Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008

Nombre: ______________________________

Carné: ______________ Sección: _____

1^{er} Examen Parcial (25 %)
Duración: 1h 50min
Tipo D

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Halle las siguientes integrales

a) (2 puntos) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

b) (2 puntos) $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^5}$

c) (2 puntos) $\displaystyle\int x^3 \cos\left(5x^4\right) dx$

Pregunta 2. (3 puntos) Calcule la integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

Pregunta 3. (7 puntos) Calcule el área encerrada por las curvas $y = \frac{1}{1+x^2}$ y $y = x^2 - \frac{1}{2}$.

Pregunta 4. (4 puntos) Derive la función $g(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{x} \frac{t^2}{1+t^2}dt$.

Pregunta 5. (5 puntos) Sean $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$ e $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Halle el valor promedio de h en I.

Soluciones

1) a) Usamos la sustitución $u = 5x - 2$, $du = 5dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}2u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2\sqrt{5x-2}}{5} + C.$$

b) Usamos la sustitución $u = 1 + x^{\frac{4}{3}}$, $du = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$. Entonces

$$\int \frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^5} = \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^5} = \frac{3}{4}\int u^{-5}du = \frac{3}{4}\frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{3}{16\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^4} + C.$$

c) Usamos la sustitución $u = 5x^4$, $du = 20x^3$. Entonces

$$\int x^3\cos\left(5x^4\right)dx = \frac{1}{20}\int \cos(u)du = \frac{1}{20}\operatorname{sen}(u) + C = \frac{1}{20}\operatorname{sen}(5x^4) + C.$$

2) Usamos la sustitución $u = \cos(x)$, $du = -\operatorname{sen}(x)dx$. Entonces

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx = -\int_1^{-1}\frac{du}{1+u^2} = -\arctan(u)|_1^{-1} = -\arctan(-1)+\arctan(1) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

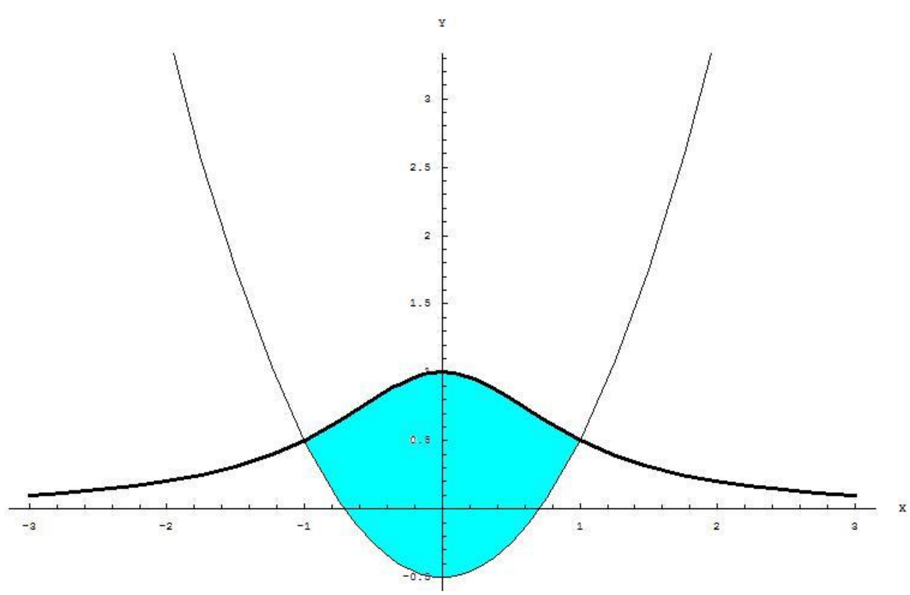
3) Primero calculamos la coordenada x de los puntos intersección:

$$\frac{1}{1+x^2} = x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(1+x^2\right) \Rightarrow 1 = x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Tenemos entonces que resolver $x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0$. Para ello resolvemos $z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{3}{2} = 0$ donde $z = x^2$. Entonces

$$z = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}.$$

Como $z = x^2 \geq 0$ descartamos $\frac{-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{2}$ y por lo tanto $x^2 = 1$, es decir, $x = \pm 1$.



Nota: La gráfica de la línea más gruesa es $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \underset{\text{el integrando es par}}{=} 2 \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\
&= 2 \left[\arctan(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

4) Como la función $f(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ podemos usar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para derivar g (además de la regla de la cadena y la propiedad de aditividad sobre intervalos de la integral definida), entonces

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\int_{-x^2}^{x} \frac{t^2}{1+t^2} dt \right)' = \left(\int_{-x^2}^{0} \frac{t^2}{1+t^2} dt + \int_{0}^{x} \frac{t^2}{1+t^2} dt \right)' \\
&= \left(- \int_{0}^{-x^2} \frac{t^2}{1+t^2} dt + \int_{0}^{x} \frac{t^2}{1+t^2} dt \right)' = - \frac{x^4}{1+x^4}(-2x) + \frac{x^2}{1+x^2} \\
&= \frac{2x^5}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

5) Tenemos que calcular $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx$. Calculamos primero $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx$. Usamos la sustitución $u = 1 + \cos^2(x)$, $du = -2\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$. Entonces

$$
I = -\frac{1}{2} \int_2^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2} \int_2^1 u^{-\frac{1}{2}} du = -u^{\frac{1}{2}} \Big|_2^1 = \sqrt{2} - 1.
$$

Entonces el valor promedio es

$$
\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\pi}.
$$