Cálculo integral

Parcial 1 - Guías 1 – 6

Farith Briceño - 2013

Antiderivada

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.1

- Definición de antiderivadas.
- Integral indefinida. Propiedades de la integral indefinida.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Demuestre que si* $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, *entonces* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *con* $-1 < x < 1$.

Demostración : Es conocido que la función inversa de $g(x) = \operatorname{sen} x$, es $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, definida en $-1 \leq x \leq 1$, es decir, $g^{-1}(x) = f(x)$, además si una función g tiene inversa y es diferenciable, entonces g^{-1} es diferenciable y su derivada viene dada por

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}.$$

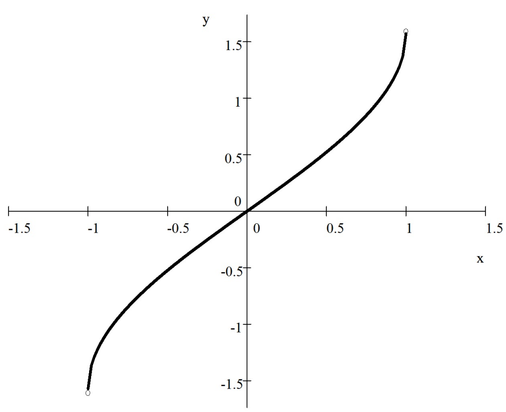
Como $g'(x) = \cos x$, se tiene que

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)},$$

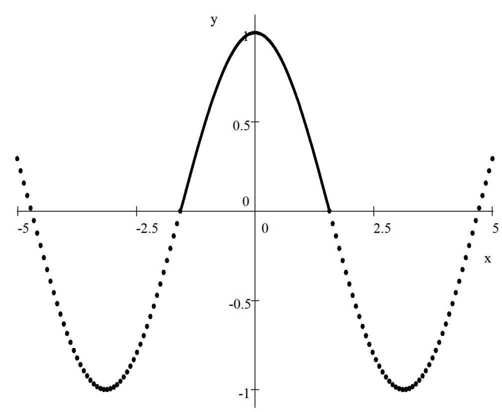
puesto que,

$$\operatorname{sen}^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1, \qquad \text{entonces,} \qquad \cos(\cdot) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\cdot)},$$

por lo tanto, al componer la expresión del $\cos(\cdot)$ con la función $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, como $\operatorname{Rgo} f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y el coseno es positivo en ese intervalo,



$f(x) = \operatorname{arcsen} x$



$f(x) = \cos x$

por lo tanto, se toma la expresión positiva del coseno y se tiene,

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} = \sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2} = \sqrt{1-x^2},$$

luego,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

definida para $-1 < x < 1$. ★

Ejemplo 2 *: Hallar una función* f, *tal que se cumpla la siguiente igualdad*

$$\int f(x)\; dx = \operatorname{arcsen} x + C.$$

Solución : Por la definición de primitiva se tiene que cumplir

$$(\operatorname{arcsen} x + C)' = f(x)$$

así,

$$\underbrace{\left(\operatorname{arcsen} x + C\right)'}_{\text{Derivada de una suma de funciones}} = \underbrace{\left(\operatorname{arcsen} x\right)'}_{\text{Derivada: Ver ejemplo 1}} + \underbrace{\left(C\right)'}_{\text{Derivada de una constante}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Luego,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

★

Ejemplo 3 *: Hallar una función f, tal que se cumpla la siguiente igualdad*

$$\int f(x)\ dx = \arctan\left(\sqrt{x}\right) + C.$$

Solución : Por la definición de primitiva se tiene que cumplir

$$\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C\right)' = f(x)$$

así,

$$\underbrace{\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C\right)'}_{\text{Derivada de una suma de funciones}} = \underbrace{\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)'}_{\text{Derivada: Regla de la cadena}} + \underbrace{\left(C\right)'}_{\text{Derivada de una constante}} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)' + 0 = \frac{1}{1+x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Luego,

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

★

Ejemplo 4 *: Integre* $\displaystyle\int -2^{-5}\ dx.$

Solución : Se tiene

$$\int \underbrace{-2^{-5}}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}\ dx = -2^{-5}\overbrace{\int 1\ dx}^{\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=0}} = -2^{-5}\ \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = -2^{-5}x + C.$$

Luego,

$$\int -2^{-5}\ dx = -2^{-5}x + C.$$

★

Ejemplo 5 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{x}\ dx.$

Solución : Es conocido que

$$\sqrt{x} = x^{1/2},$$

entonces

$$\int \sqrt{x}\,dx = \underbrace{\int x^{1/2}\,dx}_{\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + C.$$

★

Ejemplo 6 : *Integre* $\int 2\csc^2 x\,dx$.

Solución : Se tiene

$$\int \underbrace{2}_{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}} \csc^2 x\,dx = 2\overbrace{\int \csc^2 x\,dx}^{\boxed{(\cot x)' = -\csc^2 x}} = -2\cot x + C.$$

Luego,

$$\int 2\csc^2 x\,dx = -2\cot x + C.$$

★

Ejemplo 7 : *Integre* $\int (\pi x + \sec x \tan x)\,dx$.

Solución : Se tiene

$$\int (\pi x + \sec x \tan x)\,dx \overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}}{=} \int \underbrace{\pi}_{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}} x\,dx + \int \sec x \tan x\,dx = \pi \int x\,dx + \int \sec x \tan x\,dx,$$

donde

$$\underbrace{\int x\,dx}_{\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 1}} = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\int \sec x \tan x\,dx}_{\boxed{(\sec x)' = \sec x \tan x}} = \sec x + C_2,$$

entonces

$$\int (\pi x + \sec x \tan x)\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + \sec x + C_2 = \frac{\pi x^2}{2} + C_1\pi + \sec x + C_2 = \frac{\pi x^2}{2} + \sec x + \underbrace{(C_1\pi + C_2)}_{\boxed{\text{Constante } C}}$$

Luego,

$$\int (\pi x + \sec x \tan x)\, dx = \frac{\pi x^2}{2} + \sec x + C.$$

★

Ejemplo 8 *: Integre* $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$

Solución : Se tiene

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\end{array}}$$

$$\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \overset{\downarrow}{=} \int x^2\ dx + \int 1\ dx + \int \frac{1}{x^2}\ dx = \int x^2\ dx + \int 1\ dx + \int x^{-2}\ dx,$$

donde

$$\underbrace{\int x^2\ dx}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=2}}} = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1, \qquad \text{mientras que} \qquad \underbrace{\int 1\ dx}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=0}}} = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C_2 = x + C_2,$$

y por último

$$\underbrace{\int x^{-2}\ dx}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=-2}}} = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_3 = \frac{x^{-1}}{-1} + C_3 = -\frac{1}{x} + C_3.$$

entonces

$$\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + C_1 + x + C_2 + \left(-\frac{1}{x} + C_3\right) = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x} + \underbrace{(C_1 + C_2 + C_3)}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Constante } C}}}$$

Luego,

$$\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x} + C.$$

★

Ejemplo 9 *: Integre* $\displaystyle\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx.$

Solución : Se tiene

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}$$

$$\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx \underset{\uparrow}{=} \int \sqrt[5]{x^2}\ dx - \int \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\ dx \overset{\downarrow}{=} \int \sqrt[5]{x^2}\ dx - 2\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\ dx,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \displaystyle\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\end{array}}$$

donde

$$\int \sqrt[5]{x^2}\ dx = \underbrace{\int x^{2/5}\ dx}_{\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{2}{5}}} = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C_1 = \frac{x^{7/5}}{\frac{7}{5}} + C_1 = \frac{5x^{7/5}}{7} + C_1,$$

mientras que

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\ dx = \int \frac{1}{x^{3/5}}\ dx = \underbrace{\int x^{-3/5}\ dx}_{\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = -\frac{3}{5}}} = \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + C_2 = \frac{x^{2/5}}{\frac{2}{5}} + C_2 = \frac{5x^{2/5}}{2} + C_2,$$

entonces

$$\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx = \frac{5x^{7/5}}{7} + C_1 - 2\left(\frac{5x^{2/5}}{2} + C_2\right) = \frac{5x^{7/5}}{7} + C_1 - 2\ \frac{5x^{2/5}}{2} - 2C_2$$

$$= \frac{5x^{7/5}}{7} - 5x^{2/5} + \underbrace{(C_1 - 2C_2)}_{\boxed{\text{Constante } C}}$$

Luego,

$$\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx = \frac{5x^{7/5}}{7} - 5x^{2/5} + C.$$

★

Ejemplo 10 *: Integre* $\int \left(\sqrt{x} - 5x\right) dx$.

Solución : Se tiene

$$\int \left(\sqrt{x} - 5x\right) dx \overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx}}}{=} \int \sqrt{x}\ dx - \int \underset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{5}x\ dx = \int \sqrt{x}\ dx - 5\int x\ dx,$$

donde

$$\int \sqrt{x}\ dx = \underbrace{\int x^{1/2}\ dx}_{\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_1 = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C_1 = \frac{2x^{3/2}}{3} + C_1,$$

mientras que

$$\underbrace{\int x\ dx}_{\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 1}} = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = \frac{x^2}{2} + C_2,$$

entonces

$$\int \left(\sqrt{x}-5x\right) dx = \frac{2x^{3/2}}{3}+C_1-5\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right)=\frac{2x^{3/2}}{3}+C_1-\frac{5x^2}{2}-5C_2=\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{5x^2}{2}+\underbrace{(C_1-5C_2)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Constante } C}}$$

Luego,

$$\int \left(\sqrt{x}-5x\right) dx = \frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{5x^2}{2}+C.$$

★

Ejemplo 11 *: Integre* $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen} x+\frac{5}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$

Solución : Se tiene

$$\int \left(\operatorname{sen} x+\frac{5}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx}}\;\downarrow}{=} \int \operatorname{sen} x\ dx+\int \frac{5}{1+x^2}\ dx-\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

$$\overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{=} \int \operatorname{sen} x\ dx+5\int \frac{1}{1+x^2}\ dx-3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx,$$

donde

$$\underbrace{\int \operatorname{sen} x\ dx}_{\uparrow \atop \boxed{(\cos x)'=-\operatorname{sen} x}}=-\cos x+C_1,\qquad \underbrace{\int \frac{dx}{1+x^2}}_{\uparrow \atop \boxed{(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}}}=\arctan x+C_2\qquad \text{y}\qquad \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\uparrow \atop \boxed{(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}=\operatorname{arcsen} x+C_3$$

entonces

$$\begin{aligned}\int \left(\operatorname{sen} x+\frac{5}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx &= -\cos x+C_1+5\left(\arctan x+C_2\right)-3\left(\operatorname{arcsen} x+C_3\right)\\ &= -\cos x+C_1+5\arctan x+5C_2-3\operatorname{arcsen} x-3C_3\\ &= -\cos x+5\arctan x-3\operatorname{arcsen} x+\underbrace{(C_1+5C_2-3C_3)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Constante } C}}\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \left(\operatorname{sen} x+\frac{5}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = -\cos x+5\arctan x-3\operatorname{arcsen} x+C.$$

★

Ejemplo 12 *: Encuentre, en el plano* xy, *la curva* $y=f(x)$ *que pasa por el punto* $(9,4)$ *y cuya pendiente en cada punto es* $3\sqrt{x}$.

Solución : Es conocido que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera x es $m_{\tan}=f'(x)$, por lo tanto,

$$f'(x)=3\sqrt{x}$$

para obtener f integramos respecto a x,

$$\int f'(x)\ dx = \int 3\sqrt{x}\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = 2x^{3/2} + C,$$

puesto que la función f pasa por el punto $(9,4)$ se tiene que

$$4 = f(9) = 2(9)^{3/2} + C \quad \Longrightarrow \quad 4 = 2\left(3^2\right)^{3/2} + C \quad \Longrightarrow \quad 2 = 27 + C \quad \Longrightarrow \quad -25 = C,$$

luego,

$$f(x) = 2x^{3/2} - 25.$$

★

Ejemplo 13 *: En cualquier punto* (x,y) *de una curva se tiene* $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4 - x^2$ *y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto* $(1,-1)$ *es* $2x - 3y = 3$. *Encontrar una ecuación de la curva.*

Solución : Tenemos que

$$\int \frac{d^2y}{dx^2}\ dx = \int \left(4 - x^2\right)\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 4x - \frac{x^3}{3} + C_1,$$

del hecho que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1,-1)$ es $2x - 3y = 3$, se tiene que $f'(1) = \dfrac{2}{3}$, por lo tanto,

$$\frac{2}{3} = f'(1) = 4(1) - \frac{(1)^3}{3} + C_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3} = 4 - \frac{1}{3} + C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = -3$$

entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 4x - \frac{x^3}{3} - 3,$$

integramos nuevamente

$$\int \frac{dy}{dx}\ dx = \int \left(4x - \frac{x^3}{3} - 3\right)\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad y = 2x^2 - \frac{x^4}{12} - 3x + C_2,$$

la curva pasa por el punto $(1,-1)$ así,

$$-1 = 2(1) - \frac{(1)^4}{12} - 3(1) + C_2 \quad \Longrightarrow \quad -1 = 2 - \frac{1}{12} - 3 + C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = \frac{1}{12},$$

luego

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{12} - 3x + \frac{1}{12}.$$

★

Ejemplo 14 *: Se lanza una piedra hacia arriba verticalmente desde el suelo con una velocidad inicial de* 128 *p/seg. Si la única fuerza considerada es la que se le atribuye a la aceleración de la gravedad, encontrar que tan alto llegará la piedra y la velocidad con la que llegará al suelo. Encontrar también cuanto tiempo tomará a la piedra llegar al suelo.*

Solución : La dirección positiva se toma hacia arriba. Sea

- t : el tiempo, en segundos, que ha transcurrido desde que se lanzó la piedra.
- s : la distancia, en pies, de la piedra al suelo a los t seg de tiempo.
- v : la velocidad, en pies por segundos, de la piedra a los t seg de tiempo.

- $|v|$: el número de pies por segundo en la rapidez, en pies por segundos, de la piedra a los t seg de tiempo.

La piedra estará en su punto más alto cuando la velocidad sea cero. Sea $\overline{s}$ el valor particular de s cuando $v=0$. Cuando la piedra toca el suelo, $s=0$. Sean $\overline{t}$ y $\overline{v}$ los valores particulares de t, v cuando $s=0$ y $t\neq 0$.

La dirección positiva de la piedra desde el punto de partida se toma hacia arriba. Como la única aceleración se debe a la gravedad que actúa en dirección hacia abajo, la aceleración tiene un valor constante de -32 p/seg^2.

Es conocido que la aceleración a es la primera derivada de v con respecto a t y la segunda derivada de s con respecto a t, es decir

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=-32$$

integramos respecto a t

$$\int \frac{dv}{dt}\;dt=\int \frac{d^2s}{dt^2}\;dt=\int -32\;dt \qquad \Longrightarrow \qquad v\left(t\right)=\frac{ds}{dt}=-32t+C_1$$

como $v=128$ cuando $t=0$, tenemos

$$128=v\left(0\right)=-32\left(0\right)+C_1 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1=128,$$

por lo tanto,

$$\frac{ds}{dt}=-32t+128$$

integramos, nuevamente, respecto a t

$$\int \frac{ds}{dt}\;dt=\int \left(-32t+128\right)\;dt \qquad \Longrightarrow \qquad s\left(t\right)=-16t^2+128t+C_2,$$

como $s=0$ cuando $t=0$, tenemos

$$0=s\left(0\right)=-16\left(0\right)^2+128\left(0\right)+C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2=0$$

y nos queda

$$s\left(t\right)=-16t^2+128t.$$

La piedra estará en su punto más alto cuando la velocidad sea cero, así,

$$0=v\left(t\right)=-32t+128 \qquad \Longrightarrow \qquad t=\frac{128}{32}=4,$$

es decir, la piedra tarda 4 seg para llegar a su punto más alto y la distancia es

$$s\left(4\right)=-16\left(4\right)^2+128\left(4\right) \qquad \Longrightarrow \qquad s\left(4\right)=256,$$

por lo tanto, la mayor altura que la piedra alcanzará es de 256 pies. Para conocer con que velocidad llegará la piedra al suelo igualamos la función distancia a cero, de allí, obtenemos

$$0=s\left(t\right)=-16t^2+128t \qquad \Longrightarrow \qquad 0=-16t\left(t-8\right) \qquad \Longrightarrow \qquad t=0 \quad \text{y} \quad t=8,$$

pero el valor $t=0$ corresponde al momento en que es lanzada la piedra, por lo tanto, la piedra llega al piso en 8 seg, luego la velocidad con la que llega es

$$v\left(8\right)=-32\left(8\right)+128=-128 \qquad \Longrightarrow \qquad |v|=128,$$

es decir, la piedra llega al suelo con una rapidez de 128 p/seg. ★

Ejercicios

1. Demuestre que si $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, con $-1 < x < 1$.

2. Demuestre que si $f(x) = \arctan x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Demuestre que si $f(x) = \arccos x$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, con $-1 < x < 1$.

4. Demuestre que si $f(x) = \sec^{-1} x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, con $|x| > 1$.

5. Suponga que

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1-\sqrt{x}\right) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$$

Encuentre

1. $\int f(x)\,dx$ 2. $\int g(x)\,dx$ 3. $\int (-f(x))\,dx$ 4. $\int (-g(x))\,dx$

5. $\int \frac{f(x)}{4}\,dx$ 6. $\int 2g(x)\,dx$ 7. $\int (f(x)+g(x))\,dx$ 8. $\int (f(x)-g(x))\,dx$

6. Suponga que

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(5-\sqrt{x-3}\right) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x - \pi)$$

Encuentre

1. $\int g(x)\,dx$ 2. $\int \frac{f(x)}{4}\,dx$ 3. $\int (f(x)-g(x))\,dx$ 4. $\int (-5g(x))\,dx$

5. $\int -7f(x)\,dx$ 6. $\int \frac{g(x)}{e^4}\,dx$ 7. $\int (f(x)+g(x))\,dx$ 8. $\int (f(x)-2g(x))\,dx$

7. Hallar una función f, tal que se cumpla la siguiente igualdad

1. $\int f(x)\,dx = x + C$ 2. $\int f(x)\,dx = mx + C$ 3. $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

4. $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ 5. $\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ 6. $\int f(x)\,dx = 2\sqrt{x} + C$

7. $\int f(x)\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$ 8. $\int f(x)\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$ 9. $\int f(x)\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$

10. $\int f(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{x}} + C$ 11. $\int f(x)\,dx = \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + C$ 12. $\int f(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

13. $\int f(x)\,dx = \operatorname{sen} x + C$ 14. $\int f(x)\,dx = -\cos x + C$ 15. $\int f(x)\,dx = \tan x + C$

16. $\int f(x)\,dx = \sec x + C$ 17. $\int f(x)\,dx = -\csc x + C$ 18. $\int f(x)\,dx = -\cot x + C$

19. $\int f(x)\,dx = \operatorname{sen}(2x) + C$ 20. $\int f(x)\,dx = -\cos(4x) + C$ 21. $\int f(x)\,dx = \tan(\pi x) + C$

22. $\int f(x)\,dx = \operatorname{sen}(3x) + C$ 23. $\int f(x)\,dx = \sec(5x) + C$ 24. $\int f(x)\,dx = -\csc(2x) + C$

25. $\int f(x)\,dx = -\cot(3x) + C$ 26. $\int f(x)\,dx = \sqrt{3x} + C$ 27. $\int f(x)\,dx = \sec(ax) + C$

28. $\int f(x)\,dx = \arctan x + C$ 29. $\int f(x)\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$ 30. $\int f(t)\,dt = \dfrac{\sec^2 t}{2} + C$

31. $\int f(t)\,dt = \arctan\left(t^2\right) + C$ 32. $\int f(x)\,dx = \dfrac{\sec^3 x}{3} + C$ 33. $\int f(t)\,dt = \dfrac{\tan^2 t}{2} + C$

34. $\int f(t)\,dt = \dfrac{\sec^2\left(3t^3\right)}{2} + C$ 35. $\int f(t)\,dt = \dfrac{\tan^2(5t)}{4} + C$ 36. $\int f(x)\,dx = \dfrac{\sec^{-3} x}{3} + C$

37. $\int f(x)\,dx = \dfrac{\csc^3 x}{3} + C$ 38. $\int f(t)\,dt = \dfrac{\cot^2 t}{2} + C$ 39. $\int f(x)\,dx = \arctan\left(\sqrt{x}\right) + C$

40. $\int f(x)\,dx = \operatorname{arcsen}(2x) + C$ 41. $\int f(x)\,dx = \arctan\left(\sqrt[3]{x}\right) + C$

42. $\int f(x)\,dx = \operatorname{arcsen}\left(x^2\right) + C$ 43. $\int f(t)\,dt = \arctan\left(t^{-2}\right) + C$

44. $\int f(x)\,dx = \dfrac{\sec^{-1}(3x)}{\pi} + C$ 45. $\int f(x)\,dx = \dfrac{\sec^{-1}\sqrt{x}}{x+1} + C$

8. Hallar las primitivas de las siguientes funciones

1. $\int dx$ 2. $\int m\ dx$ 3. $\int x\ dx$ 4. $\int x^2\ dx$ 5. $\int x^3\ dx$ 6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

7. $\int \sqrt{x}\ dx$ 8. $\int \sqrt[3]{x}\ dx$ 9. $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$ 10. $\int \sqrt[3]{x^5}\ dx$ 11. $\int \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\ dx$

12. $\int x^n\ dx$ 13. $\int \cos x\ dx$ 14. $\int \operatorname{sen} x\ dx$ 15. $\int \sec^2 x\ dx$ 16. $\int \csc^2 x\ dx$

17. $\int \sec x\ \tan x\ dx$ 18. $\int \csc x\ \cot x\ dx$ 19. $\int \dfrac{dx}{1+x^2}$ 20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

9. Con los resultados obtenidos en el ejercicio 8 completar la siguiente tabla

Tabla de integrales básicas	
$\int k\ dx =$, $k =$ constante	$\int x^n\ dx =$, para $n \neq -1$
$\int \operatorname{sen} x\ dx =$	$\int \cos x\ dx =$
$\int \sec^2 x\ dx =$	$\int \csc^2 x\ dx =$
$\int \sec x\ \tan x\ dx =$	$\int \csc x\ \cot x\ dx =$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\ dx =$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx =$

10. Calcular las siguientes integrales usando la tabla de integrales de funciones básicas (ver ejercicio 8) y las propiedades de linealidad de la integral indefinida

1. $\int 6\,dx$ 2. $\int -7\,dx$ 3. $\int \pi^3\,dx$ 4. $\int \frac{\pi}{3}\,dx$ 5. $\int -2^{-5}\,dx$

6. $\int 3^{-2}\,dx$ 7. $\int x^{-2}\,dx$ 8. $\int x^{3/7}\,dx$ 9. $\int \sqrt{x}\,dx$ 10. $\int \sqrt[3]{\omega}\,d\omega$

11. $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$ 12. $\int \frac{dw}{w^2}$ 13. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$ 14. $\int \frac{7}{x^n}\,dx$ 15. $\int \frac{z}{x^n}\,dz$

16. $\int 5a^2x^6\,dx$ 17. $\int 5a^2x^6\,da$ 18. $\int \frac{x}{p^2}\,dx$ 19. $\int \frac{b^2}{p^3}\,db$ 20. $\int \frac{3}{t^4}\,dt$

21. $\int \frac{2}{x^6}\,dx$ 22. $\int \frac{\sqrt{2}}{t^3}\,dt$ 23. $\int \frac{b^3}{p^3}\,dp$ 24. $\int \frac{a}{xp^2}\,dp$ 25. $\int \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

26. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{2}\,dx$ 27. $\int \frac{\sec^2 x}{\pi}\,dx$ 28. $\int 2\csc^2 x\,dx$ 29. $\int \frac{\sec x\ \tan x}{\csc(4\pi^2)}\,dx$

30. $\int (4x-7)\,dx$ 31. $\int (\operatorname{sen} 3 + x)\,dx$ 32. $\int (\sqrt{x}-5x)\,dx$ 33. $\int \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)dt$

34. $\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$ 35. $\int \left(\sqrt[3]{r}+\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)dr$ 36. $\int \left(\sqrt[4]{t^5}+\sqrt[5]{t^4}\right)dt$

37. $\int \left(\sqrt[4]{t}+\sqrt[5]{t^4}\right)dt$ 38. $\int \left(\sqrt[4]{t^7}+\sqrt[5]{t^6}\right)dt$ 39. $\int (3x-5)\,dx$ 40. $\int \left(2t+\frac{5}{t^4}\right)dt$

41. $\int (3x-\sqrt{x})\,dx$ 42. $\int (\cos x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$ 43. $\int \left(\frac{x^\pi}{\tan 3}+\frac{\pi^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

44. $\int \left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)dt$ 45. $\int \left(\frac{\pi}{x^r}-2^\pi\right)dx$ 46. $\int \left(x^2+\frac{\pi^3}{x^2}\right)dx$ 47. $\int \frac{x^{-3}\,dx}{\operatorname{arcsen} t}$

48. $\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 49. $\int (\pi x - \csc x\ \cot x)\,dx$ 50. $\int (4\cos x + 5\operatorname{sen} x)\,dx$

51. $\int (y^9-2y^5+3y)\,dy$ 52. $\int (2-2x-2x^2)\,dx$ 53. $\int (3t^2-2t+5)\,dt$

54. $\int (2x+\sec x\ \tan x)\,dx$ 55. $\int (3\operatorname{sen} t - 2\cos t)\,dt$ 56. $\int \left(x^{4/3}-2x^{1/3}\right)dx$

57. $\int (5t^2-4t+3)\,dt$ 58. $\int (1-2x-3x^2)\,dx$ 59. $\int (5y^4-5y^2+14)\,dy$

60. $\int (2x+\operatorname{sen} x)\,dx$ 61. $\int (3t^2-2\operatorname{sen} t)\,dt$ 62. $\int \left(\operatorname{sen} x+\frac{5}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

63. $\int (2-2x-2x^2)\,dx$ 64. $\int (3t^2-2t+5)\,dt$ 65. $\int \left(\pi^\pi-\frac{7}{2x^8}+3\cos x\right)dx$

66. $\int (5t^4-6t^2+14)\,dt$ 67. $\int \left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ 68. $\int (\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

69. $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{t^4} - 3\sec^2 t \right) dt$ 70. $\displaystyle\int \left(\frac{\arctan 3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\operatorname{arcsen}\left(2^{-1}\right)}{1+x^2} \right) dx$ 71. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \ \cos t \ dx$

72. $\displaystyle\int \left(\pi \operatorname{sen} x - \frac{\tan 2}{x^5 \csc 7} \right) dx$ 73. $\displaystyle\int \left(\frac{\csc t \ \cot t}{\operatorname{arcsen} x} - \frac{t^{\sqrt{\pi}}}{1+x^2} \right) dt$ 74. $\displaystyle\int \left(\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} - 2 \right) dy$

75. $\displaystyle\int \cos t \sec^2 x \ dx$ 76. $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{t^{-\sqrt{2}}}{\operatorname{sen}(5x)} \right) dt$

11. Encuentre, en el plano xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(9,4)$ y cuya pendiente en cada punto es $3\sqrt{x}$.

12. El punto $(3,2)$ está en una curva $y = f(x)$ y en cualquier punto (x,y) de la curva, la recta tangente tiene una pendiente igual a $2x-3$. Encontrar una ecuación de la curva.

13. Encuentre, en el plano xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(1,2)$ y cuya pendiente en cada punto es $4x^2$.

14. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x,y) de una curva $y = f(x)$ es $10-4x$ y el punto $(1,-1)$ está en la curva. Encontrar una ecuación de la curva.

15. Encuentre, en el plano xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(1,5)$ y cuya pendiente en cada punto es $\dfrac{-4}{x^2}$.

16. Los puntos $(-1,3)$ y $(0,2)$ están en una curva y en cualquier punto (x,y) de la curva, se tiene $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2-4x$. Encontrar una ecuación de la curva.

17. Una ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $(1,3)$ es $y = x+2$. Si en cualquier punto (x,y) de la curva se tiene que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, encontrar una ecuación de la curva.

18. En cualquier punto (x,y) de una curva se tiene que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1-x^2$ y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1,1)$ es $y = 2-x$. Encontrar una ecuación de la curva.

19. Encuentre una función $y = f(x)$, tal que, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{4x^{3/2}} - \dfrac{1}{x^2}$, f tenga un punto estacionario en $x=4$ y pase por el punto $(1,-1)$.

20. Encuentre una función $y = f(x)$, tal que, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2+3x}{4x^{3/2}}$, f tenga un mínimo relativo en $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

21. En cualquier punto (x,y) de una curva se tiene $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2$ y $(1,3)$ es un punto de inflexión en el que la pendiente de la tangente es -2. Encontrar una ecuación de la curva.

22. Una partícula se mueve en linea recta, s es la distancia dirigida de la partírcula desde el origen en t seg de tiempo, v es la velocidad en p/seg de la partícula en t seg y a es la aceleración en p/seg^2 de la partícula en t seg. Si $a = 2t-1$, $v = 3$ y $s = 4$ cuando $t = 1$, expresar v y s como funciones de t.

23. Se lanza una piedra hacia arriba verticalmente desde el suelo con una velocidad inicial de 128 p/seg. Si la única fuerza considerada es la que se le atribuye a la aceleración de la gravedad, encontrar qué tan alto llegará la piedra y la velocidad con la que llegará al suelo. Encontrar también cuanto tiempo tomará a la piedra llegar al suelo.

24. Si el conductor de un automóvil desea aumentar su rapidez de 20 mi/h a 50 mi/h mientras recorre una distancia de 528 pies. ¿Cuál es la aceleración constante que debe mantener?

25. En los siguientes ejercicios la única fuerza considerada es la debida a la aceleración de la gravedad que tomamos como 32 $\mathrm{p/seg}^2$ en la dirección hacia abajo.

    (a) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 20 p/seg.

        i. ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al suelo y con qué velocidad llegará?

        ii. ¿Durante cuánto tiempo estará subiendo la piedra y que tan alto llegará?

    (b) Un hombre en un globo suelta sus binoculares cuando se encuentra a 150 pies de altura y está subiendo a razón de 10 p/seg. ¿Cuánto tiempo tardarán los binoculares en llegar a suelo y cuál es su velocidad de impacto?

26. Si se aplican los frenos de un carro viajando a 50 mi/h y si los frenos pueden dar al carro una aceleración negativa constante de 20 $\mathrm{p/seg}^2$. ¿Cuánto tardará el coche en detenerse? ¿Qué distancia recorrerá antes de parar?

27. Si los frenos de un carro pueden darle una aceleración negativa constante de 20 $\mathrm{p/seg}^2$. ¿Cuál es la velocidad máxima a que puede ir si es necesario parar el carro dentro de 80 pies después de aplicados los frenos?

