



Universidad de Oviedo  
*Universidá d'Uviéu*  
*University of Oviedo*

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Topología y Geometría de Variedades

*Topology and Geometry of Manifolds*

Javier González Delgado

supervisado por

María Elena Couselo Hernández

13 de junio de 2019



*A mi abuela*



# Introducción

Desde siempre ha existido una relación fundamental entre los conceptos de la Geometría y el estudio del mundo físico. El comportamiento de un sistema físico está regido por un campo de vectores en un espacio de estados que determina su evolución temporal. En los casos más simples, este espacio de fases puede identificarse con un conjunto abierto del espacio euclídeo, pero cuando se consideran casos más complejos esto deja de ser cierto. Por ejemplo, los espacios de fases dejan de ser abiertos cuando se introducen algunas restricciones. En cualquier caso, estos espacios se presentan como abiertos euclídeos de manera *local*, es decir, admiten a esta escala sistemas coordinados, lo que supone una motivación física para la introducción de las Variedades Diferenciables.

No obstante, la Teoría de Variedades y la Geometría Diferencial no requieren de motivación externa que sustituya su interés puramente matemático, pues son el resultado de los trabajos que se vienen realizando en Geometría desde los *Elementos* de Euclides, que datan del año 300 a.C. aproximadamente y que fijan el punto de partida con el problema del quinto postulado. Desde el nacimiento en el siglo XVII del Cálculo Diferencial, impulsado principalmente por Isaac Newton, se va generalizando el uso de técnicas diferenciales para la resolución de problemas geométricos, lo que da lugar a la disciplina conocida hoy en día como Geometría Diferencial. Los trabajos posteriores de Gauss, Lobachevski y Bolyai consolidan la Geometría no Euclíadiana o hiperbólica y, a mediados del siglo XIX, Riemann asienta los principios de lo que entendemos por una geometría. Según Riemann, para la construcción de una geometría es necesario dar una variedad de elementos, sus coordenadas y una ley que mida la distancia entre elementos de la variedad infinitamente próximos, para lo que supone que las partes infinitesimales de la variedad se miden euclidianamente. Esta forma de concebir el espacio ha evolucionado con el tratamiento dado en los trabajos de Ricci y Levi-Civita, hasta lo que hoy denominamos como variedad Riemmaniana. La definición que actualmente utilizamos de Variedad Diferenciable se atribuye a Hassler Whitney, que en 1936 consideró una variedad como una serie de piezas euclidianas pegadas con funciones diferenciables.

Además de su interés intrínseco, el conocimiento de las Variedades Diferenciables ha adquirido una utilidad esencial en un creciente número de áreas de las Matemáticas. Esto no sorprende, pues las Variedades Diferenciables son objetos subyacentes en el estudio de buena parte del Cálculo avanzado y el Análisis. Ciertamente, temas como las integrales de superficie o los Teoremas de Stokes y Green encuentran su formulación más natural en la Teoría de Variedades.

En esencia, la Geometría Diferencial es una técnica que, mediante métodos diferenciales, da respuesta a numerosos problemas matemáticos y que puede ser completada con las herramientas necesarias hasta la Geometría Riemmanniana, que unifica las Geometrías Euclidiana, Proyectiva e Hiperbólica. También deja el camino abierto para introducir la llamada Geometría pseudo-Riemmanniana, que constituye el marco matemático adecuado para el estudio de la Teoría de la Relatividad.

Este trabajo supone un primer acercamiento a la Geometría Diferencial, sentando una base sólida y detallada de los fundamentos de la Teoría de Variedades Diferenciables. Esta rama ha adquirido una relevancia especial en los temas actuales de investigación, tanto en la Matemática pura como en varias áreas de la Física teórica. Presentamos aquí las bases de la Geometría moderna, con una construcción que prioriza el punto de vista topológico y que, además de introducir los conceptos fundamentales, deja entrever el horizonte al que estos conducen con la presentación de algunas variedades de importancia.

La estructura principal del trabajo consta de cinco capítulos. El primero de ellos introduce los conceptos más básicos y el marco necesario para la construcción de una variedad diferenciable, cuya estructura topológica se estudia en detalle en el capítulo sucesivo. El tercer capítulo desarrolla la Teoría de diferenciación, presentando el espacio tangente a una variedad y generalizando ciertos resultados del Cálculo Diferencial. La Teoría de subvariedades será introducida en el capítulo cuarto, analizando cómo surgen estas estructuras a partir de las inmersiones y embebimientos. Por último, el capítulo final estudiará detalladamente el caso de las variedades cociente, que aportarán un nuevo punto de vista mediante la introducción de elementos puramente algebraicos.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>Índice general</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción a las variedades diferenciales</b>	<b>1</b>
1.1. Construcción de una variedad diferenciable . . . . .	1
1.2. Ejemplos de variedades diferenciables . . . . .	5
<b>2. Estructura topológica de una variedad diferenciable</b>	<b>13</b>
2.1. La topología inducida por la estructura diferenciable . . . . .	13
2.2. Aplicaciones entre variedades diferenciables . . . . .	16
2.3. Propiedades topológicas de una variedad . . . . .	23
2.4. Variedades paracompactas . . . . .	32
<b>3. Diferenciación en variedades</b>	<b>37</b>
3.1. Espacio tangente . . . . .	37
3.2. Diferencial de una aplicación diferenciable . . . . .	45
3.3. Rango de una aplicación diferenciable . . . . .	47
3.4. Fibrado tangente . . . . .	50
<b>4. Subvariedades</b>	<b>52</b>
4.1. Inmersiones . . . . .	52
4.2. Embebimientos y subvariedades regulares . . . . .	55
<b>5. Variedades cociente</b>	<b>60</b>
5.1. Submersiones . . . . .	60
5.2. Variedades cociente . . . . .	66
5.3. Grupos de transformaciones . . . . .	73
5.4. Dominios fundamentales . . . . .	82
<b>Conclusiones</b>	<b>90</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

# Índice de figuras

Todas las figuras que se incluyen en este trabajo han sido realizadas íntegramente por el autor utilizando el editor de gráficos Inkscape.

1.1. Cartas compatibles sobre un conjunto no vacío $X$ .	2
1.2. Proyecciones estereográficas de un punto de la esfera desde los polos norte y sur sobre el plano ecuatorial.	7
1.3. Cilindro en $\mathbf{R}^3$ construido como la variedad producto $S^1 \times \mathbf{R}$ .	9
2.1. Representante local de $F$ en $p$ .	17
2.2. Esquema de los conjuntos que intervienen en la demostración.	34
2.3. Esquema de los elementos que intervienen en la demostración.	36
3.1. La derivada parcial de una aplicación en un punto se define como extensión de la derivada parcial en espacios euclídeos.	40
3.2. Construcción de la $i$ -ésima curva coordenada.	41
3.3. Teorema del rango generalizado a aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables.	49
4.1. Inmersión del intervalo $(1, \infty)$ en $\mathbf{R}^2$ .	53
4.2. Inmersiones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$ .	54
4.3. Carta de $\mathbf{R}^3$ adaptada a $A$ .	56
5.1. Construcción de la carta $(U, \varphi)$ en la demostración del lema 5.1.2.	64
5.2. Construcción del entorno abierto $W$ de $\psi(f(p))$ .	65
5.3. Compatibilidad de cartas en la variedad cociente.	79
5.4. Construcción del espacio topológico $\overline{F}/\approx$ homeomorfo a $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ .	87
5.5. Cinta de Moebius.	89

# Capítulo 1

## Introducción a las variedades diferenciales

La noción de variedad diferenciable surge como caracterización de los espacios que localmente se *parecen* a  $\mathbf{R}^n$ . El modo de describir esta correspondencia será lo que fije la construcción precisa del concepto, que puede tener como motivación la relevancia del espacio  $\mathbf{R}^n$  como modelo topológico del espacio euclídeo  $n$ -dimensional o la definición de funciones diferenciables entre conjuntos arbitrarios. En nuestro caso, se tomará un conjunto no vacío sobre el que se construirá una estructura diferenciable. Partiendo de los mínimos axiomas iniciales veremos, en el capítulo posterior, cómo un carácter de homeomorfismo local surge de manera natural a partir de la construcción que mostramos en el presente capítulo. Se incluye además una colección de ejemplos que permiten una mejor comprensión de este tipo de estructuras y un acercamiento a algunas variedades diferenciales con mayor relevancia en teorías más complejas.

### 1.1. Construcción de una variedad diferenciable

**Definición 1.1.1.** Una *carta  $n$ -dimensional* sobre un conjunto no vacío  $X$  es un par  $(O, \varphi)$  donde  $O \subset X$  y  $\varphi : O \rightarrow \mathbf{R}^n$  es una aplicación inyectiva cuya imagen  $\varphi(O)$  es un abierto en  $\mathbf{R}^n$ .

**Nota 1.1.1.** Al dominio  $O$  se le denomina *entorno coordenado*. Si denotamos por  $P_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  a la proyección  $i$ -ésima en  $\mathbf{R}^n$ , las aplicaciones coordenadas asociadas a la carta  $(O, \varphi)$  se definen como  $x_i = P_i \circ \varphi$ . De este modo, cada punto  $p \in O$  tiene asignadas unas únicas coordenadas en la carta  $(O, \varphi)$  dadas por  $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ .

**Definición 1.1.2.** Se dice que dos cartas  $n$ -dimensionales  $(O_1, \varphi_1), (O_2, \varphi_2)$  sobre un conjunto no vacío  $X$  son *compatibles* si se da alguna de las condiciones siguientes:

- i)  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ;
- ii)  $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ ,  $\varphi_1(O_1 \cap O_2)$  y  $\varphi_2(O_1 \cap O_2)$  son abiertos en  $\mathbf{R}^n$  y la aplicación

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(O_1 \cap O_2) \longrightarrow \varphi_1(O_1 \cap O_2) \quad (1.1)$$

es un difeomorfismo.

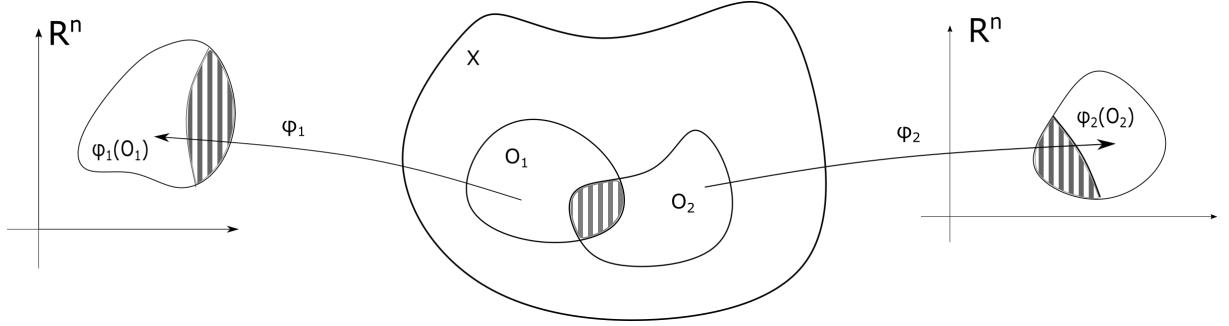


Figura 1.1: Cartas compatibles sobre un conjunto no vacío  $X$ .

**Definición 1.1.3.** Un *atlas  $n$ -dimensional*  $\mathcal{A}$  sobre un conjunto no vacío  $X$  es una colección de cartas  $n$ -dimensionales  $\{(O_i, \varphi_i) : i \in I\}$  tal que  $\{O_i\}_{i \in I}$  es un cubrimiento de  $X$  y todo par de cartas de  $\mathcal{A}$  es compatible.

**Definición 1.1.4.** Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{A}$  un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$ . Se llama *subatlas  $n$ -dimensional* de  $\mathcal{A}$  sobre  $X$  a cualquier  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}'$  es un atlas.

**Teorema 1.1.1.** *Dado un conjunto no vacío  $X$  y  $\mathcal{A} = \{(O_i, \varphi_i) : i \in I\}$  un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$ , existe un único atlas  $n$ -dimensional  $\Omega$  sobre  $X$  tal que  $\mathcal{A} \subset \Omega$ , verificando además que  $\Omega$  es un atlas maximal en el conjunto de todos los atlas  $n$ -dimensionales sobre  $X$  ordenados con la relación de contenido.*

*Demostración.* Sea  $\Omega$  el conjunto de todas las cartas  $n$ -dimensionales sobre  $X$  compatibles con todas las cartas de  $\mathcal{A}$ :

$$\Omega = \{(\tilde{O}, \tilde{\varphi}) : (\tilde{O}, \tilde{\varphi}) \text{ carta } n\text{-dimensional sobre } X \text{ compatible con } (O_i, \varphi_i) \quad \forall i \in I\}. \quad (1.2)$$

Veamos en primer lugar que  $\Omega$  es un atlas. Como  $\mathcal{A}$  es un atlas y  $\mathcal{A} \subset \Omega$ , pues las cartas de  $\mathcal{A}$  son compatibles consigo mismas al ser  $\mathcal{A}$  un atlas, es claro que  $\Omega$  cubre  $X$ , de modo que basta ver que todo par de cartas  $(\tilde{O}_1, \tilde{\varphi}_1), (\tilde{O}_2, \tilde{\varphi}_2)$  de  $\Omega$  es compatible. Supongamos  $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 \neq \emptyset$  (en otro caso ya estaría) y veamos en primer lugar que los conjuntos  $\tilde{\varphi}_1(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$  y  $\tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$  son abiertos en  $\mathbf{R}^n$ .

Sea  $x \in \tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$ . Como  $\mathcal{A}$  cubre  $X$  existirá una carta  $(O, \varphi) \in \mathcal{A}$  tal que  $p = \tilde{\varphi}_2^{-1}(x) \in O$ , de modo que  $p \in O \cap \tilde{O}_2 \neq \emptyset$  y, como  $(\tilde{O}_2, \tilde{\varphi}_2)$  es compatible con todas las cartas de  $\mathcal{A}$ , la aplicación

$$\varphi \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} : \tilde{\varphi}_2(O \cap \tilde{O}_2) \longrightarrow \varphi(O \cap \tilde{O}_2) \quad (1.3)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$ . El subconjunto  $\tilde{\varphi}_2(O \cap \tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$  es la antiimagen por la aplicación 1.3 de  $\varphi(O \cap \tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) = \varphi(O \cap \tilde{O}_1) \cap \varphi(O \cap \tilde{O}_2)$ , que es abierto en  $\mathbf{R}^n$  por la mencionada compatibilidad de cartas. Así,  $\tilde{\varphi}_2(O \cap \tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$  es un abierto que contiene a  $x$ . Como el conjunto de los dominios de las cartas de  $\mathcal{A}$  cubre  $X$ , cubrirá en particular  $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2$ . Así, si  $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i \in J}$  es un cubrimiento de  $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2$  formado por dominios de cartas de  $\mathcal{A}$ ,

$$\tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} \tilde{\varphi}_2(O \cap \tilde{\varphi}_1 \cap \tilde{\varphi}_2), \quad (1.4)$$

luego  $\tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$  será un abierto en  $\mathbf{R}^n$  por ser una unión arbitraria de abiertos. Análogamente se prueba que  $\tilde{\varphi}_1(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$  es un abierto de  $\mathbf{R}^n$ . Probemos en segundo lugar que las aplicaciones:

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} : \tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) \longrightarrow \tilde{\varphi}_1(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} : \tilde{\varphi}_1(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) \longrightarrow \tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) \quad (1.5)$$

son diferenciables de clase  $C^\infty$ . Por lo probado hasta ahora, podemos tomar un entorno abierto  $V$  de  $x$  tal que  $x \in V \subset \tilde{\varphi}_2(O \cap \tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$ . De este modo, la aplicación

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} : V \longrightarrow \tilde{\varphi}_1(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) \quad (1.6)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  pues, cuando el dominio es  $V$ , se tiene que  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} = \tilde{\varphi}_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}$  y, como hemos visto,  $\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi^{-1}$  y  $\varphi \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}$  son diferenciables de clase  $C^\infty$  en los dominios correspondientes. Como esto es válido para todo  $x \in \tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2)$ , la aplicación es diferenciable de clase  $C^\infty$  en el dominio original. El razonamiento es análogo para demostrar que  $\tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}$  es

diferenciable de clase  $C^\infty$ . Ya se tiene entonces que todas las cartas de  $\Omega$  son compatibles y, por tanto, que  $\Omega$  es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$ .

Una vez probado que  $\Omega$  es un atlas, la demostración de la maximalidad se sigue de forma inmediata: toda carta sobre  $X$  compatible con todas las cartas de  $\Omega$  será en particular compatible con todas las cartas de  $\mathcal{A}$ , de modo que estará en  $\Omega$  por definición.

Para probar la unicidad, consideramos  $\Omega'$  otro atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$  contenido a  $\mathcal{A}$ . En este caso, toda carta de  $\Omega'$  sería compatible con las cartas de  $\mathcal{A} \subset \Omega'$  y, por tanto,  $\mathcal{A} \subset \Omega' \subset \Omega$ . Pero  $\Omega'$  es por hipótesis maximal, de modo que  $\Omega' = \Omega$ .  $\square$

**Definición 1.1.5.** En las condiciones del Teorema anterior, se dice que el atlas  $n$ -dimensional  $\Omega$  proporciona a  $X$  *estructura diferenciable*. El par  $(X, \Omega)$  recibe el nombre de *variedad diferenciable  $n$ -dimensional* y las cartas del atlas  $\Omega$  se llamarán *cartas de la variedad*.

El teorema anterior establece que para definir una estructura diferenciable sobre un conjunto  $X$  basta con encontrar un atlas cualquiera sobre el mismo, quedando únicamente determinado un atlas maximal. Resulta interesante en este punto preguntarse cuándo dos atlas sobre un conjunto determinan sobre este una misma estructura diferenciable.

**Definición 1.1.6.** Dos atlas  $n$ -dimensionales  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  sobre un conjunto no vacío  $X$  se denominan *equivalentes* si su unión es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$ .

**Proposición 1.1.2.** Dos atlas  $n$ -dimensionales sobre un conjunto no vacío  $X$  son equivalentes si y solo si determinan la misma estructura diferenciable sobre  $X$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Si  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$ , por el Teorema 1.1.1 existe una única estructura diferenciable  $\Omega$  sobre  $X$  tal que  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \subset \Omega$ , es decir, tal que  $\mathcal{A}_1 \subset \Omega$  y  $\mathcal{A}_2 \subset \Omega$ . Así,  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  están contenidos en el mismo atlas maximal  $n$ -dimensional sobre  $X$ , que es único, luego ambos atlas determinarán la misma estructura diferenciable.

$\Leftarrow$  Sea ahora  $\Omega$  la estructura diferenciable sobre  $X$  que determinan  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ . Como  $\mathcal{A}_1 \subset \Omega$  y  $\mathcal{A}_2 \subset \Omega$ , todas las cartas de  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  están contenidas en  $\Omega$ , que es un atlas, luego serán compatibles entre sí. Así, como  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  cubre claramente  $X$ , la unión  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$ .  $\square$

## 1.2. Ejemplos de variedades diferenciables

Veamos en primer lugar que todo espacio vectorial real de dimensión finita  $n$  admite una estructura diferenciable  $n$ -dimensional.

**Ejemplo 1.2.1.** Sean  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de dicho espacio. El par  $(E, \varphi)$ , donde  $\varphi$  es la aplicación que asocia a cada elemento de  $E$  sus coordenadas respecto a la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ :

$$\begin{aligned} \varphi: E &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n &\longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \end{aligned} \tag{1.7}$$

es una carta  $n$ -dimensional sobre  $E$ , pues  $\varphi$  es inyectiva y la imagen  $\varphi(E) = \mathbf{R}^n$  es un abierto. Como el entorno coordenado cubre  $E$ ,  $\{(E, \varphi)\}$  es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $E$  que inducirá una única estructura diferenciable  $n$ -dimensional.

Veamos que esta estructura diferenciable no depende de la base elegida. Sea  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  otra base de  $E$  y  $\varphi'$  la correspondiente aplicación que asigna a cada  $v \in E$  sus coordenadas respecto a dicha base. Para ver que los atlas  $\{(E, \varphi)\}$  y  $\{(E, \varphi')\}$  son equivalentes veamos que su unión es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $E$ , es decir, que las cartas  $(E, \varphi)$  y  $(E, \varphi')$  son compatibles. Los conjuntos  $\varphi(E \cap E) = \varphi'(E \cap E) = \mathbf{R}^n$  son abiertos, luego basta ver que las aplicaciones de cambio de carta son diferenciables de clase  $C^\infty$ . Si el cambio de base viene dado por

$$e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e'_j, \tag{1.8}$$

la aplicación  $\varphi' \circ \varphi^{-1}: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$  actúa como:

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) &= \varphi'(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = \varphi' \left( x_1 \sum_{j=1}^n a_{1j} e'_j + \cdots + x_n \sum_{j=1}^n a_{nj} e'_j \right) = \\ &= \varphi' \left( \sum_{j=1}^n (x_1 a_{j1} + \cdots + x_n a_{nj}) e'_j \right) = \left( \sum_{i=1}^n x_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i a_{in} \right), \end{aligned}$$

luego  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  es claramente diferenciable de clase  $C^\infty$ . Así,  $(E, \varphi)$  y  $(E, \varphi')$  son compatibles y por tanto los atlas  $\{(E, \varphi)\}$  y  $\{(E, \varphi')\}$  inducen la misma estructura diferenciable  $n$ -dimensional sobre  $E$ .

**Ejemplo 1.2.2** (Matrices reales  $n \times m$ ). Un caso particular del ejemplo 1.2.1 es el espacio vectorial real de las matrices  $n \times m$ ,  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$ . En este caso, se considera la carta  $(\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R}), \varphi)$ , donde  $\varphi$  asignará a cada matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$  una  $nm$ -tupla con sus entradas ordenadas:

$$\begin{aligned}\varphi: \quad \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R}^{nm} \\ A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} &\longmapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}).\end{aligned}\tag{1.9}$$

El atlas  $nm$ -dimensional  $\{(\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R}), \varphi)\}$  corresponde efectivamente con el atlas del ejemplo 1.2.1, pues la aplicación  $\varphi$  hace corresponder a cada matriz  $A$  de  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$  sus coordenadas respecto a la base  $\{E_{ij}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , donde cada  $E_{ij}$  es una matriz  $n \times m$  con ceros en todas sus entradas excepto un 1 en la posición  $ij$ .

**Ejemplo 1.2.3.** Considérese ahora la circunferencia unidad en  $\mathbf{R}^2$  centrada en el origen:

$$S^1 = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2 : t \in \mathbf{R}\},\tag{1.10}$$

los conjuntos:

$$O_1 = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2 : -\pi < t < \pi\} \quad O_2 = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2 : 0 < t < 2\pi\},\tag{1.11}$$

y las aplicaciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1: O_1 &\longrightarrow \mathbf{R} & \varphi_2: O_2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\cos t, \sin t) &\longmapsto t & (\cos t, \sin t) &\longmapsto t\end{aligned}\tag{1.12}$$

Los pares  $(O_1, \varphi_1)$  y  $(O_2, \varphi_2)$  son cartas 1-dimensionales sobre  $S^1$ , pues  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son inyectivas y las imágenes  $\varphi_1(O_1) = (-\pi, \pi)$  y  $\varphi_2(O_2) = (0, 2\pi)$  son intervalos abiertos de  $\mathbf{R}$ . Además, como  $\varphi_1(O_1 \cap O_2) = \varphi_2(O_1 \cap O_2) = (0, \pi)$  es abierto en  $\mathbf{R}$  y los cambios de carta:

$$\begin{aligned}\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: (0, \pi) &\longrightarrow (0, \pi) & \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: (0, \pi) &\longrightarrow (0, \pi) \\ t &\longmapsto t & t &\longmapsto t\end{aligned}\tag{1.13}$$

son diferenciables de clase  $C^\infty$ ,  $\{(O_1, \varphi_1), (O_2, \varphi_2)\}$  es un atlas 1-dimensional sobre  $S^1$ , que induce una única estructura diferenciable.

**Ejemplo 1.2.4.** La esfera  $S^n$  se define como el conjunto:

$$S^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1\}. \quad (1.14)$$

Denotando por  $N$  y  $S$  a los polos norte y sur de la esfera respectivamente, es decir, a los puntos  $N = (0, \dots, 0, 1)$  y  $S = (0, \dots, 0, -1) = -N$ , consideramos los conjuntos  $O_1 = S^n \setminus \{N\}$ ,  $O_2 = S^n \setminus \{S\}$  y las aplicaciones  $\varphi_1 : O_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi_2 : O_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  definidas como:

$$\varphi_1(z_1, \dots, z_{n+1}) = \left( \frac{z_1}{1 - z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{1 - z_{n+1}} \right), \quad (1.15)$$

$$\varphi_2(z_1, \dots, z_{n+1}) = \left( \frac{z_1}{1 + z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{1 + z_{n+1}} \right). \quad (1.16)$$

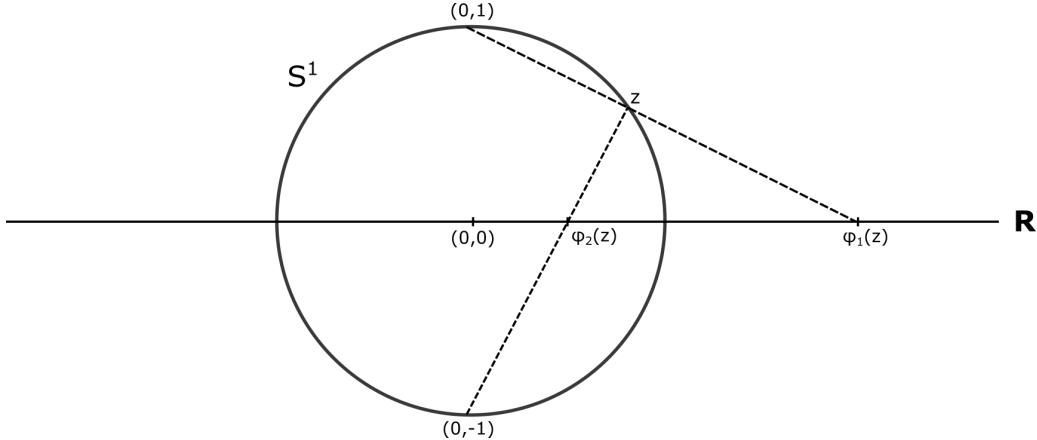


Figura 1.2: Proyecciones estereográficas de un punto de la esfera desde los polos norte y sur sobre el plano ecuatorial.

La aplicación 1.15 es la proyección estereográfica de  $O_1$  desde el polo norte sobre el plano ecuatorial, y 1.16 es la proyección estereográfica de  $O_2$  desde el polo sur sobre el mismo plano. Ambas son biyectivas, luego los pares  $(O_1, \varphi_1)$  y  $(O_2, \varphi_2)$  son cartas  $n$ -dimensionales sobre  $S^n$ . Los entornos coordinados cubren la esfera y, si denotamos las funciones coordenadas por  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$  respectivamente se tiene:

$$x_1^2(z_1, \dots, z_{n+1}) + \dots + x_n^2(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{z_1^2 + \dots + z_n^2}{(1 - z_{n+1})^2} = \frac{1 - z_{n+1}^2}{(1 - z_{n+1})^2} = \frac{1 + z_{n+1}}{1 - z_{n+1}}, \quad (1.17)$$

$$y_1^2(z_1, \dots, z_{n+1}) + \dots + y_n^2(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{z_1^2 + \dots + z_n^2}{(1 + z_{n+1})^2} = \frac{1 - z_{n+1}^2}{(1 + z_{n+1})^2} = \frac{1 - z_{n+1}}{1 + z_{n+1}}, \quad (1.18)$$

de manera que los cambios de carta vienen dados por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: & \quad \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto \left( \frac{y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2}, \dots, \frac{y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right), \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: & \quad \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \left( \frac{x_1}{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \dots, \frac{x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right), \end{aligned} \tag{1.20}$$

que son aplicaciones diferenciables de clase  $C^\infty$  cuyo dominio es el abierto  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ . Así, el conjunto  $\{(O_1, \varphi_1), (O_2, \varphi_2)\}$  es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $S^n$  que recibe el nombre de *atlas estereográfico* y que induce una única estructura diferenciable sobre  $S^n$ .

**Ejemplo 1.2.5** (Variedad producto). Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, con  $\Omega_X = \{(O_i, \varphi_i) : i \in I\}$  y  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional, con  $\Omega_Y = \{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ . Entonces, los pares  $\{(O_i \times V_j, \varphi_i \psi_j) : i \in I, j \in J\}$ , donde

$$O_i \times V_j = \{(p, q) : p \in O_i, q \in V_j\}, \tag{1.21}$$

y las aplicaciones  $\varphi_i \psi_j$  se definen como:

$$\begin{aligned} \varphi_i \psi_j: & \quad O_i \times V_j \longrightarrow \mathbf{R}^{n+m} \\ (p, q) & \longmapsto (\varphi_i \psi_j)(p, q) = (\varphi_i(p), \psi_j(q)), \end{aligned} \tag{1.22}$$

son cartas  $n+m$ -dimensionales sobre  $X \times Y$ . En efecto, las aplicaciones  $\varphi_i \psi_j$  son claramente inyectivas y las imágenes  $(\varphi_i \psi_j)(O_i \times V_j) = \varphi_i(O_i) \times \psi_j(V_j)$  son abiertos en  $\mathbf{R}^{n+m}$  por serlo  $\varphi_i(O_i)$  en  $\mathbf{R}^n$  y  $\psi_j(V_j)$  en  $\mathbf{R}^m$ . Por otro lado,  $\{O_i \times V_j : i \in I, j \in J\}$  cubre  $X \times Y$  por ser  $\{O_i : i \in I\}$  un cubrimiento de  $X$  y  $\{V_j : j \in J\}$  un cubrimiento de  $Y$ . Además, dadas dos cartas con dominios disjuntos  $(O_i \times V_j, \varphi_i \psi_j)$ ,  $(\tilde{O}_i \times \tilde{V}_j, \tilde{\varphi}_i \tilde{\psi}_j)$ , los conjuntos

$$\begin{aligned} \varphi_i \psi_j \left( (O_i \times V_j) \cap (\tilde{O}_i \times \tilde{V}_j) \right) &= \varphi_i \psi_j \left( (O_i \cap \tilde{O}_i) \times (V_j \cap \tilde{V}_j) \right) = \varphi_i(O_i \cap \tilde{O}_i) \times \psi_j(V_j \cap \tilde{V}_j)), \\ \tilde{\varphi}_i \tilde{\psi}_j \left( (O_i \times V_j) \cap (\tilde{O}_i \times \tilde{V}_j) \right) &= \tilde{\varphi}_i \tilde{\psi}_j \left( (O_i \cap \tilde{O}_i) \times (V_j \cap \tilde{V}_j) \right) = \tilde{\varphi}_i(O_i \cap \tilde{O}_i) \times \tilde{\psi}_j(V_j \cap \tilde{V}_j)), \end{aligned}$$

son abiertos en  $\mathbf{R}^{n+m}$  por serlo  $\varphi_i(O_i \cap \tilde{O}_i)$  y  $\tilde{\varphi}_i(O_i \cap \tilde{O}_i)$  en  $\mathbf{R}^n$  y  $\psi_j(V_j \cap \tilde{V}_j)$  y  $\tilde{\psi}_j(V_j \cap \tilde{V}_j)$  en  $\mathbf{R}^m$ . Finalmente, los cambios de carta:

$$\varphi_i \psi_j \circ (\tilde{\varphi}_i \tilde{\psi}_j)^{-1} = (\varphi_i \circ \tilde{\varphi}_i^{-1})(\psi_j \circ \tilde{\psi}_j^{-1}),$$

$$\tilde{\varphi}_i \tilde{\psi}_j \circ (\varphi_i \psi_j^{-1}) = (\tilde{\varphi}_i \circ \varphi_i^{-1})(\tilde{\psi}_j \circ \psi_j^{-1}),$$

son diferenciables de clase  $C^\infty$  por ser producto de aplicaciones diferenciables  $C^\infty$ . El conjunto

$$\{(O \times V, \varphi\psi) : (O, \varphi) \in \Omega_X, (V, \psi) \in \Omega_Y\} \quad (1.23)$$

determina así un atlas  $n+m$ -dimensional sobre  $X \times Y$ . La variedad diferenciable inducida recibe el nombre de *variedad producto*.

**Ejemplo 1.2.6** (Cilindro). Veamos un caso particular de variedad producto a partir de dos variedades diferenciables conocidas. Considerando la circunferencia  $S^1$  del ejemplo 1.2.3 y la variedad 1-dimensional  $(\mathbf{R}, \{(\mathbf{R}, \text{Id}_{\mathbf{R}})\})$ , la variedad diferenciable 2-dimensional  $S^1 \times \mathbf{R}$  es un cilindro en  $\mathbf{R}^3$ .

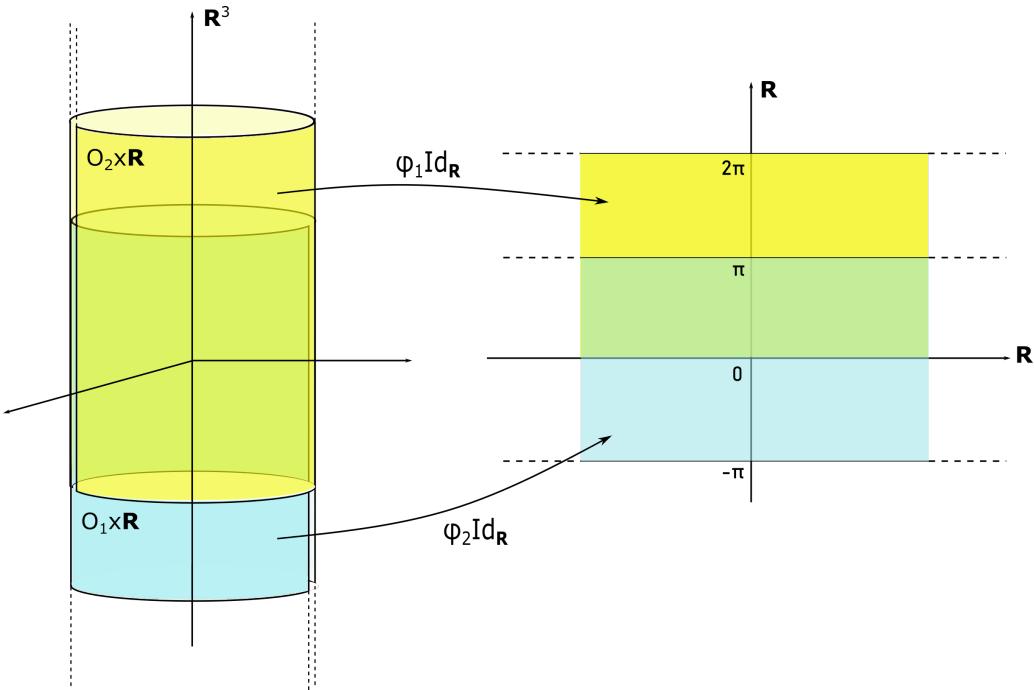


Figura 1.3: Cilindro en  $\mathbf{R}^3$  construido como la variedad producto  $S^1 \times \mathbf{R}$ .

