

Trabajo - Presentación #1

Jorge Gonzales - 20112506H
MT227A - Control Moderno y Óptimo
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

27 de noviembre de 2020

Péndulo Furuta

Introducción

El siguiente trabajo busca equilibrar el péndulo que gira libremente en el plano vertical, haciendo uso de un brazo que rota en el plano horizontal, esta configuración también es conocida como péndulo Furuta.

El péndulo Furuta, o péndulo invertido rotacional, consta de un brazo accionado que rota en el plano horizontal y un péndulo unido al brazo que puede rotar libremente en el plano vertical, como se puede ver en la figura . [2]

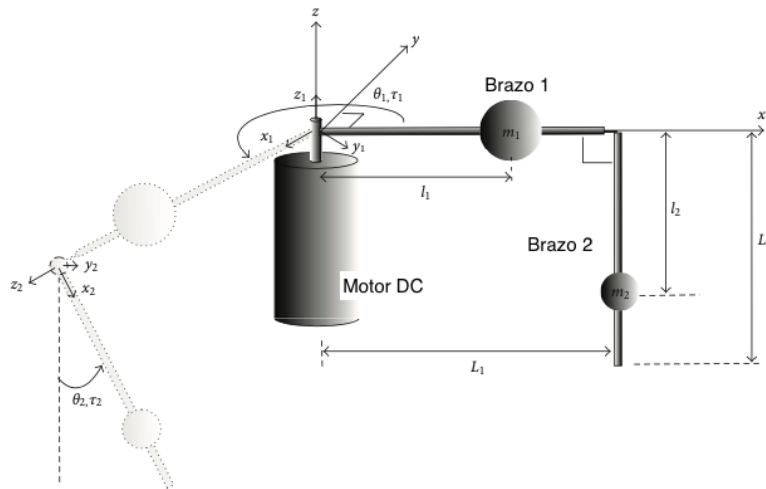


Figura 1: Cazzolato, B. (2011). Péndulo Furuta. [Vista esquemática]. On the Dynamics of the Furuta Pendulum, Figure 1

A fin de lograr esto el trabajo se dividirá en varias partes, la primera buscará modelar el péndulo, se obtendrán las ecuaciones en espacio de estados, se linealizará el modelo y se analizará la estabilidad.

Importancia

Este trabajo forma parte del curso de Control Moderno y Óptimo, y busca afianzar y aplicar la teoría, técnicas y conocimientos dados en clase y laboratorios.

En esta primera parte se busca consolidar los conocimientos en:

- Modelado de sistemas dinámicos
- Representación en espacio de estados
- Linealización de sistemas
- Análisis de estabilidad

Y el uso de software de modelado y simulación, Matlab y Simulink.

Objetivos

- Encontrar el modelo en espacio de estados del péndulo
- Linealización del modelo
- Análisis de estabilidad
- Uso de Matlab y Simulink

Modelado

Para encontrar el modelo del sistema haremos uso de las ecuaciones de Lagrange:

$$L = T - V \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial q_i} = Q_i \quad (2)$$

Donde:

- q_i : Coordinada generalizada i
- T : Energía cinética
- V : Energía potencial
- Q_i : Fuerzas generalizadas

Descripción del modelo:

En esta sección se describirá la dinámica completa del sistema, esta dinámica es descrita bajo ciertas asunciones, tal y como en el trabajo de Cazzolato, B. [1].

Según la figura 1, tenemos: Un motor DC que aplica un torque τ_1 al brazo 1 cuya dirección positiva es en el sentido contrario a las agujas del reloj, la articulación entre el brazo 1 y el brazo 2 puede rotar libremente y cada articulación esta viscosamente amortiguada. El

sistema de coordenadas elegido es tal como se muestra en la figura, donde θ_1 es positivo en el sentido contrario del reloj visto desde arriba, θ_2 es positivo en el sentido contrario del reloj visto desde el frente y cuya posición 0 se da cuando el péndulo (brazo 2) esta en la posición de equilibrio es decir hacia abajo.

Parámetros:

- L_1 : Longitud del brazo 1,
- L_2 : Longitud del brazo 2,
- m_1 : Masa del brazo 1,
- m_2 : Masa del brazo 2,
- l_1 : Ubicación al centro de masa del brazo 1,
- l_2 : Ubicación al centro de masa del brazo 2,
- b_1 : Coeficiente de amortiguamiento entre los cojinetes del motor DC y el brazo 1,
- b_2 : Coeficiente de amortiguamiento de la articulación entre el brazo 1 y el brazo 2,
- J_1 : Tensor de inercia del brazo 1,
- J_2 : Tensor de inercia del brazo 2,
- τ_1 : Torque ejercido por el motor al brazo 1,
- τ_2 : Torque de perturbación aplicado sobre el brazo 2,

Los ejes de coordenadas del brazo 1 y el brazo 2 son ejes principales por lo que el tensor de inercia es diagonal:

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix}, \\ J_2 &= \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3}$$

Además se asumen lo siguiente (Cazzolato, 2011): [1]:

- El eje del motor y el brazo 1 son rígidos y están unidos rígidamente.
- El brazo 2 es rígido,
- Los ejes de coordenadas del brazo 1 y el brazo 2 son ejes principales por lo que el tensor de inercia es diagonal.
- El momento de inercia del rotor del motor es despreciable. Sin embargo, se puede añadir fácilmente a momento de inercia del brazo 1.

- Solo se considera amortiguamiento viscoso. Cualquier otra forma de amortiguamiento es despreciada; sin embargo, se puede añadir fácilmente a la ecuación diferencial final.

De acuerdo y siguiendo el proceso de Cazzolato, B. [1], tenemos:

1. *Matrices de rotación:* Para obtener hacer un cambio de coordenadas entre las coordenadas del motor (x, y, z) a las coordenadas del brazo 1 (x_1, y_1, z_1) hacemos una rotación en el eje z , quedando la primera rotación:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para obtener la matriz de rotación del brazo 1 al brazo 2, primero aplicamos un traslación de los ejes del brazo 1 al punto de los ejes del brazo 2, seguido de una rotación en el eje z , quedando:

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2. *Velocidades:* El brazo 1 solo gira en el eje z , entonces su velocidad angular está dada por:

$$\omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1]^T \quad (6)$$

Si tenemos que el motor DC está estático, es evidente que la velocidad lineal de la junta entre el motor y el brazo uno es también nula.

$$v_1 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (7)$$

La velocidad lineal del centro de masa (ubicado a una distancia l_1) del brazo 1 está dada por:

$$v_{1c} = v_1 + \omega_1 \times [l_1 \ 0 \ 0]^T = [0 \ \dot{\theta}_1 l_1 \ 0]^T \quad (8)$$

La velocidad angular del brazo 2, está dada por la velocidad angular del brazo 1 en el sistema de coordenadas 2 más la velocidad angular del brazo 2 en el marco 2:

$$\omega_2 = R_2 \omega_1 + [0 \ 0 \ \dot{\theta}_2]^T = [-\cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \ \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T \quad (9)$$

La velocidad lineal de la articulación entre el brazo 1 y el brazo 2 en el sistema de coordenadas 2 es:

$$v_2 = R_2 (\omega_1 \times [L_1 \ 0 \ 0]^T) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

La velocidad del centro de masa del brazo 2 está dada por:

$$v_{2c} = v_2 + \omega_2 \times [l_2 \ 0 \ 0]^T = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2 l_2 \\ \dot{\theta}_1 l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

3. *Energía potencial y cinética:* La energía potencial del brazo 1 es:

$$E_{p1} = 0 \quad (12)$$

y su energía cinética es:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} (v_{1c}^T m_1 v_{1c} + \omega_1^T J_1 \omega_1) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1^2 + J_{1zz}) \quad (13)$$

La energía potencial del brazo 2 es:

$$E_{p2} = g m_2 l_2 (1 - \cos \theta_2) \quad (14)$$

y su energía cinética es:

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2} (v_{2c}^T m_2 v_{2c} + \omega_2^T J_2 \omega_2) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_2 L_2^2 + (m_2 l_2^2 + J_{2yy}) \sin^2 \theta_2 + J_{2xx} \cos^2 \theta_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (J_{2zz} + m_2 l_2^2) + m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

La energía cinética y potencial total está dada por:

$$\begin{aligned} E_p &= E_{p1} + E_{p2} \\ E_k &= E_{k1} + E_{k2} \end{aligned} \quad (16)$$

Y usando las ecuaciones 1 y 2, donde $T = E_k$, $V = E_p$, la ecuación de Euler-Lagrange queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (17)$$

donde:

$$\begin{aligned} q_i &= [\theta_1 \quad \theta_2]^T \\ b_i &= [b_1 \quad b_2]^T \\ Q_i &= [\tau_1 \quad \tau_2]^T \end{aligned} \quad (18)$$