Respuestas: Ejercicios

5.1. $1-\sqrt{x}$; 5.2. $x+2$; 5.3. $\sqrt{x}-1$; 5.4. $-(x+2)$; 5.5. $\frac{1-\sqrt{x}}{4}$; 5.6. $2x+4$; 5.7. $x-\sqrt{x}+3$;

5.8. $-\sqrt{x}-x-1$; 6.1. $\operatorname{sen} x-\pi$; 6.2. $\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{x-3}$; 6.3. $5-\sqrt{x-3}-\operatorname{sen} x+\pi$; 6.4. $5\pi-5\operatorname{sen} x$;

6.5. $7\sqrt{x-3}-35$; 6.6. $\frac{\operatorname{sen} x-\pi}{e^4}$; 6.7. $5-\sqrt{x-3}+\operatorname{sen} x-\pi$; 6.8. $5-\sqrt{x-3}-2\operatorname{sen} x+2\pi$; 7.1. $f(x)=1$;

7.2. $f(x)=m$; 7.3. $f(x)=x$; 7.4. $f(x)=x^2$; 7.5. $f(x)=x^3$; 7.6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$; 7.7. $f(x)=\sqrt{x}$;

7.8. $f(x)=\sqrt[3]{x}$; 7.9. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 7.10. $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 7.11. $f(x)=\frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}}$; 7.12. $f(x)=x^n$;

7.13. $f(x)=\cos x$; 7.14. $f(x)=\operatorname{sen} x$; 7.15. $f(x)=\sec^2 x$; 7.16. $f(x)=\sec x\tan x$; 7.17. $f(x)=\csc x\cot x$;

7.18. $f(x)=\csc^2 x$; 7.19. $f(x)=2\cos(2x)$; 7.20. $f(x)=4\operatorname{sen}(4x)$; 7.21. $f(x)=\pi\sec^2(\pi x)$; 7.22. $f(x)=3\cos(3x)$;

7.23. $f(x)=5\sec(5x)\tan(5x)$; 7.24. $f(x)=2\csc(2x)\cot(2x)$; 7.25. $f(x)=3\csc^2(3x)$; 7.26. $f(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$;

7.27. $f(x)=a\sec(ax)\tan(ax)$; 7.28. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 7.29. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 7.30. $f(t)=\sec^2 t\tan t$;

7.31. $f(t)=\frac{2t}{t^4+1}$; 7.32. $f(x)=\sec^3 x\tan x$; 7.33. $f(t)=\sec^2 t\tan t$; 7.34. $f(t)=9t^2\sec^2\left(3t^3\right)\tan\left(3t^3\right)$;

7.35. $f(t)=\frac{t}{2}\tan(5t)\sec^2(5t)$; 7.36. $f(x)=-\frac{\tan x}{\sec x}$; 7.37. $f(x)=-\csc^3 x\cot x$; 7.38. $f(t)=-\csc^2 t\cot t$;

7.39. $f(x)=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$; 7.40. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; 7.41. $f(x)=\frac{1}{3x^{2/3}\left(x^{2/3}+1\right)}$; 7.42. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

7.43. $f(t)=\frac{-2t}{t^4+1}$; 7.44. $f(x)=\frac{1}{\pi|x|\sqrt{9x^2+1}}$; 7.45. $f(t)=\frac{1}{2x\sqrt{(x+1)^3}}-\frac{\sec^{-1}\sqrt{x}}{(x+1)^2}$; 8.1. $x+C$; 8.2. $mx+C$;

8.3. $\frac{1}{2}x^2+C$; 8.4. $\frac{1}{3}x^3+C$; 8.5. $\frac{1}{4}x^4+C$; 8.6. $2\sqrt{x}+C$; 8.7. $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$; 8.8. $\frac{3}{4}x^{4/3}+C$;

8.9. $\frac{3}{2}x^{2/3}+C$; 8.10. $\frac{3}{8}x^{8/3}+C$; 8.11. $5x^{1/5}+C$; 8.12. $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$; 8.13. $\operatorname{sen} x+C$; 8.14. $-\cos x+C$;

8.15. $\tan x+C$; 8.16. $\sec x+C$; 8.17. $-\csc x+C$; 8.18. $-\cot x+C$; 8.19. $\arctan x+C$;

8.20. $\operatorname{arcsen} x+C$; 10.1. $6x+C$; 10.2. $-7x+C$; 10.3. π^3x+C; 10.4. $\frac{1}{3}\pi x+C$; 10.5. $-2^{-5}x+C$;

10.6. $3^{-2}x+C$; 10.7. $-\frac{1}{x}+C$; 10.8. $\frac{7}{10}x^{10/7}+C$; 10.9. $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$; 10.10. $\frac{3}{4}\omega^{4/3}+C$; 10.11. $\frac{5}{8}x^{8/5}+C$;

10.12. $-\frac{1}{w}+C$; 10.13. $\frac{n}{n-1}x^{(n-1)/n}+C$; 10.14. $-7\frac{x}{(n-1)x^n}+C$; 10.15. $\frac{z^2}{2x^n}+C$; 10.16. $\frac{5}{7}a^2x^7+C$;

10.17. $\frac{5}{3}a^3x^6+C$; 10.18. $\frac{x^2}{2p^2}+C$; 10.19. $\frac{b^3}{3p^3}+C$; 10.20. $-\frac{1}{t^3}+C$; 10.21. $-\frac{2}{5x^5}+C$; 10.22. $-\frac{\sqrt{2}}{2t^2}+C$;

10.23. $-\frac{b^3}{2p^2}+C$; 10.24. $-\frac{a}{px}+C$; 10.25. $12\sqrt[3]{x}+C$; 10.26. $-\frac{1}{2}\cos x+C$; 10.27. $\frac{1}{\pi}\tan x+C$;

10.28. $-2\cot x+C$; 10.29. $\frac{\sec x}{\csc\left(4\pi^2\right)}+C$; 10.30. $2x^2-7x+C$; 10.31. $x\operatorname{sen} 3+\frac{1}{2}x^2+C$;

10.32. $\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{5}{2}x^2+C$; 10.33. $\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C$; 10.34. $\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{7}x^{7/5}+C$; 10.35. $\frac{3}{2}r^{2/3}+\frac{3}{4}r^{4/3}+C$;

10.36. $\frac{4}{9}t^{9/4}+\frac{5}{9}t^{9/5}+C$; 10.37. $\frac{4}{5}t^{5/4}+\frac{5}{9}t^{9/5}+C$; 10.38. $\frac{4}{11}t^{11/4}+\frac{5}{11}t^{11/5}+C$; 10.39. $\frac{3}{2}x^2-5x+C$;

10.40. $t^2-\frac{5}{3t^3}+C$; 10.41. $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{3/2}+C$; 10.42. $2\cos x+\operatorname{sen} x+C$; 10.43. $\pi^2\operatorname{arcsen} x-\frac{x^{\pi+1}}{(\pi+1)\tan 3}+C$;

10.44. $\frac{2}{3}t^{3/2}-4\sqrt{t}+C$; 10.45. $\frac{\pi}{1-r}x^{1-r}-x2^{\pi}+C$; 10.46. $\frac{1}{3}x^3-\frac{\pi^3}{x}+C$; 10.47. $-\frac{x^{-2}}{2\operatorname{arcsen} t}+C$;

10.48. $\frac{5}{7}x^{7/5}-\frac{5}{2}x^{2/5}+C$; 10.49. $\frac{\pi}{2}x^2+\csc x+C$; 10.50. $4\operatorname{sen} x-5\cos x+C$; 10.51. $\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{3}y^6+\frac{1}{10}y^{10}+C$;

10.52. $2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C$; 10.53. $5t - t^2 + t^3 + C$; 10.54. $x^2 + \sec x + C$; 10.55. $-3\cos t - 2\,\mathrm{sen}\, t + C$;

10.56. $\frac{3}{7}x^{7/3} - \frac{3}{2}x^{4/3} + C$; 10.57. $3t - 2t^2 + \frac{5}{3}t^3 + C$; 10.58. $x - x^2 - x^3 + C$; 10.59. $14y - \frac{5}{3}y^3 + y^5 + C$;

10.60. $x^2 - \cos x + C$; 10.61. $2\cos t + t^3 + C$; 10.62. $5\arctan x - \cos x - 3\,\mathrm{arcsen}\, x + C$; 10.63. $2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C$;

10.64. $5t - t^2 + t^3 + C$; 10.65. $x\pi^\pi + \frac{1}{2x^7} - 3\,\mathrm{sen}\, x + C$; 10.66. $14t - 2t^3 + t^5 + C$; 10.67. $x - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3 + C$;

10.68. $\mathrm{sen}\,\theta - 2\cos\theta + C$; 10.69. $-\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3t^3} - 3\tan t + C$; 10.70. $\arctan 3\,\mathrm{arcsen}\, x - \mathrm{arcsen}\left(2^{-1}\right)\arctan x + C$;

10.71. $-\cos x\cos t + C$; 10.72. $-\pi\cos x + \frac{\tan 2}{\csc 7}\frac{1}{4x^4} + C$; 10.73. $-\frac{\csc t}{\mathrm{arcsen}\, x} - \frac{t^{\sqrt{\pi}+1}}{(1+x^2)(\sqrt{\pi}+a)} + C$;

10.74. $\frac{2}{3}y^{3/2} - 2y + \frac{3}{4}y^{4/3} + C$; 10.75. $\cos t\tan x + C$; 10.76. $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{t^{1-\sqrt{2}}}{(-\sqrt{2})\,\mathrm{sen}(5x)} + C$; 11. $f(x) = 2\sqrt{x^3} - 50$;

12. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; 13. $f(x) = \frac{4x^3+2}{3}$; 14. $f(x) = 10x - 2x^2 - 9$; 15. $f(x) = \frac{4}{x} + 1$;

16. $f(x) = \frac{2}{3}x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 2$; 17. $y = x^3 - 2x + 4$; 18. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{9}{4}$; 19. $y = \ln x - \sqrt{x}$;

20. $y = x^{3/2} - 2\sqrt{x}$; 21. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \frac{14}{3}$; 22. $v = t^2 - t + 3$ y $s = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{7}{6}$;

23. Máxima altura : 256 p; Tiempo de vuelo : 8 seg, Velocidad de impacto : 128 p/seg; 24. $\frac{77}{18}$ p/seg^2;

25.$a.i.$ Tiempo de vuelo : $\frac{3}{4}$ seg, Velocidad de impacto : 20 p/seg; 25.$a.ii.$ Tiempo subiendo : $\frac{5}{8}$ seg, Máxima altura : $\frac{25}{4}$ p;

25.$b.$ Tiempo de vuelo : 3.4 seg, Velocidad de impacto : 99 p/seg; 27. Tiempo : $\frac{11}{3}$ seg, Distancia : $\frac{1210}{9}$ p;

26. $\frac{300\sqrt{2}}{11}$ min/h;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Método de integración: Manipulación algebraica

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.2

- Método de integración: Manipulación algebraica.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 15 : *Integre* $\displaystyle\int (at)^{1/n}\,dt.$

Solución : Es conocido, por propiedades de potencias que

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

entonces

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

$$\int (at)^{1/n}\,dt = \int \overbrace{a^{1/n}}\, t^{1/n}dt = a^{1/n}\underbrace{\int t^{1/n}dt} = a^{1/n}\,\frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\dfrac{1}{n}+1}+C = a^{1/n}\,\frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\dfrac{1+n}{n}}+C = \frac{na^{1/n}}{n+1}\,t^{\frac{1}{n}+1}+C.$$

$\displaystyle\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=\frac{1}{n}$

Luego,

$$\int (at)^{1/n}\,dt = \frac{na^{1/n}}{n+1}\,t^{\frac{1}{n}+1}+C.$$

★

Ejemplo 16 : *Integre* $\displaystyle\int u\left(\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}\right)du.$

Solución : Al aplicar la ley distributiva,

$$a\,(b+c) = ab+ac,$$

se obtiene

$$u\left(\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}\right) = u\sqrt{u}+u\sqrt[3]{u},$$

lo cual se escribe como

Propiedades de potencias
$a^n\ a^m = a^{n+m}$

$$u\sqrt{u}+u\sqrt[3]{u} = uu^{1/2}+uu^{1/3} = u^{1+\frac{1}{2}}+u^{1+\frac{1}{3}} = u^{3/2}+u^{4/3},$$

por lo que

$$u\left(\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}\right) = u^{3/2}+u^{4/3}.$$

Al integrar

$$\int u\left(\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}\right)du = \int \left(u^{3/2}+u^{4/3}\right)du = \int u^{3/2}\,du + \int u^{4/3}\,du$$

Linealidad de la integral
$\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

donde

$$\underbrace{\int u^{3/2}\ du}_{\uparrow \atop \boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{3}{2}}} = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C_1 = \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C_1 = \frac{2}{5}\ u^{5/2} + C_1,$$

mientras que,

$$\underbrace{\int u^{4/3}\ du}_{\uparrow \atop \boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = -\frac{4}{3}}} = \frac{u^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C_2 = \frac{u^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C_2 = \frac{3}{7}\ u^{7/3} + C_2,$$

entonces

$$\int u\left(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}\right) du = \frac{2}{5}\ u^{5/2} + C_1 + \frac{3}{7}\ u^{7/3} + C_2 = \frac{2}{5}\ u^{5/2} + \frac{3}{7}\ u^{7/3} + \underbrace{(C_1 + C_2)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Constante } C}}$$

Luego,

$$\int u\left(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}\right) du = \frac{2}{5}\ u^{5/2} + \frac{3}{7}\ u^{7/3} + C.$$

★

Ejemplo 17 *: Integre* $\int \tan^2 x\ dx.$

Solución : Por identidades trigonométricas, es conocido que

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x,$$

por lo que, al despejar $\tan^2 x$ queda

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1,$$

así, al integrar

$$\int \tan^2 x\ dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx \underset{\uparrow \atop \boxed{\text{Linealidad de la integral} \atop \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}}{=} \int \sec^2 x\ dx - \int 1\ dx$$

donde

$$\underbrace{\int \sec^2 x\ dx}_{\uparrow \atop \boxed{(\tan x)' = \sec^2 x}} = \tan x + C_1 \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\int 1\ dx}_{\uparrow \atop \boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 0}} = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C_2 = x + C_2,$$

entonces

$$\int \tan^2 x\ dx = \tan x + C_1 - (x + C_2) = \tan x + C_1 - x - C_2 = \tan x - x + \underbrace{(C_1 - C_2)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Constante } C}}$$

Luego,

$$\int \tan^2 x\ dx = \tan x - x + C.$$

★

Ejemplo 18 : *Integre* $\displaystyle\int (ax+b)^2\,dx$.

Solución : Es conocido que

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

por lo que

$$(ax+b)^2 = (ax)^2 + 2\,(ax)\,b + b^2,$$

es decir,

$$(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2.$$

Al integrar

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\end{array}}$$

$$\int (ax+b)^2\,dx = \int \left(a^2x^2 + 2abx + b^2\right) dx = \int a^2x^2\;dx + \int \underbrace{2ab}\,x\;dx + \int b^2\;dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}$$

$$= a^2 \int x^2\;dx + 2ab \int x\;dx + b^2 \int dx,$$

donde,

$$\underbrace{\int x^2\;dx}_{\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=2}} = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1, \qquad \text{mientras que} \qquad \underbrace{\int x\;dx}_{\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=1}} = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = \frac{x^2}{2} + C_2,$$

y por último

$$\underbrace{\int dx}_{\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=0}} = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C_3 = \frac{x}{1} + C_3 = x + C_3.$$

entonces

$$\begin{aligned}\int (ax+b)^2\,dx &= a^2\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 2ab\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + b^2\,(x + C_3)\\ &= a^2\;\frac{x^3}{3} + a^2\;C_1 + ab\;x^2 + 2ab\;C_2 + b^2\;x + b^2\;C_3\\ &= a^2\;\frac{x^3}{3} + ab\;x^2 + b^2\;x + \underbrace{\left(a^2\;C_1 + 2ab\;C_2 + b^2\;C_3\right)}_{\boxed{\text{Constante}\ \ C}}\end{aligned}$$

Luego,

$$\int (ax+b)^2\,dx = a^2\;\frac{x^3}{3} + ab\;x^2 + b^2\;x + C.$$

★

Ejemplo 19 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}\, dx.$

Solución : Es conocido que

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}, \qquad \text{con} \quad c\neq 0,$$

por lo que,

$$\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{x}{\sqrt[3]{x}},$$

puesto que,

$$\sqrt{x}=x^{1/2} \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \sqrt[3]{x}=x^{1/3},$$

se tiene

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}-\frac{x}{x^{1/3}},$$

por propiedades de potencias, se escribe la expresión anterior como

$$\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}-\frac{x}{x^{1/3}} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Propiedades de potencias} \\ a^n/a^m=a^{n-m}}}}}{=} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-x^{1-\frac{1}{3}}=x^{1/6}-x^{2/3},$$

es decir,

$$\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=x^{1/6}-x^{2/3}.$$

Al integrar

$$\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}\, dx=\int\left(x^{1/6}-x^{2/3}\right)dx \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx}}}}{=} \int x^{1/6}\, dx-\int x^{2/3}\, dx,$$

donde,

$$\underbrace{\int x^{1/6}\, dx}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=\frac{1}{6}}}}=\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\dfrac{1}{6}+1}+C_1=\frac{x^{7/6}}{\dfrac{7}{6}}+C_1=\frac{6}{7}\,x^{7/6}+C_1,$$

mientras que,

$$\underbrace{\int x^{2/3}\, dx}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=-\frac{5}{3}}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\dfrac{2}{3}+1}+C_2=\frac{x^{5/3}}{\dfrac{5}{3}}+C_2=\frac{3}{5}\,x^{5/3}+C_2,$$

entonces,

$$\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}\, dx=\frac{6}{7}\,x^{7/6}+C_1-\left(\frac{3}{5}\,x^{5/3}+C_2\right)=\frac{6}{7}\,x^{7/6}-\frac{3}{5}\,x^{5/3}+C.$$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}\, dx=\frac{6}{7}\,x^{7/6}-\frac{3}{5}\,x^{5/3}+C.$$

★

Ejemplo 20 : *Integre* $\int \sqrt[4]{2p^3 x}\ dx.$

Solución : Por propiedades de radicales

$$\underbrace{\sqrt[4]{2p^3 x} \overset{\downarrow}{=} \sqrt[4]{2p^3}\ \sqrt[4]{x}}_{}\qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{Propiedades de radicales}\\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\end{array}}$$

entonces,

$$\int \sqrt[4]{2p^3 x}\ dx = \int \underbrace{\sqrt[4]{2p^3}}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}}\ \sqrt[4]{x}\ dx = \sqrt[4]{2p^3} \int \sqrt[4]{x}\ dx = \sqrt[4]{2p^3} \underbrace{\int x^{1/4}\ dx}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{1}{4}}}} = \sqrt[4]{2p^3}\left(\frac{4}{5}\ x^{5/4} + C_1\right).$$

Finalmente,

$$\int \sqrt[4]{2p^3 x}\ dx = \frac{4}{5}\ \sqrt[4]{2p^3}\ x^{5/4} + C, \qquad \text{donde} \quad C = \sqrt[4]{2p^3}\ C_1.$$

★

Ejemplo 21 : *Integre* $\int \sqrt[4]{2p^3 x}\ dp$

Solución : Por propiedades de radicales

$$\sqrt[4]{2p^3 x} \overset{\downarrow}{=} \sqrt[4]{2x}\ \sqrt[4]{p^3},\qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{Propiedades de radicales}\\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\end{array}}$$

entonces

$$\int \sqrt[4]{2p^3 x}\ dp = \int \underbrace{\sqrt[4]{2x}}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}}\ \sqrt[4]{p^3}\ dp = \sqrt[4]{2x} \int \sqrt[4]{p^3}\ dp = \sqrt[4]{2x} \underbrace{\int p^{3/4}\ dp}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{1}{4}}}} = \sqrt[4]{2x}\left(\frac{4}{7}\ p^{7/4} + C_1\right).$$

Finalmente

$$\int \sqrt[4]{2p^3 x}\ dp = \frac{4}{7}\ \sqrt[4]{2x}\ p^{7/4} + C, \qquad \text{donde} \quad C = \sqrt[4]{2x}\ C_1.$$

★

Ejemplo 22 : *Integre* $\int \cos(t - x)\ dx.$

Solución : Es conocida la identidad trigonométrica

$$\cos(t - x) = \cos t \cos x + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} x,$$

entonces,

$$\int \cos(t-x)\ dx = \int (\cos t\cos x + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} x)\ dx \overset{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \\ \downarrow}}{=} \int \underbrace{\cos t}_{\uparrow} \cos x\ dx + \int \underbrace{\operatorname{sen} t}_{\uparrow} \operatorname{sen} x\ dx$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

$$= \cos t \int \cos x\ dx + \operatorname{sen} t \int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos t \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} t \cos x + C$$

Finalmente

$$\int \cos(t-x)\ dx = \cos t \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} t \cos x + C$$

★

Ejemplo 23 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^2+1}\ dx.$

Solución : Se tiene dos opciones para obtener la familia de primitivas de la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$, una opción es dividir los polinomios y la otra opción es escribir la función f de la siguiente manera

$$\frac{3x^2}{x^2+1} \overset{\substack{\boxed{\text{Sumar y restar } 3} \\ \downarrow}}{=} \frac{3x^2+3-3}{x^2+1},$$

con lo que

$$\frac{3x^2}{x^2+1} = \frac{\overbrace{3x^2+3}^{\substack{\boxed{\text{Factor común } 3} \\ \downarrow}}-3}{x^2+1} = \frac{3\left(x^2+1\right)-3}{x^2+1} \underset{\uparrow}{=} \frac{3\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1} = 3 - \frac{3}{x^2+1},$$

Propiedades de los racionales
$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

es decir,

$$\frac{3x^2}{x^2+1} = 3 - \frac{3}{x^2+1}.$$

Al integrar

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

$$\int \frac{3x^2}{x^2+1}\ dx = \int \left(3 - \frac{3}{x^2+1}\right) dx \underset{\uparrow}{=} \int \overset{\downarrow}{3}\ dx - \int \frac{\overset{\downarrow}{3}}{x^2+1}\ dx = 3\int dx - 3\int \frac{1}{x^2+1}\ dx,$$

Linealidad de la integral
$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

donde

$$\underbrace{\int dx}_{\uparrow \; \boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=0}} = \frac{x^{0+1}}{0+1}+C_1 = \frac{x}{1}+C_1 = x+C_1 \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+1}}_{\uparrow \; \boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}}} = \arctan x + C_2,$$

entonces,

$$\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,dx = 3\left(x+C_1\right) - 3\left(\arctan x + C_2\right) = 3x - 3\arctan x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,dx = 3x - 3\arctan x + C.$$

★

Ejemplo 24 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{\cos^2 x}\,dx$

Solución : Es conocido que

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

así, la integral se puede escribir como

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

Observemos que la expresión del numerador se puede factorizar como

$$\overbrace{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x}^{\boxed{\text{Factor común } \operatorname{sen} x} \; \downarrow} + \left(\overbrace{-\operatorname{sen} x - 2}^{\boxed{\text{Factor común } -1} \; \downarrow}\right) = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x\left(\operatorname{sen} x + 2\right) - \left(\operatorname{sen} x + 2\right)}_{\uparrow \; \boxed{\text{Factor común } \operatorname{sen} x + 2}} = \left(\operatorname{sen} x + 2\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right),$$

mientras que, en el término del denominador podemos sacar -1 como factor común y nos queda

$$1 - \operatorname{sen}^2 x = -\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right)$$

la integral se escribe

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\left(\operatorname{sen} x + 2\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right)}{-\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right)}\,dx = -\int \left(\operatorname{sen} x + 2\right)\,dx$$

$$\underset{\uparrow \; \boxed{\text{Linealidad de la integral} \;\; \int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}}{=} -\int \operatorname{sen} x\,dx - \int 2\,dx = \cos x - 2x + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{\cos^2 x}\,dx = \cos x - 2x + C$$

★

Ejemplo 25 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2\;dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)}$

Solución : Aplicamos la conjugada de la expresión $\sqrt{x}-1$, es decir, multiplicamos y dividimos por el término $\sqrt{x}+1$

$$\int \frac{(x-1)^2\;dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)} = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)}\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}\;dx = \int \frac{(x-1)^2\,(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}\left((\sqrt{x})^2-(1)^2\right)}\;dx$$

$$= \int \frac{(x-1)^2\,(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}\,(x-1)}\;dx = \int \frac{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}}\;dx,$$

desarrollamos el término del numerador

$$(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right) = x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1 = x^{3/2}+x-x^{1/2}-1,$$

entonces,

$$\int \frac{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}}\;dx = \int \frac{x^{3/2}+x-x^{1/2}-1}{\sqrt[4]{x^3}}\;dx$$

$$= \int \left(\frac{x^{3/2}}{x^{3/4}}+\frac{x}{x^{3/4}}-\frac{x^{1/2}}{x^{3/4}}-\frac{1}{x^{3/4}}\right)\;dx$$

$$= \int \left(x^{3/2-3/4}+x^{1-3/4}-x^{1/2-3/4}-x^{-3/4}\right)\;dx$$

$$= \int x^{3/4}\;dx + \int x^{1/4}\;dx - \int x^{-1/4}\;dx - \int x^{-3/4}\;dx$$

$$= \frac{4}{7}\;x^{7/4}+\frac{4}{5}\;x^{5/4}-\frac{4}{3}\;x^{3/4}-4x^{1/4}+C$$

Finalmente

$$\int \frac{(x-1)^2\;dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)} = \frac{4}{7}\;x^{7/4}+\frac{4}{5}\;x^{5/4}-\frac{4}{3}\;x^{3/4}-4x^{1/4}+C$$

★

Ejemplo 26 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}\;dx$

Solución : Aplicamos la conjugada de la expresión $2-\sqrt{x}$, es decir, multiplicamos y dividimos por el término $2+\sqrt{x}$

$$\int \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}\;dx = \int \frac{\left(x^2-16\right)}{(2-\sqrt{x})}\frac{(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})}\;dx = \int \frac{\left(x^2-16\right)(2+\sqrt{x})}{\left((2)^2-(\sqrt{x})^2\right)}\;dx = \int \frac{\left(x^2-16\right)(2+\sqrt{x})}{4-x}\;dx$$

Observemos que el polinomio del numerador se puede factorizar como

$$x^2-16 = (x-4)\,(x+4) = -\,(4-x)\,(x+4)\,,$$

así,

$$\int \frac{\left(x^2-16\right)(2+\sqrt{x})}{4-x}\;dx = \int \frac{-\,(4-x)\,(x+4)\,(2+\sqrt{x})}{4-x}\;dx = -\int (x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)\;dx,$$

desarrollando esta expresión

$$(x+4)\left(2+\sqrt{x}\right) = 2x+x\sqrt{x}+8+4\sqrt{x} = 2x+x^{3/2}+8+4x^{1/2}$$

la integral nos queda

$$\int (x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)\ dx = \int \left(2x + x^{3/2} + 8 + 4x^{1/2}\right)\ dx$$

$$= \int 2x\ dx + \int x^{3/2}\ dx + \int 8\ dx + \int 4x^{1/2}\ dx = x^2 + \frac{2}{5}\ x^{5/2} + 8x + \frac{8}{3}\ x^{3/2} + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}\ dx = -\left(x^2 + \frac{2}{5}\ x^{5/2} + 8x + \frac{8}{3}\ x^{3/2}\right) + C$$

★

Ejemplo 27 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)}$.

Solución : Es conocido que

$$\operatorname{sen} 2(\cdot) = 2\operatorname{sen}(\cdot)\cos(\cdot), \tag{1}$$

por otro lado,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

por la ecuación (1) se tiene

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}^2 x = \left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

así,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)} = \int \frac{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2(x/2)}\ dx = \int 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

como

$$\operatorname{sen}^2(\cdot) = \frac{1-\cos 2(\cdot)}{2},$$

entonces,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1-\cos x}{2},$$

esto implica

$$\int 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx = \int 4\ \frac{1-\cos x}{2}\ dx = \int 2(1-\cos x)\ dx = 2\left(\int dx - \int \cos x\ dx\right) = 2x - 2\operatorname{sen} x + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)} = 2x - 2\operatorname{sen} x + C.$$

★

Ejemplo 28 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)}{x^5}\ dx.$

Solución : Es conocido que

$$\cos^2(\cdot) = 1 - \operatorname{sen}^2(\cdot) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x,$$

entonces

$$\cos^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2 = 1 - x^2,$$

por lo tanto,

$$\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)}{x^5}\, dx = \int \frac{1-x^2}{x^5}\, dx = \int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{x^2}{x^5}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x^5}\, dx - \int \frac{x^2}{x^5}\, dx = \int x^{-5}\, dx - \int x^{-3}\, dx = -\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{2x^2} + C,$$

es decir,

$$\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)}{x^5}\, dx = -\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

★

Ejemplo 29 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3} - x - 5\sqrt{x} + 2}{x - 3\sqrt{x} + 1}\, dx.$

Solución : Es conocido que $\sqrt{x^3} = \left(\sqrt{x}\right)^3$ y que $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$, así,

$$\frac{\sqrt{x^3} - x - 5\sqrt{x} + 2}{x - 3\sqrt{x} + 1} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3 - \left(\sqrt{x}\right)^2 - 5\sqrt{x} + 2}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} + 1}$$

Se observa que la expresión del numerador se factoriza como

$$\left(\sqrt{x}\right)^3 - \left(\sqrt{x}\right)^2 - 5\sqrt{x} + 2 = \left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} + 1\right),$$

así, el integrando queda

$$\frac{\sqrt{x^3} - x - 5\sqrt{x} + 2}{x - 3\sqrt{x} + 1} = \frac{\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} + 1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} + 2$$

de aquí,

$$\int \frac{\sqrt{x^3} - x - 5\sqrt{x} + 2}{x - 3\sqrt{x} + 1}\, dx = \int \left(\sqrt{x} + 2\right)\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{x^3} - x - 5\sqrt{x} + 2}{x - 3\sqrt{x} + 1}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + C.$$

★

Ejemplo 30 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)\, dx}{\cos x - \operatorname{sen} x}.$

Solución : Es conocida la identidad trigonométrica

$$\cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \operatorname{sen} x\, \operatorname{sen} y,$$

por lo tanto,

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\, \cos x - \operatorname{sen} x\, \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Por otra parte, también es conocido que

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

así,

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x),$$

entonces,

$$\cos(2x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x).$$

Al integrar

$$\int \frac{\cos(2x)\ dx}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \int \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\cos x - \operatorname{sen} x}\ dx = \int (\cos x + \operatorname{sen} x)\, dx$$

$$= \int \cos x\ dx + \int \operatorname{sen} x\ dx = \operatorname{sen} x - \cos x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\cos(2x)\ dx}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x - \cos x + C.$$

★

Ejemplo 31 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1-x^{-1}}\ dx.$

Solución : Por propiedad de potencias, se tiene que

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \qquad \text{de aquí,} \qquad 1 - x^{-1} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

entonces,

$$\frac{1-x^2}{1-x^{-1}} = \frac{1-x^2}{\dfrac{x-1}{x}} = \frac{x\left(1-x^2\right)}{x-1} = \frac{x(1-x)(1+x)}{x-1} = \frac{-x(x-1)(1+x)}{x-1} = -\ x(1+x),$$

es decir,

$$\frac{1-x^2}{1-x^{-1}} = -\ x(1+x).$$

Al integrar

$$\int \frac{1-x^2}{1-x^{-1}}\ dx = \int -\ x(1+x)\ dx = -\int \left(x+x^2\right)\ dx = -\ \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{1-x^2}{1-x^{-1}}\ dx = -\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C.$$

★

Ejemplo 32 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}\ dx}{1-x^2}.$

Solución : Al racionalizar se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}\ dx}{1-x^2} = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{1-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arcsen} x + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}\ dx}{1-x^2} = \operatorname{arcsen} x + C.$$

★

Ejemplo 33 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2) - \operatorname{sen}^4(x/2)}{1+\cos x}\ dx.$

Solución : Se tiene que

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Es conocido que

$$\operatorname{sen} 2(\cdot) = 2\operatorname{sen}(\cdot)\cos(\cdot), \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{\operatorname{sen} 2(\cdot)}{2} = \operatorname{sen}(\cdot)\cos(\cdot),$$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

así,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x,$$

por lo que, la integral se transforma en

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2) - \operatorname{sen}^4(x/2)}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx$$

Para la familia de primitivas de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}$, por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1,$$

se obtiene que

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

lo cual se escribe como

$$\operatorname{sen}^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x),$$

por lo tanto,

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x,$$

y la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int (1-\cos x)\,dx = \int dx - \int \cos x\,dx = x - \operatorname{sen} x + C_1,$$

entonces

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2) - \operatorname{sen}^4(x/2)}{1+\cos x}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx = \frac{1}{4}(x - \operatorname{sen} x + C_1) = \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} x}{4} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2) - \operatorname{sen}^4(x/2)}{1+\cos x}\,dx = \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} x}{4} + C.$$

★

Ejemplo 34 *: Integre* $\displaystyle\int \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx.$

Solución : Se tiene que

$$\int \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx = \int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx - \int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx,$$

Para resolver $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$, se procede de la siguiente manera, es conocida la identidad trigonométrica

$$\cos^2(\cdot) = \frac{1+\cos 2(\cdot)}{2},$$

por lo que,

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1+\cos x}{2},$$

así,

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Al integrar

$$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)\, dx = \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x) + C_1.$$

Luego,

$$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x) + C_1.$$

Por otra parte, para resolver $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) dx$, se procede de la siguiente manera, es conocida la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x\, \cos y - \cos x\, \operatorname{sen} y,$$

así,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen} x,$$

puesto que, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se concluye que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x).$$

Al integrar

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) dx = \int \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C_2.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) dx &= \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + C.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + C.$$

★

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales por manipulación algebraica

1. $\int x\sqrt{x}\, dx$
2. $\int u\left(\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}\right) du$
3. $\int \frac{t^6-t^2}{t^4} dt$
4. $\int (x+4)^2\, dx$
5. $\int (3-2t)^2\, dt$
6. $\int (ax+b)^2\, dx$
7. $\int (a+bt)^2\, dt$
8. $\int (a-bt)^2\, da$
9. $\int \left(x^2-1\right)^2 dx$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{t}}{t} dt$

11. $\displaystyle\int \left(x^3-x\right)^2 dx$ 12. $\displaystyle\int y^2\left(y^2-3\right) dy$ 13. $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(x^2-\frac{1}{x}\right) dx$ 14. $\displaystyle\int \left(y^2+4y\right)^2 dy$

15. $\displaystyle\int \left(a+bt^3\right)^2 dt$ 16. $\displaystyle\int \left(a+bt^3\right)^2 da$ 17. $\displaystyle\int (x+1)^3 dx$ 18. $\displaystyle\int \left(x-\frac{3}{x}\right)^2 dx$

19. $\displaystyle\int (x+4)^3 dx$ 20. $\displaystyle\int (3-2x)^3 dx$ 21. $\displaystyle\int (a+bt)^3 dt$ 22. $\displaystyle\int (a-bt)^4 dt$

23. $\displaystyle\int \left(y^2+4y^{-2}\right)^2 dy$ 24. $\displaystyle\int \left(a+bt^3\right)^2 dt$ 25. $\displaystyle\int \left(a+bt^3\right)^2 da$ 26. $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x}}\, dx$ 28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ 29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2-\pi}{x^2}\, dx$ 30. $\displaystyle\int \frac{s^4-8}{s^2}\, ds$

31. $\displaystyle\int (x+5)(2x-3)\, dx$ 32. $\displaystyle\int \frac{\left(t^2+1\right)\left(t^2-2\right)}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt$ 33. $\displaystyle\int y\left(\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}-2\right) dy$

34. $\displaystyle\int (x-1)(3x+2)\, dx$ 35. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right) dx$ 36. $\displaystyle\int x(x+a)(x+b)\, dx$

37. $\displaystyle\int (at)^{1/n} dt$ 38. $\displaystyle\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$ 39. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\, dx$ 40. $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t\right) dt$

41. $\displaystyle\int \cos(t-x)\, dx$ 42. $\displaystyle\int \cos(t-x)\, dt$ 43. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(t-x)\, dt$ 44. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(t-x)\, dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\, dx$ 46. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$ 47. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}\, dx$ 48. $\displaystyle\int \frac{4x^6+3x^5-8}{x^5}\, dx$

49. $\displaystyle\int \sqrt[4]{2p^3x}\, dx$ 50. $\displaystyle\int \sqrt[4]{2p^3x}\, dp$ 51. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+1}{x^2}\, dx$ 52. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+1}{\sqrt{x}}\, dx$

53. $\displaystyle\int \left(x^2+1\right)^2 dx$ 54. $\displaystyle\int \left(x^3-1\right)^2 dx$ 55. $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ 56. $\displaystyle\int \left(2-\sqrt{t}\right)^2 dt$

57. $\displaystyle\int \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt[5]{t^2}}\right)^3 dt$ 58. $\displaystyle\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$ 59. $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x-2}\, dx$ 60. $\displaystyle\int \frac{1-x}{1-x^{-1}}\, dx$

61. $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1-x^{-1}}\, dx$ 62. $\displaystyle\int \frac{1-x^{-2}}{1-x^{-4}}\, dx$ 63. $\displaystyle\int \frac{\left(x^m+x^n\right)^2}{x^2}\, dx$ 64. $\displaystyle\int \frac{\left(x^m-x^n\right)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

65. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+1}{x+1}\, dx$ 66. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+1}{x-1}\, dx$ 67. $\displaystyle\int \frac{t^3-1}{t-1}\, dt$ 68. $\displaystyle\int \tan^2 t\, dt$

69. $\displaystyle\int \cot^2 x\, dx$ 70. $\displaystyle\int \left(\cot^2 x+1\right) dx$ 71. $\displaystyle\int \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx$ 72. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right) dx$

73. $\displaystyle\int \frac{x^3-8}{x-2}\, dx$ 74. $\displaystyle\int \frac{x^3+27}{x+3}\, dx$ 75. $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}\, dx$ 76. $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+x-3}{x^2+1}\, dx$

77. $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3-2x^2+2x-8}{x^2+2}\, dx$ 78. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x-\tan^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ 79. $\displaystyle\int \frac{1-\cos^2 x-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx$

80. $\displaystyle\int \frac{x^6-8}{x^2-2}\, dx$ 81. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\tan x}\, dx$ 82. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3}{\sqrt{x}}\, dx$ 83. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-5}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{5}}\, dx$

84. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\operatorname{sen} t} dt$ 85. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x}\, dx$ 86. $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$ 87. $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)\ dx}{1-\sqrt{2}\ \cos x}$

88. $\displaystyle\int \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ 89. $\displaystyle\int \frac{\cos(2t)}{\operatorname{sen}^2 t} dt$ 90. $\displaystyle\int \frac{5x + 8x^2 - 3x^3 - 6}{x^5 - 3x^4}\, dx$

91. $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x - 3}{\operatorname{sen} x + 3}\, dx$ 92. $\displaystyle\int \frac{5\sqrt[3]{x^2} - 3x\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{x}}\, dx$ 93. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}\,(x-1)}{\sqrt{x} - 1}\, dx$

94. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2\, dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x} - 1)}$ 95. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(\arcsin x)}{x^5}\, dx$ 96. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(\arcsin x) - 7}{x^5}\, dx$

97. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(\arcsin x) + 2x^4}{x^6}\, dx$ 98. $\displaystyle\int \frac{\cos^4(\arcsin x) + \pi^2}{2x^6}\, dx$ 99. $\displaystyle\int \frac{\sec^4(\arctan x)}{\operatorname{sen}^2(\arctan x^2)}\, dx$

100. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}\,(x-1)}{\sqrt[3]{x} - 1}\, dx$ 101. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt[3]{x} - 1)}\, dx$ 102. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}}{\sqrt{x - 1}}\, dx$

103. $\displaystyle\int \frac{\cos(2t)}{\cos^2 t}\, dt$ 104. $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)\, dx}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ 105. $\displaystyle\int \frac{\cos(2t)\, dt}{\cos t + \operatorname{sen} t}$ 106. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2(x/2)}\, dx$

107. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}}\, dx$ 108. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x}$ 109. $\displaystyle\int \frac{2\sec^4 x + 3\sec^2 x - 2}{\sec^2 x + 2}\, dx$

110. $\displaystyle\int \frac{3\cos^2 x + 5\cos x - 2}{\cos x + 2}\, dx$ 111. $\displaystyle\int \frac{3\, dx}{\sec^2(x/2)}$ 112. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$ 113. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cot x} dx$

