

Controlador LQG para estabilización de vehículo auto-equilibrado de dos ruedas

Gonzalo Gabriel Fernández*, Rodrigo Gonzalez (Asesor)*†

* Ingeniería Mecatrónica, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina
Email: fernandez.gfg@gmail.com

† GridTICs, Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza, Argentina
Email: rodrazalez@frm.utn.edu.ar

Resumen—En el presente trabajo se expone el modelo matemático de un vehículo de dos ruedas auto-equilibrado y el diseño de un controlador lineal cuadrático gaussiano LQG, para la estabilización y seguimiento de consignas de traslación. Además, se provee un análisis de desempeño del controlador ante ángulos iniciales distintos de 0 y fuerzas de empuje sobre el vehículo.

Index Terms—control óptimo, regulador lineal cuadrático, filtro de Kalman, control lineal cuadrático gaussiano, péndulo invertido

I. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se han producido grandes avances dentro de la robótica móvil, dando a lugar a robots competentes que son utilizados en diferentes industrias. En el desarrollo de robots móviles terrestres se persigue dos objetivos: la capacidad de desplazarse de forma rápida y eficiente, y la capacidad de sortear los obstáculos presentes en su entorno.

En la búsqueda por obtener un robot terrestre que se destaque tanto en agilidad como versatilidad, surgen proyectos como el robot Ascento [1] cuya configuración combina dos patas articuladas con ruedas en sus extremos. De esta forma, las ruedas le permiten desplazarse a gran velocidad mientras las patas le dan libertad para sortear irregularidades del terreno o incluso despegarse del suelo saltando.

Una de los principales características de dicha configuración es el hecho de poseer solo dos ruedas y el centro de masa del robot por encima de su eje de giro, lo que lo convierte en una estructura inherentemente inestable.

En el presente trabajo de modela matemáticamente una versión simplificada de dicho robot donde no se considera el movimiento de las patas, como se muestra en la Fig. 1. Luego se propone un controlador óptimo gaussiano LQG para la estabilización de vehículo auto-equilibrado de dos ruedas. El controlador consiste en una combinación de un regulador lineal cuadrático LQR, también utilizado en el proyecto Ascento para la estabilización del robot, y un observador filtro de Kalman. Por último, se exponen los resultados obtenidos en la simulación del vehículo.

II. OBJETIVO DEL CONTROLADOR LQG

Primeramente, se definen los requisitos que debe cumplir el controlador para discernir si su funcionamiento es correcto

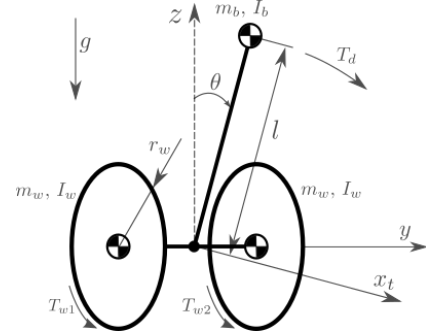


Figura 1. Esquema simplificado del sistema físico.

o no. Para ello se establece como objetivo de control que el vehículo, como mínimo, debe seguir una consigna de posición sinusoidal con amplitud de medio metro y período de 15 segundos, manteniéndose estable en todo el trayecto. La tolerancia admitida en el tiempo es de 1 segundo, y en traslación se admite un error de $\pm 10\text{cm}$.

III. FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DEL VEHÍCULO

III-A. Descripción del modelo físico simplificado

Se desea obtener el modelo matemático del sistema a partir de relaciones físicas [2]. Para ello, se realizan una serie de consideraciones. La primera es la suposición de que las ruedas del vehículo no deslizan con el suelo, por lo tanto,

$$x_t = r_w \phi \quad \dot{x}_t = r_w \dot{\phi} \quad (1)$$

Donde x_t es la coordenada de traslación del sistema respecto a un marco de referencia fijo en el entorno, ϕ es el ángulo de giro de las rueda y r_w el radio de las mismas. Se considera que ambas ruedas se accionan de la misma manera y giran de forma sincronizada un mismo ángulo a la misma velocidad angular. Las ruedas tienen una determinada masa m_w y momento de inercia I_w respecto a su eje de giro, y la salida de la caja reductora de los motores aplica un torque total T_w equivalente a la suma del torque de cada motor sobre su correspondiente rueda acoplada.

