Universidad Simón Bolivar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Primer Parcial MA-1112
Abril-Julio 2005
Tipo B
Duración 1 hora 45 min.

Justifique claramente todas sus respuestas.
Soluciones

1. (4 pts. c/u) Resuelva las siguientes integrales:

a)

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

Solución: Hacemos la sustitución $y =$arcsen(x), $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{2\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}$$

b)

$$\int \frac{x+3}{(x+5)\sqrt{x+4}}dx$$

Solución: Hacemos la sustituciones $y = x+4$, $dy = dx$ y $z = \sqrt{x+4}$, $dz = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{(x+5)\sqrt{x+4}}dx &= \int \frac{x+5-2}{(x+5)\sqrt{x+4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+4}}dx - 2\int \frac{1}{(x+4+1)\sqrt{x+4}}dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{y}}dy - 4\int \frac{1}{z^2+1}dz = 2y^{\frac{1}{2}} - 4\arctan(z) + C \\
&= 2\sqrt{(x+4)} - 4\arctan\sqrt{(x+4)} + C
\end{aligned}$$

c)

$$\int_0^1 \frac{\left(x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Solución: Hacemos la sustitución $y = \sqrt{x^2+1}$, $dy = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\left(x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\left(x^{\frac{2}{3}}\left(x^2+1\right)\right)^{\frac{3}{2}} + x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + 1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= \int_1^2 \left(\left(y^2\right)^{\frac{3}{2}} + 1\right)dy = \int_1^2 y^3 + 1 dy = \left[\frac{y^4}{4} + y\right]_{y=1}^{y=2} \\
&= 4 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{19}{4} = 4.75
\end{aligned}$$

2. (8 pts.) Utilice el primer Teorema Fundamental del Cálculo para derivar la siguiente función:

$$\phi(x) = \int_{-\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x+1}} \frac{1}{1+t^3}dt \quad \text{para } x > 0.$$

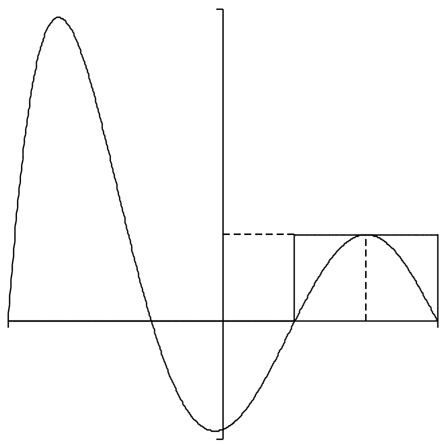
Solución: Sea $F(x)$ una anti–derivada de $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Entonces, $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ para todo $x > 0$. Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y la continuidad de f, tenemos que

$$\phi(x) = F(\sqrt[3]{x+1}) - F(-\sqrt[3]{x}) \quad \text{para todo } x > 0.$$

Por lo tanto, haciendo uso de la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= F'(\sqrt[3]{x+1}).\frac{1}{3}.(x+1)^{-2/3} - F(-\sqrt[3]{x}).\frac{-1}{3}.x^{-2/3} \\
&= \frac{1}{3(x+2)(x+1)^{2/3}} + \frac{1}{3(1-x)x^{2/3}}.
\end{aligned}$$

3. (10 pts.) Considere una función h cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:



Sabiendo que:

$$\int_a^b h(x)dx = 5, \quad \int_b^c h(x)dx = -1, \int_c^e h(x)dx = 4, \quad h(d) = 5$$

Halle:

a) $\int_a^c h(x)dx$
Solución:

$$\int_a^c h(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_b^c h(x)dx = 5 - 1 = 4$$

b) $A(R_1)$, $A(R_2)$ y el área del rectángulo que tiene como base al intervalo $[c, e]$
Solución:

$$A(R_1) = \int_a^b h(x)dx = 5$$

$$A(R_2) = -\int_b^c h(x)dx = 1$$

$$A(\text{rectángulo}) = (e - c)h(d) = 5(e - c)$$

c) $A(R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4)$.
Solución:

$$\begin{aligned}
A(R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4) &= A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) \\
&= 5 + 1 + A(\text{rectángulo}) - \int_c^e h(x)dx \\
&= 6 + 5(e - c) - 4 \\
&= 2 + 5(e - c)
\end{aligned}$$