114. $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos^2 x}{4}\right) dx$ 115. $\displaystyle\int \frac{2\tan^4 x + 7\sec^2 x - 22}{\sec^2 x + 4}\, dx$ 116. $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)\ \csc^2 x}{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}\, dx$

117. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{\cos^2 x}\, dx$ 118. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(2x)\ \cos x}\, dx$ 119. $\displaystyle\int \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}\, dx$

120. $\displaystyle\int \frac{x^3 \tan x\, dx}{\sqrt{x\sec^2 x - x}}$ 121. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2) - \operatorname{sen}^4(x/2)}{\cos^2(x/2)}\, dx$ 122. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3} - x - 5\sqrt{x} + 2}{x - 3\sqrt{x} + 1}\, dx$

123. $\displaystyle\int \frac{\csc x\ \tan x}{\sec x}\, dx$ 124. $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{x\sec^2 x - x}}{x^3 \tan x\ dx} - \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{1 - x^4}\right) dx$ 125. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}\, dx$

126. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{x^2 + 1}$ 127. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2) - \operatorname{sen}^4(x/2)}{1 + \cos x}\, dx$ 128. $\displaystyle\int \frac{2\csc^2 x - 3\csc x - \csc^3 x + 6}{\csc x - 2}\, dx$

129. $\displaystyle\int \frac{\tan a}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ 130. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$ 131. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\ \cos^2 x}$ 132. $\displaystyle\int \frac{\pi\ dx}{\csc^2(x/2)}$

133. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}\, dx$ 134. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2\ (\sqrt[4]{x} - 1)}\, dx$ 135. $\displaystyle\int \frac{3x^2\ dx}{x^2 + 1}$ 136. $\displaystyle\int \frac{2 - x^2}{x^2 + 1}\, dx$

137. $\displaystyle\int \frac{5 + x^2}{x^2 + 1}\, dx$ 138. $\displaystyle\int \frac{1 - 3x^2}{x^2 + 1}\, dx$ 139. $\displaystyle\int \frac{2 + 5x^2}{x^2 + 1}\, dx$ 140. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{2 + \operatorname{sen}(2x)}\, dx$

141. $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}\, dx$ 142. $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)\ \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}\, dx$ 143. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 4x + 3 - 2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x^3} - 2x + 3\sqrt{x}}\, dx$

144. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}\, dx$ 145. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\arcsin x) + x^2}{\arctan(\tan(x^4))}\, dx$

Respuestas: Ejercicios

1. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$; 2. $\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{3}{7}u^{7/3} + C$; 3. $\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{t} + C$; 4. $\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + C$; 5. $9t - 6t^2 + \frac{4}{3}t^3 + C$;
6. $\frac{1}{3}a^2x^3 + abx^2 + b^2x + C$; 7. $a^2t + abt^2 + \frac{1}{3}b^2t^3 + C$; 8. $\frac{1}{3}a^3 - a^2bt + ab^2t^2 + C$; 9. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$;
10. $3\sqrt[3]{t} + C$; 11. $\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$; 12. $\frac{1}{5}y^5 - y^3 + C$; 13. $\frac{2}{7}x^{7/2} - 2\sqrt{x} + C$; 14. $\frac{1}{5}y^5 + 2y^4 + \frac{16}{3}y^3 + C$;

15. $a^2t + \frac{1}{2}abt^4 + \frac{1}{7}b^2t^7 + C$; 16. $\frac{1}{3}a^3 + a^2bt^3 + ab^2t^6 + C$; 17. $\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$; 18. $\frac{1}{3}x^3 - 6x - \frac{9}{x} + C$;
19. $\frac{1}{4}x^4 + 4x^3 + 24x^2 + 64x + C$; 20. $27x - 27x^2 + 12x^3 - 2x^4 + C$; 21. $a^3t + \frac{1}{4}b^3t^4 + \frac{3}{2}a^2bt^2 + ab^2t^3 + C$;
22. $a^4t + \frac{1}{5}b^4t^5 - 2a^3bt^2 - ab^3t^4 + 2a^2b^2t^3 + C$; 23. $\frac{1}{5}y^5 + 8y - \frac{16}{3y^3} + C$; 24. $a^2t + \frac{1}{2}abt^4 + \frac{1}{7}b^2t^7 + C$;
25. $\frac{1}{3}a^3 + a^2bt^3 + ab^2t^6 + C$; 26. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$; 27. $\frac{2}{7}x^{7/2} - 2\sqrt{x} + C$; 28. $\frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{3}{5}x^{5/3} + C$;
29. $-\frac{3}{2x^{2/3}} - x + \frac{\pi}{x} + C$; 30. $\frac{1}{3}s^3 + \frac{8}{s} + C$; 31. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 15x + C$; 32. $\frac{3}{13}t^{13/4} - \frac{3}{7}t^{7/3} - 6\sqrt[3]{t} + C$;
33. $\frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{3}{7}y^{7/3} - y^2 + C$; 34. $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$; 35. $\frac{2}{5}x^{5/2} + x + C$; 36. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}abx^2 + C$;
37. $\frac{n}{n+1}a^{1/n}t^{\frac{1}{n}+1} + C$; 38. $(nx)^{1/n} + C$; 39. $\frac{1}{3}x^3 - x + C$; 40. $t + C$; 41. $\cos t \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} t \cos x + C$;
42. $\operatorname{sen} t \cos x - \cos t \operatorname{sen} x + C$; 43. $-\cos t \cos x - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} x + C$; 44. $\operatorname{sen} t \operatorname{sen} x + \cos t \cos x + C$;
45. $\frac{2}{5}x^{5/2} + 2\sqrt{x} + C$; 46. $\sqrt[3]{x}\left(\frac{3}{4}x - 3\right) + C$; 47. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{6}{11}x^{11/6} + C$; 48. $3x + 2x^2 + \frac{2}{x^4} + C$;
49. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{2p^3}x^{5/4} + C$; 50. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{2x}p^{7/4} + C$; 51. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} - 2x + C$; 52. $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{6}{5}x^{5/2} + 2\sqrt{x} + C$;
53. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$; 54. $\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + x + C$; 55. $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C$; 56. $4t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{8}{3}t^{3/2} + C$;
57. $\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{15}{8}t^{8/5} + \frac{30}{7}t^{7/10} + \frac{5}{\sqrt[5]{t}} + C$; 58. $\frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$; 59. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$; 60. $-\frac{x^2}{2} + C$;
61. $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$; 62. $x - \arctan x + C$; 63. $\frac{1}{2m-1}x^{2m-1} + \frac{2}{m+n-1}x^{m+n-1} + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + C$;
64. $\frac{2}{4m+1}x^{2m+1/2} - \frac{4}{2m+2n+1}x^{m+n+1/2} + \frac{2}{4n+1}x^{2n+1/2} + C$; 65. $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$; 66. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + C$;
67. $\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + C$; 68. $\tan t - t + C$; 69. $-\cot x - x + C$; 70. $-\cot x + C$; 71. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + C$;
72. $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x + C$; 73. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$; 74. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x + C$; 75. $\frac{1}{3}x^3 + 3\arctan x + C$;
76. $\frac{x^2}{2} - x - 2\arctan x + C$; 77. $\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1}{3}x^3 + C$; 78. $\operatorname{arcsen} x + C$; 79. $\cos x + C$; 80. $4x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} + C$;
81. $-\cot x - x + C$; 82. $\frac{18}{5}x^{5/6} - \frac{18}{7}x^{7/6} + \frac{2}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x} + C$; 83. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt[3]{25}\,x + \frac{4\sqrt[3]{5}}{5}x^{5/4} + C$; 84. $2\operatorname{sen} t + C$;
85. $x + \cos x + C$; 86. $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + C$; 87. $-x - \sqrt{2}\operatorname{sen} x + C$; 88. $\frac{1}{2}x + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + C$;
89. $-\cot t - 2t + C$; 90. $\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{3x^3} + C$; 91. $-2\cos x - x + C$; 92. $\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^{4/3} + \sqrt{2}x + \frac{9\sqrt{2}}{5}x^{5/3} + C$;
93. $\frac{10}{21}x^{21/10} + \frac{5}{8}x^{8/5} + C$; 94. $\frac{4}{7}x^{7/4} - \frac{4}{5}x^{5/4} - \frac{4}{3}x^{3/4} + 4\sqrt[4]{x} + C$; 95. $\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + C$; 96. $\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2x^4} + C$;
97. $\frac{1}{2x^2}\frac{1}{3x^3} - \frac{2}{x} - \frac{1}{5x^5} + C$; 98. $\frac{1}{3x^3} - \frac{e^2}{10x^5} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{10x^5} + C$; 99. $2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^3} + C$;
100. $\frac{15}{34}x^{34/15} + \frac{15}{29}x^{29/15} + \frac{5}{8}x^{8/5} + C$; 101. $\frac{4}{5}x^{5/4} - 4\sqrt[4]{x} - \frac{12}{7}x^{7/12} - \frac{12}{11}x^{11/12} + \frac{12}{19}x^{19/12} + \frac{12}{23}x^{23/12} + C$;
102. $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$; 103. $2t - \tan t + C$; 104. $\operatorname{sen} x - \cos x + C$; 105. $\cos t + \operatorname{sen} t + C$;
106. $2x - 2\operatorname{sen} x + C$; 107. $-\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - x^2 + 8x + C$; 108. $-\tan x + C$; 109. $2\tan x - x + C$;
110. $3\operatorname{sen} x - x + C$; 111. $\frac{3x}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} x + C$; 112. $\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + C$; 113. $\tan x - x + C$; 114. $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$;
115. $2\tan x - 5x + C$; 116. $\cot x + C$; 117. $\cos x - 2x + C$; 118. $-4\cos x + C$; 119. $\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{3}{2}x^{4/3} + 4x + C$;
120. $\frac{2}{7}x^{7/2} + C$; 121. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$; 122. $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + C$; 123. $x + C$; 124. $-\frac{2}{3x^{3/2}} - \arctan x + C$;
125. $2\sqrt{ax} - 2x + \frac{2}{3\sqrt{a}}x^{3/2} + C$; 126. $x - \arctan x + C$; 127. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} x + C$; 128. $3x - \cot x + C$;
129. $\tan a\ \operatorname{arcsen} x + C$; 130. $\sec x + C$; 131. $\tan x - \cot x + C$; 132. $\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x + C$; 133. $\frac{4}{5}x^{5/4} + x + C$;
134. $-\frac{1}{x} - \frac{4}{3x^{3/4}} + C$; 135. $3x - 3\arctan x + C$; 136. $3\arctan x - x + C$; 137. $x + 4\arctan x + C$;
138. $4\arctan x - 3x + C$; 139. $5x - 3\arctan x + C$; 140. $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$; 141. $x + C$; 142. $\cos x + C$;
143. $2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$; 144. $\operatorname{arcsen} x + C$; 145. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Método de integración: u-sustitución

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.3

- Método de integración: u-sustitución.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 35 : *Integre* $\displaystyle\int (ax+b)^2\,dx$.

Solución : En el ejemplo 18 se aplica manipulación algebraica para obtener la familia de primitivas de la función $f(x) = (ax+b)^2$, más precisamente, se desarrolla el producto notable y por linealidad de la integral indefinida se obtiene la familia de primitivas (ver Ejemplo 18). A continuación se resuelve la integral por medio de un cambio de variable.

Hacer el cambio de variable

$$u = ax+b \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = a\;dx \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \frac{du}{a},$$

entonces, la integral queda

$$\int \Big(\overbrace{ax+b}^{\boxed{\text{Cambio } u=ax+b}}\Big)^2 \overbrace{dx}^{\boxed{\text{Diferencial } dx=\frac{du}{a}}} = \int u^2\,\frac{du}{a} = \underbrace{\frac{1}{a}}_{\boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}} \overbrace{\underbrace{\int u^2\,du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=2}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = \frac{1}{a}\,\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3a}\,(ax+b)^3 + C.$$

Luego,

$$\int (ax+b)^2\,dx = \frac{1}{3a}\,(ax+b)^3 + C.$$

Compare el resultado obtenido en este ejemplo, usando el método de $u-$sustitución con el resultado que se obtiene en el Ejemplo 18, usando manipulación algebraica. Según su opinión

¿Cuál método le parece más sencillo?
¿Cuál método le parece más natural aplicar?

★

Ejemplo 36 : *Integre* $\displaystyle\int (at)^{1/n}\,dt$.

Solución : En el ejemplo 15 se aplica manipulación algebraica para obtener la familia de primitivas de la función $f(t) = (at)^{1/n}$, más precisamente, se aplica propiedades de potencias y por linealidad de la integral indefinida se obtiene la familia de primitivas (ver Ejemplo 15). A continuación se resuelve la integral por medio de un cambio de variable.

Hacer el cambio de variable

$$u = at \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = a\;dt \qquad \Longrightarrow \qquad dt = \frac{du}{a},$$

entonces, la integral queda

Cambio $u = at$ — Diferencial $dt = \dfrac{du}{a}$ — Integral de una potencia. Integral de tabla.

$$\int \Big(\overbrace{at}^{}\Big)^{1/n} dt = \int u^{1/n}\, \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \overbrace{\underbrace{\int u^{1/n}\, du}_{}}^{} = \frac{1}{a}\,\frac{u^{\frac{1}{n}+1}}{\dfrac{1}{n}+1} + C = \frac{1}{a}\,\frac{u^{(n+1)/n}}{\dfrac{n+1}{n}} + C$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

$$\int u^m\, du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad \text{con} \quad m = \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{n u^{(n+1)/n}}{n+1} + C = \frac{n}{a\,(n+1)}\,(at)^{(n+1)/n} + C.$$

Luego,

$$\int (at)^{1/n}\, dt = \frac{n}{a\,(n+1)}\,(at)^{(n+1)/n} + C.$$

Compare el resultado obtenido en este ejemplo, usando el método de $u-$sustitución con el resultado que se obtiene en el Ejemplo 15, usando manipulación algebraica. Según su opinión

¿Cuál método le parece más sencillo?
¿Cuál método le parece más natural aplicar?

★

Ejemplo 37 *: Integre* $\displaystyle\int \cos(t-x)\;\, dx.$

Solución : En el ejemplo 22 se aplica manipulación algebraica para obtener la familia de primitivas de la función $f(x) = \cos(t-x)$, más precisamente, se aplica la identidad trigonométrica el coseno de la diferencia de ángulos y por linealidad de la integral indefinida se obtiene la familia de primitivas (ver Ejemplo 22). A continuación se resuelve la integral por medio de un cambio de variable.

Hacer el cambio de variable

$$u = t - x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad dt = -du,$$

entonces, la integral queda

Cambio $u = t - x$ — Diferencial $dx = -du$ — Integral del coseno. Integral de tabla.

$$\int \cos\Big(\overbrace{t-x}^{}\Big)\;\, dx = \int \cos u\;\,(-du) = -\overbrace{\underbrace{\int \cos u\;\, du}_{}}^{} = -\operatorname{sen} u + C = -\operatorname{sen}(t-x) + C.$$

Linealidad de la integral
Sale de la integral por ser constante
respecto a la variable de integración

$[\operatorname{sen} u]' = \cos u$

Luego,

$$\int \cos(t-x)\;\, dx = -\operatorname{sen}(t-x) + C.$$

Compare el resultado obtenido en este ejemplo, usando el método de $u-$sustitución con el resultado que se obtiene en el Ejemplo 22, usando manipulación algebraica. Según su opinión

¿Cuál método le parece más sencillo?
¿Cuál método le parece más natural aplicar?

★

Ejemplo 38 : *Integre* $\displaystyle\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx$

Solución : En el ejemplo 20 se aplica manipulación algebraica para obtener la familia de primitivas de la función $f(x) = \sqrt[4]{2p^3x}$, más precisamente, se aplica propiedades de radicales y por linealidad de la integral indefinida se obtiene la familia de primitivas (ver Ejemplo 20). A continuación se resuelve la integral por medio de un cambio de variable.

Hacer el cambio de variable

$$u = 2p^3x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2p^3\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \frac{du}{2p^3},$$

entonces, la integral queda

$$\int \sqrt[4]{\underbrace{2p^3x}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Cambio } u=2p^3x}}}}\ dx = \int \sqrt[4]{u}\ \overbrace{\frac{du}{2p^3}}^{\substack{\boxed{\text{Diferencial } dx=\frac{du}{2p^3}} \\ \downarrow}} = \underbrace{\frac{1}{2p^3}}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Linealidad de la integral. Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}} \int \sqrt[4]{u}\ du = \frac{1}{2p^3}\overbrace{\underbrace{\int u^{1/4}\ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=\frac{1}{4}}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = \frac{1}{2p^3}\ \frac{u^{5/4}}{5/4} + C = \frac{1}{2p^3}\ \frac{4u^{5/4}}{5} + C,$$

como $u = 2p^3x$, entonces,

$$\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx = \frac{1}{2p^3}\ \frac{4}{5}\ \left(2p^3x\right)^{5/4} + C = \frac{2}{5p^3}\ \left(2p^3x\right)^{5/4} + C = \frac{4x}{5}\ \left(2p^3x\right)^{1/4} + C.$$

Finalmente,

$$\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx = \frac{4x}{5}\ \left(2p^3x\right)^{1/4} + C.$$

Compare el resultado obtenido en este ejemplo, usando el método de $u-$sustitución con el resultado que se obtiene en el Ejemplo 20, usando manipulación algebraica. Según su opinión

¿Cuál método le parece más sencillo?
¿Cuál método le parece más natural aplicar?

★

Ejemplo 39 : *Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6 x\ \cos x\ dx.$

Solución : Se observa que en el integrando aparece la función seno y su correspondiente derivada, la función coseno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^6 x \cos x \, dx = \int \Big(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \operatorname{sen} x}}}}\Big)^6 \underbrace{\cos x \, dx}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ du = \cos x \, dx}}}} = \overbrace{\underbrace{\int u^6 \, du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 6}}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}}} = \frac{u^7}{7} + C = \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^6 x \; \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C.$$

★

Ejemplo 40 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt[3]{\cos^2 t} \; \operatorname{sen} t \, dt.$

Solución : Se observa que en el integrando aparece la función coseno y su correspondiente derivada, la función seno, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \cos t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\operatorname{sen} t \, dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\,du = \operatorname{sen} t \, dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 t} \operatorname{sen} t \, dt = \int \cos^{2/3} t \operatorname{sen} t \, dt = \int \Big(\underbrace{\cos t}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \cos t}}}}\Big)^{2/3} \underbrace{\operatorname{sen} t \, dt}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ \operatorname{sen} t \, dt = -\,du}}}} = \int u^{2/3} \, \overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{\overset{\downarrow}{(-du)}} = -\overbrace{\underbrace{\int u^{2/3} \, du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = \frac{2}{3}}}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de una potencia.} \\ \text{Integral de tabla.}}}}$$

$$= -\frac{u^{5/3}}{5/3} + C = -\,\frac{3u^{5/3}}{5} + C = -\,\frac{3}{5}\;\cos^{5/3} t + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 t} \; \operatorname{sen} t \, dt = -\,\frac{3}{5} \cos^{5/3} t + C.$$

★

Ejemplo 41 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^3 (3x) \; \sec^2 (3x) \, dx.$

Solución : Se observa que en el integrando aparece la función tangente y su correspondiente derivada, la función secante, así, es natural proponer el cambio de variable

$$u = \tan (3x) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \sec^2 (3x) \; 3 \, dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{3} = \sec^2 (3x) \, dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^3(3x)\sec^2(3x)\,dx = \int \Big(\overbrace{\tan(3x)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ u=\tan(3x)\end{array}}}\Big)^3 \overbrace{\sec^2(3x)\,dx}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Diferencial}\\ \sec^2(3x)\,dx=\frac{du}{3}\end{array}}} = \int u^3\,\underbrace{\frac{du}{3}}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}} = \frac{1}{3}\overbrace{\underbrace{\int u^3\,du}_{\boxed{\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=3}}}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}\end{array}}} = \frac{1}{3}\frac{u^4}{4}+C$$

$$= \frac{u^4}{12}+C = \frac{\tan^4(3x)}{12}+C.$$

Luego,

$$\int \tan^3(3x)\;\sec^2(3x)\,dx = \frac{\tan^4(3x)}{12}+C.$$

★

Ejemplo 42 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$

Solución : Es conocido que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$$

Se observa que la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$ se diferencia de la función $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en la constante 5, así, si se transforma la función f en alguna función similar a g, entonces la familia de primitivas de f viene dada por arcosenos.

Al manipular algebraicamente la función f,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5-x^2}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Multiplicar y dividir el}\\ \text{término } x^2 \text{ por } 5\end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{5-\dfrac{5x^2}{5}}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Factor}\\ \text{común } 5\end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{5\left(1-\dfrac{x^2}{5}\right)}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Propiedad de radicales}\\ \sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}\end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}\,\sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}\,\sqrt{1-\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Propiedad de potencias}\\ a^n/b^n=(a/b)^n\end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}\,\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}},$$

es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}\,\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

y la integral se escribe,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{5}}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}\end{array}}}\,\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

se propone el cambio de variable

$$u = \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{5}}\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \sqrt{5}\, du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ dx = \sqrt{5}\, du}}}}{\sqrt{1-\Bigg(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{5}}}_{\boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \frac{x}{\sqrt{5}}}}}\Bigg)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\overset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{\sqrt{5}}\, du}{\sqrt{1-u^2}} = \overbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de tabla.} \\ \text{Primitiva : arcoseno.}}}} = \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

★

Ejemplo 43 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

Solución : Al completar cuadrado

$$-x^2+4x-3 = -\left(x+\frac{4}{2(-1)}\right)^2 + (-3) - \frac{(4)^2}{4(-1)} = -(x-2)^2 - 3 + \frac{16}{4} = -(x-2)^2 - 3 + 4$$

$$= -(x-2)^2 + 1 = 1 - (x-2)^2,$$

es decir,

$$-x^2+4x-3 = 1-(x-2)^2$$

y la integral se escribe como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}},$$

se observa que con esta manipulación algebraica la integral es muy similar a la integral de tabla

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \operatorname{arcsen} u + C,$$

así, se propone el cambio de variable

$$u = x-2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Diferencial}\\ dx=du\end{array}}}}{\sqrt{1-\Big(\underbrace{x-2}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ u=x-2\end{array}}}\Big)^2}} = \overbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Integral de tabla.}\\ \text{Primitiva : arcoseno.}\end{array}}} = \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}(x-2) + C,$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \operatorname{arcsen}(x-2) + C.$$

★

Ejemplo 44 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$.

Solución : Al completar cuadrado

$$-4x^2+12x-5 = -4\left(x+\frac{12}{2(-4)}\right)^2 + (-5) - \frac{(12)^2}{4(-4)} = -4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - 5 + \frac{144}{16} = -4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - 5 + 9$$

$$= -(2)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = -(2x-3)^2 + 4 = 4 - (2x-3)^2,$$

es decir,

$$-4x^2+12x-5 = 4-(2x-3)^2,$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{4-(2x-3)^2}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Multiplicar y dividir el}\\ \text{término } (2x-3)^2 \text{ por } 4\end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{4-\dfrac{4(2x-3)^2}{4}}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Factor}\\ \text{común } 4\end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{(2x-3)^2}{4}\right)}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Propiedad de radicales}\\ \sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}\end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{\left(1-\dfrac{(2x-3)^2}{4}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(2x-3)^2}{2^2}}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Propiedad de potencias}\\ \dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\end{array}}}{=} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x-3}{2}\right)^2}} \overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Operación de racionales}\\ \dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\end{array}}}{=} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}},$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}},$$

la integral se escribe como,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \int \overset{\substack{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}\\ \downarrow}}{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}},$$

se observa que con esta manipulación algebraica la integral es muy similar a la integral de tabla

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \operatorname{arcsen} u + C,$$

así, se propone el cambio de variable

$$u = x - \frac{3}{2} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla. Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{dx}^{\substack{\boxed{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=du}}\\ \downarrow}}}{\sqrt{1-\Big(\underbrace{x-\frac{3}{2}}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Cambio}\\ u=x-\frac{3}{2}}}}}\Big)^2}} = \frac{1}{2}\overbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}^{\substack{\boxed{\substack{\text{Integral de tabla.}\\ \text{Primitiva : arcoseno.}}}\\ \downarrow}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(x-\frac{3}{2}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(x-\frac{3}{2}\right) + C.$$

★

Ejemplo 45 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{6+x^2}$.

Solución : Es conocido que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

Se observa que la función $f(x) = \dfrac{1}{6+x^2}$ se diferencia de la función $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en la constante 6, así, si se transforma la función f en alguna función similar a g, entonces la familia de primitivas de f viene dada por arcotangente.

Al manipular algebraicamente la función f,

$$f(x) = \frac{1}{6+x^2} \overset{\substack{\boxed{\substack{\text{Multiplicar y dividir el}\\ \text{término } x^2 \text{ por } 6}}\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{6+\dfrac{6x^2}{6}} \overset{\substack{\boxed{\substack{\text{Factor}\\ \text{común } 6}}\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{6\left(1+\dfrac{x^2}{6}\right)} \overset{\substack{\boxed{\substack{\text{Propiedad de radicales}\\ \sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}}}\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{6\left(1+\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}\right)} \overset{\substack{\boxed{\substack{\text{Propiedad de potencias}\\ a^n/b^n=(a/b)^n}}\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{6\left(1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{6}}\right)^2\right)},$$

es decir,

$$\frac{1}{6+x^2} = \frac{1}{6\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2\right)}$$

y la integral se escribe,

$$\int \frac{dx}{6+x^2} = \int \frac{dx}{\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral} \\ \text{Sale de la integral por ser constante} \\ \text{respecto a la variable de integración}}}}}{6}\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2\right)} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2\right)}$$

se propone el cambio de variable

$$u = \frac{x}{\sqrt{6}} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{6}}\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \sqrt{6}\; du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{6+x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{\overbrace{dx}^{\substack{\boxed{\substack{\text{Diferencial} \\ dx = \sqrt{6}\,du}} \\ \downarrow}}}{1+\Bigg(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{6}}}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Cambio} \\ u = \frac{x}{\sqrt{6}}}}}}\Bigg)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{6}\;du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\overbrace{\int \frac{du}{1+u^2}}^{\substack{\boxed{\substack{\text{Integral de tabla.} \\ \text{Primitiva : arcotangente.}}} \\ \downarrow}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan u + C = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{6+x^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) + C.$$

★

Ejemplo 46 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x\;dx}{1+x^4}$.

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \frac{x\;dx}{1+x^4} = \int \frac{x\;dx}{1+\left(x^2\right)^2},$$

se propone el cambio de variable

$$u = x^2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\;dx \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \frac{du}{2},$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \int \frac{\overbrace{x\,dx}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=\frac{du}{2}}}}}{1+\Big(\underbrace{x^2}_{\boxed{\substack{\text{Cambio}\\ u=x^2}}}\Big)^2} = \int \frac{du/2}{1+u^2} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{du}{1+u^2}}_{\boxed{\substack{\text{Integral de tabla.}\\ \text{Primitiva : arcotangente.}}}} = \frac{1}{2}\ \arctan u + C = \frac{1}{2}\ \arctan\left(x^2\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\ \arctan\left(x^2\right) + C.$$

★

Ejemplo 47 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$.

Solución : Al completar cuadrado

$$x^2+10x+26 = (x+5)^2+1,$$

así, la integral se escribe como

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+1},$$

se observa que con esta manipulación algebraica la integral es muy similar a la integral de tabla

$$\int \frac{1}{1+u^2}\ du = \arctan u + C,$$

se propone el cambio de variable

$$u = x+5 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26} = \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=du}}}}{\Big(\underbrace{x+5}_{\boxed{\substack{\text{Cambio}\\ u=x+5}}}\Big)^2+1} = \overbrace{\int \frac{du}{u^2+1}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de tabla.}\\ \text{Primitiva : arcotangente.}}}} = \arctan u + C = \arctan(x+5) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26} = \arctan(x+5) + C.$$

★

Ejemplo 48 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$.

Solución : Al completar cuadrado

$$x^2-6x+13=(x-3)^2+4,$$

es decir,

$$f(x)=\frac{1}{x^2-6x+13}=\frac{1}{(x-3)^2+4}$$

Al manipular algebraicamente la función f,

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2+4}\underset{\boxed{\substack{\text{Multiplicar y dividir el}\\ \text{término } (x-3)^2 \text{ por } 4}}}{=}\frac{1}{\dfrac{4(x-3)^2}{4}+4}\underset{\boxed{\substack{\text{Factor}\\ \text{común } 4}}}{=}\frac{1}{4\left(1+\dfrac{(x-3)^2}{4}\right)}\underset{\boxed{\substack{\text{Propiedad de radicales}\\ \sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}}}}{=}\frac{1}{4\left(1+\dfrac{(x-3)^2}{(2)^2}\right)}\underset{\boxed{\substack{\text{Propiedad de potencias}\\ a^n/b^n=(a/b)^n}}}{=}\frac{1}{4\left(1+\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2\right)},$$

es decir,

$$\frac{1}{x^2-6x+13}=\frac{1}{(x-3)^2+4}=\frac{1}{4\left(1+\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2\right)}$$

y la integral se escribe,

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{dx}{\underset{\boxed{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}}{4}\left(1+\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2}$$

se observa que con esta manipulación algebraica la integral es muy similar a la integral de tabla

$$\int\frac{1}{1+u^2}\,du=\arctan u+C,$$

se propone el cambio de variable

$$u=\frac{x-3}{2}\quad\xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}}\quad du=\frac{1}{2}\,dx\quad\Longrightarrow\quad 2\,du=dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\frac{1}{4}\int\frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=2\,du}}}}{\underbrace{\left(\dfrac{x-3}{2}\right)}_{\boxed{\substack{\text{Cambio}\\ u=\frac{x-3}{2}}}}^2+1}=\frac{1}{4}\overbrace{\int\frac{2\,du}{u^2+1}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de tabla.}\\ \text{Primitiva : arcotangente.}}}}=\frac{1}{2}\arctan u+C=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)+C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + C.$$

★

Ejemplo 49 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución : No se debe **confundir** esta integral con la integral de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, que tiene como primitiva a la función arcoseno, ya que, el diferencial de la integral dada está multiplicado por la variable x, así, se propone el cambio de variable

$$u = 1-x^2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -2x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{du}{2} = x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla. Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\overbrace{x\ dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ x\ dx = -\frac{du}{2}}}}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{\substack{\text{Cambio}\\ u=1-x^2}}}} = \int \frac{-\dfrac{1}{2}\ du}{\sqrt{u}} = \overbrace{\int -\frac{1}{2}}^{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{2}\overbrace{\underbrace{\int u^{-1/2}\ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=-\frac{1}{2}}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\ u^{1/2} + C = -\ \sqrt{u} + C = -\ \sqrt{1-x^2} + C.$$

Luego.

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\ \sqrt{1-x^2} + C.$$

★

Ejemplo 50 : *Integre* $\displaystyle\int x\ \sqrt{x+3}\ dx$.

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u = x+3 \qquad \text{de aquí} \qquad x = u-3 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla. Entonces, la integral queda

$$\int \overbrace{x}^{\substack{\text{Cambio}\\ x=u-3}}\ \sqrt{\underbrace{x+3}_{\substack{\text{Cambio}\\ u=x+3}}}\ \overbrace{dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ dx=du}} = \int (u-3)\sqrt{u}\ du = \overbrace{\int \left(u^{3/2}-3u^{1/2}\right)\ du}^{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}} = \int u^{3/2}\ du - \underbrace{\int 3u^{1/2}\ du}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}$$

$$= \overbrace{\underbrace{\int u^{3/2}\,du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=\frac{3}{2}}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} - 3\overbrace{\underbrace{\int u^{1/2}\,du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=\frac{1}{2}}}}^{} = \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} - 3\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}\,u^{5/2} - 2u^{3/2} + C.$$

Luego,

$$\int x\,\sqrt{x+3}\,dx = \frac{2}{5}\,(x+3)^{5/2} - 2\,(x+3)^{3/2} + C.$$

★

Ejemplo 51 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{\tan x\ \operatorname{sen} x}\ dx.$

Solución : Puesto que, $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces

$$\int \sqrt{\tan x\ \operatorname{sen} x}\ dx = \int \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\ \operatorname{sen} x}\ dx = \int \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}\ dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\ dx,$$

se observa que la derivada de la función $y = \cos x$ está presente en el integrando, salvo una constante, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \operatorname{sen} x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\,du = \operatorname{sen} x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt{\tan x\ \operatorname{sen} x}\ dx = \int \frac{\overbrace{\operatorname{sen} x\ dx}^{\boxed{\text{Diferencial } -\,du = \operatorname{sen} x\ dx}}}{\sqrt{\underbrace{\cos x}_{\boxed{\text{Cambio } u=\cos x}}}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \overbrace{\underbrace{\int u^{-1/2}\ du}_{\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=-\frac{1}{2}}}}^{\boxed{\text{Integral de una potencia. Integral de tabla.}}} = \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{\cos x} + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt{\tan x\ \operatorname{sen} x}\ dx = 2\sqrt{\cos x} + C$$

★

Ejemplo 52 *: Integre* $\displaystyle\int \cot^7 x\ \csc^2 x\ dx.$

Solución : Se observa que la derivada de la función $y = \cot x$ está presente en el integrando, salvo una constante, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \cot x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \csc^2 x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\,du = \csc^2 x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cot^7 x \ \csc^2 x \ dx = \int \Big(\overbrace{\cot x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\cot x}}\Big)^7 \overbrace{\csc^2 x \ dx}^{\substack{\text{Diferencial}\\ -\,du=\csc^2 x\ dx}} = \int u^7 \ \underbrace{(-}_{\substack{\text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}} du) = -\overbrace{\underbrace{\int u^7 \ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=7}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} = -\ \frac{u^8}{8} + C = -\ \frac{\cot^8 x}{8} + C.$$

Luego,

$$\int \cot^7 x \ \csc^2 x \ dx = -\ \frac{\cot^8 x}{8} + C.$$

★

Ejemplo 53 *: Integre* $\displaystyle\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx.$

Solución : Se observa que la derivada de la función $y = \tan x$ está presente en el integrando, eso sugiere el cambio de variable

$$u = \tan x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \sec^2 x \ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx = \int \Big(\overbrace{\tan x}^{\substack{\text{Cambio}\\ u=\tan x}}\Big)^5 \overbrace{\underline{\sec^2 x \ dx}}^{\substack{\text{Diferencial}\\ du=\sec^2 x\ dx}} = \overbrace{\underbrace{\int u^5 \ du}_{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=5}}^{\substack{\text{Integral de una potencia.}\\ \text{Integral de tabla.}}} = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\tan^6 x}{6} + C.$$

Luego,

$$\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx = \frac{\tan^6 x}{6} + C.$$

★

Ejemplo 54 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x^2 \ dx}{\left(x - 2\sqrt{x}\right)^4}.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u^2 = x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2u \ du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{x^2\ dx}{\left(x-2\sqrt{x}\right)^4} = \int \frac{\left(u^2\right)^2\ 2u\ du}{\left(u^2-2u\right)^4} = \int \frac{u^4\ 2u\ du}{\left(u\left(u-2\right)\right)^4} = \int \frac{u^4\ 2u\ du}{u^4\left(u-2\right)^4} = 2\int \frac{u\ du}{\left(u-2\right)^4},$$

Para resolver la nueva integral se propone el siguiente cambio de variable

$$p = u-2 \qquad \text{de aquí} \qquad u = p+2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dp,$$

con este nuevo cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla. Así,

$$\int \frac{u\ du}{\left(u-2\right)^4} = \int \frac{p+2}{p^4}\ dp = \int \left(\frac{p}{p^4}+\frac{2}{p^4}\right)\ dp = \int \frac{p}{p^4}\ dp + \int \frac{2}{p^4}\ dp = \int p^{-3}\ dp + 2\int p^{-4}\ dp$$

$$= \frac{p^{-2}}{-2} + 2\ \frac{p^{-3}}{-3} = -\ \frac{1}{2p^2} -\ \frac{2}{3p^3} + C = -\ \frac{1}{2\left(u-2\right)^2} -\ \frac{2}{3\left(u-2\right)^3} + C_1,$$

ya que, $p = u-2$.

