

# Cálculo integral

Parcial 3 - Guías 12 – 14

## Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.12

- Límites con indeterminaciones de la forma  $1^\infty$ ,  $0^0$  e  $\infty^0$ .

Ejercicios resueltos

**Ejemplo 280** : Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$ .

**Solución** : Al sustituir obtenemos una indeterminación de la forma  $1^\infty$ , para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial y logaritmo natural, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}$$

como la función exponencial es continua, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}$$

calculamos el límite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

el cual, presenta una indeterminación de la forma  $\infty \cdot 0$ , para remover esta nueva indeterminación escribimos el límite como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \text{Indeterminado.}$$

Aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{3}{x}} \left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{1 - \frac{3}{x}} = -3,$$

luego,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = e^{-3}.$$



**Ejemplo 281** : Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x}$ .

**Solución** : Al sustituir se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x} = (\infty + e^\infty)^{2/\infty} = \infty^0 \quad \leftarrow \text{Indeterminado.}$$

Para levantar la indeterminación aplicamos exponencial y logaritmo natural

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(x + e^x)^{2/x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{x} \ln(x + e^x)}$$

como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{x} \ln(x + e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \ln(x + e^x)},$$

calculamos el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \ln(x + e^x)$ , al sustituir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \ln(x + e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x + e^x)}{x} = \frac{2 \ln(\infty + e^\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado},$$

aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x + e^x)}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 \ln(x + e^x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + e^x} (x + e^x)' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1 + e^x)}{x + e^x},$$

observemos que la indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$ , se mantiene, así, que aplicamos, de nuevo, la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1 + e^x)}{x + e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2(1 + e^x))'}{(x + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{1 + e^x},$$

la indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$ , se mantiene, que aplicamos, de nuevo, la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{1 + e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2e^x)'}{(1 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2,$$

luego,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x} = e^2.$$

★

**Ejemplo 282 :** Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{1/\ln x}$ .

**Solución :** Puesto que,  $\ln x \rightarrow -\infty$ , cuando  $x \rightarrow 0^-$ , tenemos que el límite presenta una indeterminación de la forma  $0^0$ , para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{1/\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\ln x^{1/\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{\ln x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^1 = e,$$

por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x)^{1/\ln x} = e.$$

★

**Ejemplo 283 :** Calcular el siguiente límite, si existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x}{5x+3} \right)^x$ .

**Solución :** Observemos que la expresión  $\frac{5x}{5x+3} \rightarrow 1$ , si  $x \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x}{5x+3} \right)^x = 1^\infty \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado},$$

para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x}{5x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)},$$

puesto que, la función exponencial natural es continua, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)}$$

resolvemos el último límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)$ , que presenta una indeterminación de la forma  $\infty \cdot 0$ , el cual escribimos como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)}{\frac{1}{x}}$$

y se convierte en una indeterminación  $\frac{0}{0}$ , y aplicamos la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)}{\frac{1}{x}} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right) \right)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\frac{5x}{5x+3}} \frac{(5x)'(5x+3) - (5x)(5x+3)'}{(5x+3)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x+3}{5x} \frac{5(5x+3) - 25x}{(5x+3)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x+3}{5x} \frac{15}{(5x+3)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x(5x+3)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2}{x(5x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{5x+3} = -\frac{3}{5}, \end{aligned}$$

con lo que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x}{5x+3} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{5x}{5x+3} \right)} = e^{-3/5},$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x}{5x+3} \right)^x = e^{-3/5}.$$

★

**Ejemplo 284 :** Calcule el siguiente límite, si existe,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos(2\theta))^{1/\theta^2}$ .

**Solución :** Hacemos la sustitución ingenua

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = 1^\infty \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado},$$

para levantar la indeterminación aplicamos exponencial y logaritmo natural, entonces,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} e^{\ln(\cos(2\theta))^{1/\theta^2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \exp \left( \frac{1}{\theta^2} \ln(\cos(2\theta)) \right),$$

puesto que, la función exponencial es una función continua, entonces

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \exp \left( \frac{1}{\theta^2} \ln(\cos(2\theta)) \right) = \exp \left( \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2\theta))}{\theta^2} \right),$$

resolvemos el límite, al sustituir

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2\theta))}{\theta^2} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado},$$

aplicamos la regla de L'Hospital,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2\theta))}{\theta^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(2\theta)} (-\sin(2\theta)) (2)}{2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\tan(2\theta)}{\theta} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-2 \sec^2(2\theta)}{1} = -2,$$

luego,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = e^{-2}.$$

★

**Ejemplo 285 :** Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ .

**Solución :** Observemos que el límite presenta una indeterminación de la forma  $0^0$ , para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial y logaritmo natural, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x}$$

como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x}$$

calculamos el límite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$$

el cual es de la forma indeterminada  $0 \cdot (-\infty)$ , lo escribimos como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado.}$$

Aplicamos la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\csc x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-x \csc x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{x}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x \sin x}{x \cos x} \stackrel{?}{=} - \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x} \right) = -(1)(0) = 0, \end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

★

**Ejemplo 286 :** Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+5} \right)^x$ .

**Solución :** Observemos que cuando  $x$  tiende a infinito, entonces,  $\frac{3x}{3x+5} \rightarrow 1$ , por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+5} \right)^x = 1^\infty \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado,}$$

para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+5} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)},$$

como la función exponencial natural es continua, entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)},$$

calculamos el límite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)$$

el cual es de la forma indeterminada  $\infty \cdot 0$ , lo escribimos como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \text{Indeterminado.}$$

Aplicamos la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)}{\frac{1}{x}} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right) \right)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3x} \frac{3(3x+5) - 3x(3)}{(3x+5)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3x} \frac{9x+15-9x}{(3x+5)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3x} \frac{15}{(3x+5)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{3x+5}}{-\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3x+5} \stackrel{\text{L'H}}{=} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x)'}{(3x+5)'} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}, \end{aligned}$$

con lo que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+5} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{3x}{3x+5} \right)} = e^{-5/3},$$

luego,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+5} \right)^x = e^{-5/3}.$$

★

**Ejemplo 287** : Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right)^{1/x}$ .

**Solución** : Observemos que el límite presenta una indeterminación de la forma  $1^\infty$ , ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right)^{1/x} = \left( \int_0^{(0)} \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{(0)^2} \right)^{1/(x \rightarrow 0^+)} = (0 + e^0)^{1/(x \rightarrow 0^+)} = 1^\infty$$

para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left( \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right)^{1/x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left( \frac{1}{x} \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right) \right) \end{aligned}$$

como la función exponencial natural es continua, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left( \frac{1}{x} \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right) \right) = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right) \right),$$

calculamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1} dt + e^{x^2} \right),$$

el cual tiene presenta una indeterminación de la forma  $\frac{0}{0}$ , ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2} \right) = \frac{\int_0^{(0)} \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{(0)^2}}{(0)} = \frac{\ln(0 + 1)}{0} = \frac{0}{0},$$

aplicamos la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2} \right)}{x} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( \ln \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2} \right) \right)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2}} \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2} \right)' \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2}} \left( \frac{e^{x^4}}{x^2 + 1} + 2xe^{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{\int_0^{(0)} \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{(0)^2}} \left( \frac{e^{(0)^4}}{(0)^2 + 1} + 2(0)e^{(0)^2} \right) = \frac{1}{0 + 1} \left( \frac{1}{0 + 1} + 0 \right) = 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} dt + e^{x^2} \right)^{1/x} = e^1 = e.$$

★

**Ejemplo 288 :** Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan \left( (\cos t)^{\cot t} + \frac{2t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right)$ .