De acuerdo al ejemplo 1.2.5, las cartas de la variedad producto  $S^1 \times \mathbf{R}$  serán los pares  $(O_1 \times \mathbf{R}, \varphi_1 \text{Id}_{\mathbf{R}})$ ,  $(O_2 \times \mathbf{R}, \varphi_2 \text{Id}_{\mathbf{R}})$ , donde los entornos coordenados

$$O_1 \times \mathbf{R} = \{(\cos t, \sin t, z) : -\pi < t < \pi, t \in \mathbf{R}\} \quad (1.24)$$

$$O_2 \times \mathbf{R} = \{(\cos t, \sin t, z) : 0 < t < 2\pi, t \in \mathbf{R}\} \quad (1.25)$$

son cilindros en  $\mathbf{R}^3$  sobre el eje  $z$  y de radio 1, a los que se les sustraen las rectas  $\{(-1, 0, z) : z \in \mathbf{R}\}$  y  $\{(1, 0, z) : z \in \mathbf{R}\}$  respectivamente, y las aplicaciones de las cartas llevan dichas regiones a las bandas  $(-\pi, \pi) \times \mathbf{R}$  y  $(0, 2\pi) \times \mathbf{R}$  de  $\mathbf{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 \text{Id}_{\mathbf{R}} : O_1 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 & \varphi_2 \text{Id}_{\mathbf{R}} : O_2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (\cos t, \sin t, z) &\longmapsto (t, z) & (\cos t, \sin t, z) &\longmapsto (t, z). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Así, el cilindro en  $\mathbf{R}^3$  queda construido como la variedad diferenciable 2-dimensional  $S^1 \times \mathbf{R}$ .

**Ejemplo 1.2.7** (Variedades de Grassmann). Se denomina *p-plano* en  $\mathbf{R}^n$  a un subespacio vectorial de  $\mathbf{R}^n$  de dimensión  $p$ . Cada *p*-plano en  $\mathbf{R}^n$  está determinado por un conjunto ordenado de  $p$  vectores de  $\mathbf{R}^n$  linealmente independientes o, equivalentemente, por una matriz real  $n \times p$ ,  $A$ , de rango  $p$ , que llamaremos matriz *representante*. Otra matriz real  $n \times p$ ,  $B$ , representa el mismo *p*-plano si  $B = AT$  para alguna matriz  $p \times p$ , real e invertible  $T$ . Construyamos una estructura diferenciable sobre el conjunto de todos los *p*-planos en  $\mathbf{R}^n$ , que denotaremos por  $G(p, \mathbf{R}^n)$ .

Sea  $\pi \in G(p, \mathbf{R}^n)$  con matriz representante  $A$ . Es claro que  $A$  tendrá  $p$  filas linealmente independientes, supongamos en primer lugar que dichas filas son las  $p$  primeras. Entonces, cualquier matriz representante de  $\pi$  tendrá las  $p$  primeras filas linealmente independientes, en particular, la matriz representante canónica:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_p \\ Z \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

donde  $\mathbb{I}_p$  es la matriz identidad  $p \times p$  y  $Z = (Z_{ij})$  es una matriz  $(n-p) \times p$ . Cada *p*-plano en las condiciones anteriores tiene asociada una única representante en la forma 1.27, luego podemos definir una biyección que asigne a cada *p*-plano las  $p$ -primeras filas linealmente independientes de cualquier matriz representante suya, que designaremos mediante la tupla  $(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{(n-p)p})$ .

Generalicemos ahora la construcción anterior. Sea  $\pi \in G(p, \mathbf{R}^n)$  y  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$  con  $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p \leq n$  el conjunto de las posiciones de las  $p$  filas que son linealmente independientes en cualquier matriz representante suya. El *p*-plano  $\pi$  admite por tanto una matriz representante canónica,  $P_\alpha$ , tal que fila  $\alpha_i$ -ésima es un vector de ceros con un 1 en la posición  $\alpha_i$ , con  $i = 1, \dots, p$ . El resto de filas  $Z_\alpha$  se usan para definir una correspondencia de manera análoga a lo anterior, que asigna al *p*-plano las  $(n-p)p$  entradas ordenadas de  $Z_\alpha$ .

Para cada colección  $\alpha$  de  $p$  enteros estrictamente ordenados entre 1 y  $n$ , definimos el conjunto  $U_\alpha$  de los *p*-planos en  $\mathbf{R}^n$  cuyas matrices representantes tengan  $p$  filas linealmente independientes

en las posiciones dadas por  $\alpha$  y la aplicación  $\varphi_\alpha$  que asigna a cada  $p$ -plano la tupla de  $\mathbf{R}^{(n-p)p}$  dada por las entradas ordenadas de  $Z_\alpha$ . Como la matriz representante canónica  $P_\alpha$  es única para cada  $p$ -plano de  $U_\alpha$ , las aplicaciones  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{R}^{(n-p)p}$  son inyectivas. Para cada elemento de  $\mathbf{R}^{(n-p)p}$  puede construirse una única matriz  $P_\alpha$ , es decir, un único  $p$ -plano en  $U_\alpha$ . Así, cada  $\varphi$  es una biyección, su imagen es el abierto  $\mathbf{R}^{(n-p)p}$  y los pares del conjunto:

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \text{ es un conjunto de enteros estrictamente ordenados entre } 1 \text{ y } p\} \quad (1.28)$$

son cartas  $(n-p)p$ -dimensionales sobre  $G(p, \mathbf{R}^n)$ . Veamos que  $\mathcal{A}$  es un atlas  $(n-p)p$ -dimensional sobre  $G(p, \mathbf{R}^n)$ . Los entornos coordinados cubren  $G(p, \mathbf{R}^n)$ , pues todo  $p$ -plano tiene una matriz representante con  $p$ -filas linealmente independientes. Sean  $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$  dos cartas de  $\mathcal{A}$  tales que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Sea  $\pi \in U_\alpha \cap U_\beta$  y  $P_\alpha$  su matriz canónica representante. Denotamos por  $Y_{\alpha\beta}$  la submatriz de  $P_\alpha$  formada por las filas  $\beta$  y por  $W_{\alpha\beta}$  la formada por las filas restantes. La aplicación:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} : \mathbf{R}^{(n-p)p} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \varphi_\alpha(\pi) &\longmapsto \det(Y_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

es claramente continua. Como  $\pi \in U_\alpha \cap U_\beta$  si y solo si  $\det(Y_{\alpha\beta}) \neq 0$ ,  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  es la antiimagen por  $f_{\alpha\beta}$  del abierto  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ , luego  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  es un abierto de  $\mathbf{R}^{(n-p)p}$ . Con un razonamiento análogo se tiene que  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  es también un abierto en  $\mathbf{R}^{(n-p)p}$ . Como las componentes de  $\varphi_\beta(\pi)$  se obtienen a partir de la matriz  $Z_\beta = W_{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta}^{-1}$ , el cambio de carta  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  es una función racional (cada entrada de  $Z_\beta$  se obtiene evaluando en las componentes de  $\varphi_\alpha(\pi)$  un cociente de polinomios con  $(n-p)p$  indeterminadas). Igualmente,  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  es una función racional. Como este tipo de funciones son diferenciables de clase  $C^\infty$ , todo par de cartas de  $\mathcal{A}$  es compatible y por tanto  $\mathcal{A}$  es un atlas  $(n-p)p$ -dimensional sobre  $G(p, \mathbf{R}^n)$ . La variedad diferenciable  $(n-p)p$ -dimensional  $(G(p, \mathbf{R}^n), \Omega_G)$  que queda únicamente determinada por  $\mathcal{A}$  recibe el nombre de *variedad de Grassmann*.

El caso más sencillo de una variedad de Grassmann es el espacio de los 1-planos de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , que recibe el nombre de *espacio proyectivo real* y se denota por  $P^n(\mathbf{R}) = G(1, \mathbf{R}^{n+1})$ . El espacio proyectivo real es una variedad diferenciable  $n$ -dimensional cuya estructura diferenciable puede construirse a partir de un atlas de  $n+1$  cartas.

**Ejemplo 1.2.8** (Variedades de Grassmann complejas). Un  $p$ -plano en  $\mathbf{C}^n$  es un subespacio vectorial de dimensión  $p$  del  $\mathbf{C}$ -espacio vectorial  $\mathbf{C}^n$ . Denotando el conjunto de  $p$ -planos en

$\mathbf{C}^n$  por  $G(p, \mathbf{C}^n)$ , podemos construir sobre él una variedad diferenciable de manera similar al ejemplo anterior. En este caso, cada  $p$ -plano vendrá representado por una matriz compleja  $n \times p$  de rango  $p$  o, equivalentemente, por una única representante canónica de la forma 1.27, donde  $Z$  es ahora una matriz compleja  $(n-p) \times p$ . Igualmente, para cada conjunto  $\alpha$  de enteros estrictamente ordenados entre 1 y  $p$ , consideramos el conjunto  $\tilde{U}_\alpha$  de los  $p$ -planos cuyas matrices representantes tienen las filas dadas por  $\alpha$  linealmente independientes. Dichas filas determinan la submatriz  $Z_\alpha$ , cuyas entradas ordenadas son la imagen del  $p$ -plano por la correspondencia  $\varphi_\alpha : G(p, \mathbf{C}^n) \rightarrow \mathbf{C}^{(n-p)p}$ , definida de manera análoga al ejemplo anterior. Si consideremos ahora la identificación canónica  $k : \mathbf{C}^{(n-p)p} \rightarrow \mathbf{R}^{2p(n-p)}$  dada por:

$$k(a_1 + ib_1, \dots, a_{(n-p)p} + ib_{(n-p)p}) = (a_1, b_1, \dots, a_{(n-p)p}, b_{(n-p)p}), \quad (1.30)$$

la aplicación:

$$\tilde{\varphi}_\alpha = k \circ \varphi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow \mathbf{R}^{2p(n-p)} \quad (1.31)$$

es una carta  $2p(n-p)$ -dimensional sobre  $G(p, \mathbf{C}^n)$ , pues es composición de aplicaciones inyectivas y su imagen es el abierto  $\mathbf{R}^{2p(n-p)}$ . Razonando de manera idéntica al ejemplo anterior, el conjunto de cartas:

$$\mathcal{A}' = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha) : \alpha \text{ es un conjunto de enteros estrictamente ordenados entre } 1 \text{ y } p\} \quad (1.32)$$

forma un atlas  $2p(n-p)$ -dimensional sobre  $G(p, \mathbf{C}^n)$ , que determina una única estructura diferenciable. La variedad diferenciable  $2p(n-p)$ -dimensional resultante recibe el nombre de *variedad de Grassmann compleja*.

El caso más sencillo de variedad de Grassmann compleja es el conjunto de 1-planos en  $\mathbf{C}^{n+1}$ , que se denomina *espacio proyectivo complejo*. Se trata de una variedad diferenciable  $2n$ -dimensional y se denota por  $P^n(\mathbf{C}) = G(1, \mathbf{C}^{n+1})$ .

## Capítulo 2

# Estructura topológica de una variedad diferenciable

La construcción de una estructura diferenciable permite definir el concepto de función *diferenciable* entre dos conjuntos. Esta generalización es el punto de partida elemental de muchas extensiones trascendentales de la Matemática clásica, tanto en Análisis como en Geometría, que cuentan con un gran número de aplicaciones. En este capítulo, veremos cómo cada estructura diferenciable determina de manera natural una estructura topológica, que permite introducir la noción de continuidad. Esta topología dará a las cartas el carácter de homeomorfismos locales, siendo además la única que puede verificar esta condición. Estudiaremos sus propiedades y terminaremos analizando el caso de las variedades paracompactas, que justifican algunas de las restricciones topológicas que suelen imponerse en buena parte de los textos clásicos.

### 2.1. La topología inducida por la estructura diferenciable

**Proposición 2.1.1.** Sean  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $(O, \varphi)$  una carta de la variedad. Si  $W \subset O$  es tal que  $\varphi(W)$  es abierto en  $\mathbf{R}^n$ , entonces  $(W, \varphi|_W)$  es una carta de  $\Omega$ .

*Demostración.* Hay que probar que  $(W, \varphi|_W)$  es una carta y que además es compatible con todas las cartas de la variedad. Lo primero es inmediato por la hipótesis y porque la restricción  $\varphi|_W : W \longrightarrow \varphi(W)$  es biyectiva por serlo  $\varphi$ . Sea ahora  $(O_1, \varphi_1)$  una carta de  $\Omega$ , supongamos que  $O_1 \cap W \neq \emptyset$  y veamos que es compatible con  $(W, \varphi|_W)$ . En primer lugar:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi^{-1}|_W : \varphi|_W(W \cap O_1) &\xrightarrow{j} \varphi(W \cap O_1) \xrightarrow{\varphi_1 \circ \varphi^{-1}} \varphi_1(O \cap O_1) \xrightarrow{k} \varphi_1(W \cap O_1) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Por ser  $(O_1, \varphi_1)$  y  $(O, \varphi)$  compatibles  $\varphi_1 \circ \varphi^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , luego su composición con las aplicaciones restricción e inclusión también lo será. Análogamente  $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$  es también diferenciable de clase  $C^\infty$ , luego falta ver que los conjuntos  $\varphi(W \cap O_1)$  y  $\varphi_1(W \cap O_1)$  son abiertos en  $\mathbf{R}^n$ . El primer caso es directo, pues  $\varphi(W \cap O_1) = \varphi(W) \cap \varphi(O \cap O_1)$ . Para el segundo, notemos que  $\varphi_1(W \cap O_1)$  es la antiimagen por la aplicación continua  $\varphi_1 \circ \varphi^{-1}$  del abierto  $\varphi(W \cap O_1)$ , luego ya queda probado el resultado.  $\square$

**Proposición 2.1.2.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, con  $\Omega = \{(O_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ . Entonces, el conjunto de todos los dominios de las cartas,  $\mathcal{B} = \{O_i\}_{i \in I}$ , es una base para una topología en  $X$ .

*Demostración.* La colección  $\mathcal{B}$  tiene que satisfacer las condiciones siguientes para ser base de una topología en  $X$ :

- i)  $X = \bigcup_{O \in \mathcal{B}} O$ ;
- ii) Si  $x \in O_1 \cap O_2$  con  $O_1, O_2 \in \mathcal{B}$ , entonces  $\exists O \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in O \subset O_1 \cap O_2$ .

El primer punto es trivial por ser  $\Omega$  un atlas. Para el segundo basta probar que  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{B}$ , es decir, que  $O_1 \cap O_2$  es el dominio de una carta de  $\Omega$ . Esto es inmediato porque, debido a la compatibilidad de  $(O_1, \varphi_1)$  y  $(O_2, \varphi_2)$ ,  $\varphi_1(O_1 \cap O_2)$  es un abierto de  $\mathbf{R}^n$ . Usando la proposición, 2.1.1  $(O_1 \cap O_2, \varphi_1|_{O_1 \cap O_2})$  es una carta de  $\Omega$ .  $\square$

Este resultado nos dice que al dotar a un conjunto no vacío  $X$  de una estructura diferenciable, dicha estructura induce inmediatamente una topología en  $X$  que tiene por base a los dominios de las cartas de la variedad. Esta topología se llama *topología inducida* y la denotaremos por  $\tau_X$ .

**Proposición 2.1.3.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Las aplicaciones de las cartas  $(O, \varphi)$  de  $\Omega$  son homeomorfismos.

*Demostración.* Sea  $(O, \varphi)$  una carta de  $\Omega$ . Puesto que por hipótesis  $\varphi : O \longrightarrow \varphi(O)$  es biyectiva, probaremos que  $\varphi$  es un homeomorfismo viendo que es abierta y continua. Para lo primero basta

comprobar que las imágenes de los abiertos de la base de  $\tau_X$  son abiertos en  $\mathbf{R}^n$ . Sea  $W \subset O$  abierto básico de  $\tau_X$ .  $W$  será el dominio de una carta  $(W, \varphi_W)$  de  $\Omega$ , que será compatible con  $(O, \varphi)$  de modo que  $\varphi_W \circ \varphi^{-1}$  es de clase  $C^\infty$  y su dominio  $\varphi(O \cap W) = \varphi(W)$  será abierto en  $\mathbf{R}^n$ . Para ver que  $\varphi$  es continua, sea  $U$  un abierto de  $\varphi(O)$  y veamos que  $W = \varphi^{-1}(U)$  es abierto. Como  $W = \varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(\tilde{U} \cap \varphi(O))$ , con  $\tilde{U}$  un abierto de  $\mathbf{R}^n$ , tenemos  $\varphi(W) = \tilde{U} \cap \varphi(O)$ , que es abierto en  $\mathbf{R}^n$  por serlo  $\tilde{U}$  y  $\varphi(O)$ .  $W$  satisface así las condiciones de la proposición 2.1.1, luego  $(W, \varphi|_W)$  es una carta de  $\Omega$  y su dominio será un abierto básico.  $\square$

Cabe ahora preguntarse qué ocurre si el conjunto  $X$  de la variedad viene acompañado de una topología  $\tau$ . Se pretende probar que es posible pasar de unos abiertos a otros a través de las cartas de  $\Omega$ , es decir, a través del espacio euclídeo, construyéndose así una relación entre las topologías que existe gracias a la estructura diferenciable y que será más fuerte cuanto más localmente homeomorfo a  $\mathbf{R}^n$  sea el espacio  $(X, \tau)$ .

**Proposición 2.1.4.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Entonces,  $\tau = \tau_X$  si y solo si la aplicaciones de las cartas de  $\Omega$  son homeomorfismos en la topología de  $(X, \tau)$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Basta notar que por la proposición 2.1.3 las aplicaciones de las cartas son homeomorfismos en la topología inducida.

$\Leftarrow$  Supongamos que las aplicaciones de las cartas de  $\Omega$  son homeomorfismos en  $(X, \tau)$  y veamos que  $\tau_X = \tau$  por doble contenido:

$\subset$  Sea  $U$  un abierto de  $\tau_X$ , de modo que  $U = \bigcup_{j \in J} O_j$  para una colección  $\{O_j\}_{j \in J}$  de abiertos básicos de  $\tau_X$ . Entonces,

$$\bigcup_{j \in J} O_j = \bigcup_{j \in J} \varphi_j^{-1}(\varphi_j(O_j)) \quad (2.1)$$

al ser cada  $O_j$  el dominio de una carta  $(O_j, \varphi_j)$  de  $\Omega$ . Así, cada  $\varphi_j(O_j)$  es abierto y, como cada  $\varphi_j$  es un homeomorfismo,  $\varphi_j^{-1}(\varphi_j(O_j))$  será  $\tau$ -abierto y la unión  $U$  de todos ellos también lo será.

$\supset$  Sea ahora  $U$  un abierto de  $\tau$  y veamos que es abierto en  $\tau_X$ . Como los dominios  $\{O_i\}_{i \in I}$  de las cartas de  $\Omega$  cubren  $X$ , para cada  $p \in U$  existirá una carta  $(O_p, \varphi_p)$  tal que  $p \in O_p$ ,

siendo  $O_p$  un abierto básico de  $\tau_X$  y, por el contenido anterior, también un abierto de  $\tau$ . Así, la intersección  $O_p \cap U \subset O_p$  será  $\tau$ -abierta y, como  $\varphi_p$  es por hipótesis un homeomorfismo,  $\varphi_p(O_p \cap U)$  será un abierto de  $\mathbf{R}^n$ . Por la proposición 2.1.1,  $(O_p \cap U, \varphi_p|_{O_p \cap U})$  será una carta de  $\Omega$  y por tanto  $O_p \cap U$  un abierto básico de  $\tau_X$ . Como esto es válido para todo  $p \in U$ , la unión  $U = \bigcup_{p \in U} U \cap O_p$  será  $\tau_X$ -abierto por ser unión de abiertos básicos.  $\square$

Este resultado tiene una relevancia especial: si las cartas de la variedad son homeomorfismos, es decir, si  $(X, \tau)$  es *localmente homeomorfo* a  $\mathbf{R}^n$ , entonces la topología que induce la estructura diferenciable coincide con la topología original del espacio.

## 2.2. Aplicaciones entre variedades diferenciables

**Definición 2.2.1.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $p \in X$  y  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación. Se dice que  $F$  es *diferenciable* en  $p$  si existen cartas  $(O_1, \varphi_1) \in \Omega_X$ ,  $(O_2, \varphi_2) \in \Omega_Y$  con  $p \in O_1$  y  $F(O_1) \subset O_2$  tales que la aplicación

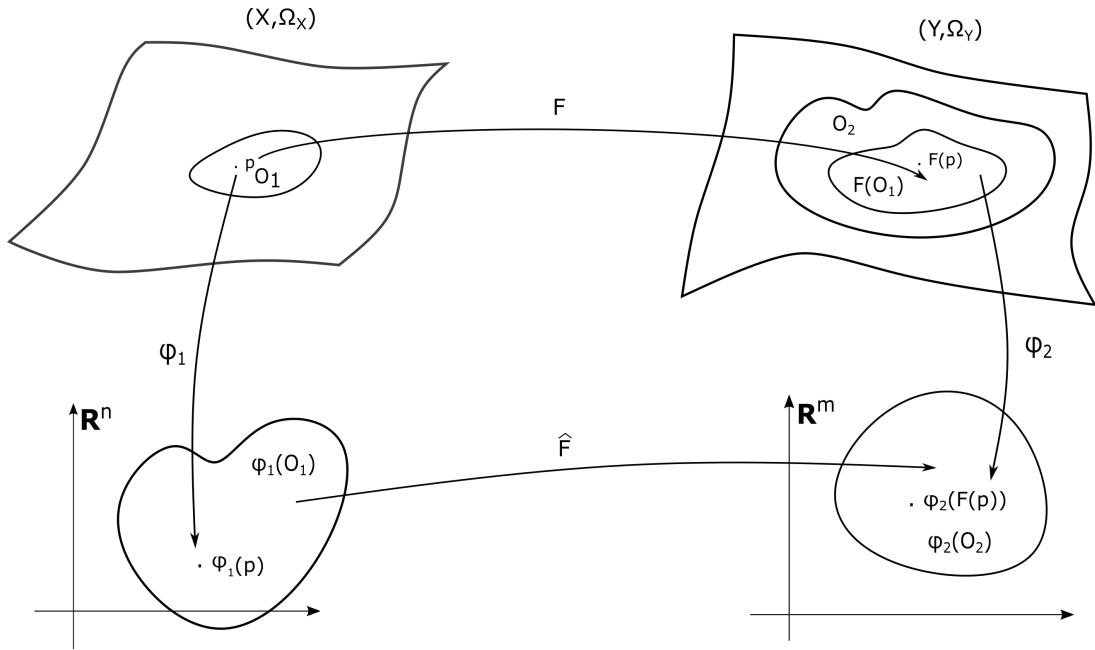
$$\hat{F} = \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(O_1) \rightarrow \varphi_2(O_2) \quad (2.2)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_1(p)$ . La aplicación 2.2 se denomina *representante local* o *representante en coordenadas* de  $F$  en  $p$ .

**Definición 2.2.2.** En las condiciones de la definición anterior, se dice que la aplicación  $F$  es *diferenciable* si es diferenciable en  $p$  para todo  $p \in X$ .

La diferenciabilidad en punto de una aplicación entre variedades diferenciables depende, como se ha introducido, de la existencia de un representante local en el punto diferenciable de clase  $C^\infty$ . Es claro que esta definición perdería rigidez si la aplicación admitiera otro representante local en el mismo punto que no fuera diferenciable de clase  $C^\infty$ . El siguiente resultado garantiza, como era de esperar, que esta situación no es posible.

**Proposición 2.2.1.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $p \in X$  y  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación. Si  $F$  tiene un representante local en  $p$  diferenciable de clase  $C^\infty$ , entonces cualquier representante local de  $F$  en  $p$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ .

Figura 2.1: Representante local de  $F$  en  $p$ .

*Demostración.* Sean  $(O_1, \varphi_1)$  una carta  $n$ -dimensional de  $\Omega_X$ ,  $(O_2, \varphi_2)$  una carta  $m$ -dimensional de  $\Omega_Y$  y  $p \in O_1$  tales que  $F(O_1) \subset O_2$  y la aplicación

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(O_1) \longrightarrow \varphi_2(O_2) \quad (2.3)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_1(p)$ , es decir, diferenciable de clase  $C^\infty$  en un entorno  $A$  de  $\varphi_1(p)$ . Sea ahora otro representante local de  $F$  en  $p$ , construido a partir de las cartas  $(\tilde{O}_1, \tilde{\varphi}_1)$  de  $\Omega_X$  y  $(\tilde{O}_2, \tilde{\varphi}_2)$  de  $\Omega_Y$ , con  $p \in \tilde{O}_1$  y  $F(\tilde{O}_1) \subset \tilde{O}_2$ . Veamos que la aplicación

$$\tilde{\varphi}_2 \circ F \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} : \tilde{\varphi}_1(\tilde{O}_1) \longrightarrow \tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_2) \quad (2.4)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\tilde{\varphi}_1(p)$ , es decir, que es diferenciable de clase  $C^\infty$  en un entorno de  $\tilde{\varphi}_1(p)$ . Tómese la intersección  $\varphi_1^{-1}(A) \cap \tilde{O}_1$ , que contiene a  $p$ , luego la imagen  $\tilde{\varphi}_1(\varphi_1^{-1}(A) \cap \tilde{O}_1)$  será un entorno de  $\tilde{\varphi}_1(p)$ . Si restringimos la aplicación 2.4 a  $\tilde{\varphi}_1(\varphi_1^{-1}(A) \cap \tilde{O}_1)$ , podemos escribir:

$$\tilde{\varphi}_2 \circ F \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = \tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}, \quad (2.5)$$

que es diferenciable en el entorno  $\tilde{\varphi}_1(\varphi_1^{-1}(A) \cap \tilde{O}_1)$  de  $\tilde{\varphi}_1(p)$  por ser composición de la aplicación de cambio de carta  $\tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2^{-1}$ , que es de clase  $C^\infty$  porque las cartas  $(O_2, \varphi_2)$  y  $(\tilde{O}_2, \tilde{\varphi}_2)$  son

compatibles al pertenecer a la misma estructura diferenciable  $\Omega_Y$ , de la aplicación  $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ , que es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $A$  por hipótesis, y de la aplicación de cambio de carta  $\varphi_1 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}$ , que es de clase  $C^\infty$  porque las cartas  $(O_1, \varphi_1)$  y  $(\tilde{O}_1, \tilde{\varphi}_1)$  son compatibles al pertenecer a la misma estructura diferenciable  $\Omega_X$ .  $\square$

**Proposición 2.2.2.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación. Si  $F$  es diferenciable, entonces  $F$  es continua.

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es diferenciable y veamos que  $F$  es continua en  $p$  para todo  $p \in X$ . Dado  $p \in X$ , como  $F$  es diferenciable en  $p$  existen cartas  $(O_1, \varphi_1)$  de  $\Omega_X$ ,  $(O_2, \varphi_2)$  de  $\Omega_Y$ , tales que  $p \in O_1$ ,  $F(O_1) \subset O_2$  y el representante local

$$\hat{F} = \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(O_1) \rightarrow \varphi_2(O_2) \quad (2.6)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_1(p)$ . En particular, el representante local  $\hat{F}$  será continuo en  $\varphi_1(p)$ , de manera que

$$F = \varphi_2^{-1} \circ \hat{F} \circ \varphi_1 : O_1 \rightarrow F(O_1) \quad (2.7)$$

será continua en  $p$  pues, como las aplicaciones de las cartas  $\varphi_1, \varphi_2$  son homeomorfismos en las topologías que inducen las variedades  $(X, \Omega_X)$  y  $(Y, \Omega_Y)$  respectivamente,  $\varphi_1$  es continua en  $p$ ,  $\hat{F}$  es continua en  $\varphi_1(p)$  y  $\varphi_2^{-1}$  es continua en  $\hat{F}(\varphi_1(p))$ .  $\square$

**Proposición 2.2.3.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $F : X \rightarrow Y$ . Si  $F$  es continua, entonces para todo  $p \in X$  existe un representante local de  $F$  en  $p$ .

*Demostración.* Sea  $p \in X$  y sea  $(V, \psi)$  una carta de  $\Omega_Y$  tal que  $F(p) \in V$ . Como  $F$  es continua y  $V$  es un abierto básico de la variedad  $(Y, \Omega_Y)$ ,  $O = F^{-1}(V)$  será un abierto en  $(X, \Omega_X)$  que contiene a  $p$ , es decir,  $O$  se escribirá como

$$O = \bigcup_{i \in I} O_i, \quad (2.8)$$

donde  $\{(O_i, \varphi_i) : i \in I\}$  es una colección de cartas de  $\Omega_X$ . Como  $p \in O$  existirá un  $i \in I$  tal que  $p \in O_i$  y, como  $O_i \subset O$ ,  $F(O_i) \subset F(O) = V$ . Así, las cartas  $(O_i, \varphi_i)$  de  $\Omega_X$  y  $(V, \psi)$  de  $\Omega_Y$  proporcionan un representante local de  $F$  en  $p$  dado por

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(O_i) \longrightarrow \psi(V). \quad (2.9)$$

□

**Proposición 2.2.4.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $F : X \longrightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Si  $A \subset X$  es abierto,  $A \in \tau_X$ , entonces  $F|_A : A \longrightarrow Y$  es diferenciable.

*Demostración.* Veamos que  $F|_A : A \longrightarrow Y$  es diferenciable en  $p$  para todo  $p \in A$ . Si  $p \in A \subset X$ , como  $F$  es diferenciable en  $p$  existen cartas  $(O_1, \varphi_1)$  de  $\Omega_X$  y  $(O_2, \varphi_2)$  tales que  $p \in O_1$ ,  $F(O_1) \subset O_2$  y el representante local  $\hat{F} = \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_1(p)$ . Como  $A \in \tau_X$ , la intersección  $A \cap O_1$  es un abierto y su imagen por  $\varphi_1$ , que es un homeomorfismo, también lo será. Así, por la proposición 2.1.1,  $A \cap O_1$  es una carta de  $\Omega_X$  contenida en  $A$  tal que  $p \in A \cap O_1$  y  $F(A \cap O_1) \subset O_2$ . Como el representante local  $\hat{F} : \varphi_1(O_1) \longrightarrow \varphi_2(O_2)$  es diferenciable en  $\varphi_1(p)$ , su restricción a  $\varphi_1(A \cap O_1)$  también lo será, luego  $F|_A$  es diferenciable en  $p$  para todo  $p \in A$ . □

**Proposición 2.2.5.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $(Z, \Omega_Z)$  una variedad diferenciable  $s$ -dimensional. Si  $F : X \longrightarrow Y$  y  $G : Y \longrightarrow Z$  son aplicaciones diferenciables, entonces  $G \circ F : X \longrightarrow Z$  es diferenciable.

*Demostración.* Sea  $p \in X$  y veamos que  $G \circ F$  es diferenciable en  $p$ . Como  $F$  es diferenciable en  $p$ , existen cartas  $(O_1, \varphi_1) \in \Omega_X$ ,  $(O_2, \varphi_2) \in \Omega_Y$  con  $p \in O_1$ ,  $F(O_1) \subset O_2$  y tales que el representante local

$$\hat{F} = \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(O_1) \longrightarrow \varphi_2(O_2) \quad (2.10)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_1(p)$ . Igualmente, como  $G$  es diferenciable en  $F(p) \in Y$ , existen cartas  $(O_3, \varphi_3) \in \Omega_Y$ ,  $(O_4, \varphi_4) \in \Omega_Z$ , con  $F(p) \in O_3$ ,  $G(O_3) \subset O_4$  y tales que el representante

local

$$\hat{G} = \varphi_4 \circ G \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(O_3) \longrightarrow \varphi_4(O_4) \quad (2.11)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_3(F(p))$ . Tomando la intersección  $O_2 \cap O_3$ , su imagen por  $\varphi_2$  será un abierto euclídeo, pues  $O_2 \cap O_3 \in \tau_Y$  y  $\varphi_2$  es un homeomorfismo. Así, por la proposición 2.1.1,  $(O_2 \cap O_3, \varphi_2|_{O_2 \cap O_3})$  es una carta  $m$ -dimensional de  $\Omega_Y$ , tal que  $F(p) \in O_2 \cap O_3$  y tal que  $G(O_2 \cap O_3) \subset O_4$ . Como  $G$  tiene un representante local en  $F(p)$  diferenciable (2.11), por la proposición 2.2.1, el representante local de  $G$  en  $F(p)$ :

$$\tilde{G} = \varphi_4 \circ G \circ \varphi_2|_{O_2 \cap O_3}^{-1} : \varphi_2(O_2 \cap O_3) \longrightarrow \varphi_4(O_4) \quad (2.12)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_2(F(p))$ , luego la composición  $\tilde{G} \circ \hat{F} : \varphi_1(O_1) \longrightarrow \varphi_4(O_4)$  es un representante local de  $G \circ F$  diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi_1(p)$ . Como esto es cierto para todo  $p \in X$ ,  $G \circ F$  es diferenciable.  $\square$

**Definición 2.2.3.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $F : X \longrightarrow Y$  una aplicación. Se dice que  $F$  es un *difeomorfismo* si es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. En este caso las variedades  $(X, \Omega_X)$  y  $(Y, \Omega_Y)$  se denominan *difeomorfas*.

