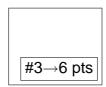
Ene-Mar 2005

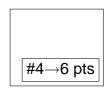
Nombre:		

Sección: \_ Carnet: \_

MA-2115—Primer Parcial, 02/02/05, 30 %—7:30am—A

#1→12 pts





Total→30 pts

1. (12 pts.) Determine cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen (3 pts. c/u):

a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n + 5}{3n + 2n^2 + 2}$$

**b)** 
$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n-2}{n^2+3} \right)$$

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$
d) 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3!}{n^2 - 4}$$

d) 
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3!}{n^2-4}$$

Solución:

a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n + 5}{3n + 2n^2 + 2}$$
.

 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+5}{3n+2n^2+2}=\frac{3}{2}$ , por lo tanto la serie DIVERGE.

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-2}{n^2+3}\right)$ . Haciendo uso del criterio de series alternantes, sea  $a_n = \frac{n-2}{n^2+3}$  y consideremos  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3}$  de donde tenemos que  $f(x) = \frac{-x^2+4x+3}{(x^2+3)^2} < 0$  para todo  $x \geq 5$ , por lo tanto, es decreciente para todo para todo  $x \geq 5$ . Además  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ . Entonces la serie alternante CONVERGE.

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Comparemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  con la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  que sabemos que es convergente.

Observamos que  $n^2 < n^2 + n$  para todo n > 0 y entonces  $\frac{1}{n^2 + n} < \frac{1}{n^2}$  para todo n > 0, por lo tanto la serie dada es CONVERGENTE.

d) 
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3!}{n^2-4}$$

## Dpto. de MATEMATICAS *MA-2115-7:30am-A*

Haciendo uso del criterio de comparación al límite la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  es convergente y  $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3!}{n^2-4}}{\frac{1}{n^2}} = 6$  por lo tanto la serie dada es CONVERGENTE.

2. (6 pts.) Halle el conjunto de convergencia para la serie de potencias  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n \, 3^n}$ .

**Solución:** Consideramos  $a_n = \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 3^n}$ . Usamos el criterio del cociente.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(2x-1)^n}{n3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2x-1}{(n+1)3}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n \to \infty} (2x-1) \frac{n}{(n+1)3}$$
$$= \frac{2x-1}{3}$$

La serie de potencias converge si  $\left|\frac{2x-1}{3}\right|<1$ , es decir si |2x-1|<3 o bien -3<2x-1<3. Sabemos que converge si  $x\in(-1,2)$ . Aparte, investigamos en los extremos del intervalo, x=-1 y x=2. En x=-1 tenemos la serie  $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2(-1)-1)^n}{n\,3^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$  que es CONVERGENTE.

En x=2 tenemos la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2(2)-1)^n}{n\,3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  que es DIVERGENTE.

Entonces converge si  $x \in [-1, 2)$ .

3. (6 pts.) Halle la serie de Maclaurin de la función  $f(x) = \ln\left(\frac{5+x}{2-x}\right)^2$  Solución: Aplicando propiedades de logaritmo se tiene

$$f(x) = \ln\left(\frac{5+x}{2-x}\right)^2 =$$

$$= 2\ln\frac{5(1+\frac{x}{5})}{2(1-\frac{x}{2})}$$

$$= 2\ln 5 + 2\ln(1+\frac{x}{5}) - 2\ln(2) - 2\ln(1-\frac{x}{2})$$

## Dpto. de MATEMATICAS *MA-2115-7:30am-A*

Como sabemos  $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ , si |x|<1, e integrando tenemos  $-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ , si |x|<1, tenemos que

$$2\ln 5 + 2\ln(1+\frac{x}{5}) - 2\ln(2) - 2\ln(1-\frac{x}{2}) = 2\ln 5 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} - 2\ln(2) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} + + 2\sum_{n=0$$

luego resulta

$$f(x) = \ln\left(\frac{5+x}{2-x}\right)^2 = 2\ln 5 - 2\ln(2) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

4. (6 pts.) Analice la sucesión definida por la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}a_n; \quad a_1 = 1.$$

Demuestre que la sucesión dada converge o demuestre que diverge según sea el caso.

**Solución:** Se tiene  $a_{n+1}=1+\frac{1}{3}a_n;$   $a_1=1$ , y así,  $a_2=1+\frac{1}{3}a_1=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ . Observamos  $a_2>a_1$ . Supongamos como hipótesis inductiva que  $a_{n+1}>a_n$ . Entonces observamos que  $a_{n+2}=1+\frac{1}{3}a_{n+1}>1+\frac{1}{3}a_n=a_{n+1}$ , y por lo tanto la sucesión es monótona creciente.

Veamos ahora si la sucesión es acotada superiormente. Sabemos que  $a_1=1<10$ .

Supongamos como hipótesis inductiva que  $a_n < 10$ , entonces  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}a_n < 1 + \frac{10}{3} < 10$ , por lo que la sucesión es acotada superiormente.

Por lo tanto, la sucesión  $\{a_n\}$  CONVERGE por ser una sucesión monótona creciente y acotada superiormente.

Además, si queremos hallar el valor del límite L de la sucesión, tomando límites a la igualdad de recurrencia tenemos que  $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{3}a_n$ , es decir  $L=1+\frac{1}{3}L$  por lo que  $L=\frac{3}{2}$ .