Evaluando los términos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \ddot{\theta}_1 (J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (m_2 l_2^2 + J_{2yy}) \sin^2 \theta_2 + J_{2xx} \cos^2 \theta_2) \\ &\quad + m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 (J_{2zz} + m_2 l_2^2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2, \\ - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0, \\ - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -\frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin 2\theta_2 (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2 + g m_2 l_2 \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (19)$$

y reemplazando, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 (J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (J_{2yy} + m_2 l_2^2) \times \sin^2 \theta_2 + J_{2xx} \cos^2 \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \sin 2\theta_2 \\ \times (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + b_1 \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2^2 + J_{2zz}) \\ + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin 2\theta_2 (-m_2 l_2^2 - J_{2yy} + J_{2xx}) \\ + b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

4. *Simplificando:* De acuerdo con Cazzolato, B. [1] la mayor parte de los péndulos Furuta tienen brazos delgados y largos, tal que el momento de inercia a lo largo del eje del brazo es despreciable. Además, la mayoría de brazos tiene simetría rotacional, tal que el momento de inercia en los dos ejes principales son iguales. Lo que haría que los tensores de inercia queden:

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix}, \\ J_2 &= \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

El momento de inercia total del brazo 1 alrededor de la articulación, usando el teorema de ejes paralelos, es $\hat{J}_1 = J_1 + m_1 l_1^2$, y para el brazo 2 $\hat{J}_2 = J_2 + m_2 l_2^2$, finalmente definimos el momento de inercia total que experimenta el rotor del motor cuando el péndulo está en su posición de equilibrio $\hat{J}_0 = \hat{J}_1 + m_2 L_1^2$

Substituyendo en la ec. 20:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2 \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \hat{J}_2 \sin 2\theta_2 + b_1 \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin 2\theta_2 \\ + b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Resolviendo las ecuación 22 en términos de $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{J}_2 b_2 \\ m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 b_2 \\ -\hat{J}_2^2 \sin 2\theta_2 \\ -(1/2) \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \sin 2\theta_2 \\ \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \hat{J}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \\ (1/2) m_2^2 l_2^2 L_1 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix} \end{pmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2 \theta_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_1} \quad (23)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\left(\begin{bmatrix} m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 b_1 \\ -b_2 \left(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2 \theta_2 \right) \\ m_2 L_1 l_2 \hat{J}_2 \cos \theta_2 \sin 2\theta_2 \\ -(1/2) \sin 2\theta_2 \left(\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \\ -(1/2) m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \\ \hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2 \theta_2 \\ -m_2 l_2 \sin \theta_2 \left(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2 \theta_2 \right) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix} \right)}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2 \theta_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_1} \quad (24)$$

Cambiando a su forma de espacio de estado, haciendo el cambio de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1 \\ x_2 &= \theta_2 \\ x_3 &= \dot{\theta}_1 \\ x_4 &= \dot{\theta}_2 \\ u_1 &= \tau_1 \\ u_2 &= \tau_2 \end{aligned} \quad (25)$$

obtenemos

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 = x_3 \\ f_2 = x_4 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \text{ (ec.23)} \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \text{ (ec.24)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Linealización

La linealización se hará alrededor del punto de operación o punto de equilibrio, y este se podría lograr en dos casos:

Caso 1: Posición hacia arriba del brazo 2 donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \theta_{1e} = 0, \\ \bar{x}_2 &= \theta_{2e} = \pi, \\ \bar{x}_3 &= \dot{\theta}_{1e} = 0, \\ \bar{x}_4 &= \dot{\theta}_{1e} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

Usamos la linealización por expansión de Taylor en torno al punto de equilibrio \bar{x} :

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{x}}\right) \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\bar{x}}\right) \delta u + \varphi^2 \\ \delta y &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{\bar{x}}\right) \delta x + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\bigg|_{\bar{x}}\right) \delta u + \varphi^2\end{aligned}\tag{29}$$

y el espacio estado:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= A\delta x + B\delta u \\ \delta y &= C\delta x + D\delta u\end{aligned}\tag{30}$$

donde:

φ^2 : Términos de orden superior, que son despreciados. Según el Teorema de Hartman-Grobman [3] la función linealizada tendrá el mismo comportamiento en la vecindad del punto de equilibrio (punto de equilibrio hiperbólico) si la matriz A no tiene valores propios con parte real igual a cero.

Expandiendo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}\bigg|_{\bar{x}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\bigg|_{\bar{x}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4}\bigg|_{\bar{x}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\bigg|_{\bar{x}} \end{bmatrix}\tag{31}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\bigg|_{\bar{x}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\bigg|_{\bar{x}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}\bigg|_{\bar{x}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1}\bigg|_{\bar{x}} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2}\bigg|_{\bar{x}} \end{bmatrix}\tag{32}$$

Es fácil observar que C linealizada es igual a la matriz Identidad $I(4)$ y que $D = 0$. Finalmente obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\tag{33}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
A_{31} &= 0, \\
A_{32} &= \frac{gm_2^2 l_2^2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{34} &= \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{41} &= 0, \\
A_{42} &= \frac{gm_2 l_2 \hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{43} &= \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2},
\end{aligned} \tag{34}$$

Caso 2: Posición hacia abajo del brazo 2 donde:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \theta_{1e} = 0, \\
\bar{x}_2 &= \theta_{2e} = 0, \\
\bar{x}_3 &= \dot{\theta}_{1e} = 0, \\
\bar{x}_4 &= \dot{\theta}_{1e} = 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

Repitiendo el mismo proceso del caso 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
A_{31} &= 0, \\
A_{32} &= \frac{gm_2^2 l_2^2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{34} &= \frac{b_2 m_2 l_2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{41} &= 0, \\
A_{42} &= \frac{-gm_2 l_2 \hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{43} &= \frac{b_1 m_2 l_2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{41} &= \frac{-m_2 L_1 l_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{32} &= \frac{-m_2 L_1 l_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2}, \\
B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2},
\end{aligned} \tag{37}$$

Linealizando las ecuaciones de estado incluyendo el sistema eléctrico del motor.
La ecuación diferencial que rige al motor eléctrico es:

$$L_m \dot{i} + R_m i + K_m \dot{\theta}_1 = V \tag{38}$$

Reordenando en términos de la corriente:

$$\dot{i} = \frac{V - R_m i - K_m \dot{\theta}_1}{L_m} \tag{39}$$

El torque producido por el motor es:

$$\tau = K_m i \tag{40}$$

Añadiendo las ecuaciones ec.39, ec-40 en la ec.33, haciendo $i = x_5$, $V = u_1$, $t_2 = u_2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & B_{31}K_m \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & B_{41}K_m \\ 0 & 0 & \frac{-K_m}{L_m} & 0 & \frac{-R_m}{L_m} \end{bmatrix} [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{32} \\ 0 & B_{42} \\ \frac{1}{L_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Tomando valores para los parámetros del péndulo futura de (Cazzolato, B) [1]:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,278m \\ L_2 &= 0,300m \\ l_1 &= 0,150m \\ l_2 &= 0,148m \\ m_1 &= 0,300Kg \\ m_2 &= 0,075Kg \\ J_1 &= 2,48 \times 10^{-2} Kg \cdot m^2 \\ J_2 &= 3,86 \times 10^{-3} Kg \cdot m^2 \\ b_1 &= 1,00 \times 10^{-4} Nms \\ b_2 &= 2,80 \times 10^{-4} Nms \\ L &= 0,005H \\ R &= 7,8\Omega \\ K_m &= 0,090Nm/A \end{aligned} \quad (42)$$

Prueba. Haremos uso de simulink para probar la linealización alrededor de los puntos de equilibrio. Primero construimos el modelo no lineal, es decir, representaremos las ecuaciones 23 y 24.

Ya que la ecuación es bastante larga la dividiremos en varios subsistemas, el primero de ellos es el subsistema general, que solo contiene las entradas $u_1 = V$, $u_2 = \tau_2$ y salidas los estados $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$, $x_3 = \dot{\theta}_1$, $x_4 = \dot{\theta}_2$ y el valor del torque aplicado por el motor τ_1 , como se puede ver en la figura 2.

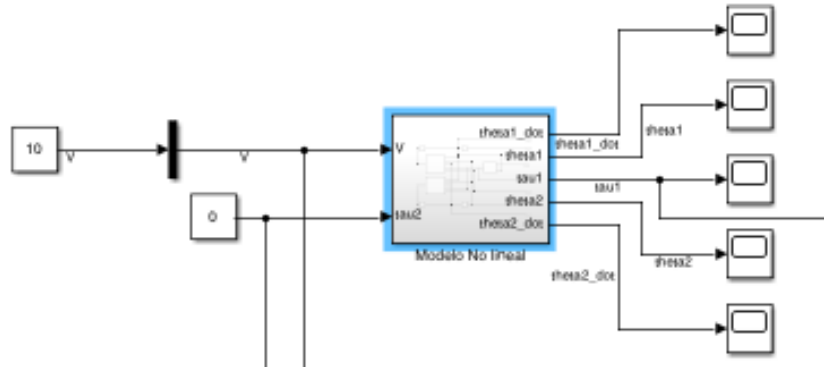


Figura 2: Vista de las entradas y salidas del subsistema de la ecuación no lineal del modelo.