Se modela físicamente el cuerpo del vehículo como un péndulo invertido con masa puntual m_b ubicada en el centro de masa del chasis, y momento de inercia I_b respecto al eje de las ruedas (Fig. 1). Las coordenadas de dicho punto quedan descriptas por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{cases} x_{cm} = l \sin \theta + r_w \phi \\ z_{cm} = l \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

Donde l es la longitud del segmento que une el eje de las ruedas y el centro de masa, y θ el ángulo formado por dicho segmento con un plano vertical, perpendicular al suelo, que atraviesa el eje de las ruedas.

Cualquier perturbación que exista sobre el chasis del vehículo se modela como un torque T_d aplicado sobre el punto de giro del péndulo, es decir, el eje de las ruedas.

En la Tabla I se resume los parámetros junto con los respectivos valores utilizados en el modelo del vehículo, correspondientes a un prototipo diseñado en software CAD (valores de simulación, no reales).

Parámetro	Valor	Descripción
r_w	32mm	Radio de rueda
m_w	0,064Kg	Masa de rueda
I_w	$2,787 \times 10^{-5} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inercia de rueda respecto a su eje de giro
b_w	$0,01 \text{Nm} \cdot \text{s} / \text{rad}$	Amortiguación de contacto rueda-suelo
m_b	0,5Kg	Masa de chasis
I_b	$0,0029 \text{Kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inercia del chasis respecto al eje de las ruedas
l	0,06m	Longitud del segmento que une el eje de las ruedas y el centro de masa del chasis

Tabla I
PARÁMETROS DEL VEHÍCULO MODELADO.

III-B. Modelo dinámico, ecuaciones de movimiento

Se obtienen las ecuaciones de movimiento a partir de un enfoque energético siguiendo la formulación lagrangiana. Para ello, es necesario obtener las expresiones de energía cinética y potencial del sistema en estudio.

La energía cinética de la rueda, 1 o 2 ya que se consideran idénticas, es,

$$E_{w(1,2)} = \frac{1}{2} m_w \dot{x}_t^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{I_w}{r_w^2} \right) \dot{x}_t^2 \quad (3)$$

La energía cinética del péndulo está dada por,

$$E_b = \frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

Donde la velocidad lineal del centro de masa del péndulo v_b es igual a $v_b = \sqrt{\dot{x}_{cm}^2 + \dot{z}_{cm}^2}$.

La energía potencial de las ruedas V_w es nula, ya que se considera que su centro se mantiene a una altura z constante igual a su radio, por lo que $V_w = 0$.

La energía potencial del péndulo se define de la siguiente forma,

$$V_b = m_b g l \cos \theta \quad (5)$$

Donde g es la aceleración en z debido a la gravedad.

En el modelo simplificado del sistema carro-péndulo solo se considera como energía disipada la producida por la fricción b_w entre las ruedas y el suelo,

$$D = \frac{1}{2} b_w \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{b_w}{r_w^2} \dot{x}_t^2 \quad (6)$$

El Lagrangiano es definido como la diferencia entre la energía cinética y potencial $L = E - V$. Se obtienen las ecuaciones dinámicas que describen el movimiento del sistema a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, de la forma,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

Donde q_i son las coordenadas generalizadas del sistema (Ec. 8): x_t es la coordenada de traslación y θ es el ángulo de inclinación respecto a la vertical,

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t \\ \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde Q_i son las fuerzas generalizadas (Ec. 9): los torques aplicados a cada rueda T_{w1} y T_{w2} y las perturbaciones sobre el chasis del vehículo T_d .