**Proposición 2.2.6.** En las condiciones de la definición anterior, si  $F$  es un difeomorfismo, entonces  $F$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Sea  $F : X \longrightarrow Y$  un difeomorfismo, es decir,  $F$  es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. Por la proposición 2.2.2,  $F$  y su inversa serán continuas, luego  $F$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Proposición 2.2.7.** Ser difeomorfas es una relación de equivalencia entre variedades diferenciables.

*Demostración.*

i) Reflexividad: toda variedad diferenciable  $(X, \Omega_X)$  es difeomorfa a sí misma a través de la aplicación identidad  $\text{Id}_X : X \longrightarrow X$ , que es un difeomorfismo.  $\text{Id}_X$  es biyectiva y diferenciable, pues los representantes locales en cada punto coinciden con las aplicaciones de cambio de carta

1.1, que son de diferenciables de clase  $C^\infty$  por pertenecer a una estructura diferenciable. La aplicación identidad coincide con su inversa, luego se trata de un difeomorfismo.

*ii) Simetría:* sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $F : X \rightarrow Y$  un difeomorfismo. Por definición,  $F^{-1} : Y \rightarrow X$  será biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable, luego  $F^{-1} : Y \rightarrow X$  es un difeomorfismo de  $Y$  en  $X$ .

*iii) Transitividad:* Sean  $(X, \Omega_X)$  y  $(Y, \Omega_Y)$  las variedades del punto (ii) y sea  $(Z, \Omega_Z)$  otra variedad diferenciable  $s$ -dimensional difeomorfa a  $(Y, \Omega_Y)$ . Si  $F : X \rightarrow Y$  es el difeomorfismo del punto (ii) y  $G : Y \rightarrow Z$  es un difeomorfismo, la composición  $G \circ F : X \rightarrow Z$  es biyectiva (por ser composición de biyectivas), diferenciable y con inversa diferenciable (por la proposición 2.2.5), luego  $(X, \Omega_X)$  y  $(Z, \Omega_Z)$  son difeomorfas.  $\square$

**Ejemplo 2.2.1.** El espacio proyectivo real  $P^1(\mathbf{R})$  es difeomorfo a la circunferencia  $S^1$ .

Como hemos visto, el espacio proyectivo  $P^1(\mathbf{R})$  es el conjunto de los 1-planos de  $\mathbf{R}^2$ . De acuerdo al ejemplo 1.2.7,  $P^1(\mathbf{R})$  admite un atlas formado por dos cartas  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(U_2, \varphi_2)$ . Si  $\pi \in U_1$ ,  $\pi$  tendrá una matriz representante de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1(\pi) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

y, si además  $\pi \in U_2$ ,  $\varphi_1(\pi) \neq 0$  y la matriz  $A\varphi_1(\pi)^{-1} = (\varphi_1(\pi)^{-1} \ 1)^T$  será una matriz representante equivalente de  $\pi$ . Pero la matriz representante canónica de  $\pi$  en la forma  $(z \ 1)^T$  es única, luego necesariamente  $\varphi_2(\pi) = \varphi_1(\pi)^{-1}$ . Así, el cambio de cartas vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbf{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ s &\longmapsto \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.14)$$

que es un difeomorfismo. El dominio de  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  queda determinado por la antiimagen de  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  por la aplicación 1.29, que en este caso es la identidad. Igualmente,  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(s) = 1/s$ .

El atlas estereográfico de  $S^1$  está compuesto también por dos cartas  $(O_1, \psi_1)$ ,  $(O_2, \psi_2)$ , donde  $O_1 = S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ ,  $O_2 = S^1 \setminus \{(0, -1)\}$  y las aplicaciones de cambio de carta se escriben, de

acuerdo a 1.19, como:

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \mathbf{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ s &\longmapsto \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.15)$$

y, del mismo modo,  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(s) = 1/s$ . Ambas composiciones son difeomorfismos y coinciden con los cambios de carta del espacio proyectivo. Las aplicaciones:

$$\psi_1^{-1} \circ \varphi_1 : U_1 \subset P^1(\mathbf{R}) \longrightarrow S^1 \quad \psi_2^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \subset P^1(\mathbf{R}) \longrightarrow S^1 \quad (2.16)$$

son difeomorfismos por ser composición de difeomorfismos y, como en  $U_1 \cap U_2$  se tiene:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \Leftrightarrow \psi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \psi_1^{-1} \Leftrightarrow \psi_2^{-1} \circ \varphi_2 = \psi_1^{-1} \circ \varphi_1,$$

la aplicación  $f : P^1(\mathbf{R}) \longrightarrow S^1$  dada por

$$f(\pi) = \begin{cases} \psi_1^{-1} \circ \varphi_1(\pi) & \text{si } \pi \in U_1 \\ \psi_2^{-1} \circ \varphi_2(\pi) & \text{si } \pi \in U_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

está bien definida y es un difeomorfismo de  $P^1(\mathbf{R})$  en  $S^1$ .

**Ejemplo 2.2.2.** El espacio proyectivo complejo  $P^1(\mathbf{C})$  es difeomorfo a la esfera  $S^2$ .

El espacio proyectivo complejo  $P^1(\mathbf{C})$  es el conjunto de los 1-planos en  $\mathbf{C}^2$ , que admite un atlas con dos cartas  $(\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1), (\tilde{U}_2, \tilde{\varphi}_2)$  definidas según el ejemplo 1.2.8. Manteniendo la notación de dicho ejemplo escribiremos  $\tilde{\varphi}_1 = k \circ \varphi_1$ ,  $\tilde{\varphi}_2 = k \circ \varphi_2$  y, si  $\pi \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ ,  $\tilde{\varphi}_i(\pi) = (\tilde{\varphi}_i^1(\pi), \tilde{\varphi}_i^2(\pi))$ , con  $i = 1, 2$ . En estas condiciones,  $\pi$  estará representado por dos matrices equivalentes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1(\pi) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varphi_2(\pi) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Razonando de manera idéntica al ejemplo anterior,  $\varphi_1(\pi) \neq 0$  y  $\varphi_2(\pi) = \varphi_1(\pi)^{-1}$ . Si  $\varphi_1(\pi) = a_1 + ib_1$ , esta relación queda reescrita como:

$$\tilde{\varphi}_2^1(\pi) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\varphi_1(\pi)} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{a_1 + ib_1} \right) = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} = \frac{\tilde{\varphi}_1^1(\pi)}{|\tilde{\varphi}_1(\pi)|}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\varphi}_2^2(\pi) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\varphi_1(\pi)} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{a_1 + ib_1} \right) = -\frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} = -\frac{\tilde{\varphi}_1^2(\pi)}{|\tilde{\varphi}_1(\pi)|}. \quad (2.20)$$

Si definimos ahora la aplicación  $(\tilde{\varphi}_2)^* = k \circ (\varphi_2)^*$ , donde  $(\tilde{\varphi}_2)^*(\pi) = (\varphi_2(\pi))^*$  es la aplicación conjugación compleja, la composición  $(\tilde{\varphi}_2)^* \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}$  coincide con el cambio de carta 1.19 del atlas estereográfico de  $S^2$ , formado por las cartas 2-dimensionales  $(O_1, \psi_1)$  y  $(O_2, \psi_2)$ . Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, las aplicaciones:

$$\psi_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 : \tilde{U}_1 \subset P^1(\mathbf{C}) \longrightarrow S^2 \quad \psi_2^{-1} \circ (\tilde{\varphi}_2)^* : \tilde{U}_2 \subset P^1(\mathbf{C}) \longrightarrow S^2 \quad (2.21)$$

son difeomorfismos por ser composición de difeomorfismos y, como en  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$  se tiene:

$$(\tilde{\varphi}_2)^* \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \Leftrightarrow \psi_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 = \psi_2^{-1} \circ (\tilde{\varphi}_2)^*, \quad (2.22)$$

la aplicación  $g : P^1(\mathbf{C}) \longrightarrow S^2$  dada por

$$g(\pi) = \begin{cases} \psi_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1(\pi) & \text{si } \pi \in \tilde{U}_1 \\ \psi_2^{-1} \circ (\tilde{\varphi}_2)^*(\pi) & \text{si } \pi \in \tilde{U}_2 \end{cases} \quad (2.23)$$

está bien definida y es un difeomorfismo de  $P^1(\mathbf{C})$  en  $S^2$ .

### 2.3. Propiedades topológicas de una variedad

Cada punto  $p$  de una variedad diferenciable  $n$ -dimensional tiene un entorno homeomorfo a un abierto de  $\mathbf{R}^n$ , de manera que toda variedad diferenciable tendrá buenas propiedades topológicas locales, heredadas del espacio euclídeo a través de las cartas.

**Proposición 2.3.1.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional.  $(X, \Omega)$  es primero numerable, localmente conexa, localmente compacta y  $T_1$ .

*Demostración.* Sea  $p \in X$  y  $(O, \varphi)$  una carta de  $\Omega$  tal que  $p \in O$ . Como  $\mathbf{R}^n$  es localmente conexo, el subespacio abierto  $(\varphi(O), \tau_{\mathbf{R}^n}|_{\varphi(O)})$  también lo será. Así,  $\varphi(p) \in \varphi(O)$  tendrá una base local de entornos conexos en  $(\varphi(O), \tau_{\mathbf{R}^n}|_{\varphi(O)})$ , cuyas antiimágenes por el homeomorfismo  $\varphi$  serán entornos conexos de  $p$  en  $(O, \tau_X|_O)$ . Por tanto, todo  $p \in X$  tendrá una base de entornos conexos en  $(O, \tau_X|_O)$ , que serán también entornos de  $(X, \tau_X)$  por ser abierto el dominio de la carta. Esto prueba que la variedad es localmente conexa y, como  $\mathbf{R}^n$  satisface además el primer axioma de numerabilidad, podemos tomar la base de entornos conexos de  $\varphi(p)$  en  $(\varphi(O), \tau_{\mathbf{R}^n}|_{\varphi(O)})$

numerable, de manera que la base de  $p$  en  $(X, \tau_X)$  obtenida a través de las cartas será también numerable, lo que prueba que  $(X, \Omega)$  satisface el primer axioma de numerabilidad. Por otra parte,  $\mathbf{R}^n$  es también localmente compacto, y todo subespacio abierto como  $(\varphi(O), \tau_{\mathbf{R}^n}|_{\varphi(O)})$  también lo será. De este modo,  $\varphi(p) \in \varphi(O)$  tiene una base local de entornos compactos en  $(\varphi(O), \tau_{\mathbf{R}^n}|_{\varphi(O)})$ , cuya antiimagen por el homeomorfismo  $\varphi$  será una base local de entornos compactos de  $p$  en  $(O, \tau_X|_O)$ , que serán entornos compactos de  $p$  en el espacio total.

Veamos finalmente que la variedad  $(X, \Omega)$  es  $T_1$ . Sea  $p \in X$ ,  $(O_p, \varphi_p) \in \Omega$  tal que  $p \in O_p$  y  $q \in X$  con  $q \neq p$ . Si  $q \notin O_p$  ya está, pues tomando una carta  $(O_q, \varphi_q)$  con  $q \in O_q$  los puntos quedan separados. Si  $q \in O_p$ , recordemos que  $O_p$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbf{R}^n$ , que es un espacio  $T_1$ . Como la separabilidad  $T_1$  es una propiedad topológica (se conserva bajo homeomorfismo) existen  $U_p, U_q$  abiertos de  $\tau_X|_{O_p}$  que separan los puntos  $p$  y  $q$ . Pero  $O_p$  es abierto, luego  $U_p$  y  $U_q$  serán abiertos de  $\tau_X$  y así los puntos  $p$  y  $q$  pueden separarse en  $(X, \tau_X)$ .  $\square$

**Proposición 2.3.2.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. En los dominios de las cartas, la topología de la variedad es  $T_2$ .

*Demostración.* Sea  $(O, \varphi)$  una carta de  $\Omega$  y sean  $x, y \in O$  con  $x \neq y$ . Como  $O$  es homeomorfo a un abierto  $\varphi(O)$  de  $\mathbf{R}^n$ , que es un espacio  $T_2$  por ser metrizable, existen abiertos  $U, V \in \tau_{\mathbf{R}^n}$  tales que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Sus antiimágenes  $\varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(V)$  serán abiertos en  $\tau_X|_O$ , luego abiertos en  $\tau_X$  por ser  $O$  un abierto. Así,  $x \in \varphi^{-1}(U), y \in \varphi^{-1}(V)$  con  $\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) = \emptyset$ , luego  $(O, \tau_X|_O)$  es un subespacio topológico  $T_2$  para toda carta  $(O, \varphi)$  de la variedad.  $\square$

No obstante, una variedad diferenciable no tiene porqué tener buenas propiedades topológicas globales, en particular, no tiene porqué ser un espacio  $T_2$  ni tiene porqué verificar el segundo axioma de numerabilidad. Esto se comprobará en los ejemplos sucesivos.

**Ejemplo 2.3.1** (Recta de dos orígenes). Veamos un ejemplo de una variedad diferenciable que no es  $T_2$ . Consideramos el conjunto:

$$M = \{(t, 0) : t \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, 1)\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (2.24)$$

los subconjuntos:

$$O_1 = \{(t, 0) \in \mathbf{R}^2 : t \in \mathbf{R}\} \quad (2.25)$$

$$O_2 = \{(t, 0) \in \mathbf{R}^2 : t \neq 0\} \cup \{(0, 1)\}, \quad (2.26)$$

y las aplicaciones:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1: & O_1 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (t, 0) & \longmapsto t \end{array} \quad \begin{array}{lll} \varphi_2: & O_2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (t, 0) & \longmapsto t \\ & (0, 1) & \longmapsto 0. \end{array} \quad (2.27)$$

Es claro que  $(O_1, \varphi_1)$  y  $(O_2, \varphi_2)$  son cartas compatibles sobre cuyos dominios cubren  $M$ , luego  $\Omega = \{(O_1, \varphi_1), (O_2, \varphi_2)\}$  es un atlas 1-dimensional sobre  $M$  que inducirá una única variedad diferenciable.

Veamos que  $(M, \tau_M)$  no es  $T_2$  viendo que los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, 1)$  no se pueden separar, es decir, que no existen  $U, V \in \tau_M$  tales que  $(0, 0) \in U$ ,  $(0, 1) \in V$  con  $U \cap V = \emptyset$ . Comprobemos primero que  $O_2$  es el único dominio de carta que puede contener al  $(0, 1)$  sin contener al  $(0, 0)$ . Sea  $(O_3, \varphi_3)$  una carta de la variedad tal que  $O_3$  contiene al  $(0, 1)$  y no contiene al  $(0, 0)$ . El dominio  $O_3$  tendrá que ser de la forma  $\{(0, 1)\} \cup I \setminus \{a\}$ , donde  $I$  es una unión de intervalos abiertos sobre la recta real con  $0 \notin I$  y  $a \in I$ . Además,  $O_3$  deberá tener por imagen un abierto  $J$  de  $\mathbf{R}$ , es decir, una unión de intervalos abiertos. Si no extrajéramos el punto  $a$ , la imagen de  $(0, 1)$  no podría estar contenida en ningún intervalo de  $J$  al ser la carta una biyección, luego tendría que ser un punto aislado en  $\mathbf{R}$  contradiciendo que la imagen de  $O_3$  sea abierta. El único modo de satisfacer las condiciones de carta es tomar  $\varphi_3(I \setminus \{a\}) = J \setminus \{b\}$  y hacer  $\varphi_3((0, 1)) = b$ , consiguiendo así una biyección con imagen abierta. Pero  $(O_3, \varphi_3)$  ha de ser compatible con  $(O_2, \varphi_2)$ , luego la aplicación  $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$  tendrá que ser de clase  $C^\infty$  y tener dominio abierto. Como toda carta en las condiciones de  $O_3$  está contenida en  $O_2$ ,  $\varphi_2(O_2 \cap O_3) = \varphi_2(O_3) = I \setminus \{a\} \cup \{0\}$  que no es abierto en  $\mathbf{R}$  porque  $I$  no contiene al cero.

Por tanto, la única carta de la variedad que contiene al  $(0, 1)$  y no contiene al  $(0, 0)$  es  $(O_2, \varphi_2)$ , luego será el único abierto de la topología inducida que podamos tomar para separar  $(0, 1)$  de  $(0, 0)$ . Pero todo abierto que contiene al  $(0, 0)$  corta claramente a  $O_2$ , de modo que ambos puntos no se pueden separar.

**Proposición 2.3.3.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Si  $(X, \tau_X)$  verifica el segundo axioma de numerabilidad, entonces todo atlas de la variedad tiene un subatlas numerable.

*Demostración.* Si  $(X, \tau_X)$  verifica el segundo axioma de numerabilidad,  $\tau_X$  tiene una base  $\mathcal{B}$  numerable. Sea  $\mathcal{A}$  un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$ . El conjunto:

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : \exists (O_B, \varphi_B) \in \mathcal{A} \text{ tal que } B \subset O_B\} \quad (2.28)$$

es numerable por ser un subconjunto de  $\mathcal{B}$  y, como la base de la topología cubre  $X$ , el conjunto

$$\{(O_B, \varphi_B) : B \in \mathcal{B}'\} \subset \mathcal{A} \quad (2.29)$$

es un subatlas numerable de  $\mathcal{A}$ . □

**Proposición 2.3.4.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Si  $X$  tiene un atlas numerable, entonces  $(X, \tau_X)$  verifica el segundo axioma de numerabilidad.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{A}$  un atlas numerable, de modo que  $\mathcal{A} = \{(O_n, \varphi_n) : n \in \mathbf{N}\}$ . Cada  $O_n$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbf{R}^n$ , que es 2AN, luego tendrá una base numerable  $\{B_n^i : i \in \mathbf{N}\}$  de abiertos de  $\tau|_{O_n}$ . Como cada dominio  $O_n$  es abierto, los abiertos de la base serán también abiertos del espacio total, de modo que  $\{B_n^i : n \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{N}\}$  es una base numerable de abiertos de  $X$ . □

**Ejemplo 2.3.2.** El resultado anterior determina cuándo una variedad verifica el segundo axioma de numerabilidad, lo que no es cierto en general para cualquier variedad diferenciable. Fijado  $\lambda \in \mathbf{R}$ , consideremos el conjunto  $O_\lambda = \{(x, \lambda) : x \in \mathbf{R}\}$  y la aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda: & O_\lambda &\longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x, \lambda) &\longmapsto & x. \end{aligned} \quad (2.30)$$

La colección  $\mathcal{A} = \{(O_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$  forma un atlas 1-dimensional sobre  $\mathbf{R}^2$ . Cada  $\varphi_\lambda$  es claramente inyectiva y las imágenes  $\varphi_\lambda(O_\lambda) = \mathbf{R}$  son abiertos en  $\mathbf{R}$ , luego cada  $(O_\lambda, \varphi_\lambda)$  es una carta 1-dimensional sobre  $\mathbf{R}^2$ . Además, todos los dominios son disjuntos por construcción, luego todas las cartas son compatibles y  $\mathcal{A}$  es efectivamente un atlas que dota a  $X = \mathbf{R}^2$  de estructura de variedad diferenciable 1-dimensional. Veamos que la topología de esta variedad no puede tener una base numerable. Sea  $\mathcal{B}$  una base de  $\tau_X$ . Para cada  $\lambda \in \mathbf{R}$ , existe  $B_\lambda \in \mathcal{B}$  tal

que  $(0, \lambda) \in B_\lambda \subset O_\lambda$ , de manera que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ \lambda &\longmapsto B_\lambda \end{aligned} \tag{2.31}$$

es necesariamente inyectiva y, por tanto,  $\mathcal{B}$  es no numerable.

**Ejemplo 2.3.3.** Aunque hemos visto que toda variedad diferenciable es localmente conexa debido a las propiedades del espacio euclídeo, es fácil encontrar un ejemplo de variedad no conexa. Consideremos los intervalos  $I_1 = (0, 1) \subset \mathbf{R}$ ,  $I_2 = (2, 3) \subset \mathbf{R}$  y las aplicaciones identidad  $\varphi_1 = \text{Id}_{\mathbf{R}} : I_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $\varphi_2 = \text{Id}_{\mathbf{R}} : I_2 \longrightarrow \mathbf{R}$ . Ambas aplicaciones son inyectivas, con imágenes abiertas en  $\mathbf{R}$  y, como  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , el conjunto  $\{(I_i, \varphi_i) : i = 1, 2\}$  forma un atlas 1-dimensional sobre  $\mathbf{R}$ , que determinará una única estructura diferenciable sobre  $I_1 \cup I_2$ , que no es conexo.

**Ejemplo 2.3.4.** El espacio euclídeo  $\mathbf{R}^n$ , dotado de la aplicación identidad  $\text{Id}_{\mathbf{R}^n} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$  forma un atlas  $n$ -dimensional sobre  $\mathbf{R}^n$ . La variedad diferenciable  $n$ -dimensional inducida es un ejemplo de variedad no compacta.

**Proposición 2.3.5.** Toda variedad compacta verifica el segundo axioma de numerabilidad.

*Demostración.* Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional compacta. La estructura diferenciable  $\Omega$  es un cubrimiento abierto de  $X$ , luego poseerá un subcubrimiento abierto finito  $\Omega'$ , que será un subatlas numerable de  $\Omega$  y, por tanto, un atlas numerable de la variedad. Así, por la proposición 2.3.4, la variedad verifica el segundo axioma de numerabilidad.  $\square$

**Proposición 2.3.6.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional conexa y  $\mathcal{A} = \{(O_i, \varphi_i) : i \in I\}$  un atlas de la variedad. Si para todo  $i \in I$ , el conjunto

$$J_i = \{j \in I : O_i \cap O_j \neq \emptyset\} \tag{2.32}$$

es numerable, entonces  $(X, \tau_X)$  verifica el segundo axioma de numerabilidad.

*Demostración.* Fijado un  $i \in I$ , el entorno coordenado  $O_i$  corta a una cantidad numerable de entornos coordinados,  $\{O_j\}_{j \in J_i}$ . Sea  $B_1 = O_i$  y sea

$$B_2 = B_1 \cup \left( \bigcup_{j \in J_i} O_j \right). \tag{2.33}$$

$B_2$  es una unión numerable de entornos coordinados, de manera que tendrá intersección no vacía, por la hipótesis, con una cantidad numerable de abiertos básicos. Añadiéndolos a  $B_2$ , queda definido el conjunto

$$B_3 = B_2 \cup \{O_j : O_j \cap B_2 \neq \emptyset\}. \quad (2.34)$$

Reiterando el proceso, vamos construyendo una cadena ascendente

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots \quad (2.35)$$

tal que, si  $O$  es un entorno coordenado del atlas que corta a algún  $B_n$ , necesariamente  $O \subset B_{n+1}$  por cómo hemos construido 2.35. Sea ahora

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, \quad (2.36)$$

que es abierto por ser unión de abiertos básicos y tiene un subcubrimiento abierto numerable. Probemos que  $X = B$ . Si  $X \setminus B \neq \emptyset$ , sea  $p \in X \setminus B$ . Como  $\mathcal{A}$  cubre  $X$ , existe una carta  $(O_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}$  tal que  $p \in O_k$ . Pero  $O_k \cap B = \emptyset$ , pues en otro caso  $O_k$  cortaría a algún  $B_n \subset B$ , de manera que  $O_k \subset B_{n+1} \subset B$ , contradiciendo  $p \in X \setminus B$ . Así,  $O_k \cap B = \emptyset$ , luego  $O_k \subset X \setminus B$ . Veamos que esto implica que  $X \setminus B$  es abierto, viendo que  $X \setminus B$  se escribe como unión de abiertos básicos.

Sabemos que  $O_k \subset X \setminus B$ . Veamos que todo  $p \in (X \setminus B) \setminus O_k$  pertenece a algún entorno coordinado contenido en  $X \setminus B$ . Si  $p \in (X \setminus B) \setminus O_k$  es tal que todo abierto básico  $O_p$  con  $p \in O_p$  tiene intersección no vacía con  $B$ , entonces  $O_p$  cortará a algún  $B_n \subset B$  y, por lo razonado anteriormente,  $O_p \subset B$  necesariamente, luego  $p \notin X \setminus B$ . Así, todo  $p \in (X \setminus B) \setminus O_k$  está contenido en algún abierto básico  $O_p \subset X \setminus B$ , de manera que  $X \setminus B$  queda cubierto por una colección de entornos coordinados, cuya unión es un abierto en la topología de la variedad.

Tenemos entonces que  $X \setminus B$  es un abierto en  $\tau_X$ . Pero ya hemos visto que  $B$  es abierto, luego  $X \setminus B$  será cerrado. Como en un espacio topológico conexo los únicos subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados son el vacío y el total, necesariamente  $X \setminus B = \emptyset$  y, por tanto,  $X = B$ . Así, existe un cubrimiento numerable  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  formado por entornos coordinados del atlas  $\mathcal{A}$ , de manera que  $\{(O, \varphi) \in \mathcal{A} : O \in B\}$  es un atlas  $n$ -dimensional numerable sobre  $X$  y, por la proposición 2.3.4,  $(X, \tau_X)$  verifica el segundo axioma de numerabilidad.  $\square$

**Proposición 2.3.7.** Sea  $X$  un conjunto no vacío,  $\mathcal{A}$  un atlas  $n$ -dimensional sobre  $X$  y  $(X, \Omega)$  la variedad diferenciable  $n$ -dimensional que induce  $\mathcal{A}$ . Si  $U \in \tau_X$ , el conjunto:

$$\mathcal{A}|_U = \{(O \cap U, \varphi|_{O \cap U}) : (O, \varphi) \in \mathcal{A}\}. \quad (2.37)$$

es un atlas  $n$ -dimensional sobre  $U$ .

*Demostración.* Veamos que  $\mathcal{A}|_U$  forma un atlas  $n$ -dimensional sobre  $U$ . Como los entornos coordenados de  $\mathcal{A}$  cubren  $X$ , es claro que el conjunto  $\{O \cap U : (O, \varphi) \in \mathcal{A}\}$  es un cubrimiento de  $U$ . Las aplicaciones  $\varphi|_{O \cap U}$  son inyectivas por ser restricciones de aplicaciones inyectivas y, como  $O \cap U$  es abierto por ser intersección de abiertos, la imagen por el homeomorfismo  $\varphi$  será un abierto euclídeo, de manera que los  $(O \cap U, \varphi|_{O \cap U})$  son cartas  $n$ -dimensionales sobre  $U$ . Veamos que todo par de cartas es compatible. Sean  $(O_1 \cap U, \varphi_1|_{O_1 \cap U})$  y  $(O_2 \cap U, \varphi_2|_{O_2 \cap U})$  cartas  $n$ -dimensionales sobre  $U$  tales que  $(O_1 \cap U) \cap (O_2 \cap U) \neq \emptyset$ . Las aplicaciones  $\varphi_1|_{O_1 \cap U}$  y  $\varphi_2|_{O_2 \cap U}$  son homeomorfismos en  $O_1 \cap U$  y  $O_2 \cap U$  por ser subespacios abiertos, luego los conjuntos

$$\varphi_1|_{O_1 \cap U}((O_1 \cap U) \cap (O_2 \cap U)) = \varphi_1|_{O_1 \cap U}(O_1 \cap O_2 \cap U) \quad (2.38)$$

$$\varphi_2|_{O_2 \cap U}((O_1 \cap U) \cap (O_2 \cap U)) = \varphi_2|_{O_2 \cap U}(O_1 \cap O_2 \cap U) \quad (2.39)$$

son abiertos euclídeos por ser  $O_1 \cap O_2 \cap U$  abiertos en  $X$ , y por tanto abiertos en los subespacios abiertos  $O_1 \cap U$  y  $O_2 \cap U$ . Finalmente, las aplicaciones

$$\varphi_1|_{O_1 \cap U} \circ \varphi_2|_{O_2 \cap U}^{-1} : \varphi_2|_{O_2 \cap U}(O_1 \cap O_2 \cap U) \longrightarrow \varphi_1|_{O_1 \cap U}(O_1 \cap O_2 \cap U) \quad (2.40)$$

$$\varphi_2|_{O_2 \cap U} \circ \varphi_1|_{O_1 \cap U}^{-1} : \varphi_1|_{O_1 \cap U}(O_1 \cap O_2 \cap U) \longrightarrow \varphi_2|_{O_2 \cap U}(O_1 \cap O_2 \cap U) \quad (2.41)$$

son diferenciables de clase  $C^\infty$  por la proposición 2.2.4. Así,  $\mathcal{A}|_U$  forma un atlas  $n$ -dimensional sobre  $U$ .  $\square$

**Proposición 2.3.8.** En las condiciones de la proposición anterior, si el atlas  $\mathcal{A}$  es maximal, es decir, si  $\mathcal{A} = \Omega$ , entonces el par  $(U, \Omega|_U)$  es una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, que recibe el nombre de *subvariedad abierta* de  $(X, \Omega)$ . Además, la topología inducida  $\tau_U$  coincide con la topología de  $U$  como subespacio de  $X$ ,  $\tau_X|_U$ .

*Demostración.* Hay que probar que  $\Omega|_U$  es un atlas maximal, es decir, que toda carta  $n$ -dimen-

sional sobre  $U$  compatible con todas las cartas de  $\Omega|_U$  pertenece necesariamente a  $\Omega|_U$ . Si  $(V, \psi)$  es una carta en las condiciones anteriores,  $V \subset U \subset X$ ,  $\psi : V \rightarrow \mathbf{R}^n$  es una aplicación inyectiva y  $\varphi(V)$  es un abierto euclídeo, de manera que  $(V, \psi)$  es también una carta  $n$ -dimensional sobre  $X$ . Así,  $(V, \psi) = (V \cap U, \psi|_{V \cap U})$ , donde  $(V, \psi)$  es una carta  $n$ -dimensional sobre  $X$ . Si probamos que  $(V, \psi) \in \Omega$ , ya se tiene necesariamente que  $(V, \psi) \in \Omega|_U$ , y por tanto el atlas  $\Omega|_U$  es maximal. Para ello, como  $\Omega$  es un atlas maximal sobre  $X$ , basta comprobar que  $(V, \psi)$  es compatible con todas las cartas de  $\Omega$ .

Sea  $(O, \varphi)$  una carta de  $\Omega$  y supongamos que  $O \cap V \neq \emptyset$ . Como  $V \subset U$ :

$$\varphi(O \cap V) = \varphi|_{O \cap V}(O \cap V) = \varphi|_{O \cap V}(O \cap U \cap V), \quad \psi(O \cap V) = \psi(O \cap U \cap V), \quad (2.42)$$

luego  $\varphi(O \cap V)$  y  $\psi(O \cap V)$  son abiertos euclídeos por ser  $(V, \psi)$  compatible con  $(O \cap U, \varphi|_{O \cap U})$  como carta de  $\Omega|_U$ . Igualmente, las aplicaciones:

$$\psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi|_{O \cap U}^{-1} \quad \varphi \circ \psi^{-1} = \varphi|_{O \cap U} \circ \psi^{-1} \quad (2.43)$$

son diferenciables de clase  $C^\infty$ , luego  $(V, \psi)$  es compatible con  $(O, \varphi)$  para toda carta  $(O, \varphi)$  de  $\Omega$ . Así, por lo razonado antes,  $\Omega|_U$  es un atlas  $n$ -dimensional maximal sobre  $U$ .

Veamos finalmente que  $\tau_U = \tau_X|_U$ . Si  $V$  es un abierto de  $\tau_U$ ,  $V$  se escribirá como unión de abiertos básicos de  $\tau_U$ , es decir, de entornos coordinados de la subvariedad abierta:

$$V = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap U) = \left( \bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap U, \quad (2.44)$$

luego  $V$  es un abierto de  $\tau_X|_U$  por ser intersección de  $U$  y un abierto de  $\tau_X$ . Recíprocamente, si  $V \in \tau_X|_U$ ,  $V = W \cap U$  con  $W \in \tau_X$ , donde  $W$  se escribirá como unión de abiertos básicos de  $\tau_X$ . Entonces,

$$V = W \cap U = \left( \bigcup_{j \in J} O_j \right) \cap U = \bigcup_{j \in J} (O_j \cap U), \quad (2.45)$$

que es una unión de abiertos básicos de  $\tau_U$ .  $\square$

**Proposición 2.3.9.** Sea  $X$  un conjunto no vacío,  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  dos atlas  $n$ -dimensionales equivalentes sobre  $X$  y  $(X, \Omega)$  la variedad diferenciable  $n$ -dimensional que inducen  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ . Entonces, si  $U \in \tau_X$ , los atlas  $\mathcal{A}_1|_U$  y  $\mathcal{A}_2|_U$  son equivalentes sobre  $U$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{A}_1 \subset \Omega$ :

$$\mathcal{A}_1|_U = \{(O_1 \cap U, \varphi_1|_{O_1 \cap U}) : (O_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1\} \subset \{(O \cap U, \varphi|_{O \cap U}) : (O, \varphi) \in \Omega\} = \Omega|_U$$

y, como  $\mathcal{A}_2 \subset \Omega$ , análogamente  $\mathcal{A}_2|_U \subset \Omega|_U$ . Así, por la unicidad del teorema 1.1.1,  $\mathcal{A}_1|_U$  y  $\mathcal{A}_2|_U$  inducen la misma estructura diferenciable  $\Omega|_U$  y, por tanto, son atlas equivalentes sobre  $U$ .  $\square$

**Ejemplo 2.3.5.** Denotemos por  $\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R})$  al conjunto de matrices reales  $n \times p$  de rango  $p$ . Considerando la estructura diferenciable  $np$ -dimensional sobre el conjunto  $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$  descrita en el ejemplo 1.2.2, veamos que  $\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R})$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$  y que, por tanto, admite una estructura de subvariedad abierta.