Entonces

$$2\int \frac{u\ du}{\left(u-2\right)^4} = 2\left(-\ \frac{1}{2\left(u-2\right)^2} -\ \frac{2}{3\left(u-2\right)^3} + C_1\right) = -\ \frac{1}{\left(u-2\right)^2} -\ \frac{4}{3\left(u-2\right)^3} + C$$

como $u = \sqrt{x}$, y

$$\int \frac{x^2\ dx}{\left(x-2\sqrt{x}\right)^4} = 2\int \frac{u\ du}{\left(u-2\right)^4},$$

se tiene

$$\int \frac{x^2\ dx}{\left(x-2\sqrt{x}\right)^4} = -\ \frac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2} -\ \frac{4}{3\left(\sqrt{x}-2\right)^3} + C.$$

★

Ejemplo 55 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\ dx.$

Solución : Por la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \text{se tiene que,} \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$$

y el integrando se escribe como

$$f\left(x\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{2-\left(1-\cos^2 x\right)} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\left(\cos x\right)^2},$$

mientras que, la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\ dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\left(\cos x\right)^2}\ dx,$$

se propone el cambio de variable

$$u = \cos x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\ \operatorname{sen} x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\ du = \operatorname{sen} x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+(\cos x)^2}\,dx = \int \frac{-\,du}{1+u^2} = -\ \arctan u + C = -\ \arctan(\cos x) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\ \arctan(\cos x) + C.$$

★

Ejemplo 56 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx$*.*

Solución : Se tiene

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx = \int \sqrt{\frac{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{1+\operatorname{sen} x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen} x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x}}\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}.$$

Se propone el cambio de variable

$$u = 1+\operatorname{sen} x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \cos x\,dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral nos queda,

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}\,du = \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + C.$$

Luego,

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx = 2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + C.$$

★

Ejemplo 57 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$*.*

Solución : Es conocido que

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$

así,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx,$$

donde, la primera integral del lado derecho de la igualdad es inmediata

$$\int dx = x + C_1,$$

mientras que, la segunda integral del lado derecho de la igualdad la resolvemos al proponer el cambio de variable

$$u = 2x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \cos(2x)\ dx = \int \cos u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C_2.$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right] + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C.$$

★

Ejemplo 58 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2\right)^2}\ dx.$

Solución : Es conocido que

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x,$$

así, la integral se expresa como

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2\right)^2}\ dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x\ \cos x + \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2\right)^2}\ dx.$$

Se propone el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = (2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x)\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2\right)^2}\ dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x\ \cos x + \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2\right)^2}\ dx = \int \frac{du}{u^2} = -\ \frac{1}{u} + C = -\ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2\right)^2}\ dx = -\ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2} + C.$$

★

Ejemplo 59 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{(x+1)\ dx}{\sqrt{3x} + \sqrt{x-2}}.$

Solución : Aplicando la conjugada se obtiene

$$\int \frac{(x+1)\ dx}{\sqrt{3x} + \sqrt{x-2}} = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{3x} + \sqrt{x-2}}\ \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}}\ dx = \int \frac{(x+1)\left(\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{3x}\right)^2 - \left(\sqrt{x-2}\right)^2}\ dx$$

$$= \int \frac{(x+1)\left(\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}\right)}{3x - (x-2)}\ dx = \int \frac{(x+1)\left(\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}\right)}{2x+2}\ dx$$

$$= \int \frac{(x+1)\left(\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}\right)}{2(x+1)}\ dx = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \sqrt{3x}\ dx - \int \sqrt{x-2}\ dx\right),$$

donde, para obtener la familia de primitivas de la función $f(x) = \sqrt{3x}$ se propone el cambio de variable

$$u = 3x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 3\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{3} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt{3x}\ dx = \int \sqrt{u}\ \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\ du = \frac{1}{3}\ \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C_1 = \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ u^{3/2} + C_1 = \frac{2}{9}\ (3x)^{3/2} + C_1,$$

por lo tanto,

$$\int \sqrt{3x}\ dx = \frac{2}{9}\ (3x)^{3/2} + C_1.$$

Por otro lado, para obtener la familia de primitivas de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ se propone el cambio de variable

$$z = x - 2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \sqrt{x-2}\ dx = \int \sqrt{u}\ du = \int u^{1/2}\ du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C_2 = \frac{2}{3}\ u^{3/2} + C_2 = \frac{2}{3}\ (x-2)^{3/2} + C_2,$$

es decir,

$$\int \sqrt{x-2}\ dx = \frac{2}{3}\ (x-2)^{3/2} + C_2.$$

Así,

$$\int \frac{(x+1)\ dx}{\sqrt{3x} + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{2}\left(\int \sqrt{3x}\ dx - \int \sqrt{x-2}\ dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\ (3x)^{3/2} + C_1 - \frac{2}{3}\ (x-2)^{3/2} - C_2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\ (3x)^{3/2} - \frac{1}{3}\ (x-2)^{3/2} + C,$$

donde, $C = \dfrac{C_1 - C_2}{2}$.

Luego,

$$\int \frac{(x+1)\ dx}{\sqrt{3x} + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{9}\ (3x)^{3/2} - \frac{1}{3}\ (x-2)^{3/2} + C.$$

★

Ejemplo 60 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{\tan^3(1-2t)}{\cos(1-2t)}\ dt.$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u = 1 - 2t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -2\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{du}{2} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\tan^3(1-2t)}{\cos(1-2t)}\, dt = \int \frac{\tan^3 u}{\cos u} \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{\tan^3 u}{\cos u}\, du,$$

para obtener la familia de primitiva de la función $f(u) = \dfrac{\tan^3 u}{\cos u}$ se escribe la integral como

$$\int \frac{\tan^3 u}{\cos u}\, du = \int \tan^3 u \sec u\, du = \int \tan^2 u \tan u \sec u\, du = \int \left(\sec^2 u - 1\right) \tan u \sec u\, du$$

y se propone el nuevo cambio de variable

$$z = \sec u \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = \tan u \sec u\, dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\tan^3 u}{\cos u}\, du = \int \left(\sec^2 u - 1\right) \tan u \sec u\, du = \int \left(z^2 - 1\right) dz = \frac{z^3}{3} - z + C_1 = \frac{1}{3}\sec^3 u - \sec u + C_1,$$

por lo tanto,

$$\int \frac{\tan^3 u}{\cos u}\, du = \frac{1}{3}\sec^3 u - \sec u + C_1,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(u) = \dfrac{1}{3}\sec^3 u - \sec u + C_1$, en términos de la variable de integración t, puesto que

$$u = 1 - 2t,$$

se tiene que,

$$\int \frac{\tan^3(1-2t)}{\cos(1-2t)}\, dt = -\frac{1}{2}\int \frac{\tan^3 u}{\cos u}\, du = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sec^3 u - \sec u + C_1\right) = -\frac{1}{6}\sec^3(1-2t) + \frac{1}{2}\sec(1-2t) + C,$$

donde $C = -\dfrac{C_1}{2}$.

Luego,

$$\int \frac{\tan^3(1-2t)}{\cos(1-2t)}\, dt = -\frac{1}{6}\sec^3(1-2t) + \frac{1}{2}\sec(1-2t) + C.$$

★

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales utilizando el método de la u-sustitución

1. $\int (x+4)^2\, dx$
2. $\int (a+bt)^2\, dt$
3. $\int (3-t)^2\, dt$
4. $\int (3-2t)^2\, dt$
5. $\int (a-bt)^2\, da$
6. $\int (ax+b)^2\, dx$
7. $\int (x+2)^3\, dx$
8. $\int (x+4)^3\, dx$
9. $\int (a+bt)^3\, dt$
10. $\int (3-2t)^3\, dt$
11. $\int (a-bt)^4\, dt$
12. $\int (3x+5)^6\, dx$
13. $\int (x-5)^7\, dx$
14. $\int (9-2t)^8\, dt$
15. $\int (a+bx)^n\, dx$
16. $\int (a-bx)^n\, dx$
17. $\int (a^m + b^r x)^n\, dx$
18. $\int (a^m - b^r x)^n\, dx$
19. $\int (at)^{1/n}\, dt$
20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{5x}}$

21. $\int \left(at+\frac{n}{a}\right)^{1/n} dt$ 22. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5x-3}}$ 23. $\int \frac{dx}{(x+1)^5}$ 24. $\int \frac{dx}{(3x+4)^3}$ 25. $\int \frac{dx}{(2-x)^{10}}$

26. $\int \frac{dx}{(a-bx)^{\pi}}$ 27. $\int \frac{dx}{(a-bx)^n}$ 28. $\int \sqrt[3]{9x}\, dx$ 29. $\int \sqrt{2pt}\, dt$ 30. $\int \sqrt[4]{2p^3x}\, dx$

31. $\int \frac{dp}{\sqrt[5]{2pt^2}}$ 32. $\int \sqrt{a+bx}\, dx$ 33. $\int \sqrt{a-bx}\, dx$ 34. $\int \sqrt[3]{a+bx}\, dx$ 35. $\int \sqrt[3]{a-bx}\, dx$

36. $\int \sqrt[3]{a-\frac{x}{b}}\, dx$ 37. $\int \sqrt[n]{a+bx}\, dx$ 38. $\int \sqrt[n]{a-bx}\, dx$ 39. $\int \sqrt[n]{(a+bx)^m}\, dx$

40. $\int \sqrt[n]{(a-bt)^m}\, dt$ 41. $\int \sqrt[n]{\left(a+\frac{x}{b}\right)^m}\, dx$ 42. $\int \sqrt[n]{\left(a-\frac{x}{b}\right)^m}\, dx$ 43. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

44. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{7x+1}}$ 45. $\int \frac{dx}{\sqrt[m]{ax+m}}$ 46. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{b-ax}}$ 47. $\int \frac{dx}{\sqrt{b-a^2x}}$ 48. $\int \cos(6t)\, dt$

49. $\int \operatorname{sen}(3t)\, dt$ 50. $\int \cos(-x)\, dx$ 51. $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ 52. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ 53. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt$

54. $\int \operatorname{sen}(\pi-t)\, dt$ 55. $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx$ 56. $\int \operatorname{sen}(1-2t)\, dt$ 57. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T}-\phi_0\right) dx$

58. $\int \cos(6x)\, dx$ 59. $\int \cos(at)\, dt$ 60. $\int \cos\left(\frac{\pi\omega t}{2}+\alpha\right) dt$ 61. $\int \cos\left(\frac{\pi\omega t}{2}+\alpha\right) d\alpha$

62. $\int \operatorname{sen}(t-x)\, dx$ 63. $\int \operatorname{sen}(t-x)\, dt$ 64. $\int \cos(t-x)\, dx$ 65. $\int \cos(t-x)\, dt$

66. $\int \sec^2(t-x)\, dx$ 67. $\int \csc^2(t-x)\, dx$ 68. $\int \sec^2(t-x)\, dt$ 69. $\int \csc^2(t-x)\, dt$

70. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 71. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[5]{1-x^2}}$ 72. $\int \left(\sqrt{3}\, x-\pi^5\right)^5 dx$ 73. $\int \left(\sqrt{3x}-\pi^5\right)^5 dx$

74. $\int \frac{dx}{4+x^2}$ 75. $\int \frac{dx}{6+x^2}$ 76. $\int \frac{dx}{3+4x^2}$ 77. $\int \frac{dx}{5+3x^2}$ 78. $\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos x\, dx$

79. $\int \operatorname{sen}^3 x\, \cos x\, dx$ 80. $\int \cos^{-2/3}(bx)\, \operatorname{sen}(bx)\, dx$ 81. $\int \operatorname{sen}^{-1/5}(ax)\, \cos(ax)\, dx$

82. $\int \operatorname{sen}^6 x\, \cos x\, dx$ 83. $\int \sqrt[3]{\cos^2 t}\, \operatorname{sen} t\, dt$ 84. $\int \frac{\operatorname{sen}^5(6x)}{\sec(6x)}\, dx$ 85. $\int \tan^6 x \sec^2 x\, dx$

86. $\int \tan^{5/2} x\, \sec^2 x\, dx$ 87. $\int \tan^3(3x)\, \sec^2(3x)\, dx$ 88. $\int \tan^{2/3}(ax)\, \sec^2(ax)\, dx$

89. $\int \cot x\, \csc^2 x\, dx$ 90. $\int \cot^5 x\, \csc^2 x\, dx$ 91. $\int \sqrt[4]{\cot^3(1-x)}\, \csc^2(1-x)\, dx$

92. $\int \cot^3(2x)\, \csc^2(2x)\, dx$ 93. $\int \frac{\csc^2(\sqrt{x})\, \sqrt{\cot(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\, dx$ 94. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 95. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$

96. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ 97. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}}$ 98. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 99. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 100. $\int \operatorname{sen}(1-2t)\, dt$

101. $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$ 102. $\int \cos^2 t\ dt$ 103. $\int \frac{x\ dx}{1+x^4}$ 104. $\int x\ \sqrt{4-x}\ dx$ 105. $\int \frac{x\ dx}{(x+1)^4}$

106. $\int \frac{\sqrt{\tan t}}{1-\operatorname{sen}^2 t}\ dt$ 107. $\int \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{\sqrt{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z}}\ dz$ 108. $\int \operatorname{sen}^2(3x)\ dx$ 109. $\int \cos^2(3x)\ dx$

110. $\int \sec^2(3x)\ dx$ 111. $\int \tan^2(3x)\ dx$ 112. $\int \tan^2(3x)\ \sec^2(3x)\ dx$ 113. $\int \frac{x^3\ dx}{(x^4+1)^5}$

114. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ 115. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-4}}$ 116. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\ \operatorname{sen}(2x)\,dx$ 117. $\int \frac{dx}{\pi+x^2}$

118. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\ dx}{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}$ 119. $\int \cos^3(2t)\ dt$ 120. $\int t^2\ \sqrt{5t-2}\ dt$ 121. $\int \frac{\cos^3 x\ dx}{(3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x + 5)^2}$

122. $\int \frac{\cot^3 t}{\operatorname{sen}^2 t}\ dt$ 123. $\int \frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}\ dt$ 124. $\int x^2\ \sqrt{6-x}\ dx$ 125. $\int \operatorname{sen}^3 x\ dx$ 126. $\int \frac{dx}{7+x^2}$

127. $\int \frac{2t^2+t}{(t+1)^5}\ dt$ 128. $\int t\ \sqrt{2t-1}\ dt$ 129. $\int \operatorname{sen}(2\cos x)\operatorname{sen} x\ dx$ 130. $\int \frac{dx}{\left(3-x^{1/3}\right)^5}$

131. $\int \frac{4t^2+3t}{(t+1)^5}\ dt$ 132. $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2-\sqrt[3]{2x}}}\ dx$ 133. $\int \frac{x^2-3}{\sqrt[3]{1-x}}\ dx$ 134. $\int x^2\ \sqrt{3-5x}\ dx$

135. $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ 136. $\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 137. $\int \frac{\operatorname{sen}(4t-1)\ dt}{1-\operatorname{sen}^2(4t-1)}$ 138. $\int (\cos(ax)+\operatorname{sen}(ax))^2\,dx$

139. $\int \frac{x^5\ dx}{\sqrt{x^2-3}}$ 140. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 141. $\int \frac{x^7\ dx}{\sqrt{x^4-1}}$ 142. $\int \operatorname{sen} x \cos x\ \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} dx$

143. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1+2x}}$ 144. $\int \sqrt{\tan x \operatorname{sen} x}\ dx$ 145. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ 146. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec x + 1}}\ dx$

147. $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{1-x^6}}$ 148. $\int \frac{\sec^2\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1}}\ dt$ 149. $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}+3)}}$ 150. $\int \frac{3-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\ dx$

151. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}} dt$ 152. $\int \frac{x^2\ dx}{(x-2\sqrt{x})^4}$ 153. $\int \frac{x^3-3x^2}{\sqrt[3]{4-x}}\ dx$ 154. $\int (\sec(ax)+\tan(ax))^2\,dx$

155. $\int \frac{\operatorname{sen}^2(\arctan x)}{x^2+1}\ dx$ 156. $\int \frac{\cos x\ dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ 157. $\int \frac{1+\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}\ dx$ 158. $\int \frac{\tan^3(1-2t)}{\cos(1-2t)}\ dt$

159. $\int \frac{x^5\ dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 160. $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{25-x^6}}$ 161. $\int \operatorname{sen}^4(at)\ dt$ 162. $\int \cos\left(\frac{x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right)\ dx$

163. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^2-x^4}}$ 164. $\int \frac{\sqrt[3]{2-5\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$ 165. $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\ dx}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}$ 166. $\int \frac{(x+1)\ dx}{\sqrt{3x}+\sqrt{x-2}}$

167. $\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\cos^2 x + 1}$ 168. $\int \frac{\cot^5(2-t)}{\operatorname{sen}(2-t)}\ dt$ 169. $\int \frac{x+3}{(x+2)^3}\ dx$ 170. $\int \frac{x+1}{(x-2)^4}\ dx$

171. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\operatorname{arcsen} x)^3}}$ 172. $\int \frac{\operatorname{sen}(4x)\ dx}{\sqrt{\cos(4x)+4}}$ 173. $\int \frac{\operatorname{sen}^3(2+\operatorname{arcsen}(1-t))}{\sqrt{2t-t^2}}\ dt$

174. $\displaystyle\int \frac{x^{-1/2}\ \tan^3\left(\sqrt{x}\right)}{1-\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{x}\right)}\,dx$ 175. $\displaystyle\int \frac{\tan^3\left(x^{-1}\right)}{\sec\left(x^{-1}\right)}\,dx$ 176. $\displaystyle\int \frac{x\ \sqrt{x-1}}{x+3}\,dx$ 177. $\displaystyle\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

178. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\ dx}{\sqrt[4]{2-\operatorname{sen} x}}$ 179. $\displaystyle\int \frac{\cot(ax)\ dx}{\ln(\operatorname{sen}(ax))}$ 180. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$ 181. $\displaystyle\int t^2\ \sqrt{3t+2}\ dt$

182. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ 183. $\displaystyle\int \cos^2(\operatorname{sen} x)\ \cos x\ dx$ 184. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^{3/2}+2\sqrt{x}}\,dx$ 185. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 t\ dt$

186. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^5\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ 187. $\displaystyle\int \cos^5(2t)\,dt$ 188. $\displaystyle\int \sqrt[3]{4+5\cos^2 x}\ \operatorname{sen}(2x)\ dx$ 189. $\displaystyle\int \frac{x^4\ dx}{x^2+3}$

190. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{x+3}$ 191. $\displaystyle\int \frac{x^6\ dx}{a^2+x^2}$ 192. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\ dx}{\left(3\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^3 x+5\right)^2}$ 193. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{4\cos^2 x-4\cos x+17}$

194. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}\left(1-x^2\right)\ dx$ 195. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$ 196. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$ 197. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2+3}}$

198. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))\ \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\sec x\ \sec^3(\cos(\operatorname{sen} x))}\,dx$ 199. $\displaystyle\int \tan x\ \sqrt{\sec x}\ dx$ 200. $\displaystyle\int \tan x\ \sqrt[3]{\sec x}\ dx$

201. $\displaystyle\int \tan x\ \sqrt[n]{\sec x}\ dx$ 202. $\displaystyle\int \cot x\ \sqrt{\csc x}\ dx$ 203. $\displaystyle\int \cot x\ \sqrt[5]{\csc x}\ dx$ 204. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[m]{\csc x}}{\tan x}\,dx$

205. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$ 206. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ \sqrt[3]{3-\cos x}\ dx$ 207. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ 208. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{x^2+7}\,dx$

209. $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\ dx$ 210. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t\ dt}{\sqrt{1-\tan^2 t}}$ 211. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} t}{1-t^2}}\,dt$ 212. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} t+t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

213. $\displaystyle\int x^8\ \sqrt[4]{a+bx^3}\ dx$ 214. $\displaystyle\int \tan^2(\omega t-\pi)\,dt$ 215. $\displaystyle\int x\tan^2\left(2x^2+3\right)dx$ 216. $\displaystyle\int \frac{5x\ dx}{\pi^2+x^4}$

217. $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}^2\left(3x^2\right)\ dx$ 218. $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}\left(\pi-x^2\right)\ dx$ 219. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ 220. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi-x^2}}$

221. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1+\operatorname{sen}(2x)}dx$ 222. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\ \sqrt[4]{\pi-\cos(2x)}\ dx$ 223. $\displaystyle\int \frac{x^2-\sqrt{\arctan(2x)}}{1+4x^2}\,dx$

224. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(5-x^{1/3}\right)^5}$ 225. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(3-x^{1/3}\right)^4}$ 226. $\displaystyle\int x\ \sqrt{x+3}\ dx$ 227. $\displaystyle\int \cos(3x+\pi)\ dx$

228. $\displaystyle\int \frac{a\cos x\ dx}{\sqrt{a-\operatorname{sen}^2 x}}$ 229. $\displaystyle\int t^2\ \sqrt{4-t}\ dt$ 230. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\sqrt{\cos x-\cos^2 x}}$

Respuestas: Ejercicios

1. $\frac{1}{3}(x+4)^3+C$; 2. $\frac{1}{3b}(a+bt)^3+C$; 3. $-\frac{1}{3}(3-t)^3+C$; 4. $-\frac{1}{6}(3-2t)^3+C$; 5. $\frac{1}{3}(a-bt)^3+C$;

6. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3+C$; 7. $\frac{1}{4}(x+2)^4+C$; 8. $\frac{1}{4}(x+4)^4+C$; 9. $\frac{1}{4b}(a+bt)^4+C$; 10. $-\frac{1}{8}(3-2t)^4+C$;

11. $-\frac{1}{5b}(a-bt)^5+C$; 12. $\frac{1}{21}(3x+5)^7+C$; 13. $\frac{1}{8}(x-5)^8+C$; 14. $-\frac{1}{18}(9-2t)^9+C$;

15. $\frac{1}{(n+1)b}(a+bx)^{n+1}+C$; 16. $-\frac{1}{(n+1)b}(a-bx)^{n+1}+C$; 17. $\frac{1}{(n+1)b^r}(a^m+b^rx)^{n+1}+C$;

18. $-\frac{1}{(n+1)b^r}(a^m-b^rx)^{n+1}+C$; 19. $\frac{n}{a(n+1)}(at)^{(n+1)/n}+C$; 20. $\frac{4}{15}(5x)^{3/4}+C$;

21. $\frac{n}{a(n+1)}\left(at+\frac{n}{a}\right)^{(n+1)/n}+C$; 22. $\frac{4}{15}(5x-3)^{3/4}+C$; 23. $-\frac{1}{4(x+1)^4}+C$; 24. $-\frac{1}{6(3x+4)^2}+C$;

25. $\frac{1}{9(2-x)^9}+C$; 26. $\frac{1}{(\pi-1)b}(a-bx)^{1-\pi}+C$; 27. $\frac{1}{(n-1)b}(a-bx)^{1-n}+C$; 28. $\frac{1}{12}(9x)^{4/3}+C$;

29. $\frac{1}{3p}(2pt)^{3/2}+C$; 30. $\frac{2}{5p^3}\left(2p^3x\right)^{5/4}+C$; 31. $\frac{5}{8t^2}\left(2pt^2\right)^{4/5}+C$; 32. $\frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2}+C$;

33. $-\frac{2}{3b}(a-bx)^{3/2}+C$; 34. $\frac{3}{4b}(a+bx)^{4/3}+C$; 35. $-\frac{3}{4b}(a-bx)^{4/3}+C$; 36. $-\frac{3b}{4}\left(a-\frac{x}{b}\right)^{4/3}+C$;

37. $\frac{n}{(n+1)b}(a+bx)^{(1+n)/n}+C$; 38. $-\frac{n}{(n+1)b}(a-bx)^{(1+n)/n}+C$; 39. $\frac{n}{(m+n)b}(a+bx)^{(m+n)/n}+C$;

40. $-\frac{n}{(m+n)b}(a-bt)^{(m+n)/n}+C$; 41. $\frac{nb}{m+n}\left(a+\frac{x}{b}\right)^{(m+n)/n}+C$; 42. $-\frac{nb}{m+n}\left(a-\frac{x}{b}\right)^{(m+n)/n}+C$;

43. $\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C$; 44. $\frac{1}{6}(7x+1)^{6/7}+C$; 45. $\frac{m}{(m-1)a}(ax+m)^{(m-1)/m}+C$;

46. $\frac{n}{(1-n)a}(b-ax)^{(n-1)/n}+C$; 47. $-\frac{2}{a^2}\sqrt{b-a^2x}+C$; 48. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}(6t)+C$; 49. $-\frac{1}{3}\cos(3t)+C$;

50. $\operatorname{sen}x+C$; 51. $2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 52. $-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+C$; 53. $-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)+C$; 54. $\cos(\pi-t)+C$;

55. $-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+C$; 56. $\frac{1}{2}\cos(1-2t)+C$; 57. $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{T}-\phi_0\right)+C$; 58. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}(6x)+C$;

59. $\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at)+C$; 60. $\frac{2}{\pi\omega}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\omega t}{2}+\alpha\right)+C$; 61. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t\omega}{2}+\alpha\right)+C$; 62. $\cos(t-x)+C$;

63. $-\cos(t-x)+C$; 64. $-\operatorname{sen}(t-x)+C$; 65. $\operatorname{sen}(t-x)+C$; 66. $-\tan(t-x)+C$; 67. $\cot(t-x)+C$;

68. $\tan(t-x)+C$; 69. $-\cot(t-x)+C$; 70. $-\sqrt{1-x^2}+C$; 71. $-\frac{5}{8}\left(1-x^2\right)^{4/5}+C$; 72. $\frac{\sqrt{3}}{18}\left(\sqrt{3}\,x-\pi^5\right)^6+C$;

73. $\left(\sqrt{3x}-\pi^5\right)^6\left(\frac{2}{21}\sqrt{3x}+\frac{1}{63}\pi^5\right)+C$; 74. $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 75. $\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}x}{6}\right)+C$; 76. $\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)+C$;

77. $\frac{\sqrt{15}}{15}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}x\right)+C$; 78. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x+C$; 79. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4x+C$; 80. $-\frac{3}{b}\cos^{1/3}(bx)+C$;

81. $\frac{5}{4a}\operatorname{sen}^{4/5}(ax)+C$; 82. $\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7x+C$; 83. $-\frac{3}{5}\cos^{5/3}t+C$; 84. $\frac{1}{36}\operatorname{sen}^6(6x)+C$; 85. $\frac{1}{7}\tan^7x+C$;

86. $\frac{2}{7}\tan^{7/2}x+C$; 87. $\frac{1}{12}\tan^4(3x)+C$; 88. $\frac{3}{5a}\tan^{5/3}(ax)+C$; 89. $-\frac{1}{2}\cot x+C$; 90. $-\frac{1}{6}\cot^6x+C$;

91. $\frac{4}{7}\cot^{7/4}(1-x)+C$; 92. $-\frac{1}{8}\cot^4(2x)+C$; 93. $\frac{4}{3}\cot^{3/2}\left(\sqrt{x}\right)+C$; 94. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)+C$;

95. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right)+C$; 96. $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C$; 97. $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)+C$; 98. $\sqrt{x^2+1}+C$;

99. $\frac{3}{4}\left(x^2+1\right)^{2/3}+C$; 100. $\frac{1}{2}\cos(1-2t)+C$; 101. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+C$; 102. $\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)+C$;

103. $\frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right)+C$; 104. $\frac{2}{5}(4-x)^{5/2}-\frac{8}{3}(4-x)^{3/2}+C$; 105. $\frac{1}{3}(x+1)^{-3}-\frac{1}{2}(x+1)^{-2}+C$;

106. $\frac{2}{3}\tan^{3/2}t+C$; 107. $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos(2z)}+C$; 108. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)+C$; 109. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)+C$;

110. $\frac{1}{3}\tan(3x)+C$; 111. $\frac{1}{3}\tan(3x)-x+C$; 112. $\frac{1}{9}\tan^3(3x)+C$; 113. $-\frac{1}{16\left(x^4+1\right)^4}+C$;

114. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$; 115. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right)+C$; 116. $-\frac{2}{9}\left(1+3\cos^2x\right)^{3/2}+C$; 117. $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\arctan\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}x\right)+C$;

118. $48\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}-24\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^{3/2}+\frac{36}{5}\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^{5/2}-\frac{6}{7}\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^{7/2}+C$; 119. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2t)+C$;

120. $\frac{8}{375}(5t-2)^{3/2}+\frac{8}{625}(5t-2)^{5/2}+\frac{2}{875}(5t-2)^{7/2}+C$; 121. $\frac{1}{3\left(\operatorname{sen}^3x-3\operatorname{sen}x-5\right)}+C$; 122. $-\frac{1}{4}\cot^4t+C$;

123. $\frac{1}{4}\tan^4t+C$; 124. $\frac{2}{35}\left(5x^3-6x^2-48x-576\right)\sqrt{6-x}+C$; 125. $\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$;

126. $\frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}x\right)+C$; 127. $\frac{1}{(t+1)^3}-\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{4(t+1)^4}+C$; 128. $\frac{1}{6}(2t-1)^{3/2}+\frac{1}{10}(2t-1)^{5/2}+C$;

129. $\frac{1}{2}\cos(2\cos x)+C$; 130. $\frac{6}{\left(3-x^{1/3}\right)^3}-\frac{3}{2\left(3-x^{1/3}\right)^2}-\frac{27}{4\left(3-x^{1/3}\right)^4}+C$; 131. $\frac{5}{3(t+1)^3}-\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{1}{4(t+1)^4}+C$;

132. $12\left(2-\sqrt[3]{2x}\right)^{3/2}-24\sqrt{2-\sqrt[3]{2x}}-\frac{18}{5}\left(2-\sqrt[3]{2x}\right)^{5/2}+\frac{3}{7}\left(2-\sqrt[3]{2x}\right)^{7/2}+C$; 133. $(1-x)^{2/3}\left(\frac{153}{40}-\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{20}x\right)+C$;

134. $\frac{12}{625}(3-5x)^{5/2}-\frac{6}{125}(3-5x)^{3/2}-\frac{2}{875}(3-5x)^{7/2}+C$; 135. $\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)^{2/3}+C$; 136. $\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}+a^2x^2+C$;

137. $\frac{1}{4}\sec(4t-1)+C$; 138. $x-\frac{1}{2a}\cos(2ax)+C$; 139. $9\sqrt{x^2-3}+2\left(x^2-3\right)^{3/2}+\frac{1}{5}\left(x^2-3\right)^{5/2}+C$;

140. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(x^2\right)+C$; 141. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{6}\left(x^4-1\right)^{3/2}+C$; 142. $\frac{1}{3}\left(1+\operatorname{sen}^2x\right)^{3/2}+C$;

143. $\frac{1}{6}(1+2x)^{3/2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+2x}+C$; 144. $-2\sqrt{\cos x}+C$; 145. $\operatorname{arcsen}(x-2)+C$; 146. $2\sqrt{\sec x+1}+C$;

147. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\left(x^3\right)+C$; 148. $2\tan\sqrt{t-1}+C$; 149. $\frac{54}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+3}}+27\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}-\frac{18}{5}\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+3\right)^5}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+3\right)^8}+C$;

150. $\frac{3}{2}\arctan(2x)-\frac{1}{3}\arctan^{3/2}(2x)+C$; 151. $2\cos\sqrt{1-t}+C$; 152. $-\frac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-\frac{4}{3\left(\sqrt{x}-2\right)^3}+C$;

153. $\frac{72}{5}(4-x)^{5/3}-24(4-x)^{2/3}-\frac{27}{8}(4-x)^{8/3}+\frac{3}{11}(4-x)^{11/3}+C$; 154. $\frac{2}{a}\tan(ax)+\frac{2}{a}\sec(ax)-x+C$;

155. $\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\arctan x)+C$; 156. $\arctan(\operatorname{sen}x)+C$; 157. $-\frac{1}{2}\cot(2x)-\frac{1}{2}\csc(2x)+C$;

158. $-\frac{1}{6}\sec^3(1-2t)+\frac{1}{2}\sec(1-2t)+C$; 159. $\frac{3}{4}\left(x^2+1\right)^{2/3}-\frac{3}{5}\left(x^2+1\right)^{5/3}+\frac{3}{16}\left(x^2+1\right)^{8/3}+C$;

160. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{5}x^3\right)+C$; 161. $\frac{3}{8}t-\frac{1}{4a}\operatorname{sen}(2at)+\frac{1}{32a}\operatorname{sen}(4at)+C$; 162. $\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{a}\right)+C$;

163. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C$; 164. $-\frac{3}{10}\left(2-5\sqrt{x}\right)^{4/3}+C$; 165. $\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2x}+C$; 166. $\frac{1}{9}(3x)^{3/2}-\frac{1}{3}(x-2)^{3/2}+C$;

167. $-\arctan(\cos x)+C$; 168. $\csc(2-t)-\frac{2}{3}\csc^3(2-t)+\frac{1}{5}\csc^5(2-t)+C$; 169. $\frac{-2x-5}{2(x+2)^2}+C$; 170. $\frac{-x}{2(x-2)^3}+C$;

171. $\frac{2}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen}x}}+C$; 172. $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos(4x)+4}+C$; 173. $\frac{1}{3}\cos^3(2+\operatorname{arcsen}(1-t))-\cos(2+\operatorname{arcsen}(1-t))+C$;

174. $\frac{1}{2}\tan^4\left(\sqrt{x}\right)+C$; 175. $-\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+C$; 176. $\frac{2}{3}(x-1)^3-6x+12\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$;

177. $\frac{2}{3}x^{3/2}-x+C$; 178. $\frac{8}{7}(2-\operatorname{sen}x)^{7/4}-\frac{16}{3}(2-\operatorname{sen}x)^{3/4}+C$; 179. $\frac{1}{a}\ln|\ln(\operatorname{sen}(ax))|+C$;

180. $\frac{1}{8}\arctan\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+C$; 181. $\frac{8}{81}(3t+2)^{3/2}-\frac{8}{135}(3t+2)^{5/2}+\frac{2}{189}(3t+2)^{7/2}+C$; 182. $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$;

183. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}x)+C$; 184. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2x}}{2}\right)+C$; 185. $\frac{2}{3}\cos^3 t-\cos t-\frac{1}{5}\cos^5 t+C$;

186. $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+\frac{4}{3}\cos^3\left(\sqrt{x}\right)-\frac{2}{5}\cos^5\left(\sqrt{x}\right)+C$; 187. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(2t)+\frac{1}{10}\operatorname{sen}^5(2t)+C$;

188. $\frac{8}{81}(3t+2)^{3/2}-\frac{8}{135}(3t+2)^{5/2}+\frac{2}{189}(3t+2)^{7/2}+C$; 189. $\frac{1}{3}x^3-3x+3\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)+C$;

190. $2\sqrt{x}-2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3x}}{3}\right)+C$; 191. $\frac{1}{5}x^5+a^4x-\frac{1}{3}a^2x^3-a^7\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$; 192. $\frac{1}{9\operatorname{sen}x-3\operatorname{sen}^3x+15}+C$;

193. $\frac{1}{8}\arctan\left(\frac{1-2\cos x}{4}\right)+C$; 194. $\frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right)+C$; 195. $\frac{1}{3}\arctan(3x-1)+C$;

196. $2\arctan\sqrt{2x-1}+C$; 197. $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}-x\right)+C$; 198. $-\frac{1}{4}\cos^4(\cos(\operatorname{sen}x))+C$; 199. $2\sqrt{\sec x}+C$;

200. $3\sqrt[3]{\sec x}+C$; 201. $n\sec^{1/n}x+C$; 202. $-2\sqrt{\csc x}+C$; 203. $-5\sqrt[5]{\csc x}+C$; 204. $-m\sqrt[m]{\csc x}+C$;

205. $-\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(1-3x)+C$; 206. $\frac{3}{4}(3-\cos x)^{4/3}+C$; 207. $\arctan(x+3)+C$; 208. $2x-\frac{11}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+C$;

209. $2\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+C$; 210. $\operatorname{arcsen}(\tan t)+C$; 211. $\frac{2}{3}\operatorname{arcsen}^{3/2}t+C$; 212. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}^2 t-\sqrt{1-t^2}+C$;

213. $\frac{4}{39b^3}\left(a+bx^3\right)^{13/4}-\frac{8a}{27b^3}\left(a+bx^3\right)^{9/4}+\frac{4a^2}{15b^3}\left(a+bx^3\right)^{5/4}+C$; 214. $\frac{1}{\omega}\tan(\omega t-\pi)-t+C$;

215. $\frac{1}{4}\tan\left(2x^2+3\right)-\frac{1}{2}x^2+C$; 216. $\frac{5}{2\pi}\arctan\left(\frac{x^2}{\pi}\right)+C$; 217. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{24}\operatorname{sen}\left(6x^2\right)+C$;

218. $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)+C$; 219. $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C$; 220. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)+C$; 221. $\frac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x}+C$;

222. $\frac{2}{5}(\pi-\cos(2x))^{5/4}+C$; 223. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\arctan(2x)-\frac{1}{3}\arctan^{3/2}(2x)+C$; 224. $\frac{20x^{1/3}-6x^{2/3}-25}{4\left(5-x^{1/3}\right)^4}+C$;

225. $\frac{3x^{2/3}-9x^{1/3}+9}{\left(3-x^{1/3}\right)^3}+C$; 226. $\frac{2}{5}(x+3)^{5/2}-2(x+3)^{3/2}+C$; 227. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+\pi)+C$;

228. $a\operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{a}}\right)+C$; 229. $\frac{16}{5}(4-t)^{5/2}-\frac{32}{3}(4-t)^{3/2}-\frac{2}{7}(4-t)^{7/2}+C$; 230. $\operatorname{arcsen}(1-2\cos x)+C$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Notación sigma

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.4

- Notación sigma. Sumas especiales y telescópicas.
- Principio de Inducción Matemática.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 61 : *Desarrolle las siguientes sumas* $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{k+3}$.

