

**Problema 1.** (10pts.) Determine si las siguiente series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

Solución: Por criterio de series alternantes

1. 
$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \to \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(\infty+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(\infty)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\infty} = 0$$

2. Sea 
$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)}$$
 derivando,  $f'(x) = \frac{-(\frac{1}{x+1})}{(\ln(x+1))^2} < 0 \Rightarrow a_n$  **DECRECE**

## Converge por serie alternante.

Ahora veamos si converge condicionalmente o absolutamente.

Tomando valor absoluto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Veamos la siguiente comparación:

$$\ln(n+1) < (n+1)\ln(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} > \frac{1}{(n$$

Sí  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$  **diverge**, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$  también **diverge**.

Entonces, sea 
$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$$

$$\begin{cases}
1. Es positiva para  $x \ge 1 \\
2. Es continua para [1, \infty) \\
3. f'(x) = \frac{-(\ln(x+1)+1)}{((x+1)\ln(x+1))^2} < 0, f(x) DECRECE
\end{cases}$$$

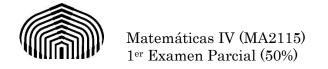
Por criterio de la integral: (Sí la integral diverge, la serie también diverge)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b \to \infty} \ln(\ln(b+1)) - \ln(\ln(2)) = \infty$$

La integral diverge, entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$  diverge.

Por lo tanto, por serie minorante, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$  diverge.

Concluimos que: la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$  CONVERGE CONDICIONALMENTE



$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{3n+1} \right)^n$$

Solución: Por criterio del n-esimo termino

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n \; \textit{DIVERGE}$$
 
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n}{3n}}{\frac{3n}{3n}+\frac{1}{3n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{3n})^n}=\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\neq 0$$

Concluimos que:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$  **DIVERGE** 

Problema 2. (13pts.) Hallar el conjunto de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x+1)^n}{n^2+4}$$

Solución: Por criterio del cociente absoluto

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(3x+1)^{n+1}}{(n+1)^2 + 4}}{\frac{(3x+1)^n}{n^2 + 4}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(3x+1)^{n+1}(n^2 + 4)}{((n+1)^2 + 4)(3x+1)^n} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(3x+1)^n(3x+1)(n^2 + 4)}{((n+1)^2 + 4)(3x+1)^n} \right| = |3x+1| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n^2 + 4)}{((n+1)^2 + 4)} \right| =$$

$$= |3x+1|$$

Para que la serie converja  $|3x + 1| < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < 0$ 

Veamos si se incluyen los extremos

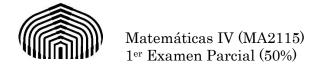
Para 
$$x = -2/3$$
:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3(-\frac{2}{3})+1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ 

Por criterio de comparación al límite:  $a_n = \frac{1}{n^2+4} > 0$  y  $b_n = \frac{1}{n^2} > 0 \rightarrow \frac{CONVERGE}{por serie p: (p=2>1)}$ 

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1$$
 Entonces, ambas  $(a_n \ y \ b_n)$  CONVERGEN

Para 
$$x = 0$$
:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3(0)+1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4}$ 

Por lo anterior, sabemos que la serie CONVERGE ABSOLUTAMENTE



$$\underline{\text{Concluimos que:}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n} \left(3x+1\right)^{n}}{n^{2}+4} \; \textit{CONVERGE} \; \forall x \in \left[-\frac{2}{3}, \mathbf{0}\right] \right]$$

Problema 3. (12pts.) Hallar el desarrollo de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{(4-x)^2}$$

y determine su radio de convergencia.