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_w / r_w \\ -T_w + T_d \end{bmatrix} \quad (9)$$

Las ecuaciones dinámicas de movimiento obtenidas para el sistema son,

$$\begin{aligned} m_{eq} \ddot{x}_t + m_b l \cos \theta \ddot{\theta} - m_b l \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{2b_w}{r_w^2} \dot{x}_t &= \frac{1}{r_w} T_w \\ m_b l \cos \theta \ddot{x}_t + I_{eq} \ddot{\theta} - m_b g l \sin \theta &= -T_w + T_d \end{aligned} \quad (10)$$

Donde,

$$m_{eq} = m_b + 2m_w + \frac{2I_w}{r_w^2} \quad I_{eq} = I_b + m_b l^2$$

Ambas ecuaciones no lineales. Definiendo un vector de entrada $\vec{u} = [T_w \quad T_d]^T$ se pueden expresar matricialmente de la forma,

$${}^{NL} \mathbb{E}(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}} + \overline{h(\vec{q}, \dot{\vec{q}})} = \mathbb{H}_T \cdot \vec{u} \quad (11)$$

III-C. Modelo no lineal en espacio de estados

Se llega a una representación en espacio de estados del modelo, al definir el vector de estado como,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{bmatrix} = [x_t \quad \theta \quad \dot{x}_t \quad \dot{\theta}]^T \quad (12)$$

Se puede observar que la dimensión del vector de estado, y por lo tanto el orden del modelo, es de $n = 4$.

De la Ec. 10, se puede obtener la representación en espacio de estado del modelo no lineal en su forma matricial,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{\vec{q}} \\ -{}^{NL} \mathbb{E}(\vec{q})^{-1} \cdot \overline{h(\vec{q}, \dot{\vec{q}})} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^{NL} \mathbb{E}(\vec{q})^{-1} \cdot \mathbb{H}_T \end{bmatrix} \cdot \vec{u} \\ \vec{x}_0 &= [x_{t0} \quad \theta_0 \quad \dot{x}_{t0} \quad \dot{\theta}_0]^T \end{aligned} \quad (13)$$

Donde \vec{x}_0 son las condiciones iniciales del sistema.

III-D. Modelo simplificado lineal invariante en el tiempo LTI

Para el diseño del controlador es necesario operar con un modelo lineal del sistema. Por lo tanto, se linealiza el modelo no lineal y se elige como punto de operación la configuración de equilibrio inestable del péndulo donde $\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$. La variable de estado x_t es libre ya que el sistema puede estabilizarse en cualquier coordenada de traslación.

Para linealizar en el punto de operación $\Theta_0 = 0$, se realizan las siguientes aproximaciones para ángulos pequeños,

$$\cos \Theta_0 \approx 1 \quad \sin \Theta_0 \approx \Theta_0 \quad \dot{\Theta}_0 \approx 0 \quad (14)$$

Al linealizar las ecuaciones 10, se obtienen las siguientes ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} m_{eq}\ddot{x}_t + m_b l \ddot{\theta} + \frac{2b_w}{r_w^2} \dot{x}_t &= \frac{1}{r_w} T_w \\ m_b l \ddot{x}_t + I_{eq} \ddot{\theta} - m_b g l \theta &= -T_w + T_d \end{aligned} \quad (15)$$

La Ec. 15 se puede expresar en forma matricial como,

$$\mathbb{E} \cdot \ddot{\vec{q}} + \mathbb{F} \cdot \dot{\vec{q}} + \mathbb{G} \cdot \vec{q} = \mathbb{H}_T \cdot \vec{u} \quad (16)$$

Entonces, con el mismo vector de estado definido en la Ec. 12, se puede obtener una representación del modelo LTI en espacio de estados de la forma,

$$\dot{\vec{x}} = \mathbb{A} \cdot \vec{x} + \mathbb{B} \cdot \vec{u} \quad (17)$$

Donde,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{E}^{-1}\mathbb{G} & -\mathbb{E}^{-1}\mathbb{F} \end{bmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{E}^{-1}\mathbb{H}_T \end{bmatrix} \quad (18)$$

Siendo $\mathbb{O}_{2 \times 2}$ una matriz de ceros de 2×2 y $\mathbb{I}_{2 \times 2}$ una matriz identidad de 2×2 .

III-E. Análisis de estabilidad a lazo abierto del modelo LTI

Los polos del modelo LTI pueden obtenerse calculando los autovalores de la matriz \mathbb{A} de la Ec. 17. El sistema tiene 4 polos, uno en el origen, dos reales negativos en $-40,3815$ y $-7,5366$, y uno real positivo en $8,1626$. Tener un polo real positivo convierte al sistema a lazo abierto en un sistema inestable [3].