Los otros subsistemas son los usados para calcular las aceleraciones del brazo 1 y el brazo 2. También el cálculo del torque ejercido por el motor, como se muestra en la figura 3

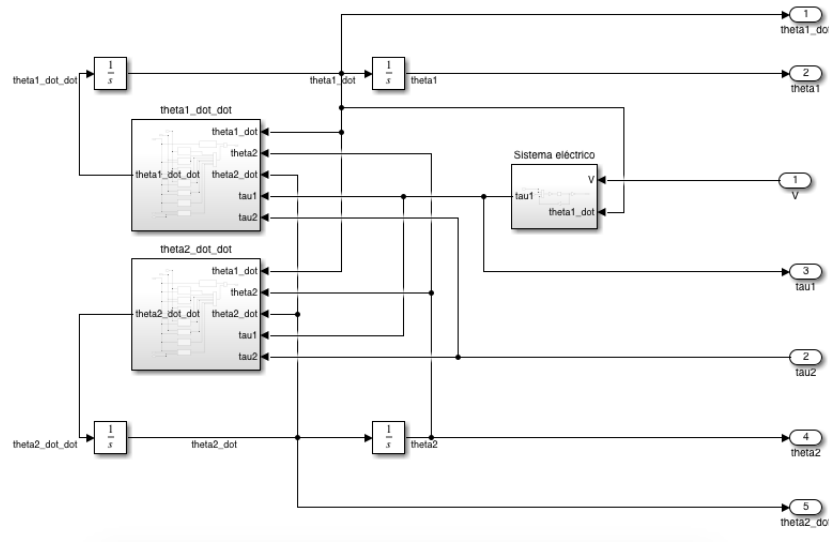


Figura 3: Vista de interconexión entre los subsistemas que calculan el valor de la aceleración del brazo 1, el brazo 2 y el torque ejercido por el motor DC ($\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ y τ_1)

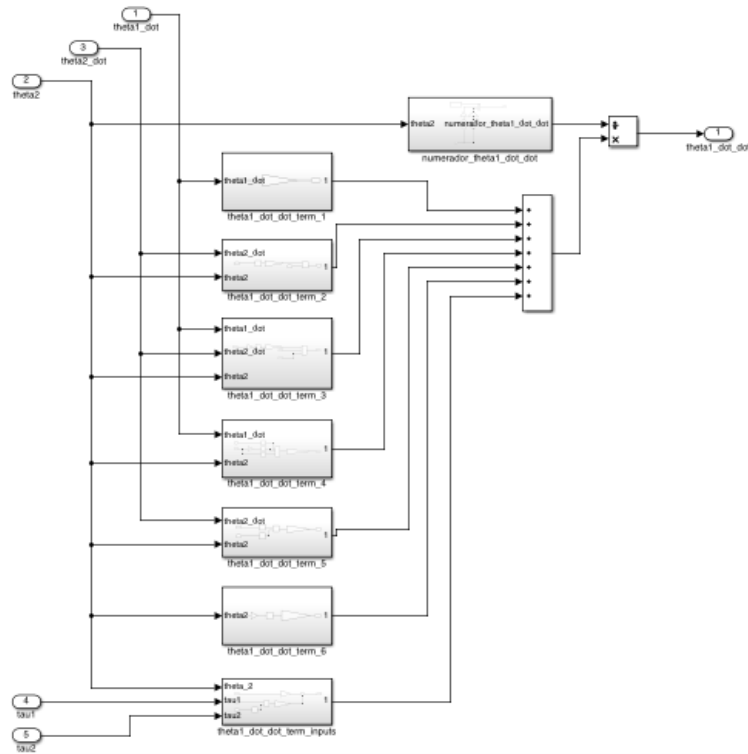


Figura 4: Vista del subsistema que calcula el valor de la aceleración del brazo 1 $\ddot{\theta}_1$.

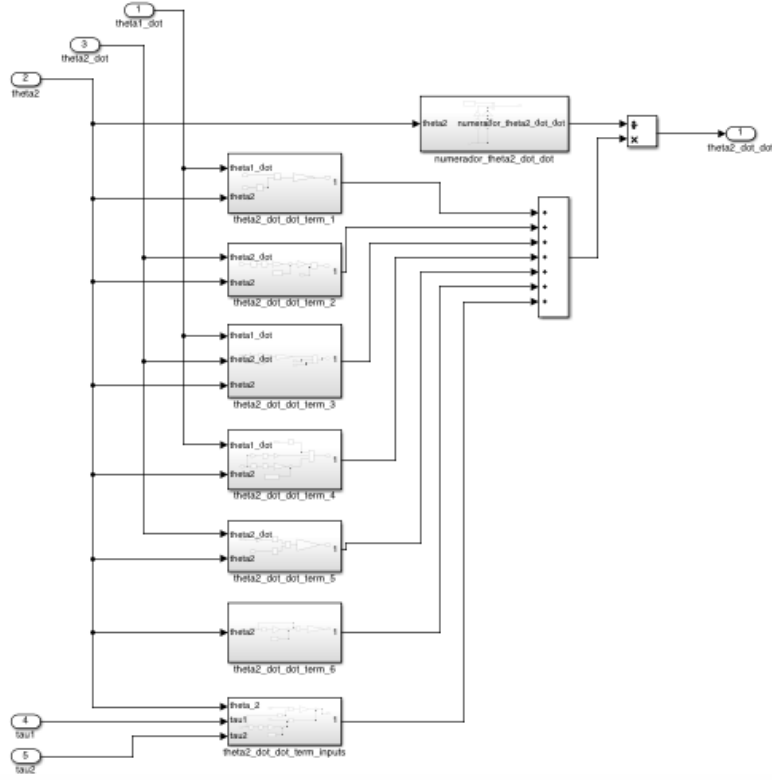


Figura 5: Vista del subsistema que calcula el valor de la aceleración del brazo 2 $\ddot{\theta}_2$.

Las figuras 4 y 5 muestran las vista interna de los subsistemas que calculan la aceleración de los brazos 1 y 2. Cada subsistema interno calcula un término del numerador de la ecuación 23, después cada término se une a los otros en un sumador y finalmente es dividido por subsistema que hace el calculo del denominador de la ecuación 23. Se usa la misma estrategia para construir los términos del ecuación 24.

