Objetivos a cubrir **Código : MAT4-EDO.11**

- Aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

---

1. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_0 de bacterias. Para $t = 1$ hora, el número de bacterias medido es $3N_0/2$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

2. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años, ¿cuánto demorará en triplicarse? ¿Cuánto demorará en cuadriplicarse?.

3. Suponga que se sabe que la población de la comunidad del problema anterior es de 10.000 habitantes después de 3 años. ¿Cuál era la población inicial? ¿Cuál será la población en 10 años?.

4. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?.

5. La cantidad de bacterias de un cultivo crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de ellas que haya en dicho instante. Después de 3 horas se observa que se tiene 400 bacterias, y que al cabo de 10 horas hay 2000. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?.

6. Un reactor generativo transforma el uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que 0.043% de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la semivida de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

7. Inicialmente había 100 miligramos (mg) de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó en 3%. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualquiera, proporcional a la cantidad de sustancia en dicho instante, halle la cantidad que queda después de 24 horas.

8. El isótopo radiactivo de plomo, PB 209, se desintegra, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad presente en dicho instante, y tiene una semivida (o periodo medial) de 3.3 horas. Si inicialmente hay 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que se desintegre el 90% de dicho elemento?.

9. El radio se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si la mitad de la cantidad original desaparece en 1600 años. Hallar el porcentaje de pérdida en 100 años.

10. Hallar una curva que pase por el punto $(0, -2)$, de tal modo que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea igual a la ordenada correspondiente de este punto aumentada en tres unidades.

11. Hallar una curva que pase por el punto $(1, 1)$ de tal manera que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea proporcional al cuadrado de la ordenada de este punto.

12. Hallar una curva para la cual el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

13. Trazar por el punto $(2, 1)$ una curva, de tal manera que la tangente en cualquier punto coincida con la dirección de la recta que une el origen de coordenadas con este punto.

14. Demostrar que la curva cuya propiedad consiste en que todas sus normales pasan por un punto fijo, es una circunferencia.

15. Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior, en donde la temperatura del aire es de $5°F$. Después de 1 minuto el termómetro marca $55°F$ y a los 2 minutos marca $30°F$. ¿Cuál es la temperatura de la habitación?.

16. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea se obtiene también la formula

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_A)$$

Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de $20°C$, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los $90°C$ si se sabe que su temperatura aumentó $2°$ en 1 segundo. ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los $98°C$?.

17. Suponga que la temperatura de una taza de café obedece la ley de Newton del enfriamiento. Si el café tiene una temperatura de 200°F cuando acaba de servirse y un minuto después se ha enfriado hasta 190°F en un recinto cuya temperatura es de 70°F. Determine cuándo el café alcanza una temperatura de 150°.

18. Suponga que, a medianoche, se descubre un cuerpo con una temperatura de 85°F, y que la temperatura ambiente es constante a 70°F. El cuerpo se envía rápidamente (suponga que instantáneamente) a la morgue, en donde la temperatura ambiente se mantiene a 40°F. Al cabo de una hora se encuentra que la temperatura del cuerpo es de 60°F. Estime el momento de la muerte.

19. En virtud de la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo al aire libre es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el medio ambiente. Sea la temperatura del aire igual a 20°C, el cuerpo se enfría de 100°C hasta 60°C en 20 minutos. ¿Qué tiempo se necesita para que la temperatura del cuerpo baje hasta 30°C?.

20. Hallar una curva de tal manera que en cada uno de los puntos de la subtangente sea igual al doble de la abscisa.

21. Hallar una curva la cual el radio vector sea igual a la longitud de la tangente comprendida entre el punto de tangencia y el eje x.

22. Determinar la curva cuya subnormal es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto considerado de esta curva.

23. Determinar la curva en que la razón del segmento interceptado por la tangente sobre el eje y, respecto al radio vector, es constante.

24. Determinar la curva en que la razón del segmento interceptado por la normal sobre el eje x, respecto al radio vector, es constante.

25. Determinar la curva en la que el segmento interceptado por la tangente sobre el eje y es igual a $a \sec\theta$, donde θ es el ángulo formado por el radio vector y el eje x.

26. Determinar la curva en la que el segmento interceptado sobre el eje de ordenadas por la normal trazada en un punto de la curva es igual a la distancia entre dicho punto y el origen de coordenadas.

27. Hallar la curva cuya propiedad consiste en que el producto del cuadrado de la distancia entre cualquiera de sus puntos y el origen de coordenadas, por el segmento, interceptado sobre el eje de las abscisas por la normal en el punto mencionado, es igual al cubo de la abscisa de este punto.

28. En un cultivo de levadura la cantidad de fermento activo crece a una velocidad proporcional a la cantidad presente . Si se duplica la cantidad en 1 hora, ¿cuántas veces puede esperarse que se tenga la cantidad original al cabo de $2\frac{3}{4}$ horas?

29. Si, cuando la temperatura del aire es 20°C, se enfria una sustancia desde 100°C hasta 60°C en 10 minutos, hallar la temperatura después de 40 minutos.

30. Hallar la curva para la que cada una de sus tangentes forme con los ejes coordenadas un triángulo de área constante a^2.

31. Hallar la curva para la que el producto de las distancias de los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ a las tangentes es igual a k.

32. Hallar la curva para la que la proyección sobre el eje y de la perpendicular desde el origen a cualquiera de sus tangentes es igual a k.

33. Hallar la curva tal que el origen sea el punto medio del segmento que en el eje y determinan la tangente y la normal en cada uno de sus puntos.

Respuestas

1. $t = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} = 2.7095$; 2. 7.92 años, 10 años; 3. 6598 aprox., 26392; 4. 760 aprox.;
5. 3200; 6. $t = 24174$ años; 7. 88.529 mg; 8. 10.962 hrs; 9. 4.2%; 10. $y = e^x - 3$;
11. $k(x-1)y - y + 1 = 0$; 12. $y = cx^n$; 13. $y = \frac{x}{2}$; 15. $T = 105°C$; 16. 2.8943 seg, 5.1344 seg;
17. 6.0656 min; 18. 11 : 30 pm aprox.; 19. $t = 60$ seg; 20. $y = c\sqrt{x}$; 21. $y = cx$, y $y = \frac{c}{x}$;
22. $(x-y)^2(x+2y) = c$; 23. $\left(\frac{x}{c}\right)^m - \left(\frac{c}{x}\right)^m = \frac{2y}{x}$; 24. $x^2 + y^2 = m^2(x-c)^2$; 25. $y = x\,\mathrm{senh}\left(\frac{a}{x} + b\right)$;
26. $x^2 = c(2y + c)$; 27. $y^2\left(2x^2 + y^2\right) = c$; 28. 6.73 veces la cantidad original; 29. 25°C;
30. $2xy = a^2$; 31. $kx^2 = \left(k + a^2\right)\left(k - y^2\right)$; 32. $x^2 = 4k(k - y)$; 33. $x^2 + 2cy = c^2$;

Bibliografía

1. **Edwards, C. H. y Penney, D.**: "Ecuaciones Diferenciales Elementales y problemas con condiciones en la frontera". Tercera Edición. Prentice Hall.
2. **Kiseliov, A. - Krasnov, M. y Makarenko, G.**, "*Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*". Editorial Mir.
3. **Spiegel, Murray R.**, "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Tercera edición. Prentice Hall.
4. **Viola-Prioli, Ana y Viola-Prioli, Jorge**, "*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*". Universidad Simón Bolívar.
5. **Zill, Dennis**, "*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*". Grupo Editorial Iberoamérica.

e-mail : farith_72@hotmail.com