Objetivos a cubrir **Código : MAT4-EDO.13**

- Dependencia e independencia de funciones: Wronskiano.
- Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden a coeficientes constantes homogénea.

---

1. Sean y_1 y y_2 dos soluciones de
$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$$
   (a) Si $W[y_1, y_2]$ es el wronskiano de y_1 y y_2, demuestre que
$$a_2(x)\frac{dW}{dx} + a_1(x)\,W = 0$$
   (b) Deducir la fórmula de Abel
$$W = C\exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx\right)$$
   donde C es una constante.

   (c) Utilizando una forma alternativa de la fórmula de Abel
$$W = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt\right)$$
   para x_0 en I, demostrar que
$$W[y_1, y_2] = W[y_1, y_2](x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt\right)$$
   (d) Demuestre que si $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, entonces $W[y_1, y_2] = 0$ para todo x en I, mientras que si $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, entonces $W[y_1, y_2] \neq 0$ para todo x en el intervalo.

2. Demuestre que si p es diferenciable y $p(x) > 0$, entonces el wronskiano $W(x)$ de dos soluciones de
$$[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0$$
   es $W(x) = c/p(x)$, en donde c es una constante.

3. Si el wronskiano W de f y g es $3e^{4x}$ y si $f(x) = e^{2x}$, halle $g(x)$

4. Si el wronskiano W de f y g es x^2e^x y si $f(x) = x$, halle $g(x)$

5. Si $W[f, g]$ es el wronskiano de f y g y si $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, halle el wronskiano $W[u, v]$ de u y v en términos de $W[f, g]$.

6. Si el wronskiano de f y g es $x\cos x - \operatorname{sen} x$ y si $u = f + 3g$, $v = f - g$, halle el wronskiano de u y v.

7. Demuestre que $W\left[e^{\lambda x}\cos \mu x, e^{\lambda x}\operatorname{sen} \mu x\right] = \mu e^{2\lambda x}$

8. Demuestre que $W\left[5, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x\right] = 0$ para toda x. >Es posible establecer este resultado sin necesidad de evaluar directamente el wronskiano?.

9. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $xy'' + 2y' + xe^x y = 0$ y si $W[y_1, y_2](1) = 2$, halle el valor de $W[y_1, y_2](5)$

10. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - 2y' + (3 + x)\,y = 0$ y si $W[y_1, y_2](2) = 3$, encuentre el valor de $W[y_1, y_2](4)$

11. Sea y_1 uns solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden a coeficientes constantes homogénea dada por

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{1}$$

   (a) Demostrar que la sustitución $y_2 = v y_1$, transforma la ecuación (1) en una ecuación lineal de primer orden de variable dependiente v'
   (b) Hallar la función y_2 de la parte 11a
   (c) Demostrar que las funciones y_1 de la parte 11a y y_2 de la parte 11b son linealmente independiente

12. (a) Hallar y_2, si $y_1 = e^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$ es uns solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden a coeficientes constantes homogénea dada por

$$4a_2^2 y''(x) + 4a_2 a_1 y'(x) + a_1^2 y(x) = 0$$

   (b) Verificar que son funciones linealmente independientes.

13. Demostrar que las funciones $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ son linealmente independiente para todo $x \in \mathbb{R}$, donde α y β con constantes reales.

14. Encuentre una solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

   1. $y'' - 4y = 0$ 2. $y'' + 3y' - 10y = 0$ 3. $2y'' - 7y' + 3y = 0$ 4. $y'' - 6y' + 13y = 0$
   5. $2y'' - 3y' = 0$ 6. $y'' + 6y' + 9y = 0$ 7. $y'' + 8y' + 25y = 0$ 8. $4y'' - 12y' + 9y = 0$
   9. $y'' - 5y' = 0$ 10. $y'' + 5y' + 5y = 0$ 11. $y'' + 8y' + 16y = 0$ 12. $2y'' + 9y' - 5y = 0$
   13. $6y'' + 13y' - 5y = 0$ 14. $4y'' - 12y' + 9y = 0$ 15. $9y^{(3)} + 12y'' + 4y' = 0$
   16. $y^{(3)} - 8y = 0$ 17. $y^{(3)} + 5y' = 0$ 18. $6y^{(3)} + 7y'' - 16y' - 12y = 0$
   19. $2y^{(3)} + y'' - 7y' - 6y = 0$ 20. $5y^{(4)} + 3y^{(3)} = 0$ 21. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$
   22. $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$ 23. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$ 24. $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 16y'' = 0$
   25. $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$ 26. $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$
   27. $4y^{(4)} + 7y^{(3)} - 6y'' - 7y' + 2y = 0$

15. Resuelva cada uno de los siguientes problemas con condiciones iniciales

   1. $y'' - 4y' + 3y = 0;\quad y(0) = 7;\quad y'(0) = 11$ 2. $9y'' + 6y' + 4y = 0;\quad y(0) = 3;\quad y'(0) = 4$
   3. $y'' - 6y' + 25y = 0;\quad y(0) = 3;\quad y'(0) = 1$ 4. $y'' + 9y = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 0$
   5. $2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = -1;\quad y''(0) = 3$
   6. $y^{(3)} + 10y'' + 25y' = 0;\quad y(0) = 3;\quad y'(0) = 4;\quad y''(0) = 5$
   7. $3y^{(3)} + 2y'' = 0;\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = 0;\quad y''(0) = 1$
   8. $6y'' - 5y' + y = 0;\quad y(0) = 4;\quad y'(0) = 0$ 9. $9y'' - 12y' + 4y = 0;\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = -1$
   10. $y'' + 3y' = 0;\quad y(0) = -2;\quad y'(0) = 3$ 11. $9y'' + 6y' + 82y = 0;\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = 2$
   12. $y'' + 4y' + 5y = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 0$ 13. $y'' + y' + 1.25y = 0;\quad y(0) = 3;\quad y'(0) = 1$
   14. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 4y' = 0;\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = 2;\quad y''(0) = 0;\quad y^{(3)}(0) = 0$
   15. $y^{(3)} + y' = 0;\quad y(0) = 0;\quad y'(0) = 1;\quad y''(0) = 2$
   16. $y^{(4)} - y = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 0;\quad y''(0) = -1;\quad y^{(3)}(0) = 0$