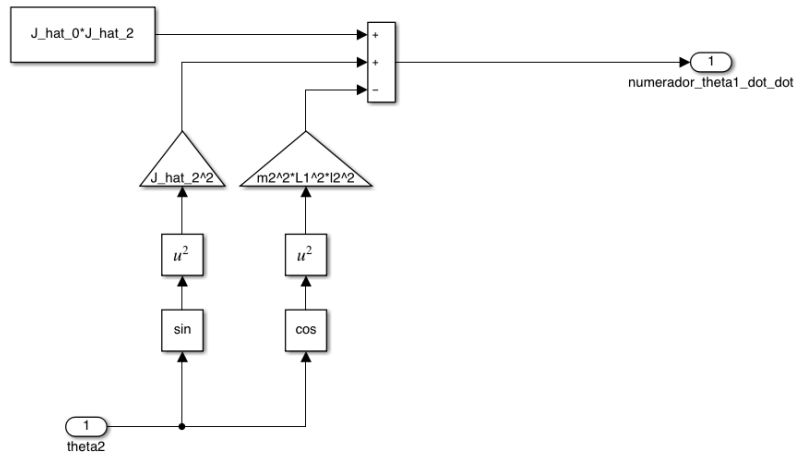


Figura 6: Brazo 1: Denominador de la ec. 23

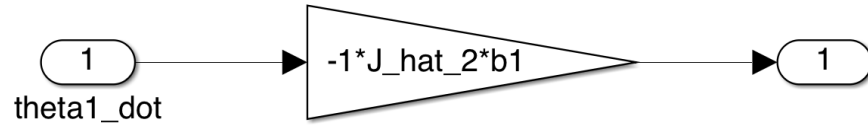


Figura 7: Brazo 1: Primer término de la ec. 23

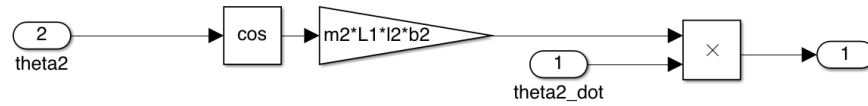


Figura 8: Brazo 1: Segundo término de la ec. 23

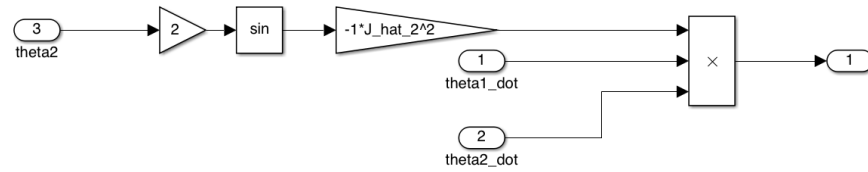


Figura 9: Brazo 1: Tercer término de la ec. 23

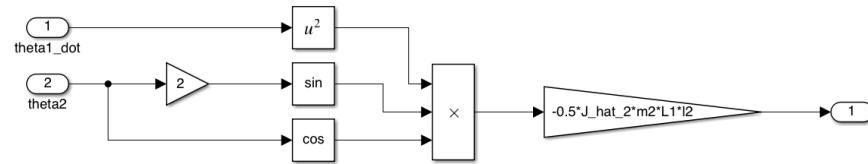


Figura 10: Brazo 1: Cuarto término de la ec. 23

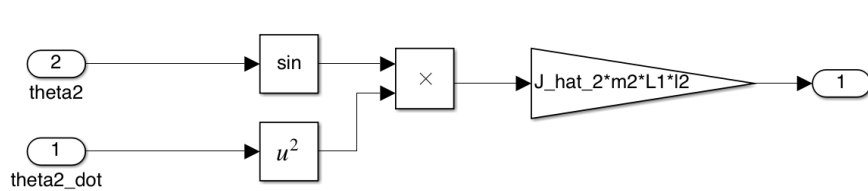


Figura 11: Brazo 1: Quinto término de la ec. 23

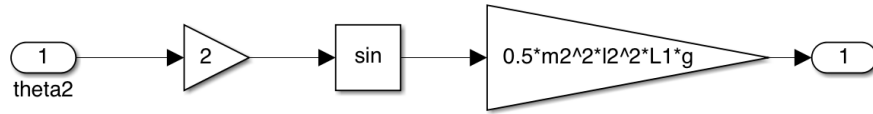


Figura 12: Brazo 1: Sexto término de la ec. 23

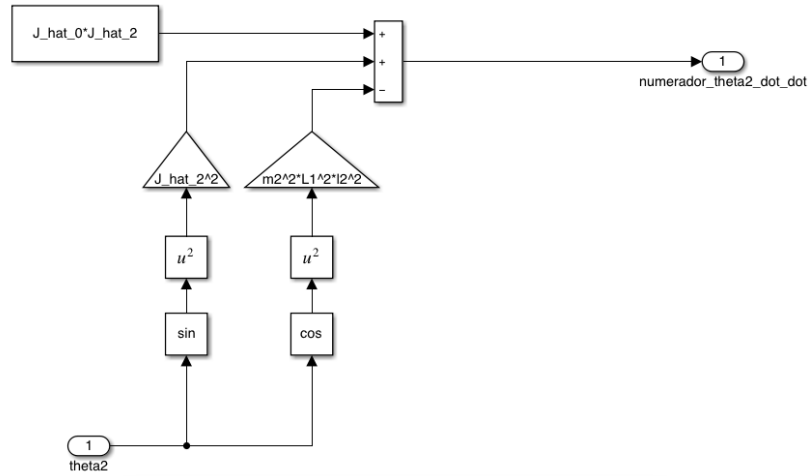


Figura 13: Brazo 2: Denominador de la ec. 24

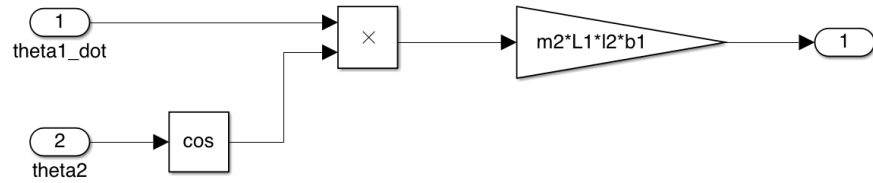


Figura 14: Brazo 2: Primer término de la ec. 24

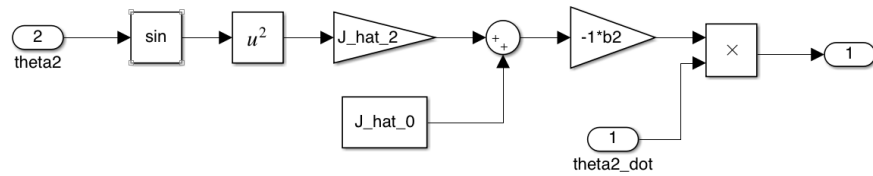


Figura 15: Brazo 2: Segundo término de la ec. 24



Figura 16: Brazo 2: Tercer término de la ec. 24

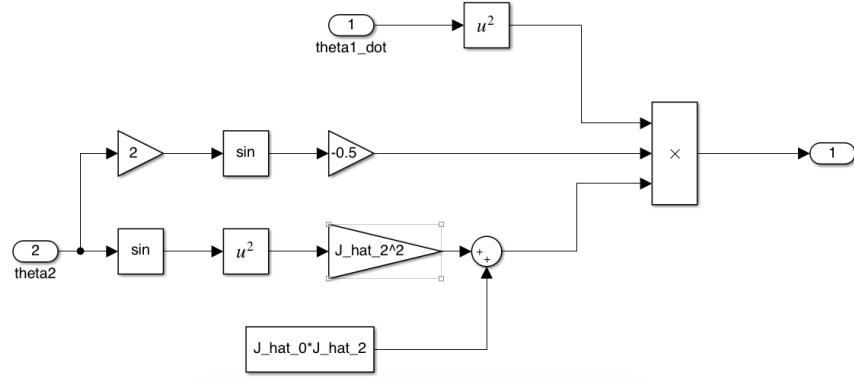


Figura 17: Brazo 2: Cuarto término de la ec. 24

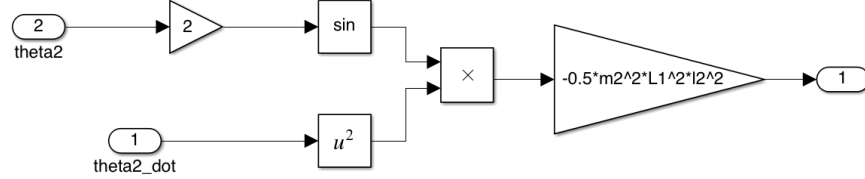


Figura 18: Brazo 2: Quinto término de la ec. 24

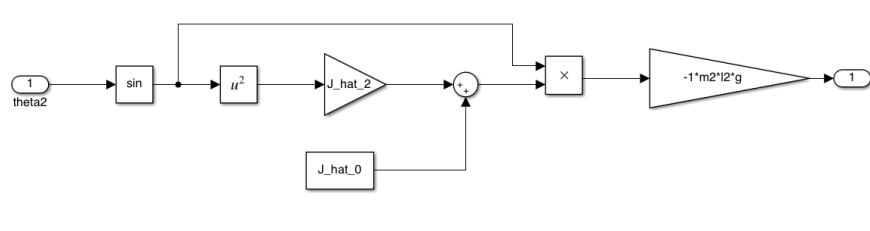


Figura 19: Brazo 2: Sexto término de la ec. 24

Para la construcción de los modelos lineales usaremos también subsistemas uno por cada caso y cada subsistema contendrá un bloque de de espacio estado, cuyas entradas son $u_1 = V$, $u_2 = \tau_2$, y las salidas son los estados $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$, $x_3 = \dot{\theta}_1$, $x_4 = \dot{\theta}_2$ y el torque que aplica

el motor al brazo τ_1 , que podemos ver en la figura 20. Las matrices A, B, C, D así como el valor de todas las constantes se calcularán a través de matlab.

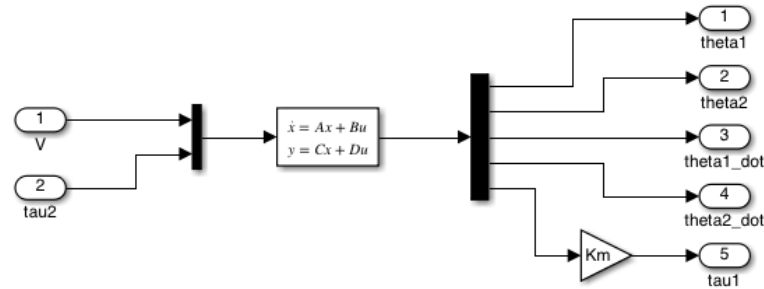


Figura 20: Diagrama de espacio estado usado para representar el modelo de linealizado.

Resultados A continuación se muestran los resultados del sistema no lineal a una entrada $u_1 = V = 10v$, $u_2 = \tau_2 = 0$, es decir, el motor funcionando a $10v$ y el péndulo sin perturbación. Para el caso 1, tenemos:

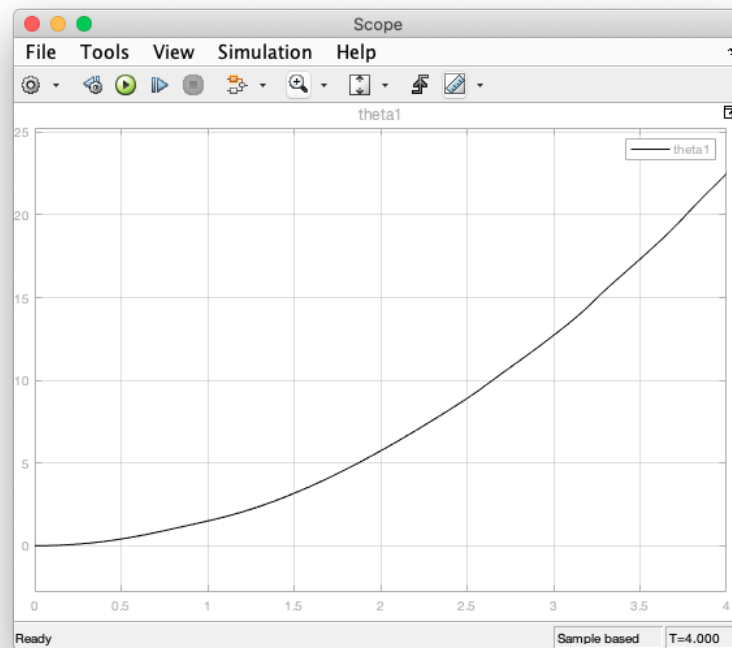


Figura 21: θ_1 .