Solución : Al expandir la suma dada se tiene

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{k+3} = \left(\overbrace{\frac{(1)}{(1)+3}}^{\boxed{k=1}}\right) + \left(\overbrace{\frac{(2)}{(2)+3}}^{\boxed{k=2}}\right) + \left(\overbrace{\frac{(3)}{(3)+3}}^{\boxed{k=3}}\right) + \left(\overbrace{\frac{(4)}{(4)+3}}^{\boxed{k=4}}\right) + \left(\overbrace{\frac{(5)}{(5)+3}}^{\boxed{k=5}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} + \frac{5}{8}.$$

Luego, el desarrollo de la suma es

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{k+3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} + \frac{5}{8}.$$

★

Ejemplo 62 : *Exprese en notación sigma la suma dada* $\displaystyle \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$.

Solución : Observemos que la diferencia entre el numerador y el denominador es igual a 1. Así, podemos escribir el cociente de cada término como $\dfrac{k}{k+1}$, para obtener todos los miembros de la suma dada comenzamos la suma desde $k=1$ hasta $k=19$, luego

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20} = \sum_{k=1}^{19} \frac{k}{k+1}.$$

★

Ejemplo 63 : *Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)$.

Solución : Al expandir la suma dada se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = \left(\overbrace{a_2 - a_1}^{\boxed{i=1}}\right) + \left(\overbrace{a_3 - a_2}^{\boxed{i=2}}\right) + \left(\overbrace{a_4 - a_3}^{\boxed{i=3}}\right) + \cdots + \left(\overbrace{a_n - a_{n-1}}^{\boxed{i=n-1}}\right) + \left(\overbrace{a_{n+1} - a_n}^{\boxed{i=n}}\right) = a_{n+1} - a_1,$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = \overbrace{a_{n+1}}^{\boxed{\text{Término mayor evaluado en } i=n}} - \overbrace{a_1}^{\boxed{\text{Término menor evaluado en } i=1}}.$$

Este tipo de sumas que son diferencias de términos consecutivos se denominan **suma telescópica**. ★

Ejemplo 64 : *Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=7}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)$.

Solución : Observemos que la suma que queremos calcular cumple con la estructura de las sumas telescópicas, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i+1}-a_i\right),$$

es la diferencia de dos términos consecutivos, por lo tanto,

$$\sum_{i=7}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)=\overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\substack{\text{Término mayor}\\ \text{evaluado en } i=n}}-\overbrace{\frac{1}{7}}^{\substack{\text{Término menor}\\ \text{evaluado en } i=7}}.$$

★

Ejemplo 65 : *Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+3)}$.

Solución : Veamos si podemos escribir esta suma como una suma telescópica, para ello, descomponemos la expresión en sus fracciones simples, es decir,

$$\frac{3}{k(k+3)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+3},$$

donde, A y B son constantes a determinar por medio del método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{3}{k(k+3)}=\frac{A(k+3)+Bk}{k(k+3)} \qquad \Longrightarrow \qquad 3=A(k+3)+Bk,$$

debemos encontrar valores de A y de B para que la igualdad anterior se cumpla. Le damos valores arbitrario a k para obtener dichas constantes.

- Si $k=0$, entonces, $3=A((0)+3)+B(0) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A=1.}$

- Si $k=-3$, entonces, $3=A((-3)+3)+B(-3) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B=-1.}$

Por lo tanto,

$$\frac{3}{k(k+3)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right),$$

observemos que la nueva forma de escribir la suma nos lleva a la diferencia de dos términos, pero dichos términos **no** son consecutivos, por lo tanto, no representa una suma telescópica.

Si sumamos y restamos los términos $\dfrac{1}{k+1}$ y $\dfrac{1}{k+2}$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)},$$

Diferencia de términos consecutivos, representan sumas telescópicas.

donde,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\overbrace{\frac{1}{1}}^{\substack{\boxed{\text{Término mayor evaluado en } i=1}\\ \downarrow}}-\overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\substack{\boxed{\text{Término menor evaluado en } i=n}\\ \downarrow}},$$

similarmente,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3},$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k\,(k+3)}=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3},$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k\,(k+3)}=\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

★

Ejemplo 66 *: Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Solución : Es conocido que

$$(i+1)^3=i^3+3i^2+3i+1 \qquad \Longrightarrow \qquad (i+1)^3-i^3=3i^2+3i+1$$

sumando, desde $i=1$ hasta $i=n$, la última igualdad se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+3i+1\right),$$

donde,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right)}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Diferencia de términos consecutivos, representa una suma telescópica.}}}}=\left(\overbrace{(2)^3-(1)^3}^{\substack{\boxed{i=1}\\ \downarrow}}\right)+\left(\overbrace{(3)^3-(2)^3}^{\substack{\boxed{i=2}\\ \downarrow}}\right)+\left(\overbrace{(4)^3-(3)^3}^{\substack{\boxed{i=3}\\ \downarrow}}\right)+\left(\overbrace{(5)^3-(4)^3}^{\substack{\boxed{i=4}\\ \downarrow}}\right)$$

$$+\cdots+\left(\overbrace{(n-1)^3-(n)^3}^{\substack{\boxed{i=n-1}\\ \downarrow}}\right)+\left(\overbrace{(n+1)^3-(n)^3}^{\substack{\boxed{i=n}\\ \downarrow}}\right)=(n+1)^3-1$$

mientras que,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+3i+1\right)\overset{\substack{\boxed{\text{Linealidad de la sumatoria } \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k}\\ \downarrow}}{=}\sum_{i=1}^{n}3i^2+\sum_{i=1}^{n}3i+\sum_{i=1}^{n}1=3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\underbrace{\sum_{i=1}^{n}i}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Suma especial } \sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}}}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}1}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Suma especial } \sum_{i=1}^{n}c=cn}}}=3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\,\frac{n\,(n+1)}{2}+n,$$

$\boxed{\text{Linealidad de la sumatoria. Sale de la suma por ser constante respecto al índice de sumación}}$

así,

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+3i+1\right) \qquad \text{es equivalente a} \qquad (n+1)^3-1=3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\,\frac{n(n+1)}{2}+n,$$

despejamos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^2$ y nos queda

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2=(n+1)^3-1-3\,\frac{n(n+1)}{2}-n \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-\frac{3}{2}\,n(n+1)-(n+1)\right),$$

manipulamos el lado derecho de la igualdad,

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-\frac{3}{2}\,n(n+1)-(n+1)\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Factor común } n+1}}}{=}\frac{1}{3}(n+1)\left((n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right)$$

$$=\frac{(n+1)}{3}\left(\frac{2(n+1)^2-3n-2}{2}\right)=\frac{(n+1)}{3}\left(\frac{2n^2+4n+2-3n-2}{2}\right)=\frac{(n+1)}{3}\left(\frac{\overbrace{2n^2+n}^{\boxed{\text{Factor común } n}}}{2}\right)$$

$$=\frac{(n+1)}{3}\,\frac{n\,(2n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Finalmente, la suma buscada es

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

★

Ejemplo 67 *: Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=5}^{21}(2+i)$.

Solución : Es conocido que

$$\sum_{i=1}^{n}k=kn \quad k=\text{constante} \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

las cuales son válidas si la suma comienza desde $i=1$, observemos que la suma que deseamos calcular comienza desde $i=5$, así, debemos reescribir dicha suma de tal forma que comience desde $i=1$, para ello, sumamos y restamos los cuatro términos que le falta a la suma dada para que comience desde $i=1$,

$$\sum_{i=5}^{21}(2+i)=\sum_{i=5}^{21}(2+i)+\underbrace{\sum_{i=1}^{4}(2+i)}_{\uparrow}-\underbrace{\sum_{i=1}^{4}(2+i)}_{\uparrow},$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Suma de los cuatro términos}\\ (2+(1))+(2+(2))+(2+(3))+(2+(4))\end{array}}$$

de aquí,

$$\sum_{i=5}^{21}(2+i)=\left(\sum_{i=1}^{4}(2+i)+\sum_{i=5}^{21}(2+i)\right)-\sum_{i=1}^{4}(2+i)=\sum_{i=1}^{21}(2+i)-\sum_{i=1}^{4}(2+i),$$

donde,

Linealidad de la sumatoria
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{i=1}^{21}(2+i)\overset{\downarrow}{=}\underbrace{\sum_{i=1}^{21}2}_{\uparrow}+\underbrace{\sum_{i=1}^{21}i}_{\uparrow}=2\,(21)+\frac{(21)\,(22)}{2}=42+231=273,$$

Suma especial
$$\sum_{i=1}^{n}c=cn$$

Suma especial
$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

similarmente,
$$\sum_{i=1}^{4}(2+i)=\sum_{i=1}^{4}2+\sum_{i=1}^{4}i=2\,(4)+\frac{(4)\,(5)}{2}=8+10=18,$$

entonces,
$$\sum_{i=5}^{21}(2+i)=273-18=255.$$

★

Ejemplo 68 : *Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=7}^{35}\left(5i-i^2\right)$.

Solución : Es conocido que
$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \qquad \text{ver el ejemplo 3}$$

las cuales son validas si la suma comienza desde $i=1$, observemos que la suma que deseamos calcular comienza desde $i=7$, así, debemos reescribir dicha suma de tal forma que comience desde $i=1$, para ello, sumamos y restamos los seis términos que le falta a la suma dada para que comience desde $i=1$,
$$\sum_{i=7}^{35}\left(5i-i^2\right)=\sum_{i=7}^{35}\left(5i-i^2\right)+\sum_{i=1}^{6}\left(5i-i^2\right)-\sum_{i=1}^{6}\left(5i-i^2\right),$$

de aquí,
$$\sum_{i=7}^{35}\left(5i-i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{6}\left(5i-i^2\right)+\sum_{i=7}^{35}\left(5i-i^2\right)\right)-\sum_{i=1}^{6}\left(5i-i^2\right)=\sum_{i=1}^{35}\left(5i-i^2\right)-\sum_{i=1}^{6}\left(5i-i^2\right),$$

donde,

Linealidad de la sumatoria
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{i=1}^{35}\left(5i-i^2\right)\overset{\downarrow}{=}\sum_{i=1}^{35}\underset{\uparrow}{5}i-\sum_{i=1}^{35}i^2=5\underbrace{\sum_{i=1}^{35}i}_{\uparrow}-\underbrace{\sum_{i=1}^{35}i^2}_{\uparrow}=5\,\frac{(35)\,(36)}{2}-\frac{(35)\,(36)\,(71)}{6}=3150-14910=-11760,$$

Linealidad de la sumatoria
Sale de la suma por ser constante
respecto al índice de sumación

Suma especial
$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

Suma especial
$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

similarmente,

$$\sum_{i=1}^{6}\left(5i-i^2\right)=\sum_{i=1}^{6}5i-\sum_{i=1}^{6}i^2=5\ \sum_{i=1}^{6}i-\sum_{i=1}^{6}i^2=5\ \frac{(6)\,(7)}{2}-\frac{(6)\,(7)\,(13)}{6}=105-91=14,$$

entonces,

$$\sum_{i=7}^{35}\left(5i-i^2\right)=-11760-14=-11774.$$

★

Ejemplo 69 : *Obtenga el siguiente límite, si existe.*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

Solución : En primer lugar, manipulamos algebraicamente la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{i^2}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}\ i^2=\frac{1}{n^3}\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}\ i^2=\frac{1}{n^3}\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)\,(2n+1)}{6n^2},$$

Linealidad de la sumatoria
Sale de la suma por ser constante
respecto al índice de sumación

Suma especial
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,(2n+1)}{6n^2}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}}_{\text{Indeterminación }\frac{\infty}{\infty}}\overset{\text{L'H}}{=}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{12n}}_{\text{Indeterminación }\frac{\infty}{\infty}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

★

Ejemplo 70 : *Obtenga el siguiente límite, si existe,*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}.$$

Solución : En primer lugar, manipulamos algebraicamente la sumatoria

Suma especial
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c=cn$

Suma especial
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

Linealidad de la sumatoria
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{i^2}{n^2}\right)\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}4-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\left(\overbrace{\sum_{i=1}^{n}4}-\frac{1}{n^2}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}i^2}\right)$$

Linealidad de la sumatoria
Sale de la suma por ser constante
respecto al índice de sumación

Linealidad de la sumatoria
Sale de la suma por ser constante
respecto al índice de sumación

$$=\frac{1}{n}\left(4\,(n)-\frac{1}{n^2}\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right)=4-\frac{(n+1)\,(2n+1)}{6n^2},$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}4-\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}_{\uparrow\ \boxed{\text{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty}}}=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}=\frac{11}{3}.$$

★

Ejemplo 71 *: Demuestre que* $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Demostración : Usando inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la igualdad se cumple para $n=1$, así,

$$1\overset{?}{=}\frac{(1)((1)+1)}{2}\quad\Longrightarrow\quad 1\overset{?}{=}\frac{(1)(2)}{2}\quad\Longrightarrow\quad 1=1\quad\text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n=h$, es decir, la siguiente igualdad es cierta

$$1+2+3+4+\cdots+h=\frac{h(h+1)}{2}.$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple la igualdad para $n=h+1$, es decir, debemos verificar que la siguiente igualdad es cierta

$$1+2+3+4+\cdots+h+\overbrace{(h+1)}^{\boxed{\text{Nuevo término en la suma}}\ \downarrow}\overset{?}{=}\frac{(h+1)((h+1)+1)}{2}.$$

así, por hipótesis inductiva

$$\overbrace{1+2+3+4+\cdots+h}^{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}}\ \downarrow}+(h+1)=\frac{h(h+1)}{2}+(h+1)=\frac{h(h+1)+2(h+1)}{2}$$

$$\overset{\boxed{\text{Factor común } h+1}\ \downarrow}{=}\frac{(h+1)(h+2)}{2}=\frac{(h+1)((h+1)+1)}{2},$$

por lo tanto,

$$1+2+3+4+\cdots+h+(h+1)=\frac{(h+1)((h+1)+1)}{2}\qquad\text{se cumple}$$

entonces, queda demostrado que

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

★

Ejemplo 72 *: Demuestre que* $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

Demostración : Usando inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la igualdad se cumple para $n=1$, así,

$$\frac{1}{(3(1)-2)(3(1)+1)}\overset{?}{=}\frac{(1)}{3(1)+1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{1\cdot 4}\overset{?}{=}\frac{1}{4}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\quad\text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n = h$, es decir, la siguiente igualdad es cierta

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}=\frac{h}{3h+1}.$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple la igualdad para $n = h+1$, es decir, debemos verificar que la siguiente igualdad es cierta

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}+\overbrace{\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}}^{\boxed{\text{Nuevo término en la suma}}}\overset{?}{=}\frac{(h+1)}{3(h+1)+1}.$$

así, por hipótesis inductiva

$$\overbrace{\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}}^{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}}}+\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}$$

$$=\frac{h}{3h+1}+\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}=\frac{h}{3h+1}+\frac{1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}$$

$$=\frac{h(3(h+1)+1)+1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}=\frac{h(3h+4)+1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}=\frac{3h^2+4h+1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}$$

$$=\frac{(h+1)(3h+1)}{(3h+1)(3(h+1)+1)}=\frac{(h+1)}{3(h+1)+1},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}+\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}=\frac{(h+1)}{3(h+1)+1},$$

se cumple la igualdad, entonces, queda demostrado que

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

★

Ejercicios

1. Desarrolle las siguientes sumas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{9}(i+2)^2$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{k}{k+3}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=4}^{11}\frac{k^2}{2k-3}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\sqrt{n}$

6. $\displaystyle\sum_{i=2}^{8}\frac{i}{i-1}$ 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}2^{-n}$ 8. $\displaystyle\sum_{i=4}^{10}\frac{i}{i^2-1}$ 9. $\displaystyle\sum_{j=3}^{7}\frac{(-1)^j}{j-j^3}$ 10. $\displaystyle\sum_{m=2}^{8}\frac{3m-1}{m^2-2}$

2. Exprese en notación sigma la suma dada

1. $1+2+3+4+5+\cdots+10$ 2. $\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}$ 3. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\cdots+\dfrac{19}{20}$

4. $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}+\cdots+\dfrac{1}{49}$ 5. $1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n$ 6. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{4}{27}+\cdots+\dfrac{64}{729}$

7. $\frac{3}{7}+\frac{4}{8}+\frac{5}{9}+\frac{6}{10}+\cdots+\frac{23}{27}$ 8. $2+4+6+8+\cdots+2n$ 9. $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$

10. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$ 11. $1+2+4+8+16+32$ 12. $x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$

3. Hallar las siguientes sumas

1. $\sum_{i=1}^{n} i$ 2. $\sum_{i=1}^{n} i^2$ 3. $\sum_{i=1}^{n} i^3$ 4. $\sum_{i=1}^{n} i^4$

4. Hallar las siguientes sumas usando los resultados obtenidos en el ejercicio 3

1. $\sum_{i=1}^{n}(3i-2)$ 2. $\sum_{i=1}^{n}\left(2i^2+i\right)$ 3. $\sum_{i=1}^{n}(2-i)^3$ 4. $\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-\frac{3}{2}\right)$ 5. $\sum_{i=3}^{12}(3-2i)^2$

6. $\sum_{i=7}^{n}\left(4i-i^2\right)^2$ 7. $\sum_{i=10}^{30}(i-3)^3$ 8. $\sum_{i=3}^{9}\left(\frac{i^2}{5}-i\right)$ 9. $\sum_{i=5}^{n}\left(2-i^2-3i\right)^2$

5. Calcular las siguientes sumas

1. $\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)$ 2. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)$ 3. $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j\ (j+1)}$ 4. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\ (i+3)}$

5. $\sum_{i=7}^{n}\frac{1}{i^2+i}$ 6. $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k\,(k+3)}$ 7. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\,(2k+5)}$ 8. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\,(k+2)}$

9. $\sum_{i=2}^{n}\frac{2}{i^2-1}$ 10. $\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{2i^2-6i+4}$ 11. $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4j^2-1}$ 12. $\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{i^2+4i+3}$

13. $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{9m^2-3m-2}$ 14. $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2+7m+12}$ 15. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\,(k+1)\,(k+2)}$

16. $\sum_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{i^2\,(i+1)^2}$ 17. $\sum_{i=3}^{n}\frac{1-4i^2-12i}{(2i-1)^2\,(2i+5)^2}$ 18. $\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k\,(k+1)\,(k+2)\,(k+3)}$

19. $\sum_{k=3}^{n}\frac{6k}{k^4-5k^2+4}$ 20. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$

6. Calcular el límite cuando n tiende a infinito en las sumas obtenidas en el ejercicio 5.

7. Demuestre que $\sum_{k=3}^{10}(2k-5)$ y $\sum_{j=0}^{7}(2j+1)$ son iguales.

8. Obtenga los límites indicados, si existen.

1. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$ 2. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$ 3. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^3+1\right)$

4. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3-2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right)$ 5. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\left(\frac{2i}{n}\right)^3+5\left(\frac{2i}{n}\right)\right)$

9. Demostrar que
$$\sum_{i=1}^{n} \left(F\left(i+1\right) - F\left(i-1\right)\right) = F\left(n+1\right) + F\left(n\right) - F\left(1\right) - F\left(0\right).$$

10. Considere el cociente
$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots n}.$$
Hallar el valor del cociente para cualquier entero positivo n.

11. Demuestre que
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(i+1\right)^3 - \left(i-1\right)^3\right) = \left(n+1\right)^3 + n^3 - 1.$$

12. Demuestre que $1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

13. Demuestre que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es igual a $\dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$.

14. Demuestre que $1-2^2+3^2-4^2+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}n^2 = \left(-1\right)^{n-1}\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

15. Demuestre que la suma de los cubos de los n primeros números naturales es igual a $\left[\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}\right]^2$.

16. Demuestre que $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right) = \dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{4}$.

17. Demuestre que $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

18. Demuestre que $\dfrac{1^2}{1\cdot 3} + \dfrac{2^2}{3\cdot 5} + \dfrac{3^2}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{n^2}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)} = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2\left(2n+1\right)}$.

19. Demuestre que $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \dfrac{1}{\left(3n-2\right)\left(3n+1\right)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

20. Demuestre que $\dfrac{1}{a\left(a+1\right)} + \dfrac{1}{\left(a+1\right)\left(a+2\right)} + \dfrac{1}{\left(a+2\right)\left(a+3\right)} + \cdots + \dfrac{1}{\left(a+n-1\right)\left(a+n\right)} = \dfrac{n}{a\left(a+n\right)}$.

21. Demuestre que si $u_0 = 2$ y $u_1 = 3$ y si $u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1}$, para todo número natural k, se tiene
$$u_n = 2^n + 1.$$

22. Demuestre que si
$$u_1 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$$
y si
$$u_k = \left(\alpha+\beta\right)u_{k-1} - \alpha\beta u_{k-2},$$
para todo número natural $k > 2$, se tiene
$$u_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

23. Demuestre que la suma
$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$
es divisible por 133 cualquiera que sea el número entero $n \geq 0$.

24. Demuestre que $n^2 - n$ es divisible por 6.

25. Demuestre que $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots n^4 = \dfrac{n\,(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right)}{30}$.

26. Determine el primer entero N para el cual sea verdadera la proposición para cada $n \geq N$ y luego demuestre la proposicón para cada $n \geq N$.

    1. $3n + 25 < 3^n$ 2. $2^n > 2n + 1$ 3. $n^2 \leq 2^n$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 81 + 100 + 121$; 1.2. $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} + \frac{5}{8}$; 1.3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$;
1.4. $\frac{16}{5} + \frac{25}{7} + 4 + \frac{49}{11} + \frac{64}{13} + \frac{27}{5} + \frac{100}{17} + \frac{121}{19}$; 1.5. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + 3 + \sqrt{10}$;
1.6. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \frac{8}{7}$; 1.7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$; 1.8. $\frac{4}{15} + \frac{5}{24} + \frac{6}{35} + \frac{7}{48} + \frac{8}{63} + \frac{9}{80} + \frac{10}{99}$;
1.9. $\frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120} + \frac{1}{210} + \frac{1}{336}$; 1.10. $\frac{5}{2} + \frac{8}{7} + \frac{11}{14} + \frac{14}{23} + \frac{1}{2} + \frac{20}{47} + \frac{23}{62}$; 2.1. $\sum\limits_{k=1}^{10} k$; 2.2. $\sum\limits_{k=3}^{9} \sqrt{k}$;
2.3. $\sum\limits_{n=1}^{19} \frac{n}{n+1}$; 2.4. $\sum\limits_{n=4}^{25} \frac{1}{2n-1}$; 2.5. $\sum\limits_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1}\, x^{k-1}$; 2.6. $\sum\limits_{n=1}^{6} \frac{2^{n-1}}{3^n}$; 2.7. $\sum\limits_{n=7}^{27} \frac{n-4}{n}$;
2.8. $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k$; 2.9. $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i - 1)$; 2.10. $\sum\limits_{n=1}^{6} \frac{1}{n^2}$; 2.11. $\sum\limits_{n=0}^{5} 2^n$; 2.12. $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k$; 3.1. $\frac{n(n+1)}{2}$;
3.2. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 3.3. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; 3.4. $\frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$; 4.1. $\frac{n(3n-1)}{2}$; 4.2. $\frac{n(4n+5)(n+1)}{6}$;
4.3. $-\frac{n(n-3)\left(n^2-3n+4\right)}{4}$; 4.4. $\frac{n\left(3n-2n^2-6\right)}{6}$; 4.5. 1770; 4.6. $\frac{1}{30}(n-6)\left(6n^4 - 9n^3 - 4n^2 + 156n + 1015\right)$;
4.7. $142\,443$; 4.8. 14; 4.9. $\frac{1}{5}(n-4)\left(n^4 + 14n^3 + 81n^2 + 314n + 1250\right)$; 5.1. $1 - \frac{1}{n}$; 5.2. $1 - \frac{1}{2n+1}$;
5.3. $1 + \frac{1}{n+1}$; 5.4. $\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$; 5.5. $\frac{1}{7} - \frac{1}{n+1}$; 5.6. $\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$;
5.7. $\frac{1}{6}\left(\frac{23}{15} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$; 5.8. $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$; 5.9. $1 - \frac{1}{n+1}$; 5.10. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)$; 5.11. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$;
5.12. $\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$; 5.13. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$; 5.14. $\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}$; 5.15. $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$; 5.16. $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$;
5.17. $-\frac{1}{6}\left(\frac{143}{315} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{7219}{99\,225} - \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+3)^2} - \frac{1}{(2n+5)^2}\right)$; 5.18. $\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+3}$;
5.19. $\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+2}$; 5.20. $1 - \sqrt{n-1}$; 6.1. 1; 6.2. 1; 6.3. 1; 6.4. $\frac{11}{18}$; 6.5. $\frac{1}{7}$; 6.6. $\frac{11}{6}$;
6.7. $\frac{23}{90}$; 6.8. $\frac{1}{2}$; 6.9. 1; 6.10. $\frac{1}{2}$; 6.11. $\frac{1}{2}$; 6.12. $\frac{5}{6}$; 6.13. $\frac{1}{3}$; 6.14. $\frac{1}{4}$; 6.15. $\frac{1}{2}$;
6.16. 1; 6.17. $-\frac{26\,132}{297\,675}$; 6.18. $\frac{1}{3}$; 6.19. $\frac{1}{2}$; 6.20. $-\infty$; 8.1. $\frac{1}{3}$; 8.2. $\frac{11}{3}$; 8.3. $\frac{5}{4}$;
8.4. $\frac{195}{4}$; 8.5. 14; 10. $\frac{2n+1}{3}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Cálculo integral - Guía 5

Integral definida

Objetivos a cubrir

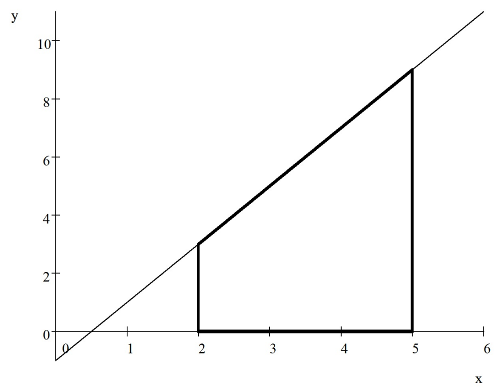
Código : MAT-CI.5

- Introducción al calculo de área debajo de una curva.
- Integral definida. Propiedades de la integral definida.
- Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 73 *: Calcule el área aproximada de la región limitada por la función* $f(x) = 2x - 1$, *el intervalo* $[2, 5]$ *y el eje* x, *usando una partición regular de* 8 *subintervalos y polígonos circunscritos.*

Solución : La grafica de la región dada es



Región limitada por $f(x) = 2x - 1$,

las rectas $x = 2$, $x = 5$ y el eje x.

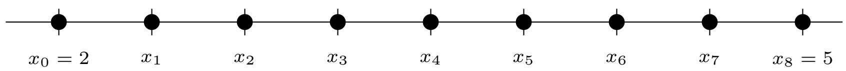
Por utilizar particiones regulares se tiene que todos los subintervalos tienen la misma longitud, así,

$$\Delta x_i = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$$

con $i = 1, 2, 3, \ldots, 8$. Tenemos que la partición del intervalo es

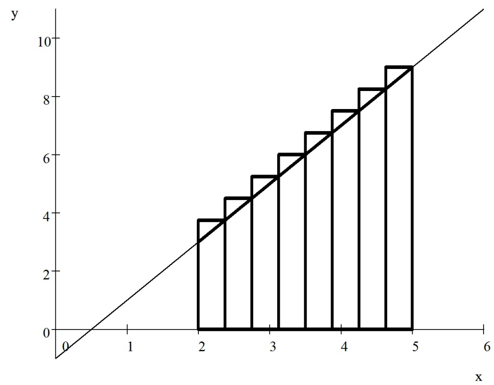
$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 = 2 \\ x_1 = 2 + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 2 + \frac{3}{8} \\ x_2 = 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = 2 + 2\ \frac{3}{8} \\ x_3 = 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = 2 + 3\ \frac{3}{8} \\ x_4 = 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_4 = 2 + 4\ \frac{3}{8} \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad x_i = 2 + i\ \frac{3}{8} \\ x_5 = 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_5 = 2 + 5\ \frac{3}{8} \\ x_6 = 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_6 = 2 + 6\ \frac{3}{8} \\ x_7 = 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_7 = 2 + 7\ \frac{3}{8} \\ x_8 = 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_8 = 2 + 8\ \frac{3}{8} = 5 \end{array} \right.$$

es decir,



Partición regular del intervalo $[2, 5]$

de aquí,



Polígonos circunscritos.

entonces,

$$A \approx \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{8} f\left(2 + \frac{3i}{8}\right)\Delta x_i,$$

como $f(\quad) = 2(\quad) - 1$, se tiene que

$$f\left(1 + \frac{3i}{8}\right) = 2\left(2 + \frac{3i}{8}\right) - 1 = 4 + \frac{6i}{8} - 1 = 3 + \frac{3i}{4}$$

así,

$$A \approx \sum_{i=1}^{8} f\left(2 + \frac{3i}{8}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{8}\left(3 + \frac{3i}{4}\right)\overset{\substack{\text{Linealidad de la sumatoria}\\ \text{Sale de la suma por ser constante}\\ \text{respecto al índice de sumación}\\ \downarrow}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}\sum_{i=1}^{8}\left(3 + \frac{3i}{4}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linealidad de la sumatoria}\\ \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}}{=} \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{8} 3 + \sum_{i=1}^{8} \overset{\substack{\text{Linealidad de la sumatoria}\\ \text{Sale de la suma por ser constante}\\ \text{respecto al índice de sumación}\\ \downarrow}}{\frac{3}{4}}\, i\right)$$

$$= \frac{3}{8}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{8} 3}_{\substack{\uparrow\\ \text{Suma especial}\\ \sum_{i=1}^{n} c = cn}} + \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{i=1}^{8} i}_{\substack{\uparrow\\ \text{Suma especial}\\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}}\right) = \frac{3}{8}\left(3(8) + \frac{3}{4}\,\frac{8(8+1)}{2}\right) = \frac{3}{8}(24 + 27) = \frac{153}{8}$$

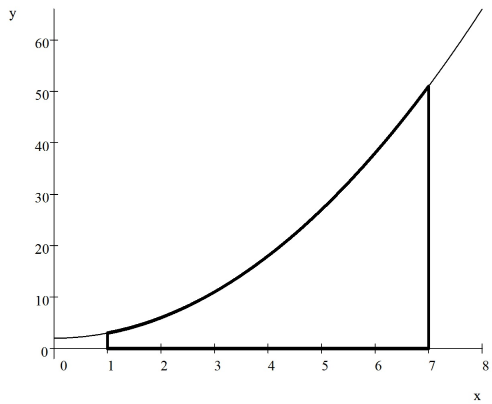
luego, el área aproximada es

$$A \approx \frac{153}{8}.$$

★

Ejemplo 74 *: Calcule el área aproximada de la región limitada por la función* $f(x) = x^2 + 2$, *el intervalo* $[1, 7]$ *y el eje* x, *usando una partición irregular cuyas longitudes de los subintervalos vienen dada por* $\{0.2, 1, 0.5, 2.2, 1.3, 0.8\}$ *y polígonos inscritos.*

Solución : La grafica de la región dada es



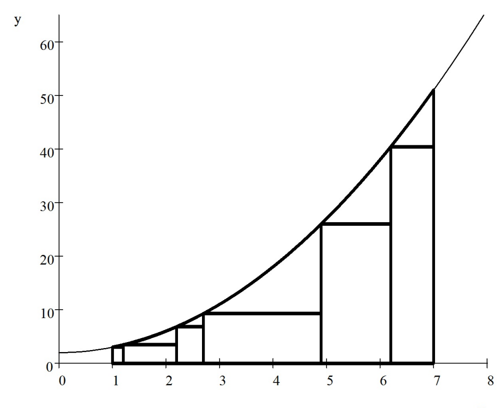
Región limitada por $f(x) = x^2 + 2$,
las rectas $x = 1$, $x = 7$ y el eje x.