IV. MODELO MATEMÁTICO DE SENSORES Y ACTUADORES

IV-A. Modelo de encoder incremental

El vehículo posee un encoder incremental en cada uno de los actuadores que permite conocer la posición angular del eje del motor. El encoder genera dos ondas cuadradas desfasadas 90° que envían 12 pulsos por cada revolución del motor. Esos 12 pulsos por revolución se pueden multiplicar por 4 si además de los flancos ascendentes de ambas ondas cuadradas se considera los flancos descendentes. Por lo tanto, la resolución del encoder Δ en radianes estará dada por,

$$\Delta = \frac{2\pi}{12 \times 4} \quad (19)$$

Se modela matemáticamente la acción del encoder como un proceso de cuantificación de la señal ϕ_m . La diferencia con una cuantificación convencional que se debe salvar es que no se utiliza una operación de redondeo, sino una función

de techo (menor valor entero igual o mayor que el valor real) o suelo (mayor valor entero igual o menor que el valor real)[4] según sea el sentido de giro del eje. La función de cuantificación Q será de la forma,

$$Q(\phi_m) = \begin{cases} \Delta \cdot \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq \frac{\phi_m}{\Delta}\} & \text{si } \dot{\phi}_m < 0 \\ \phi_m & \text{si } \dot{\phi}_m = 0 \\ \Delta \cdot \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq \frac{\phi_m}{\Delta}\} & \text{si } \dot{\phi}_m > 0 \end{cases} \quad (20)$$

En la Fig. 2 ejemplifica el comportamiento que presenta la cuantificación planteada para una lectura del encoder de 12 pulsos por revolución.

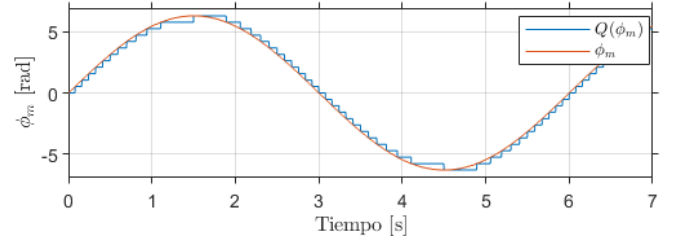


Figura 2. Ejemplo de cuantificación descrita para emular comportamiento de encoder en cuadratura.

La ventaja de modelar el encoder como un proceso de cuantificación es que da la posibilidad de aplicar la teoría sobre el error que el proceso añade a la señal. Asumiendo que la probabilidad del error de cuantificación tiene distribución uniforme[5], se puede obtener que la varianza del error es:

$$\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (21)$$

Dado que para emular el comportamiento del encoder no se redondea el valor sino que se aplica función techo o suelo según sea el sentido de rotación del eje, la media de dicha probabilidad no se encuentra en 0 como en una cuantificación convencional, sino que respeta la siguiente ecuación,

$$\mu_Q = \begin{cases} +\frac{\Delta}{2} & \text{si } \dot{\phi}_m < 0 \\ -\frac{\Delta}{2} & \text{si } \dot{\phi}_m > 0 \end{cases} \quad (22)$$

IV-B. Modelo de giróscopo

La unidad de medición inercial de la que dispone el vehículo contiene un giróscopo que permite medir la velocidad angular de inclinación $\dot{\theta}$. Para su análisis se tomó como referencia la IMU MPU6050 de *TDK InvenSense*. En el diseño mecánico se ubica al sensor de tal forma que el eje y de la IMU sea paralelo al eje de las ruedas, y se encuentre en el mismo plano vertical desde el que se mide θ , por lo que la medición de $\dot{\theta}$ es directa. Los ejes x y z del giróscopo no se utilizan en este trabajo.

Como todo sensor, el giróscopo agrega ruido a la señal de interés. El ruido se modela como ruido blanco gaussiano, con media $\mu_{gyro} = 0$, misma intensidad a diferentes frecuencias, y por lo tanto, densidad espectral de potencia constante. Las especificaciones del sensor proveen la información de dicho ruido en densidad espectral de amplitud, y es igual

a $0,005^\circ/s/\sqrt{Hz}$ a $10Hz$. Se puede obtener en términos de densidad espectral de potencia elevándola al cuadrado[6]. Para obtener el valor de varianza del giróscopo, se realiza la siguiente conversión,

$$\sigma_{gyro}^2 = \left(0,005 \frac{^\circ/s}{\sqrt{Hz}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 \cdot 10Hz \quad (23)$$

Por lo tanto la varianza es aproximadamente igual a $7,61 \times 10^{-8} (rad/s)^2$.