**Solución :** Como la función  $f(\cdot) = \arctan(\cdot)$  es continua, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan \left( (\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right) = \arctan \left( \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( (\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right) \right)$$

Calculamos el límite interno,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left( (\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\cos t)^{\cot t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}},$$

siempre y cuando los límites existan, donde  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\cos t)^{\cot t}$  es una indeterminación de la forma  $1^\infty$ , así,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\cos t)^{\cot t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos t)^{\cot t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{\cot t \ln(\cos t)},$$

como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{\cot t \ln(\cos t)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \cot t \ln(\cos t)}$$

calculamos el límite del exponente, el cual es una indeterminación de la forma  $0 \cdot \infty$ , escribimos el límite como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \cot t \ln(\cos t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos t)}{\tan t} \leftarrow \text{Indeterminado } \frac{0}{0},$$

aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos t)}{\tan t} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(\cos t))'}{(\tan t)'} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\tan t}{\sec^2 t} = 0,$$

luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\cos t)^{\cot t} = e^0 = 1$$

Por otra parte,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}}$  es indeterminado de la forma  $\frac{0}{0}$ , aplicamos la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2t)'}{(\sqrt{2-2\cos t})'} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\frac{\sin t}{\sqrt{2-2\cos t}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} \frac{\sin t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} 1}{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t}}, \end{aligned}$$

donde, la última igualdad será cierta siempre y cuando los límites existan, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

mientras que,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2-2\cos t}{t^2}} = 2\sqrt{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2-2\cos t}{t^2}},$$

la última igualdad se cumple, ya que la función  $f(\cdot) = \sqrt{\cdot}$  es continua a la derecha del cero, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2-2\cos t}{t^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2-2\cos t)'}{(t^2)'} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\sin t}{2t} = 1,$$

por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} = 2\sqrt{1} = 2,$$

luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} = 2,$$

así,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan \left( (\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} \right) = \arctan(1-2) = -\frac{1}{4}\pi.$$

★

**Ejemplo 289 :** Calcular el siguiente límite, si existe,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1)^{\ln x}$ .

**Solución :** Observemos que el límite presenta una indeterminación de la forma  $1^{-\infty}$ , para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial y logaritmo natural, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1)^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^2+1)^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x^2+1)}$$



como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \ln(x^2+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(x^2+1)}$$

calculamos el límite del exponente, el cual es una indeterminación de la forma  $(-\infty) \cdot 0$ , escribimos el límite como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(x^2+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{\frac{1}{\ln x}} \leftarrow \text{Indeterminado } \frac{0}{0},$$

aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(x^2+1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 \ln^2 x}{x^2+1} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln^2 x}{x^2+1},$$

es conocido que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$$

siempre y cuando los límites existan y el límite del denominador sea diferente de cero, así,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln^2 x}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^2 x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1)},$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1,$$

mientras que,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)^2 = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \right)^2,$$

observemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$  presenta una indeterminación de la forma  $0 \cdot (-\infty)$ , escribimos el límite como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \leftarrow \text{Indeterminado } \frac{0}{0},$$

aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^2 x = (0)^2 = 0$$

y por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln^2 x}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^2 x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1)} = \frac{0}{1} = 0,$$

de aquí,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(x^2+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln^2 x}{x^2+1} = 0.$$

luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1)^{\ln x} = e^0 = 1.$$



## Ejercicios

Calcular los siguientes límites, si existen

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{5x+3}\right)^x$
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+5}\right)^x$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax^2}{ax^2+b}\right)^{x^2}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2e^x - 1)^{1/x}$
10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 1)^{\ln x}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$
12.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\cos t)^{\cot t}$
13.  $\lim_{t \rightarrow \pi/2} (\sin t)^{\cos t}$
14.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t + e^{t/2})^{2/t}$
15.  $\lim_{x \rightarrow e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x}$
17.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{1/t}$
18.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos(2\theta))^{1/\theta^2}$
19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x}$
20.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$
21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{2x^2-1}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}$
22.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (a^t + t)^{1/t}$
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x)^x$
24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x}\right)^{1/2x}$
25.  $\lim_{t \rightarrow 0} (t + \cos(2t))^{\csc(3t)}$
26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(x-a)}{\ln(x+a)}\right)^x$
27.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\arctan(1+x^4)^{\ln(-x)}}$
28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 4)^{1/x}$
29.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1)^{\ln x}$
30.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan\left((\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}}\right)$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_0^x \frac{\cos t \, dt}{e^t - \ln(t+1)} + \frac{2 - \cos x}{1 + x^2}\right)^{\csc x}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2 + 1} \, dt + e^{x^2}\right)^{1/x}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_0^x \frac{\tan t - 1}{t^2 + 1} \, dt - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right)^{1/x^3}$
34.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan\left((\cos t)^{\cot t} + \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}}\right)$

## Respuestas: Ejercicios

- 1.1.  $e$ ; 1.2.  $e^{-3}$ ; 1.3.  $e^2$ ; 1.4.  $e^a$ ; 1.5.  $e^{-3/5}$ ; 1.6.  $e^{-5/3}$ ; 1.7.  $e^{-b/a}$ ; 1.8.  $e$ ; 1.9.  $e^2$ ;  
 1.10. 1; 1.11.  $e^{-1/2}$ ; 1.12. 1; 1.13. 1; 1.14.  $e^3$ ; 1.15.  $e^{1/e}$ ; 1.16.  $e$ ; 1.17. 1; 1.18.  $e^{-2}$ ;  
 1.19.  $e^2$ ; 1.20. 1; 1.21. 1; 1.22.  $a$ ; 1.23. 1; 1.24. 0; 1.25.  $e^{1/3}$ ; 1.26. 1; 1.27.  $e^{\pi/4}$ ;  
 1.28. 1; 1.29. 1; 1.30.  $-\frac{\pi}{4}$ ; 1.31.  $e$ ; 1.32.  $e$ ; 1.33. 0; 34.  $\arctan 3$ ;

## Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.:** "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.:** "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS.**



## Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.13

- Integrales impropias: Límites de integración infinitos.
- Integrales impropias: Integrandos infinitos. Criterio de comparación.

Ejercicios resueltos

**Ejemplo 290** : Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral  $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

**Solución** : Se tiene que

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

Resolvemos la integral indefinida por medio del cambio de variable

$$u = \ln(\ln x); \quad du = \frac{1}{x \ln x} dx,$$

y obtenemos,

$$\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\ln(\ln x)| + C,$$

así,

$$\int_3^b \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \left( \ln |\ln(\ln x)| \right) \Big|_3^b = \ln |\ln(\ln b)| - \ln |\ln(\ln 3)|,$$

luego,

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln |\ln(\ln b)| - \ln |\ln(\ln 3)| \right) = \infty.$$

Por lo tanto,

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} \quad \text{es divergente}$$



**Ejemplo 291** : Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral  $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$

**Solución** : Se tiene que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} \cos x \, dx.$$

Resolvemos la integral indefinida usando integración por partes, hacemos

$$\begin{array}{lll} u = e^{-x} & \xrightarrow{\text{Al derivar}} & du = -e^{-x} dx \\ dv = \cos x \, dx & \xrightarrow{\text{Al integrar}} & v = \sin x, \end{array}$$

La integral se transforma en

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx.$$

Para la nueva integral, integramos por partes, de nuevo, con

$$\begin{array}{lll} u = e^{-x} & \xrightarrow{\text{Al derivar}} & du = -e^{-x} dx \\ dv = \sin x \, dx & \xrightarrow{\text{Al integrar}} & v = -\cos x, \end{array}$$

y obtenemos

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = e^{-x} (-\cos x) - \int (-\cos x) (-e^{-x}) \, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx,$$