La longitud de cada subintervalo es

$$\Delta x_1 = 0.2; \qquad \Delta x_2 = 1; \qquad \Delta x_3 = 0.5; \qquad \Delta x_4 = 2.2; \qquad \Delta x_5 = 1.3; \qquad \Delta x_6 = 0.8;$$

Tenemos que, la partición del intervalo es

$$\begin{cases} x_0 = 1 & \Longrightarrow \quad x_0 = 1 \\ x_1 = 1 + 0.2 & \Longrightarrow \quad x_1 = 1.2 \\ x_2 = 1 + 0.2 + 1 & \Longrightarrow \quad x_2 = 2.2 \\ x_3 = 1 + 0.2 + 1 + 0.5 & \Longrightarrow \quad x_3 = 2.7 \\ x_4 = 1 + 0.2 + 1 + 0.5 + 2.2 & \Longrightarrow \quad x_4 = 4.9 \\ x_5 = 1 + 0.2 + 1 + 0.5 + 2.2 + 1.3 & \Longrightarrow \quad x_5 = 6.2 \\ x_6 = 1 + 0.2 + 1 + 0.5 + 2.2 + 1.3 + 0.8 & \Longrightarrow \quad x_6 = 7 \end{cases}$$



entonces,

$$A \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_{i-1}) \Delta x_i = f(x_0) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + f(x_2) \Delta x_3 + f(x_3) \Delta x_4 + f(x_4) \Delta x_5 + f(x_5) \Delta x_6,$$

donde,

$$\begin{cases} f(x_0) = f(1) = (1)^2 + 2 = 3 & \Longrightarrow \quad f(x_0) = 3 \\ f(x_1) = f(1.2) = (1.2)^2 + 2 = 3.44 & \Longrightarrow \quad f(x_1) = 3.44 \\ f(x_2) = f(2.2) = (2.2)^2 + 2 = 6.84 & \Longrightarrow \quad f(x_2) = 6.84 \\ f(x_3) = f(2.7) = (2.7)^2 + 2 = 9.29 & \Longrightarrow \quad f(x_3) = 9.29 \\ f(x_4) = f(4.9) = (4.9)^2 + 2 = 26.01 & \Longrightarrow \quad f(x_4) = 26.01 \\ f(x_5) = f(6.2) = (6.2)^2 + 2 = 40.44 & \Longrightarrow \quad f(x_5) = 40.44 \end{cases}$$

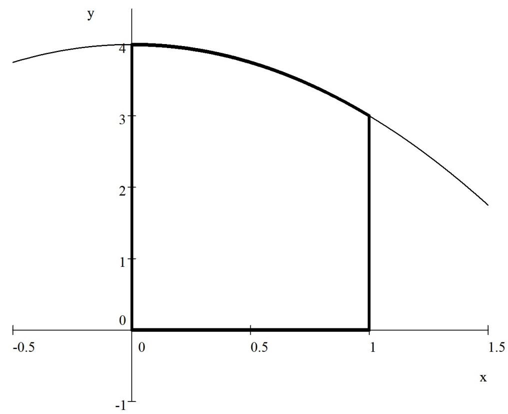
así,

$$A \approx (3)(0.2) + (3.44)(1) + (6.84)(0.5) + (9.29)(2.2) + (26.01)(1.3) + (40.44)(0.8) = 94.063,$$

luego, el área aproximada es $A \approx 94.063$. ★

Ejemplo 75 *: Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función* $f(x) = 4 - x^2$, *la recta vertical* $x = 1$ *y los ejes coordenados.*

Solución : La grafica de la región dada es



Región limitada por $f(x) = 4 - x^2$,

la recta $x = 1$ y los ejes coordenados.

Utilizamos una partición regular de n subintervalos, por lo tanto, todos los subintervalos tienen la misma longitud

$$\Delta x_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Tenemos que la partición del intervalo es

$$\begin{cases} x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0 \\ x_1 = 0 + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{n} \\ x_2 = 0 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2\ \dfrac{1}{n} \\ x_3 = 0 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 3\ \dfrac{1}{n} \\ \qquad \vdots \\ x_i = 0 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_i = i\ \dfrac{1}{n} \\ \qquad \vdots \\ x_n = 0 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_n = n\ \dfrac{1}{n} = 1, \end{cases}$$

entonces,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n},$$

donde,

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = 4 - \left(\frac{i}{n}\right)^2 = 4 - \frac{i^2}{n^2},$$

así,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(4 - \frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 4 - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 4 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(4(n) - \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right) = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

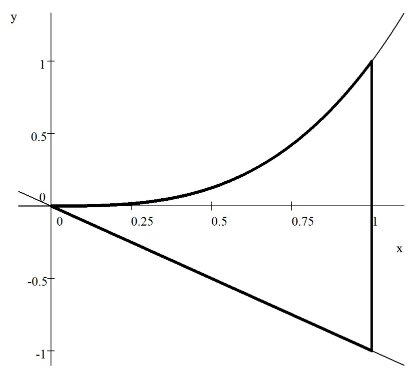
luego, el área es

$$A = \frac{11}{3}.$$

★

Ejemplo 76 *: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones* $f(x) = x^3$, $g(x) = -x$ *y* $x = 1$.

Solución : La grafica de la región dada es



Región limitada por $f(x) = x^3$,

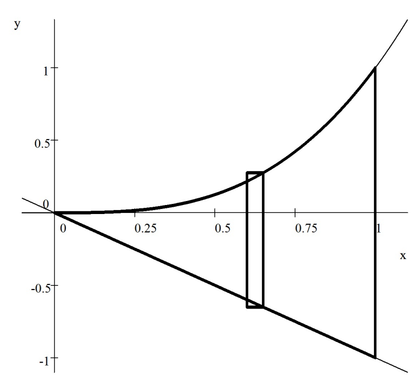
$g(x) = -x$ y $x = 1$.

Utilizamos una partición regular de n subintervalos, por lo tanto, todos los subintervalos tienen la misma longitud

$$\Delta x_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Tenemos que la partición del intervalo es

$$\begin{cases} x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0 \\ x_1 = 0 + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{n} \\ x_2 = 0 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2\,\dfrac{1}{n} \\ \qquad \vdots \\ x_i = 0 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_i = i\,\dfrac{1}{n} \\ \qquad \vdots \\ x_n = 0 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_n = n\,\dfrac{1}{n} = 1, \end{cases}$$



Observemos que el área del rectángulo representativo que aparece en la grafica anterior viene dada por

$$A_i = (\text{Altura})(\text{Base}) = (f(x_i) - g(x_i))\ (\Delta x_i) = \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - g\left(\frac{i}{n}\right)\right)\ \frac{1}{n}$$

$$= \left(\left(\frac{i}{n}\right)^3 - \left(-\frac{i}{n}\right)\right)\ \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{i^3}{n^3} + \frac{i}{n}\right)$$

con $i = 1, 2, 3, \ldots, n,$ entonces,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i^3}{n^3} + \frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^3}{n^3} + \frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\ \sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} i\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^4}\ \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{4n^2} + \frac{(n+1)}{2n}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Luego, el área de la región dada es

$$A = \frac{3}{4}.$$

★

Ejemplo 77 *: Evalúe* $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} \left(1 - x^2\right)\ dx,$ *usando la definición de la integral definida.*

Solución : Es conocido que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x_i,$$

para una partición regular de n subintervalos, x_i^* es un punto cualquiera del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y Δx_i es la longitud de cada subintervalo, con $i = 1, 2, 3, \ldots, n,$ como vamos a considerar una partición regular, tenemos que

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x_i = \frac{1/2 - (-1)}{n} = \frac{3}{2n},$$

con $i = 1, 2, 3, \ldots, n.$ Tenemos que la partición del intervalo es

$$\begin{cases}
x_0 = -1 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -1 \\
x_1 = -1 + \dfrac{3}{2n} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1 + \dfrac{3}{2n} \\
x_2 = -1 + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -1 + 2\ \dfrac{3}{2n} \\
x_3 = -1 + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -1 + 3\ \dfrac{3}{2n} \\
\qquad \vdots \\
x_i = -1 + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} + \cdots + \dfrac{3}{2n} \quad \Longrightarrow \quad x_i = -1 + i\ \dfrac{3}{2n} \\
\qquad \vdots \\
x_n = -1 + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n} + \cdots + \dfrac{3}{2n} \quad \Longrightarrow \quad x_n = -1 + n\ \dfrac{3}{2n} = \dfrac{1}{2}
\end{cases}$$

entonces,

$$\int_{-1}^{1/2} \left(1-x^2\right)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(-1+\frac{3i}{2n}\right)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(-1+\frac{3i}{2n}\right)\frac{3}{2n},$$

donde,

$$f\left(-1+\frac{3i}{2n}\right) = 1-\left(-1+\frac{3i}{2n}\right)^2 = 1-\left(1-2\,\frac{3i}{2n}+\frac{9i^2}{4n^2}\right) = \frac{3i}{n}-\frac{9i^2}{4n^2},$$

así,

$$\int_{-1}^{1/2} \left(1-x^2\right)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}-\frac{9i^2}{4n^2}\right)\frac{3}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{3i}{n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{9i^2}{4n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n}\left[\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{9}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n}\left[\frac{3}{n}\frac{n\,(n+1)}{2}-\frac{9}{4n^2}\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n}\left[\frac{3\,(n+1)}{2}-\frac{3\,(n+1)\,(2n+1)}{8n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9\,(n+1)}{4n}+\frac{9\,(n+1)\,(2n+1)}{16n^2}\right] = \frac{9}{4}-\frac{9}{8} = \frac{9}{8}.$$

Luego,

$$\int_{-1}^{1/2} \left(1-x^2\right)\, dx = \frac{9}{8}.$$

★

Ejemplo 78 *: Demuestre que* $\displaystyle\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

Demostración : Consideramos una partición regular de n subintervalos, entonces,

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \qquad \text{con} \quad i = 1,2,3,\ldots,n.,$$

Tenemos que la partición del intervalo es

$$\begin{cases} x_0 = a \quad \Longrightarrow \quad x_0 = a \\ x_1 = a+\dfrac{b-a}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = a+\dfrac{b-a}{n} \\ x_2 = a+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = a+2\,\dfrac{b-a}{n} \\ x_3 = a+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = a+3\,\dfrac{b-a}{n} \\ \qquad \vdots \\ x_i = a+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\cdots+\dfrac{b-a}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_i = a+i\,\dfrac{b-a}{n} \\ \qquad \vdots \\ x_n = a+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\dfrac{b-a}{n}+\cdots+\dfrac{b-a}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_n = a+n\,\dfrac{b-a}{n} = b \end{cases}$$

entonces, puesto que $f(x) = x^2$, se tiene

$$\int_a^b x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)\,\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)^2\,\frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\,\sum_{i=1}^{n} \left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\,\sum_{i=1}^{n}\left(a^2+\frac{2a\,(b-a)}{n}\,i+\frac{(b-a)^2}{n^2}\,i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2a(b-a)}{n}\, i + \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^2}{n^2}\, i^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a^2 + \frac{2a(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}\, \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2}\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(na^2 + a(b-a)\,(n+1) + \frac{(b-a)^2}{n}\, \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a) \left(a^2 + \frac{a(b-a)(n+1)}{n} + \frac{(b-a)^2(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right)$$

$$= (b-a)\left(a^2 + a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3} \right) = (b-a)\left(a^2 + ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{3} \right)$$

$$= (b-a)\left(ab + \frac{b^2-2ab+a^2}{3} \right) = (b-a)\left(\frac{3ab+b^2-2ab+a^2}{3} \right)$$

$$= (b-a)\left(\frac{b^2+ab+a^2}{3} \right) = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Luego,

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

★

Ejemplo 79 *: Considere la expresión* $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

1. *Obtenga el intervalo de definición para* f *(Dominio)*
2. *Hallar* $f(1)$.
3. *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* f.
4. *Hallar los valores extremos de* f.
5. *Estudiar la concavidad de* f.
6. *Esbozar una gráfica para* f.

Solución :

1. Observemos que el integrando no está definido en cero, por lo tanto esta integral no existe para ningún intervalo que incluya al cero, luego, el intervalo de definición es $(0,\infty)$.

2. $f(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$

3. Derivamos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{1}{t}\, dt \right) = \frac{1}{x}$$

y observamos que, para todo $x \in (0, \infty)$, se tiene que $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, por lo tanto, la función f es siempre creciente.

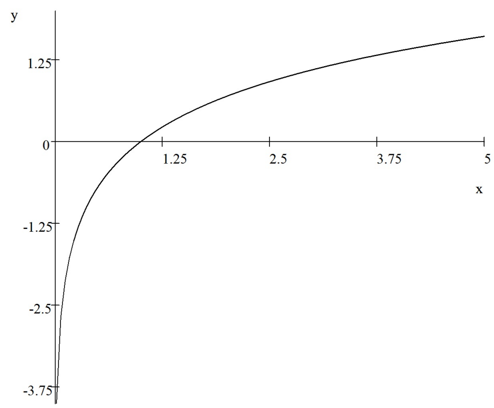
4. Por ser una función monótona creciente, no tiene valores extremos.

5. Hallamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$$

y para todo $x \in (0, \infty)$, se tiene que $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} < 0$, por lo tanto, la función f siempre es concava hacia abajo.

6. Un esbozo de la gráfica



★

Ejemplo 80 *: Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^4}\, dt$.

Solución : Tenemos que

$$f'(x) = \left[\int_1^x \sqrt{1+t^4}\, dt\right]' \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Primer Teorema Fundamental del Cálculo}}}}{=} \sqrt{1+x^4}.$$

Luego,

$$f'(x) = \sqrt{1+x^4}.$$

★

Ejemplo 81 *: Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}^4 u \ \tan u \, du$. *farith*

Solución : Tenemos que

$$f'(x) = \left[\int_0^x \operatorname{sen}^4 u \ \tan u \, du\right]' \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Primer Teorema Fundamental del Cálculo}}}}{=} \operatorname{sen}^4 x \ \tan x.$$

Luego,

$$f'(x) = \operatorname{sen}^4 x \ \tan x.$$

★

Ejemplo 82 : *Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \displaystyle\int_x^4 \left(2+\sqrt{u}\right)^8 \, du.$

Solución : Observemos que

$$f(x) = \int_x^4 \left(2+\sqrt{u}\right)^8 \, du \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Propiedad de la integral} \\ \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}}}}{=} - \int_4^x \left(2+\sqrt{u}\right)^8 \, du.$$

La propiedad aplicada a la integral es debido a que el Primer Teorema Fundamental del Cálculo exige que el límite variable se encuentre en la cota superior de la integral definida, así,

$$f(x) = -\int_4^x \left(2+\sqrt{u}\right)^8 \, du,$$

derivamos respecto a x,

$$f'(x) = \left[-\int_4^x \left(2+\sqrt{u}\right)^8 \, du\right]' = -\left[\int_4^x \left(2+\sqrt{u}\right)^8 \, du\right]' \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Primer Teorema} \\ \text{Fundamental del Cálculo}}}}}{=} -\left(2+\sqrt{x}\right)^8.$$

Luego,

$$f'(x) = -\left(2+\sqrt{x}\right)^8.$$

★

Ejemplo 83 : *Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \displaystyle\int_x^2 \frac{\sqrt[3]{t}\,dt}{t^2+5}.$

Solución : Observemos que

$$f(x) = \int_x^2 \frac{\sqrt[3]{t}\,dt}{t^2+5} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Propiedad de la integral} \\ \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}}}}{=} -\int_2^x \frac{\sqrt[3]{t}\,dt}{t^2+5}.$$

La propiedad aplicada a la integral es debido a que el Primer Teorema Fundamental del Cálculo exige que el límite variable se encuentre en la cota superior de la integral definida, así,

$$f(x) = -\int_2^x \frac{\sqrt[3]{t}\,dt}{t^2+5},$$

derivamos respecto a x,

$$f'(x) = \left[-\int_2^x \frac{\sqrt[3]{t}\,dt}{t^2+5}\right]' = -\left[\int_2^x \frac{\sqrt[3]{t}\,dt}{t^2+5}\right]' \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Primer Teorema} \\ \text{Fundamental del Cálculo}}}}}{=} -\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+5}.$$

Luego,

$$f'(x) = -\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+5}.$$

★

Ejemplo 84 *: Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{s^2+1}\, ds.$

Solución : Observemos que la función f es la composición de las funciones

$$g(x) = \int_1^{x} \frac{s^2}{s^2+1}\, ds \qquad \text{y} \qquad h(x) = \sqrt{x},$$

ya que,

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{s^2+1}\, ds = f(x),$$

por lo tanto, para obtener la derivada de f aplicamos la regla de la cadena

$$f'(x) = [g(h(x))]' = \underbrace{g'(h(x))}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función externa evaluada en la función interna}}}} \; \underbrace{h'(x)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función interna}}}},$$

entonces,

$$f'(x) = \overbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{s^2+1}\, ds\right)}^{\substack{\boxed{\text{Derivada de una función compuesta}} \\ \downarrow}} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Primer Teorema Fundamental del Cálculo}}}}{=} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1} \underbrace{\left(\sqrt{x}\right)'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función interna}}}} = \frac{x}{x+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{x}{2\sqrt{x}\;(x+1)} = \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)},$$

Luego,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}.$$

★

Ejemplo 85 *: Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen}^2 x}^{8} \frac{\operatorname{arcsen} t}{t+5}\, dt.$

Solución : Observemos que la función f es la composición de las funciones

$$g(x) = \int_x^{8} \frac{\operatorname{arcsen} t}{t+5}\, dt \qquad \text{y} \qquad h(x) = \operatorname{sen}^2 x,$$

ya que,

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\operatorname{sen}^2 x\right) = \int_{\operatorname{sen}^2 x}^{8} \frac{\operatorname{arcsen} t}{t+5}\, dt = f(x),$$

por lo tanto, para obtener la derivada de f aplicamos la regla de la cadena

$$f'(x) = [g(h(x))]' = \underbrace{g'(h(x))}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función externa evaluada en la función interna}}}} \; \underbrace{h'(x)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función interna}}}},$$

por otra parte, observe que el límite variable está en la cota inferior, así,

$$f(x) = \int_{\operatorname{sen}^2 x}^{8} \frac{\operatorname{arcsen} t}{t+5}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Propiedad de la integral } \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}}}{=} -\int_8^{\operatorname{sen}^2 x} \frac{\operatorname{arcsen} t}{t+5}\, dt.$$

La propiedad aplicada a la integral es debido a que el Primer Teorema Fundamental del Cálculo exige que el límite variable se encuentre en la cota superior de la integral definida, así,

$$f(x) = -\int_8^{\operatorname{sen}^2 x} \frac{\operatorname{arcsen} t}{t+5}\, dt,$$

derivamos respecto a x,

$$f'(x) = \overbrace{\frac{d}{dx}\left(-\int_8^{\operatorname{sen}^2 x} \frac{\operatorname{arcsen} t}{t+5}\, dt\right)}^{\substack{\text{Derivada de una}\\ \text{función compuesta}\\ \downarrow}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Primer Teorema}\\ \text{Fundamental del Cálculo}}}{=} -\frac{\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x + 5} \underbrace{\left(\operatorname{sen}^2 x\right)'}_{\substack{\uparrow\\ \text{Derivada de la}\\ \text{función interna}}} = -\frac{\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x + 5}\left(2 \operatorname{sen} x \cos x\right)$$

Luego,

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(2x)\ \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x + 5}.$$

★

Ejemplo 86 *: Calcular la derivada de la siguiente función* $f(x) = \displaystyle\int_x^1 x^2 \sqrt{u^2+1}\, du$.

Solución : Observemos que

$$f(x) = \int_x^1 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linealidad de la integral}\\ \text{Sale de la integral por ser constante}\\ \text{respecto a la variable de integración}}}{x^2} \sqrt{u^2+1}\, du = x^2 \int_x^1 \sqrt{u^2+1}\, du \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Propiedad de la integral}\\ \int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx}}{=} -\, x^2 \int_1^x \sqrt{u^2+1}\, du$$

La última propiedad aplicada a la integral es debido a que el Primer Teorema Fundamental del Cálculo exige que el límite variable se encuentre en la cota superior de la integral definida, así,

$$f(x) = -\, x^2 \int_1^x \sqrt{u^2+1}\, du,$$

derivamos respecto a x,

$$f'(x) = \left[-\, x^2 \int_1^x \sqrt{u^2+1}\, du\right]' = -\underbrace{\left[x^2 \int_1^x \sqrt{u^2+1}\, du\right]'}_{\substack{\uparrow\\ \text{Derivada de un}\\ \text{producto de funciones}}}$$

$$= -\left(\left[x^2\right]' \int_1^x \sqrt{u^2+1}\, du + x^2 \underbrace{\left[\int_1^x \sqrt{u^2+1}\, du\right]'}_{\substack{\uparrow\\ \text{Primer Teorema}\\ \text{Fundamental del Cálculo}}}\right) = -\, 2x \int_1^x \sqrt{u^2+1}\, du - x^2 \sqrt{x^2+1}.$$

Luego,

$$f'(x) = -\,2x \int_1^x \sqrt{u^2+1}\;du - x^2\;\sqrt{x^2+1}.$$

★

Ejemplo 87 *: Si* $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\;dt$, *donde* $f(t) = \displaystyle\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\;du$. *Encuentre* $F''(2)$.

Solución : Hallemos la primera derivada de F.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x f(t)\;dt\right) \underset{\uparrow}{=} f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\;du,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Primer Teorema}\\ \text{Fundamental del Cálculo}\end{array}}$$

es decir,

$$\frac{dF}{dx} = \int_1^{x^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\;du,$$

derivamos, de nuevo

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{dF'}{dx} = \overbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\;du\right)}^{\substack{\text{Derivada de una}\\ \text{función compuesta}}} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{1+\left(x^2\right)^4}}{x^2}\;\underbrace{\left(x^2\right)'}_{\substack{\text{Derivada de la}\\ \text{función interna}}} = \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^2}\,(2x) = \frac{2\sqrt{1+x^8}}{x},$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Primer Teorema}\\ \text{Fundamental del Cálculo}\end{array}}$$

y se tiene que

$$F''(x) = \frac{2\sqrt{1+x^8}}{x},$$

entonces,

$$F''(2) = \frac{2\;\sqrt{1+(2)^8}}{(2)} \qquad \Longrightarrow \qquad F''(2) = \sqrt{257}.$$

★

Ejemplo 88 *: Utilice las propiedades de la integral definida para verificar*

$$\left|\int_0^{\pi} x^2\cos x\;dx\right| \leq \frac{\pi^2}{3}.$$

Solución : Tenemos, por propiedades de integrales definidas

$$\left|\int_0^{\pi} x^2\cos x\;dx\right| \leq \int_0^{\pi} \left|x^2\cos x\right|\;dx = \int_0^{\pi} x^2\;\;|\cos x|\;\;dx$$

como $|\cos x| \leq 1$, entonces

$$\left|\int_0^{\pi} x^2\cos x\;dx\right| \leq \int_0^{\pi} x^2\;\;|\cos x|\;\;dx \leq \int_0^{\pi} x^2\;dx \underset{\uparrow}{=} \frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{\pi^3}{3},$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ver ejemplo 78}\\ \displaystyle\int_a^b x^2\;dx = \frac{b^3-a^3}{3}\end{array}}$$

así,

$$\left|\int_0^{\pi} x^2 \cos x \; dx\right| \leq \frac{\pi^2}{3}.$$

★

Ejemplo 89 *: Calcular, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\cos x}^{x+1} \operatorname{arcsen} u \; du.$

Solución : Observemos que este limite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, así , aplicamos la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\cos x}^{x+1} \operatorname{arcsen} u \; du &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\displaystyle\int_{\cos x}^{x+1} \operatorname{arcsen} u \; du\right]'}{\left[\sqrt{x}\right]'} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arcsen}(x+1) + \operatorname{sen} x \;\; \operatorname{arcsen}(\cos x)}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\left(\operatorname{arcsen}(x+1) + \operatorname{sen} x \;\; \operatorname{arcsen}(\cos x)\right) \\
&= 2\sqrt{(0)}\left(\operatorname{arcsen}((0)+1) + \operatorname{sen}(0) \;\; \operatorname{arcsen}(\cos(0))\right) \\
&= 2(0)\left(\operatorname{arcsen}(1) + (0) \;\; \operatorname{arcsen}(1)\right) = 2(0)\left(\frac{\pi}{2} + (0)\frac{\pi}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Luego, el límite existe

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\cos x}^{x+1} \operatorname{arcsen} u \; du = 0.$$

★

Ejercicios

1. Calcule el área aproximada de la región limitada por la función dada en el intervalo dado y el eje x, usando

   (i) Polígonos inscritos (ii) Polígonos circunscritos

   (a) $f(x) = 2x + 1$ en $[0, 5]$, use una partición regular de 8 subintervalos.
   (b) $f(x) = 16 - x^2$ en $[0, 4]$, use una partición regular de 8 subintervalos.
   (c) $f(x) = x^3 + 2$ en $[-1, 2]$, use una partición regular de 6 subintervalos.
   (d) $f(x) = 3x - 2$ en $[1, 5]$, use una partición irregular cuyas longitudes de los subintervalos vienen dada por $\{0.2, 0.8, 0.5, 0.5, 1.2, 0.7, 0.1\}$.
   (e) $f(x) = 8 - 2x$ en $[-2, 4]$, use una partición irregular cuyas longitudes de los subintervalos vienen dada por $\{1.3, 0.5, 1, 0.8, 0.2, 2.2\}$.

2. Calcule el área aproximada de la región limitada por $f(x) = x^2 - 4x + 5$, las rectas verticales $x = 0$, $x = 3$ y el eje x, usando la partición irregular cuyas longitudes de los subintervalos vienen dada por $\{0.3, 0.6, 0.5, 0.6, 0.7, 0.3\}$, tomando como x_i^* el punto donde la función alcanza su mínimo en cada subintervalo.

3. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 2x + 3$, las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y el eje x.

4. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $y = (x-1)^2 + 2$, las rectas $x = 2$ y $x = 4$ que se encuentra en el primer cuadrante.

5. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de la función $f(x) = x^2$, y la recta $y = x + 2$.
6. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y + x^2 = 2$.
7. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ el eje y y $y = 2$.
8. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 1 - x^2 - 2x$, $f(x) = x^2 + 2$ el eje de las ordenadas y la recta $x = 3$.
9. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $x + 4 - y = 0$, definida en el intervalo $[-1, 1]$ y el eje x.
10. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3$, definida en $[0, 1]$ y la abscisa.
11. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 1 - x$, las rectas verticales $x = 2$ y $x = 5$ y el eje x.
12. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 9$, los ejes coordenados y $x = 2$.
13. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{9 - x}$, la recta horizontal $y = 2$ y el eje de la ordenada.
14. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = -x$ y $x = 1$.
15. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = \pm\sqrt{x - 2}$, $y + x + 2 = 0$ y las rectas $y = -1$ $y = 2$.
16. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$, la recta vertical $x = 1$ y los ejes coordenados.
17. Calcule la suma de Riemann de la función $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ en el intervalo $[0, 2]$, usando una partición con $n = 4$ y eligiendo x_i^* como el extremo izquierdo del $i-$ésimo subintervalo. Trace la gráfica de f y los rectángulos de aproximación.
18. Evalúe usando la definición de la integral definida

1. $\int_{-1}^{2} (2x + 3)\ dx$	2. $\int_{1}^{3} (3x - 2)\ dx$	3. $\int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\ dx$	4. $\int_{0}^{2} \left(x^2 + 2\right)\ dx$
5. $\int_{1}^{4} x^2\ dx$	6. $\int_{-1}^{1} \left(2x^2 + 1\right) dx$	7. $\int_{0}^{2} (x + 1)\, dx$	8. $\int_{0}^{2} \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx$
9. $\int_{1}^{4} (3x + 1)\, dx$	10. $\int_{0}^{1} \left(x^3 + x\right) dx$	11. $\int_{-1}^{2} \left(x^2 + x + 1\right) dx$	12. $\int_{-2}^{1} \left(2x^2 - 3\right) dx$

19. Expprese los siguientes límites como una integral definida en el intervalo indicado

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(x_i^*\right)^2 - 5x_i^*\right) \triangle x_i, \quad [0, 1]$	2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^*}\ \triangle x_i, \quad [1, 4]$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(x_i^*\right) \triangle x_i, \quad [0, \pi]$	4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\tan x_i^*}{x_i^*}\ \triangle x_i, \quad [2, 4]$

20. Exprese los siguientes límites como una integral definida

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$	2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{n}\right)$	3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$	5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^5}$	6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^5 - 6\right] \frac{2}{n}$

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{27i^2}{n^3}$ 8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^3}{n^4}$ 9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\frac{2i}{n}+\left(\frac{2i}{n}\right)^2\right]\frac{2}{n}$

21. Demuestre que

1. $\displaystyle\int_a^b dx = b-a$ 2. $\displaystyle\int_a^b x\ dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ 3. $\displaystyle\int_a^b x^2\ dx = \frac{b^3-a^3}{3}$

22. Se conoce que

$$\int_a^b dx = b-a; \qquad \int_a^b x\ dx = \frac{b^2-a^2}{2}; \qquad \int_a^b x^2\ dx = \frac{b^3-a^3}{3}; \qquad \int_0^b \cos x\ dx = \operatorname{sen} b$$

Utilice las propiedades de la integral para calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_2^6 3\ dx$ 2. $\displaystyle\int_3^6 (4-7x)\ dx$ 3. $\displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)\ dx$ 4. $\displaystyle\int_1^4\left(2x^2-3x+1\right)dx$

5. $\displaystyle\int_{-4}^{-1}\sqrt{3}\ dx$ 6. $\displaystyle\int_{-2}^{2}|x+1|\ dx$ 7. $\displaystyle\int_0^2 (5x+3)\ dx$ 8. $\displaystyle\int_1^3 (x-2)(x+3)\,dx$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{4}\pi\ dx$ 10. $\displaystyle\int_0^2 |2x-3|\ dx$ 11. $\displaystyle\int_0^{\pi/3}(1-2\cos x)\ dx$ 12. $\displaystyle\int_0^1 (5\cos x+4x)\,dx$

13. $\displaystyle\int_{-2}^{5}[\![x]\!]\ dx$ 14. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$ donde $f(x)=\begin{cases}-2x & \text{si} \quad -1\le x<0\\ 3x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 1\end{cases}$

15. $\displaystyle\int_0^2 [\![2x]\!]\ dx$ 16. $\displaystyle\int_0^2 g(x)\ dx$ donde $g(x)=\begin{cases}1-x & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ x-1 & \text{si} \quad 1< x\le 3\end{cases}$

17. $\displaystyle\int_0^4 x^2\ dx+\int_4^{10} x^2\ dx$ 18. $\displaystyle\int_3^4 (2x+1)\ dx+\int_1^3 (2x+1)\ dx+\int_4^1 (2x+1)\ dx$

23. Escriba la suma o diferencia dada como una sola integral de la forma $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$

1. $\displaystyle\int_5^8 f(x)\ dx+\int_0^5 f(x)\ dx$ 2. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\ dx+\int_3^6 f(x)\ dx+\int_6^{12} f(x)\ dx$

3. $\displaystyle\int_2^{10} f(x)\ dx-\int_2^7 f(x)\ dx$ 4. $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\ dx-\int_{-3}^{0} f(x)\ dx+\int_5^6 f(x)\ dx$

24. Demostrar que

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0.$ 2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$ con $a<b$.

25. Demostrar que si $f(x)\ge 0$ para $a\le x\le b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx\ge 0.$

26. Demostrar que si $f(x)\ge g(x)$ para $a\le x\le b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx\ge\int_a^b g(x)\ dx.$

27. Demostrar que $m\le f(x)\le M$ para $a\le x\le b$ entonces

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\ dx\le M(b-a)$$

28. Demostrar que
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

29. Utilice las propiedades de la integral para verificar la desigualdad dada en cada uno de los siguientes ejercicios sin calcular las integrales

1. $\displaystyle\int_0^1 x\ dx \geq \int_0^1 x^2\ dx$; 2. $\displaystyle\int_2^6 \left(x^2-1\right)\ dx \geq 0$; 3. $\displaystyle\int_{-2}^8 \left(x^2-3x+4\right)\ dx \geq 0$;

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 x\ dx \leq \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\ dx$; 5. $\displaystyle 8 \leq \int_2^4 x^2\ dx \leq 32$; 6. $\displaystyle\int_4^6 \frac{dx}{x} \leq \int_4^6 \frac{dx}{8-x}$;

7. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{5-x}\ dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1}\ dx$; 8. $\displaystyle\int_0^5 \left(4x^4-3\right)\ dx \geq \int_0^5 \left(3x^4-4\right)\ dx$;

9. $\displaystyle\int_1^2 x\ dx \leq \int_1^2 x^2\ dx$; 10. $\displaystyle\frac{\pi}{6} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\ dx \leq \frac{\pi}{3}$; 11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\ dx \leq \frac{\pi^2}{8}$;

12. $\displaystyle 2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\ dx \leq 2\sqrt{2}$; 13. $\displaystyle 3 \leq \int_1^4 \left(x^2-4x+5\right)\ dx \leq 15$;

14. $\displaystyle\int_2^5 \sqrt{x^2-1}\ dx \leq 10.5$; 15. $\displaystyle 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\ dx \leq \frac{6}{5}$; 16. $\displaystyle\left|\int_0^\pi x^2\cos x\ dx\right| \leq \frac{\pi^2}{3}$;

30. (a) Demuestre que $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 1+x^2$, para $x \geq 0$.

(b) Demuestre que $\displaystyle 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ dx \leq 1.25$

31. Calcular $\displaystyle\int_0^4 f(x)\ dx$, si

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$; 2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4-x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$; 3. $f(x) = |\cos x|$;

32. Calcular $\displaystyle\int_1^5 f(x)\ dx$, si
$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ x-x^2 & \text{si } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

33. Decida si la proposición dada es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

(a) Si f es continua y $f(x) \geq 0$, para todo x de $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.

(b) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq 0$, entonces $f(x) \leq 0$, para todo x en $[a,b]$.

(c) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0$, entonces $f(x) = 0$, para todo x en $[a,b]$.

(d) Si $f(x) \leq 0$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0$, entonces $f(x) = 0$, para todo x en $[a,b]$.

(e) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx > \int_a^b g(x)\ dx$, entonces $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx > 0$.

(f) Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

(g) Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b (f(x)\,g(x))\ dx = \left(\int_a^b f(x)\ dx\right)\left(\int_a^b g(x)\ dx\right)$$

(h) Si f y g son funciones continuas y $f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

34. Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \left(t^2 + t\right)\ dt$
2. $f(x) = \displaystyle\int_{-6}^x (2t+1)\ dt$
3. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}^4 u\ \tan u\ du$
4. $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^4}\ dt$
5. $f(x) = \displaystyle\int_x^{\pi/4} u\ \tan u\ du$
6. $f(x) = \displaystyle\int_x^1 x^2\ \sqrt{u^2+1}\ du$
7. $f(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} u^2\ du$
8. $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \sqrt{1+s^4}\ ds$
9. $f(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \left(u^2 + \cos u\right) du$
10. $f(x) = \displaystyle\int_2^{1/x} \operatorname{sen}^4 t\ dt$
11. $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \sqrt{t^3+1}\ dt$
12. $f(x) = \displaystyle\int_1^x \left(t^2-1\right)^{20}\ dt$
13. $f(u) = \displaystyle\int_\pi^u \frac{\operatorname{sen} u}{1+t^4}\ dt$
14. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}\left(x^2\right)\ dx$
15. $f(x) = \displaystyle\int_x^4 \left(2+\sqrt{u}\right)^8\ du$
16. $f(x) = \displaystyle\int_x^2 \cos\left(t^2\right)\ dt$
17. $f(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{s^2+1}\ ds$
18. $f(x) = \displaystyle\int_{\tan x}^{17} \operatorname{sen}\left(t^4\right)\ dt$
19. $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{t}\ dt$
20. $f(x) = \displaystyle\int_{\tan x}^{x^2} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2+t^4}}\ dt$
21. $f(x) = \displaystyle\int_{-5}^{\operatorname{sen} x} t\cos\left(t^3\right)\ dt$
22. $f(x) = \displaystyle\int_{3x}^{2x} \frac{u-1}{u+1}\ du$
23. $f(x) = \displaystyle\int_0^{5x+1} \frac{x^4}{u^2-5}\ du$
24. $f(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{arcsen} x}^{x^{-1}} \sqrt{x}\ \operatorname{sen} t\ dt$
25. $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} \frac{\cos x}{1-y^2}\ dy$
26. $f(x) = \displaystyle\int_{5x+1}^0 \frac{u^4}{x^2-5}\ du$
27. $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\ \operatorname{sen} t\ dt$
28. $f(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{x^{-1}} \sqrt{x}\ \operatorname{arcsen} t\ dt$

35. Si f es una función continua y g y h son funciones diferenciables, encuentre una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ dt\right)$$

36. Sea $F(x)=\displaystyle\int_0^x \left(t^4+1\right)\,dt$

(a) Encuentre $F(0)$.