En la figura 21, el ángulo parte del origen y aumenta lo cual tiene sentido porque se aplica un voltaje constante que se traduce en un torque positivo.

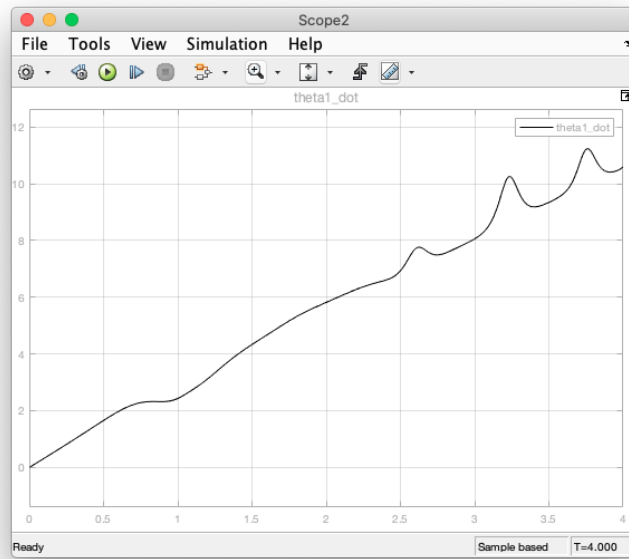


Figura 22: $\dot{\theta}_1$.

En la figura 22, la velocidad angular igualmente tiene sentido que aumente debido al torque positivo. Los picos se pueden explicar debido a que la posición inicial del brazo 2 está hacia arriba, al caer y hasta llegar a una posición máxima generará un torque positivo, y al regresar un torque negativo.

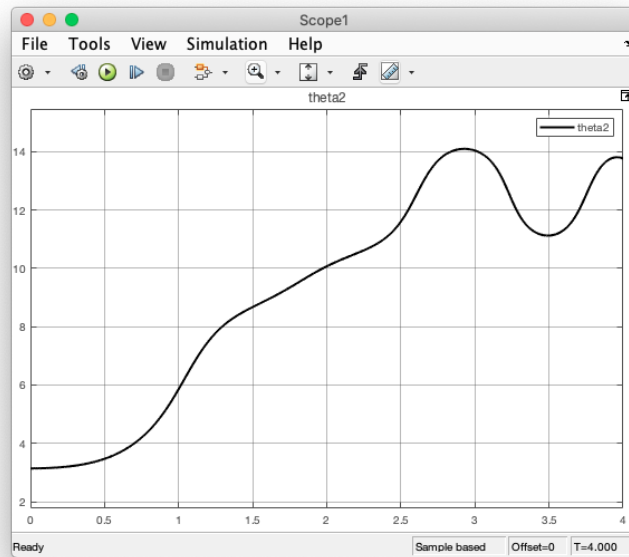


Figura 23: θ_2 .

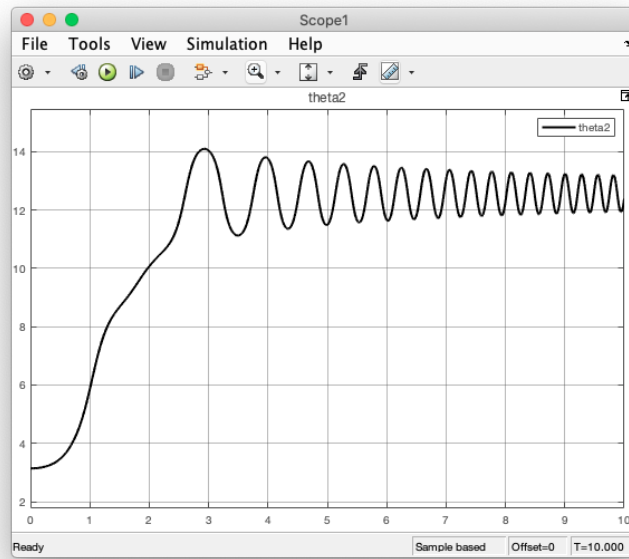


Figura 24: θ_2 .

En la figura 23 y 24, se observa que el ángulo aumenta hasta que llega a una posición luego regresa y comienza a oscilar esto es congruente con la posición inicial del brazo 2.

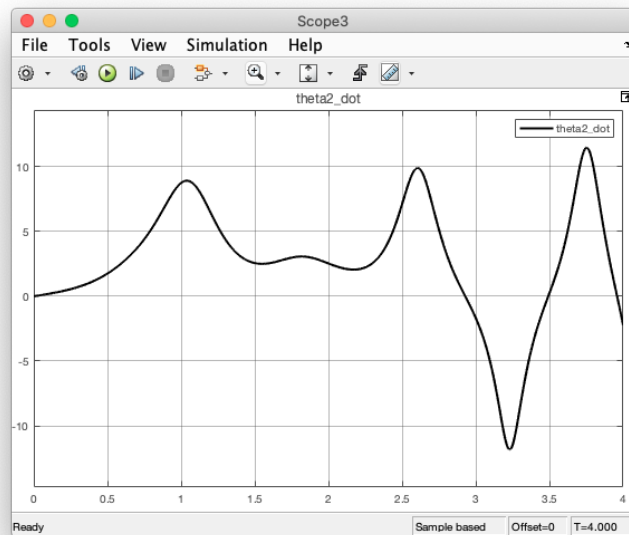


Figura 25: $\dot{\theta}_2$.

En la figura 25, muestra la velocidad angular del brazo 2.

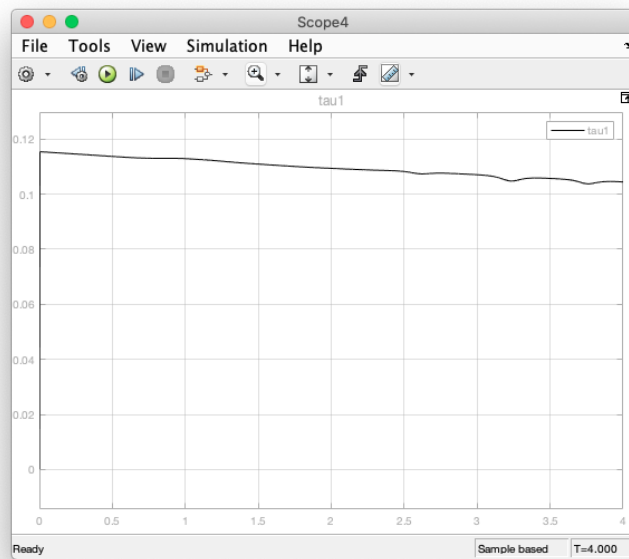


Figura 26: τ_1 .

En la figura 26, se observa que el torque que ejerce el motor al brazo uno, las oscilaciones se explican por las oscilaciones en el brazo 2.

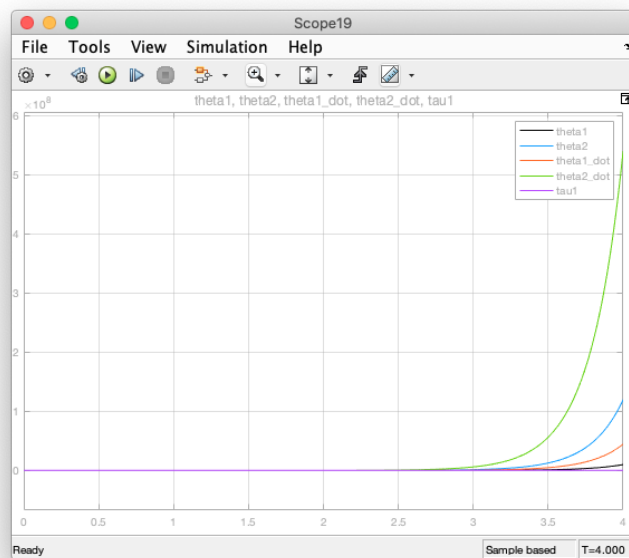


Figura 27: Variables de estado para el caso1 linealizado.

En la figura 27, se observa que la linealización no se aproxima al modelo, esto porque la

linealización se hizo alrededor de $\theta_2 = \pi$, es decir, con el brazo 2 mirando hacia arriba, y debido a que en esa posición cualquier movimiento sobre el brazo hará que el sistema se vuelva inestable y por lo tanto se aleje del punto de operación.