IV-C. Modelo de acelerómetro como sensor de θ

La IMU MPU6050 además del giróscopo tiene incorporada un acelerómetro. Éste permite medir aceleraciones lineales en sus tres ejes considerando la aceleración de la gravedad. Dado que la gravedad es una aceleración que siempre actúa de forma perpendicular al suelo, puede descomponerse en los tres ejes del acelerómetro y así, mediante identidades trigonométricas, conocer la orientación del sensor. Si se la utiliza de este modo, hay que tener en cuenta que cualquier aceleración provocada en el sensor que no sea por causa de la gravedad será considerada ruido ya que desviará la medición.

Entonces, para estimar el ángulo de inclinación θ del vehículo se utiliza únicamente el eje x del sensor mediante la relación trigonométrica $\theta = \arcsin a_x/g$, donde a_x es la aceleración medida en dicho eje y g la aceleración de la gravedad (si la medición esta normalizada a g no hace falta realizar la división).

Al igual que para el giróscopo, el ruido se modela como ruido blanco gaussiano con media $\mu_{accel} = 0$. De las especificaciones del sensor puede obtenerse la densidad espectral de amplitud, que es igual a $400\mu g/\sqrt{Hz}$ a $10Hz$. Para obtener la varianza se realiza la siguiente conversión,

$$\sigma_{accel}^2 = \left(400 \times 10^{-6} \frac{g}{\sqrt{Hz}} \right)^2 \cdot 10Hz \quad (24)$$

Si el ángulo que sea desea medir es lo suficientemente pequeño, se puede realizar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ y la varianza de la aceleración en g es aproximadamente igual a la varianza de θ . En este caso $\sigma_\theta^2 \approx 1,6 \times 10^{-6} rad$.

IV-D. Modelo de motores de corriente continua de imanes permanentes

En el trabajo se toma como referencia para los actuadores del vehículo un motor comercial de corriente continua de 6-24V de alimentación, con caja reductora de relación 1 : 34 y torque máximo con carga de $0,85Kg \cdot cm$.

V. DISEÑO DE CONTROLADOR POR REALIMENTACIÓN COMPLETA DE ESTADO

V-A. Análisis de controlabilidad del sistema

El estudio de controlabilidad del sistema permite establecer la posibilidad de ubicar los autovalores o polos del modelo LTI realimentado[3], utilizando una ley de control como la de la siguiente ecuación,

$$u = -\mathbb{K} \cdot \vec{x} \quad (25)$$

Se construye la matriz de controlabilidad \mathcal{C} para el sistema en estudio con $n = 4$ como,

$$\mathcal{C} = [\mathbb{B}_1 \quad \mathbb{A}\mathbb{B}_1 \quad \mathbb{A}^2\mathbb{B}_1 \quad \mathbb{A}^3\mathbb{B}_1] \quad (26)$$

Donde \mathbb{B}_1 es la matriz de entrada del sistema para la variable manipulada $u = T_w$. El rango de \mathcal{C} es igual a 4, por lo que se verifica que el sistema es controlable.

V-B. Diseño de regulador lineal cuadrático LQR

La expresión del sistema a lazo cerrado se obtiene reemplazando la ley de control de la Ec. 25 en el modelo LTI de la Ec. 17,

$$\dot{\vec{x}} = (\mathbb{A} - \mathbb{B}_1\mathbb{K}) \cdot \vec{x} \quad (27)$$

Donde \mathbb{K} es una matriz con n columnas, según el orden del modelo, y contiene las constantes del controlador. Dichas constantes se seleccionan de tal forma que los autovalores de la matriz de dinámica a lazo cerrado $(\mathbb{A} - \mathbb{B}_1\mathbb{K})$ se encuentren en la ubicación deseada[3].

