Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre-Diciembre, 2009

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: _____

MA-2115 — Primer Examen Parcial—Modelo B

Justifique todas sus respuestas

1. (12 pts.) Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donde los coeficientes satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+3} = a_n$, para todo n, además $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 1$. Encuentre el conjunto de convergencia de la serie y la función a la que converge la serie.

Como la serie $\sum a_n x^n$ converge absolutamente en el interior de su conjunto de convergencia, la serie se puede reordenar.

Por lo tanto

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_0 x^3 + \cdots$$
$$= a_0(1 + x^3 + x^6 + \cdots) + a_1(x + x^4 + x^7 + \cdots) + a_2(x^2 + x^5 + x^8 + \cdots)$$
$$= a_0(1 + x^3 + x^6 + \cdots) + a_1 x(1 + x^3 + x^6 + \cdots) + a_2 x^2(1 + x^3 + \cdots)$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}\right)$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\frac{1}{1-x^3} \quad \text{si } |x| < 1$$

Como $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$

$$\therefore \sum_0^{\infty} a_n x^n = (1 + 3x + 2x^2)\frac{1}{1-x^3} \quad \text{en } |x| < 1$$

Su conjunto de convergencia es $|x| < 1$.

2. (12 pts.) Diga si las siguientes series son convergentes o divergentes. Justifique su respuesta:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{n}$,

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n^3+2n^2+1}$,

   c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n}$.

a) Como $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ (-1)^l & \text{si } n = 2l \end{cases}$

$\therefore \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ Es una serie alternada

como $a_n = \frac{1}{2n}$ es decreciente, positiva y $\lim a_n = 0$

. La serie converge

b) Comparo con $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ la cual converge ya que es del tipo $\sum \frac{1}{n^p}$ con $p > 1$ $(p = 5/2)$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{n}}{3n^3+2n^2+1}}{\dfrac{1}{n^{5/2}}} = \frac{n^{5/2}\, n^{1/2}}{3n^3+2n^2+1} = \frac{n^3}{3n^3+2n^2+1} \longrightarrow 1/3 \neq 0$$

. La serie converge

c) Uso el criterio de la integral. Como $f(x) = \frac{1}{x\ln^3 x}$ es positiva, continua y decreciente en $[2,\infty)$

Se puede usar el criterio de la integral

$$\int_2^t \frac{dx}{x\ln^3 x} \underset{u=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\Big|_{\ln 2}^{\ln t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 2} - \frac{1}{\ln^2 t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{2}\frac{1}{\ln^2 2}$$

La integral converge $\Rightarrow$ La serie converge

MA-2115

3. (13 pts.) Encuentre la serie de Taylor centrada en 0 de la función $f(x) = \cos^2(x)$. Además halle su conjunto de convergencia.

Observe $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Como $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \forall t \implies \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x$

$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x$

$$\cos^2 x = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{donde} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n=0 \\ \frac{(-1)^l \, 2^{2l-1}}{(2l)!} & \text{si } n=2l,\ l\geq 1 \end{cases}$$

$\therefore$ El conjunto de convergencia es $\mathbb{R}$

MA-2115

4. (13 pts.) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{x}y = x^3y^{2/5}$, $y(1) = 32$.

Ecuación de Bernoulli con $n = 2/5$

$$y^{-2/5}y' - \frac{3}{x}y^{3/5} = x^3$$

Cambio de variable $z = y^{3/5}$ $\quad z' = \frac{3}{5}y^{-2/5}y'$

$$\frac{5}{3}z' - \frac{3}{x}z = x^3 \Rightarrow z' - \frac{9}{5}\frac{z}{x} = \frac{3}{5}x^3$$

Factor integrante $\mu(x) = e^{-\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x}} = x^{-9/5}$

$$x^{-9/5}z' - \frac{9}{5}\frac{z}{x}x^{-9/5} = \frac{3}{5}x^3x^{-9/5}$$

$$\left(x^{-9/5}z\right)' = \frac{3}{5}x^{6/5}$$

$$x^{-9/5}z = \int\frac{3}{5}x^{6/5}dx + c = \frac{3}{5}\frac{5}{11}x^{11/5} + c$$

$$z(x) = \frac{3}{11}x^4 + cx^{9/5}$$

$$y^{3/5} = \frac{3}{11}x^4 + cx^{9/5}$$

Evaluando la condición inicial $(32)^{3/5} = \frac{3}{11} + c \Rightarrow 8 - \frac{3}{11} = c \Rightarrow \boxed{c = \frac{85}{11}}$

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{3}{11}x^4 + \frac{85}{11}x^{9/5}\right)^{5/3}}$$