Para el caso 2, tenemos:

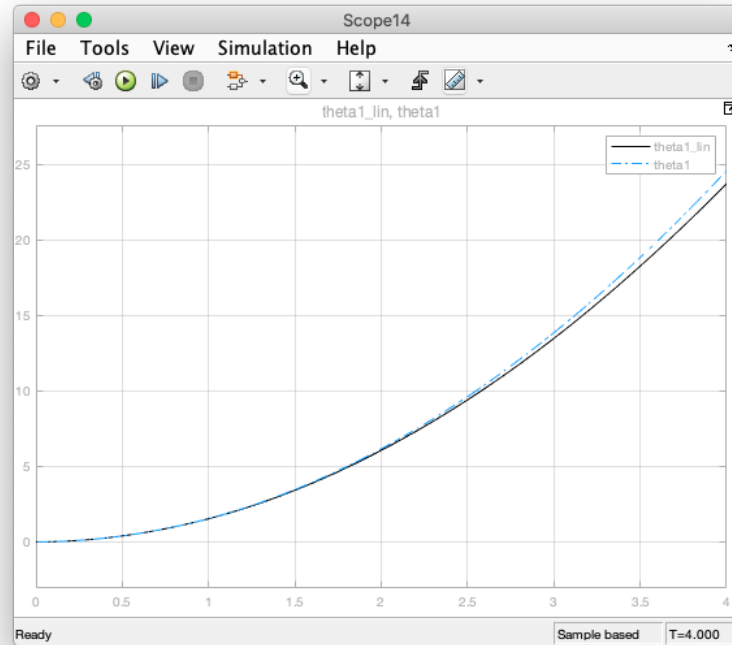


Figura 28: θ_2 .

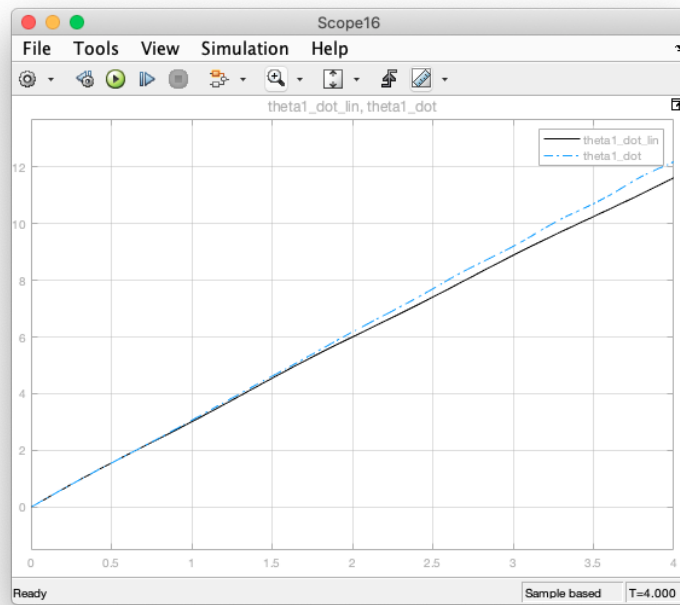


Figura 29: $\dot{\theta}_1$.

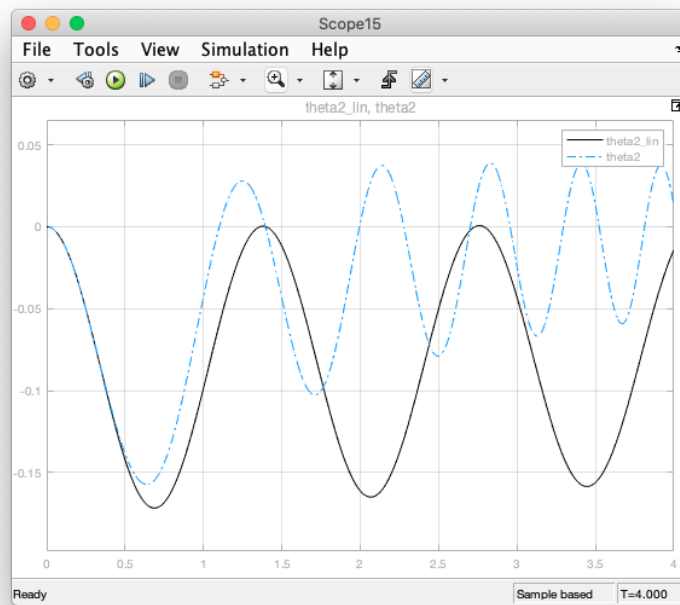


Figura 30: θ_2 .

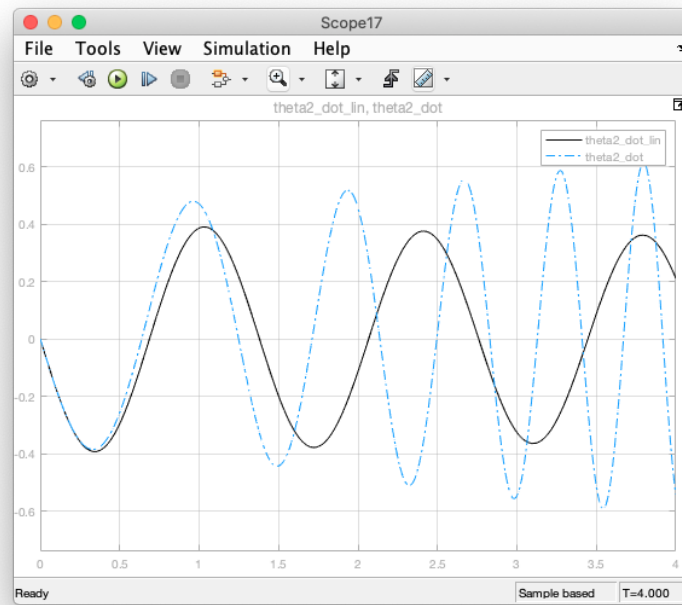


Figura 31: $\dot{\theta}_2$.

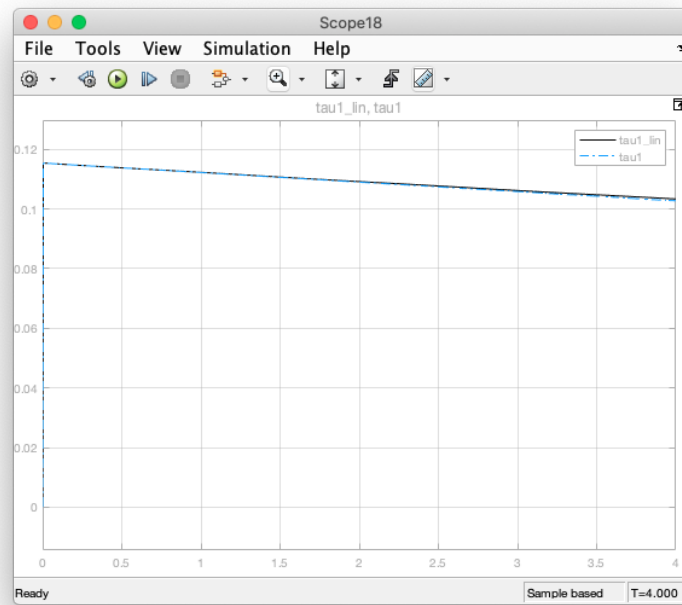


Figura 32: τ_1 .

En las figuras 28, 29, 30, 31, 32, podemos observar que el modelo linealizado en el caso,

durante los primeros segundos se aproxima mucho mejor al sistema no lineal esto porque el sistema se mantiene trabajando cerca al punto de operación o equilibrio $\theta_1 = \theta_2 = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$. El desfase en los segundos siguientes se explica por que el sistema se empieza a alejar de su punto de operación.

Análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad del modelo, debemos analizar los valores propios de la matriz A (ec. 30) de los modelos linealizados, haciendo uso de matlab, tenemos. Para el caso 1:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1559,9708 \\ 4,5279 \\ -4,5827 \\ 0,0305 \end{bmatrix} \quad (43)$$

De donde se puede ver que tiene un polo real positivo, que es condición suficiente para decir que el sistema es inestable. Recordemos dos cosas, primero que el brazo 2 esta apuntando hacia arriba y que el análisis de estabilidad se hace para la matriz A del sistema linealizado cerca a este punto, es decir, que la matriz linealizada cerca al punto de equilibrio no es estable, por otro lado no es difícil imaginar que si liberamos el sistema desde su punto de equilibrio este terminará estabilizándose, aunque esto puede resultar contradictorio, no lo es.

Para el caso 2:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1559,9708 \\ -0,0274 + 4,555i \\ -0,0274 - 4,555i \\ -0,0305 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Tenemos que uno de los polos tiene parte real igual a cero. Es decir que no se puede determinar su estabilidad, aunque en este caso puede resultar evidente que es estable. Recordemos que esto es válido en la región cerca al punto de operación.