Para encontrar una ubicación óptima de los autovalores del sistema realimentado, se utiliza un regulador lineal cuadrático, LQR por sus siglas en inglés. El controlador LQR se basa en minimizar una función de costo que penaliza en mayor o menor medida la desviación del estado del sistema respecto al objetivo y el esfuerzo admitido en la entrada o acción de control[7].

El ajuste del controlador LQR se realiza eligiendo el peso de las matrices de costo \mathbb{Q}_x (matriz de costo de estado) y \mathbb{Q}_u (matriz de costo de acción de control). Existen diferentes métodos para obtener valores iniciales con los que iterar, en este trabajo se utilizó una ponderación diagonal siguiendo la regla de Bryson[7].

La ponderación diagonal consiste en plantear matrices de costo diagonales, y elegir los elementos de la diagonal en base a cuánto contribuye al costo total cada variable de estado y cada entrada correspondiente. La regla de Bryson permite establecer valores máximos para el error de las variables de estado y valores máximos para el esfuerzo de las entradas. La ponderación se elige de tal forma que $q_i = \alpha_i^2/x_{i,max}^2$ y $\rho_i = \beta_i^2/u_{i,max}^2$, donde $x_{i,max}$ representa el error máximo admitido para la variable de estado i y $u_{i,max}$ el esfuerzo máximo para la entrada i . α_i y β_i se seleccionan de tal forma que,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \quad \sum_{i=1}^p \beta_i^2 = 1 \quad (28)$$

Se les asigna a los α_i un valor tal que todos sean iguales, es decir $\alpha_i = \sqrt{0,25}$. Para la variable de traslación x_t se asigna un error máximo de $0,01m$ y el error de velocidad de traslación máximo en $0,0151m/s$. El ángulo de inclinación máximo admisible planteado es de 20° y el error de velocidad angular de inclinación máximo de $1rpm$, ambos relativamente grandes para permitir una corrección de las variables de traslación. Si dichas restricciones son muy agresivas el ángulo de inclinación siempre será muy cercano a 0 y se impedirá el movimiento del vehículo.

Para la matriz de costo de acción de control \mathbb{Q}_u el parámetro β_1 es igual a 1. Para el esfuerzo de entrada se itera hasta obtener un controlador que cumple los requerimientos impuestos. El valor resultante es $u_{1,max} = 0,0153$ y, por lo tanto, $\rho_1 = 4,2719 \times 10^3$. Las matrices de costo resultantes son,

$$\mathbb{Q}_x = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0994 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0228 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Q}_u = [4,2719 \times 10^3]$$

La solución del problema LQR se obtiene por medio de herramientas provistas por MATLAB. La matriz de constantes del controlador resultante es,

$$\mathbb{K} = [-0,7650 \quad -0,6428 \quad -0,3304 \quad -0,1098] \quad (29)$$

Los polos con las nuevas constantes quedan ubicados en $-75,8387$, $-0,9645$, $-3,9077$ y $-10,6379$.

VI-C. Evaluación de desempeño de controlador LQR

Una vez obtenido el controlador deseado se lo evalúa bajo los requerimientos planteados en la sección II. De no cumplirse, se itera el proceso de ajuste del controlador.

Con el controlador LQR de la Ec. 29 tanto el modelo LTI como el modelo no lineal cumplen con la consigna dentro de las tolerancias impuestas, como se muestra en la Fig. 3.

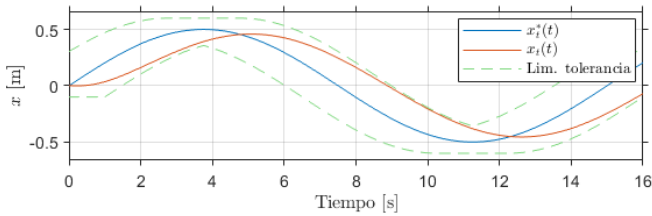


Figura 3. Comprobación de seguimiento de consigna del modelo no lineal con controlador LQR.

En la Fig. 4 se puede observar en verde la consigna de torque T_w^* para el seguimiento de consigna del modelo no lineal con controlador LQR (Fig. 3) y en rojo el torque máximo disponible.

