Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________________________

Carné: ______________ Sección: _____

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008

1er Examen Parcial (25 %)
Duración: 1h 50min
Tipo B

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Halle la antiderivada más general de las siguientes funciones

a) (2 puntos) $f(x) = x \operatorname{sen}\left(5x^2 + 2\right)$

b) (2 puntos) $g(t) = \dfrac{t-4}{(t^2 - 8t + 2)^4}$

c) (2 puntos) $h(z) = \sqrt[5]{z} + \sec(z)\tan(z)$

Pregunta 2. (3 puntos) Calcule

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \operatorname{arc\,sen}(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Pregunta 3. (6 puntos) Calcule el área encerrada por las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ cuando x está en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pregunta 4. (6 puntos) Halle la suma de Riemann R_P de la función $f(x) = x^2 + 4$ en el intervalo $[-3, 2]$ asociada a la partición

$$P : x_0 = -3, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$$

evaluando en el punto donde la función alcanza el máximo en cada intervalo

Pregunta 5. (4 puntos) Halle $f(2)$ siendo f una función continua que satisface para todo $x \geq 0$ la fórmula

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x.$$

Soluciones

1) a) Usamos la sustitución $u = 5x^2 + 2$, $du = 10xdx$. Entonces

$$\int x \operatorname{sen}(5x^2+2)dx = \frac{1}{10}\int \operatorname{sen}(u)du = -\frac{1}{10}\cos(u) + C = -\frac{1}{10}\cos(5x^2+2) + C$$

b) Usamos la sustitución $u = t^2 - 8t + 2$, $du = (2t-8)dt = 2(t-4)dt$, entonces

$$\int \frac{t-4}{(t^2-8t+2)^4}dt = \frac{1}{2}\int u^{-4}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-3}}{(-3)} + C = -\frac{1}{6(t^2-8t+2)^3} + C$$

c)

$$\int (\sqrt[5]{z} + \sec(z)\tan(z))dz = \int (z^{\frac{1}{5}} + \sec(z)\tan(z))dz = \frac{5z^{\frac{6}{5}}}{6} + \sec(z) + C$$

2) Sea $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \operatorname{arc\,sen}(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}dx$. Usamos la sustitución $u = x^2$, $du = 2xdx$, entonces

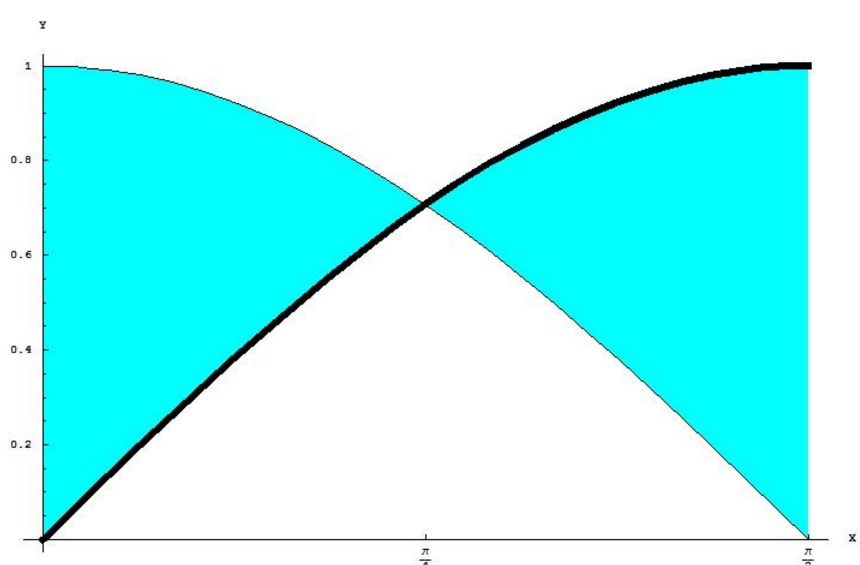
$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc\,sen}(u)}{\sqrt{1-u^2}}dx.$$

Ahora usamos la sustitución $v = \operatorname{arc\,sen}(u)$, $dv = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$, entonces

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} vdv = \frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0^2\right) = \frac{\pi^2}{144}.$$

Nota: También se puede calcular la integral I usando la sustitución $z = \operatorname{arc\,sen}(x^2)$, $dz = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

3) Queremos calcular el área de la región sombreada (la línea gruesa es la gráfica del seno y la delgada la del coseno)

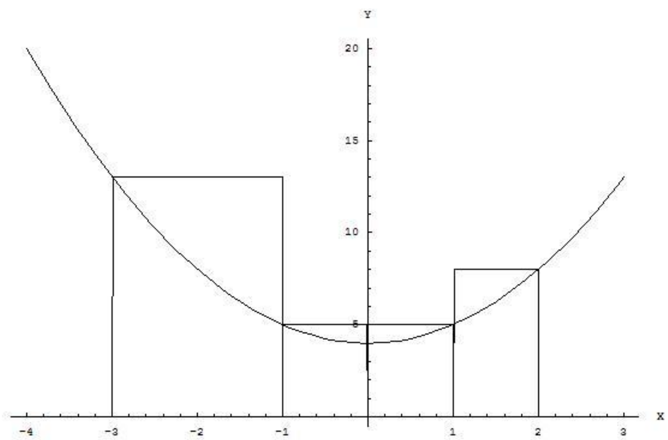


El área encerrada viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - \cos x)dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

4) Observamos que la función $f(x) = x^2 + 4$ es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, por lo que para los intervalos negativos de la partición usamos el extremo izquierdo del intervalo al evaluar la función y en los intervalos positivos usamos el extremo derecho del intervalo al evaluar la función. Tenemos entonces que

$$\bar{x}_1 = -3,\ \bar{x}_2 = -1,\ \bar{x}_3 = 1,\ \bar{x}_4 = 2.$$



Finalmente,

$$R_P = \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = f(-3) \cdot 2 + f(-1) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = 13 \cdot 2 + 5 + 5 + 8 = 44.$$

5) La continuidad de f nos permite usar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para derivar la fórmula

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x,$$

y obtener

$$f(x^2(1+x))(2x + 3x^2) = 1 \Rightarrow f((x^2(1+x)) = \frac{1}{2x + 3x^2}.$$

Como queremos calcular $f(2)$, resolvemos $x^2(1+x) = 2$ obteniendo $x = 1$. Entonces

$$f(2) = \frac{1}{2(1) + 3(1)^2} = \frac{1}{5}.$$