(b) Sea $y=F(x)$. Resuelva la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=x^4+1$.

(c) Encuentre la solución de la ecuación de la parte 36b si se debe satisfacer que $y=F(0)$ cuando $x=0$.

(d) Demuestre que $\displaystyle\int_0^1 \left(x^4+1\right)\,dx=\frac{6}{5}$.

37. Sea $F(x)=\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$

(a) Encuentre $F(0)$ y $F(2\pi)$.

(b) Sea $y=F(x)$. Resuelva la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=\operatorname{sen} x$.

(c) Encuentre la solución de la ecuación de la parte 37b si se debe satisfacer que $y=F(0)$ cuando $x=0$.

(d) Demuestre que $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx=2$.

(e) Encuentre todos los puntos extremos relativos y de inflexión de F en el intervalo $[0,4\pi]$.

(f) Haga la gráfica de $y=F(x)$ en el intervalo $[0,4\pi]$.

38. Demuestre que la gráfica de $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\,ds,\ a\neq 0,$ es cóncava hacia arriba en toda su extensión.

39. Encuentre el intervalo en que la gráfica de $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ es cóncava hacia arriba.

40. Determine el intervalo en que la curva $y=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$ es cóncava hacia arriba.

41. Calcular los siguientes límites, si existen

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-1\right)^2}{\displaystyle\int_1^{x^4}\operatorname{sen}\left(1-t^2\right)\,dt}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{\operatorname{sen} x}\operatorname{arcsen} t\,dt}{\displaystyle\int_0^{2x}\sqrt{t^3+1}\,dt}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x}\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\int_0^x(1-\cos t)^2\,dt$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\cos x}^{x+1}\operatorname{arcsen} u\,du$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cot x\int_1^{\cos x}(2t+1)\,dt$

7. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{1+t^3}\,dt$

42. Demuestre que si $f(x)=\displaystyle\int_{2x}^{5x}\frac{1}{t}\,dt,$ entonces f es una función constante en $(0,\infty)$.

43. Encuentre una función f y un valor de la constante a, tal que: $\displaystyle 2\int_a^x f(t)\,dt=2\operatorname{sen} x-1.$

Respuestas: Ejercicios

1.*a.i.* 26.875; 1.*a.ii.* 33.125; 1.*b.i.* 38.5; 1.*b.ii.* 46.5; 1.*c.i.* 7.6875; 1.*c.ii.* 12.188; 1.*d.i.* 23.32; 1.*d.ii.* 32.68; 1.*e.i.* 27.54; 1.*e.ii.* 44.46; 2. 4.92; 3. 6; 4. $\frac{38}{3}$; 5. $\frac{9}{2}$; 6. $\frac{8}{3}$; 7. $\frac{8}{3}$; 8. 30; 9. 8; 10. $\frac{1}{4}$; 11. $\frac{15}{2}$; 12. $\frac{46}{3}$; 13. $\frac{8}{3}$; 14. $\frac{3}{4}$; 15. $\frac{33}{2}$;

16. $\frac{11}{3}$; 17. $\frac{31}{4}$; 18.1. 12; 18.2. 8; 18.3. $\frac{9}{2}$; 18.4. $\frac{20}{3}$; 18.5. 21; 18.6. $\frac{10}{3}$;

18.7. 4; 18.8. $\frac{10}{3}$; 18.9. $\frac{51}{2}$; 18.10. $\frac{3}{4}$; 18.11. $\frac{15}{2}$; 18.12. -3; 19.1. $\int_0^1 \left(2x^2-5x\right) dx$;

19.2. $\int_1^4 \sqrt{x}\ dx$; 19.3. $\int_0^{\pi} \cos x\ dx$; 19.4. $\int_2^4 \frac{\tan x}{x}\ dx$; 20.1. $\int_0^1 x^3\ dx$; 20.2. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\ dx$;

20.3. $\int_1^3 x\ dx$; 20.4. $\int_0^1 x^4\ dx$; 20.5. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^5}\ dx$; 20.6. $\int_1^3 \left(3x^5-6\right) dx$; 20.7. $\int_0^1 27x^2\ dx$;

20.8. $\int_0^1 16x^3\ dx$; 20.9. $\int_0^2 \left(1+x+x^2\right) dx$; 22.1. 12; 22.2. $-\frac{165}{2}$; 22.3. $-\left(\sqrt{2}-1\right)^2$; 22.4. $\frac{45}{2}$;

22.5. $3\sqrt{3}$; 22.6. 5; 22.7. 16; 22.8. $\frac{2}{3}$; 22.9. 5π; 22.10. $\frac{5}{2}$; 22.11. $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$; 22.12. $5\operatorname{sen} 1+2$;

22.13. 7; 22.14. 2; 22.15. 3; 22.16. 1; 22.17. $\frac{1000}{3}$; 22.18. 0; 23.1. $\int_0^8 f(x)\ dx$;

23.2. $\int_1^{12} f(x)\ dx$; 23.3. $\int_7^{10} f(x)\ dx$; 23.4. $\int_0^6 f(x)\ dx$; 31.1. $\frac{26}{3}$; 31.2. $\frac{9}{2}$; 31.3. $2-\operatorname{sen} 4$;

32. $-\frac{55}{3}$; 33.*a*. Verdadero; 33.*b*. Falso; 33.*c*. Falso; 33.*d*. Verdadero; 33.*e*. Verdadero;

33.*f* Verdadero; 33.*g*. Falso; 33.*h*. Falso; 34.1. $x+x^2$; 34.2. $2x+1$; 34.3. $\operatorname{sen}^4 x\ \tan x$;

34.4. $\sqrt{x^4+1}$; 34.5. $-x\tan x$; 34.6. $2x\int_x^1 \sqrt{u^2+1}\ du - x^2\ \sqrt{x^2+1}$; 34.7. $-\operatorname{sen} x\ \cos^2 x - \cos x\ \operatorname{sen}^2 x$;

34.8. $3x^2\ \sqrt{1+x^{12}}-\sqrt{1+x^4}$; 34.9. $\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos\left(\operatorname{sen} x\right)\right)\cos x$; 34.10. $-\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}^4\left(\frac{1}{x}\right)$; 34.11. $\sqrt{x^3+1}$;

34.12. $\left(x^2-1\right)^{20}$; 34.13. $\cos u\int_{\pi}^{u} \frac{dt}{1+t^4}+\frac{\operatorname{sen} u}{1+u^4}$; 34.14. $\operatorname{sen}\left(t^2\right)$; 34.15. $-\left(2+\sqrt{x}\right)^8$; 34.16. $-\cos\left(x^2\right)$;

34.17. $\frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}$; 34.18. $-\operatorname{sen}\left(\tan^4 x\right)\sec^2 x$; 34.19. $-\frac{2\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x}$; 34.20. $\cos x\int_{\tan x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{2+t^4}}+\left(\frac{2x}{\sqrt{2+x^8}}-\frac{\sec^2 x}{\sqrt{2+\tan^4 x}}\right)\operatorname{sen} x$;

34.21. $\operatorname{sen} x\ \cos x\ \cos\left(\operatorname{sen}^3 x\right)$; 34.22. $\frac{4x-2}{2x+1}-\frac{9x-3}{3x+1}$; 34.23. $4x^3\int_0^{5x+1} \frac{du}{u^2-5}+\frac{5x^4}{(5x+1)^2-5}$;

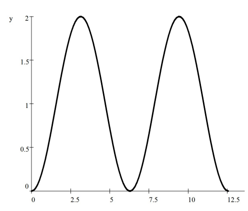
34.24. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{\operatorname{arcsen} x}^{1/x} \operatorname{sen} t\ dt - \frac{1}{x^{3/2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}}$; 34.25. $-\operatorname{sen} x\ \int_{x^2}^{x^2+1} \frac{dy}{1-y^2}+\left(\frac{2x}{1-\left(x^2+1\right)^2}-\frac{2x}{1-x^4}\right)\cos x$;

34.26. $\frac{2x}{\left(x^2-5\right)^2}\int_0^{5x+1} u^4\ du-\frac{5}{x^2-5}\ (5x+1)^4$; 34.27. $3x^{7/3}\operatorname{sen}\left(x^3\right)-\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt[4]{x}}$;

34.28. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \int_{\operatorname{sen} x}^{1/x} \operatorname{arcsen} t\ dt-\frac{1}{x^{3/2}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)-x^{3/2}\cos x$; 36.*a*. $F(0)=0$; 36.*b*. $y=\frac{x^5}{5}+x+C$; 36.*c*. $y=\frac{x^5}{5}+x$;

37.*a*. $F(0)=0$ y $F(2\pi)=0$; 37.*b*. $y=-\cos x+C$; 37.*c*. $y=-\cos x+1$;

37.*e*. Valores extremos : $(0,0)$, $(\pi,2)$, $(2\pi,0)$, $(3\pi,2)$, $(4\pi,0)$ Puntos de inflexión : $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2},1\right)$, $\left(\frac{7\pi}{2},1\right)$;

37.*f*. 

; 39. $(-\infty,1)$; 40. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$; 41.1. $-\frac{9}{16}$; 41.2. 0; 41.3. 1;

41.4. $\frac{1}{20}$; 41.5 0; 41.6. 0; 41.7. 3; 43. $y=\cos x$, $a=\frac{\pi}{6}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Teorema Fundamental del Cálculo

Objetivos a cubrir — Código : MAT-CI.6

- Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.
- Teorema del Valor Medio para integrales. Teorema sobre simetría.
- Área de una región plana.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 90 *: Calcular la siguiente integral* $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x^3-8}{x-2}\, dx.$

Solución : Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a),$$

donde F es una primitiva de f, así, se calcula la familia de primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$, para ello manipulamos algebraicamente dicha función, factorizamos el numerador

$$\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2} = x^2+2x+4, \qquad \text{con } x \neq 2,$$

por lo tanto,

$$\int \frac{x^3-8}{x-2}\, dx = \int \left(x^2+2x+4\right)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C.$$

La integral definida es

$$\int_{-2}^{1} \frac{x^3-8}{x-2}\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \right|_{-2}^{1} = \left(\overbrace{\frac{(1)^3}{3} + (1)^2 + 4(1)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(-2)^3}{3}\ (-2)^2 + 4(-2)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 1 + 4\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 8\right) = \left(\frac{16}{3}\right) - \left(-\frac{20}{3}\right) = 12.$$

Luego,

$$\int_{-2}^{1} \frac{x^3-8}{x-2}\, dx = 12.$$

★

Ejemplo 91 *: Calcular la siguiente integral* $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)}.$

Solución : Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a),$$

donde F es una primitiva de f, así, se calcula la familia de primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2(x/2)}$, para ello procedemos de la siguiente manera:

Es conocido que

$$\operatorname{sen} 2(\cdot) = 2 \operatorname{sen}(\cdot)\cos(\cdot)\,, \tag{2}$$

por otro lado,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

por la ecuación (2) se tiene

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}^2 x = \left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

así,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)} = \int \frac{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2(x/2)}\ dx = \int 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

como

$$\operatorname{sen}^2(\cdot) = \frac{1-\cos 2(\cdot)}{2},$$

entonces,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1-\cos x}{2},$$

esto implica

$$\int 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx = \int 4\ \frac{1-\cos x}{2}\ dx = \int 2(1-\cos x)\ dx = 2\left(\int dx - \int \cos x\ dx\right) = 2x - 2\operatorname{sen} x + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)} = 2x - 2\operatorname{sen} x + C.$$

La integral definida queda

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)} = \left(2x - 2\operatorname{sen} x \ \Big|_0^{\pi/2}\right) = \left(\overbrace{2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\right) - \left(\overbrace{2(0) - 2\operatorname{sen}(0)}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) = \pi - 2$$

★

Ejemplo 92 *: Calcular la siguiente integral*

$$\int_0^8 \left|x^2 - 6x + 8\right|\ dx.$$

Solución : Por definición de valor absoluto, se tiene que

$$\left|x^2-6x+8\right| = \begin{cases} x^2-6x+8 & \text{si} \quad x^2-6x+8 \geq 0 \\ -\left(x^2-6x+8\right) & \text{si} \quad x^2-6x+8 < 0 \end{cases}$$

resolvemos una de las dos desigualdades

$$x^2-6x+8 \geq 0 \qquad\qquad \text{ó} \qquad\qquad x^2-6x+8 < 0,$$

para obtener la ubicación de cada expresión en la recta real. Resolvemos $x^2-6x+8 \geq 0$

$$x^2-6x+8 = (x-2)(x-4) \geq 0,$$

de aquí,

	$(-\infty, 2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$x-2$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-4)$	$+$	$-$	$+$

la definición de valor absoluto nos queda

$$\left|x^2-6x+8\right| = \begin{cases} x^2-6x+8 & \text{si} \quad x\in(-\infty,2)\cup(4,\infty) \\ -\left(x^2-6x+8\right) & \text{si} \quad x\in(2,4) \end{cases}$$

con lo que,

	2	4	
x^2-6x+8		$-\left(x^2-6x+8\right)$	x^2-6x+8

entonces, la integral a resolver la dividimos en tres integrales

$$\int_0^8 \left|x^2-6x+8\right|\,dx = \int_0^2 \left(x^2-6x+8\right)\,dx + \int_2^4 -\left(x^2-6x+8\right)\,dx + \int_4^8 \left(x^2-6x+8\right)\,dx,$$

donde,

$$\int_0^2 \left(x^2-6x+8\right)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right|_0^2 = \left(\overbrace{\frac{(2)^3}{3}-3(2)^2+8(2)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(0)^3}{3}-3(0)^2+8(0)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right)$$

$$= \frac{8}{3}-12+16 = \frac{8}{3}+4 = \frac{20}{3},$$

mientras que,

$$\int_2^4 -\left(x^2-6x+8\right)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right|_2^4 = -\left[\left(\overbrace{\frac{(4)^3}{3}-3(4)^2+8(4)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(2)^3}{3}-3(2)^2+8(2)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{64}{3}-48+32\right)-\left(\frac{8}{3}-12+16\right)\right] = -\left[\frac{16}{3}-\frac{20}{3}\right] = \frac{4}{3},$$

y por último,

$$\int_4^8 \left(x^2-6x+8\right)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right|_4^8 = \left(\overbrace{\frac{(8)^3}{3}-3(8)^2+8(8)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(4)^3}{3}-3(4)^2+8(4)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right)$$

$$= \left(\frac{512}{3}-192+64\right)-\left(\frac{64}{3}-48+32\right) = \frac{128}{3}-\frac{16}{3} = \frac{112}{3}.$$

Luego,

$$\int_0^8 \left|x^2-6x+8\right|\ dx = \frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{112}{3}=\frac{136}{3}.$$

★

Ejemplo 93 *: Calcular la siguiente integral*

$$\int_0^{\sqrt{6}/2} \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}.$$

Solución : Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b)-F(a),$$

donde, F es una primitiva de f. Buscamos la familia de primitiva de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x^2}}$.

Es conocido que,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arcsen} x + C,$$

manipulando el integrando, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3\left(1-\dfrac{2x^2}{3}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{2x^2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}\ x}{3}\right)^2}},$$

entonces,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\ dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}\ x}{3}\right)^2}},$$

se propone el cambio de variable

$$u=\frac{\sqrt{6}\ x}{3} \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad du=\frac{\sqrt{6}}{3}\ dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{6}}\ du = dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{6}}{2}\ du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos el intervalo de integración

$$\text{Si} \quad x=0, \quad \text{entonces,} \quad u=\frac{\sqrt{6}\ (0)}{3} \quad \Longrightarrow \quad u=0$$

$$\text{Si} \quad x=\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \text{entonces,} \quad u=\frac{\sqrt{6}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)}{3}=\frac{\frac{6}{2}}{3} \quad \Longrightarrow \quad u=1,$$

la integral queda

$$\int_0^{\sqrt{6}/2} \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}\ du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arcsen} u\ \Big|_0^1\right.$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underbrace{\operatorname{arcsen}(1)}_{\boxed{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}}}}-\underbrace{\operatorname{arcsen}(0)}_{\boxed{\substack{\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\sqrt{2}\ \pi}{4}.$$

Luego,

$$\int_0^{\sqrt{6}/2} \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

★

Ejemplo 94 *: Calcular la siguiente integral*

$$\int_{-1}^{3} \left| \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \right| dx$$

Solución : Por definición de valor absoluto, se tiene que

$$\left| \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \right| = \begin{cases} \dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} & \text{si} \quad \dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \geq 0 \\ -\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} & \text{si} \quad \dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} < 0 \end{cases}$$

resolvemos una de las dos desigualdades

$$\frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \geq 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} < 0,$$

para obtener la ubicación de cada expresión en la recta real. Resolvemos $\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \geq 0$

Factorizamos numerador y denominador, en ambos casos, por ser polinomios cuadráticos, aplicamos la resolvente

- Numerador : $3x^2+6x+8$. Aplicamos la resolvente para $a=3$, $b=6$ y $c=8$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(8)}}{2(3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-96}}{2(3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{-60}}{6} \quad \leftarrow \quad \text{raíz imaginaria}$$

- Denominador : x^2+2x+3. Aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=2$ y $c=3$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad \leftarrow \quad \text{raíz imaginaria}$$

de aquí,

	$(-\infty, \infty)$
$3x^2+6x+8$	$+$
x^2+2x+3	$+$
$\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}$	$+$

es decir, la expresión $\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}$ siempre es mayor estricto que cero, luego

$$\left| \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \right| = \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}, \qquad \text{así,} \qquad \int_{-1}^{3} \left| \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \right| dx = \int_{-1}^{3} \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}\, dx.$$

Manipulando algebraicamente el integrando, observemos que podemos dividir los polinomios o también, escribir el numerador como

$$3x^2+6x+8 = 3x^2+6x+9-1 = \left(3x^2+6x+9\right) - 1 = 3\left(x^2+2x+3\right) - 1,$$

con lo que, el integrando queda

$$\frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} = \frac{3\left(x^2+2x+3\right)-1}{x^2+2x+3} = \frac{3\left(x^2+2x+3\right)}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3} = 3 - \frac{1}{x^2+2x+3},$$

es decir,

$$\int_{-1}^{3} \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}\,dx = \int_{-1}^{3}\left(3-\frac{1}{x^2+2x+3}\right)dx = \int_{-1}^{3} 3\,dx - \int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx,$$

donde,

$$\int_{-1}^{3} 3\,dx = 3\left(\left.x\right|_{-1}^{3} = 3\left(\overset{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\\ \downarrow}}{(3)} - \overset{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\\ \downarrow}}{(-1)}\right)\right) = 3\,(3+1) = 12,$$

mientras que, para resolver la segunda integral de la derecha de la igualdad, completamos cuadrado en el denominador y manipulamos algebraicamente

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = 2\left(1+\frac{(x+1)^2}{2}\right) = 2\left(1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right),$$

entonces,

$$\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int_{-1}^{3}\frac{1}{2\left(1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx,$$

se propone el cambio de variable

$$u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}\,du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos el intervalo de integración

$$\text{Si} \quad x=-1, \quad \text{entonces,} \quad u = \frac{(-1)+1}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad u=0$$

$$\text{Si} \quad x=3, \quad \text{entonces,} \quad u = \frac{(3)+1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad u=2\sqrt{2},$$

la integral queda

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}\,du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{2\sqrt{2}}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left.\arctan u\right|_{0}^{2\sqrt{2}}\right.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overbrace{\arctan\left(2\sqrt{2}\right)}^{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\\ \downarrow}} - \overbrace{\arctan(0)}^{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\\ \downarrow}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(2\sqrt{2}\right)$$

Finalmente,

$$\int_{-1}^{3}\left|\frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}\right|\,dx = 12 - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(2\sqrt{2}\right).$$

★

Ejemplo 95 *: Encuentre todos los valores de x que satisfacen el Teorema de Valor Medio para integrales de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en el intervalo $[1,4]$.*

Solución : Observemos que la función f es continua en el intervalo $[1,4]$, entonces el Teorema del Valor Medio para integrales garantiza la existencia de, al menos, un número $x = c$ en $[1,4]$, tal que se cumple

$$f(c) = \frac{1}{4-1}\int_1^4 \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{2x+1}\, dx,$$

calculamos la integral, para ello se propone el cambio de variable

$$u = 2x+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2\, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{2} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos los límites de integración

$$\begin{array}{lllll} \text{Si} \quad x = 1 & \text{entonces,} & u = 2(1)+1 & \Longrightarrow & u = 3 \\ \text{Si} \quad x = 4 & \text{entonces,} & u = 2(4)+1 & \Longrightarrow & u = 9 \end{array}$$

y la integral nos queda

$$\int_1^4 \sqrt{2x+1}\, dx = \int_3^9 \sqrt{u}\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_3^9 u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\, u^{3/2}\right|_3^9 = \frac{1}{3}\left(\overbrace{9^{3/2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}} - \overbrace{3^{3/2}}^{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\right) = \frac{1}{3}\left(27 - 3\sqrt{3}\right) = 9 - \sqrt{3}$$

entonces,

$$f(c) = \frac{1}{3}\left(9 - \sqrt{3}\right) \quad \Longrightarrow \quad f(c) = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

como $f(c) = \sqrt{2c+1}$, tenemos

$$\sqrt{2c+1} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad 2c+1 = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2c+1 = 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad 2c = 8 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad 2c = \frac{25}{3} - 2\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c = \frac{25}{6} - \sqrt{3}.}$$

★

Ejemplo 96 *: Encuentre los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo cerrado $[0,b]$ sea igual a 3.*

Solución : Es conocido que el valor promedio de una función f en el intervalo $[a,b]$ se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

así,

$$3 = f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-0}\int_0^b \left(2 + 6x - 3x^2\right)\, dx,$$

observemos que $b \neq 0$, ¿Por qué?. Calculamos la integral,

$$\int_0^b \left(2 + 6x - 3x^2\right)\, dx = \left(\; 2x + 3x^2 - x^3 \right|_0^b = 2b + 3b^2 - b^3$$

con lo que obtenemos

$$3 = \frac{1}{b}\left(2b + 3b^2 - b^3\right) \implies 3 = 2 + 3b - b^2 \implies b^2 - 3b + 1 = 0,$$

las raíces reales del polinomio de segundo grado son los valores de b, las cuales son

$$b = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

★

Ejemplo 97 *: Demuestre que si f es una función impar, entonces* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$

Demostración : Como f es impar, se cumple que $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \text{Dom } f$, así,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx,$$

Consideremos la primera integral del lado derecho de la última igualdad, $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(-x)\, dx$. Se propone el cambio de variable

$$u = -x \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad du = -\,dx \implies -\,du = dx,$$

Cambiamos los límites de integración

$$\text{Si} \quad x = -a \quad \text{entonces,} \quad u = -(-a) \implies u = a$$

$$\text{Si} \quad x = 0 \quad \text{entonces,} \quad u = -(0) \implies u = 0,$$

la integral nos queda,

$$\int_{-a}^{0} f(-x)\, dx = -\int_{a}^{0} f(u)\, du = \int_{0}^{a} f(u)\, du,$$

luego,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(u)\, du + \int_{0}^{a} f(x)\, dx,$$

observemos que ambas integrales a la derecha de la igualdad representan la misma cantidad numérica, ya que si F es una primitiva de f, entonces

$$\int_{0}^{a} f(u)\, du = \left(F(u) \right|_{0}^{a} = F(a) - F(0) \qquad \text{y} \qquad \int_{0}^{a} f(x)\, dx = \left(F(x) \right|_{0}^{a} = F(a) - F(0),$$

por lo tanto,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\left(F(a) - F(0)\right) + \left(F(a) - F(0)\right) = 0.$$

★

Ejemplo 98 *: Demuestre que si f es una función par, entonces* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$ *farith*

Demostración : Como f es par, se cumple que $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \text{Dom } f$, así,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx,$$

Consideremos la primera integral del lado derecho de la última igualdad, $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(-x)\, dx$. Se propone el cambio de variable

$$u = -x \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \quad du = -\,dx \implies -\,du = dx,$$

Cambiamos los límites de integración

$$\text{Si} \quad x = -a \quad \text{entonces,} \quad u = -(-a) \quad \Longrightarrow \quad u = a$$

$$\text{Si} \quad x = 0 \quad \text{entonces,} \quad u = -(0) \quad \Longrightarrow \quad u = 0,$$

la integral nos queda,

$$\int_{-a}^{0} f(-x)\ dx = -\int_{a}^{0} f(u)\ du = \int_{0}^{a} f(u)\ du,$$

luego,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx,$$

observemos que ambas integrales a la derecha de la igualdad representan la misma cantidad numérica, ya que si F es una primitiva de f, entonces

$$\int_{0}^{a} f(u)\ du = \left(F(u) \right|_{0}^{a} = F(a) - F(0) \qquad \text{y} \qquad \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \left(F(x) \right|_{0}^{a} = F(a) - F(0),$$

por lo tanto,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = (F(a) - F(0)) + (F(a) - F(0)) = 2(F(a) - F(0)) = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx.$$

★

Ejemplo 99 *: Calcular la integral*

$$\int_{1}^{3} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}(x-2)}{(x-2)^2}\ dx.$$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u = x - 2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos los límites de integración

$$\text{Si} \quad x = 1 \quad \text{entonces,} \quad u = (1) - 2 \quad \Longrightarrow \quad u = -1$$

$$\text{Si} \quad x = 3 \quad \text{entonces,} \quad u = (3) - 2 \quad \Longrightarrow \quad u = 1$$

la integral nos queda

$$\int_{1}^{3} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}(x-2)}{(x-2)^2}\ dx = \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}u\right)}{u^2}\ du,$$

en vista que estamos integrando sobre un intervalo simétrico, estudiamos la simetría de la función

$$f(-u) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}(-u)}{(-u)^2} = \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}u\right)}{u^2} = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}u\right)}{u^2} = -f(u),$$

es decir, la función es impar, luego, la integral de la función impar $f(u) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}u\right)}{u^2}$ sobre el intervalo simétrico $[-1, 1]$ es igual a cero (ver ejemplo 97)

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}u\right)}{u^2}\ du = 0,$$

así,

$$\int_{1}^{3} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}(x-2)}{(x-2)^2}\ dx = 0.$$

★

Ejemplo 100 *: Si a y b son números positivos, demuestre que* $\displaystyle\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a \, dx.$

Demostración : Se propone el cambio de variable

$$u = 1 - x \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1 - u \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\, du = dx,$$

cambiamos los límites de integración,

$$\text{Si} \quad x = 0 \quad \text{entonces,} \quad u = 1 - (0) \quad \Longrightarrow \quad u = 1$$

$$\text{Si} \quad x = 1 \quad \text{entonces,} \quad u = 1 - (1) \quad \Longrightarrow \quad u = 0,$$

la integral nos queda

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \int_1^0 (1-u)^a u^b \, (-du) = -\int_1^0 u^b (1-u)^a \, du = \int_0^1 u^b (1-u)^a \, du,$$

observemos que la integral $\displaystyle\int_0^1 u^b (1-u)^a \, du$ tiene el mismo valor numérico que $\displaystyle\int_0^1 x^b (1-x)^a \, dx$, por lo tanto

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a \, dx.$$

★

Ejemplo 101 *: Demuestre que si f es una función periódica, con período p, entonces*

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Demostración : Como f es periódica, con período p, se cumple que $f(x) = f(x+p) = f(x-p)$, para todo $x \in \text{Dom } f$, entonces

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x) \, dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x-p) \, dx,$$

se propone el cambio de variable

$$u = x - p \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

cambiamos los límites de integración,

$$\text{Si} \quad x = a + p \quad \text{entonces,} \quad u = (a+p) - p \quad \Longrightarrow \quad u = a$$

$$\text{Si} \quad x = b + p \quad \text{entonces,} \quad u = (b+p) - p \quad \Longrightarrow \quad u = b,$$

la integral nos queda

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x-p) \, dx = \int_a^b f(u) \, du,$$

observemos que la integral $\displaystyle\int_a^b f(u) \, du$ tiene el mismo valor numérico que $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx$, ya que, si F es una primitiva de la función f, entonces

$$\int_a^b f(u) \, du = \Big(F(u) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x) \, dx = \Big(F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

así,

$$\int_a^b f(u) \, du = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx,$$

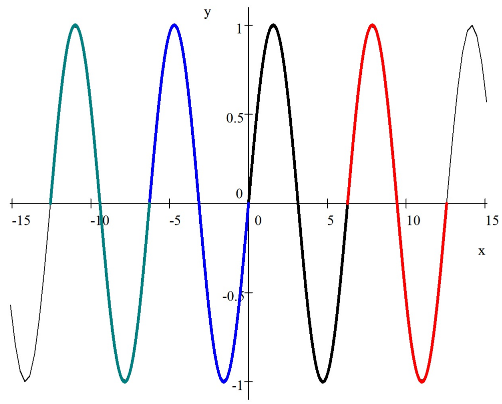
por lo tanto,

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

★

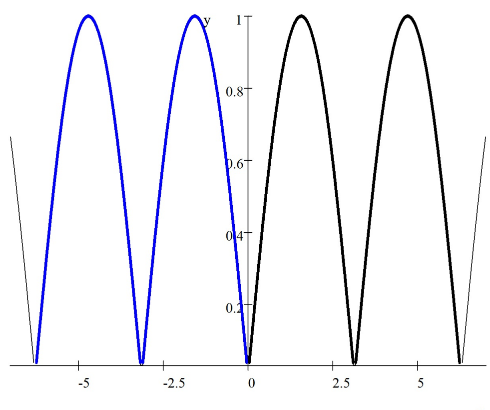
Ejemplo 102 *: Calcular* $\displaystyle\int_0^{100\pi} |\operatorname{sen} x| \; dx.$

Solución : Es conocido que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función períodica, de período $p = 2\pi$.



Función $f(x) = \operatorname{sen} x$, periódica, $p = 2\pi$.

mientras que, la función $g(x) = |\operatorname{sen} x|$ es una función períodica, de período $p = \pi$.



Función $g(x) = |\operatorname{sen} x|$, periódica, $p = \pi$.

Por lo tanto,

$$\int_0^{100\pi} |\operatorname{sen} x| \; dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \cdots + \int_{99\pi}^{100\pi} \operatorname{sen} x \; dx$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx + \cdots + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx}_{\boxed{100 \text{ veces}}} = 100 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx,$$

de aquí,

$$\int_0^{100\pi} |\operatorname{sen} x| \; dx = 100 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx = 100 \left(-\cos(x) \Big|_0^{\pi} \right) = -100 \left(\overbrace{\cos(\pi)}^{\boxed{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite superior}}}} - \overbrace{\cos(0)}^{\boxed{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite inferior}}}} \right) = 200.$$

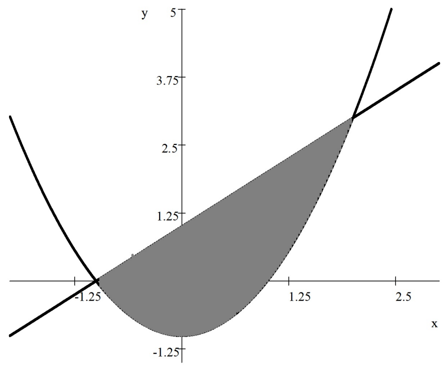
Luego,

$$\int_0^{100\pi} |\operatorname{sen} x| \; dx = 200.$$

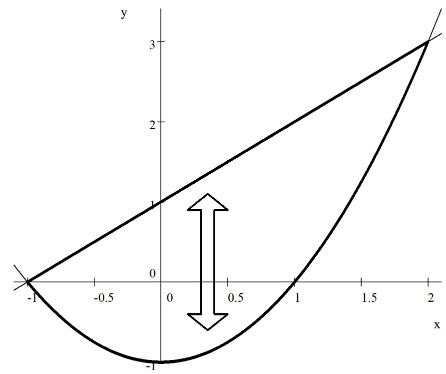
★

Ejemplo 103 *: Hallar el área de la región limitada por las graficas de* $f(x) = x + 1$ *y* $g(x) = x^2 - 1$.

Solución : Graficamente



Región limitada por $f(x) = x + 1$,
y $g(x) = x^2 - 1$.



Altura de la región $= \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{mayor}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{menor}\end{array}\right)$

Buscamos los puntos de intersección entre las curvas

$$x + 1 = x^2 - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - x - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x+1)(x-2) = 0$$

luego, las coordenadas x de intersección son $x = -1$ y $x = 2$. Entonces,

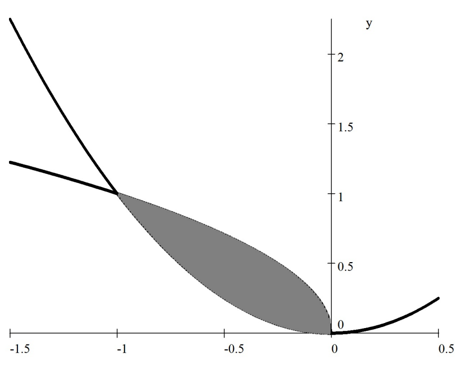
$$A = \int_{-1}^{2} \left((x+1) - \left(x^2 - 1\right)\right) \, dx = \int_{-1}^{2} \left(x - x^2 + 2\right) \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\overbrace{\frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} + 2(2)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2},$$

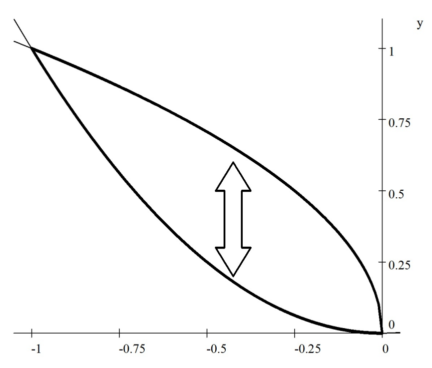
por lo tanto, $A = \dfrac{9}{2}$. ★

Ejemplo 104 *: Hallar el área de la región limitada por* $f(x) = \sqrt{-x}$ *y* $g(x) = x^2$.

Solución : Graficamente



Región limitada por $f(x) = \sqrt{-x}$,
y $g(x) = x^2$.



Altura de la región $= \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{mayor}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{menor}\end{array}\right)$

En primer lugar, observemos que el dominio de la función f es $(-\infty, 0]$. Buscamos los puntos de intersección entre las curvas

$$\sqrt{-x} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad -x = x^4 \quad \Longrightarrow \quad x^4 + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x\,(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = 0$$

luego, las coordenadas x de intersección son $x = -1$ y $x = 0$. Entonces

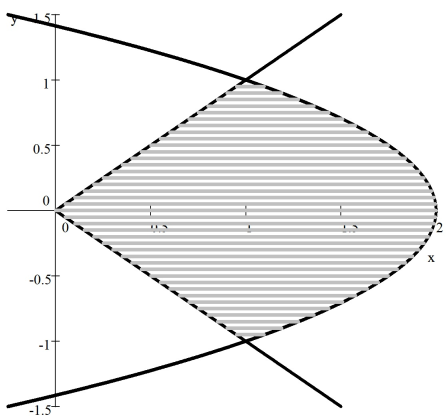
$$A = \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{-x} - x^2\right)\, dx = \left(-\frac{2}{3}\sqrt{(-x)^3} - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0}$$

$$= \left(\overbrace{-\frac{2}{3}\sqrt{(-(0))^3} - \frac{(0)^3}{3}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{-\frac{2}{3}\sqrt{(-(-1))^3} - \frac{(-1)^3}{3}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = -\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

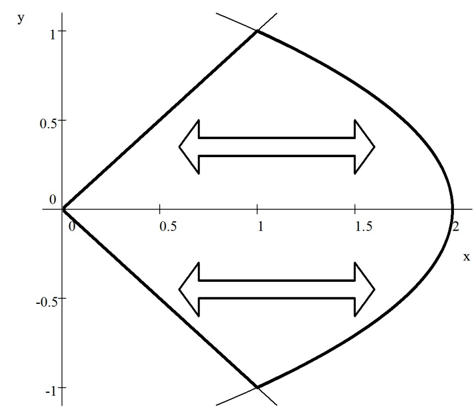
por lo tanto, $A = \dfrac{1}{3}$. ★

Ejemplo 105 *: Hallar el área de la región limitada por* $x = 2 - y^2$ *y* $x = |y|$.