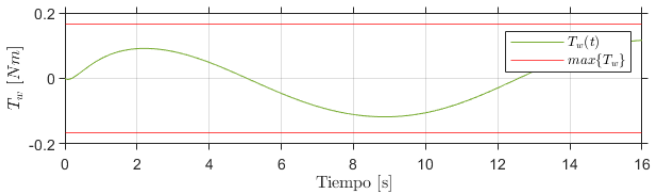


Figura 4. Consigna de torque T_w^* para el seguimiento de consigna del modelo no lineal con controlador LQR.

VI. DISEÑO DE OBSERVADOR ÓPTIMO

VI-A. Análisis de observabilidad del sistema

Dado que solo se tiene acceso a una cantidad limitada de las variables de estado por medio de los sensores que dispone el vehículo, se debe realizar una estimación de las variables de estado inaccesibles a partir de las variables medidas y la acción de control mediante un estimador o observador a lazo cerrado[3]. Las variables medidas se representan como,

$$\vec{y} = \mathbb{C} \cdot \vec{x} \quad (30)$$

Donde \vec{y} es un vector de q componentes (menor a n) y \mathbb{C} es la matriz de variables medidas.

Como se describió en la sección IV, en el vehículo se mide indirectamente x_t a través de los encoder incrementales en los motores que miden ϕ_m , se mide la velocidad angular de inclinación $\dot{\theta}$ con un giróscopo y también el ángulo de inclinación θ con un acelerómetro calculando las relaciones trigonométricas correspondientes. Considerando una relación de reducción de los actuadores de 1 : 34, la matriz \mathbb{C} es de la forma,

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \frac{12 \times 4 \times 34}{r_w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Se estudia la observabilidad del sistema para establecer la posibilidad de realizar una estimación completa del estado \vec{x} del sistema a partir de la medición de las variables \vec{y} .

Se construye la matriz de observabilidad \mathcal{O} como,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ \mathbb{C}\mathbb{A} \\ \mathbb{C}\mathbb{A}^2 \\ \mathbb{C}\mathbb{A}^3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

La matriz de observabilidad tiene rango igual a 4 si y solo si se mide por lo menos la variable de estado x_t . Por lo tanto, con los sensores propuestos el modelo es observable.

VI-B. Diseño de filtro de Kalman

El observador es en sí un sistema dinámico lineal cuyas entradas son las variables de estado medidas \vec{y} del sistema a observar, y la acción de control \vec{u} con la que se manipula dicho sistema[3]. La ecuación que describe el comportamiento del observador es,

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbb{A} - \mathbb{L}\mathbb{C}) \cdot \hat{x} + [\mathbb{B}_1 \quad \mathbb{L}] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Donde \hat{x} es la estimación de estado, \vec{y} es la estimación de variables medidas según la ecuación $\vec{y} = \mathbb{C} \cdot \hat{x}$, y donde \mathbb{L} es la matriz de constantes que permite ubicar los autovalores del observador.

Se desea que la asignación de los polos del observador sea de forma óptima, por lo que se diseña un filtro de Kalman que es un observador completo de estado óptimo por minimizar la varianza del error de estimación[8].

Definiendo a las perturbaciones del sistema como v y al ruido de medición como w , ruidos con distribución gaussiana

y media cero[8], las nuevas ecuaciones algebraicas estocásticas del modelo LTI son,

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \mathbb{A} \cdot \vec{x} + \mathbb{B} \cdot \vec{u} + v \\ \vec{y} = \mathbb{C} \cdot \vec{x} + w \end{cases} \quad (34)$$

El observador se ajusta mediante el uso de las matrices R_v asociada a la varianza del ruido de proceso y R_w asociada a la varianza del ruido de medición.

La matriz R_w se obtiene con los resultados de la sección IV, mientras que el valor de R_v se obtiene iterando hasta obtener el observador deseado,

$$R_v = 0,1 \quad R_w = \begin{bmatrix} \sigma_Q^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{gyro}^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

La matriz de ganancias \mathbb{L} , solución del problema de observador óptimo, se obtiene utilizando MATLAB,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 0 & -0,0001 & -0,0440 \\ -0,0004 & 0,2148 & 1,0004 \\ 0,2649 & 0,1811 & -4,6997 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Así, los polos del observador óptimo quedan ubicados en $-0,0021$, $-0,2147$, $-29,0842$ y $-1,0691 \times 10^6$.