Consideramos  $C_n^p = \binom{n}{p}$ , es decir, el número de combinaciones posibles (sin repeticiones) de  $p$  elementos entre  $n$ . Fijada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$ , cada combinación de entre las anteriores determina una submatriz de  $A$  formada por las  $p$  filas que asigna la combinación. Cada  $i = 1, \dots, \binom{n}{p}$  determinará una combinación a través de cualquier biyección:

$$\{1, \dots, \binom{n}{p}\} \longrightarrow \{S \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) : |S| = p\}, \quad (2.46)$$

donde  $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$  denota las partes del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Si denotamos por  $A_i$  la submatriz  $p \times p$  de  $A$  correspondiente a la combinación  $i$ -ésima, construyamos, para cada  $i = 1, \dots, \binom{n}{p}$ , la aplicación:

$$\begin{aligned} \nu_i: \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto \det(A_i). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Considerando la mencionada estructura diferenciable sobre  $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$ , que denotaremos por  $\Omega_{\mathcal{M}}$ , y la estructura diferenciable  $\{(\mathbf{R}, \text{Id}_{\mathbf{R}})\}$  sobre  $\mathbf{R}$ , la aplicación  $\nu_i$  es diferenciable para todo  $i = 1, \dots, \binom{n}{p}$ . En efecto, si  $A \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$ , tomando la carta  $(\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R}), \varphi) \in \Omega_{\mathcal{M}}$ , la aplicación  $\text{Id}_{\mathbf{R}} \circ \nu_i \circ \varphi^{-1}: \mathbf{R}^{np} \longrightarrow \mathbf{R}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $A$  por ser composición de sumas y productos. Así,  $\nu_i$  es continua para todo  $i = 1, \dots, \binom{n}{p}$  y, como:

$$\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R}) = \bigcup_{i=1}^{\binom{n}{p}} \nu_i^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\}), \quad (2.48)$$

el subconjunto  $\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R})$  es un abierto de la topología inducida por la variedad  $(\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R}), \Omega_{\mathcal{M}})$ . Por la proposición 2.3.8, el par  $(\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R}), \Omega_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R})}) = (\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R}), \Omega_{\mathcal{M}_p})$  es una subvariedad abierta de  $(\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R}), \Omega_{\mathcal{M}})$ .

## 2.4. Variedades paracompactas

En esta sección se justificará la necesidad de restringir las propiedades topológicas de una variedad como se viene haciendo en la mayoría de textos, que suelen incluir la separabilidad  $T_2$  y la segundo numerabilidad como axiomas en la definición de estos espacios. Entre otras razones, es conveniente asumir estas condiciones porque garantizan la existencia de las particiones de la unidad, una herramienta extremadamente útil para construir funciones y estructuras globales a partir de recursos a nivel local. Tras introducir los conceptos necesarios, se probará la paracompacidad de la topología inducida por una variedad diferenciable y se derivará la existencia de particiones de la unidad.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento de un conjunto no vacío  $X$ . Un *refinamiento*  $\{V_j\}_{j \in J}$  de  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un cubrimiento de  $X$  verificando que para cada  $V_j$  existe un  $U_i$  tal que  $V_j \subset U_i$ .

**Definición 2.4.2.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  una aplicación. El *soporte* de  $f$  es la clausura del conjunto de puntos cuya imagen por  $f$  es distinta de cero:

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}. \quad (2.49)$$

**Definición 2.4.3.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una familia  $\{V_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  es *localmente finita* si para todo  $x \in X$  existe un entorno  $W_x$  de  $x$  que corta a un número finito de  $V_i$ , es decir, tal que el conjunto  $J = \{i \in I : W_x \cap V_i \neq \emptyset\}$  es finito.

**Definición 2.4.4.** Se dice que un espacio topológico es *paracompacto* si todo cubrimiento abierto tiene un refinamiento localmente finito.

**Definición 2.4.5.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una *partición de la unidad* en  $X$  es una colección  $\{f_i\}_{i \in I}$  de aplicaciones  $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$  tales que:

- i)  $\{\text{sop}(f_i) : i \in I\}$  es localmente finita;
- ii)  $f_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I;$
- iii)  $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1 \quad \forall x \in X.$

Es claro que las aplicaciones de una partición de la unidad solo toman valores en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Definición 2.4.6.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Se dice que una partición de la unidad en  $X$   $\{f_i\}_{i \in I}$  está *subordinada* a un cubrimiento de  $X$   $\{U_j\}_{j \in J}$  si para cada  $i \in I$  existe un  $j \in J$  tal que  $\text{sop}(f_i) \subset U_j$ . En particular, si  $\mathcal{A}$  es un atlas sobre  $X$ , se dice que la partición de la unidad está *subordinada* al atlas  $\mathcal{A}$  si está subordinada al cubrimiento  $\{O : (O, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ .

**Lema 2.4.1.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico localmente compacto,  $T_2$  y segundo numerable. Entonces,  $X$  es paracompacto y, además, los refinamientos de cada cubrimiento son numerables y están formados por abiertos con clausuras compactas.

*Demostración.* Veamos primeramente que existe una colección  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de abiertos tales que

i)  $\overline{G_n}$  es compacto,

ii)  $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ ,

iii)  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cubre  $X$ .

Como  $X$  es 2AN, existe una base de numerable. Por ser  $(X, \tau)$   $T_2$  y localmente compacto, consideramos la base  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que se obtiene a partir de la anterior tomando la subcolección de abiertos básicos con clausura compacta. Definimos la colección  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por inducción como:

- Para  $k = 1$ ; definimos  $G_1 = B_1$ ,
- Para  $k$ , tenemos  $r_k$  y  $G_k = B_1 \cup \dots \cup B_{r_k}$ ,
- Para  $k + 1$ , tomamos  $r_{k+1}$  como el menor entero positivo mayor que  $r_k$  tal que

$$\overline{G_k} \subset \bigcup_{i=1}^{r_{k+1}} B_i, \quad (2.50)$$

y definimos  $G_{k+1}$  como

$$G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{r_{k+1}} B_i. \quad (2.51)$$

Se obtiene así una colección  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de abiertos en las condiciones de i), ii) y iii). Por construcción, el conjunto  $\overline{G_n} \setminus G_{n-1}$  es compacto y está contenido en el abierto  $G_{n+1} \setminus \overline{G_{n-2}}$ .

Probemos ahora que  $X$  es paracompacto. Sea ahora  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Fijado  $n \geq 3$ , el conjunto

$$\{U_i \cap G_{n+1} \setminus \overline{G_{n-2}}\}_{i \in I} \quad (2.52)$$

es un cubrimiento abierto de  $\overline{G_n} \setminus G_{n-1}$ , que es compacto, luego admite un subcubrimiento abierto finito  $\{O_j^n\}_{j=1}^{k_n}$ .

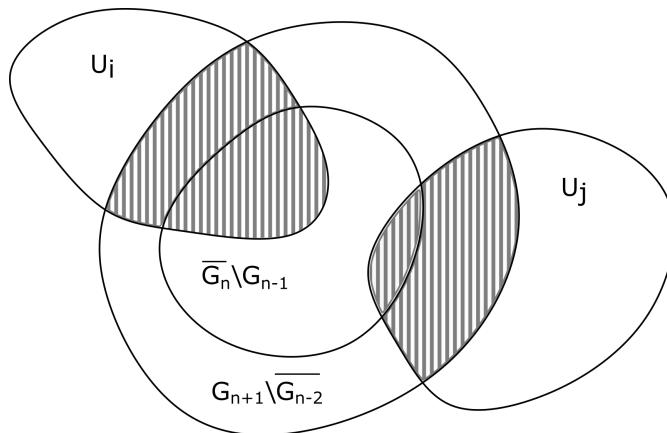


Figura 2.2: Esquema de los conjuntos que intervienen en la demostración.

Para  $n = 3$ , el conjunto  $\{U_i \cap G_3\}_{i \in I}$  cubre  $\overline{G_3}$ , que es compacto, luego admite el subcubrimiento abierto finito  $\{O_j^3\}_{j=1}^{k_3}$ . La colección

$$\{O_j^n : n \geq 3, j = 1, \dots, k_n\} \quad (2.53)$$

es claramente numerable, cubre  $X$ , está formada por abiertos con clausura compacta contenidos en algún  $U_i$  y es localmente finita, de modo que se trata de un refinamiento de  $\{U_i\}_{i \in I}$  en las condiciones del enunciado.  $\square$

**Corolario 2.4.2.** Toda variedad diferenciable  $T_2$  y segundo numerable es paracompacta.

**Lema 2.4.3.** Existe una función diferenciable  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  que toma el valor 1 en el cubo cerrado unidad  $\overline{C(1)} = [-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]$  y el valor 0 en el complementario del cubo abierto  $C(2) = (-2, 2) \times \cdots \times (-2, 2)$ .

*Demostración.* Construimos  $g$  como el producto:

$$g = \prod_{i=1}^n h \circ P_i, \quad (2.54)$$

donde  $P_i$  es aplicación coordenada  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  y  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función diferenciable y no negativa que toma el valor 1 en el intervalo  $[-1, 1]$  y el valor 0 en  $(-\infty, 2] \cup [2, \infty)$ . Esta función  $h$  se puede construir fácilmente a partir de la función:

$$f(x) = e^{-1/x} \mathcal{X}_{\{x>0\}}, \quad (2.55)$$

donde  $\mathcal{X}_A$  denota la función indicadora del subconjunto  $A \subset \mathbf{R}$ .  $f$  es no negativa y diferenciable, luego la función

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}, \quad (2.56)$$

es no negativa, diferenciable y toma el valor 1 para  $x \geq 1$  y el valor 0 para  $x \leq 0$ . La función  $h$  queda entonces determinada por  $h(x) = g(x+2)g(2-x)$ .  $\square$

**Teorema 2.4.4** (Existencia de particiones de la unidad). *Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $T_2$  y segundo numerable y sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Entonces, existe una partición de la unidad numerable  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  subordinada al cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  y cuyas funciones tienen soporte compacto.*

*Demostración.* Por ser  $(X, \Omega)$  es una variedad diferenciable, es localmente compacta. Por hipótesis es  $T_2$  y segundo numerable así que satisface las hipótesis del lema 2.4.1. Tomamos la colección  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de la demostración de dicho lema y añadimos  $G_0 = \emptyset$ . Sea  $x \in X$ ,  $n_x$  el mayor entero positivo tal que  $x \in X \setminus \overline{G_{n_x}}$ ,  $i_x \in I$  tal que  $x \in U_{i_x}$  y  $(O_x, \varphi)$  una carta de la variedad tal que  $x \in O_x \subset (G_{n_x+2} \setminus \overline{G_{n_x}})$  y tal que  $\varphi(O_x)$  contiene al cubo cerrado  $\overline{C(2)}$ .

Definimos  $g_x : X \rightarrow \mathbf{R}$  como:

$$g_x = (h \circ \varphi) \mathcal{X}_{O_x}, \quad (2.57)$$

donde  $h$  es una función en las condiciones del lema 2.4.3. Obtenemos así que  $g_x$  es una función diferenciable en  $X$  que toma el valor 1 en algún entorno abierto de  $x$ ,  $W_x$  y  $h$  toma valores distintos de cero en el compacto  $\overline{C(2)}$ , luego como  $\varphi$  es un homeomorfismo y el soporte de  $h$  co-

incide con el de  $g_x$ ,  $\text{sop}(g_x) = \varphi^{-1}(\overline{C(2)})$  es un compacto en  $O_x \subset (G_{n_x+2} \setminus \overline{G_{n_x}})$ .

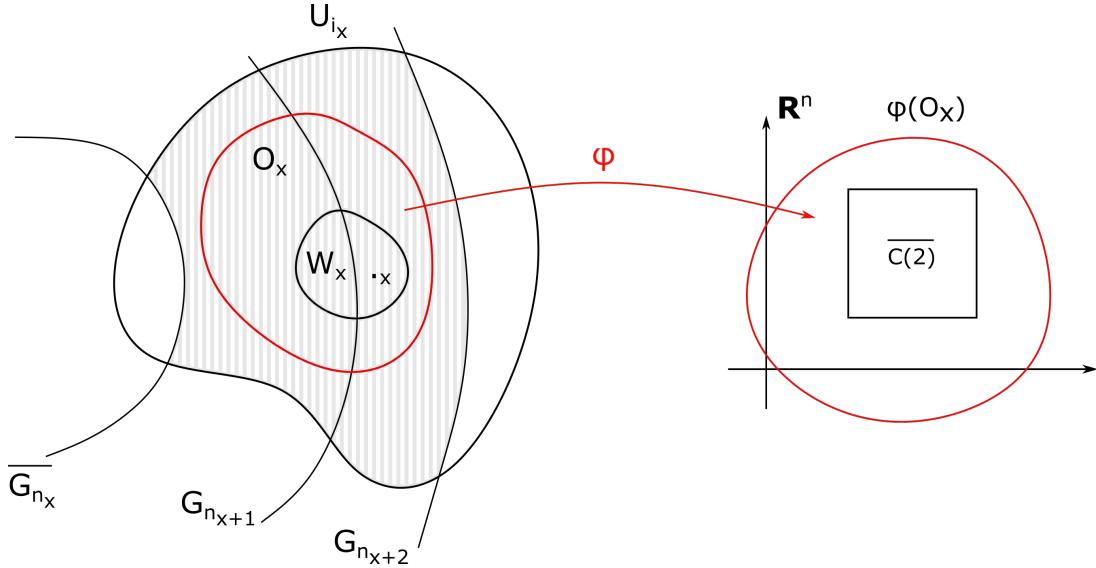


Figura 2.3: Esquema de los elementos que intervienen en la demostración.

Para cada  $n \geq 1$  se repite el mismo proceso tomando un conjunto numerable de  $x \in X$  cuyos entornos asociados  $W_x$  cubran  $\overline{G_n} \setminus G_{n-1}$ , reordenándose las funciones  $g_x$  como  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que tienen soporte compacto como se ha visto (por el lema 2.4.1 podemos tomar un refinamiento localmente finito y numerable). La función

$$g = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n, \quad (2.58)$$

está bien definida, es diferenciable sobre  $X$  y toma valores positivos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos:

$$f_n = \frac{g_n}{g}, \quad (2.59)$$

de manera que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  forma una partición de la unidad subordinada al cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  y cuyas funciones tienen soporte compacto.  $\square$

**Corolario 2.4.5.** El Teorema anterior es cierto en particular si tomamos la estructura diferenciable (o cualquier atlas de la variedad) como cubrimiento de  $X$ . Así, dada cualquier variedad diferenciable  $T_2$  y segundo numerable, existe una partición de la unidad cuyas funciones tienen soporte compacto contenido en alguna carta de la estructura diferenciable.

## Capítulo 3

# Diferenciación en variedades

Uno de los aspectos cruciales a la hora de generalizar el Cálculo Diferencial de  $\mathbf{R}^n$  a las variedades diferenciables es cómo extender la noción de vector tangente y derivada direccional de una función diferenciable. Por ello, es conveniente recordar cómo se introducen estos conceptos en el espacio euclídeo y reinterpretarlos debidamente. Un vector en un punto del espacio  $\mathbf{R}^n$  puede entenderse como un operador sobre el conjunto de las funciones diferenciables en dicho punto, que asigna a cada función su derivada direccional en la dirección del vector. Esta interpretación tiene un carácter intrínseco, por lo que su generalización a variedades no presenta problemas. A partir de ella, construiremos el espacio tangente a una variedad en un punto e introduciremos la diferenciación de aplicaciones, lo que permitirá la obtención de resultados muy relevantes en el Cálculo Diferencial, como el Teorema de la Función Inversa. Finalizaremos este capítulo con la construcción del fibrado tangente, una estructura de especial relevancia física que sirve de espacio de estados y espacio de fases para numerosos sistemas mecánicos.

### 3.1. Espacio tangente

En esta sección, sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional.

**Definición 3.1.1.** Se llama *curva* en  $X$  a una aplicación diferenciable  $\alpha : I \rightarrow X$ , donde  $I$  es un abierto de  $\mathbf{R}$  con la topología usual. Dado  $p \in X$ , se dice que una curva  $\alpha$  *pasa por*  $p$  si existe un  $t \in I$  tal que  $\alpha(t) = p$ .

**Observación 3.1.1.** Nótese que podemos suponer  $0 \in I$  sin pérdida de generalidad ya que, si  $\alpha$  es tal que  $\alpha(0) = p$ , siempre se puede reparametrizar la curva para tener  $\alpha(0) = p$ .

**Definición 3.1.2.** Dadas dos curvas  $\alpha : I_\alpha \rightarrow X$ ,  $\beta : I_\beta \rightarrow X$  verificando  $I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset$ , se define la suma de ambas como la curva:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta : I_\alpha \cap I_\beta &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (\alpha + \beta)(t) = \alpha(t) + \beta(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dada una curva  $\alpha : I_\alpha \rightarrow X$  y  $\lambda \in \mathbf{R}$ , se define la curva producto  $\lambda\alpha$  como:

$$\begin{aligned} \lambda\alpha : I_\alpha &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (\lambda\alpha)(t) = \lambda\alpha(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Definición 3.1.3.** Sea  $p \in X$ . Se denota por  $C^\infty(p)$  al conjunto de las aplicaciones  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  diferenciables en  $p$ .

**Definición 3.1.4.** Sea  $\alpha$  una curva en  $X$  que pasa por  $p$  con  $\alpha(t_0) = p$ . Se define el *vector tangente a  $\alpha$  en  $p$*  como la aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0) : C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \alpha'(t_0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=t_0}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Definición 3.1.5.** Un *vector tangente a  $X$  en  $p$*  es un vector tangente a una curva en  $X$  que pasa por  $p$ . El conjunto de todos los vectores tangentes a  $X$  en  $p$  se llama *espacio tangente a  $X$  en  $p$*  y se denota por  $T_p X$ .

**Proposición 3.1.1.** El espacio tangente a  $X$  en  $p$  tiene estructura de  $\mathbf{R}$ -espacio vectorial, con la suma de vectores tangentes a  $X$  en  $p$  dada por:

$$(\alpha'(t_0) + \beta'(t_1))(f) = \alpha'(t_0)(f) + \beta'(t_1)(f), \tag{3.4}$$

donde  $\alpha(t_0) = p = \beta(t_1)$  siendo  $\alpha$  y  $\beta$  curvas en  $X$  que pasan por  $p$ , y el producto por escalares  $\mu \in \mathbf{R}$  dado por:

$$(\mu\alpha'(t_0))(f) = \mu(\alpha'(t_0)(f)). \tag{3.5}$$

*Demostración.* Demostraremos que,  $\forall \alpha'(t_0), \beta'(t_1)$  vectores tangentes a  $X$  en  $p$  y  $\forall \mu, \lambda \in \mathbf{R}$ , se tiene que  $\mu\alpha'(t_0) + \lambda\beta'(t_1)$  es un vector tangente a  $X$  en  $p$ . Como siempre se puede reparametrizar una curva (observación 3.1.1) podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $t_1 = t_0$ , de modo

que:

$$\begin{aligned} (\mu\alpha'(t_0) + \lambda\beta'(t_0))(f) &= \mu\alpha'(t_0)(f) + \lambda\beta'(t_0)(f) = \mu\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0) + \lambda\frac{d}{dt}(f \circ \beta)(t_0) = \\ &= \frac{d}{dt}[f \circ (\mu\alpha + \lambda\beta)](t_0), \end{aligned}$$

que es un vector tangente a la curva  $\mu\alpha + \lambda\beta$  (definición 3.1.2) en  $p$ .  $\square$

**Definición 3.1.6.** Una aplicación  $\Lambda : C^\infty(p) \rightarrow \mathbf{R}$  se llama *derivación* sobre  $C^\infty(p)$  si es lineal y verifica la regla de Leibniz, es decir, si para todo  $f, g \in C^\infty(p)$ :

$$\Lambda(fg) = f(p)\Lambda(g) + \Lambda(f)g(p), \quad (3.6)$$

donde las operaciones suma y producto en  $C^\infty(p)$  se definen como:  $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$  y  $(fg)(t) = f(t)g(t)$ .

**Proposición 3.1.2.** El conjunto de las derivaciones sobre  $C^\infty(p)$  es un  $\mathbf{R}$ -espacio vectorial con la suma  $(\Lambda_1 + \Lambda_2)(f) = \Lambda_1(f) + \Lambda_2(f)$  y el producto por escalares  $(\mu\Lambda)(f) = \mu(\Lambda(f))$ .

*Demostración.* Sean  $\Lambda_1, \Lambda_2$  derivaciones sobre  $C^\infty(p)$  y sean  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Veamos que  $\lambda\Lambda_1 + \mu\Lambda_2$  es una derivación sobre  $C^\infty(p)$ . Sean  $f, g \in C^\infty(p)$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ :

- i)  $(\lambda\Lambda_1 + \mu\Lambda_2)(\alpha f + \beta g) = (\lambda\Lambda_1)(\alpha f + \beta g) + (\mu\Lambda_2)(\alpha f + \beta g) = \alpha\lambda\Lambda_1(f) + \beta\lambda\Lambda_1(g) + \alpha\mu\Lambda_2(f) + \beta\mu\Lambda_2(g) = \alpha(\lambda\Lambda_1 + \mu\Lambda_2)(f) + \beta(\lambda\Lambda_1 + \mu\Lambda_2)(g)$  por ser  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$   $\mathbf{R}$ -lineales.
- ii)  $(\lambda\Lambda_1 + \mu\Lambda_2)(fg) = (\lambda\Lambda_1)(fg) + (\mu\Lambda_2)(fg) = \lambda f(p)\Lambda_1(g) + \lambda\Lambda_1(f)g(p) + \mu f(p)\Lambda_2(g) + \mu\Lambda_2(f)g(p) = f(p)(\lambda\Lambda_1 + \mu\Lambda_2)(g) + (\lambda\Lambda_1 + \mu\Lambda_2)(f)g(p)$  por satisfacer  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  la regla de Leibniz.

$\square$

**Proposición 3.1.3.** Todo vector tangente a  $X$  en un punto  $p$  es una derivación sobre  $C^\infty(p)$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}$  una curva en  $X$  que pasa por  $p$  y  $\alpha'(t_0)$  el vector tangente a  $\alpha$  en  $p$ . Veamos que  $\alpha'(t_0)$  es una derivación viendo que es lineal (i) y que satisface la regla de Leibniz (ii):

$$\begin{aligned} i) \quad \alpha'(t_0)(\lambda f + \mu g) &= \frac{d}{dt}[(\lambda f + \mu g) \circ \alpha]_{t_0} = \frac{d}{dt}[(\lambda f \circ \alpha) + (\mu g \circ \alpha)]_{t_0} = \frac{d}{dt}[(\lambda f \circ \alpha)]_{t_0} + \\ &+ \frac{d}{dt}[(\mu g \circ \alpha)]_{t_0} = \lambda\alpha'(t_0)(f) + \lambda\alpha'(t_0)(f) + \mu\alpha'(t_0)(g), \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \alpha'(t_0)(fg) = \frac{d}{dt} [fg \circ \alpha]_{t_0} = \frac{d}{dt} [fg(\alpha(t))]_{t_0} = \frac{d}{dt} [f(\alpha(t))g(\alpha(t))]_{t_0} = f(p)\alpha'(t_0)(g) + \\ + \alpha'(t_0)(f)g(p).$$

□

**Definición 3.1.7.** Sea  $p \in X$  y  $(O, \varphi)$  una carta de la variedad tal que  $p \in O$ , con funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . Si  $f \in C^\infty(p)$ , se define su *derivada parcial* con respecto a  $x_i$  en  $p$  como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)), \quad (3.7)$$

donde  $(u_1, \dots, u_n)$  son las coordenadas naturales de  $\mathbf{R}^n$ .

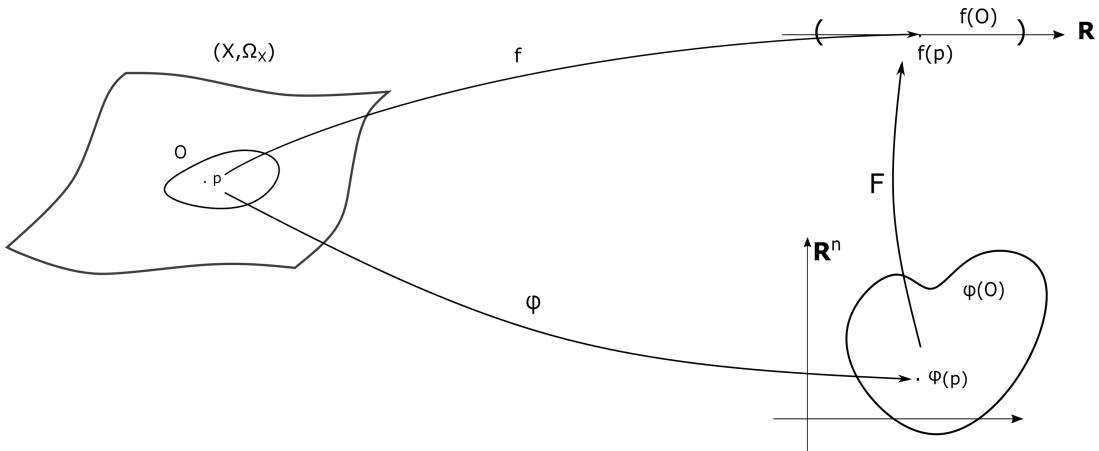


Figura 3.1: La derivada parcial de una aplicación en un punto se define como extensión de la derivada parcial en espacios euclídeos.

Notar que  $f \circ \varphi^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi(p)$  por ser  $f$  una aplicación diferenciable en  $p$ , siendo esto cierto para cualquier carta de la variedad cuyo dominio contenga a este punto (la figura 3.1 es un caso particular de la figura 2.2.1 tomando  $Y = \mathbf{R}$  y  $\varphi_2 = Id_{\mathbf{R}}$ ). Si fijamos una carta  $(O, \varphi)$  y un punto  $p \in O$ , podemos construir la aplicación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}|_p : C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \end{aligned} \quad (3.8)$$

que asigna a cada función diferenciable en  $p$  su derivada parcial con respecto a  $x_i$  en ese punto.  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$  es claramente lineal y verifica la regla de Leibniz, de modo que es una derivación sobre

$C^\infty(p)$ . Vamos a probar ahora que esta aplicación es además un vector tangente a  $X$  en  $p$ , es decir, que existe una curva  $\alpha_i : I \rightarrow X$  que pasa por  $p$  tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}|_p : C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \alpha'_i(t_0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha_i)|_{t_0}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $\alpha_i(t_0) = p$ .

Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $\mathbf{R}^n$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  definimos la curva  $\alpha_i : I \rightarrow X$  como  $\alpha_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$ , a la que llamaremos *i-ésima curva coordenada* de  $\varphi$  en  $p$ . Esta curva puede escribirse como la composición  $\varphi^{-1} \circ \xi$ , donde  $\xi : I \rightarrow \varphi(p) + Ie_i \subset \varphi(O)$ .

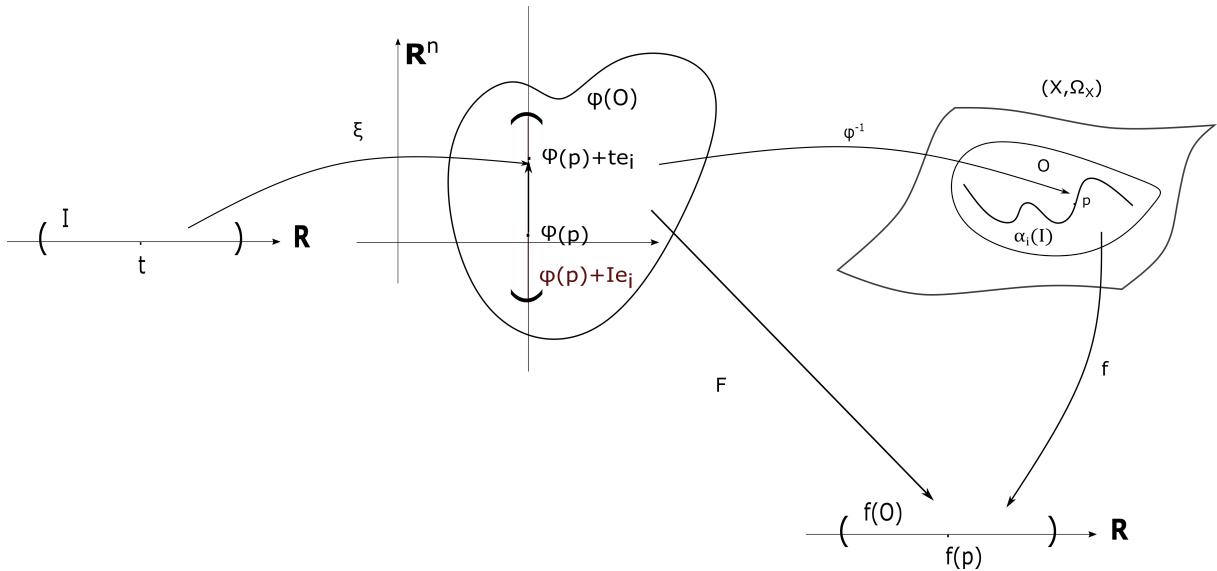


Figura 3.2: Construcción de la  $i$ -ésima curva coordinada.

Para cada  $t \in I$ , la imagen  $\alpha_i(t) \in O$  tendrá una representación en coordenadas:

$$(u_1(t), \dots, u_n(t)) = (P_1 \circ \varphi(\alpha_i(t)), \dots, P_n \circ \varphi(\alpha_i(t))) = \varphi \circ \alpha_i(t) = \beta_i(t), \quad (3.10)$$

y la aplicación  $f \in C^\infty(p)$  tendrá por representante local en  $p$  a:

$$F(u_1, \dots, u_n) = (f \circ \varphi^{-1})(u_1, \dots, u_n). \quad (3.11)$$

El vector tangente a la curva  $\alpha_i$  en el punto  $p$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \alpha'_i(0): C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \alpha'_i(0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha_i)|_{t=0}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \alpha_i)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} [f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_i]|_{t=0} = \frac{d}{dt} [F \circ \beta_i]|_{t=0} = \frac{d}{dt} [F(u_1(t), \dots, u_n(t))]|_{t=0} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j}(\beta_i(0)) \frac{du_j}{dt}(t) = \frac{\partial}{\partial u_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)|_p. \end{aligned}$$

Tenemos pues que la aplicación que asigna a cada  $f \in C^\infty(p)$  su derivada parcial con respecto a  $x_i$  en  $p$  es una derivación sobre  $C^\infty$  y además es un vector tangente a  $X$  en  $p$ . Como hemos visto en la proposición 3.1.2 el conjunto de las derivaciones sobre  $C^\infty(p)$  forma un  $\mathbf{R}$ -espacio vectorial. Veremos ahora que, fijada una carta  $(O, \varphi)$  con  $p \in O$  y funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , la colección de aplicaciones  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i=1, \dots, n}$  forma una base de dicho espacio.

**Lema 3.1.4.** Sea  $\Lambda$  una derivación sobre  $C^\infty(p)$  y sean  $f, g \in C^\infty(p)$ . Si  $f$  y  $g$  coinciden en un entorno abierto de  $p$ , entonces  $\Lambda(f) = \Lambda(g)$ .

*Demostración.* Supongamos que existe un entorno abierto  $W$  de  $p$  tal que  $f|_W = g|_W$ . Entonces,  $\Lambda(f - f|_W) = \Lambda(0|_W) = \Lambda(0(0|_W)) = 0\Lambda(0|_W) = 0$ , de modo que  $\Lambda(f) = \Lambda(f|_W)$ . Igualmente se tiene  $\Lambda(g) = \Lambda(g|_W)$ , luego por la hipótesis  $\Lambda(f) = \Lambda(g)$ .  $\square$

**Lema 3.1.5.** Sea  $\Lambda$  una derivación sobre  $C^\infty(p)$ . Si  $f \in C^\infty(p)$  es constante en un entorno abierto de  $p$ , entonces  $\Lambda(f) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $W$  un entorno abierto de  $p$  tal que  $f|_W = k$ , donde  $k$  es una aplicación constante a  $k \in \mathbf{R}$ . Por el lema anterior,  $\Lambda(f) = \Lambda(k) = \Lambda(1k) = k\Lambda(1)$ . Pero  $\Lambda$  satisface el lema de Leibniz, luego  $\Lambda(1) = \Lambda(1 \cdot 1) = 1\Lambda(1) + \Lambda(1)1 = 2\Lambda(1)$ . Por tanto,  $\Lambda(1) = 0$ , lo que prueba el resultado.  $\square$

**Lema 3.1.6.** Sea  $f \in C^\infty(p)$  y  $(O, \varphi)$  una carta de la variedad con funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . Entonces, existen  $h_1, \dots, h_n \in C^\infty(p)$  tales que, en un entorno abierto de  $p$ :

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p))h_i. \tag{3.13}$$

*Demostración.* Consideremos otra carta de la variedad  $(O, \psi)$  donde  $\psi = \varphi - \varphi(p)$ , de modo que se verifica  $\psi(p) = 0$ . Las funciones coordenadas de esta carta serán  $(y_1, \dots, y_n) = (x_1 - x_1(p), \dots, x_n - x_n(p))$ . Como  $f$  es diferenciable en  $p$ , el representante local  $F = f \circ \psi^{-1}$  será diferenciable en un entorno abierto  $W$  de  $\psi(p) = 0$ , luego para todo punto  $s = (s_1, \dots, s_n) \in W$  se tiene, por la regla de Barrow:

$$F(s) - F(0) = \int_0^1 \frac{dF}{dr}(rs_1, \dots, rs_n) dr = \int_0^1 \sum_{i=1}^n s_i \left( \frac{\partial F}{\partial s_i} \right) (rs_1, \dots, rs_n) dr = \sum_{i=1}^n s_i H_i(s_1, \dots, s_n),$$

donde  $H_i(s_1, \dots, s_n) = \int_0^1 \left( \frac{\partial F}{\partial s_i} \right) (rs_1, \dots, rs_n) dr$  para todo  $s \in W$ . Tomando  $h_i = H_i \circ \psi$  tenemos, para cada  $q \in \psi^{-1}(W)$ :

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= f(\psi^{-1}(s)) - f(\psi^{-1}(0)) = F(s) - F(0) = \sum_{i=1}^n s_i H_i(s) = \sum_{i=1}^n y_i(q) H_i(\psi(q)) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n y_i h_i \right) (q) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) h_i(q), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.  $\square$

**Proposición 3.1.7.** Sea  $(O, \varphi)$  una carta de la variedad con  $p \in O$  y funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . La colección de aplicaciones  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  es una base del espacio vectorial de derivaciones sobre  $C^\infty(p)$ .

