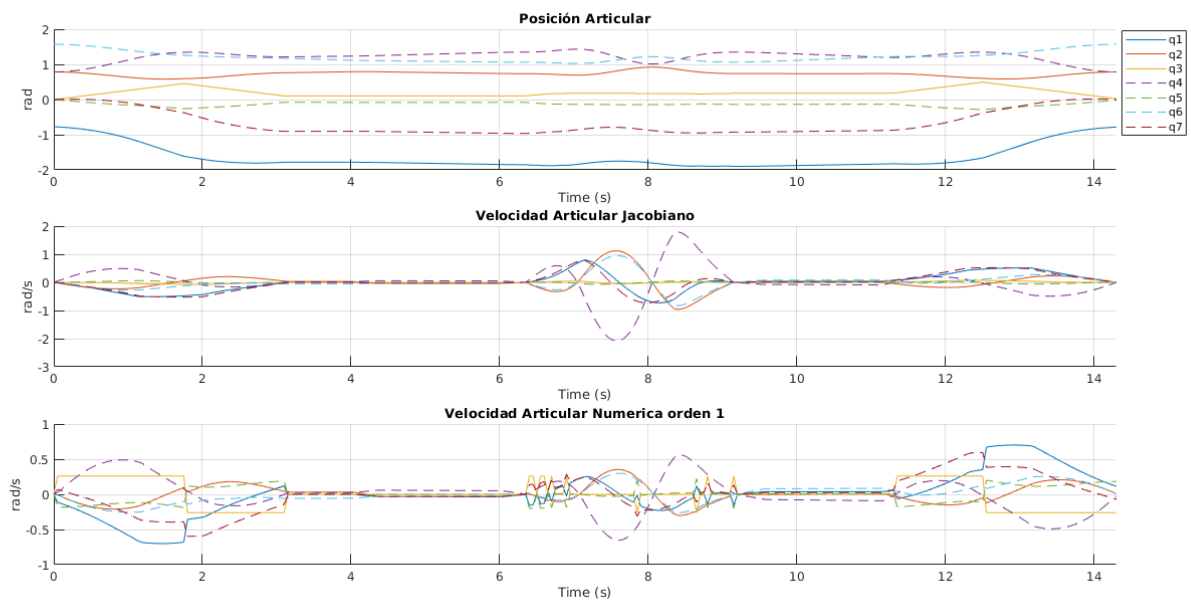


Figura 31. Posición y velocidad articular robot 2

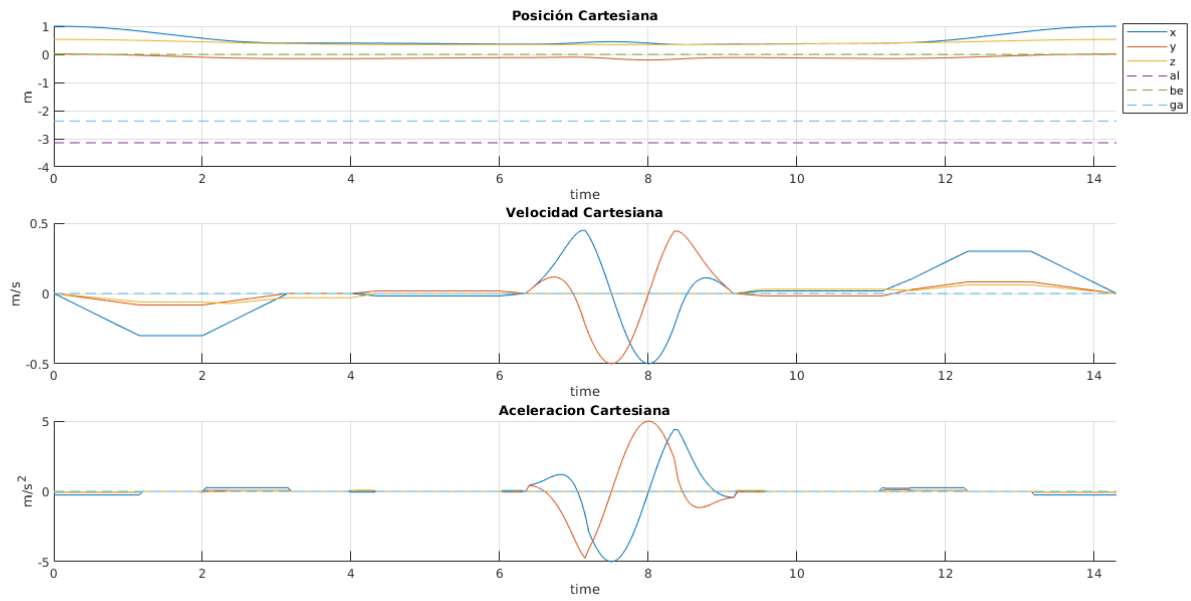


Figura 32. Posición, velocidad y aceleración cartesiana robot 2

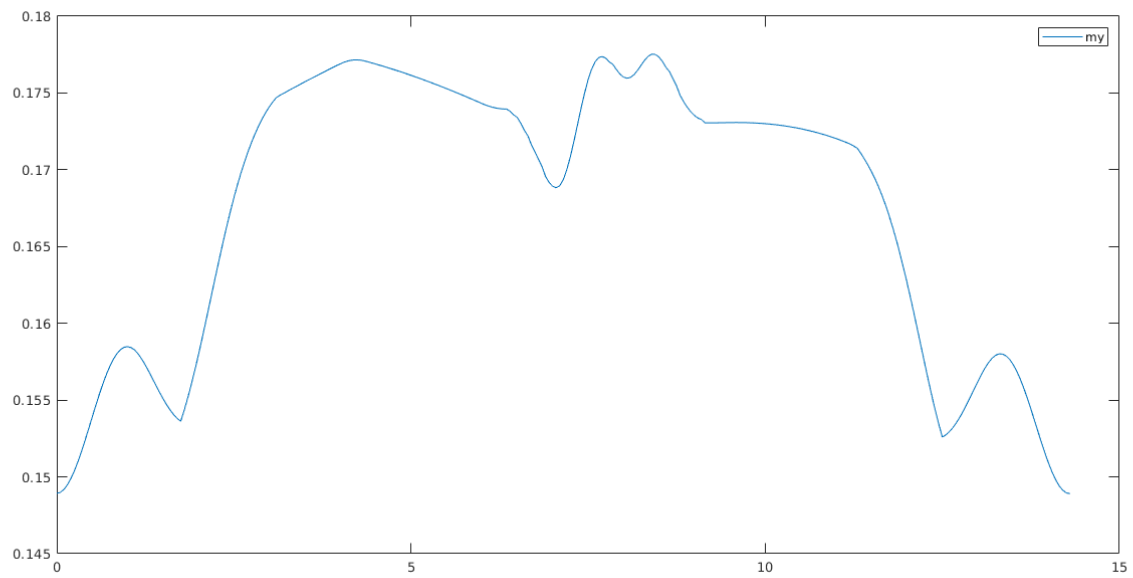


Figura 33. Manipulabilidad para traslación robot 2