
Objetivos a cubrir **Código : MAT4-CDI.1**

- Sucesiones: convergencia y divergencia.
- Aplicaciones de las sucesiones.

---

1. Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión si se conoce que los primeros cuatros términos son los dados a continuación

   1. $1, 4, 9, 16, \ldots$ 2. $2, 7, 12, 17, \ldots$ 3. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ 4. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

   5. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots$ 6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots$ 7. $0, 2, 0, 2, \ldots$ 8. $10, 5, 10, 5, \ldots$

2. Estudie la convergencia ó divergencia de las siguientes sucesiones.

   1. $a_n = \dfrac{4n-3}{3n+4}$ 2. $a_n = \dfrac{2n}{5n-3}$ 3. $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ 4. $a_n = \dfrac{n^2-n+7}{2n^3+n^2}$

   5. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ 6. $a_n = \dfrac{(n+2)^2}{n^2}$ 7. $a_n = \dfrac{1-n^2}{2+3n^2}$ 8. $a_n = \dfrac{n^2-n+5}{2n+6}$

   9. $a_n = \dfrac{2n^3-n^2+1}{n^4+16n+2}$ 10. $a_n = \dfrac{3n^3}{10n^2+4}$ 11. $a_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

   12. $a_n = 4\sqrt{n}$ 13. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{2n^3+n-2}}{n+1}$ 14. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+6}-n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt[5]{n^4+1}}$

   15. $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^5+1}+\sqrt[5]{n^2+2}}{\sqrt[5]{n^4+3}+\sqrt{n^3+5}}$ 16. $a_n = \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ 17. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

   18. $a_n = \left(\sqrt{n^2-4n+5}-n\right)$ 19. $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ 20. $a_n = \dfrac{\ln n^2}{n}$

   21. $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ 22. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 23. $a_n = \dfrac{\ln 2n}{\ln 3n}$ 24. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

   25. $a_n = \dfrac{\ln 3n}{\ln n}$ 26. $a_n = \dfrac{\ln(2+e^n)}{3n}$ 27. $a_n = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n$ 28. $a_n = \dfrac{1}{5^n}$

   29. $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n}$ 30. $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$ 31. $a_n = n2^{-n}$ 32. $a_n = 4 + \dfrac{3^n}{2^n}$

   33. $a_n = \dfrac{2^n+1}{e^n}$ 34. $a_n = 1 + \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ 35. $a_n = 10^{(n+1)/n}$ 36. $a_n = \sqrt[n]{2^{n+1}}$

   37. $a_n = \dfrac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}$ 38. $a_n = \dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}$ 39. $a_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

   40. $a_n = \arctan 2n$ 41. $a_n = \dfrac{\tan^{-1} n}{n}$ 42. $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ 43. $a_n = n \operatorname{sen} \pi n$

   44. $a_n = n\cos \pi n$ 45. $a_n = 2^{\cos \pi n}$ 46. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 47. $a_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$

   48. $a_n = \left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)^n$ 49. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$ 50. $a_n = \left(\dfrac{2+n^2}{3+n^2}\right)^n$ 51. $a_n = \left(\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{3}{n}}$

   52. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{3^n}$ 53. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{n}}$ 54. $a_n = \sqrt{\dfrac{2+\cos n}{n}}$ 55. $a_n = \pi^{-(\operatorname{sen} n)/n}$

56. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$ 57. $a_n = \dfrac{n^3}{2^{n/10}}$ 58. $a_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \sqrt[n]{n}}$ 59. $a_n = (2n+5)^{\frac{1}{n}}$

60. $a_n = (0.001)^{-\frac{1}{n}}$ 61. $a_n = n^{\frac{2}{n+1}}$ 62. $a_n = n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 63. $a_n = \dfrac{\operatorname{senh} n}{\cosh n}$

64. $a_n = 1 + (-1)^n$ 65. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}}$ 66. $a_n = (-1)^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

67. $a_n = \dfrac{3 + (-1)^n}{n^2}$ 68. $a_n = 2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ 69. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

70. $a_n = (-1)\left(n^2+1\right)^{1/n}$ 71. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{1+n^3}$ 72. $a_n = \dfrac{n \cos n!}{n^2+1}$

73. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$ 74. $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$

3. Se deja caer un pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de $\dfrac{2}{3}$ de la altura anterior. Determine que altura alcanza en su tercero y en su n-ésimo rebotes.

4. Una pelota que cae desde una gran altura, recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo instante, 80 pies durante el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto recorre la pelota durante el sexto segundo?.

5. (a) Fibonacci propuso este problema: Suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja procrea una nueva pareja, que es fértil a los dos meses. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos. ¿Cuántas parejas tendremos el n-ésimo mes?. Demuestre que la respuesta es f_n, donde (f_n) es la sucesión de Fibonacci definida por

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3$$

(b) Sea $a_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$. Demuestre que $a_{n-1} = 1 + \dfrac{1}{a_{n-2}}$.

