Objetivos a cubrir

Código : MAT4-EDO.10

- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Lineal de primer orden.
- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Ecuación de Bernoulli.

---

1. Demuestre que si a y λ son constantes positivas y b es cualquier número real, entonces toda solución de la ecuación

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

tiene la propiedad de que $y \to 0$ cuando $x \to \infty$

2. Halle la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$ 2. $y' + 3x^2 y = x^2$ 3. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$ 4. $\dfrac{dy}{dx} = 2y + x^2 + 5$

5. $y' = \dfrac{3x^2 y}{1 - x^3}$ 6. $x^2 y' + xy = 1$ 7. $y' + 2xy = x^3$ 8. $xy' + 4y = x3^{-x}$

9. $y\,dx + \left(x + 2xy^2 - 2y\right) dy = 0$ 10. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$ 11. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{x \operatorname{sen} x - y}$

12. $y' + 2y = 0$ 13. $xy' + y = 3xy$ 14. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$ 15. $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$

16. $y' = x^3 e^{x^2} y$ 17. $3y' + 12y = 4$ 18. $\dfrac{dr}{d\theta} + r \sec\theta = \cos\theta$ 19. $\dfrac{dy}{dx} + y \cot x = 2\cos x$

20. $y' = y + e^x$ 21. $\dfrac{dx}{dy} = x + y$ 22. $y' = \dfrac{5 - 8y - 4xy}{(x+2)^2}$ 23. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x + 1)\, y = e^{-3x}$

24. $\left(1 + x^2\right) y' + xy + x^3 + x = 0$ 25. $xy' + 2y = e^x + \ln x$ 26. $(1 + x)\, y' - xy = x + x^2$

3. Resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica

1. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20;\quad y(0) = 2$ 2. $yy' - x = 2y^2;\quad y(1) = 5$ 3. $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = 1;\quad y(0) = -3$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y - x};\quad y(5) = 2$ 5. $xy' + y = e^x;\quad y(1) = 2$ 6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y - x};\quad y(1) = 0$

7. $x\,dy + \left(xy + 2y - 2e^{-x}\right) dx = 0;\quad y(1) = 0$ 8. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E,\quad E = \text{ctte}\ ;\quad i(0) = i_0$

9. $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = 1;\quad y(0) = -3$ 10. $y' = 2y + x\left(e^{3x} - e^{2x}\right);\quad y(0) = 2$

11. $x(x - 2)\, y' + 2y = 0;\quad y(3) = 6$ 12. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0;\quad y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

13. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x;\quad y(1) = 10$ 14. $\left(x^2 + 1\right) y' + 3x^3 y = 6x \exp\left(-\dfrac{3x^2}{2}\right);\quad y(0) = 1$

15. $y' + y\tan x = \cos^2 x;\quad y(0) = -1$

4. Resuelva la ecuación de Bernoulli dada

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$ 2. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$ 3. $\dfrac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right)$ 4. $x^2 \dfrac{dy}{dx} + y^2 = xy$

5. $3\left(1 + x^2\right)\dfrac{dy}{dx} = 2xy\left(y^3 - 1\right)$ 6. $x\dfrac{dy}{dx} - (1 + x)\, y = xy^2$ 7. $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0;\quad x > 0$

5. Resuelva la ecuación diferencial dada, sujeta a la condición inicial que se indica

   1. $x^2 \dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4,\ y(1) = 1$ 2. $y^{1/2} \dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1,\ y(0) = 4$ 3. $2y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2},\ \ y(1) = 1$

   4. $x^2 y' - 2xy = 3y^4,\ \ y(1) = 1$ 5. $xy\left(1 + xy^2\right) \dfrac{dy}{dx} = 1,\ \ y(1) = 0$

   6. $2\, \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2},\ y(1) = 1$

6. La ecuación dada es una ecuación de Bernoulli. Resuelva dicha ecuación.

   (a) $y' = ry - ky^2$, $r > 0$ y $k > 0$. Esta ecuación es importante en la dinámica de las poblaciones

   (b) $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$. Se presenta en el estudio de la estabilidad del flujo de fluidos.

   (c) $\dfrac{dy}{dt} = (\Gamma \cos t + T)\, y - y^3$, donde Γ y T son constantes. Esta ecuación se presenta en el estudio de la estabilidad del flujo de fluidos.

