Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

19 de junio de 2007.
Matemáticas III (MA–1116)

2$^{\text{er}}$ Parcial. (30 %)
TIPO A1

1. (7 puntos) Halle los valores de la constante k para los cuales el vector $(3-k, 4, 2k)$ pertenece a gen$\{(1,4,1),(2,6,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Solución: Deben existir números x y y, tales que $x(1,4,1)+y(2,6,1) = (3-k, 4, 2k)$, es decir, debe tener solución el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3-k \\ 4x + 6y = 4 \\ x + y = 2k \end{cases}$$

por lo cual, usando Gauss–Jordan, se tiene:

$$\left[\begin{array}{cc|l} 1 & 2 & 3-k \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2k \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|l} 1 & 2 & 3-k \\ 0 & -2 & -8+4k \\ 0 & -1 & 3k-3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & 3k-5 \\ 0 & 1 & 4-2k \\ 0 & 0 & -2k-2 \end{array}\right] \Rightarrow k = -1.$$

En el tipo **A2** la segunda ecuación es $2x+3y=2$ la respuesta es la misma.

2. Considere el espacio vectorial $\mathbf{P}_3 = \{\, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : \ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \,\}$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares reales. Sea:

$$H = \{p(x) \in \mathbf{P}_3 : \ p(3) = 0 \quad \text{y} \quad p'(3) = 0\}$$

a) (3 puntos) ¿Es H un subespacio de $\mathbf{P}_3$?

i) Claramente el polinomio cero está en H, también se puede tomar el polinomio

$$p(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9, \quad p'(x) = 2x - 6,$$

el cual satisface $p(3) = 0$ y $p'(3) = 0$, por lo cual $H \neq \emptyset$.

ii) Sean

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in H \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in H \end{aligned}$$

entonces $p(3) = 0$, $p'(3) = 0$, $q(3) = 0$, $q'(3) = 0$, como la derivada de la suma es la suma de las derivadas entonces,

$$(p+q)(3) = p(3) + q(3) = 0 \text{ y } (p+q)'(3) = p'(3) + q'(3) = 0$$

por lo cual $p(x) + q(x) \in H$.

iii) Si α es un escalar, $(\alpha p)(3) = \alpha p(3) = 0$ y $(\alpha p')(3) = \alpha p'(3) = 0$.

b) (3 puntos) Pruebe que $\Omega = \{(x-3)^2, (x-3)^3\}$ es un subconjunto de H.
Sea $p(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, luego $p'(x) = 2x - 6$, y claramente $p(3) = 0$ y $p'(3) = 0$, similarmente sea $q(x) = (x-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$, luego $q'(x) = 3x^2 - 18x + 27$, y claramente $q(3) = 0$ y $q'(3) = 0$.

c) (3 puntos) ¿Es Ω linealmente independiente? Supongamos que $ap(x)+bq(x)=0$, entonces

$$\begin{aligned}
ap(x)+bq(x) &= a(x^2-6x+9)+b(x^3-9x^2+27x-27) \\
&= bx^3+(a-9b)x^2+(-6a+27b)x+(9a-27b) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

de las dos primeras ecuaciones $b=0$ y $a-9b=0$ se desprende que $a=0$ y $b=0$ por lo cual son linealmente independientes.

En el tipo **A2** se evalúa el polinomio y su derivada en 2.

3. (7 puntos) Sea r la recta que pasa por los puntos $P=(1,0,1)$ y $Q=(0,2,3)$ y sea π el plano de ecuación $x+y+z=11$. Si A es el punto intersección de la recta r con el plano π, halle una representación paramétrica de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.

Solución:

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{PQ}=(-1,2,2)$ y una ecuación paramétrica de la recta r es:

$$r:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &-& t \\ y &=& && 2t \\ z &=& 1 &+& 2t. \end{array}\right.$$

sustituyendo en la ecuación del plano tenemos

$$\begin{aligned}
(1-t)+2t+(1+2t) &= 11 \\
3t &= 11-2 \\
t &= 3.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos el punto $A=(-2,6,7)$ y un vector director de la recta pedida es un vector normal de plano $\hat{n}=(1,1,1)$, por lo que la recta será

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -2 &+& t \\ y &=& 6 &+& t \\ z &=& 7 &+& t. \end{array}\right.$$

En el tipo **A2**, $t=2$, $A=(-1,4,5)$ y la ecuación es:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -1 &+& t \\ y &=& 4 &+& t \\ z &=& 5 &+& t. \end{array}\right.$$

4. a) (4 puntos) Sea V un espacio vectorial y $\vec{0}$ el elemento neutro de V. Pruebe que si H es un subespacio de V, entonces $\vec{0}\in H$.

   Solución: Como H es un subespacio, $H\neq\emptyset$, sea $v\in H$ entonces $(-1)v=-v\in H$ y $\vec{0}=v-v\in H$, otra manera de hacerlo es tomar cualquier vector $v\in H$ y el escalar 0 y entonces $\vec{0}=0v\in H$.

   b) (3 puntos) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Adj}(A)=(c_{ij})$. Encuentre c_{23}.

   Solución:

$$c_{23}=(-1)^{2+3}\det(M_{32})=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=-3(7-15)=24.$$

   En el tipo **A2**, sólo hay un cambio de signo $(-1)^{3+1}=1$.