Así,

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x + \left[ -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx \right] = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx,$$

es decir,

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx,$$

de aquí,

$$2 \int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + C.$$

la familia de primitivas es

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x + C,$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-x} \cos x \, dx &= \left( \frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{2} \left[ (e^{-a} \sin(a) - e^{-a} \cos(a)) - (e^{-0} \sin(0) - e^{-0} \cos(0)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{-a} \sin(a) - e^{-a} \cos(a) + 1 \right], \end{aligned}$$

luego,

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[ e^{-a} \sin(a) - e^{-a} \cos(a) + 1 \right].$$

Calculamos  $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} \sin(a)$ , es conocido que

$$-1 \leq \sin(a) \leq 1,$$

si dividimos por  $e^a$ , la desigualdad no cambia, ya que,  $e^a$  es siempre positiva

$$-\frac{1}{e^a} \leq \frac{\sin(a)}{e^a} \leq \frac{1}{e^a} \quad \implies \quad -e^{-a} \leq e^{-a} \sin(a) \leq e^{-a},$$

si tomamos el límite cuando  $a$  tiende a infinito, se tiene

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^a} = 0,$$

por el Teorema del emparedado,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} \sin(a) = 0.$$

De manera similar, se demuestra que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} \cos(a) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[ e^{-a} \sin(a) - e^{-a} \cos(a) + 1 \right] = \frac{1}{2},$$

es decir,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} \quad \text{es convergente.}$$

★

**Ejemplo 292 :** Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral  $\int_1^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$

**Solución :** Utilizando el criterio de comparación, es conocido que

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

dividimos entre  $x$ , como  $x \in [1, \infty)$ , se tiene que  $x > 0$ , así, que no cambia la desigualdad

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x},$$

elevamos a la potencia cuarta, debemos tener presente que la expresión  $(\cdot)^4$ , cambia la desigualdad si los valores son negativos y la mantiene si los valores son positivos, entonces

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x},$$

de aquí,

$$\left(-\frac{1}{x}\right)^4 \geq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \geq 0^4 \quad \text{y} \quad 0^4 \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \leq \left(\frac{1}{x}\right)^4,$$

es decir,

$$0 \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \leq \frac{1}{x^4},$$

entonces, para  $x \in [1, \infty)$ , tenemos

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx.$$

Determinamos la convergencia de la integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ ,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \implies \text{converge,}$$

como,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx \quad \text{es convergente} \implies \int_1^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx \quad \text{es convergente}$$

★

**Ejemplo 293 :** Estudie la convergencia o divergencia de la siguiente integral  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$

**Solución :** Como

$$x \geq 1,$$

multiplicamos por  $x$ , la desigualdad no cambia, ya que  $x$  es positivo

$$x \geq 1 \implies x^2 \geq x$$

multiplicamos por  $-1$ , la desigualdad cambia, ya que estamos multiplicando por un número negativo

$$x \geq 1 \implies x^2 \geq x \implies -x^2 \leq -x$$

aplicamos exponencial, por ser una función creciente, no cambia la desigualdad

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad -x^2 \leq -x \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

comparamos, entonces, con la función  $g(x) = e^{-x}$

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx$$

así,

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-b} + e^{-1} \right) = -e^{-1},$$

por lo tanto,

$$\int_1^\infty e^{-x} dx \quad \text{converge} \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty e^{-x^2} dx \quad \text{converge}$$

★

**Ejemplo 294 :** Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

**Solución :** Observemos que la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  no está definida para  $x = 1$ , por lo que es una integral impropia en el límite superior, por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left( \arcsen x \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left( \arcsen(b) - \arcsen(0) \right) = \frac{\pi}{2},$$

luego,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{es convergente}$$

★

**Ejemplo 295 :** Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral  $\int_0^4 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3}$

**Solución :** Observemos que el dominio de la función  $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 3}$  es  $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ , así, la función no está definida para  $x = 1$  y  $x = 3$ , por lo que se nos presenta doble discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración, por lo tanto,

$$\int_0^4 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3} = \int_0^1 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3} + \int_1^3 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3} + \int_3^4 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3},$$

denotemos por

$$I_1 = \int_0^1 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3}, \quad I_2 = \int_1^3 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{y} \quad I_3 = \int_3^4 \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

Encontremos la familia de primitivas de la función  $f$ , para ello usemos el método de descomposición en fracciones simples, factorizamos el denominador

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3),$$

escribimos las fracciones simples asociadas

$$\frac{3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} \quad \Rightarrow \quad 3 = A(x - 3) + B(x - 1),$$

• Si  $x = 3$ , tenemos  $3 = A((3) - 3) + B((3) - 1)$  de aquí  $B = \frac{3}{2}$

• Si  $x = 1$ , tenemos  $3 = A((1) - 3) + B((1) - 1)$  de aquí  $A = -\frac{3}{2}$

Entonces

$$\int \frac{3 \, dx}{x^2 - 4x + 3} = \int \frac{-3/2 \, dx}{x - 1} + \int \frac{3/2 \, dx}{x - 3}.$$

Para obtener la familia de primitivas de la primera integral del lado derecho de la igualdad, hacemos el cambio de variable

$$z = x - 1; \quad dz = dx$$

la integral queda

$$\int \frac{-3/2 \, dx}{x - 1} = -\frac{3}{2} \int \frac{dz}{z} = -\frac{3}{2} \ln|z| + C = -\frac{3}{2} \ln|x - 1| + C$$

para calcular la segunda integral del lado derecho de la igualdad, hacemos el cambio

$$w = x - 3; \quad dw = dx$$

la integral queda

$$\int \frac{3/2 \, dx}{x - 3} = \frac{3}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{3}{2} \ln|w| + C = \frac{3}{2} \ln|x - 3| + C,$$

luego, la integral indefinida queda

$$\int \frac{3 \, dx}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{3}{2} \ln|x - 1| + \frac{3}{2} \ln|x - 3| + C = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - 3}{x - 1} \right| + C.$$

Estudiamos la convergencia o divergencia de  $I_1$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{3 \, dx}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{3 \, dx}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left( \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - 3}{x - 1} \right| \right) \bigg|_0^b = \frac{3}{2} \lim_{b \rightarrow 1^-} \left( \ln \left| \frac{b - 3}{b - 1} \right| - \ln \left| \frac{0 - 3}{0 - 1} \right| \right) = \infty$$

con lo que concluimos que  $I_1$  es divergente, luego

$$\int_0^4 \frac{3 \, dx}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{es divergente}$$

★

**Ejemplo 296 :** Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral  $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

**Solución :** Observemos que la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$  no está definida para  $x = 0$ , por lo que se nos presenta una integral impropia en el límite superior y en el límite inferior, por lo tanto,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

denotemos por

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \quad \text{y} \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

En primer lugar, encontremos la familia de primitivas de la función  $f$ , para ello, hacemos el cambio de variable

$$u = \sqrt{x} \quad \implies \quad x = u^2, \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \implies \quad 2 \, du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$



la integral indefinida queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{2 du}{u^2 + 1} = 2 \arctan u + C = 2 \arctan(\sqrt{x}) + C.$$

Estudiamos la convergencia o divergencia de  $I_1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( 2 \arctan(\sqrt{x}) \right) \Big|_a^1 \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \arctan(\sqrt{1}) - \arctan(\sqrt{a}) \right) = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Estudiamos la convergencia o divergencia de  $I_2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( 2 \arctan(\sqrt{x}) \right) \Big|_1^b \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \arctan(\sqrt{b}) - \arctan(\sqrt{1}) \right) = 2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

así,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \pi \quad \text{es convergente.}$$

