Objetivos a cubrir **Código : MAT4-CDI.3**

- Criterio de la divergencia.
- Criterio de la integral para la convergencia o divergencia de una serie numérica.
- Criterios de comparación para la convergencia o divergencia de una serie numérica.

---

1. Estudie la convergencia o divergencia de las siguientes series

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{k+5}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+3}$ 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+n^2}{2+5n^3}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}-5n}{n}$ 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+3n^4+3}{\frac{1}{2}-3n^5}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^2+28}{n^2-9}$ 9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(5+\frac{k}{5}\right)$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n\sqrt{n^4-1}}{n+1}$ 11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln n-\ln(3n-1)\right)$ 12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln\left(n^2-2\right)-\ln\left(2n^2+5\right)\right)$

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{k}\right)^k$ 14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$ 15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ 16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ke}{k+1}\right)^k$

17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{3k+5}\right)^k$ 18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ak^2}{ak^2+5}\right)^{k^2}$ 19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^k$ 20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{-k}$

2. Utilice el criterio de la integral para demostrar la convergencia de la serie dada

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$ 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ 9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ 10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+5}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1/n}}{n^2}$ 12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\frac{n^2}{2}}$ 13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}$ 14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ 15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}2^{-\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ 17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+1}$ 18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+k}$ 19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{4/3}}$

20. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$ 21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2+9}$ 22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k+100}$ 23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$ 25. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 26. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{k^2+1}$ 27. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ 30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+2n^2+1}$ 31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{17k-13}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2+5)^{3/2}}$ 33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 34. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+5}{k^2+5k+17}$

3. Explique por qué el criterio de la integral **no** se aplica a la serie dada

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad 2.\ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \operatorname{sen} k \qquad 3.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} k}{k^2} \qquad 4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^4$$

4. Encuentre el menor entero positivo n, tal que el residuo R_n es menor que el error E dado

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};\quad E = 0.0001 \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};\quad E = 0.00005 \qquad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3};\quad E = 0.00005$$

$$4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6};\quad E = 2\times 10^{-11} \qquad 5.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2};\quad E = 0.0002 \qquad 6.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}};\quad E = 0.0002$$

$$7.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^4};\quad E = 0.0001 \qquad 8.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+k^2};\quad E = 0.0002$$

5. Demuestre que la serie p, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

6. Estudie la convergencia o divergencia de las siguientes series

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}} \qquad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.01}} \qquad 4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \qquad 6.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.1}}$$

7. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$

   (a) es convergente si $p > 1$ y $q \geq 0$.
   (b) es convergente si $p = 1$ y $q > 1$.
   (c) es divergente para todo q si $p < 1$.
   (d) es divergente si $p = 1$ y $q \leq 1$.

8. Determine los valores de p para los que la serie dada converge

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^p} \qquad 3.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \qquad 4.\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)^p}$$

9. La sucesión de Fibonacci, (F_n)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

se define por la fórmula recurrente $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, en donde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Verifique que el término general de la sucesión es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

demostrando que esta expresión satisface la formula recurrente.

10. Sea F_n el término general de la sucesión de Fibonacci dada en el Problema 9. Demuestre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

11. Sea (F_n) la sucesión de Fibonacci dada en el Problema 9. Demuestre que la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

es convergente

12. Empleando los criterios de comparación, así como el criterio necesario, examinar la convergencia de las siguientes series

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+5^k}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3+3}}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ 7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k}$ 8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3}$ 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3^n}$ 10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$ 12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\cos^2 n}$ 13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha n}{2^n} \quad \alpha \neq 0$ 14. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+2}$ 16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$ 17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^2+4}$ 18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n^4+1}}$

19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10k^2}{k^4+1}$ 20. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10k^2}{k^3-1}$ 21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$ 22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{e^n\,(n+1)^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}$ 24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} n}{n^2}$ 25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+k^{3/2}}$ 26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+2^{-n}\right)$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+k}$ 28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sqrt{n}}}$ 30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right)\right)$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{n^4+2}$ 32. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\ln n}$ 33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n+7}}$ 34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^4$ 36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2+1}$ 37. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2-1}{k^2\cdot 3^k}$ 38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n+3^n}$ 40. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2}$ 41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3n}$ 42. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{k}$

43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k-\ln k}$ 44. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4+\sqrt{k}}$ 45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n^{n+1}}$

13. Determine el entero más pequeño n, tal que el residuo satisface la desigualdad $R_n < 0.005$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+1}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^4 k}{k^4}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)\cdot 2^k}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+1/n}}$

14. Demuestre que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos convergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(a_n)$ también converge.