Solución : Graficamente



Región limitada por $x = 2 - y^2$, y $x = |y|$.



Altura de la región $= \left(\text{Función mayor}\right) - \left(\text{Función menor}\right)$

Buscamos los puntos de intersección entre las curvas. Por definición de valor absoluto, se tiene que

$$|y| = \begin{cases} y & \text{si} \quad y \geq 0 \\ -y & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

entonces, estudiamos dos casos

- Si $y \geq 0$, se tiene

$$2 - y^2 = y \quad \Longrightarrow \quad y^2 + y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (y-1)(y+2) = 0,$$

luego, las coordenadas y de intersección son $y = 1$ y $y = -2$, como $y \geq 0$, concluimos que $y = 1$.

- Si $y < 0$, se tiene

$$2 - y^2 = -y \quad \Longrightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (y+1)(y-2) = 0,$$

luego, las coordenadas y de intersección son $y = -1$ y $y = 2$, como $y < 0$, concluimos que $y = -1$.

Así, se desea encontrar el área de la región limitada por las curvas $x = 2 - y^2$ y $x = |y|$ en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que el área viene dada por

$$A = \int_{-1}^{1} \left(2 - y^2 - |y|\right) \, dy = \int_{-1}^{0} \left((2 - y^2) - (-y)\right) \, dy + \int_{0}^{1} \left((2 - y^2) - (y)\right) \, dy,$$

donde,

$$\int_{-1}^{0} \left((2 - y^2) - (-y)\right) \, dy = \int_{-1}^{0} \left(2 - y^2 + y\right) \, dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right|_{-1}^{0}$$

$$= \left(\overbrace{2\,(0) - \frac{(0)^3}{3} + \frac{(0)^2}{2}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{2\,(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = -\left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6},$$

aplicando el mismo procedimiento para la otra integral y se obtiene

$$\int_{0}^{1} \left((2 - y^2) - (y)\right) \, dy = \int_{0}^{1} \left(2 - y^2 - y\right) \, dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right|_{0}^{1}$$

$$= \left(\overbrace{2\,(1) - \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{2\,(0) - \frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^2}{2}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6},$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

P.D. Se puede usar lo simétrico de la región para facilitar los cálculos. Explique. ★

Ejemplo 106 *: Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $x = 1$ y los ejes coordenados.*

Solución : Obtenemos la grafica de la función en el intervalo $[0, 1]$. Hallamos el valor de la función f en los extremos del intervalo

$$\text{Si} \quad x = 0, \quad \text{entonces} \quad y = (0)^3 + (0)^2 + 2\,(0) + 1 = 1, \quad \text{se tiene} \quad (0, 1)$$

$$\text{Si} \quad x = 1, \quad \text{entonces} \quad y = (1)^3 + (1)^2 + 2\,(1) + 1 = 5, \quad \text{se tiene} \quad (1, 5),$$

por lo tanto, la función f pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 5)$, además, la función $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ es creciente en $[0, 1]$, ya que

$$f'(x) = \left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right)' = 3x^2 + 2x + 2 > 0,$$

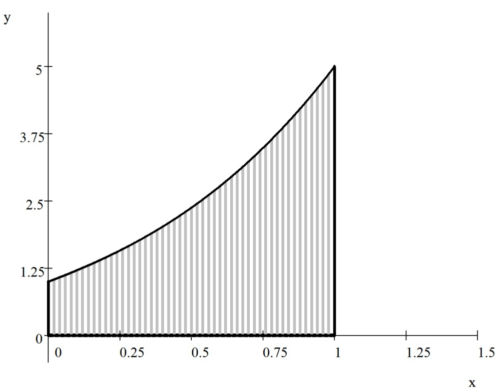
estudiamos su concavidad de la función en el intervalo $[0, 1]$, para ello volvemos a derivar

$$f''(x) = \left(3x^2 + 2x + 2\right)' = 6x + 2,$$

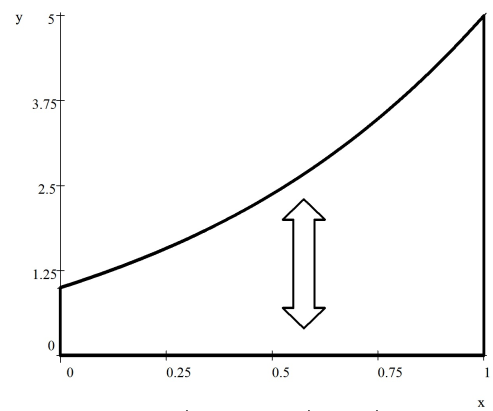
y se observa que si $x \in [0.1]$, entonces $f''(x) = 6x + 2 > 0$, luego, f concava hacia arriba en el intervalo.

Observe que el comportamiento de la función fuera del intervalo $[0,1]$ no es de interés para la obtención del área de la región.

La grafica de la región es



Región limitada por $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $x = 1$ y los ejes coordenados.



Altura de la región $= \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{mayor}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{menor}\end{array}\right)$

entonces, el área viene dada por

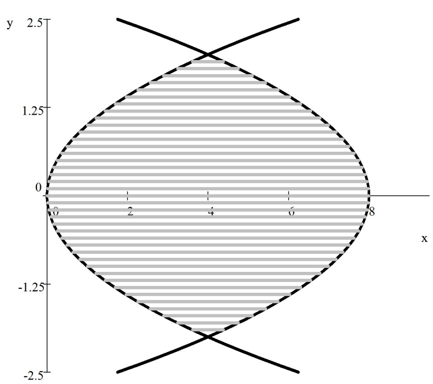
$$A = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2} + x\right|_0^1 = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x\right|_0^1$$

$$= \left(\overbrace{\frac{(1)^4}{4} + \frac{(1)^3}{3} + (1)^2 + (1)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite superior}\end{array}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{(0)^4}{4} + \frac{(0)^3}{3} + (0)^2 + (0)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Primitiva evaluada en}\\ \text{el límite inferior}\end{array}}}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 2\right) = \frac{31}{12},$$

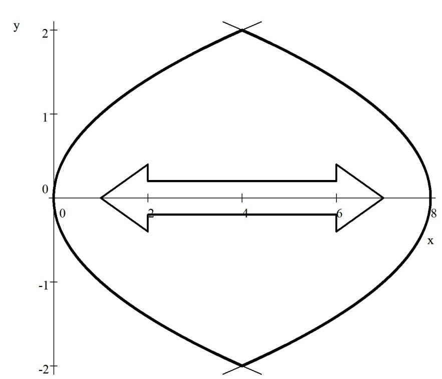
por lo tanto, $A = \dfrac{31}{12}$. ★

Ejemplo 107 *: Hallar el área la región limitada por las curvas* $x = 8 - y^2$, $x = y^2$.

Solución : La representación gráfica de la región es



Región limitada por $x = 8 - y^2$, y $x = y^2$.



Altura de la región $= \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{mayor}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Función}\\ \text{menor}\end{array}\right)$

Buscamos los puntos de intersección entre las curvas

$$8 - y^2 = y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 8 = 2y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm 2,$$

entonces

$$A = \int_{-2}^{2} \left(\left(8 - y^2\right) - \left(y^2\right) \right) \, dy = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2y^2\right) \, dy = \left(8y - 2 \, \frac{y^3}{3} \right|_{-2}^{2}$$

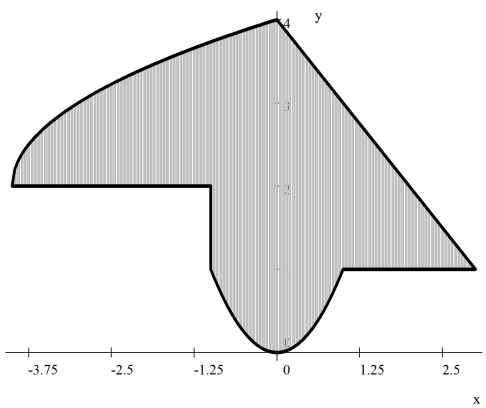
$$= \left(\overbrace{8\,(2) - 2 \, \frac{(2)^3}{3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite superior} \\ \downarrow}} \right) - \left(\overbrace{8\,(-2) - 2 \, \frac{(-2)^3}{3}}^{\substack{\text{Primitiva evaluada en} \\ \text{el límite inferior} \\ \downarrow}} \right) = \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = 32 - \frac{16}{3} = \frac{80}{3},$$

por lo tanto, $A = \dfrac{80}{3}$. ★

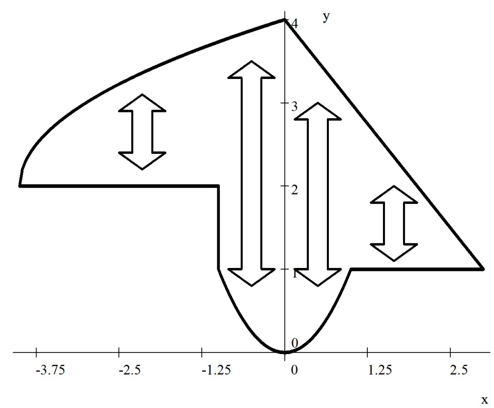
Ejemplo 108 *: Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas*

$$\begin{cases} y = x^2 & si \quad x \in [-1, 1] \\ y = 2 & si \quad x \in [-4, -1] \\ y = 1 & si \quad x \in [1, 3] \\ y = \sqrt{x+4} + 2 & si \quad x \in [-4, 0] \\ y = 4 - x & si \quad x \in [0, 3] \\ x = -1 & si \quad y \in [1, 2] \end{cases}$$

Solución : Graficamente, se tiene la siguiente región



Región limitada por las curvas dadas.



$$\begin{matrix}\text{Altura de} \\ \text{la región}\end{matrix} = \left(\begin{matrix}\text{Función} \\ \text{mayor}\end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix}\text{Función} \\ \text{menor}\end{matrix} \right)$$

Así, el área viene dada por

$$A = \int_{-4}^{-1} \left(\sqrt{x+4} + 2 - 2\right) dx + \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4} + 2 - x^2\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4 - x - x^2\right) dx + \int_{1}^{3} (4 - x - 1) \, dx$$

$$= \int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4} \, dx + \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4} + 2 - x^2\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4 - x - x^2\right) dx + \int_{1}^{3} (3 - x) \, dx,$$

donde,

- Cálculo de la integral $\int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4}\, dx$: Se propone el cambio de variable

$$u = x + 4 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

cambiamos los límites de integración,

$$\text{Si} \quad x = -4 \quad \text{entonces,} \quad u = (-4) + 4 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

$$\text{Si} \quad x = -1 \quad \text{entonces,} \quad u = (-1) + 4 \quad \Longrightarrow \quad u = 3,$$

la integral nos queda,

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4}\, dx = \int_0^3 \sqrt{u}\, du = \left(\frac{2}{3}\, u^{3/2} \Big|_0^3 \right) = \frac{2}{3} \left(\overbrace{\sqrt{3^3}}^{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\\ \downarrow}} - \overbrace{\sqrt{0^3}}^{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\\ \downarrow}} \right) = \frac{2}{3}\, 3\, \sqrt{3} = 2\, \sqrt{3}.$$

de aquí,

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt{x+4}\, dx = 2\, \sqrt{3}.$$

- Cálculo de la integral $\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4} + 2 - x^2 \right) dx$: Por linealidad de la integral definida, se tiene

$$\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+4} + 2 - x^2 \right) dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{x+4}\, dx + 2 \int_{-1}^{0} dx - \int_{-1}^{0} x^2\, dx.$$

Para la primera integral del lado derecho de la igualdad, procedemos de la misma manera que el item anterior, se propone el mismo cambio de variable, lo que cambia son los límites de integración. Se propone el cambio de variable

$$u = x + 4 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

cambiamos los límites de integración,

$$\text{Si} \quad x = -1 \quad \text{entonces,} \quad u = (-1) + 4 \quad \Longrightarrow \quad u = 3$$

$$\text{Si} \quad x = 0 \quad \text{entonces,} \quad u = (0) + 4 \quad \Longrightarrow \quad u = 4,$$

la integral nos queda,

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x+4}\, dx = \int_3^4 \sqrt{u}\, du = \left(\frac{2}{3}\, u^{3/2} \Big|_3^4 \right) = \frac{2}{3} \left(\overbrace{\sqrt{4^3}}^{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\\ \downarrow}} - \overbrace{\sqrt{3^3}}^{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\\ \downarrow}} \right) = \frac{2}{3} \left(8 - 3\, \sqrt{3} \right) = \frac{16}{3} - 2\, \sqrt{3}.$$

Por otra parte,

$$\int_{-1}^{0} dx = \left(x \Big|_{-1}^{0} \right) = \left(\overset{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}\\ \downarrow}}{(0)} - \overset{\substack{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}\\ \downarrow}}{(-1)} \right) = 1,$$

por último,

$$\int_{-1}^{0} x^2\ dx = \left(\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}\left(\overbrace{(0)^3}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}} - \overbrace{(-1)^3}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = \frac{1}{3},$$

entonces,

$$\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right)\ dx = \frac{16}{3} - 2\ \sqrt{3} + 2\,(1) - \frac{1}{3} = 7 - 2\ \sqrt{3},$$

Luego,

$$\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right)\ dx = 7 - 2\ \sqrt{3}.$$

- Cálculo de la integral $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(4-x-x^2\right)\ dx$: Tenemos que

$$\int_{0}^{1}\left(4-x-x^2\right)\ dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} = \left(\overbrace{4\,(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{4\,(0) - \frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = \frac{19}{6}.$$

Luego,

$$\int_{0}^{1}\left(4-x-x^2\right)\ dx = \frac{19}{6}.$$

- Cálculo de la integral $\displaystyle\int_{1}^{3}(3-x)\ dx$: Tenemos que

$$\int_{1}^{3}(3-x)\ dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\right|_{1}^{3} = \left(\overbrace{3\,(3) - \frac{(3)^2}{2}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite superior}}}\right) - \left(\overbrace{3\,(1) - \frac{(1)^2}{2}}^{\boxed{\text{Primitiva evaluada en el límite inferior}}}\right) = \left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right) = 2.$$

Luego,

$$\int_{1}^{3}(3-x)\ dx = 2.$$

Finalmente,

$$A = \underbrace{\int_{-4}^{-1}\left(\sqrt{x+4}+2-2\right)dx}_{\boxed{2\ \sqrt{3}}} + \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{x+4}+2-x^2\right)dx}_{\boxed{7-2\ \sqrt{3}}} + \underbrace{\int_{0}^{1}\left(4-x-x^2\right)dx}_{\boxed{\frac{19}{6}}} + \underbrace{\int_{1}^{3}(4-x-1)\,dx}_{\boxed{2}}$$

es decir,

$$A = 2\sqrt{3} + \left(7-2\sqrt{3}\right) + \frac{19}{6} + 2 = \frac{73}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{73}{6}.$$

★

Ejercicios

1. Calcule las siguientes integrales

1. $\int_0^4 dx$ 2. $\int_{-1}^2 3\ dx$ 3. $\int_{-3}^{-1} -2\ dx$ 4. $\int_{1/2}^{3/2} \pi\ dx$ 5. $\int_1^3 x\ dx$ 6. $\int_0^2 x^3\ dx$

7. $\int_{-1}^2 x^4\ dx$ 8. $\int_1^4 \frac{1}{w^2}\ dw$ 9. $\int_0^4 \sqrt{t}\ dt$ 10. $\int_1^2 \frac{2}{t^3}\ dt$ 11. $\int_1^8 \sqrt[3]{t}\ dt$

12. $\int_0^{\pi/2} \cos t\ dt$ 13. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} t\ dt$ 14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 t\ dt$ 15. $\int_1^2 \left(4t^3 + 7\right)\ dt$

16. $\int_2^4 \left(t^2 + \frac{1}{t^3}\right)\ dt$ 17. $\int_0^1 \left(x^{4/3} - 2x^{1/3}\right)\ dx$ 18. $\int_0^{\pi/2} (2x + \operatorname{sen} x)\ dx$

19. $\int_0^1 \left(\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{4}\right)\ dx$ 20. $\int_a^{8a} \left(a^{1/3} - x^{1/3}\right)\ dx$ 21. $\int_{-1}^2 \left(3x^2 - 2x + 3\right)\ dx$

22. $\int_0^{\pi/2} (4t + 3 + \cos t)\ dt$ 23. $\int_0^1 \left(2t^4 - 3t^2 + 5\right)\ dt$ 24. $\int_{-4}^{-1} \frac{1 - t^4}{2t^2}\ dt$

25. $\int_1^4 \frac{x^5 - x}{3x^3}\ dx$ 26. $\int_1^4 \frac{s^4 - 8}{s^2}\ ds$ 27. $\int_{-1}^1 \frac{x + x^3 + x^5}{1 + x^2 + x^4}\ dx$ 28. $\int_0^1 \left(t^2 + 2t\right)^2\ dt$

29. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\ dx$ 30. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\ dx$ 31. $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x + 1}\ dx$ 32. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}\ dx$

33. $\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}(4x)\ dx}{\cos(2x)\ \cos x}$ 34. $\int_0^1 \frac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}} dx$ 35. $\int_0^2 \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4} dx$ 36. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$

37. $\int_{-2}^2 \left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)\ dx$ 38. $\int_0^{1/2} \frac{1 - x^2}{x^4 - 1}\ dx$ 39. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{\cos x + \operatorname{sen} x}\ dx$

40. $\int_{-1}^3 [\![x]\!]\ dx$ 41. $\int_{-2}^3 [\![x^2]\!]\ dx$ 42. $\int_{-1}^1 [\![x^3]\!]\ dx$ 43. $\int_0^2 [\![2x - 1]\!]\ dx$

44. $\int_0^{5/3} [\![2 - 3x]\!]\ dx$ 45. $\int_{-\sqrt{5}}^2 [\![t^2 - 1]\!]\ dt$ 46. $\int_{-2}^{\sqrt{7}} [\![2 - x^2]\!]\ dx$

47. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} [\![x^2 + 1]\!]\ dx$ 48. $\int_{-2}^2 [\![x^2 - 2x - 1]\!]\ dx$ 49. $\int_{-2}^1 [\![x^2 + 2x + 1]\!]\ dx$

50. $\int_{-3}^0 [\![-x^2 - 4x - 2]\!]\ dx$

2. Calcular las siguientes integrales usando un cambio de variable apropiado

1. $\int_{-1}^3 \frac{dt}{(t + 2)^2}$ 2. $\int_0^2 \frac{x\ dx}{(x^2 + 1)^2}$ 3. $\int_0^1 \frac{z\ dz}{(z^2 + 1)^3}$ 4. $\int_2^{10} \sqrt{y - 1}\ dy$

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}}$ 6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$ 7. $\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \frac{dz}{3z^2 + 2}$ 8. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 3}$

9. $\displaystyle\int_5^8 \sqrt{3x+1}\, dx$ 10. $\displaystyle\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^{10}\, dx$ 11. $\displaystyle\int_1^7 \frac{dt}{\sqrt{2t+2}}$ 12. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{7-2t}}$

13. $\displaystyle\int_1^3 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^3+3t}}\, dt$ 14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \operatorname{sen} x\, dx$ 15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(3x)\ \cos(3x)\, dx$

16. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}\ \left(\sqrt{t}+1\right)^3}$ 17. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ 18. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arcsen} t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ 19. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\, dx}{1+x^6}$

20. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{sen}^5\theta\, d\theta$ 21. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^2+9}}$ 22. $\displaystyle\int_{-3}^3 t\sqrt{7+t^2}\, dt$ 23. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{16-3x}\, dx$

24. $\displaystyle\int_{-1}^0 3x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$ 25. $\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}\right) dx$ 26. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{1+2x}}$

3. Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_{-2}^1 |x|\, dx$ 2. $\displaystyle\int_{-2}^1 \left|x^3\right|\, dx$ 3. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-2|x|)\, dx$ 4. $\displaystyle\int_0^4 |x-2|\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} t|\, dt$ 6. $\displaystyle\int_0^3 |2x-3|\, dx$ 7. $\displaystyle\int_{-2}^3 \left|x^2-1\right|\, dx$ 8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\left|t^3\right|+t^3\right) dt$

9. $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2-|x-1|\right) dx$ 10. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^5+|\operatorname{sen} x|\right) dx$ 11. $\displaystyle\int_0^5 \left|7x-2x^2-3\right|\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^4 \left|x^2-4x+3\right|\, dx$ 13. $\displaystyle\int_{-3}^3 \sqrt{3-|t|}\, dt$ 14. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{|t|-t}\, dt$

4. Si $f(1)=12$, f' continua y $\displaystyle\int_1^4 f'(x)\, dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

5. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\, dx.$$

6. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x+c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx.$$

7. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\, dx.$$

8. Use la sustitución $u=\pi-x$ para demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$.

9. Suponga que f' es integrable y $|f'(x)|\leq M$, para todo x. Demuestre que

$$|f(x)| \leq |f(a)| + M|b-a|.$$

10. Encuentre una función f y un valor de la constante a, tal que: $\displaystyle 2\int_a^x f(t)\, dt = 2\operatorname{sen} x - 1.$

11. Si f' es continua en $[a,b]$, demuestre que: $2\int_a^b f(x)\, f'(x)\ dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$.

12. Demuestre que si $F'(x) = D$, para toda x de (a,b), existe una constante C, tal que, $F(x) = Dx + C$, para toda x de (a,b).

13. Suponga que $F'(x) = 5$ y $F(0) = 4$. Encuentre la fórmula de $F(x)$.

14. Encontrar el valor c que satisface el Teorema del Valor Medio para integrales si

    1. $\int_1^2 x^3\ dx$ 2. $\int_0^1 x(1-x)\ dx$ 3. $\int_1^4 \left(x^2+4x+5\right)\ dx$ 4. $\int_0^1 \left(x^2+x-6\right)\ dx$

    5. $\int_{-2}^1 x^4\ dx$ 6. $\int_0^2 \sqrt{x+1}\ dx$ 7. $\int_0^\pi \cos(2x)\ dx$ 8. $\int_{-2}^2 \left(x^3+1\right)\ dx$

15. Si f es una función continua en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)\ dx = 0$. Demuestre que existe, al menos, un número c en $[a,b]$, tal que $f(c) = 0$.

16. Si f es una función continua en $[1,3]$ y $\int_1^3 f(x)\ dx = 8$. Demuestre que f toma el valor 4 por lo menos una vez sobre el intervalo $[1,3]$.

17. Si $f_{\text{prom}}[a,b]$ denota el valor promedio de f en el intervalo $[a,b]$ y $a < x < b$, demuestre que

$$f_{\text{prom}}[a,b] = \frac{c-a}{b-a} f_{\text{prom}}[a,c] + \frac{b-c}{b-a} f_{\text{prom}}[c,b]$$

18. Demuestre que si f es una función par, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx.$$

19. Demuestre que si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0.$$

20. Sea f una función impar y g una función par y suponga que

$$\int_0^1 |f(x)|\ dx = \int_0^1 g(x)\ dx = 3.$$

    Utilice un razonamiento geométrico para calcular cada una de las siguientes integrales

    1. $\int_{-1}^1 f(x)\ dx$ 2. $\int_{-1}^1 g(x)\ dx$ 3. $\int_{-1}^1 |f(x)|\ dx$ 4. $\int_{-1}^1 (-g(x))\ dx$

    5. $\int_{-1}^1 xg(x)\ dx$ 6. $\int_{-1}^1 f^2(x)\, g(x)\ dx$

21. Demuestre que

$$\int_{-1}^1 \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{\left(1+x^4\right)^4}\right)\ dx = 0.$$

22. Demuestre que si f es una función periódica con período p, entonces

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

23. Demuestre que si f es una función periódica con período p, entonces

$$\int_a^{a+p} f(x)\ dx = \int_0^a f(x)\ dx.$$

24. Calcular

1. $\displaystyle\int_0^{4\pi} |\cos x|\ dx$ 2. $\displaystyle\int_0^{4\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{4\pi} |\operatorname{sen}(2x)|\ dx$ 4. $\displaystyle\int_0^{100\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx$

25. Calcular

1. $\displaystyle\int_1^{1+\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx$ 2. $\displaystyle\int_2^{2+\pi/2} |\operatorname{sen}(2x)|\ dx$ 3. $\displaystyle\int_1^{1+\pi} |\cos x|\ dx$

26. Dibuje la región limitada por las curvas dadas y calcule su área

1. $y = x^2, \quad y = x^4$
2. $y = x^4, \quad y = -x-1, \quad x = -2, \quad x = 0$
3. $y = x, \quad y = x^3$
4. $x + y^2 = 0, \quad x = y^2 + 1, \quad y = 0, \quad y = 3$
5. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x$
6. $x = 3y, \quad x + y = 0, \quad 7x + 3y = 24$
7. $y = x, \quad y = x^2$
8. $y^2 = x, \quad y = x + 5, \quad y = -1, \quad y = 2$
9. $y = x^2, \quad y^2 = x$
10. $y = x^2 + 3, \quad y = x, \quad x = -1, \quad x = 1$
11. $y = \sqrt{x}, \quad y = x/2$
12. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen}(2x), \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
13. $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$
14. $y = x^2 + 2, \quad y = 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 6$
15. $y = x^4 - x^2, \quad y = 1 - x^2$
16. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2, \quad x = -3, \quad x = 0$
17. $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$
18. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = x + 4, \quad x = -3, \quad x = 2$
19. $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$
20. $y = x^2 + 1, \quad y = 3 - x^2, \quad x = -2, \quad x = 2$
21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$
22. $y = |x|, \quad y = (x+1)^2 - 7, \quad x = -4$
23. $y = 2x - x^2, \quad y = x^3$
24. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/2$
25. $x = 1 - y^4, \quad x = y^3 - y$
26. $y = \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$
27. $y = x^3, \quad x = y^3$
28. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen}(2x), \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
29. $y = x\sqrt{1 - x^2}, \quad y = x - x^3$
30. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos(2x), \quad x = 0, \quad x = \pi/4$
31. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 0$
32. $y = |x - 1|, \quad y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$
33. $y = 4 + 3x - x^2, \quad y = 0$
34. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen}(2x), \quad x = \pi/2, \quad x = \pi$
35. $y = \sqrt{x - 4}, \quad y = 0, \quad x = 8$
36. $x^2 + 2x + y = 0, \quad x + y + 2 = 0$
37. $x = y^4, \quad x = 2 - y^4$
38. $y = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad y = x^2 - x$
39. $x = 6y - y^2, \quad x = 0$
40. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x - 3y + 1 = 0$

27. Encuentre el número b, tal que la recta $y = b$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de áreas iguales.

28. (a) Encuentre el número a, tal que la recta $x = a$ sea bisectriz del área bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq 4$.
(b) Encuentre el número b, tal que la recta $y = b$ sea bisectriz del área considerada en la parte (28a).

29. Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ y = 2 & \text{si} \quad x \in [-4, -1] \\ y = 1 & \text{si} \quad x \in [1, 3] \\ y = \sqrt{x+4} + 2 & \text{si} \quad x \in [-4, 0] \\ y = 4 - x & \text{si} \quad x \in [0, 3] \\ x = -1 & \text{si} \quad y \in [1, 2] \end{cases}$$

30. Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas

$$\begin{cases} x = |y - 2| & \text{si} \quad |y - 2| \leq 2 \\ y = 1 & \text{si} \quad x \in [2, 5] \\ y = 3 & \text{si} \quad x \in [2, 5] \\ x = 2 & \text{si} \quad y \in [0, 1] \bigcup [3, 4] \\ x = 5 & \text{si} \quad y \in [1, 3] \end{cases}$$

31. Calcule la integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}(x-2)}{(x-2)^2}\, dx.$

32. Calcule el área de la región R limitada por las curvas

$$y = |\operatorname{sen} x| \quad \text{en} \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad y = \left|\frac{8x}{\pi}\right| - 3.$$

33. Calcule el área de la región R limitada por las curvas

$$y = 1 - 4(x-3)^2, \qquad y = 3 - |18 - 6x|.$$

34. Calcular $\displaystyle\int_0^4 \left(\left|x^2 - 4x + 3\right| - |\operatorname{sen}(\pi x)|\right) dx.$

35. Sea R la región limitada por las curvas de ecuación

$$y = (x-2)^2, \qquad y = -\sqrt{4 - x^2}, \qquad x = \frac{y-4}{2}.$$

a. Dibuje la región R.

b. Calcular el área de la región R.

36. Considere la región R limitada por las curvas

$$|x+1| + |y| = 1, \qquad y = x^2 \qquad \text{y} \qquad x + y^2 + \frac{5}{4} = 0$$

a. Dibuje la región R.

b. Calcular el área de la región R.

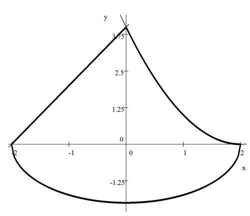
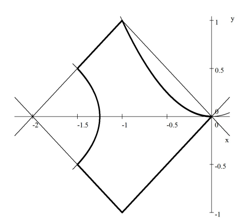
37. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definimos

$$G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

para $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $G(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

38. Halle el área comprendida entre las parábolas $x = y^2$ y $x = 3 - 2y^2$.

Respuestas: Ejercicios

1.1. 4; 1.2. 9; 1.3. -4; 1.4. π; 1.5. 4; 1.6. 4; 1.7. $\frac{33}{5}$; 1.8. $\frac{3}{4}$; 1.9. $\frac{16}{3}$; 1.10. $\frac{3}{4}$;
1.11. $\frac{45}{4}$; 1.12. 1; 1.13. $\sqrt{3}$; 1.14. 1; 1.15. 22; 1.16. $\frac{1801}{96}$; 1.17. $-\frac{15}{14}$; 1.18. $\frac{1}{4}\pi^2 + 1$;
1.19. $\sqrt[5]{4} + \frac{4}{9}$; 1.20. $-\frac{17}{4}a^{4/3}$; 1.21. 15; 1.22. $\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 + 1$; 1.23. $\frac{22}{5}$; 1.24. $-\frac{81}{8}$; 1.25. $\frac{27}{4}$;
1.26. 15; 1.27. 0; 1.28. $\frac{38}{15}$; 1.29. 0; 1.30. 0; 1.31. $-\frac{1}{2}$; 1.32. $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$; 1.33. $4 - 2\sqrt{3}$;
1.34. $-\frac{181}{15}$; 1.35. $-\frac{16}{3}$; 1.36. $\frac{13}{12}$; 1.37. 4; 1.38. $-\arctan\frac{1}{2}$; 1.39. $\sqrt{2} - 1$; 1.40. 2; 1.41. 4;
1.42. 1; 1.43. 1; 1.44. $\frac{5}{3}$; 1.45. $3\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2$; 1.46. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$; 1.47. $3\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$;
1.48. $4 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$; 1.49. $5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$; 1.50. 0; 2.1. $\frac{4}{5}$; 2.2. $\frac{2}{5}$; 2.3. $\frac{3}{16}$; 2.4. $\frac{52}{3}$;
2.5. $2\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{6}}{6}$; 2.6. $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arcsen}\frac{2\sqrt{15}}{3}$; 2.7. $\frac{\pi\sqrt{6}}{24}$; 2.8. $\frac{5\sqrt{3}}{36}\pi$; 2.9. $\frac{122}{9}$; 2.10. $\frac{2047}{11}$; 2.11. 2;
2.12. $\sqrt{5} - 1$; 2.13. $\frac{8}{3}$; 2.14. $\frac{1}{3}$; 2.15. $-\frac{1}{9}$; 2.16. $\frac{5}{36}$; 2.17. 0; 2.18. $\frac{1}{72}\pi^2$; 2.19. $\frac{2}{3}\arctan\frac{\pi^3}{8}$;
2.20. 0; 2.21. $18 - 9\sqrt{2}$; 2.22. 0; 2.23. $\frac{3008}{135}$; 2.24. $\frac{2}{3}$; 2.25. 14; 2.26. $\frac{10}{3}$; 3.1. $\frac{5}{2}$; 3.2. $\frac{17}{4}$;
3.3. $-\frac{7}{2}$; 3.4. 4; 3.5. 4; 3.6. $\frac{9}{2}$; 3.7. $\frac{28}{3}$; 3.8. $\frac{1}{2}$; 3.9. $\frac{5}{3}$; 3.10. 4; 3.11. $\frac{85}{4}$; 3.12. 4;
3.13. $4\sqrt{3}$; 3.14. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$; 4. 0; 10. $y = \cos x$, $a = \frac{\pi}{6}$; 13. $F(x) = 5x + 4$; 14.1. $c = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$;
14.2. $c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$; 14.3. $c = \sqrt{21} - 2$; 14.4. $c = \frac{\sqrt{39}}{6} - \frac{1}{2}$; 14.5. $c = -\sqrt[4]{\frac{11}{3}}$; 14.6. $c = \frac{115}{81}$;
14.7. $c = \frac{\pi}{4}$; 14.8. $c = \sqrt[3]{-\frac{13}{4}}$; 20.1. 0; 20.2. 0; 20.3. 6; 20.4. -6; 20.5. 0; 20.6. 0;
24.1. 8; 24.2. 8; 24.3. 8; 24.4. 200; 25.1. 2; 25.2. 1; 25.3. 2; 26.1. $\frac{4}{15}$; 26.2. $\frac{32}{5}$;
26.3. $\frac{1}{2}$; 26.4. 21; 26.5. 36; 26.6. 12; 26.7. $\frac{1}{6}$; 26.8. $\frac{33}{2}$; 26.9. $\frac{1}{3}$; 26.10. $\frac{20}{3}$; 26.11. $\frac{4}{3}$;
26.12. $\frac{1}{2}$; 26.13. 4; 26.14. 36; 26.15. $\frac{8}{5}$; 26.16. $\frac{31}{6}$; 26.17. $\frac{9}{2}$; 26.18. $\frac{31}{6}$; 26.19. $\frac{32}{3}$;
26.20. 8; 26.21. $\frac{8}{3}$; 26.22. $\frac{58}{3}$; 26.23. $\frac{37}{12}$; 26.24. $2\sqrt{2} - 1$; 26.25. $\frac{8}{5}$; 26.26. $2 - \sqrt{2}$; 26.27. 1;
26.28. $\frac{1}{2}$; 26.29. $\frac{1}{6}$; 26.30. $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$; 26.31. $\frac{4}{3}$; 26.32. $\frac{13}{3}$; 26.33. $\frac{125}{6}$; 26.34. $\frac{1}{2}$; 26.35. $\frac{16}{3}$;
26.36. $\frac{9}{2}$; 26.37. $\frac{16}{5}$; 26.38. $\frac{71}{6}$; 26.39. 36; 26.40. $\frac{1}{6}$; 27. $b = 2\sqrt[3]{2}$; 28.*a*. $a = \frac{8}{5}$;
28.*b*. $b = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$ ó $b = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{11}{8}$; 29. $\frac{73}{6}$; 30. 10; 31. 0; 32. $\pi + 2$; 33. 1;
34. $4 - \frac{8}{\pi}$; 35.*a*.  ; 35.*b*. $\frac{20}{3} + 2\pi$; 36.*a*.  ;
36.*b*. $\frac{17}{12}$; 38. 4;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.