★

**Ejemplo 297 :** Encuentre  $b$ , tal que,  $\int_0^b \ln x \, dx = 0$ .

**Solución :** Observemos que la función  $f(x) = \ln x$  no está definida para  $x = 0$ , por lo que es una integral impropia en el límite inferior, por lo tanto,

$$\int_0^b \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \ln x \, dx,$$

la integral de  $y = \ln x$  se obtiene por integración por partes, hacemos

$$\begin{array}{ccc} u = \ln x & \xrightarrow{\text{Al derivar}} & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & \xrightarrow{\text{Al integrar}} & v = x. \end{array}$$

La integral se transforma en

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^b \ln x \, dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( x(\ln x - 1) \right) \Big|_a^b = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1) \right) \\ &= b(\ln b - 1) - \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( a(\ln a - 1) \right), \end{aligned}$$

calculamos el límite cuando  $a$  tiende a  $0^+$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a(\ln a - 1) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a - 1}{\frac{1}{a}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{(\ln a - 1)'}{\left(\frac{1}{a}\right)'} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = -\lim_{a \rightarrow 0^+} a = 0,$$

así,

$$0 = \int_0^b \ln x \, dx = b(\ln b - 1),$$

es decir,

$$b(\ln b - 1) \implies \begin{cases} b = 0. & \leftarrow \text{Lo cual no puede ser.} \\ \ln b - 1 = 0 & \implies \ln b = 1 \implies \boxed{b = e.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^e \ln x \, dx = 0 \quad \text{es convergente.}$$

★

**Ejemplo 298 :** Demuestre que  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  diverge si  $0 < p \leq 1$  y converge si  $p > 1$ .

**Demostración :** Calculamos la integral indefinida, para el caso  $p \neq 1$ .

$$\int \frac{dx}{x^p} = \int x^{-p} \, dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} + C,$$

así,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p}$$

entonces, si  $p > 1$ , se tiene que,  $1-p > 0$ , con lo que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1-p} \frac{1}{b^{p-1}} \right) = 0,$$

por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p} \quad \text{es convergente si } p > 1,$$

si  $p < 1$ , entonces,  $1-p > 0$ , con lo que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-p}}{1-p} \right) = \infty,$$

por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p} \quad \text{es divergente si } p < 1.$$

Si  $p = 1$ , entonces,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln|x| \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln|b| - \ln|1| \right) = \infty,$$

por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p} \quad \text{es divergente si } p = 1.$$

★

**Ejemplo 299 :** Demostrar que la integral  $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p (\ln x)^q}$

1. es convergente si  $p > 1$  y  $q \geq 0$ .
2. es convergente si  $p = 1$  y  $q > 1$ .
3. es divergente si  $p = 1$  y  $q \leq 1$ .

**Demostración :**

1. Si  $p > 1$  y  $q \geq 0$ , usemos el criterio de comparación para determinar la convergencia o divergencia de la integral, es conocido que

$$x > \ln x, \quad \text{para todo } x > 0$$

así,

$$x^q > \ln^q x, \quad \text{para todo } x > 0; q \geq 0.$$

de aquí,

$$\frac{1}{x^q} < \frac{1}{\ln^q x}, \quad \text{para todo } x > 0; q \geq 0,$$

como  $x > 0$ , tenemos que,  $x^p > 0$ , si dividimos entre  $x^p$  no cambia la desigualdad

$$\frac{1}{x^{p+q}} < \frac{1}{x^p \ln^q x}, \quad \text{para todo } x > 0; q \geq 0,$$

estudiemos la convergencia o divergencia de la integral  $\int_2^\infty \frac{dx}{x^{p+q}}$ , tenemos

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^{p+q}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^{p+q}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{1-p-q}}{1-p-q} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-p-q}}{1-p-q} - \frac{2^{1-p-q}}{1-p-q} \right)$$

del hecho que  $p > 1$  se tiene,  $1-p < 0$ . Como

$$q \geq 0 \implies p+q \geq p \implies -(p+q) \leq -p \implies 1-(p+q) \leq 1-p < 0$$

con lo que,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^{p+q}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-p-q}}{1-p-q} - \frac{2^{1-p-q}}{1-p-q} \right) = -\frac{2^{1-p-q}}{1-p-q},$$

puesto que, la integral converge, se concluye que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^p (\ln x)^q} \quad \text{es convergente si } p > 1 \text{ y } q \geq 0.$$

2. Si  $p = 1$  y  $q > 1$ , tenemos,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x (\ln x)^q} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x (\ln x)^q}$$

calculamos la integral indefinida haciendo el cambio de variable

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}$$

y nos queda

$$\int \frac{dx}{x (\ln x)^q} = \int \frac{du}{u^q} = \frac{u^{1-q}}{1-q} + C = \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} + C,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{dx}{x (\ln x)^q} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x (\ln x)^q} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln b)^{1-q}}{1-q} - \frac{(\ln 2)^{1-q}}{1-q} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln b)^{1-q}}{1-q} \right) - \frac{(\ln 2)^{1-q}}{1-q}. \end{aligned}$$

Si  $q > 1$ , se tiene que,  $1 - q < 0$ , con lo que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln b)^{1-q}}{1-q} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1-q} \frac{1}{(\ln b)^{q-1}} \right) = 0,$$

por lo tanto,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x (\ln x)^q} = -\frac{(\ln 2)^{1-q}}{1-q} \quad \text{es convergente si } q > 1.$$

3. Si  $p = 1$  y  $q \leq 1$ , tenemos

(a) Si  $p = 1$  y  $q < 1$ , se tiene

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x (\ln x)^q} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x (\ln x)^q},$$

calculamos la integral indefinida haciendo el cambio de variable

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}$$

y nos queda

$$\int \frac{dx}{x (\ln x)^q} = \int \frac{du}{u^q} = \frac{u^{1-q}}{1-q} + C = \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} + C,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{dx}{x (\ln x)^q} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x (\ln x)^q} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln b)^{1-q}}{1-q} - \frac{(\ln 2)^{1-q}}{1-q} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln b)^{1-q}}{1-q} \right) - \frac{(\ln 2)^{1-q}}{1-q}. \end{aligned}$$

como  $q < 1$ , entonces,  $1 - q > 0$ , con lo que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(\ln b)^{1-q}}{1-q} = \infty,$$

Por lo tanto,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x (\ln x)^q} \quad \text{es divergente si } q < 1.$$

(b) Si  $q = 1$ , entonces

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x},$$

calculamos la integral indefinida haciendo el cambio de variable

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}$$

y nos queda

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C,$$

entonces,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln |\ln x| \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln |\ln b| - \ln |\ln 2| \right) = \infty,$$

Por lo tanto,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x (\ln x)^q} \quad \text{es divergente si } q = 1.$$



## Ejercicios

1. Estudie la convergencia o divergencia de las siguientes integrales

1.  $\int_1^{\infty} e^x dx$
2.  $\int_3^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{9+x^2}}$
3.  $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$
4.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$
5.  $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^5}$
6.  $\int_{-1}^{27} x^{-2/3} dx$
7.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4}}$
8.  $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$
9.  $\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx$
10.  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
11.  $\int_4^{\infty} x e^{-x^2} dx$
12.  $\int_0^{\pi/4} \tan 2x dx$
13.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{0.99}}$
14.  $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$
15.  $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$
16.  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$
17.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{|x|}} dx$
18.  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$
19.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4)^2}$
20.  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(1-x)^{2/3}}$
21.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.01}}$
22.  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$
23.  $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$
24.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
25.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x}}$
26.  $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$
27.  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2}$
28.  $\int_2^4 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}}$
29.  $\int_0^3 \frac{x dx}{9-x^2}$
30.  $\int_{1/2}^{\infty} \frac{x+1}{x^2} dx$
31.  $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$
32.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{4/3}}$
33.  $\int_{-3}^2 \frac{dx}{x^4}$
34.  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{1/2}}$
35.  $\int_0^{\pi/2} \csc x dx$
36.  $\int_0^2 \frac{3 dx}{x^2+x-2}$
37.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x}$
38.  $\int_3^5 \frac{dx}{(4-x)^{2/3}}$
39.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4}$
40.  $\int_{-3}^0 \frac{x dx}{(x^2-4)^{2/3}}$
41.  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
42.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$
43.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2+1}$
44.  $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$
45.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
46.  $\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$
47.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-x^2}$
48.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|1-x|}}$

2. Encuentre  $b$  tal que  $\int_0^b \ln x dx = 0$ .

3. Demuestre que  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  diverge si  $0 < p \leq 1$  y converge si  $p > 1$ .