6. Halle el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

7. Señale si las sucesiones que siguen son crecientes, decrecientes o no monótonas

1. $a_n = \dfrac{1}{3n+5}$ 2. $a_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ 3. $a_n = \dfrac{n-2}{n+2}$ 4. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{5n+3}$

8. Suponga que se sabe que (a_n) es una sucesión decreciente y que todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué esa sucesión tiene un límite. ¿Qué podría decir respecto al valor del límite?

9. Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$, entonces la sucesión $\{(-1)^n a_n\}$ diverge.

10. Consideremos una población idealizada en la que cada individuo produce un vástago al final de cada período de tiempo. Si cada individuo vive 3 período de tiempo y la población comienza con 10 recién nacidos, entonces la tabla adjunta muestra la población durante los 5 períodos de tiempo

Intervalos de edad	1	2	3	4	5
$0-1$	10	10	20	40	70
$0-2$		10	10	20	40
$0-3$			10	10	20
Total	10	20	40	70	130

La sucesión de los valores de la población total tiene la propiedad de que

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}, \qquad n > 3$$

Hallar la población total durante los siguientes 5 períodos de tiempo.

11. Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida de manera recursiva por

1. $a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 1$
2. $a_1 = \sqrt{6}, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ para $n \geq 1$
3. $a_1 = \sqrt{20}, \quad a_{n+1} = \sqrt{20 + a_n}$ para $n \geq 1$
4. $a_1 = \sqrt{90}, \quad a_{n+1} = \sqrt{90 + a_n}$ para $n \geq 1$

Respuestas

1.1. $a_n = n^2$; 1.2. $a_n = 5n - 3$; 1.3. $a_n = \frac{1}{3^n}$; 1.4. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$; 1.5. $a_n = \frac{1}{3n-1}$; 1.6. $a_n = \frac{1}{n^2+1}$;

1.7. $a_n = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$; 1.8. $a_n = 10\cos^2\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 5\operatorname{sen}^2\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$; 2.1. Conv. a $\frac{4}{3}$; 2.2. Conv. a $\frac{2}{5}$;

2.3. Conv. a 1; 2.4. Conv. a 0; 2.5. Div.; 2.6. Conv. a 1; 2.7. Conv. a $-\frac{1}{3}$; 2.8. Div.; 2.9. Conv. a 0;

2.10. Div.; 2.11. Conv. a $\frac{1}{2}$; 2.12. Div.; 2.13. Conv. a $\sqrt[3]{2}$; 2.14. Conv. a -1; 2.15. Conv. a 0;

2.16. Conv. a 0; 2.17. Conv. a 0; 2.18. Conv. a -2; 2.19. Conv. a $\frac{1}{2}$; 2.20. Conv. a 0; 2.21. Conv. a $\frac{1}{2}$;

2.22. Conv. a 0; 2.23. Conv. a 1; 2.24. Conv. a 0; 2.25. Conv. a 1; 2.26. Conv. a $\frac{1}{3}$; 2.27. Div.;

2.28. Conv. a 0; 2.29. Conv. a 1; 2.30. Div.; 2.31. Conv. a 0; 2.32. Conv. a 4; 2.33. Conv. a 0;

2.34. Conv. a 1; 2.35. Conv. a 10; 2.36. Conv. a 2; 2.37. Conv. a $\frac{5}{7}$; 2.38. Conv. a 1; 2.39. Conv. a 1;

2.40. Conv. a $\frac{\pi}{2}$; 2.41. Conv. a 0; 2.42. Div.; 2.43. Conv. a 0; 2.44. Div.; 2.45. Div.; 2.46. Conv. a e;

2.47. Conv. a e^{-5}; 2.48. Conv. a 1; 2.49. Conv. a e^{-2}; 2.50. Conv. a 1; 2.51. Conv. a 1; 2.52. Conv. a 0;

2.53. Conv. a 0; 2.54. Conv. a 0; 2.55. Conv. a 1; 2.56. Conv. a 0; 2.57. Conv. a 0; 2.58. Conv. a 0;

2.59. Conv. a 1; 2.60. Conv. a 1; 2.61. Conv. a 1; 2.62. Conv. a 1; 2.63. Conv. a 0; 2.64. Div.;

2.65. Conv. a 0; 2.66. Conv. a 0; 2.67. Conv. a 0; 2.68. Conv. a 2; 2.69. Conv. a 0; 2.70. Conv. a -1;

2.71. Conv. a 0; 2.72. Conv. a 0; 2.73. Conv. a 0; 2.74. Conv. a 0; 3. $a_3 = \frac{20}{3}$, $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} 15$;

4. $a_6 = 176$; 6. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$; 7.1. Decrece; 7.2. No monótona; 7.3. Crece; 7.4. Decrece;

8. Monótona y acotada. $\lim_{n\to\infty} a_n \leq 5$; 10. $S_6 = 240$, $S_7 = 440$, $S_8 = 810$, $S_9 = 1490$, $S_{10} = 2740$;

11.1. Monótona creciente y acotada por $0 < a_n < 2$; 11.2. Monótona creciente y acotada por $0 < a_n < 3$;

11.3. Monótona creciente y acotada por $0 < a_n < 5$; 11.4. Monótona creciente y acotada por $0 < a_n < 10$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: “Cálculo". Novena Edición. Pearson Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: “Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

e-mail : farith_72@hotmail.com