1. Sean a, b y c tres números reales no nulos. Sea A la matriz de tamaño 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar la imagen y el rango de A.

   b) Determinar el núcleo y la nulidad de A.

2. Sea A la matriz 3×3 dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Determine los valores propios de A y halle los vectores propios asociados a cada valor propio de A.

   b) Sean los tres vectores de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Mostrar que $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ son vectores propios de A.

   c) Mostrar que los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Determinar una matriz diagonal D, definida por $D = P^{-1}AP$.

4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ equipado con el producto interior euclidiano. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base $\vec{v}_1 = (0, 0, 2), \vec{v}_2 = (0, 3, 4), \vec{v}_3 = (5, 6, 7)$ en una base ortonormal.

5. Sea n un número natural no nulo. Sea H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ una base ortonormal de H. Sea $H^\perp$ el *el complemento ortogonal de* H definido por:

$$H^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \vec{v} \text{ es ortonormal a todo vector de } H\}.$$

   a) Probar que $H^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

   b) Probar que para todo vector $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$, el vector $\vec{w} - Proy_H\vec{w}$ pertenece a $H^\perp$.

   c) Probar que para todo vector $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$, existen dos vectores $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ de $\mathbb{R}^n$, tales que:

   - $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$,
   - $\vec{w}_1$ es elemento de H y
   - $\vec{w}_2$ es elemento de $H^\perp$.