4. Demostrar que la integral  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q}$

- (a) es convergente si  $p > 1$  y  $q \geq 0$ .
- (b) es convergente si  $p = 1$  y  $q > 1$ .
- (c) es divergente si  $p = 1$  y  $q \leq 1$ .
- (d) es divergente para todo  $q$  si  $p < 1$ .

5. Evalúe  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{4-x^2}$  ó demuestre que diverge.
6. Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas  $y = \frac{1}{x}$  y  $y = \frac{1}{x^3+x}$  para  $0 < x \leq 1$ .
7. Encuentre el área de la región bajo la curva  $y = \frac{2}{4x^2-1}$  a la derecha de  $x = 1$ .
8. Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas  $y = (x-8)^{-2/3}$  y  $y = 0$  para  $0 \leq x < 8$ .
9. Sea  $R$  la región del primer cuadrante bajo la curva  $y = x^{-2/3}$  y a la izquierda de  $x = 1$ . Demuestre que el área de  $R$  es finita y encuentre su valor.
10. Use una prueba de comparación para decidir si convergen o divergen las siguientes integrales
1.  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+x}}$
  2.  $\int_1^\infty \frac{\ln x}{e^{2x}} dx$
  3.  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \sin x}$
  4.  $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
  5.  $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x} dx$
  6.  $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$
  7.  $\int_1^\infty \frac{x^3 dx}{x^5+2}$
  8.  $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$
  9.  $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx$
  10.  $\int_1^\infty \frac{dx}{x+e^{2x}}$
  11.  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$
  12.  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4(1+x^4)}$
  13.  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+x^3+x^2}$
  14.  $\int_1^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^6 dx$
  15.  $\int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

### Respuestas: Ejercicios

- 1.1. Div.; 1.2. Div.; 1.3. 3 Conv.; 1.4.  $\frac{\pi}{2}$  Conv.; 1.5.  $-\frac{1}{64}$  Conv.; 1.6. 12 Conv.; 1.7. Div.;  
 1.8. Div.; 1.9.  $\frac{1}{3}$  Conv.; 1.10. Div.; 1.11.  $\frac{1}{2}e^{-16}$  Conv.; 1.12. Div.; 1.13. Div.; 1.14. 6 Conv.;  
 1.15.  $\frac{1}{10}$  Conv.; 1.16.  $-\frac{1}{4}$  Conv.; 1.17. 0 Conv.; 1.18. 1 Conv.; 1.19. 0 Conv.; 1.20. Div.;  
 1.21. 100 Conv.; 1.22. Div.; 1.23. 4 Conv.; 1.24.  $\frac{\pi}{2}$  Conv.; 1.25. Div.; 1.26. Div.;  
 1.27.  $\frac{1}{\ln 2}$  Conv.; 1.28. 6 Conv.; 1.29. Div.; 1.30. 4 Conv.; 1.31.  $\frac{3}{2}$  Conv.; 1.32. Div.;  
 1.33. Div.; 1.34. Div.; 1.35. Div.; 1.36. Div.; 1.37. Div.; 1.38. 6 Conv.; 1.39. 0 Conv.;  
 1.40.  $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{13})$  Conv.; 1.41.  $2\sqrt{2}$  Conv.; 1.42.  $1 - \frac{\pi}{4}$  Conv.; 1.43. Div.; 1.44.  $\frac{1}{2}$  Conv.;  
 1.45.  $\pi$  Conv.; 1.46.  $\frac{1}{2e}$  Conv.; 1.47. Div.; 1.48.  $2(\sqrt{2}+1)$  Conv.; 2.  $e$ ; 5. Div.;  
 6.  $\frac{1}{2} \ln 2$ ; 7.  $\frac{1}{2} \ln 3$ ; 8. 6; 9. 3; 10.1. Conv.; 10.2. Conv.; 10.3. Div.; 10.4. Div.;  
 10.5. Div.; 10.6. Conv.; 10.7. Conv.; 10.8. Conv.; 10.9. Conv.; 10.10. Conv.; 10.11. Conv.;  
 10.12. Conv.; 10.13. Conv.; 10.14. Conv.; 10.15. Div.;

### Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.:** "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.:** "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS.**



## Objetivos a cubrir

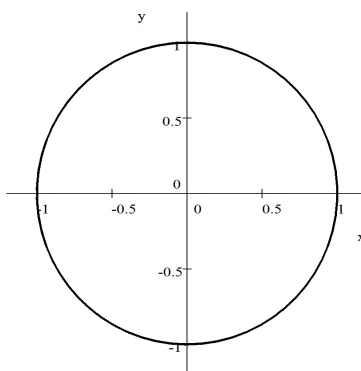
Código : MAT-CI.14

- Volumen de un sólido : Secciones transversales.
- Volumen de un sólido de revolución : Método del disco. Método de la arándela.
- Volumen de un sólido de revolución : Método de los cascarones.

Ejercicios resueltos

**Ejemplo 300** : Sea  $S$  un sólido con base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas, perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.

**Solución** : Consideremos que el círculo está centrado en el origen de coordenadas, es decir, tiene ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ .

Círculo de centro  $(0, 0)$  y radio 1.  $x^2 + y^2 = 1$ 

Sean  $A(x, y_1)$  y  $B(x, y_2)$  puntos del círculo, así,

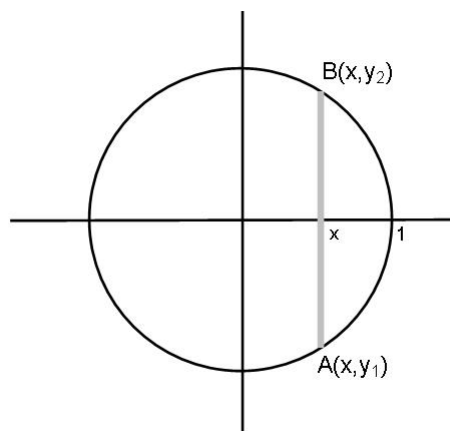
$$y = \pm \sqrt{1 - x^2},$$

con lo cual la base del triángulo  $ABC$ , es

$$|AB| = \sqrt{1 - x^2} - (-\sqrt{1 - x^2}),$$

es decir,

$$|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$$



Es conocido que el área de un triángulo equilátero de lado  $L$  viene dada por

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2,$$

así, dado que la sección transversal es un triángulo es equilátero, el área de dicha sección transversal es

$$A(x) = A_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{base})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{1 - x^2})^2 = \sqrt{3} (1 - x^2)$$

y el volumen del sólido es

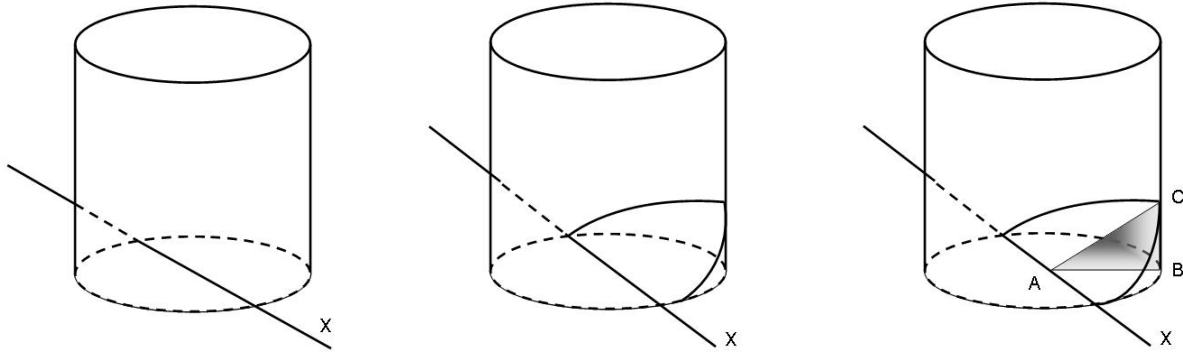
$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3} (1 - x^2) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$