Respuesta del modelo

Respuesta al impulso, para el caso 1 tenemos:

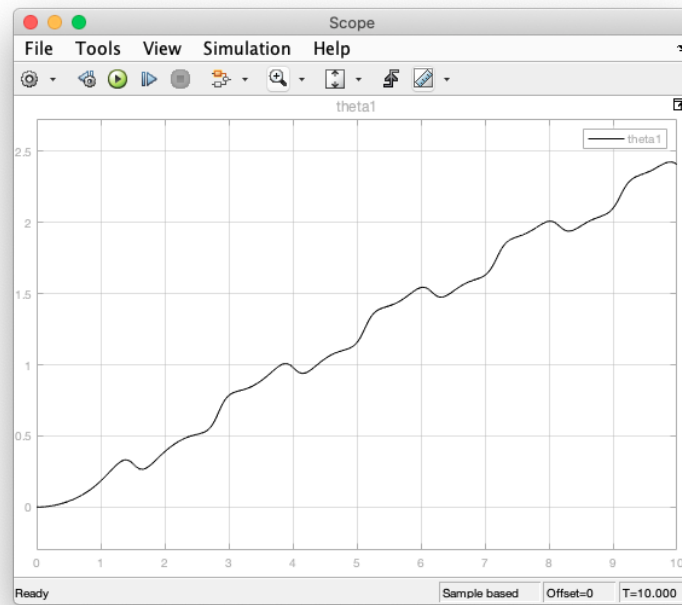


Figura 33: Modelo no linealizado, respuesta al impulso θ_1 .

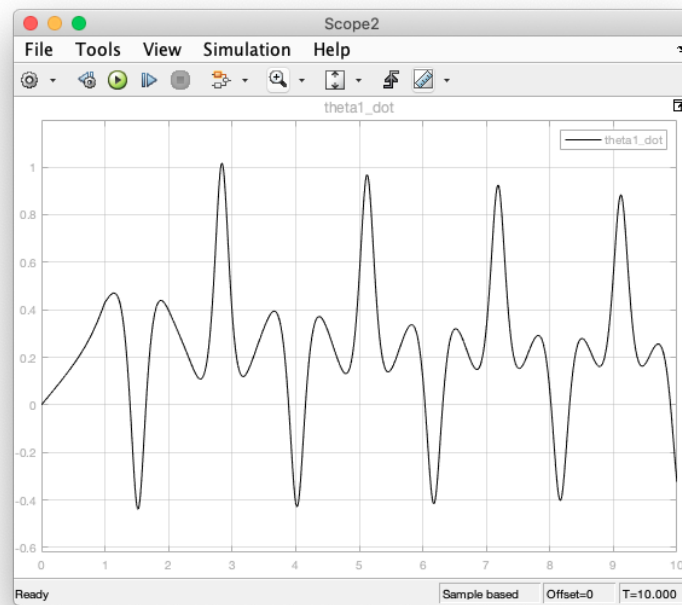


Figura 34: Modelo no linealizado, respuesta al impulso $\dot{\theta}_1$.

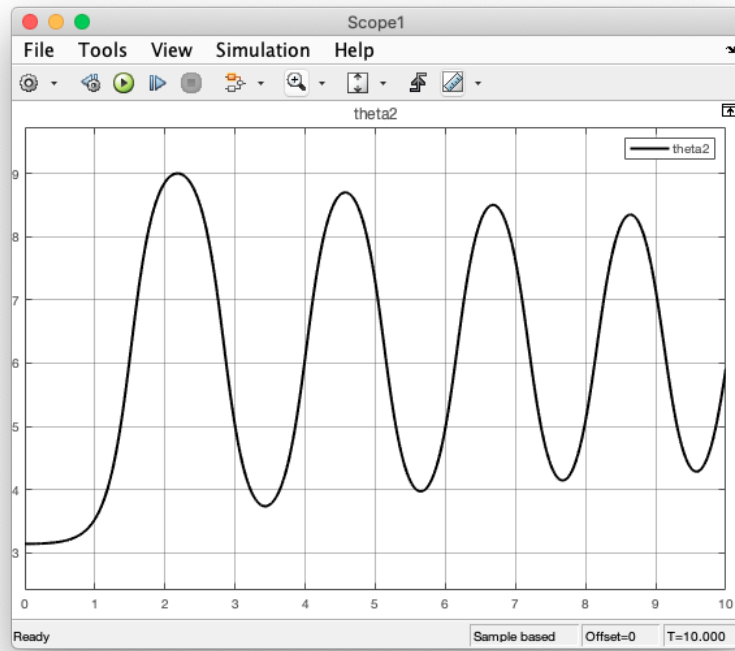


Figura 35: Modelo no linealizado, respuesta al impulso θ_2 .

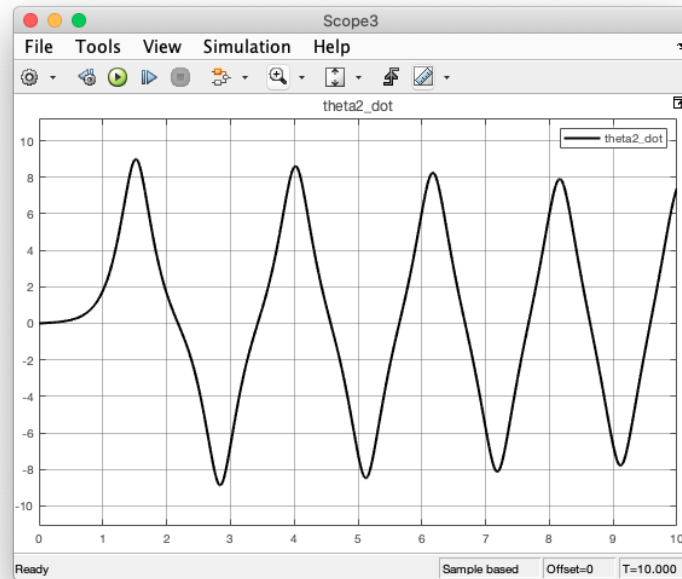


Figura 36: Modelo no linealizado, respuesta al impulso $\dot{\theta}_2$.

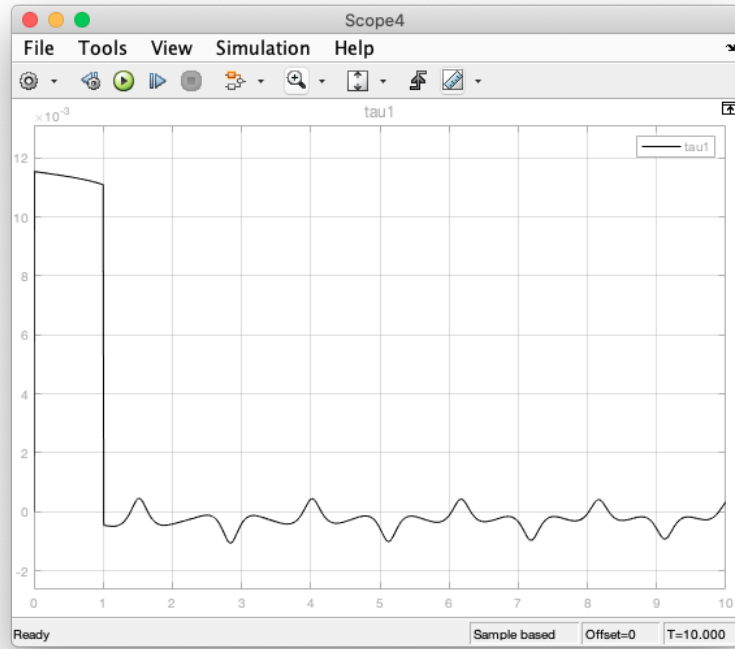


Figura 37: Modelo no linealizado, respuesta al impulso τ_1 .

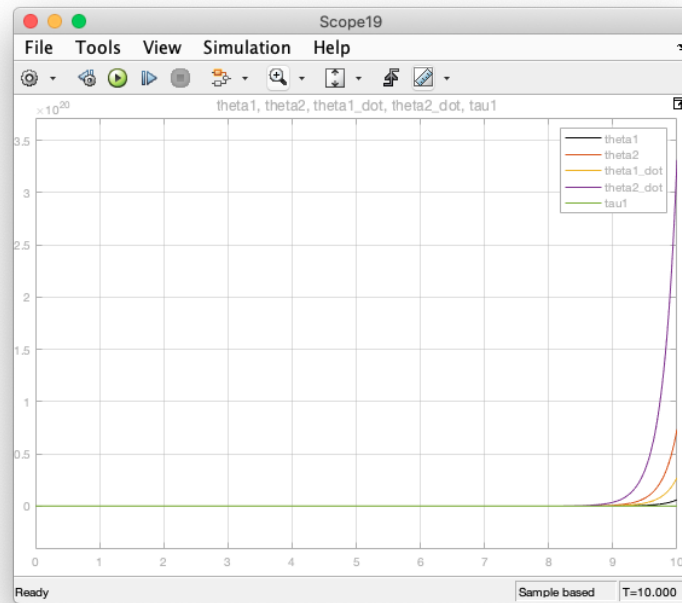


Figura 38: Modelo linealizado, respuesta al impulso θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, τ_1 .