Respuestas

2.1. $y = Ke^{5x}$; 2.2. $y = \frac{1}{3} + Ce^{-\ x^3}$; 2.3. $y = \frac{1}{3} + \frac{C}{x^2}$; 2.4. $y = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 5\right) - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{2x}$; 2.5. $y = \frac{K}{1-x^3}$;

2.6. $y = \frac{1}{x} \ln|x| + \frac{C}{x}$; 2.7. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$; 2.8. $y = -\ \frac{3^{-x}}{\ln 3}\left\{1 + \frac{4}{x \ln 3} + \frac{12}{x^2 \ln^2 3} - \frac{24}{x^3 \ln^3 3} - \frac{24}{x^4 \ln^4 3}\right\} + \frac{C}{x^4}$;

2.9. $x = \frac{1}{y}\left(1 - Ce^{-y^2}\right)$; 2.10. $y = \frac{1}{4} e^{3x} + Ce^{-x}$; 2.11. $y = -\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{C}{x}$; 2.12. $y = e^{-2x} C$;

2.13. $y = \frac{1}{x} e^{3x} C$; 2.14. $y = e^{-x} \ln\left(1 + e^{2x}\right) - e^{-x} x + e^{-x} C$; 2.15. $y = \operatorname{sen} x + C \cos x$;

2.16. $y = C \exp\left(\frac{1}{2} e^{x^2} (x - 1)(x + 1)\right)$; 2.17. $y = \frac{1}{3} + Ce^{-4x}$; 2.18. $r = -\cos\theta \frac{-\theta + \cos\theta - C}{1 + \operatorname{sen}\theta}$; 2.19. $y = -\frac{\cos^2 x - C}{\operatorname{sen} x}$;

2.20. $y = e^x x + Ce^x$; 2.21. $y = -x - 1 + Ce^x$; 2.22. $y = \frac{1}{3} \frac{5x^3 + 30x^2 + 60x + 3C}{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$; 2.23. $y = e^{-3x} \frac{x + C}{x}$;

2.24. $y = -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{(1+x^2)} + x^2 \sqrt{(1+x^2)} - 3C}{\sqrt{(1+x^2)}}$; 2.25. $y = \frac{1}{x^2}\left(xe^x - e^x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C\right)$; 2.26. $y = \frac{-3xe^{-x} - e^{-x} - x^2 e^{-x} + C}{x+1} e^x$;

3.1. $4 - y = \frac{1}{2} e^{-5x}$; 3.2. $x = 2y^2 - 10y$; 3.3. $y = 1 - 4e^{-\tan x}$; 3.4. $yx = \ln\left|\frac{y}{2}\right| + 10$; 3.5. $y = \frac{e^x}{x} + \frac{5-e}{x}$;

3.6. ; 3.7. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}\ e^{-x}$; 3.8. $i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-Rt/L}$; 3.9. $y = 1 + 4e^{-\tan x}$;

3.10. $y = xe^{3x} - e^{3x} - \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + 3e^{2x}$; 3.11. $y = \frac{2x}{x-2}$; 3.12. $y = \frac{-1}{\operatorname{sen} x}$; 3.13. $y = \frac{x \ln x - x + 21}{x+1}$;

3.14. $y = \left(-2 + 3\sqrt{(1 + x^2)} + 3x^2 \sqrt{(1 + x^2)}\right) e^{-\frac{3}{2} x^2}$; 3.15. $y = \cos x\,(\operatorname{sen} x - 1)$; 4.1. $y^3 = 1 + \frac{C}{x^3}$; 4.2. $y = \frac{2e^x}{e^{2x} + C}$;

4.3. $y^{-3} = x - \frac{1}{3} + Ce^{3x}$; 4.4. $y = \frac{x}{\ln x + C}$; 4.5. $y^3 = \frac{1}{C - Cx^2}$; 4.6. $y = \frac{x}{-x + 1 + Ce^{-x}}$; 4.7. $y^2 = \frac{5x}{2 + 5Cx^5}$;

5.1. $y^{-3} = -\ \frac{9}{5x} + \frac{14}{5x^6}$; 5.2. $y^{3/2} = 1 + 7e^{-3x/2}$; 5.3. $y^3 = -3x^2 + 4\sqrt{x^3}$; 5.4. $\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{5} \frac{9x^5 - 4}{x^6}$;

5.5. $\frac{1}{x} = -y^2 + 2 - e^{-\frac{y^2}{2}}$; 5.6. $y^3 = -2x^2 + 3x^{3/2}$; 6.a. $y = \frac{r}{K + Ce^{-rx}}$; 6.$b$. $y^{-2} = \frac{\sigma}{\varepsilon} + Ce^{-2\varepsilon x}$;

6.c. $\frac{1}{y^2} = \left(2 \int \exp\left(2\Gamma \operatorname{sen} t + 2Tt\right)\ dt + C\right) \exp\left(-2\Gamma \operatorname{sen} t - 2Tt\right)$;

Bibliografía

1. **Edwards, C. H. y Penney, D.**: "Ecuaciones Diferenciales Elementales y problemas con condiciones en la frontera". Tercera Edición. Prentice Hall.
2. **Kiseliov, A. - Krasnov, M. y Makarenko, G.**, "*Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*". Editorial Mir.
3. **Spiegel, Murray R.**, "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Tercera edición. Prentice Hall.
4. **Viola-Prioli, Ana y Viola-Prioli, Jorge**, "*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*". Universidad Simón Bolívar.
5. **Zill, Dennis**, "*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*". Grupo Editorial Iberoamérica.

Prof. Farith Briceño - 2009

e-mail : farith_72@hotmail.com