**Ejemplo 301 :** Determinar el volumen de una cuña, cortada por un cilindro circular por un plano, que pasando por el diámetro de la base está inclinado respecto a ella formando un ángulo  $\alpha$ . El radio de la base es igual a  $R$ .

**Solución :** Tomamos el eje  $x$  como el diámetro de la base, por el que pasa el plano de corte y el eje  $y$ , perpendicular al anterior. La ecuación de la circunferencia de la base será  $x^2 + y^2 = R^2$ .



Se puede verificar por triángulos semejantes que la sección transversal,  $ABC$ , de la cuña perpendicular al diámetro que se encuentra a la distancia  $x$  del origen de coordenada 0 es un triángulo rectángulo isósceles. Si denotamos por  $y(x)$  a la base y altura de este triángulo, entonces el área de la sección transversal,  $ABC$ , será igual a

$$A(x) = A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} y(x) y(x) \tan \alpha = \frac{y^2(x)}{2} \tan \alpha.$$

Por lo tanto,

$$V = \int_{-R}^R A(x) dx = \int_{-R}^R \frac{y^2(x)}{2} \tan \alpha dx$$

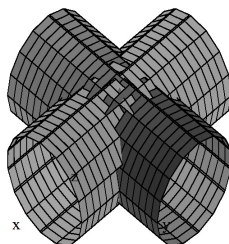
Despejando de  $x^2 + y^2 = R^2$  la expresión  $y$ , se tiene que  $y(x) = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ , y puesto que  $y$  es una función par, obtenemos

$$V = \int_{-R}^R A(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R y^2(x) \tan \alpha dx = \tan \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} \tan \alpha.$$

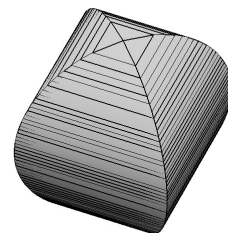


**Ejemplo 302 :** Los ejes de dos cilindros horizontales, ambos de radio  $a$ , se intersecan en ángulo recto. Encuentre el volumen de su sólido de intersección.

**Solución :** Tenemos



Cilindros horizontales que se intersecan perpendicularmente



Sólido intersección entre los cilindros

Observemos que cada sección transversal es un cuadrado, cuyo lado se extiende a lo largo de los dos círculos que generan los cilindros.

Puesto que, ambos cilindros tienen radio  $a$ , entonces, los círculos que los generan tienen ecuación  $x^2 + y^2 = a^2$ , sin pérdida de generalidad, consideramos los círculos centrado en el origen de coordenadas, por lo tanto,

Sean  $A(x, y_1)$  y  $B(x, y_2)$  puntos del círculo, así,

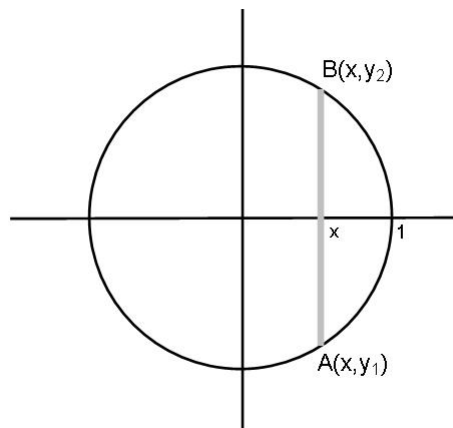
$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2},$$

con lo cual la base del triángulo  $ABC$ , es

$$|AB| = \sqrt{a^2 - x^2} - (-\sqrt{a^2 - x^2}),$$

es decir,

$$\text{Lado} = |AB| = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$



Luego,

$$V = \int_{-a}^a \left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3}.$$

★

**Ejemplo 303 :** Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas  $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ ,  $x = 1$  y los ejes coordenados alrededor de la recta vertical  $x = 2$ .

**Solución :** Obtenemos la grafica de la región en el intervalo  $[0, 1]$ . Así

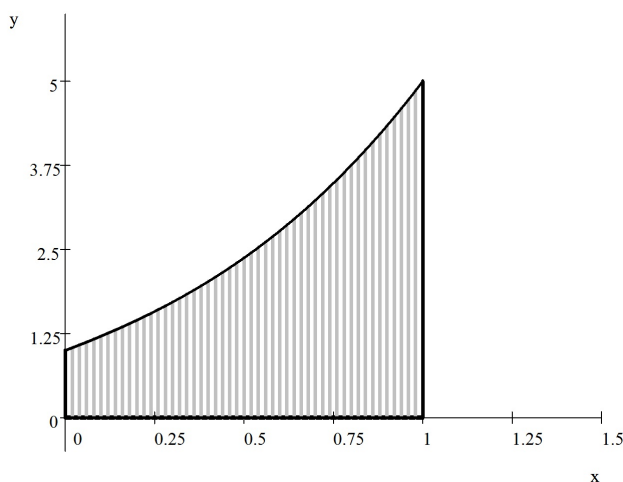
$$\text{Si } x = 0 \text{ entonces } y = (0)^3 + (0)^2 + 2(0) + 1 = 1$$

$$\text{Si } x = 1 \text{ entonces } y = (1)^3 + (1)^2 + 2(1) + 1 = 5$$

además, la función  $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$  es creciente en  $[0, 1]$ , ya que

$$y' = (x^3 + x^2 + 2x + 1)' = 3x^2 + 2x + 2 > 0,$$

por lo que,

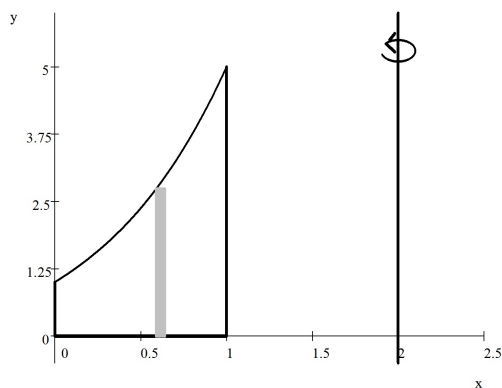


Región limitada por las curvas

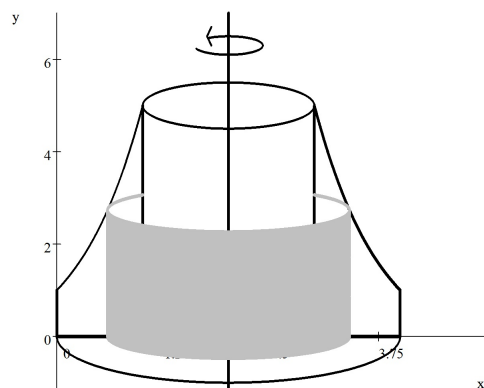
$$y = x^3 + x^2 + 2x + 1; x = 1; \text{ eje } x \text{ y eje } y$$

Observe que el comportamiento de la función fuera del intervalo  $[0, 1]$  no es de interés para la obtención del volumen del sólido.