*Demostración.* Veamos primero que  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  es un sistema generador del conjunto de las derivaciones. Sea  $\Lambda$  una derivación sobre  $C^\infty(p)$ . Por el lema 3.1.6, para cada  $f \in C^\infty(p)$  existen  $h_1, \dots, h_n \in C^\infty(p)$  tales que:

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= \Lambda \left( f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) h_i \right) = \Lambda(f(p)) + \sum_{i=1}^n \Lambda((x_i - x_i(p)) h_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \Lambda(x_i - x_i(p)) h_i(p) = \sum_{i=1}^n \Lambda(x_i) h_i(p), \end{aligned}$$

donde se han usado también los lemas 3.1.4 y 3.1.5. Esto es cierto en particular para la aplicación  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ , que ya hemos visto que es una derivación. Por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) h_j(p) = h_i(p), \quad (3.14)$$

y sustituyendo esto en la primera expresión:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n \Lambda(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p, \quad (3.15)$$

luego toda derivación se puede escribir como combinación lineal de las derivadas  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i=1,\dots,n}$ . Veamos que este sistema generador es además libre. Sean  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbf{R}$  tales que  $\sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = 0$ . Entonces:

$$0 = 0(x_j) = \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = \mu_j \quad (3.16)$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ .  $\square$

**Proposición 3.1.8.** El espacio tangente a  $X$  en  $p$  coincide con el  $\mathbf{R}$ -espacio vectorial de las derivaciones sobre  $C^\infty$ .

*Demostración.* Por 3.15, toda derivación sobre  $C^\infty(p)$  se puede escribir como una  $\mathbf{R}$ -combinación lineal de vectores tangentes a  $X$  en  $p$ . Pero como se vio en la proposición 3.1.1, toda  $\mathbf{R}$ -combinación lineal de vectores tangentes a  $X$  en  $p$  es un vector tangente a  $X$  en  $p$ . Esto, junto con la proposición 3.1.3, prueba el resultado.  $\square$

Finalmente, por la proposición 3.1.7 se deduce el siguiente teorema que culmina la construcción del espacio tangente:

**Teorema 3.1.9.** Sean  $(X, \Omega)$  una variedad  $n$ -diferenciable y  $p \in X$ . El espacio tangente a  $X$  en  $p$ ,  $T_p X$ , es un  $\mathbf{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ . Fijada una carta  $(O, \varphi)$  con  $p \in O$  y funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , la colección  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  es una base del  $\mathbf{R}$ -espacio vectorial  $T_p X$ .

Cada carta de la variedad  $n$ -diferenciable cuyo dominio contenga al punto  $p$  proporciona una base del espacio tangente a  $X$  en  $p$  a través de sus funciones coordenadas. Sean  $(O_1, \varphi_1)$ ,  $(O_2, \varphi_2)$  dos cartas de la variedad tales que  $p \in O_1, O_2$ , con funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$  respectivamente. Como las aplicaciones  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$  son derivaciones, usando 3.15 se tiene que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_p \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \quad (3.17)$$

son las *ecuaciones de cambio de base* en  $T_p X$ . Por definición de la derivada parcial:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial u_i}(y_j \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)) = \frac{\partial}{\partial u_i}(P_j \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)), \quad (3.18)$$

de modo que la matriz del cambio de base se corresponde con la matriz jacobiana de la aplicación de cambio de cartas  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}|_p \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1}(P_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_1}(P_n \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_n}(P_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_n}(P_n \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \end{pmatrix}_{\varphi_1(p)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}|_p \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n}|_p \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

### 3.2. Diferencial de una aplicación diferenciable

**Definición 3.2.1.** Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $p \in X$  y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Se define la *diferencial* de  $f$  en  $p$  como la aplicación:

$$\begin{aligned} df_p : T_p X &\longrightarrow T_{f(p)} Y \\ v &\longmapsto df_p(v) : C^\infty(f(p)) \longrightarrow \mathbf{R} \\ g &\longmapsto v(g \circ f). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Veamos que efectivamente esta aplicación está bien definida, es decir, que para todo  $v \in T_p X$  la imagen  $df_p(v)$  es un vector tangente a  $Y$  en  $f(p)$ . Para ello basta ver que  $df_p(v)$  es una derivación sobre  $C^\infty(f(p))$ , es decir, que es lineal y que verifica la regla de Leibniz. Sean  $g, h \in C^\infty(f(p))$  y  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , entonces:

$$df_p(v)(\lambda g + \mu h) = v((\lambda g + \mu h) \circ f) = v(\lambda g \circ f) + v(\mu h \circ f) = \lambda v(g \circ f) + \mu v(h \circ f),$$

lo que prueba la linealidad y, como  $v$  es una derivación y verifica la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} df_p(v)(gh) &= v(gh \circ f) = v((g \circ f)(h \circ f)) = (g \circ f)(p)v(h \circ f) + v(g \circ f)(h \circ f)(p) = \\ &= g(f(p))df_p(v)(h) + df_p(v)(g) + h(f(p)), \end{aligned}$$

lo que concluye el resultado.

**Observación 3.2.1.** La diferencial de  $f$  en  $p$  es una aplicación lineal. En efecto, si  $v, w \in T_p X$  y  $\mu, \lambda \in \mathbf{R}$ :

$$df_p(\lambda v + \mu w)(g) = (\lambda v + \mu w)(g \circ f) = \lambda v(g \in f) + \mu w(g \circ f). \quad (3.21)$$

**Observación 3.2.2.** Si  $v$  es el vector tangente a una curva  $\alpha$  con  $\alpha(0) = p$ , el vector  $df_p(v)$  es el vector tangente a la curva en  $Y$  que pasa por  $f(p)$  en  $t = 0$  dada por  $\beta = f \circ \alpha$ . Véase:

$$df_p(v)(g) = \alpha'(0)(g \circ f) = \frac{d}{dt} [g \circ f \circ \alpha]_{t=0} = \frac{d}{dt} [g \circ \beta]_{t=0}. \quad (3.22)$$

**Proposición 3.2.1.** Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación y  $p \in X$ . Si  $f$  es un difeomorfismo, entonces su diferencial en  $p$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Si  $f$  es un difeomorfismo existe la aplicación inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  que es biyectiva y diferenciable, de modo que podemos definir su diferencial en el punto  $f(p) \in Y$ :

$$\begin{aligned} df_{f(p)}^{-1} : T_{f(p)} Y &\longrightarrow T_p X \\ v &\longmapsto df_{f(p)}^{-1}(v) : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbf{R} \\ g &\longmapsto v(g \circ f^{-1}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esta aplicación verifica:

$$df_p \circ df_{f(p)}^{-1} = \text{Id}_{T_{f(p)} Y} \quad \text{y} \quad df_{f(p)}^{-1} \circ df_p = \text{Id}_{T_p X}, \quad (3.24)$$

lo que prueba que  $df_p$  es un isomorfismo. Veamos el primer caso, siendo análogo el segundo:

$$df_p \circ df_{f(p)}^{-1}(v)(g) = df_{f(p)}^{-1}(g \circ f) = v(g \circ f \circ f^{-1}) = v(g) = \text{Id}_{T_{f(p)} Y}(v)(g).$$

□

El Teorema de la función inversa asegura que el recíproco del resultado anterior es cierto a nivel local. Antes de enunciarlo recordamos un resultado necesario del Cálculo.

**Proposición 3.2.2** (Teorema de la Función Inversa). Sea  $U \subset \mathbf{R}^n$  un abierto y sea  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  una aplicación de clase  $C^\infty$ . Si el jacobiano

$$\left\{ \frac{\partial(P_i \circ f)}{\partial u_j} \right\}_{i,j=1,\dots,n} \quad (3.25)$$

es no-singular en un punto  $p \in U$ , entonces existe un abierto  $V$  con  $p \in V \subset U$  tal que la restricción  $f|_V : V \rightarrow f(V)$  es biyectiva con inversa de clase  $C^\infty$ .

**Teorema 3.2.3** (Teorema de la Función Inversa). *Sean  $(X, \Omega_X)$  y  $(Y, \Omega_Y)$  dos variedades diferenciables  $n$  y  $m$ -dimensionales respectivamente,  $p \in X$  y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Si la diferencial de  $f$  en  $p$  es un isomorfismo, entonces existe un entorno abierto  $V$  de  $p$  tal que  $f|_V : V \rightarrow f(V)$  es un difeomorfismo.*

*Demostración.* Por ser  $df_p$  un isomorfismo se tiene  $\dim(T_p X) = n = m = \dim(T_{f(p)} Y)$ . Tomando dos cartas  $n$ -dimensionales  $(O_X, \varphi_X)$  de  $\Omega_X$  y  $(O_Y, \varphi_Y)$  de  $\Omega_Y$  tales que  $p \in O_X$  y  $f(p) \in O_Y$ , la aplicación  $\varphi_Y \circ f \circ \varphi_X^{-1} : \varphi_X(O_X) \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  está en las condiciones de la proposición 3.2.2 para el punto  $\varphi_X(p)$  y por tanto existe un entorno abierto  $U$  de  $\varphi_X(p)$  tal que  $\varphi_Y \circ f \circ \varphi_X^{-1}|_U$  es un difeomorfismo. Tomando  $V = \varphi_X^{-1}(U)$ , se tiene que  $f : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo.  $\square$

### 3.3. Rango de una aplicación diferenciable

En Álgebra Lineal, se define el *rango* de una aplicación lineal como la dimensión del subespacio imagen y se prueba que esta cantidad es igual al rango de cualquier matriz coordenada de la aplicación respecto de cualquier base. Si  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  es una aplicación de clase  $C^1$  donde  $U \subset \mathbf{R}^n$  es un abierto, la matriz jacobiana  $J_F(x)$  tiene un rango para cada  $x \in U$ . Se define el *rango* de  $F$  en  $x$  como el rango de la matriz jacobiana  $J_F(x)$ . Diremos que  $F$  tiene rango  $k$  en un conjunto  $A \subset U$  si  $F$  tiene rango  $k$  para todo  $x \in A$ .

El objetivo de esta sección es generalizar el concepto de rango para aplicaciones entre variedades diferenciables y ver que puede ser introducido de varias formas equivalentes.

**Definición 3.3.1.** Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable,  $p \in X$ ,  $(O, \varphi)$  una carta de  $\Omega_X$  con  $p \in O$  y  $(V, \psi)$  una carta de  $\Omega_Y$  con  $f(p) \in V$ . Se define el *rango* de  $f$  en  $p$  como el

rango del representante local de  $f$  en  $p$ ,

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(O) \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbf{R}^m. \quad (3.26)$$

Es claro esta definición es algo pobre si hay una dependencia en las cartas elegidas. Para ver que el rango no depende del representante local vamos a ver que la definición anterior puede sustituirse por otra de carácter más global a partir del siguiente resultado.

**Proposición 3.3.1.** En las condiciones anteriores, el rango de  $f$  en  $p$  es la dimensión de la imagen de la diferencial de  $f$  en  $p$ ,  $df_p$ , es decir, el rango de cualquier matriz coordenada de  $df_p$  respecto de cualquier base.

*Demostración.* Sea  $(O, \varphi)$  una carta  $n$ -dimensional de  $X$  con  $p \in O$  de funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(V, \psi)$  una carta  $m$ -dimensional de  $Y$  con  $f(p) \in Y$  de funciones coordenadas  $(y_1, \dots, y_m)$ . La colección  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  forma una  $\mathbf{R}$ -base del espacio  $T_p X$  y la colección  $\{\frac{\partial}{\partial y_1}|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}|_{f(p)}\}$  una  $\mathbf{R}$ -base de  $T_{f(p)} Y$ . Veamos cómo se escribe matricialmente la transformación  $df_p$  a partir de las bases dadas. Tomando un elemento  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$  de la base de  $T_p X$ , veamos cómo se expresa su imagen por la diferencial en componentes de la base de  $T_{f(p)} Y$ . Para ello basta aplicar dicho elemento como derivación sobre  $C^\infty(f(p))$  a cada función coordenada  $y_j \in C^\infty(f(p))$ :

$$\left( df_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) y_j = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (y_j \circ f) = \frac{\partial}{\partial u_i} (y_j \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))) = \frac{\partial}{\partial u_i} (P_j \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

donde  $(u_1, \dots, u_n)$  son las coordenadas naturales de  $\mathbf{R}^n$ . Hemos probado por tanto que la matriz coordinada de  $df_p$  en esta base es la matriz jacobiana del representante local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  en  $p$ , de modo que el rango de  $f$  en  $p$  es el rango de la diferencial de  $f$  en  $p$  y por tanto la dimensión de su imagen, que no depende de las cartas elegidas.  $\square$

Para finalizar esta sección generalizaremos al caso de las variedades diferenciables el teorema siguiente, que será de utilidad para futuros resultados en la Teoría de Subvariedades.

**Teorema 3.3.2** (Teorema del rango). *Sean  $U \subset \mathbf{R}^n, V \subset \mathbf{R}^m$  abiertos y  $f : U \longrightarrow V$  una aplicación diferenciable con rango en  $U$  igual a  $k$ . Si  $p \in U$ , existen abiertos  $U_0 \subset U$  y  $V_0 \subset V$  con  $p \in U_0$  y  $f(p) \in V_0$  y difeomorfismos  $g : U_0 \longrightarrow \tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$ ,  $h : V_0 \longrightarrow \tilde{V} \subset \mathbf{R}^m$  con  $\tilde{U}, \tilde{V}$*

abiertos tales que  $h \circ f \circ g^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$  con:

$$h \circ f \circ g^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0). \quad (3.27)$$

Este teorema sostiene que una aplicación diferenciable de rango constante  $k$  se comporta localmente como la inyección de  $\mathbf{R}^k$  en  $\mathbf{R}^k \times \{(0)\} \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$  compuesta con la proyección de  $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$  en  $\mathbf{R}^k$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^k & \longrightarrow & \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1, \dots, x_k) & \mapsto & (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \end{array} \quad (3.28)$$

Además, los abiertos  $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$  y  $\tilde{V} \subset \mathbf{R}^m$  pueden elegirse como  $B_{\mathbf{R}^n}(0, \epsilon)$  y  $B_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon)$  respectivamente, para el mismo  $\epsilon > 0$ , o como los cubos abiertos  $C_{\mathbf{R}^n}(0, \epsilon)$  y  $C_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon)$ .

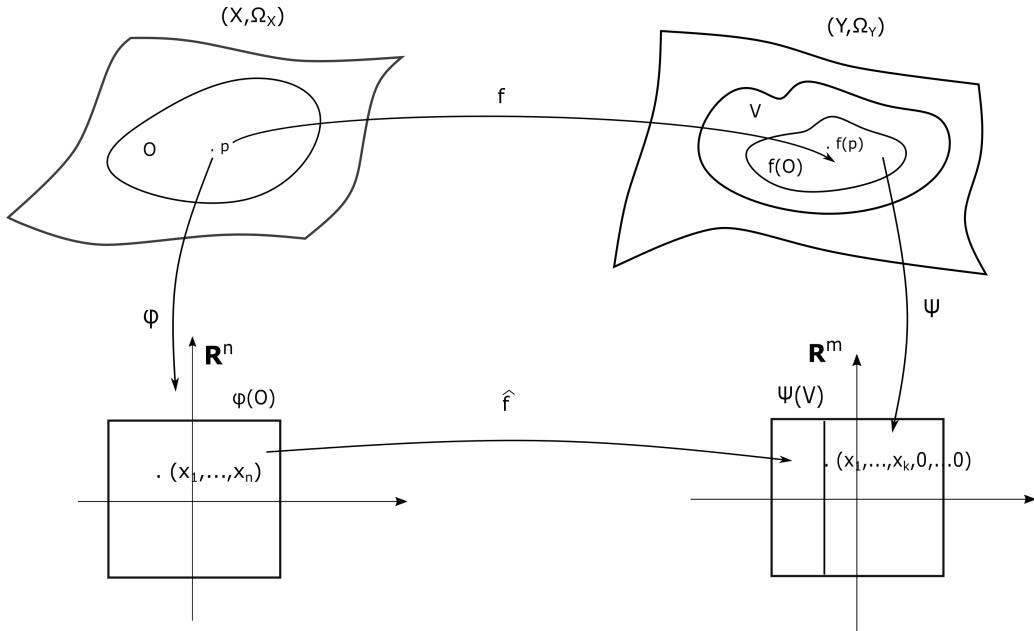


Figura 3.3: Teorema del rango generalizado a aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables.

**Corolario 3.3.3.** Sean ahora  $(X, \Omega_X)$  y  $(Y, \Omega_Y)$  dos variedades  $n$  y  $m$ -dimensionales respectivamente y  $p \in X$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación diferenciable de rango  $k$  en  $p$ , podemos aplicar el teorema anterior (a cualquier representante local de  $f$  en  $p$ ) y concluir que existen cartas  $(O, \varphi)$  de  $\Omega_X$  con  $p \in O$  y  $(V, \psi)$  de  $\Omega_Y$  con  $f(p) \in V$  tales que el representante local

$\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  en  $p$  viene dado por:

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), \quad (3.29)$$

donde podemos elegir  $\varphi(O) = C_{\mathbf{R}^n}(0, \epsilon)$  y  $\psi(V) = C_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon)$  con  $\varphi(p) = 0_{\mathbf{R}^n}$  y  $\psi(f(p)) = 0_{\mathbf{R}^m}$ .

### 3.4. Fibrado tangente

Para finalizar el capítulo probaremos que la unión de todos los espacios tangentes a una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, en todos sus puntos, admite una estructura de variedad diferenciable  $2n$ -dimensional.

Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y considérese el conjunto:

$$TX = \bigcup_{p \in X} T_p X, \quad (3.30)$$

que puede reescribirse como:

$$TX = \{(p, v) : p \in X, v \in T_p X\}. \quad (3.31)$$

Sea  $\{(O_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  un atlas  $n$ -dimensional de  $X$ . Construimos los subconjuntos de  $TX$ :

$$V_i = \{(p, v) \in TX : p \in O_i\} \quad (3.32)$$

y las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \psi_i: \quad V_i &\longrightarrow \mathbf{R}^{2n} \\ (p, v) &\longmapsto \psi_i(p, v) = (\varphi_i(p), v(x_1), \dots, v(x_n)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde  $(x_1, \dots, x_n)$  son las funciones coordenadas de la carta  $(O_i, \varphi_i)$ . Notar que, si denotamos por  $v_1, \dots, v_n$  las componentes del vector tangente  $v \in T_p X$  en la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ , por 3.17 tenemos:

$$\psi_i(p, v) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v_1, \dots, v_n). \quad (3.34)$$

Vamos a probar que los pares  $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  definen un atlas sobre el conjunto  $TX$ , que determinará de manera única una estructura diferenciable.

Lo primero que hay que ver es que  $\{V_i\}_{i \in I}$  cubre  $TX$ , que es inmediato por construcción, al ser  $\{O_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento de  $X$ . Por otra parte, las aplicaciones  $\psi_i$  son inyectivas y sus imágenes  $\psi_i(V_i) = \varphi_i(O_i) \times \mathbf{R}^n$  son abiertos en  $\mathbf{R}^{2n}$ , de modo que los pares  $(V_i, \psi_i)$  son cartas  $2n$ -dimensionales sobre  $TX$ .

Veamos ahora que todo par de cartas con dominios no disjuntos es compatible. Sean  $(V_1, \psi_1)$  y  $(V_2, \psi_2)$  dos cartas tales que  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Como  $V_1 \cap V_2 = \{(p, v) \in TX : p \in O_1 \cap O_2\} \neq \emptyset$ , entonces  $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$  y los conjuntos  $\psi_{1,2}(V_1 \cap V_2) = \mathbf{R}^n \times \varphi_{1,2}(O_1 \cap O_2)$  son abiertos en  $\mathbf{R}^{2n}$ . Probemos que el cambio de cartas es una aplicación  $C^\infty$ :

$$\begin{aligned}\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) &= (y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n) \Leftrightarrow \psi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \\ &= \psi_2^{-1}(y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n) \Leftrightarrow (p, v) = (q, w).\end{aligned}$$

Para que la igualdad sea cierta deberán ser iguales las dos componentes de las antiimágenes anteriores, es decir:

$$p = \varphi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \varphi_2^{-1}(y_1, \dots, y_n) = q \quad (3.35)$$

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q = w. \quad (3.36)$$

Despejando en 3.35 y usando 3.17 en 3.36 se tiene:

$$(y_1, \dots, y_n) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \quad (3.37)$$

$$(v_1, \dots, v_n)^T = J_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}}(w_1, \dots, w_n)^T, \quad (3.38)$$

donde  $J_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}}$  denota la matriz de cambio de base 3.19. Así, los cambios de carta son diferenciables de clase  $C^\infty$  y hemos probado que la colección  $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  es un atlas del conjunto  $TX$ , que determinará una única estructura diferenciable. La variedad diferenciable resultante recibe el nombre de *fibrado tangente*.

# Capítulo 4

## Subvariedades

El rango de las aplicaciones diferenciables tiene una relevancia especial para la generalización de algunas estructuras del espacio euclídeo. Cuando es máximo, estas aplicaciones sirven como punto de partida para extender las nociones de curva y superficie mediante el concepto de subvariedad. Buscaremos, en este capítulo, la manera más apropiada de introducir esta construcción, partiendo de las inmersiones y restringiendo sus propiedades hasta definir finalmente la subvariedad regular.

### 4.1. Inmersiones

**Definición 4.1.1.** Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Se dice que  $f$  es una *inmersión* si  $df_p$  es inyectiva para todo  $p \in X$ . En ese caso se dice que  $X$  está *inmersa* en  $Y$  o que la imagen  $f(X)$  es una *subvariedad inmersa* en  $Y$ .

**Observación 4.1.1.** Como el rango de toda aplicación diferenciable  $f$  en  $p \in X$  es el rango de su diferencial en  $p$ , podemos definir una inmersión de manera equivalente como una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  tal que su rango coincide con la dimensión de la variedad  $(X, \Omega_X)$  para todo punto  $p \in X$ . Esto es inmediato viendo que  $n = \dim(\ker(df_p)) + \text{rg}(df_p)$ .

En los ejemplos sucesivos tomaremos  $\mathbf{R}$  o un intervalo abierto suyo como variedad de salida y  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$  como variedad de llegada, ambas con la estructura diferenciable determinada por la carta identidad (un solo dominio con la aplicación identidad al espacio euclídeo correspondiente).

**Ejemplo 4.1.1.** La aplicación  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  con  $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1)$ , que tiene por imagen una hélice con eje, el eje  $z$  en  $\mathbf{R}^3$ , contenida en el cilindro unidad, es una inmersión pues su jacobiano  $(-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 0)$  tiene rango 1 para todo  $t \in \mathbf{R}$ .

**Ejemplo 4.1.2.** La aplicación  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  dada por  $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  tiene por imagen la circunferencia unidad en  $\mathbf{R}^2$  y es una inmersión pues su jacobiano tiene rango 1 para todo  $t \in \mathbf{R}$ .

**Ejemplo 4.1.3.** La aplicación  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^2$  dada por  $f(t) = \left(\frac{t+1}{2t} \cos(2\pi t), \frac{t+1}{2t} \sin(2\pi t)\right)$  tiene por imagen una espiral con centro en el origen y que tiende a la circunferencia de radio  $\frac{1}{2}$  con mismo centro (figura 4.1.3). Es sencillo comprobar que el jacobiano solo se anula si  $\cot(2\pi t) = -\tan(2\pi t)$ :

$$\begin{aligned} J_f(t) &= \left(-\frac{1}{2t^2} \cos(2\pi t) - \frac{t+1}{t} \pi \sin(2\pi t), -\frac{1}{2t^2} \sin(2\pi t) + \frac{t+1}{t} \pi \cos(2\pi t)\right) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cot(2\pi t) = -(t+1)2\pi t = -\tan(2\pi t). \end{aligned}$$

Esto no es posible para ningún valor de  $t \in \mathbf{R}$ , de modo que  $f$  es una inmersión de  $(1, \infty)$  en  $\mathbf{R}^2$ .

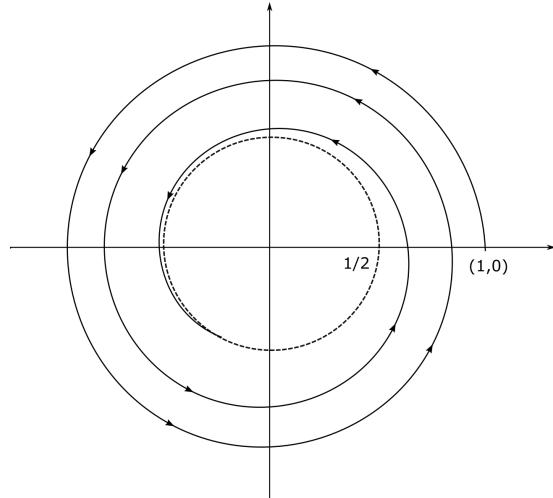


Figura 4.1: Inmersión del intervalo  $(1, \infty)$  en  $\mathbf{R}^2$ .

**Ejemplo 4.1.4.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  dada por  $f(t) = (2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin(2(t - \frac{\pi}{2})))$ . La imagen de esta aplicación es la 'figura ocho' (figura 4.2 a) que en cada intervalo  $(n\pi, n\pi + 2\pi)$  da una vuelta completa, empezando en el origen para  $t = 0$ . Es inmediato comprobar que es una inmersión viendo que el jacobiano correspondiente tiene rango 1.

Resulta más interesante una variación de esta aplicación. En este caso hacemos que la imagen pase por el origen una única vez, para  $t = \frac{1}{2}$ . Para  $t \rightarrow -\infty$  y  $t \rightarrow \infty$  la imagen tiene por límite al origen, como se esquematiza en la figura 4.2 b. Esto se puede conseguir cambiando el parámetro en la transformación anterior, tomando cualquier función  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  monótona creciente de clase  $C^\infty$  tal que  $g(0) = \pi$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 2\pi$  (Puede usarse por ejemplo la función  $g(t) = \pi + 2 \cot(t)$ ). La nueva aplicación viene dada por la composición de la función  $f$  anterior con esta nueva  $g$ , es decir, por:

$$F(t) = f(g(t)) = \left( 2 \cos \left( g(t) - \frac{\pi}{2} \right), \sin 2 \left( g(t) - \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad (4.1)$$

que es de nuevo una inmersión.

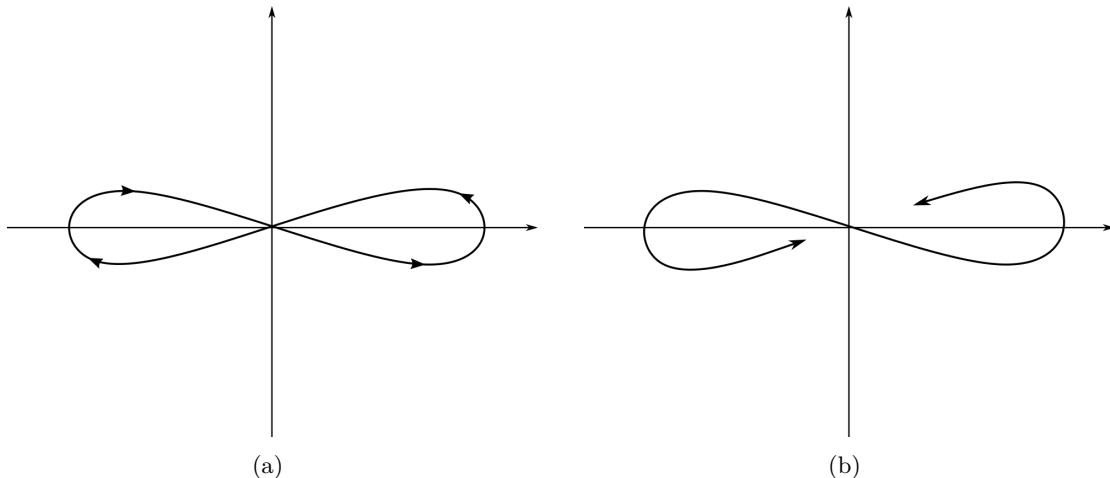


Figura 4.2: Inmersiones de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}^2$ .

El interés de los ejemplos anteriores reside en mostrar las pocas restricciones que una aplicación necesita para ser considerada inmersión. No es necesaria la inyectividad, como reflejan los ejemplos 4.1.2 o la 'figura ocho' de 4.1.4, cuyas imágenes pasan una cantidad infinito numerable de veces por los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, 0)$  respectivamente, para los valores  $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ . Si la aplicación es inyectiva, tampoco es necesario que su restricción a la imagen  $f : X \rightarrow f(X)$  sea un homeomorfismo. Este último es el caso de la variación de la figura 'ocho' en el ejemplo 4.1.4: la imagen  $F(\mathbf{R})$  se corresponde con una vuelta de la figura ocho en 4.1.4 (a), que no es homeomorfa al espacio de salida  $\mathbf{R}$ . Estos ejemplos llevan a definir las subvariedades a partir de condiciones más fuertes.

## 4.2. Embebimientos y subvariedades regulares

**Definición 4.2.1.** Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Se dice que  $f$  es un *embebimiento* si la restricción a la imagen  $f : X \rightarrow f(X)$  es un homeomorfismo. La imagen de un embebimiento se llama *subvariedad embebida*.

**Ejemplo 4.2.1.** La aplicación del ejemplo 4.1.3 es un embebimiento.

**Proposición 4.2.1.** Todo embebimiento es una inmersión.

*Demostración.* Si  $f : X \rightarrow Y$  es un embebimiento, su restricción a la imagen será un homeomorfismo y por tanto  $f : X \rightarrow f(X)$  será un difeomorfismo. Por la proposición 3.2.1 la diferencial de  $f|_{f(X)}$  en todo punto  $p \in X$  será un isomorfismo, luego inyectiva para todo  $p \in X$ .  $\square$

**Proposición 4.2.2.** Toda inmersión es localmente un embebimiento.

*Demostración.* Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $f : X \rightarrow Y$  una inmersión y  $p \in X$ . Como  $f$  tiene rango constante igual a  $n$ , por 3.3.3 podemos tomar cartas  $(O, \varphi)$  de  $\Omega_X$  con  $p \in O$ ,  $(V, \psi)$  de  $\Omega_Y$  con  $f(p) \in f(O) \subset V$  tales que el representante local de  $f$  en  $p$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : & \quad \varphi(O) \longrightarrow \psi(V) \\ & (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para ver que  $f : O \rightarrow f(O)$  es un homeomorfismo basta ver que  $\hat{f} : \varphi(O) \rightarrow \hat{f}(\varphi(O))$  es un homeomorfismo, pues  $f = \psi^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi$ ,  $\psi$  y  $\varphi$  son homeomorfismos por definición y la topología de  $f(O)$  como subespacio de  $V$  es la misma que la relativa a  $Y$  por ser  $V$  abierto. Pero  $\hat{f}|_{\varphi(O)}$  es un homeomorfismo por construcción, luego  $f$  es localmente un embebimiento.  $\square$

**Definición 4.2.2.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y sea  $A$  un subconjunto de  $X$ . Se dice que  $A$  tiene la *propiedad de n-subvariedad* si para cada  $p \in A$  existen cartas  $(O, \varphi)$  con  $p \in O$  y funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_m)$  tales que:

$$i) \quad \varphi(p) = (0, \dots, 0),$$

- ii)  $\varphi(O) = C_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon)$ ,
- iii)  $\varphi(O \cap A) = \{x \in C_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon) : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$ .

Se dice que las funciones coordenadas  $(x_1, \dots, x_m)$  o las cartas  $(O, \varphi)$  están *adaptadas* a  $A$  en  $p$ .

La figura 4.3 muestra un subconjunto  $A$  de  $\mathbf{R}^3$  que tiene la propiedad de 2-subvariedad.

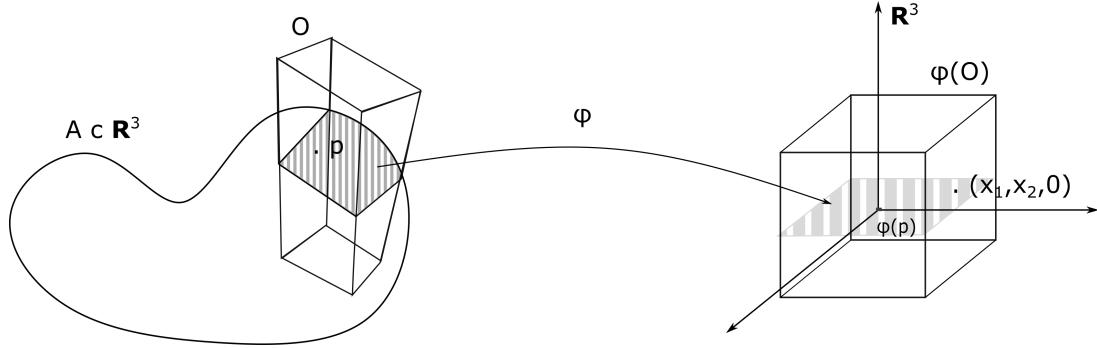


Figura 4.3: Carta de  $\mathbf{R}^3$  adaptada a  $A$ .

**Proposición 4.2.3.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y sea  $A \subset X$  satis-  
ficiendo la propiedad de  $n$ -subvariedad, con  $n \leq m$ . Entonces,  $A$  es una variedad diferenciable  
 $n$ -dimensional y cada carta  $(O, \varphi)$  adaptada a  $A$  define una carta en  $A$  dada por  $\tilde{O} = O \cap A$   
y  $\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi|_{\tilde{O}}$ , donde  $\pi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  es la proyección a las  $n$  primeras coordenadas. Estas  
cartas de  $A$  constituyen un atlas que determina una única estructura diferenciable, para la cual  
la inclusión  $i : A \hookrightarrow X$  es un embebimiento.