15. Demuestre que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos convergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ converge.

16. (a) Demuestre que $\ln n < n^{1/8}$ para todos los valores suficientemente grandes de n.

(b) Explique por qué el inciso 16a demuestra que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^8 n}$ diverge.

17. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

18. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos convergente y que $\{c_n\}$ es una sucesión de números positivos con límite cero. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ converge.

19. Utilice el resultado del problema 18 para demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

20. Demuestre que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$$
converge

21. Use el resultado del problema 20 para demostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}}$$
diverge.

22. Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números positivos, tal que, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ converge.

Respuestas

1.1. Div.; 1.2. Div.; 1.3. Div.; 1.4. Div.; 1.5. Div.; 1.6. Div.; 1.7. Div.; 1.8. Div.; 1.9. Div.;
1.10. Div.; 1.11. Div.; 1.12. Div.; 1.13. Div.; 1.14. Div.; 1.15. Div.; 1.16. Div.; 1.17. Div.;
1.18. Div.; 1.19. Div.; 1.20. Div.; 2.1. Conv.; 2.2. Conv.; 2.3. Conv.; 2.4. Div.; 2.5. Div.;
2.6. Conv.; 2.7. Conv.; 2.8. Div.; 2.9. Div.; 2.10. Div.; 2.11. Conv.; 2.12. Conv.; 2.13. Div.;
2.14. Conv.; 2.15. Conv.; 2.16. Conv.; 2.17. Conv.; 2.18. Conv.; 2.19. Conv.; 2.20. Div.; 2.21. Conv.;
2.22. Div.; 2.23. Conv.; 2.24. Conv.; 2.25. Conv.; 2.26. Conv.; 2.27. Div.; 2.28. Div.; 2.29. Conv.;
2.30. Conv.; 2.31. Div.; 2.32. Conv.; 2.33. Div.; 2.34. Div.; 4.1. $n > 10000$; 4.2. $n > 20000$;
4.3. $n > 100$; 4.4. $n > 100$; 4.5. $n > 5094$; 4.6. $n > 3$; 4.7. $n > 71$; 4.8. $n > 4411$; 6.1. Conv.;
6.2. Div.; 6.3. Conv.; 6.4. Div.; 6.5. Conv.; 6.6. Conv.; 8.1. $|p| > 1$; 8.2. $p > 1$; 8.3. $p > 1$;
8.4. No existe; 12.1. Div.; 12.2. Conv.; 12.3. Conv.; 12.4. Conv.; 12.5. Conv.; 12.6. Conv.;
12.7. Div.; 12.8. Conv.; 12.9. Conv.; 12.10. Conv.; 12.11. Conv.; 12.12. Conv.; 12.13. Conv.;
12.14. Div.; 12.15. Div.; 12.16. Div.; 12.17. Conv.; 12.18. Div.; 12.19. Conv.; 12.20. Div.; 12.21. Div.;
12.22. Conv.; 12.23. Div.; 12.24. Conv.; 12.25. Conv.; 12.26. Conv.; 12.27. Conv.; 12.28. Conv.;
12.29. Conv.; 12.30. Conv.; 12.31. Conv.; 12.32. Conv.; 12.33. Conv.; 12.34. Div.; 12.35. Conv.;
12.36. Conv.; 12.37. Conv.; 12.38. Conv.; 12.39. Conv.; 12.40. Conv.; 12.41. Div.; 12.42. Div.;
12.43. Div.; 12.44. Div.; 12.45. Conv.;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. Pearson Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

e-mail : farith_72@hotmail.com