Como debemos girar alrededor de la recta  $x = 2$  usamos el método de las capas (también conocido como el método de las envolventes cilíndricas ó el método de los cascarones).



Rectángulo representativo para el método de las capas



Sólido de revolución generado

Como es conocido, el volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_0^1 p(x) R(x) dx$$

donde

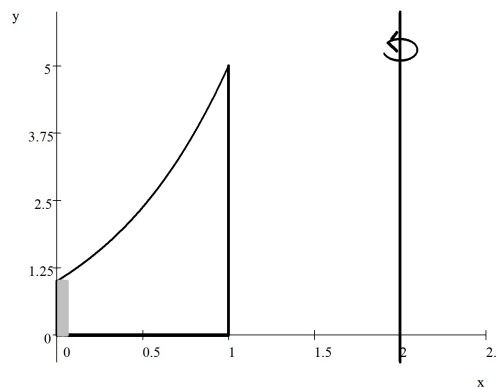
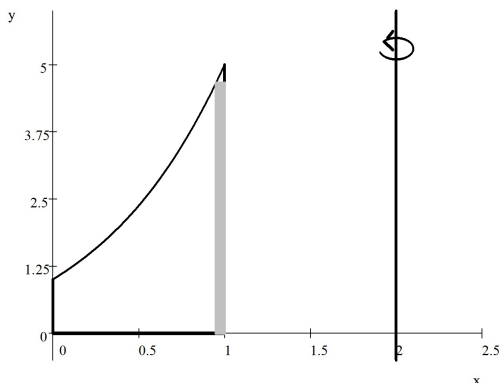
$p(x)$  : distancia del rectángulo representativo al eje de revolución

y

$R(x)$  : longitud del rectángulo representativo.

Calculamos  $p(x)$ . Hay varias manera de encontrar  $p(x)$ , una de ellas es la siguiente

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo izquierdo del intervalo, es decir, en  $x = 0$ , la distancia de ese rectángulo al eje de revolución (recta  $x = 2$ ) es igual a 2, así, obtenemos el punto  $(0, 2)$ .



Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo derecho del intervalo, es decir, en  $x = 1$ , la distancia de ese rectángulo al eje de revolución (recta  $x = 2$ ) es igual a 1, así, obtenemos el punto  $(1, 1)$ .

Buscamos la recta que pasa por estos dos puntos  $(0, 2)$  y  $(1, 1)$ , la cual tiene como ecuación  $y = -x + 2$ , entonces,

$$p(x) = -x + 2.$$

Por otra parte,  $R(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 1) - (0) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ , es decir

$$R(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

La integral que nos proporciona el volumen viene dada por

$$V = 2\pi \int_0^1 (-x + 2)(x^3 + x^2 + 2x + 1) dx,$$

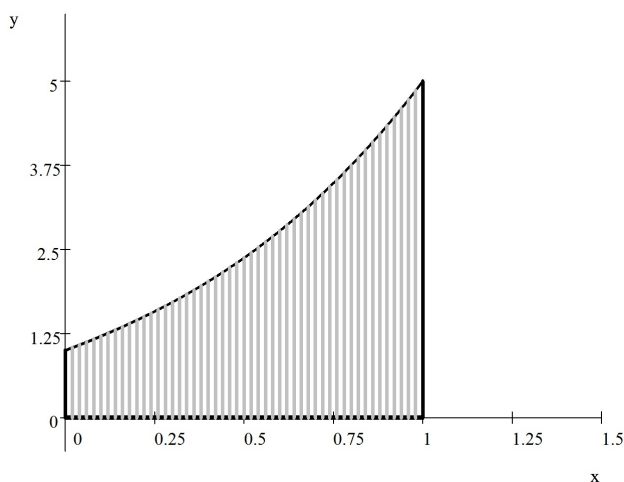
por lo tanto,

$$V = \frac{71}{10}\pi.$$

★

**Ejemplo 304 :** Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región del ejemplo 303 alrededor de  $y = 6$ .

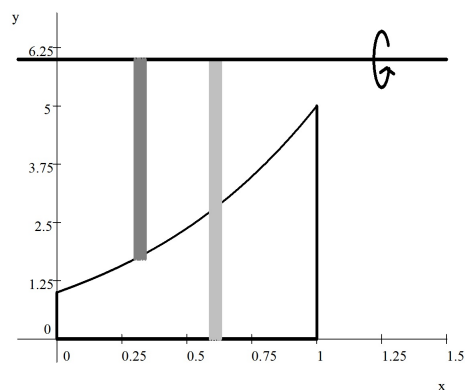
**Solución :** Es conocido que la región es



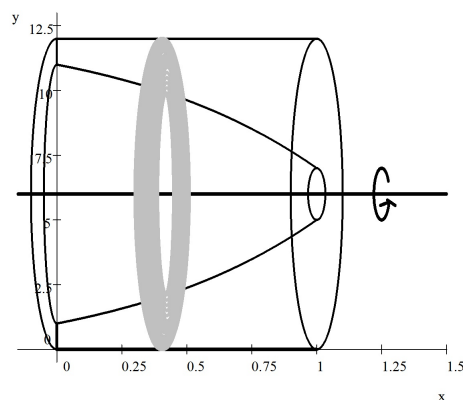
Región limitada por las curvas

$$y = x^3 + x^2 + 2x + 1; x = 1; \text{ eje } x \text{ y eje } y$$

Como debemos girar alrededor de la recta  $y = 6$  usamos el método de las arandelas



Rectángulo representativo para el método de las arandelas



Sólido de revolución generado

de aquí

$$\text{Radio mayor} = 6 - 0 = 6$$

$$\text{Radio menor} = 6 - (x^3 + x^2 + 2x + 1) = 5 - x^3 - x^2 - 2x$$

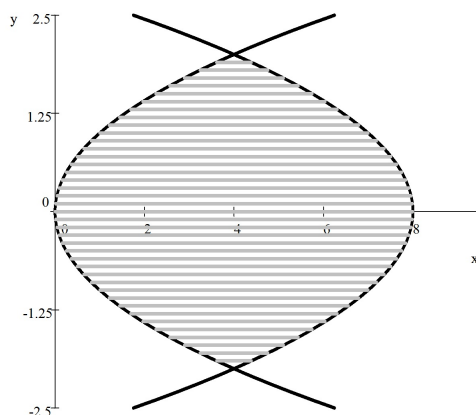
El volumen es

$$V = \pi \int_0^1 \left( (6)^2 - (5 - x^3 - x^2 - 2x)^2 \right) dx = \frac{967}{42} \pi.$$

★

**Ejemplo 305 :** Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas  $x = 8 - y^2$ ,  $x = y^2$ , alrededor de  $y = -3$ .