De las figuras 33, 34, 35, 36, 37 podemos ver que la respuesta del sistema al impulso es girar hacia su posición estable, hacia abajo, y oscilar en esa posición mientras pierde energía lentamente debido a la viscosidad entre las juntas. La respuesta del modelo linealizado al impulso, figura 38, es desestabilizarse. Esto porque el sistema se desplaza más allá de su punto de operación.

Para el caso 2 tenemos:

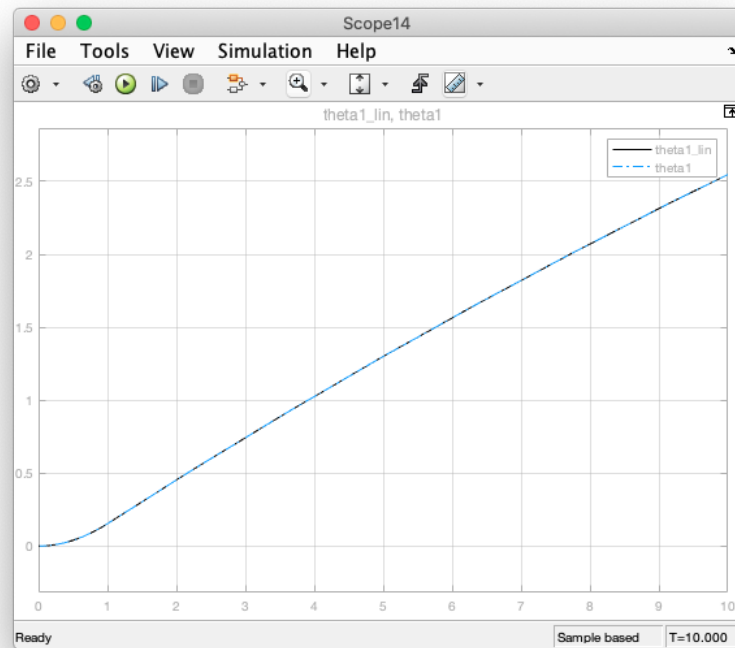


Figura 39: Modelo no linealizado, respuesta al impulso θ_1 .

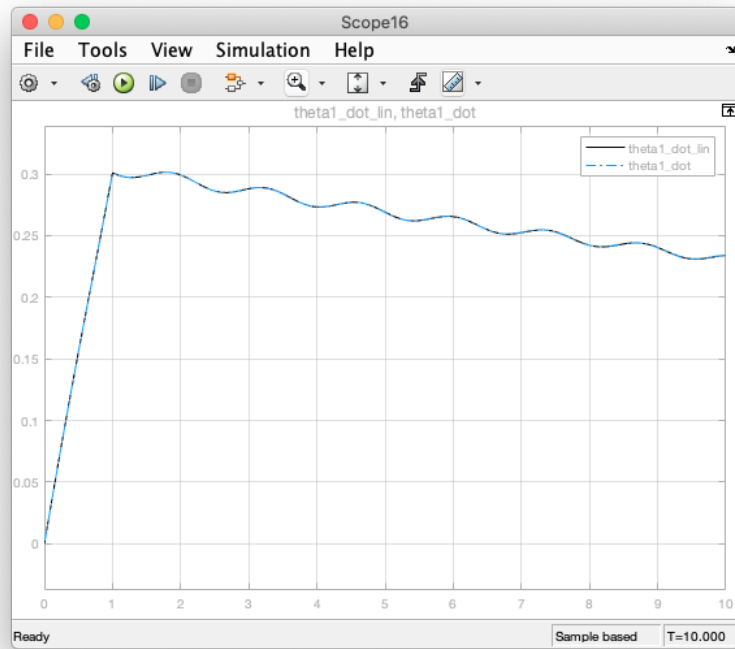


Figura 40: Modelo no linealizado, respuesta al impulso $\dot{\theta}_1$.

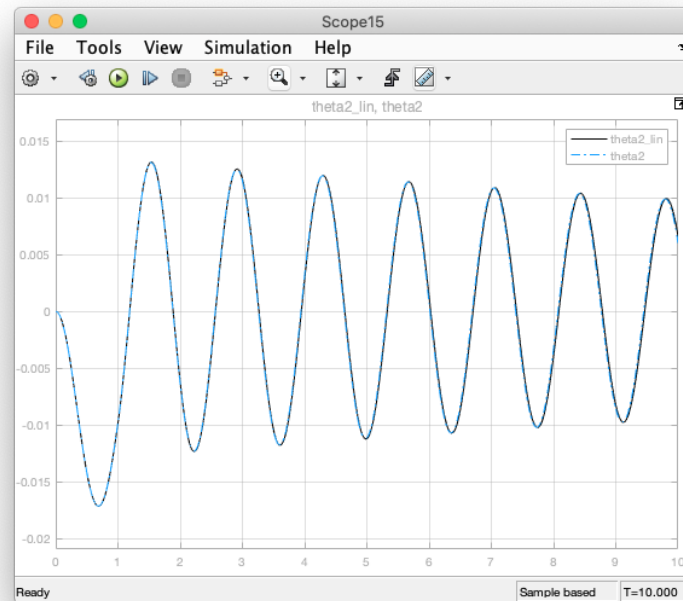


Figura 41: Modelo no linealizado, respuesta al impulso θ_2 .

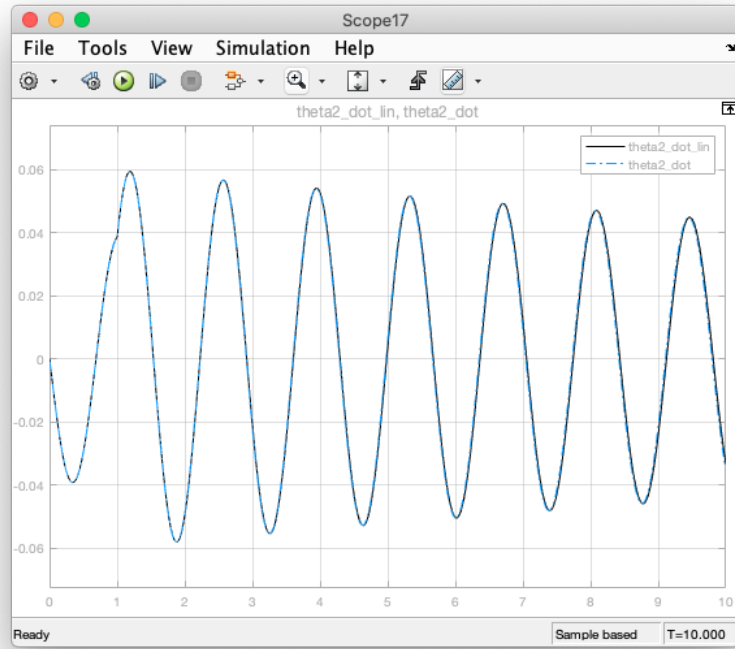


Figura 42: Modelo no linealizado, respuesta al impulso $\dot{\theta}_2$.

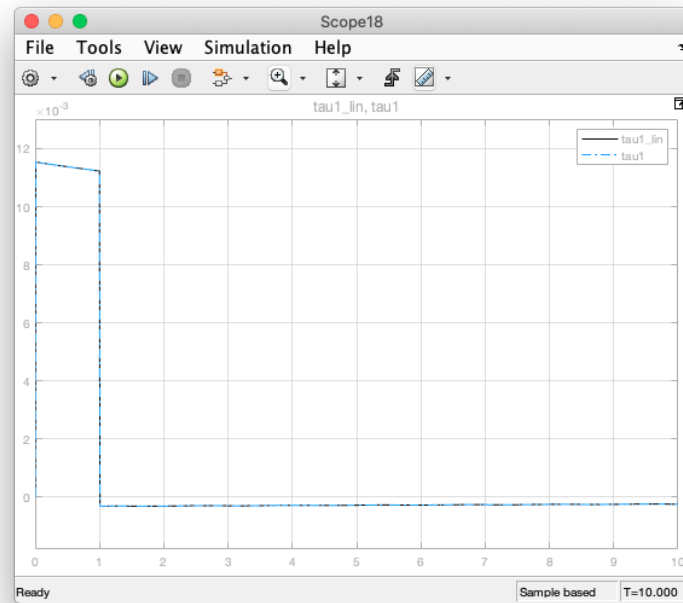


Figura 43: Modelo no linealizado, respuesta al impulso τ_1 .

De las figuras 39, 40, 41, 42, 43 el sistema linealizado responde casi de la misma forma que el modelo no linealizado esto se debe a que está trabajando cerca a su punto de operación.

Referencias

- [1] Benjamin Seth Cazzolato y Zebb Prime. «On the Dynamics of the Furuta Pendulum». En: *Journal of Control Science and Engineering* 2011 (abr. de 2011). Ed. por Zoltan Szabo, pág. 528341. ISSN: 1687-5249. DOI: 10.1155/2011/528341. URL: <https://doi.org/10.1155/2011/528341>.
- [2] Furuta Pendulum. *Furuta Pendulum* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 24-November-2020]. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Furuta_pendulum.
- [3] Hartman-Grobman Theorem. *Hartman-Grobman Theorem* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 24-November-2020]. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Hartman%E2%80%93Grobman_theorem.