VII. ANÁLISIS DE DESEMPEÑO DE CONTROLADOR LQG

Se evalúa el cumplimiento de los requisitos planteados en la sección II del controlador LQR con la estimación completa de estado que provee el filtro de Kalman planteado, es decir, el controlador LQG.

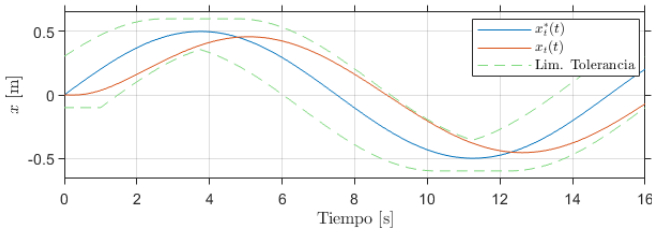


Figura 5. Comprobación de seguimiento de consigna del modelo no lineal con controlador LQR y filtro de Kalman

En la Fig. 5 se puede observar que para una consigna de posición sinusoidal de 1m de amplitud y 15s de período el vehículo respeta las tolerancias impuestas, en la Fig. 6 se puede observar en verde la consigna de torque T_w^* asociada y en rojo el torque máximo disponible.

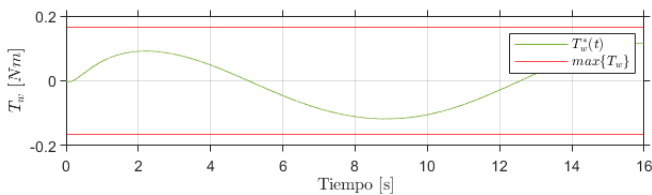


Figura 6. Consigna de torque T_w^* para el seguimiento de consigna del modelo no lineal con controlador LQG.

Además de comprobar el correcto seguimiento de consignas del sistema con el controlador lineal cuadrático gaussiano, también se analiza su desempeño ante la presencia de perturbaciones. Para esto se realizan dos evaluaciones:

- Estabilización del vehículo ante una ángulo de inclinación inicial θ_0 distinto de cero.
- Estabilización del vehículo antes fuerzas impulsivas de distinta magnitud aplicadas en el centro de masa del vehículo en una dirección perpendicular a la del péndulo y el eje de las ruedas (equivalente a empujar el vehículo).

El máximo ángulo al que el controlador puede estabilizar el vehículo es aproximadamente 29° y la máxima fuerza de empuje estabilizable es de 3,7N aproximadamente.

VIII. CONCLUSIONES

Una de las grandes ventajas que provee el diseño de controlador óptimo planteado, es que una vez obtenidos por separado el regulador cuadrático lineal LQR y el observador cuadrático lineal (o filtro de Kalman), al combinarlos siguen siendo óptimos [8].

Se implementó un controlador LQG que al interactuar con el modelo LTI del vehículo se desempeña adecuadamente cumpliendo los requerimientos impuestos. Sucede lo mismo al colocar el controlador en el modelo no lineal del vehículo.

Existe un retraso inicial del sistema al seguimiento de consigna por no ser un sistema de fase mínima. Una posible solución es la implementación de una lazo directo de control o *feedforward*.

Se desarrolló exitosamente un análisis sistemático para la implementación de un controlador LQG en este tipo de vehículos.

REFERENCIAS

- [1] V. Klemm, A. Morra, and C. Salzmann, "Ascento: A two-wheeled jumping robot," 2019.
- [2] R. Gonzalez, "Modelado de sistemas físicos." Apuntes de la cátedra de Control y Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.
- [3] Z. Ogata, *Modern Control Engineering*. Pearson Education, fourth ed., 2002.
- [4] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1988.
- [5] L. Tan and J. Jiang, *Digital Signal Processing*. Katey Birtcher, third ed., 2019.
- [6] G. Heinzel, A. Rüdiger, and R. Schilling, "Spectrum and spectral density estimation by the discrete fourier transform (dft), including a comprehensive list of window functions and some new flat-top windows," *Max Plank Inst*, vol. 12, 01 2002.
- [7] A. E. Bryson and Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. Taylor & Francis, 1975.
- [8] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Dover Publications, Inc., 2007.