Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio, 2008
Duración: 1 hora, 50 minutos.

Carnet: ______________________

Nombre: ______________________

Sección: ______________________

MA-1112 —Primer Parcial, Martes 20-05-2008. (30 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo 81A

1. (12 ptos.) Calcule

a) (4 ptos.)

$$\int_{-1}^{2} \left(\left|x^2-2x\right|+x^3\right) dx$$

Solución:
$x^2-2x = x(x-2)$, utilizando que

$$\left|x^2-2x\right| = \begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x\in[-1,0] \\ 2x-x^2 & \text{si} \quad x\in(0,2] \end{cases}$$

podemos reescribir la integral como

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-1}^{2}\left(\left|x^2-2x\right|+x^3\right)dx &= \textstyle\int_{-1}^{0}\left(x^2-2x+x^3\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2+2x\right)dx \\ &= \left[\tfrac{x^3}{3}-x^2+\tfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}+\left[\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2} \\ &= 0-\left(-\tfrac{1}{3}-1+\tfrac{1}{4}\right)+\left(-\tfrac{8}{3}+4+4\right) = -\tfrac{7}{3}+9-\tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{77}{12}. \end{aligned}$$

b) (4 ptos.)

$$\int \frac{1+x-x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x-x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx &= \int \frac{1-x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx+\int \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx \\ &= \int \frac{1-x^2}{\left(1-x^2\right)\cdot\left(1-x^2\right)^{1/2}}dx-\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx. \end{aligned}$$

Sea $u = 1 - x^2$, asi $du = -2xdx$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x-x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u)^{3/2}} \\
&= \operatorname{arc\,sen}(x) - \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du = \operatorname{arc\,sen}(x) - \frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C \\
&= \operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{1}{\sqrt{u}} + C = \operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

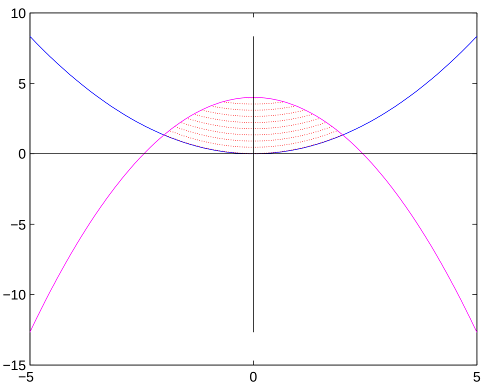
c) (4 ptos.)

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt[4]{\tan^3(x)}\sec^2(x)dx$$

Solución:
Se realiza el cambio de variable $u = \tan(x)$, luego $du = \sec^2(x)dx$. Además, $u = 0$ cuando $x = 0$ y $u = 1$ cuando $x = \pi/4$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt[4]{\tan^3(x)}\sec^2(x)dx &= \int_0^1 \sqrt[4]{u^3}du = \int_0^1 u^{3/4}du \\
&= \left[\frac{u^{7/4}}{7/4}\right]_0^1 = \frac{4}{7}\left[\sqrt[4]{u^7}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{7}\cdot(1-0) = \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

2. (6 ptos.) Determine el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.
Solución:



Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} \\ y = 4 - \dfrac{2}{3}x^2 \end{cases}$, obtenemos $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$. Entonces, el área de la región que se muestra en la figura anterior es

$$A = \int_{-2}^{2} \left[\left(4 - \frac{2}{3}x^2 \right) - \frac{x^2}{3} \right] dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2 \right) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

3. (6 ptos.) Calcule

$$\int_1^2 \left(x^2 - 1 \right) dx$$

usando la definición, empleando particiones regulares y tomando $\overline{x_i} = x_i$.
Solución:
Se divide el intervalo $[1, 2]$ en n subintervalos (regulares), $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{1}{n}$ donde $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$ con $i = 0, 1, \ldots, n$ y $f(\overline{x_i}) = x_i^2 - 1$ (tomando $\overline{x_i} = x_i$). Asi, $f(\overline{x_i}) = (1 + \dfrac{i}{n})^2 - 1 = \dfrac{2i}{n} + \dfrac{i^2}{n^2}$ y

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2} \right) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$R_p = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right].$$

Luego,

$$\int_1^2 f(x) dx = \lim_{n \to \infty} Rp = 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

4. (6 ptos.) Encuentre los valores máximos y mínimos de la función:

$$G(x) = \int_0^x \left(t^2 - 3t + 2 \right) dt$$

Solución:
Aplicando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo $G'(x) = x^2 - 3x + 2$, $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.
$G''(x) = 2x - 3$, entonces $\begin{cases} G''(1) = -1 < 0, & G \text{ alcanza un valor maximo en } x = 1 \\ & \text{y} \\ G''(2) = 4 - 3 = 1 > 0, & G \text{ alcanza un valor minimo en } x = 2. \end{cases}$
Luego,

$G(1) = \int_0^1 (t^2 - 3t + 2)\, dt = \left(\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{3t^2}{2} + 2t \right) |_0^1 \, dt = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{5}{6}$ es el valor maximo de G

y

$G(2) = \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)\, dt = \left(\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{3t^2}{2} + 2t \right) |_0^2 \, dt = \dfrac{8}{3} - 6 + 4 = \dfrac{2}{3}$ es el valor minimo de G.