<u>Solución</u>: Sabemos que  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n |x| < 1$ 

Se tiene que 
$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{x}{4}} \stackrel{C.D.V.}{\stackrel{\frown}{=}} \frac{1}{4} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (t)^n |t| < 1 \stackrel{D.C.}{\stackrel{\frown}{=}} \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{4})^n |x| < 4$$

Derivando

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n\right)|x| < 4$$

$$\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} |x| < 4$$

Multiplicando por x:

$$\frac{x}{(4-x)^2} = \frac{x}{16} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} |x| < 4$$

Radio de convergencia: Notemos que la serie converge para -4 < x < 4

Entonces, su radio será 
$$R = \frac{4-(-4)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

\*NOTA: C.D.V.: Cambio de variable, D.C.: Devolviendo el cambio. Se puede derivar la función y la suma también, por propiedades de la sumatoria, al derivarla no se modifica el intervalo de convergencia.

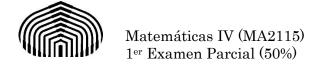
**Problema 4.** (15pts.) Hallar las trayectorias ortogonales a las familias  $x^2 + 4y^2 = Cx$ 

Solución: Despejemos C

$$C = \frac{x^2 + 4y^2}{x}$$

Derivemos por respecto a x

$$4y^2 = Cx - x^2 \stackrel{Derivando}{=} 8y \frac{dy}{dx} = C - 2x$$



Sustituimos C, en la expresión obtenida

$$8y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 4y^2}{x} - 2x \Rightarrow 8y\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^2}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^2}{8yx}$$

Pendiente ortogonal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8yx}{x^2 - 4y^2} \xrightarrow{E.D.Homogenea} \frac{dy}{dx} = \frac{8\frac{y}{x}}{1 - 4\frac{y^2}{x^2}}$$
 Cambio de variable: 
$$\begin{cases} t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \\ \frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t \end{cases}$$

Sustituyendo, nos queda

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{8t}{1 - 4t^2} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{8t}{1 - 4t^2} - t \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{7t + 4t^3}{1 - 4t^2} \quad (V.S.)$$

Despejando

$$\frac{1-4t^2}{7t+4t^3}dt=\frac{dx}{x}$$

Integrando a ambos lados

$$\int \frac{1-4t^2}{7t+4t^3}dt = \int \frac{dx}{x}$$

Consideremos cada lado de la igualdad

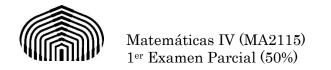
$$\int \frac{1-4t^2}{7t+4t^3}dt = \int \frac{1-4t^2}{t(7+4t^2)}dt = \frac{1}{7}\ln t - \frac{32}{56}\ln(7+4t^2) = Ln\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x} = Ln \, x + Ln \, C = Ln \, xC$$

**Entonces** 

$$Ln\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right) = Ln xC \Rightarrow e^{Ln\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right)} = e^{Ln xC}$$

$$\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{x(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right) = C \stackrel{D.C}{\Longrightarrow} \left(\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{7}}}{x(7+4\left(\frac{y}{x}\right)^2)^{\frac{32}{56}}}\right) = C$$



\*NOTA: Considere la siguiente descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1-4t^2}{7t+4t^3} = \frac{1-4t^2}{t(7+4t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(7+4t^2)} \begin{cases} 1-4t^2 = A(7+4t^2) + Bt \\ A = \frac{1}{7}, B = -\frac{32}{7}t \end{cases}$$

Note que para hallar B:

$$1 - 4t^{2} = 7A + 4At^{2} + Bt$$

$$1 - 4t^{2} = 7\left(\frac{1}{7}\right) + 4\left(\frac{1}{7}\right)t^{2} + Bt$$

$$1 - 4t^{2} = 1 + 4\left(\frac{1}{7}\right)t^{2} + Bt$$

$$-4t^{2} - \frac{4}{7}t^{2} = Bt$$

$$-\frac{32}{7}t = B$$

La integral

$$\int \frac{1-4t^2}{t(7+4t^2)}dt = \int \frac{1}{7t}dt - \int \frac{32t}{7(7+4t^2)}dt = \frac{1}{7}ln\ t - \frac{32}{56}ln\left(7+4t^2\right)$$