*Demostración.* Sea  $p \in A$  y sea  $(O, \varphi)$  una carta adaptada a  $A$  en  $p$ . Veamos que  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$  define  
una carta en  $A$ . Por construcción  $\tilde{O} = O \cap A$  es abierto en la topología del subespacio y  $\tilde{\varphi}$  es  
homeomorfismo en la misma topología, por ser composición de homeomorfismos. Esto último nos  
indica que la topología que va a inducir la variedad diferenciable en  $A$  coincide con la topología  
de  $A$  como subespacio de  $X$ . Claramente los dominios  $\tilde{O}$  cubren  $A$ , luego falta comprobar que  
todo par de cartas es compatible. Si  $(O_1, \varphi_1), (O_2, \varphi_2)$  son dos cartas adaptadas a  $A$  de  $X$  con  
 $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ , las correspondientes  $\tilde{O}_1 = O_1 \cap A$  y  $\tilde{O}_2 = O_2 \cap A$  tienen intersección no vacía.  
Veamos que  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}$  y  $\tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}$  son de clase  $C^\infty$ .

Sea  $\theta : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  tal que  $\theta(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ , de modo que  $\pi \circ \theta = \text{Id}_{\mathbf{R}^n}$ .  
 $\theta$  es de clase  $C^\infty$ , luego  $\tilde{\varphi}_1^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \theta$  será también de clase  $C^\infty$ . Igualmente  $\tilde{\varphi}_2 = \pi \circ \varphi_2|_{\tilde{O}_2}$   
será de clase  $C^\infty$  en  $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2$  por serlo  $\pi$  y  $\varphi_2$  en el abierto  $O_2 \cap O_1$ .

Por tanto, todo par de cartas es compatible y queda definido un atlas en  $A$  que determina una única estructura diferenciable  $n$ -dimensional. La inclusión  $i : A \hookrightarrow X$  se escribe en coordenadas adaptadas como  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ , de modo que es una inmersión. Además, su restricción a la imagen es un homeomorfismo, de modo que  $A$  es una variedad diferenciable  $n$ -dimensional embebida en  $X$ .  $\square$

**Definición 4.2.3.** En las condiciones anteriores, el subconjunto  $A$  junto con la estructura diferenciable  $n$ -dimensional que determinan las cartas adaptadas se denomina *subvariedad regular* de  $(X, \Omega)$ .

El resultado siguiente prueba que los conceptos de subvariedad regular y subvariedad embebida son equivalentes.

**Teorema 4.2.4.** *Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $f : X \rightarrow Y$  un embebimiento. Entonces,  $A = f(X)$  tiene la propiedad de  $n$ -subvariedad y por tanto es una subvariedad regular de  $Y$ . Además,  $A$  es difeomorfa a  $X$  a través del difeomorfismo  $f : X \rightarrow A$ .*

*Demostración.* Probaremos que  $A = f(X)$  tiene la propiedad de  $n$ -subvariedad, es decir, que para todo  $q = f(p) \in A$  existe una carta adaptada a  $A$  en  $p$  satisfaciendo las condiciones de la definición 4.2.2. En particular,  $f$  es una inmersión luego tendrá rango constante igual a  $n$ . Por el corolario 3.3.3, podemos tomar cartas  $(O, \varphi)$  en  $X$  y  $(V, \psi)$  en  $Y$  tales que:

$$i) \quad \varphi(p) = (0, \dots, 0) \in C_{\mathbf{R}^n}(0, \epsilon) = \varphi(O),$$

$$ii) \quad \psi(q) = (O, \dots, 0) \in C_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon) = \psi(V),$$

iii) El representante local de  $f$  en  $p$  está dado por  $\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ .

Si  $f(O) = V \circ A$ , entonces la carta  $(V, \psi)$  estará adaptada a  $A$  en  $q$ . Esto se prueba usando que  $f$  es un embebimiento y que por tanto  $f(O)$  es un abierto en la topología de subespacio de  $A$ , es decir, que  $f(O)$  será de la forma  $f(O) = W \cap A$  donde  $W$  es un abierto de  $Y$ , que podemos suponer contenido en  $V$  sin pérdida de generalidad pues  $f(O) \subset V$ . Así,  $\psi(W)$  es un abierto contenido en  $C_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon)$  contenido al origen y al subconjunto  $\psi(f(O))$ . Tomando un cubo abierto más pequeño,  $C_{\mathbf{R}^m}(0, \delta) \subset \psi(W)$ , sea  $\tilde{V} = \psi^{-1}(C_{\mathbf{R}^m}(0, \delta))$  y  $\tilde{\psi} = \psi|_V$ . Se tiene que  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  es una carta cuyo dominio contiene a  $q$  y que  $f(O) \cap \tilde{V} = \tilde{V} \cap A$ . Si hacemos

$\tilde{O} = \varphi^{-1}(C_{\mathbf{R}^n}(0, \delta)) = f^{-1}(\tilde{V})$  y  $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{O}}$  vemos que los pares  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$  y  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  tienen ambos las propiedades *i*, *ii*, *iii*) y satisfacen además  $f(\tilde{O}) = \tilde{V} \cap A$ . Esto prueba que  $A$  tiene la propiedad de  $n$ -subvariedad y que  $f$  es un difeomorfismo, pues la aplicación inversa expresada en las coordenadas adaptadas dadas por  $(\tilde{V}, \pi \circ \tilde{\psi})$  y  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$  es  $f^{\wedge -1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$  y es diferenciable.  $\square$

**Proposición 4.2.5.** Toda subvariedad compacta inmersa inyectivamente en un espacio  $T_2$  es una subvariedad regular.

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  una inmersión entre variedades diferenciables. Como  $Y$  es  $T_2$  y  $X$  es compacto, tenemos una aplicación continua de un compacto a un  $T_2$ , de modo que la imagen de cualquier cerrado en  $X$  será un cerrado en  $Y$ . Como  $f : X \rightarrow f(X)$  es biyectiva  $f$  llevará también abiertos en abiertos, de modo que la inversa  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  es continua y se tiene que  $f$  es un embebimiento. Por el teorema anterior  $f(X)$  es una subvariedad regular de  $Y$ .  $\square$

**Teorema 4.2.6** (Teorema de la función implícita). *Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable y  $q \in f(X)$ . Si  $f$  tiene rango constante igual a  $m$  en  $A = f^{-1}(q)$ , el subconjunto  $A$  es una subvariedad regular cerrada de  $X$  de dimensión  $n - m$ .*

*Demostración.* Sea  $A = f^{-1}(q)$ . Como se vio en 2.3.1, toda variedad diferenciable es  $T_1$  en su topología, luego los conjuntos unipuntuales  $\{q\}$  son cerrados en  $Y$  y su antiimagen por la aplicación continua  $f$ ,  $A$ , será un cerrado en  $X$ . Basta ver por tanto que  $A$  satisface la propiedad de  $(n - m)$ -subvariedad.

Sea  $p \in A$ . Como  $f$  tiene rango constante igual a  $m$  en  $p$ , por el corolario 3.3.3 podemos tomar cartas  $(O, \varphi)$  de  $X$  con  $p \in O$  y  $(V, \psi)$  de  $Y$  con  $q \in V$  tales que  $\varphi(p)$  y  $\psi(q)$  son los orígenes de  $\mathbf{R}^n$  y  $\mathbf{R}^m$  respectivamente,  $\varphi(O) = C_{\mathbf{R}^n}(0, \epsilon)$ ,  $\psi(V) = C_{\mathbf{R}^m}(0, \epsilon)$  y el representante local de  $f$  dado por este par de cartas en  $p$  se escribe:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0). \quad (4.3)$$

Por tanto, los únicos puntos de  $O$  cuya imagen pertenece a  $\{q\}$  serán aquellos cuyas  $m$  primeras coordenadas sean cero. Así:

$$A \cap O = \varphi^{-1}(\varphi \circ f^{-1}\psi^{-1}(0)) = \varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(0)) = \varphi^{-1}(x \in C_{\mathbf{R}^n}(0, \epsilon) : x_1 = \dots = x_m = 0}, \quad (4.4)$$

de modo que  $O$  es una carta adaptada a  $A$  en  $p$ .  $A$  satisfará así la propiedad de  $(n-m)$ -subvariedad y por tanto será una subvariedad regular cerrada de  $X$  de dimensión  $n - m$ .  $\square$

**Ejemplo 4.2.2.** El Teorema anterior puede utilizarse para comprobar rápidamente que un subconjunto de una variedad diferenciable admite estructura de subvariedad regular. Consideremos la variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $(\mathbf{R}^n, \{(\mathbf{R}^n, \text{Id}_{\mathbf{R}^n})\})$ , la variedad diferenciable 1-dimensional  $(\mathbf{R}, \{(\mathbf{R}, \text{Id}_{\mathbf{R}})\})$  y la aplicación:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Esta aplicación es diferenciable y tiene rango constante igual a 1 en  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ , pues su jacobiano viene dado por  $J_f(p) = (2x_1, \dots, 2x_n)$ , que es no nulo excepto en  $x_1 = \dots = x_n = 0$ . El punto 1 pertenece a su imagen y  $0 \notin f^{-1}(1)$ , luego por el Teorema de la Función Implícita el subconjunto  $f^{-1}(1) = S^{n-1}$  es una subvariedad regular cerrada de  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  de dimensión  $n - 1$ .

# Capítulo 5

## Variedades cociente

La Teoría de Variedades Cociente servirá de cierre a este trabajo, aportando un nuevo punto de vista a la Teoría de Variedades con la introducción de elementos puramente algebraicos. Comenzaremos desarrollando el concepto de submersión, que nace como complementario de las inmersiones ya estudiadas, y analizaremos cómo a partir de ellas puede dotarse a un conjunto cociente de estructura diferenciable de manera natural. Si la relación de equivalencia viene dada por la acción de un grupo sobre la variedad, el espacio cociente adquirirá estructura diferenciable en función de las propiedades algebraicas de la acción, que determinará también algunas de sus propiedades topológicas. Recuperaremos el ejemplo de las variedades de Grassmann y cerraremos el capítulo con el estudio de los dominios fundamentales, una herramienta que permite construir espacios de gran relevancia matemática como son la cinta de Moebius o la botella de Klein.

### 5.1. Submersiones

**Definición 5.1.1.** Sea  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Se dice que  $f$  es una *submersión* si  $df_p$  es suprayectiva para todo  $p \in X$ .

**Observación 5.1.1.** Como el rango de toda aplicación diferenciable  $f$  en  $p \in X$  es el rango de su diferencial en  $p$ , podemos definir una submersión de manera equivalente como una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  tal que su rango coincide con la dimensión de la variedad  $(Y, \Omega_Y)$  para todo punto  $p \in X$ .

**Ejemplo 5.1.1.** Para cada  $n, k \in \mathbf{N}$  con  $n \geq k$ , escribiendo  $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$  se tiene la proyección canónica:

$$\begin{aligned}\Pi_1: \quad \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbf{R}^k \\ (x, y) &\longmapsto x,\end{aligned}\tag{5.1}$$

cuya matriz jacobiana viene dada por:

$$J_{\Pi_1}(x, y) = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{5.2}$$

que tiene rango igual a  $k$  para todo  $(x, y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ . Así, la proyección  $\Pi_1$  es una submersión.

**Ejemplo 5.1.2.** Consideremos la variedad 2-dimensional  $(\mathbf{R}^2, \{(\mathbf{R}^2, \text{Id}_{\mathbf{R}^2})\})$  y el cilindro construido en el ejemplo 1.2.6 como el producto  $S^1 \times \mathbf{R}$ . La aplicación:

$$\begin{aligned}f: \quad \mathbf{R}^2 &\longrightarrow S^1 \times \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y)\end{aligned}\tag{5.3}$$

es una submersión. Si tomamos la carta  $(O_1 \times \mathbf{R}, \varphi_1 \text{Id}_{\mathbf{R}})$  en  $S^1 \times \mathbf{R}$ , el representante local de  $f$ :

$$\begin{aligned}\hat{f} = \varphi_1 \text{Id}_{\mathbf{R}} \circ f: \quad \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (r_1, r_2) &\longmapsto (2\pi r_1, r_2)\end{aligned}\tag{5.4}$$

es diferenciable y tiene rango igual a 2 en todo punto de  $\mathbf{R}^2$ , pues

$$J_f(r_1, r_2) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{5.5}$$

es una matriz de rango 2. El razonamiento es análogo si se toma la carta  $(O_2 \times \mathbf{R}, \varphi_2 \text{Id}_{\mathbf{R}})$ , luego  $f$  es una submersión de  $\mathbf{R}^2$  en el cilindro  $S^1 \times \mathbf{R}$ .

**Lema 5.1.1.** Sean  $n, k \in \mathbf{N}$  con  $n \geq k$ ,  $A^*$  un abierto en  $\mathbf{R}^n$  y  $f: A^* \rightarrow \mathbf{R}^k$  una aplicación diferenciable con rango igual a  $k$  en un punto  $p \in A^*$ . Entonces, existen abiertos  $A, B \in \mathbf{R}^n$  tales que  $p \in A \subset A^*$  y existe  $h: B \rightarrow A$  difeomorfismo tal que la composición  $f \circ h$  coincide con la proyección canónica 5.1 en su dominio.

*Demostración.* Si  $f : A^* \rightarrow \mathbf{R}^k$  tiene rango  $k$  en  $p$ , existen  $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k \leq n$  tales que

$$\det \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_{\sigma_j}} \right)_p \right) \neq 0, \quad (5.6)$$

donde  $(u_1, \dots, u_n)$  son las coordenadas naturales de  $\mathbf{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$  y  $j = 1, \dots, k$ . Tenemos así una correspondencia

$$\begin{aligned} \sigma: \quad \{1, \dots, k\} &\longrightarrow \{1, \dots, n\} \\ j &\longmapsto \sigma_j \end{aligned} \quad (5.7)$$

que podemos extender a una permutación  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  y, consecuentemente, a una permutación de las coordenadas de los elementos de  $\mathbf{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \theta: \quad \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Esta construcción reescribe el determinante 5.6 como:

$$\det \left( \left( \frac{\partial(f \circ \theta)_i}{\partial u_j} \right)_{\theta^{-1}(p)} \right) = \det \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_{\sigma_j}} \right)_p \right) \neq 0, \quad (5.9)$$

con  $i, j = 1, \dots, k$ . Definiendo ahora

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbf{R}^n &\longrightarrow \theta(A^*) &&\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) &&\longmapsto (f(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}), \Pi_2(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n})), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $\Pi_2$  es la proyección a las  $n - k$  últimas componentes, se tiene que

$$\det \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right)_{\theta^{-1}(p)} \right) \neq 0 \quad (5.11)$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ , es decir, que el rango de  $\varphi$  en  $\theta^{-1}(p)$  es igual a la dimensión de la variedad de salida e igual a la dimensión de la variedad de llegada, luego la diferencial de  $\varphi$  en  $\theta^{-1}(p)$  es un isomorfismo. La aplicación  $\varphi$  satisface así las hipótesis del Teorema de la Función Inversa (3.2.3), de manera que existe un entorno abierto  $A$  de  $p$  con  $A \subset A^*$  tal que  $\varphi|_A : A \rightarrow \varphi(A)$  es un difeomorfismo, es decir, existe un abierto  $B = \varphi(A) \in \mathbf{R}^n$  tal que  $\varphi : A \rightarrow B$  es un difeomorfismo. Así, la aplicación inversa  $h = \varphi^{-1} : B \rightarrow A$  es el difeomorfismo que

buscamos, pues la composición  $f \circ h$  coincide, por construcción, con la proyección a las  $k$  primeras componentes.  $\square$

**Lema 5.1.2.** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n \geq m$ ,  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable con rango igual a  $m$  en un punto  $p \in X$ . Entonces, para toda carta  $(V, \psi) \in \Omega_Y$  tal que  $f(p) \in V$ , existe una carta  $(U, \varphi) \in \Omega_X$  tal que  $p \in U$ ,  $f(U) \subset V$  y el representante local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  coincide con la proyección canónica a las  $m$  primeras componentes.

*Demostración.* Como  $f$  es diferenciable en  $p$ , existen cartas  $(O, \xi) \in \Omega_X$ ,  $(\bar{O}, \bar{\xi}) \in \Omega_Y$  tales que  $p \in O$ ,  $f(O) \subset \bar{O}$  y el representante local  $\bar{\xi} \circ f \circ \xi^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\xi(p)$ . Como  $f(p) \in V$  por hipótesis, la intersección  $\bar{O} \cap V$  es un abierto no vacío de  $Y$  y, como  $f$  es continua por ser diferenciable,  $W = f^{-1}(\bar{O} \cap V)$  es un subconjunto abierto de  $O$ . Por la proposición 2.1.1, el par  $(W, \xi|_W)$  será una carta de  $\Omega_X$ , verificando por construcción que  $p \in W$  y que  $f(W) \subset V$ . Ya hemos visto que si un representante local de  $f$  en  $p$  es diferenciable, todo representante local de  $f$  en dicho punto también lo será, luego la aplicación:

$$\hat{f} = \psi \circ f \circ \xi^{-1} : \xi(W) \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbf{R}^m \quad (5.12)$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  y, como el rango de una aplicación diferenciable en un punto es el rango de *cualquier* representante local en dicho punto,  $\hat{f}$  tiene rango igual a  $m$  en  $\xi(p)$ . Esta aplicación verifica por tanto las hipótesis del lema 5.1.1, luego existen abiertos  $A, B \in \tau_{\mathbf{R}^n}$ , con  $\xi(p) \in A \subset \xi(W)$  y un difeomorfismo  $h : B \rightarrow A$  tal que  $\hat{f} \circ h$  coincide con la proyección canónica a las  $m$  primeras componentes. Consideramos el par:

$$(U, \varphi) = (\xi^{-1}(A), h^{-1} \circ \xi|_{\xi^{-1}(A)}), \quad (5.13)$$

que es una carta en  $(X, \Omega_X)$  pues  $\varphi$  es inyectiva por ser composición de aplicaciones inyectivas y la imagen  $\varphi(U) = B$  es un abierto. Esta carta satisface que  $p \in U$ ,  $f(U) \subset V$  y que el representante local:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \psi \circ f \circ (h^{-1} \circ \xi|_{\xi^{-1}(A)})^{-1} = \psi \circ f \circ \xi^{-1}|_A \circ h = \hat{f} \circ h, \quad (5.14)$$

que coincide con la proyección canónica a las  $m$  primeras componentes.  $\square$

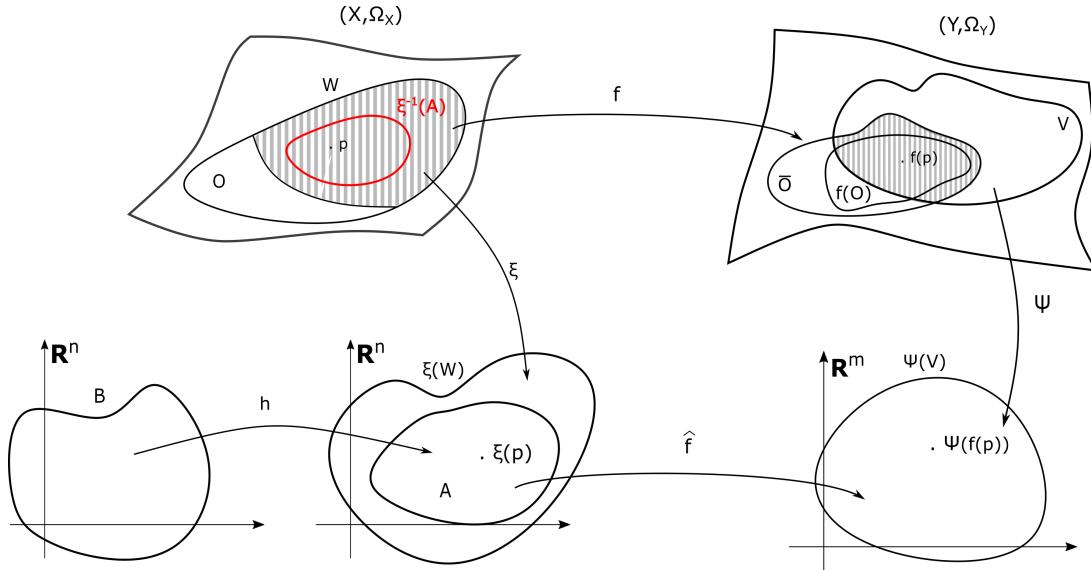


Figura 5.1: Construcción de la carta  $(U, \varphi)$  en la demostración del lema 5.1.2.

**Proposición 5.1.3.** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ ,  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $f : X \rightarrow Y$  una submersión. Entonces, para todo  $p \in X$  y toda carta  $(V, \psi) \in \Omega_Y$  con  $f(p) \in V$ , existe una carta  $(U, \varphi) \in \Omega_X$  tal que  $p \in U$ ,  $f(U) \subset V$  y el representante local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  coincide con la proyección canónica a las  $m$  primeras componentes:

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : & \quad \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m} \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbf{R}^m \\ & (x, y) \qquad \qquad \qquad \longmapsto \quad x \end{aligned} \tag{5.15}$$

*Demostración.* De acuerdo a la observación 5.1.1,  $f$  tiene rango constante igual a  $m$  para todo  $p \in X$  por ser una submersión, de manera que podemos aplicar el lema anterior a cada punto de  $X$  y el resultado es inmediato.  $\square$

**Proposición 5.1.4.** Sea  $n \geq m$ ,  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Entonces,  $f$  es una submersión si y solo si para todo  $p \in X$  existe una aplicación diferenciable  $g : U \subset Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g = \text{Id}_U$  y  $g \circ f(p) = p$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Supongamos que  $f$  es una submersión y sea  $p \in X$ . Por la proposición 5.1.3, existen cartas  $(O, \varphi) \in \Omega_X$ ,  $(V, \psi) \in \Omega_Y$  tales que  $p \in O$ ,  $f(p) \in V$ ,  $f(O) \subset V$  y el representante local  $\hat{f}$

coincide con la proyección  $\Pi_1$  a las  $m$  primeras componentes, es decir,  $\Pi_1 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  en  $\varphi(O)$ , luego  $\psi^{-1} \circ \Pi_1 = f \circ \varphi^{-1}$  en  $\varphi(O)$ . Sean ahora  $\varphi(p) = (a, b) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$  y la aplicación:

$$\begin{aligned}\xi: \quad \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ x &\longmapsto (x, b).\end{aligned}\tag{5.16}$$

Por lo anterior,  $f \circ \varphi^{-1} \circ \xi \circ \psi$  es una restricción de  $\psi^{-1} \circ \Pi_1 \circ \xi \circ \psi$ , que es la aplicación identidad en  $V$ , luego  $f \circ \varphi^{-1} \circ \xi \circ \psi$  será la aplicación identidad en el dominio de  $g = \varphi^{-1} \circ \xi \circ \psi$ , es decir, en  $U = \psi^{-1}(W)$ , donde

$$W = \Pi_1(\varphi(O) \cap \xi(\psi(V))).\tag{5.17}$$

Como por construcción  $g \circ f(p) = p$  y  $g$  es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables,  $g : U \rightarrow X$  es la aplicación que buscamos.

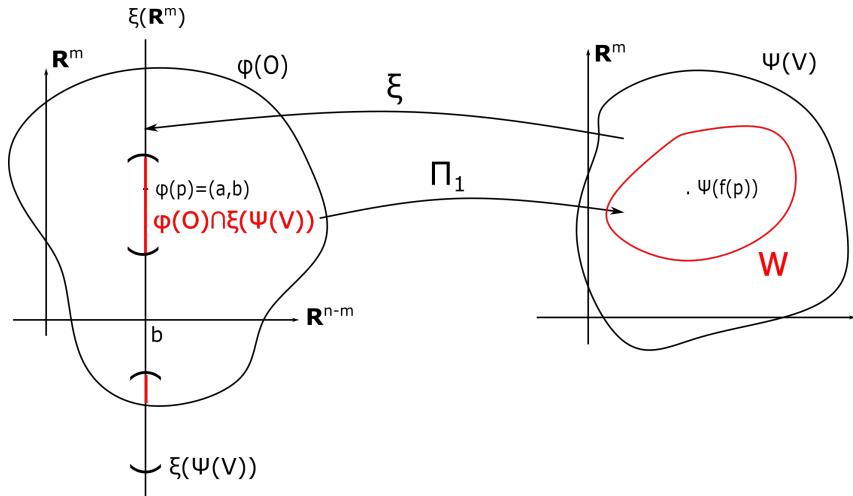


Figura 5.2: Construcción del entorno abierto  $W$  de  $\psi(f(p))$ .

$\square$  Sea  $g : U \subset Y \rightarrow X$  la aplicación diferenciable que proporciona la hipótesis. Entonces,

$$df_p \circ dg_{f(p)} = d\text{Id}_{U f(p)} = d\text{Id}_{Y f(p)} = \text{Id}_{T_{f(p)} Y}.\tag{5.18}$$

Como  $\text{Id}_{T_{f(p)} Y}$  es suprayectiva,  $df_p$  también lo será. Al ser esto cierto para todo  $p \in X$ ,  $f : X \rightarrow Y$  es una submersión.  $\square$

**Proposición 5.1.5.** Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $(Z, \Omega_Z)$  una variedad diferenciable  $s$ -dimensional,  $f : X \rightarrow Y$  una submersión suprayectiva y  $g : Y \rightarrow Z$  una aplicación. Si  $g \circ f$  es diferenciable, entonces  $g$  es diferenciable.

*Demostración.* Sea  $q \in Y$ . Como  $f$  es suprayectiva, existe  $p \in X$  tal que  $f(p) = q$  y, como  $f$  es una submersión suprayectiva, por la proposición 5.1.4 existe una aplicación diferenciable  $h : U \subset Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ h = \text{Id}_U$ . Entonces,  $g|_U = (g \circ f) \circ h$ , que es diferenciable por ser composición de diferenciables. Así,  $g$  es diferenciable en  $q$  para todo  $q \in Y$ , luego  $g$  es diferenciable.  $\square$

**Proposición 5.1.6.** Toda submersión es una aplicación abierta.

*Demostración.* Sean  $(X, \Omega_X)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(Y, \Omega_Y)$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $f : X \rightarrow Y$  una submersión y  $V \in \tau_X$ . Veamos que  $f(V)$  es un abierto en la topología que induce  $(Y, \Omega_Y)$ . Sea  $f(p) \in f(V)$ . Como  $f$  es una submersión, por la proposición 5.1.4 existe una aplicación diferenciable  $g : U \subset Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g = \text{Id}_U$  y  $g \circ f(p) = p$ . Como  $g$  es diferenciable será continua, luego  $g^{-1}(V)$  es un entorno abierto de  $f(p)$ . Además, como  $f \circ g = \text{Id}_U$ :

$$\text{Id}_U \circ f = g^{-1} \Rightarrow (\text{Id}_U \circ f)(V) = U \cap f(V) = g^{-1}(V) \Rightarrow f(p) \in g^{-1}(V) \subset f(V), \quad (5.19)$$

luego  $f(V)$  es un entorno de todos sus puntos y, por tanto, un abierto en  $\tau_Y$ .  $\square$

## 5.2. Variedades cociente

**Definición 5.2.1.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $R$  una relación de equivalencia en  $X$  y  $X/R$  el conjunto cociente correspondiente. Si  $X/R$  admite una estructura diferenciable tal que la proyección canónica:

$$\begin{aligned} \pi: & X \longrightarrow X/R \\ & p \longmapsto [p] \end{aligned} \quad (5.20)$$

es una submersión, se dice que  $X/R$  es una *variedad cociente* de  $(X, \Omega)$  por la relación  $R$ .

**Proposición 5.2.1.** Sean  $(X, \Omega_X)$  y  $(Y, \Omega_Y)$  variedades diferenciables de dimensión  $n$  y  $m$  respectivamente. Entonces, existe una submersión suprayectiva de  $X$  en  $Y$  si y solo si existe una variedad cociente de  $X$  difeomorfa a  $Y$ .

*Demostración.*

⇒ Sea  $f : X \rightarrow Y$  una submersión suprayectiva. Definimos la relación  $R$  en  $X$  siguiente:

$$pRq \Leftrightarrow f(p) = f(q), \quad (5.21)$$

para todo  $p, q \in X$ . Es claro que  $R$  es una relación de equivalencia y construiremos a partir de ella el conjunto cociente  $X/R$ . Consideraremos ahora la biyección:

$$\begin{aligned} \phi : X/R &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto f(x), \end{aligned} \quad (5.22)$$

que usaremos para definir una estructura diferenciable en  $X/R$  tal que  $X/R$  sea una variedad cociente difeomorfa a  $Y$ . La inyectividad de  $\phi$  se tiene por 5.21 y la suprayectividad por ser  $f$  suprayectiva. Por cada carta  $(V, \psi)$  de  $(Y, \Omega_Y)$  definimos una carta  $m$ -dimensional sobre  $X/R$  como el par  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$ , donde

$$\tilde{O} = \phi^{-1}(V), \quad (5.23)$$

$$\tilde{\varphi} = \psi \circ \phi : \tilde{O} \longrightarrow \mathbf{R}^m. \quad (5.24)$$

Veamos que  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$  es una carta  $m$ -dimensional sobre  $X/R$ . Los entornos coordenados son subconjuntos de  $X/R$ ,  $\tilde{O} = \phi^{-1}(V) \subset X/R$ , las imágenes

$$\tilde{\varphi}(\tilde{O}) = \tilde{\varphi}(\phi^{-1}(V)) = \psi \circ \phi(\phi^{-1}(V)) = \psi(V) \quad (5.25)$$

son abiertos y las aplicaciones  $\tilde{\varphi}$  son inyectivas por ser composición de inyectivas. Así,  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$  es una carta  $m$ -dimensional sobre  $X/R$ . Como  $\{V : (V, \psi) \in \Omega_Y\}$  cubre  $Y$ , el conjunto de todos los entornos coordinados  $\{\tilde{O} : \tilde{O} = \phi^{-1}(V), (V, \psi) \in \Omega_Y\}$  cubrirá  $X/R$ . Veamos que todo par de cartas sobre  $X/R$  es compatible. Sean  $(\tilde{O}_1, \tilde{\varphi}_1)$  y  $(\tilde{O}_2, \tilde{\varphi}_2)$  dos cartas  $m$ -dimensionales en  $X/R$ , con  $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 \neq \emptyset$ , construidas a partir de las cartas  $(V_1, \psi_1)$  y  $(V_2, \psi_2)$  de  $(Y, \Omega_Y)$  respectivamente.

Como  $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 \neq \emptyset$  implica  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , los conjuntos:

$$\tilde{\varphi}_1(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) = (\psi_1 \circ \phi)(\phi^{-1}(V_1) \cap \phi^{-1}(V_2)) = \psi_1(V_1 \cap V_2) \quad (5.26)$$

$$\tilde{\varphi}_2(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) = (\psi_2 \circ \phi)(\phi^{-1}(V_1) \cap \phi^{-1}(V_2)) = \psi_2(V_1 \cap V_2) \quad (5.27)$$

son abiertos en  $\mathbf{R}^m$  y las aplicaciones

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} = \psi_1 \circ \phi \circ (\phi^{-1} \circ \psi_2^{-1}) = \psi_1 \circ \psi_2^{-1} \quad (5.28)$$

$$\tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = \psi_2 \circ \phi \circ (\phi^{-1} \circ \psi_1^{-1}) = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \quad (5.29)$$

son diferenciables de clase  $C^\infty$  por ser  $(V_1, \psi_1)$  y  $(V_2, \psi_2)$  cartas compatibles. Por tanto, la colección de todas las cartas  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$  sobre  $X/R$  construidas según 5.23 y 5.24 forma un atlas  $m$ -dimensional sobre  $X/R$ , que inducirá una única estructura diferenciable sobre el cociente.

Veamos ahora que la estructura diferenciable construida hace que la proyección canónica  $\pi$  sea una submersión, para lo que comprobaremos en primer lugar que  $\pi$  es una aplicación diferenciable. Sea  $p \in X$ , como  $f$  es diferenciable en  $p$ , existen cartas  $(O, \varphi) \in \Omega_X$ ,  $(V, \psi) \in \Omega_Y$  tales que  $p \in O$ ,  $f(p) \in V$ ,  $f(O) \subset V$  y el representante local  $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ . Tomando la carta  $(\tilde{O}, \tilde{\varphi})$  construida a partir de  $(V, \psi)$ , como  $f(p) \in V$ :

$$\phi^{-1}(f(p)) = [p] \in \phi^{-1}(V) = \tilde{O} \quad (5.30)$$

y, como  $f(O) \subset V$ :

$$\pi(O) = \phi^{-1}(f(O)) \subset \phi^{-1}(V) = \tilde{O}. \quad (5.31)$$

Así, el representante local  $\tilde{\varphi} \circ \pi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \phi \circ \pi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  en  $\varphi(p)$ . Queda probado así que  $\pi$  es diferenciable dotando al cociente de la estructura diferenciable construida.

Para ver que es una submersión, usaremos la proposición 5.1.4. Como  $f$  es una submersión, para cada  $p \in X$  existe una aplicación  $g : U \subset Y \rightarrow X$  diferenciable tal que  $f \circ g = \text{Id}_U$  y  $(g \circ f)(p) = p$ . Sea la composición:

$$g \circ \phi : \phi^{-1}(U) \subset X/R \rightarrow X, \quad (5.32)$$

que es diferenciable por ser composición de diferenciables ( $\phi$  puede escribirse a partir de 5.24 como  $\psi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ , donde  $\psi^{-1}$  y  $\tilde{\varphi}$  son diferenciables por ser difeomorfismos las aplicaciones de las cartas) y verifica, para todo  $[p] \in \phi^{-1}(U)$ :

$$\pi \circ (g \circ \phi)([p]) = \pi \circ g(\phi([p])) = \pi \circ g(f(p)) = \pi(g \circ f(p)) = \pi(p) = [p], \quad (5.33)$$

pues  $g \circ f = \text{Id}_U$  y, como  $(g \circ f)(p) = p$ :

$$g \circ \phi \circ \pi(p) = g \circ (\phi([p])) = g \circ f(p) = p. \quad (5.34)$$

Por tanto, la aplicación  $g \circ \phi : \phi^{-1}(U) \rightarrow X$  satisface las hipótesis de la proposición 5.1.4, de manera que la proyección canónica  $\pi$  es una submersión y, por tanto,  $X/R$  es una variedad cociente de  $X$  por la relación  $R$ .