16. Encuentre α de modo que la solución del problema a valor inicial

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = 2$$

tienda a cero cuando $x \to \infty$

17. Halle β de modo que la solución del problema a valor inicial

$$4y'' - y = 0 \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = \beta$$

tienda a cero cuando $x \to \infty$

18. Si a, b y c son constantes positivas, demuestre que todas las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ tienden a cero cuando $x \to \infty$

Respuestas

3. $g(x) = Ce^{2x} + \frac{3}{2}e^{2x}$; 4. $g(x) = Cx + xe^{x}$; 5. $W[u,v] = W[f,g]$; 6. $W[u,v] = 3\operatorname{sen} x - 3x\cos x$;

9. $W[y_1,y_2](5) = \frac{2}{25}$; 10. $W[y_1,y_2](4) = 3e^{1/2}$; 11.a. $a_2 y_1 v'' + \left(2a_2 y_1' + a_1 y_1\right) v' = 0$;

11.b. $y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int \frac{a_1}{a_2}\, dx\right)}{y_1^2} dx$; 12.$a$. $y_2(x) = xe^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$; 14.1. $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$; 14.2. $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}$;

14.3. $C_1 e^{3x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$; 14.4. $e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x\right)$; 14.5. $C_1 + C_2 e^{\frac{3}{2}x}$; 14.6. $C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$;

14.7. $e^{-4x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x\right)$; 14.8. $e^{\frac{3}{2}x}\left(C_1 + C_2 x\right)$; 14.9. $C_1 + C_2 e^{5x}$;

14.10. $C_1 e^{x\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2}\right)} + C_2 e^{x\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2}\right)}$; 14.11. $C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$; 14.12. $C_1 e^{-5x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$;

14.13. $C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}$; 14.14. $C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{\frac{3}{2}x}$; 14.15. $C_1 + C_2 e^{-\frac{2}{3}x} + C_3 x e^{-\frac{2}{3}x}$;

14.16. $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_3 e^{-x}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}x\right)$; 14.17. $C_1 \cos\left(\sqrt{5}x\right) + C_2 + C_3 \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}x\right)$;

14.18. $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x} + C_3 e^{\frac{3}{2}x}$; 14.19. $C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-\frac{3}{2}x}$; 14.20. $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-\frac{3}{5}x}$;

14.21. $C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$; 14.22. $C_1 e^{x} + C_2 \cos 2x + C_3 e^{-x} + C_4 \operatorname{sen} 2x$;

14.23. $e^{2x}\left(C_1 + C_2 x\right) + e^{-2x}\left(C_3 + C_4 x\right)$; 14.24. $C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} + C_4 x e^{4x}$;

14.25. $C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$; 14.26. $C_1 + e^{x}\left(C_2 + C_3 x + C_4 x^2\right)$;

14.27. $C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{\frac{1}{4}x}$; 15.1. $y = 5e^{x} + 2e^{3x}$; 15.2. $y = e^{-\frac{1}{3}x}\left(3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + 5\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\right)$;

15.3. $y = e^{3x}\left(3\cos 4x - 2\operatorname{sen} 4x\right)$; 15.4. $y = \cos 3x$; 15.5. $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} + 4e^{-\frac{1}{2}x}$;

15.6. $y = -\frac{9}{5}e^{-5x} + \frac{24}{5} - 5xe^{-5x}$; 15.7. $y = -\frac{13}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}e^{-\frac{2}{3}x}$; 15.8. $y = -8e^{\frac{1}{2}x} + 12e^{\frac{1}{3}x}$;

15.9. $y = 2e^{\frac{2}{3}x} - \frac{7}{3}xe^{\frac{2}{3}x}$; 15.10. $y = -e^{-3x} - 1$; 15.11. $y = e^{-\frac{1}{3}x}\left(\frac{5}{9}\operatorname{sen} 3x - \cos 3x\right)$; 15.12. $y = e^{-2x}\left(\cos x + 2\operatorname{sen} x\right)$;

15.13. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(3\cos x + \frac{5}{2}\operatorname{sen} x\right)$; 15.14. $y = -1 + 2x$; 15.15. $y = 2 - 2\cos x + \operatorname{sen} x$; 15.16. $y = \cos x$;

Bibliografía

1. **Edwards, C. H. y Penney, D.**: "Ecuaciones Diferenciales Elementales y problemas con condiciones en la frontera". Tercera Edición. Prentice Hall.

2. **Kiseliov, A. - Krasnov, M. y Makarenko, G.**, "*Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*". Editorial Mir.

3. **Spiegel, Murray R.**, "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Tercera edición. Prentice Hall.

4. **Viola-Prioli, Ana y Viola-Prioli, Jorge**, "*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*". Universidad Simón Bolívar.

5. **Zill, Dennis**, "*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*". Grupo Editorial Iberoamérica.

e-mail : farith_72@hotmail.com