Por último, veamos que esta variedad cociente es difeomorfa a  $(Y, \Omega_Y)$ , viendo que la biyección  $\phi$  es, además, un difeomorfismo. Ya hemos razonado que  $\phi$  es diferenciable, luego basta ver que  $\phi^{-1} : Y \rightarrow X/R$  también lo es. Para ello veamos que  $\phi^{-1}$  es diferenciable en  $f(p)$  para cada  $f(p) \in Y$ . Como hemos visto por la proposición 5.1.4, para cada  $p \in X$  existe una aplicación diferenciable  $g : U \subset Y \rightarrow X$  tal que  $\pi \circ g \circ \phi|_{\phi^{-1}(U)} = \text{Id}_{\phi^{-1}(U)}$ , es decir, para cada  $f(p) \in Y$  se tiene que  $\phi^{-1} = \pi \circ g$ , luego  $\phi^{-1}$  es composición de aplicaciones diferenciables. Por tanto,  $\phi$  es un difeomorfismo entre la variedad cociente y la variedad  $(Y, \Omega_Y)$ .

$\Leftarrow$  Recíprocamente, sea  $X/R$  la variedad cociente de  $X$  por la relación  $R$ . Por hipótesis, existe un difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi: & X/R & \longrightarrow Y \\ & [p] & \longmapsto \phi([p]). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Vamos a probar que la aplicación:

$$\begin{aligned} f: & X & \longrightarrow Y \\ & p & \longmapsto \phi([p]), \end{aligned} \quad (5.36)$$

es una submersión suprayectiva de  $X$  en  $Y$ . Como  $X/R$  es una variedad cociente de  $X$  por la relación  $R$ , la proyección canónica  $\pi$  es una submersión. Por la proposición 5.1.4, para cada  $p \in X$  existe una aplicación diferenciable  $\bar{g} : \bar{U} \subset X/R \rightarrow X$  tal que  $\pi \circ \bar{g} = \text{Id}_{\bar{U}}$  y  $\bar{g} \circ \pi(p) = p$ .

Como  $\phi$  es un difeomorfismo,  $\phi^{-1}$  será diferenciable y así la aplicación siguiente:

$$\bar{g} \circ \phi^{-1} : \phi(\bar{U}) \subset Y \longrightarrow X \quad (5.37)$$

también lo será. Además,

$$f \circ \bar{g} \circ \phi^{-1}|_{\phi(\bar{U})} = \phi \circ \pi \circ \bar{g} \circ \phi^{-1}|_{\phi(\bar{U})} = \phi \circ \text{Id}_{\bar{U}} \circ \varphi^{-1}|_{\phi(\bar{U})} = \text{Id}_{\phi(\bar{U})}, \quad (5.38)$$

$$\bar{g} \circ \phi^{-1} \circ f(p) = \bar{g}(\phi^{-1}(f(p))) = \bar{g}(\pi(p)) = p, \quad (5.39)$$

luego  $\bar{g} \circ \phi^{-1}$  es una aplicación diferenciable en las condiciones de la proposición 5.1.4, de manera que  $f : X \longrightarrow Y$  es una submersión, que será suprayectiva por serlo  $\phi$ .  $\square$

**Ejemplo 5.2.1** (Variedades de Stiefel). Se llama *p-referencia* o *p-marco* en  $\mathbf{R}^n$  a un conjunto ordenado de  $p$  vectores de  $\mathbf{R}^n$  linealmente independientes. Denotemos por  $S(p, \mathbf{R}^n)$  al conjunto de todos los *p*-marcos en  $\mathbf{R}^n$  y construyamos la aplicación:

$$f : S(p, \mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R}) \quad (5.40)$$

que asigna, a cada *p*-marco en  $\mathbf{R}^n$ , la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los vectores que lo componen respecto a una base dada.  $f$  está bien definida y es claramente una biyección. Como vimos en el ejemplo 2.3.5,  $(\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R}), \Omega_{\mathcal{M}_p})$  es una subvariedad abierta de  $(\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R}), \Omega_{\mathcal{M}})$ , definida en el ejemplo 1.2.2. Para cada carta  $np$ -dimensional  $(O, \varphi) \in \Omega_{\mathcal{M}_p}$ , definimos el par

$$(V, \psi) = (f^{-1}(O), \varphi \circ f), \quad (5.41)$$

que es una carta  $np$ -dimensional sobre  $S(p, \mathbf{R}^n)$ . En efecto, las aplicaciones  $\varphi \circ f$  son inyectivas por ser composición de aplicaciones inyectivas y las imágenes  $\varphi \circ f(V) = \varphi \circ f(f^{-1}(O)) = \varphi(O)$  son abiertos en  $\mathbf{R}^{np}$  por ser  $(O, \varphi)$  una carta  $np$ -dimensional. Además, como  $f$  es una biyección, el conjunto  $\{f^{-1}(O) : (O, \varphi) \in \Omega_{\mathcal{M}_p}\}$  cubre  $S(p, \mathbf{R}^n)$  y, si  $(f^{-1}(O_1), \varphi_1 \circ f), (f^{-1}(O_2), \varphi_2 \circ f)$  son dos cartas sobre  $S(p, \mathbf{R}^n)$  con dominios no disjuntos, entonces  $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ . Los conjuntos

$$\varphi_1 \circ f(f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2)) = \varphi_1(O_1 \cap O_2) \quad (5.42)$$

$$\varphi_2 \circ f(f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2)) = \varphi_2(O_1 \cap O_2) \quad (5.43)$$

son abiertos en  $\mathbf{R}^{np}$  y las aplicaciones:

$$(\varphi_1 \circ f) \circ (\varphi_2 \circ f)^{-1} = \varphi_1 \circ f \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \quad (5.44)$$

$$(\varphi_2 \circ f) \circ (\varphi_1 \circ f)^{-1} = \varphi_2 \circ f \circ f^{-1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \quad (5.45)$$

son diferenciables de clase  $C^\infty$ , luego todo par de cartas es compatible y el conjunto:

$$\{(f^{-1}(O), \varphi \circ f) : (O, \varphi) \in \Omega_{\mathcal{M}_p}\} \quad (5.46)$$

es un atlas  $np$ -dimensional sobre  $S(p, \mathbf{R}^n)$  que induce una única estructura diferenciable  $\Omega_S$ . La variedad diferenciable resultante recibe el nombre de *variedad de Stiefel*, y es tal que la aplicación  $f$  es un difeomorfismo. En efecto, si  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ , sea  $(O, \varphi) \in \Omega_{\mathcal{M}_p}$  tal que  $v \in f^{-1}(O)$ , la aplicación  $\varphi \circ f \circ (\varphi \circ f)^{-1} : \varphi(O) \rightarrow \varphi(O)$  coincide en su dominio con la identidad, que es diferenciable en  $v$ . Como esto es cierto para todo  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ ,  $f$  es diferenciable y, análogamente,  $f^{-1}$  también lo será, lo que prueba que  $f$  es un difeomorfismo.

Probemos ahora que  $(S(p, \mathbf{R}^n), \Omega_S)$  tiene una variedad cociente difeomorfa a  $(G(p, \mathbf{R}^n), \Omega_G)$ . Para ello recurriremos al resultado de la proposición 5.2.1, es decir, buscaremos una submersión suprayectiva de  $S(p, \mathbf{R}^n)$  en  $G(p, \mathbf{R}^n)$ . Definimos la aplicación:

$$\phi : S(p, \mathbf{R}^n) \rightarrow G(p, \mathbf{R}^n) \quad (5.47)$$

que asigna, a cada  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ , el  $p$ -plano en  $G(p, \mathbf{R}^n)$  que tiene a  $f(v)$  por matriz representante. Esta aplicación es suprayectiva, pues todo  $p$ -plano en  $\mathbf{R}^n$  tiene una matriz representante  $n \times p$  de rango  $p$  cuyas columnas determinan un  $p$ -marco en  $\mathbf{R}^n$ . Falta comprobar que  $\phi$  es una submersión, para lo que hay que ver, en primer lugar, que es diferenciable.

Sea  $v = (v_1, \dots, v_p) \in S(p, \mathbf{R}^n)$  y sea  $(V, \psi) \in \Omega_S$  tal que  $v \in V$ , entonces  $\psi(v)$  será un vector de  $\mathbf{R}^{np}$ , que podemos escribir en forma de matriz  $n \times p$  de rango  $p$ . Transformando dicha matriz en su forma canónica quedará determinado el conjunto  $\alpha$  de las posiciones de las  $p$  filas linealmente independientes, que definirán una carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega_G$  tal que  $\phi(v) \in U_\alpha$  (véase el ejemplo 1.2.7 en el que se construye la estructura diferenciable  $p(n-p)$ -dimensional sobre  $G(p, \mathbf{R}^n)$ ). Tenemos así dos cartas,  $(V, \psi)$  de la variedad de Stiefel y  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de la variedad de

Grassmann, tales que  $v \in V$ ,  $\phi(v) \in U_\alpha$ ,  $\phi(V) \subset U_\alpha$  y la aplicación:

$$\varphi_\alpha \circ \phi \circ \psi^{-1} : \psi(V) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \quad (5.48)$$

está formada por funciones racionales, cuyos denominadores no se anulan, ya que se han obtenido a partir del producto de una matriz por la inversa de una submatriz. En consecuencia,  $\varphi_\alpha \circ \phi \circ \psi^{-1}$  es diferenciable en  $\psi(v)$ , luego  $\phi$  es diferenciable en  $v$ . Como esto es cierto para todo  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ , queda probado que  $\phi$  es diferenciable.

Para ver que  $\phi$  es una submersión usaremos la proposición 5.1.4. Buscaremos, para cada  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ , una aplicación diferenciable  $g : U \subset G(p, \mathbf{R}^n) \longrightarrow S(p, \mathbf{R}^n)$  tal que  $\phi \circ g = \text{Id}_U$  y  $g \circ \phi(v) = v$ . Para ello, consideramos la carta global

$$(S(p, \mathbf{R}^n), \xi) = (f^{-1}(\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R})), \varphi|_{\mathcal{M}_{n \times p}^p(\mathbf{R})} \circ f) \quad (5.49)$$

construida según 5.46, donde  $(\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R}), \varphi)$  denota la carta global de  $\Omega_M$ . Denotaremos por  $(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{np})$  a sus funciones coordenadas y por  $Y$  a la matriz  $n \times p$  con entradas  $y_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Si  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ , denotaremos por  $Y(v)$  a la matriz que tiene por entradas las coordenadas  $y_{ij}(v)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Si  $\alpha$  es una secuencia ordenada de enteros entre 1 y  $p$ , denotaremos por  $Y_\alpha(v)$  a la submatriz de  $Y(v)$  formada por las filas en las posiciones de  $\alpha$  y por  $W_\alpha(v)$  a la submatriz de  $Y(v)$  formada por las filas restantes. Para cada  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ , elegimos  $\alpha$  tal que  $Y_\alpha(v)$  es no singular y definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} g: \quad U_\alpha &\subset G(p, \mathbf{R}^n) &\longrightarrow & S(p, \mathbf{R}^n) \\ \pi &&\longmapsto & g(\pi) = \gamma \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  es la carta de  $\Omega_G$  dada por la secuencia  $\alpha$  y  $\gamma \in S(p, \mathbf{R}^n)$  queda definida a partir de sus coordenadas en  $\mathbf{R}^{np}$  como:

$$Y_\alpha(\gamma) = Y_\alpha(v) \quad W_\alpha(\gamma) = Z_\alpha(\pi)Y_\alpha(v) \quad (5.51)$$

donde, tal y como se introdujo en el ejemplo 1.2.7,  $Z_\alpha(\pi)$  es la submatriz de la representante canónica de  $\pi \in U_\alpha$  formada por las filas no incluidas en  $\alpha$ . Para cada  $v \in S(p, \mathbf{R}^n)$ ,  $g$  define una aplicación diferenciable que satisface, por construcción,  $\phi \circ g = \text{Id}_{U_\alpha}$  y  $g \circ \phi(v) = v$ . Por la

proposición 5.1.4,  $\phi$  es una submersión y, como es suprayectiva, la proposición 5.2.1 define una variedad cociente de  $S(p, \mathbf{R}^n)$  difeomorfa a  $G(p, \mathbf{R}^n)$ .

**Proposición 5.2.2.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable y  $R$  una relación de equivalencia en  $X$ . Si  $X/R$  es una variedad cociente, entonces no existe ninguna otra estructura diferenciable distinta salvo difeomorfismo en  $X/R$  que la convierta en una variedad cociente.

*Demostración.* Denotemos por  $\Omega_{X/R}$  la estructura diferenciable de la variedad cociente  $X/R$  y sea  $\Omega'$  otra estructura diferenciable sobre  $X/R$  tal que  $X/R$  es una variedad cociente de  $X$  por  $R$ . Veamos que las variedades  $(X/R, \Omega_{X/R})$  y  $(X/R, \Omega')$  son difeomorfas, es decir, que la aplicación identidad  $\text{Id} : (X/R, \Omega_{X/R}) \longrightarrow (X/R, \Omega')$  es un difeomorfismo. Si denotamos por  $\pi$  y  $\pi'$  a las proyecciones canónicas de  $(X, \Omega)$  en  $(X/R, \Omega_{X/R})$  y  $(X/R, \Omega')$  respectivamente, entonces  $\pi' = \text{Id} \circ \pi$  y, por la proposición 5.1.5,  $\text{Id}$  es diferenciable. Igualmente,  $\pi = \text{Id}^{-1} \circ \pi'$ , luego por el mismo argumento  $\text{Id}^{-1}$  es diferenciable. Como la biyectividad de la identidad es conocida,  $\text{Id}$  es un difeomorfismo y las variedades  $(X/R, \Omega_{X/R})$  y  $(X/R, \Omega')$  son difeomorfas.  $\square$

**Proposición 5.2.3.** Toda variedad cociente de una variedad que verifica el segundo axioma de numerabilidad verifica también dicho axioma.

*Demostración.* Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $R$  una relación de equivalencia en  $X$  y  $X/R$  una variedad cociente. Si  $(X, \Omega)$  verifica el segundo axioma de numerabilidad, existe una base numerable de  $\tau_X$ ,  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ . Consideramos  $\bar{\mathcal{B}} = \{\pi(B_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ . Usando que la aplicación  $\pi$  es abierta y que  $B_n \in \tau_X$ , es claro que  $\pi(B_n) \in \tau_{X/R}$ . Por otro lado, dado  $W \in \tau_{X/R}$ , por ser  $\pi$  una submersión de  $X$  en  $X/R$ , es diferenciable y por la proposición 2.2.2 es continua, de manera que  $\pi^{-1}(W) \in \tau_X$ , por tanto  $\pi^{-1}(W)$  será unión arbitraria de abiertos básicos de  $\mathcal{B}$ , entonces, por ser  $\pi$  suprayectiva,  $W$  será igual a la imagen por  $\pi$  de dicha unión arbitraria y consecuentemente será unión arbitraria de abiertos de  $\bar{\mathcal{B}}$ . Se concluye así que  $\bar{\mathcal{B}}$  es una base numerable de  $\tau_{X/R}$ .  $\square$

### 5.3. Grupos de transformaciones

**Definición 5.3.1.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $(G, \cdot)$  un grupo. Se dice que  $G$  actúa como un grupo de transformaciones sobre  $X$  si existe una aplicación  $\theta : G \times X \longrightarrow X$  tal que:

i) Para cada  $g \in G$ , la aplicación

$$\begin{aligned}\theta_g: X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \theta_g(x) = \theta(g, x)\end{aligned}\tag{5.52}$$

es un difeomorfismo. En ese caso  $\theta_g$  se denomina *transformación*.

$$ii) \theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X.$$

En ese caso la aplicación  $\theta$  recibe el nombre de *acción*.

Dada una acción  $\theta$  de  $G$  como grupo de transformaciones sobre  $X$ , definimos el siguiente homomorfismo de grupos, donde  $(\text{Dif}(X), \circ)$  es el grupo de difeomorfismos de  $X$  con la operación composición:

$$\begin{aligned}\theta^*: G &\longrightarrow \text{Dif}(X) \\ g &\longmapsto \theta^*(g) = \theta_g.\end{aligned}\tag{5.53}$$

Esta aplicación asigna a cada elemento del grupo su correspondiente transformación y es, efectivamente, un homomorfismo. Si  $g_1, g_2 \in G$ ,  $\theta^*(g_1 g_2) = \theta_{g_1 g_2}$  que, por la condición (ii) de la definición 5.3.1, actúa sobre los elementos de  $X$  como:

$$\theta_{g_1 g_2}(x) = \theta(g_1 g_2, x) = \theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta_{g_1}(\theta(g_2, x)) = \theta_{g_1}(\theta_{g_2}(x)) = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}(x).\tag{5.54}$$

Recíprocamente, todo homomorfismo de grupos  $\theta^*: G \longrightarrow \text{Dif}(X)$  define una acción  $\theta$  de  $G$  como grupo de transformaciones sobre  $X$  como:

$$\begin{aligned}\theta: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \theta(g, x) = (\theta^*(g))(x).\end{aligned}\tag{5.55}$$

La aplicación  $\theta$  es efectivamente una acción de  $G$  sobre  $X$ , pues para cada  $g \in G$ , las transformaciones  $\theta_g = \theta^*(g)$  son difeomorfismos y,  $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$ :

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta^*(g_1)(\theta^*(g_2)(x)) = (\theta^*(g_1) \circ \theta^*(g_2))(x) = \theta^*(g_1 g_2)(x) = \theta(g_1 g_2, x),\tag{5.56}$$

por ser  $\theta^*$  un homomorfismo de grupos.

**Observación 5.3.1.** En las condiciones de la definición 5.3.1, si  $e$  denota el elemento neutro del grupo  $G$ , entonces  $\theta_e = \text{Id}_X$ . En efecto, como  $\theta^*$  es un homomorfismo de grupos,  $\theta^*(e) =$

$\theta_e = \text{Id}_X$ . Además, para todo  $g \in G$  se verifica  $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$ , pues:

$$\text{Id}_X = \theta^*(e) = \theta^*(gg^{-1}) = \theta^*(g) \circ \theta^*(g^{-1}) \Leftrightarrow \theta^*(g^{-1}) = (\theta^*(g))^{-1} \Leftrightarrow \theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}. \quad (5.57)$$

**Definición 5.3.2.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $(G, \cdot)$  un grupo que actúa como grupo de transformaciones sobre  $X$ . Si  $\theta$  denota la acción del grupo y  $e$  su elemento neutro, se dice que  $(G, \cdot)$  actúa *fielmente* sobre  $X$  si, para todo  $g \in G$  tal que  $\theta_g = \text{Id}_X$ , entonces  $g = e$  necesariamente. En ese caso se dice que la acción  $\theta$  es *fiel*.

**Definición 5.3.3.** En las condiciones de la definición anterior, se dice que  $G$  actúa *libremente* sobre  $X$  si, para todo  $g \in G$  tal que  $\theta_g(x) = x$  para algún  $x \in X$ , entonces  $g = e$  necesariamente. En ese caso se dice que la acción  $\theta$  es *libre*.

**Proposición 5.3.1.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $(G, \cdot)$  un grupo actuando como grupo de transformaciones sobre  $X$ . Si  $\theta$  denota la acción del grupo y  $\theta^*$  el homomorfismo de grupos definido en 5.53, existe una acción del grupo  $(G/\text{Ker}(\theta^*), \cdot)$  sobre  $X$ , que además es fiel.

*Demostración.* Sea la aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad G/\text{Ker}(\theta^*) \times X &\longrightarrow X \\ (g\text{Ker}(\theta^*), x) &\longmapsto \varphi(g\text{Ker}(\theta^*), x) = \theta(g, x). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Las aplicaciones  $\varphi_{g\text{Ker}(\theta^*)} = \theta_g$  son difeomorfismos por ser  $\theta$  una acción y, para todo  $g_1\text{Ker}(\theta^*)$ ,  $g_2\text{Ker}(\theta^*) \in G/\text{Ker}(\theta^*)$  y todo  $x \in X$ :

$$\begin{aligned} \varphi(g_1\text{Ker}(\theta^*), \varphi(g_2\text{Ker}(\theta^*), x)) &= \varphi(g_1\text{Ker}(\theta^*), \theta(g_2, x)) = \theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1g_2, x) = \\ \varphi(g_1g_2\text{Ker}(\theta^*), x) &= \varphi((g_1\text{Ker}(\theta^*))(g_2\text{Ker}(\theta^*)), x), \end{aligned}$$

luego  $\varphi$  define efectivamente una acción del grupo  $G/\text{Ker}(\theta^*)$  como grupo de transformaciones sobre  $X$ . Para ver que es fiel, sea  $g \in G$  tal que  $\varphi_{g\text{Ker}(\theta^*)} = \text{Id}_X$ . Entonces:

$$\theta_g(x) = \text{Id}_X \Rightarrow g \in \text{Ker}(\theta^*) \Rightarrow g\text{Ker}(\theta^*) = e\text{Ker}(\theta^*) = e_{G/\text{Ker}(\theta^*)}, \quad (5.59)$$

luego la acción es fiel. □

Si  $(G, \cdot)$  es un grupo actuando como grupo de transformaciones sobre una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $(X, \Omega)$ , se puede definir la relación siguiente sobre los elementos de  $X$ . Dados  $p, q \in X$ :

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } q = \theta(p), \quad (5.60)$$

donde  $\theta$  denota la acción del grupo. 5.60 define una relación de equivalencia en  $X$ . En efecto, para todo  $p, q, r \in X$ :

- i) Reflexividad:  $p \sim p$ , pues  $\theta(e, p) = p$  para todo  $p \in X$ ,
- ii) Simetría:  $p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G : q = \theta_g(p) \Leftrightarrow p = \theta_{g^{-1}}(q) \Leftrightarrow q \sim p$ ,
- iii) Transitividad:  $p \sim q, q \sim r \Leftrightarrow \exists g_1, g_2 \in G : q = \theta_{g_1}(p), r = \theta_{g_2}(q) = \theta_{g_2}(\theta_{g_1}(p)) = \theta_{g_1 g_2}(p) \Leftrightarrow p \sim r$ .

**Definición 5.3.4.** Las clases de equivalencia de la relación 5.60 reciben el nombre de *órbitas*.

Si  $p \in X$ , la *órbita* en  $G$  de  $p$  será su clase de equivalencia por dicha relación:

$$\text{Orb}_G(p) = \{\theta_g(p) : g \in G\}. \quad (5.61)$$

Si  $p \in X$  es tal que  $\text{Orb}_G(p) = \{p\}$ ,  $p$  se llama *punto fijo*.

En las condiciones anteriores, el conjunto cociente resultante recibe el nombre de *espacio de órbitas* de la acción y se le denota por  $X/G$ .

**Definición 5.3.5.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo actuando como grupo de transformaciones sobre una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $(X, \Omega)$ . Se dice que  $G$  actúa *discontinuamente* si para cada  $p \in X$  existe un entorno abierto  $U_p$  de  $p$  tal que

$$\theta(g, U_p) \cap U_p = \emptyset \quad \forall e \neq g \in G, \quad (5.62)$$

donde  $\theta$  denota la acción del grupo.

Es claro que todo grupo que actúa de forma discontinua sobre un conjunto lo hace también libremente. En efecto, si  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$  y  $\theta_g(p) = p$  para algún  $p \in X$ ,  $g \in G$ , entonces  $p \in U_p \cap \theta_g(U_p)$  donde  $U_p$  es el entorno abierto de  $p$  que proporciona la hipótesis

de acción discontinua. Como  $U_p \cap \theta_g(U_p) = \emptyset$  para todo  $e \neq g \in G$ , necesariamente  $g = e$  y la acción es libre. El recíproco sin embargo no es cierto, como muestra el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 5.3.1.** Sea el grupo aditivo  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  y el conjunto  $\mathbf{R}$ . Definimos la acción de  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  sobre  $\mathbf{R}$  dada por:

$$\begin{aligned}\theta: \quad & \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ & (z_1, z_2, r) \longmapsto r + \alpha z_1 + \beta z_2,\end{aligned}\tag{5.63}$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  distintos de cero y con  $\alpha/\beta$  irracional. Veamos que  $\theta$  define efectivamente una acción:

$$i) \quad \theta(0, 0, r) = r,$$

$$ii) \quad \theta(z_1, z_2, \theta(q_1, q_2, r)) = \theta(q_1, q_2, r) + \alpha z_1 + \beta z_2 = r + \alpha(z_1 + q_1) + \beta(z_2 + q_2) = \theta(z_1 + q_1, z_2 + q_2, r) = \theta((z_1, z_2) + (q_1, q_2), r),$$

con  $z_1, z_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Z}$  y  $r \in \mathbf{R}$ .  $\theta$  define una acción que además es libre:

$$\theta(z_1, z_2, r) = r \Rightarrow r = r + \alpha z_1 + \beta z_2 \Rightarrow \alpha z_1 + \beta z_2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} z_1 + z_2 = 0,\tag{5.64}$$

si  $z_1 \neq 0$ , entonces

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{z_2}{z_1},\tag{5.65}$$

lo que no es posible porque  $\alpha/\beta$  es irracional por hipótesis, luego  $m = n = 0$ . Finalmente, veamos que la acción no es discontinua. Dado  $r \in \mathbf{R}$ , sea  $U$  cualquier entorno abierto suyo, es decir, una unión de intervalos abiertos de  $\mathbf{R}$  conteniendo a  $r$ . La acción de un elemento  $(z_1, z_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  sobre  $r$  corresponde a una traslación de  $r$  en el eje real,  $\theta(z_1, z_2, r) = r + \alpha z_1 + \beta z_2$ . Pero siempre será posible tomar  $z_1, z_2$  tan pequeños como sea necesario para que  $r + \alpha z_1 + \beta z_2$  esté dentro de alguno de los intervalos anteriores, de manera que  $r \in U \cap \theta((z_1, z_2), U)$  y por tanto la acción no es discontinua.

**Proposición 5.3.2.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo que actúa libremente como grupo de transformaciones sobre una variedad  $n$ -dimensional  $(X, \Omega)$ . Si  $X/G$  es una variedad cociente  $n$ -dimensional, entonces la acción es discontinua.

*Demostración.* Si  $X/G$  es una variedad cociente  $n$ -dimensional, entonces la proyección canónica  $\pi$  es una submersión. Por la proposición 5.1.4, para cada  $p \in X$  existe una aplicación diferenciable

$g : U \subset X/G \longrightarrow X$  tal que  $\pi \circ g = \text{Id}_U$  y  $g \circ f(p) = p$ , es decir, existe un entorno  $\bar{U} = g(U)$  de  $p$  en el que  $\pi$  es inyectiva. Como la acción es libre,  $\bar{U} \cap \theta(g, \bar{U})$  es vacío salvo que  $g = e$ , lo que prueba que la acción es discontinua.  $\square$

**Teorema 5.3.3.** *Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y sea  $(G, \cdot)$  un grupo que actúa discontinuamente sobre  $X$ . Entonces,  $X/G$  es una variedad cociente  $n$ -dimensional.*

*Demostración.* Sea  $p \in X$  y denotemos por  $\theta$  la acción del grupo. Por hipótesis,  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$ , luego existe un entorno abierto  $U_p$  de  $p$  tal que  $\forall e \neq g \in G, U_p \cap \theta(g, U_p) = \emptyset$ . Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} \pi|_{U_p} : U_p &\longrightarrow \pi(U_p) \\ y &\longmapsto \text{Orb}_G(y) = [y], \end{aligned} \tag{5.66}$$

que es biyectiva. En efecto, si  $[y_1] = [y_2]$ , entonces  $y_1 \in \text{Orb}_G(y_2)$  y  $y_1 = \theta_g(y_2)$  para algún  $g \in G$ , de modo que  $y_1 \in \theta(g, U_p) \cap U_p$  y necesariamente  $g = e$ .

Sea  $(O, \varphi)$  una carta  $n$ -dimensional de  $(X, \Omega)$  tal que  $p \in O$  y sean:

$$\bar{O} = \pi(O \cap U_p), \tag{5.67}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi \circ \pi|_{O \cap U_p}^{-1}. \tag{5.68}$$

Para cada  $p \in X$ , el par  $(\bar{O}, \bar{\varphi})$  es una carta sobre el conjunto  $X/G$ , pues las aplicaciones  $\bar{\varphi} : \bar{O} \longrightarrow \mathbf{R}^n$  son inyectivas por serlo  $\varphi$  y  $\pi|_{O \cap U_p}^{-1}$ , y

$$\bar{\varphi}(\bar{O}) = (\varphi \circ \pi|_{O \cap U_p}^{-1})(\pi(O \cap U_p)) = \varphi(O \cap U_p) \tag{5.69}$$

es abierto por ser  $\varphi$  una carta sobre  $X$ . Veamos ahora que el conjunto de todas estas cartas define un atlas sobre  $X/G$ . Para ello sean  $(\bar{O}_1, \bar{\varphi}_1)$  y  $(\bar{O}_2, \bar{\varphi}_2)$  dos cartas sobre  $X/G$  construidas a partir de las cartas  $(O_1, \varphi_1)$  y  $(O_2, \varphi_2)$  sobre  $X$  y los puntos  $p_1 \in O_1$  y  $p_2 \in O_2$ , respectivamente. Supongamos que  $\bar{O}_1 \cap \bar{O}_2 \neq \emptyset$  y veamos que ambas cartas son compatibles.

Los conjuntos  $\bar{\varphi}_1(\bar{O}_1 \cap \bar{O}_2)$  y  $\bar{\varphi}_2(\bar{O}_1 \cap \bar{O}_2)$  son abiertos, pues

$$\bar{\varphi}_1(\bar{O}_1 \cap \bar{O}_2) = \varphi_1(O_1 \cap U_{p_1} \cap O_2 \cap U_{p_2}), \tag{5.70}$$

$$\bar{\varphi}_2(\bar{O}_1 \cap \bar{O}_2) = \varphi_2(O_1 \cap U_{p_1} \cap O_2 \cap U_{p_2}), \tag{5.71}$$

que son abiertos por ser  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  cartas sobre  $X$ . Falta comprobar que  $\overline{\varphi_2} \circ \overline{\varphi_1}^{-1}$  es de clase  $C^\infty$  en un entorno de cada  $x_0 \in \overline{\varphi_1}(\overline{O_1} \cap \overline{O_2})$ .

Sea  $\overline{z_0} = \overline{\varphi_1}^{-1}(x_0) \in \overline{O_1} \cap \overline{O_2}$ . Como 5.66 es biyectiva, existe un único  $z_0 \in O_1 \cap U_{p_1}$  tal que  $\pi(z_0) = \overline{z_0}$  y, como  $\overline{z_0} \in \pi(O_2 \cap U_{p_2})$ , existe un único  $g \in G$  tal que  $\theta_g(z_0) \in O_2 \cap U_{p_2}$  (usando 5.62). Tomamos un entorno  $U_{z_0} \subset O_1 \cap U_{p_1}$  suficientemente pequeño para que  $\theta_g(U_{z_0}) \subset O_2 \cap U_{p_2}$  y elegimos  $A = \varphi_1(U_{z_0})$ , que contiene a  $x_0$ :

$$x_0 = \overline{\varphi_1}(\overline{z_0}) = \varphi_1 \circ \pi|_{O_1 \cap U_{p_1}}^{-1}(\overline{z_0}) = \varphi_1(z_0) \in \varphi_1(U_{z_0}) = A. \quad (5.72)$$

Si  $(O_1 \cap U_{p_1}) \cap (O_2 \cap U_{p_2}) = \emptyset$ , entonces  $\pi|_{O_2 \cap U_{p_2}}^{-1} \circ \pi|_{O_1 \cap U_{p_1}}$  coincide con  $\theta_g$ :

$$\pi|_{O_2 \cap U_{p_2}}^{-1} \circ \pi|_{O_1 \cap U_{p_1}}(z) = \pi|_{O_2 \cap U_{p_2}}^{-1}(\overline{z}), \quad (5.73)$$

que es el único elemento de  $O_2 \cap U_{p_2}$  en la misma órbita que  $z$ , luego necesariamente será  $\theta_g(z)$ . Finalmente, en A:

$$\overline{\varphi_2} \circ \overline{\varphi_1}^{-1} = (\varphi_2 \circ \pi|_{O_2 \cap U_{p_2}}^{-1}) \circ (\pi|_{O_1 \cap U_{p_1}} \circ \varphi_1^{-1}) = \varphi_2 \circ \theta_g \circ \varphi_1^{-1}, \quad (5.74)$$

que es diferenciable.

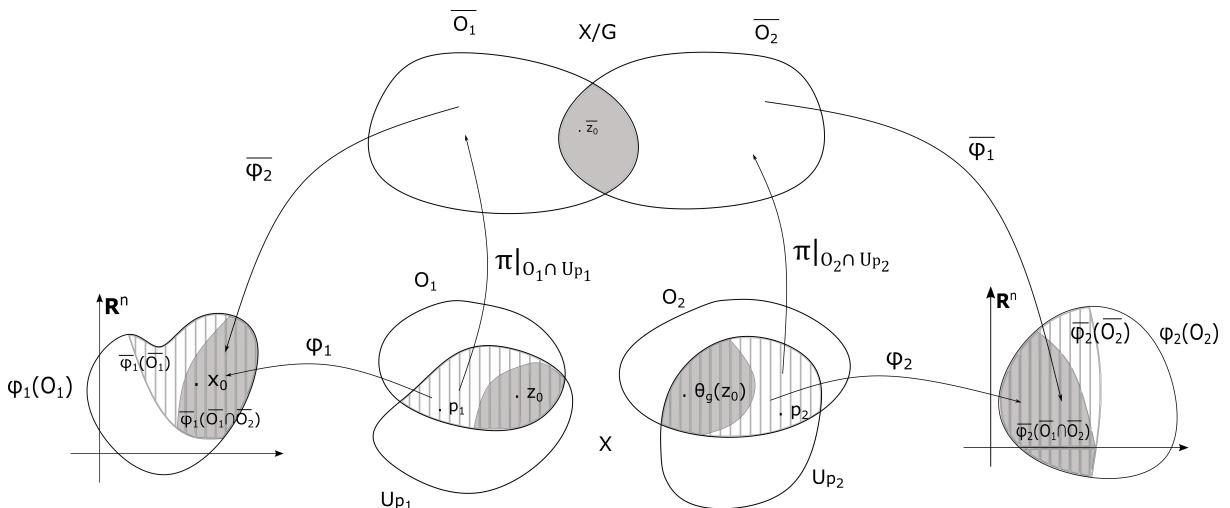


Figura 5.3: Compatibilidad de cartas en la variedad cociente.

Definimos entonces el atlas  $\Omega_{X/G} = \{(\overline{O}, \overline{\varphi}) : (O, \varphi) \in \Omega\}$ , que determina una única estructura diferenciable  $n$ -dimensional sobre  $X/G$ . La aplicación  $\pi : X \rightarrow X/G$  será ahora una aplicación entre variedades diferenciables y, en los dominios de las cartas, un difeomorfismo. Para comprobar esto último tomamos una carta  $(O \cap U_p, \varphi)$  en  $(X, \Omega)$  construida como al inicio de la demostración, y la correspondiente  $(\overline{O}, \overline{\varphi})$  carta en  $(X/G, \Omega_{X/G})$ . Como 5.66 es biyectiva, basta con probar la diferenciabilidad de  $\pi|_{O \cap U_p}$  y de  $\pi^{-1}|_{\overline{O}}$ . La comprobación es inmediata, dado  $(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(O \cap U_p)$ :

$$\overline{\varphi} \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n), \quad (5.75)$$

y análogamente se prueba para la inversa. Así, para cada  $p \in X$  existe una aplicación diferenciable  $\pi^{-1} : \overline{O} \subset X/G \rightarrow X$  tal que  $\pi \circ \pi^{-1} = \text{Id}_{\overline{O}}$  y  $\pi^{-1} \circ \pi(p) = p$ , luego, por la proposición 5.1.4,  $\pi$  es una submersión y  $X/G$  una variedad cociente  $n$ -dimensional.  $\square$

**Proposición 5.3.4.** En las condiciones del teorema anterior, si para todo par de puntos  $p, q \in X$  de órbitas distintas,  $p \notin \text{Orb}_G(q)$ , existen entornos abiertos  $V_p$  de  $p$  y  $V_q$  de  $q$  tales que:

$$\theta_g(V_p) \cap V_q = \emptyset \quad \forall g \in G, \quad (5.76)$$

donde  $\theta$  denota la acción del grupo, entonces las variedades  $(X, \Omega)$  y  $(X/G, \Omega_{X/G})$  son  $T_2$ .

*Demostración.* Veremos en primer lugar que la variedad cociente  $(X/G, \Omega_{X/G})$  es  $T_2$ . Sean  $\bar{p} \neq \bar{q}$  puntos distintos de  $X/G$ ,  $p, q \in X$  tales que  $\pi(p) = \bar{p}, \pi(q) = \bar{q}$  y  $V_p, V_q$  los entornos respectivos de  $p$  y  $q$  dados por la hipótesis.  $\pi(V_p)$  es un entorno abierto de  $\bar{p}$  en  $X/G$ , pues es la imagen de un abierto por la aplicación  $\pi$ , que es difeomorfismo en los dominios de las cartas y por tanto abierto. Igualmente se tiene que  $\pi(V_q)$  es un entorno abierto de  $\bar{q}$  en  $X/G$ , luego solo falta ver que son disjuntos. Si existiera un  $\bar{z} \in \pi(V_p) \cap \pi(V_q)$ , entonces  $\bar{z} = \pi(z)$  para algún  $z \in V_p$  y, por otro lado, existiría un elemento en  $\text{Orb}_G(z)$  que está en  $V_q$ , es decir,  $\exists g \in G$  tal que  $\theta_g(z) \in V_q$ , de manera que  $\theta_g(z) \in V_q \cap \theta_g(V_p)$ , lo que contradice la hipótesis.

Comprobaremos finalmente que la variedad diferenciable  $(X, \Omega)$  es  $T_2$ . Sean  $p \neq q$  puntos distintos de  $X$ . Si  $p$  y  $q$  están en distintas órbitas, basta tomar los entornos abiertos  $V_p$  y  $V_q$  que proporciona la hipótesis para separar los puntos. Si están en la misma órbita, recordando que la acción es discontinua se toma un entorno  $U_p$  de  $p$  tal que  $\theta_g(U_p) \cap U_p = \emptyset$  para todo  $g \in G$ , donde  $\theta_g(U_p)$  será un entorno de  $q$  para algún  $g \in G$ , pues  $q \in \text{Orb}_G(p)$ .  $\square$

**Observación 5.3.2.** Acabamos de probar que si  $G$  es un grupo que actúa discontinuamente sobre una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $X$ , el cociente  $X/G$  adquiere estructura de variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Resulta interesante preguntarse si la topología que induce la estructura diferenciable del espacio de órbitas coincide con la topología cociente, que se suele asignar a este tipo de conjuntos. Recuérdese que, si  $\pi : X \rightarrow X/G$  asigna a cada elemento de  $X$  su clase de equivalencia, los abiertos de la topología cociente se definen como los subconjuntos  $U \subset X/G$  tales que  $\pi^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Para comprobar que ambas topologías son la misma basta comprobar que las aplicaciones de las cartas 5.67 son homeomorfismos en la topología cociente. Sea  $(O, \varphi)$  una carta de  $X$ ,  $p \in O$  y  $(\overline{O}, \overline{\varphi})$  la carta correspondiente en  $X/G$  construida según 5.67. Si  $V \subset \overline{\varphi}(\overline{O})$  es un abierto,

$$\overline{\varphi}^{-1}(V) = (\pi|_{U_p \cap O} \circ \varphi^{-1})(V) = \pi|_{U_p \cap O}(\varphi^{-1}(V)), \quad (5.77)$$

que es abierto en la topología cociente por ser  $\varphi^{-1}(V)$  un abierto en  $X$ . Recíprocamente, si  $\overline{U}$  es un abierto de  $X/G$  en la topología cociente,

$$\overline{\varphi}(\overline{U}) = (\varphi \circ \pi|_{U_p \cap O}^{-1})(\overline{U}) = \varphi(\pi|_{U_p \cap O}^{-1}(\overline{U})), \quad (5.78)$$

que es un abierto euclídeo por ser la imagen por  $\varphi$  de un abierto en  $X$ . Así, las aplicaciones de las cartas 5.67 son homeomorfismos en la topología cociente y por tanto esta topología coincide con la que induce la variedad cociente construida en el teorema 5.3.3.

**Observación 5.3.3.** Si el espacio de órbitas  $X/G$  construido según el teorema 5.3.3 es  $T_2$ , las órbitas de los elementos de  $X$  en  $G$  son subconjuntos cerrados de  $X$ . En efecto, si  $X/G$  es  $T_2$  sus conjuntos unipuntuales serán cerrados, y sus antiimágenes por la aplicación  $\pi$ , que es cerrada en los dominios de las cartas, serán cerrados en  $X$ .

Como hemos visto, para que un espacio de órbitas (de un grupo actuando sobre una variedad diferenciable) adquiera estructura de variedad diferenciable es necesario que la acción sea discontinua. Esta condición puede ser difícil de comprobar, pero en algunos casos resulta equivalente al cumplimiento simultáneo de otras menos restrictivas, como ocurre con los grupos finitos.

**Proposición 5.3.5.** Sea  $G$  un grupo finito actuando sobre una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $T_2 X$ . Si  $G$  actúa libremente sobre  $X$  y las transformaciones son continuas, entonces el espacio de órbitas  $X/G$  es una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $T_2$ .

*Demostración.* Sea  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$  con  $g_1 = e$ ,  $\theta$  la acción del grupo y  $p \in X$ . Como la acción es libre, para todo  $i, j = 1, \dots, m$  con  $i \neq j$  se tiene  $\theta_{g_i}(p) \neq \theta_{g_j}(p)$  y, como  $X$  es  $T_2$ , existen entornos abiertos  $U_i$  de cada  $\theta_{g_i}(p)$  tales que para  $i \neq j$ ,  $U_i \cap U_j = \emptyset$ . Además, las transformaciones  $\theta_g$  son continuas, luego existirá un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $\theta_{g_i}(U) \subset U_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Entonces,  $U \cap \theta_{g_i}(U) \subset U_1 \cap U_i = \emptyset$  para  $i = 2, \dots, m$ , de manera que la acción es discontinua y por 5.3.3 el espacio de órbitas adquiere estructura de variedad diferenciable  $n$ -dimensional.

Veamos por último que la variedad cociente es  $T_2$  en este caso. Sean  $p, q \in X$  tales que  $q \notin \text{Orb}_G(p)$ . Entonces, existe un entorno abierto  $U_p$  de  $p$  tal que  $U_p \cap \theta_g(U_p) = \emptyset$  para todo  $g \neq e$ . Pero  $q \neq \theta_g(p)$  y la órbita de  $p$  es finita, luego puede reducirse el tamaño de  $U$  hasta encontrar un  $\tilde{U}$  entorno abierto de  $q$  tal que  $\tilde{U} \cap \theta_g(U) = \emptyset$ , de modo que se satisface la hipótesis de 5.3.4 y el espacio de órbitas es  $T_2$ .  $\square$

## 5.4. Dominios fundamentales

**Definición 5.4.1.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $(G, \cdot)$  un grupo actuando libremente como grupo de transformaciones sobre  $X$ . Si un subconjunto  $F \subset X$  contiene exactamente un punto de cada clase de equivalencia, su clausura  $\overline{F}$  recibe el nombre de *dominio fundamental*.

Si denotamos por  $\sim$  la relación de equivalencia que determina la acción del grupo, en el subconjunto  $\overline{F} \subset X$  queda inducida una relación de equivalencia  $\approx$  dada por:

$$p \approx q \Leftrightarrow p \sim q \quad \forall p, q \in \overline{F}. \quad (5.79)$$

Dotando a  $\overline{F}$  de la topología  $\tau_{X|_{\overline{F}}}$  de subespacio y al conjunto cociente  $\overline{F}/\approx$  de la topología cociente  $\tau_{\overline{F}/\approx}$ , la proyección canónica:

$$\begin{aligned} \eta: \quad & \overline{F} \longrightarrow \overline{F}/\approx \\ & p \longmapsto \eta(p) = [p]_{\approx}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

donde  $[p]_{\approx}$  denota la clase de equivalencia de  $p \in \bar{F}$  por la relación  $\approx$ , es continua. Esto es inmediato por cómo se define la topología cociente. Si denotamos por  $\pi$  a la proyección canónica  $\pi : X \rightarrow X/G$ , definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \nu : \bar{F}/_{\approx} &\longrightarrow X/G \\ \eta(p) &\longmapsto \pi(p) \end{aligned} \tag{5.81}$$

que es una biyección. En efecto, como  $\nu = \pi \circ \eta^{-1}$  y  $\pi$  y  $\eta^{-1}$  son suprayectivas,  $\nu$  también lo será. La inyectividad es inmediata tal y como está definida la relación de equivalencia en  $\bar{F}$ , pues si  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$  para algún par  $p_1, p_2 \in \bar{F}$ , entonces  $p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow p_1 \approx p_2 \Leftrightarrow \eta(p_1) = \eta(p_2)$ . Además, la aplicación  $\nu$  es continua, puesto que si  $W$  es un abierto en  $X/G$ ,  $\eta^{-1}(\nu^{-1}(W)) = \pi^{-1}(W) \cap \bar{F}$ . Como vimos en la observación 5.3.2, la topología que induce la variedad cociente  $X/G$  coincide con la topología cociente, de manera que  $\pi^{-1}(W)$  es un abierto de  $\tau_X$ ,  $\eta^{-1}(\nu^{-1}(W))$  un abierto de  $\tau_X|_{\bar{F}}$  y  $\nu^{-1}(W)$  un abierto de  $\tau_{\bar{F}/_{\approx}}$ .

Ya hemos probado que  $\nu$  es una biyección continua. El objetivo ahora es encontrar alguna restricción sobre  $F$  para que  $\nu$  sea además un homeomorfismo. Si  $A \subset X$  y  $\theta$  denota la acción del grupo  $(G, \cdot)$ , definimos  $K_F(A)$  como el conjunto:

$$K_F(A) = \{g \in G : \theta_g(A) \cap F \neq \emptyset\}. \tag{5.82}$$

**Definición 5.4.2.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(G, \cdot)$  un grupo actuando libremente como grupo de transformaciones sobre  $X$  y  $F \subset X$ . Diremos que la clausura  $\bar{F}$  es *normal* si para cada  $p \in X$  existe un entorno  $V$  de  $p$  tal que  $K_F(V)$  es finito.

La condición de normalidad es una restricción muy fuerte y por lo general es difícil encontrar un dominio fundamental normal. Probaremos ahora el lema siguiente, necesario en lo sucesivo y que muestra la necesidad de tomar la clausura  $\bar{F}$  a la hora de definir el dominio fundamental.

**Lema 5.4.1.** En las condiciones anteriores, si  $F \subset X$  es tal que  $\bar{F}$  es un dominio fundamental normal, entonces para cada punto  $p \in X$  existe un entorno abierto  $U_p$  de  $p$  tal que  $K_F(\{p\}) = K_F(U_p)$ .

*Demostración.* Sea  $p \in X$ . Como  $\bar{F}$  es normal, existe un entorno  $V$  de  $p$  tal que  $K_F(V)$  es finito. Como  $p \in V$ ,  $K_F(\{p\}) \subset K_F(V)$ , luego existirá un número finito de elementos  $g_1, \dots, g_r \in G$  tales que  $g_1, \dots, g_r \in K_F(V) \setminus K_F(\{p\})$ . Si  $\theta$  denota la acción del grupo, las imágenes  $\theta_{g_i}(p)$

pertenecerán al abierto  $X \setminus \overline{F}$  (no pueden pertenecer a  $F$  y tampoco a  $\overline{F}$ , pues en ese caso todos los entornos de  $\theta_{g_i}(p)$  cortarían a  $F$ , lo que no es posible). Así, para cada  $i = 1, \dots, r$  existirá un abierto  $W_i \in \tau_X$  tal que  $\theta_{g_i}(p) \in W_i \subset X \setminus \overline{F}$ . Como las transformaciones  $\theta_{g_i}$  son continuas, la intersección

$$U_p = \bigcap_{i=1, \dots, r} \theta_{g_i}^{-1}(W_i) \quad (5.83)$$

será un abierto en  $X$  que contiene a  $p$ . Además,  $U_p$  está contenido en  $V$  y los elementos  $g_1, \dots, g_r$  no pertenecen a  $K_F(U_p)$ . Como  $K_F(\{p\}) \subset K_F(U_p) \subset K_F(V)$ , se concluye que  $K_F(\{p\}) = K_F(U_p)$ .  $\square$

**Proposición 5.4.2.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(G, \cdot)$  un grupo actuando libremente como grupo de transformaciones sobre  $X$  y  $F \subset X$ . Si  $\overline{F}$  es un dominio fundamental normal, entonces la aplicación  $\nu$  definida en 5.81 es un homeomorfismo.

*Demostración.* Ya hemos visto que  $\nu$  es biyectiva y continua, luego solo tenemos que probar que  $\nu^{-1}$  es continua. Dado  $p \in \overline{F}$  veremos que  $\nu^{-1}$  es continua en  $\pi(p)$ . Para ello, dado un entorno  $\bar{W}$  de  $\nu^{-1}(\pi(p)) = \eta(p)$  en  $\overline{F}/\approx$  determinaremos un entorno  $\bar{U}$  de  $\pi(p)$  en  $X/G$  tal que  $\nu^{-1}(\bar{U}) \subset \bar{W}$ . Supongamos que podemos encontrar un entorno  $U$  de  $p$  en  $X$  tal que:

$$\overline{F} \cap \pi^{-1}(\pi(U)) \subset \eta^{-1}(\bar{W}). \quad (5.84)$$

En ese caso tendríamos que:

$$\nu^{-1}(\pi(U)) = \eta(\overline{F} \cap \pi^{-1}(\pi(U))) \subset \eta(\eta^{-1}(\bar{W})) = \bar{W}. \quad (5.85)$$

Como  $\pi$  es abierta,  $\bar{U} = \pi(U)$  sería un conjunto abierto en  $X/G$  satisfaciendo la condición que buscamos. Por tanto, buscaremos un entorno abierto  $U$  de  $p$  verificando 5.84.

El conjunto  $\eta^{-1}(\bar{W})$  es un subconjunto abierto de  $\overline{F}$ , luego existirá un abierto  $V \in \tau_X$  tal que  $\eta^{-1}(\bar{W}) = \overline{F} \cap V$ . Supongamos que  $K_F(\{p\}) = \{g_1, \dots, g_r\}$ , que es finito por la normalidad de  $F$ . Si  $\theta$  denota la acción del grupo, como  $K_F(\{p\}) \subset K_F(\eta^{-1}(\bar{W}))$  las imágenes  $\theta_{g_i}(p)$ , con  $i = 1, \dots, r$ , pertenecen a  $\eta^{-1}(\bar{W})$  y por tanto a  $V$ . Como las transformaciones son continuas, existirá un entorno abierto  $U_i$  de  $p$  en  $X$  tal que  $\theta_i(U_i) \subset V$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Por otro lado, por el lema 5.4.1 existirá un entorno abierto  $U_p$  de  $p$  en  $X$  tal que  $K_F(\{p\}) = K_F(U_p)$ .

Entonces, el conjunto  $S_i = U_i \cap U_p$  verifica:

$$K_F(S_i) = K_F(\{p\}), \quad \theta_{g_i}(S_i) \subset V \quad \forall i = 1, \dots, r. \quad (5.86)$$

Tomando la intersección  $U$  de todos los  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , se tiene que  $K_F(U) = K_F(\{p\})$  y que  $\overline{F} \cap \pi^{-1}(\pi(U))$  está contenido en la unión de todos los conjuntos  $\theta_{g_1}(U), \dots, \theta_{g_r}(U)$ . Pero todos estos conjuntos están en  $V$ , de manera que

$$\overline{F} \cap \pi^{-1}(\pi(U)) \subset \overline{F} \cap V = \eta^{-1}(\bar{W}), \quad (5.87)$$

y consecuentemente  $U$  satisface la condición 5.84.  $\square$

**Proposición 5.4.3.** Sea  $(X, \Omega)$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $(G, \cdot)$  un grupo actuando libremente como grupo de transformaciones sobre  $X$  y  $\overline{F}$  un dominio fundamental. Si existen dos puntos distintos en  $\overline{F}$  equivalentes bajo la relación  $\approx$ , entonces pertenecen a la frontera de  $\overline{F}$ .

*Demostración.* Lo probaremos por reducción al absurdo. Sean  $p, q \in \overline{F}$  tales que  $p \approx q$  y  $p \in \mathring{F}$ , donde  $\mathring{F}$  denota el interior de  $F$ . Sea  $\theta$  la acción del grupo y  $g \in G$  tal que  $q = \theta_g(p)$ . Como  $p \in \mathring{F}$ ,  $\theta_g(\mathring{F})$  es un entorno de  $q$ . Pero  $q \in \overline{F}$ , luego  $\theta_g(\mathring{F}) \cap F \neq \emptyset$ . Existe entonces  $r \in \mathring{F}$  tal que  $\theta_g(r) \in F$ . Como  $p$  y  $q$  son puntos distintos,  $g \neq e$  y, como la acción es libre,  $\theta_g(r)$  y  $r$  son puntos distintos equivalentes en  $F$ , lo que contradice que  $\overline{F}$  sea un dominio fundamental.  $\square$

**Ejemplo 5.4.1** (Cilindro). Sea el grupo aditivo  $(\mathbf{Z}, +)$  y la variedad diferenciable 2-dimensional  $\mathbf{R}^2$  con el atlas identidad. La aplicación:

$$\begin{aligned} \theta: \quad \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, (x, y)) &\longmapsto (x + z, y) \end{aligned} \quad (5.88)$$

define una acción de  $(\mathbf{Z}, +)$  como grupo de transformaciones sobre  $\mathbf{R}^2$ . En efecto, las aplicaciones

$$\begin{aligned} \theta_z: \quad \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + z, y) \end{aligned} \quad (5.89)$$

son difeomorfismos para cada  $z \in \mathbf{Z}$  y, si  $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ :

$$\theta(z_1, \theta(z_2, (x, y))) = \theta(z_1, (x + z_2, y)) = (x + z_1 + z_2, y) = \theta(z_1 + z_2, (x, y)). \quad (5.90)$$

Además, la acción es discontinua. Para todo punto  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , existirá un entero  $z \in \mathbf{Z}$  tal que  $(x, y)$  pertenezca a una banda de la forma  $U_z^1$  o a una banda de la forma  $U_z^2$ :

$$U_z^1 = \{(p, q) \in \mathbf{R}^2 : z < p < z + 1\} \quad U_z^2 = \{(p, q) \in \mathbf{R}^2 : z - 1/2 < p < z + 1/2\}. \quad (5.91)$$

Estas bandas satisfacen la condición de la definición 5.3.5, pues para todo  $0 \neq z \in \mathbf{Z}$ , su imagen por la transformación  $\theta_z$  es la misma banda desplazada  $z$  unidades en la dirección del eje  $x$ , que para ningún  $z$  cortará a la banda original. Por el Teorema 5.3.3, el espacio de órbitas  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$  adquiere una estructura de variedad diferenciable 2-dimensional, donde la estructura diferenciable viene inducida, de acuerdo con la demostración del Teorema, por el atlas cuyas cartas se definen a continuación. Para cada  $p \in \mathbf{R}^2$ , sea  $V_z$  una de las bandas  $U_z^1$ ,  $U_z^2$  para un  $z \in \mathbf{Z}$  tal que  $p \in V_z$ . El punto  $p$  define una carta en  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$  dada por:

$$(\pi(V_z), \pi^{-1}|_{V_z}), \quad (5.92)$$

donde  $\pi$  denota la proyección canónica. Ya hemos construido una variedad cociente  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$  2-dimensional a partir de la acción del grupo aditivo  $(\mathbf{Z}, +)$  sobre  $\mathbf{R}^2$ . Consideremos ahora el subconjunto:

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x < 1\}. \quad (5.93)$$

Las clases de equivalencia en el espacio de órbitas son de la forma

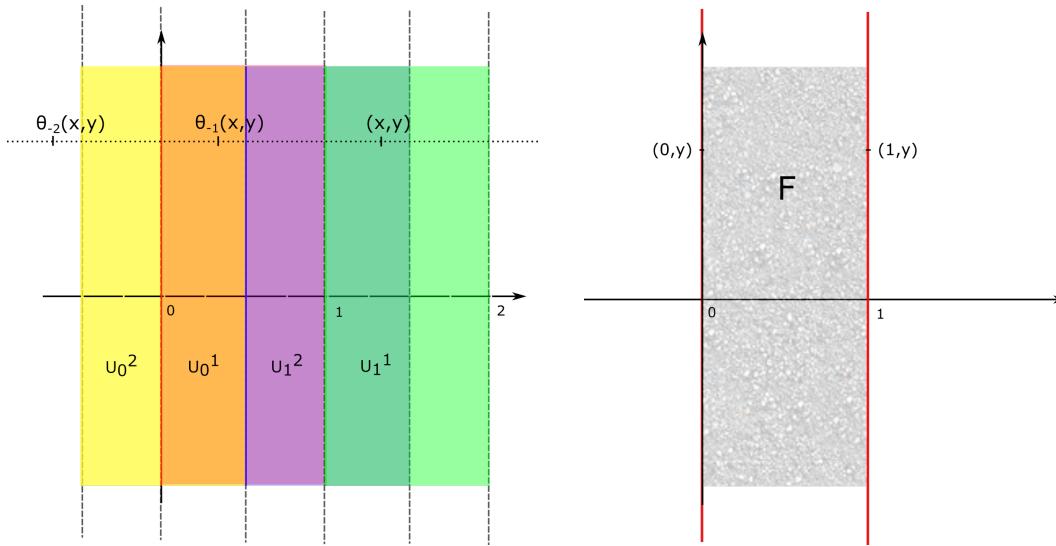
$$\pi(x, y) = \{(x + z, y) \in \mathbf{R}^2 : z \in \mathbf{Z}\}, \quad (5.94)$$

luego  $F$  solo contiene un punto de cada clase de equivalencia. Su clausura,  $\overline{F}$ , será por tanto un dominio fundamental, que es además normal. Esto se comprueba tomando cualquier entorno acotado de un punto  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Al estar acotado, solo podremos trasladarlo una cantidad entera un número finito de veces en la dirección horizontal de manera que corte a la banda  $F$ . Por tanto,  $\overline{F}$  es un dominio fundamental normal. Si denotamos por  $\approx$  la relación de equivalencia

que induce la acción del grupo en  $\overline{F}$ , por la proposición 5.4.2 existe un homeomorfismo:

$$\nu : \overline{F}/\approx \longrightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z} \quad (5.95)$$

que, por la proposición 5.4.3, identificará en la frontera a los puntos distintos equivalentes. En este caso, la clasura  $\overline{F}$  corresponde a la banda  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ , donde los únicos puntos equivalentes bajo  $\approx$  son aquellos de la forma  $(0, y), (1, y)$ , que distan una unidad entera. Así, hemos construido un espacio topológico  $\overline{F}/\approx$  homeomorfo al cociente  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ .



(a) Elementos de la clase de equivalencia de un punto  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Las imágenes de las bandas  $U_z^{1,2}$  son los dominios de las cartas de la variedad cociente.

(b) Dominio fundamental  $\overline{F}$ , en el que se identifican las bandas en rojo.

Figura 5.4: Construcción del espacio topológico  $\overline{F}/\approx$  homeomorfo a  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ .

Recordemos ahora el ejemplo 5.1.2, en el que habíamos construido la submersión 5.3 de  $\mathbf{R}^2$  en  $S^1 \times \mathbf{R}$ . Esta submersión es suprayectiva, luego por la proposición 5.2.1 existirá una variedad cociente de  $\mathbf{R}^2$  difeomorfa al cilindro  $S^1 \times \mathbf{R}$ . La demostración del Teorema determina cuál es la variedad cociente en cuestión. Si  $f$  es la submersión 5.3, la variedad cociente es la determinada por la relación de equivalencia 5.21, es decir, dos puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$  están relacionados si y solo si:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow (\cos(2\pi x_1), \sin(2\pi x_1), y_1) = (\cos(2\pi x_2), \sin(2\pi x_2), y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 + z \wedge y_1 = y_2 \text{ para algún } z \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow (x_2, y_2) = \theta_z(x_1, y_1) \text{ para algún } z \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2),$$

donde  $\sim$  denota la relación de equivalencia que induce la acción del grupo. Por tanto, la variedad cociente de  $\mathbf{R}^2$  difeomorfa a  $S^1 \times \mathbf{R}$  que nos proporciona la proposición 5.2.1 es la misma que la que induce la acción 5.88 del grupo aditivo  $(\mathbf{Z}, +)$ , es decir,  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ . En definitiva, hemos construido un espacio topológico  $\overline{F}/\sim$  homeomorfo a una variedad cociente  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$  que es difeomorfa al cilindro  $S^1 \times \mathbf{R}$ . Recordando el resultado de la proposición 2.2.6, concluimos finalmente que el espacio  $\overline{F}/\sim$  es homeomorfo al cilindro  $S^1 \times \mathbf{R}$ .

**Ejemplo 5.4.2** (Cinta de Moebius). Consideramos el grupo aditivo  $(\mathbf{Z}, +)$  y la variedad diferenciable 2-dimensional dada por  $\mathbf{R}^2$  y el atlas identidad. La aplicación:

$$\begin{aligned}\theta: \quad \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, (x, y)) &\longmapsto (x + z, (-1)^z y)\end{aligned}\tag{5.96}$$

define una acción de  $(\mathbf{Z}, +)$  como grupo de transformaciones sobre  $\mathbf{R}^2$ . En efecto, las aplicaciones

$$\begin{aligned}\theta_z: \quad \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + z, (-1)^z y)\end{aligned}\tag{5.97}$$

son difeomorfismos por ser composición de sumas y productos y, si  $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ :

$$\theta(z_1, \theta(z_2, (x, y))) = \theta(z_1, (x + z_2, (-1)^{z_2} y)) = (x + z_2 + z_1, (-1)^{z_1+z_2} y) = \theta(z_1 + z_2, (x, y)).$$

Para ver que la acción es discontinua recurrimos a los mismos conjuntos 5.91 que en el ejemplo anterior, que satisfacen de nuevo la condición de la definición 5.3.5 (la traslación anterior puede venir acompañada ahora de una reflexión sobre el eje  $x$ , que no altera las intersecciones de las bandas con otros conjuntos). Tenemos entonces un grupo  $(\mathbf{Z}, +)$  actuando discontinuamente como grupo de transformaciones sobre  $\mathbf{R}^2$ , es decir, el espacio de órbitas  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$  adquiere estructura de variedad diferenciable 2-dimensional, donde el atlas que induce la estructura diferenciable se construye de manera análoga al ejemplo anterior. La diferencia aparece cuando consideramos de nuevo el subconjunto  $F$  (5.93), cuya clausura vuelve a ser un dominio fundamental normal (el razonamiento es idéntico, teniendo en cuenta que las reflexiones no alteran las intersecciones). La relación de equivalencia que determina la acción del grupo induce en  $\overline{F}$  la relación  $\approx$  y, por la proposición 5.4.2, el cociente  $\overline{F}/\approx$  vuelve a ser homeomorfo al espacio de órbitas. Sin embargo, la identificación de los puntos de la frontera se ve alterada. En la clausura  $\overline{F}$ , los puntos

equivalentes serán ahora aquellos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{F}$  tales que, para algún  $z \in \mathbf{Z}$ :

$$(x_2, y_2) = \theta_z(x_1, y_1) \Leftrightarrow (x_2, y_2) = (x_1 + z, (-1)^z y_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1 + z \wedge y_2 = (-1)^z y_1. \quad (5.98)$$

La única posibilidad en  $\overline{F}$  es tomar  $z = 1$  y los puntos de la forma:

$$(0, y) \approx (1, -y) \quad \forall y \in \mathbf{R}. \quad (5.99)$$

El espacio topológico  $\overline{F}/\approx$ , homeomorfo a la variedad cociente 2-dimensional  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ , recibe el nombre de *Cinta de Moebius*.

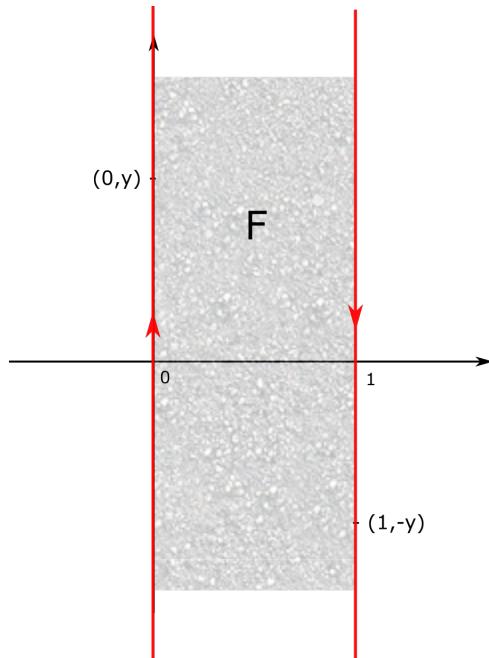


Figura 5.5: Cinta de Moebius.

# Conclusiones

Uno de los objetivos principales de este trabajo era el de presentar una construcción de las estructuras diferenciables sobre un conjunto no vacío que priorizara el enfoque topológico y prescindiera de toda restricción innecesaria. Esto es lo que se ha llevado a cabo en los dos primeros capítulos, en los que se ha mostrado cómo el carácter topológico de la variedad puede surgir de manera natural a partir de axiomas establecidos inicialmente sobre conjuntos sin ningún tipo de estructura topológica o algebraica.

Una vez construida la variedad diferenciable, se ha continuado con un estudio básico del resto de pilares de esta teoría, como son la diferenciación o las subvariedades. Dado que son estos los puntos de partida de teorías más avanzadas en Geometría y Física, se ha considerado esencial una introducción firme y detallada. El trabajo se ha cerrado con un capítulo que introduce las variedades cociente. Este bloque cierra además la línea constructiva de los dos ejemplos principales que se van desarrollando desde diferentes puntos de vista a lo largo del trabajo: el cilindro y las variedades de Grassmann.

En definitiva, se ha desarrollado una base sólida y detallada de la Teoría de Variedades Diferenciables, introduciendo sus fundamentos desde un punto de vista que prioriza un asentamiento firme de los cimientos. Esto comprende el conocimiento de los diferentes enfoques que existen y su justificación según a qué objetivos respondan, lo que permite una mirada amplia, plural y aventajada a la hora de adentrarse en estudios más avanzados.

# Bibliografía

- [1] Bishop, R.L., Goldberg, S.L. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Publications , Inc. New York (1980).
- [2] Boothby, W.M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York (1975).
- [3] Brickell, F., Clark, R.S. *Differentiable manifolds. An Introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, London (1970).
- [4] Curtis, W.D., Miller, F.R. *Differentiable Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, Inc. Orlando (1985).
- [5] Guijarro, L. *Variedades: introducción*. Universidad Autónoma de Madrid (2010).
- [6] Hernández Paricio, L.J. *Introducción a la Geometría Diferencial*. Universidad de la Rioja (2007).
- [7] Lafuente, J. *Cálculo en Variedades*. Universidad Complutense de Madrid (2010).
- [8] Saorín, P.L. *Variedades Diferenciables y Topología*. Universidad de Murcia (1999).
- [9] Warner, F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scoot, Foresman and Company (1971).