**Solución :** La representación gráfica de la región es



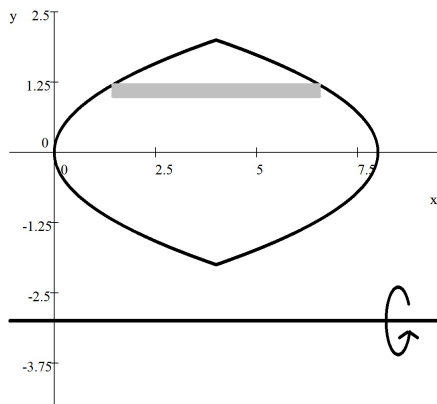
Región limitada por las curvas

$$x = 8 - y^2, \quad x = y^2$$

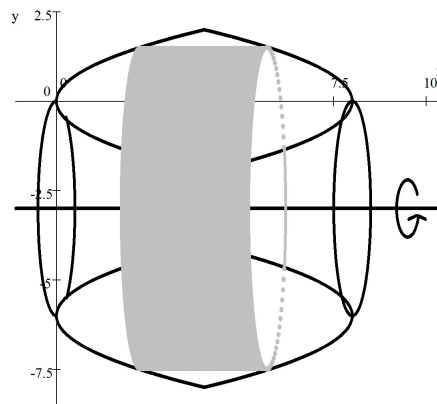
Buscamos los puntos de intersección entre las curvas

$$8 - y^2 = y^2 \quad \implies \quad 8 = 2y^2 \quad \implies \quad y = \pm 2.$$

Giramos la región alrededor de la recta  $y = -3$  podemos usar el método de las arandelas, pero nos llevaría a calcular dos integrales (¿Por qué?), así que usaremos el método de los cascarones.



Rectángulo representativo para el método de las capas



Sólido de revolución generado

Como es conocido, el volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_{-2}^2 p(y) R(y) dy,$$

donde

$p(y)$  : distancia del rectángulo representativo al eje de revolución

y

 $R(y)$  : longitud del rectángulo representativo.

Calculamos  $p(y)$ . Calculamos de otra manera a la realizada anteriormente (ejemplo 303). Como  $p(y)$  representa una distancia, sea  $y$  la posición de un rectángulo representativo arbitrario, así la distancia de ese rectángulo al eje de revolución es

$$p(y) = y - (-3) = y + 3$$

Por otra parte,  $R(y) = (8 - y^2) - (y^2) = 8 - 2y^2$ .

La integral que nos proporciona el volumen viene dada por

$$V = 2\pi \int_{-2}^2 (y + 3)(8 - 2y^2) dy \quad \Rightarrow \quad V = 128\pi.$$



### Ejercicios

1. La base de un sólido es un disco circular de radio 3. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles, cuya hipotenusa se encuentra sobre la base del sólido.
2. La base de un sólido es la región limitada por  $y = 1 - x^2$  y  $y = 1 - x^4$ . La sección transversal del sólido perpendicular al eje  $x$  es un cuadrado. Encuentre el volumen del sólido.
3. Encuentre el volumen del casquete de una esfera con radio  $r$  y altura  $h$ .
4. La base de un sólido es un círculo con un radio  $r$  unidades y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos rectos isósceles que tiene la hipotenusa en el plano de la base. Encontrar el volumen del sólido.
5. La base de un sólido es la región interior del círculo  $x^2 + y^2 = 4$ . Encuentre el volumen del sólido si toda sección transversal mediante un plano perpendicular al eje  $x$  es un cuadrado.
6. La base de un sólido está limitada por un arco de  $y = \sqrt{\cos x}$ ,  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ . Toda sección transversal perpendicular al eje  $x$  es un cuadrado apoyado sobre su base. Encuentre el volumen del sólido.
7. Dos cilindros rectos circulares, cada uno con radio  $r$  unidades, tiene ejes que se intersectan en ángulos rectos. Encontrar el volumen del sólido común a los dos cilindros.
8. La base de un sólido es la región  $R$  limitada por  $y = \sqrt{x}$  y  $y = x^2$ . Toda sección transversal perpendicular al eje  $x$  es un semicírculo cuyo diámetro se extiende a lo largo de  $R$ . Encuentre el volumen del sólido.
9. Una cuña se corta de un sólido en forma de cilindro recto circular con un radio de  $r$  pul por un plano que pasa a través de un diámetro de la base y forma un ángulo de  $45^\circ$  con el plano de la base. Encontrar el volumen de la cuña.
10. La base de un sólido es la región limitada por las parábolas  $y = x^2$  y  $y = 2 - x^2$ . Obtenga el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje  $x$  son cuadrados con un lado a lo largo de la base del sólido.
11. La altura de un monumento es de 20 m. Una sección transversal horizontal que está a una distancia de  $x$  metros de la parte superior es un triángulo equilátero cuyo lado mide  $x/4$  metros. Calcule el volumen del monumento.
12. (a) La base de un sólido es un cuadrado con vértices en  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ . Cada sección transversal perpendicular al eje  $x$  es un semicírculo. Obtenga el volumen del sólido.  
(b) Demuestre que cortando el sólido considerado en la parte 12a, se le puede reacomodar para formar un cono. Luego, calcule su volumen.

13. Un servilletero se obtiene practicando un agujero cilíndrico en una esfera de modo que el eje de aquél pase por el centro de ésta. Si la longitud del agujero es  $2h$ , demostrar que el volumen del servilletero es  $\pi ah^2$ , siendo  $a$  un número racional.
14. Un sólido tiene una base de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.
15. Las secciones transversales de un sólido por planos perpendiculares al eje  $x$  son cuadrados con centros en dicho eje. Si al cortar por el plano perpendicular en el punto de abscisa  $x$ , se obtiene un cuadrado cuyo lado es  $2x^2$ , se trata de hallar el volumen del sólido entre  $x = 0$  y  $x = a$ .
16. Hallar el volumen de un sólido cuya sección transversal por un plano perpendicular al eje  $x$  tiene de área  $ax^2 + bx + c$  para cada  $x$  del intervalo  $0 \leq x \leq h$ . Expresar el volumen en función de las áreas  $B_1$ ,  $M$  y  $B_2$  de las secciones transversales correspondientes a  $x = 0$ ,  $x = \frac{h}{2}$  y  $x = h$ , respectivamente. La fórmula que resulta se conoce por *fórmula del prismatoide*.
17. Encuentre el volumen de un cono circular recto de altura  $h$  y radio de la base  $r$ .
18. Encuentre el volumen de un tronco de un cono circular recto con altura  $h$ , radio de la base inferior  $R$  y radio superior  $r$ .
19. Encuentre el volumen del tronco de una pirámide con base cuadrada de lado  $b$ , cuadrado superior de lado  $a$  y altura  $h$ . ¿Qué sucede si  $a = b$ ? ¿Si  $a = 0$ ?
20. Encuentre el volumen de una pirámide con altura  $h$  y base rectangular con dimensiones  $b$  y  $2b$ .
21. Encuentre el volumen de una pirámide con altura  $h$  y un triángulo equilátero con lado  $a$  (un tetraedro) como base.
22. Encuentre el volumen de un tetraedro con tres caras perpendiculares entre sí y tres aristas perpendiculares entre sí con longitudes de 3 cm, 4 cm y 5 cm.
23. Encuentre el volumen de  $S$ , si la base de  $S$  es un disco circular con radio  $r$ . Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base, son cuadrados.
24. Encuentre el volumen de  $S$ , si la base de  $S$  es la región parabólica  $\{(x, y) / x^2 \leq y \leq 1\}$ . Las secciones transversales perpendiculares al eje  $y$  son triángulos equiláteros.
25. Encuentre el volumen de  $S$ , si  $S$  tiene la misma base que la del ejercicio 24, pero las secciones transversales perpendiculares al eje  $y$  son cuadrados.
26. Encuentre el volumen de  $S$ , si la base de  $S$  es la región triangular con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$ . Las secciones transversales perpendiculares al eje  $x$  son semicírculos.
27. Encuentre el volumen de  $S$ , si  $S$  tiene la misma base que la del ejercicio 26, pero las secciones transversales perpendiculares al eje  $x$  son triángulos isósceles con altura igual a la base.
28. (a) Enuncie una integral para obtener el volumen de un *toro* sólido con radio  $r$  y  $R$ .  
(b) Interprete la integral como un área y halle el volumen del toro.
29. Se recorta una cuña de un cilindro circular de radio 4 mediante dos planos. Uno de los planos es perpendicular al eje del cilindro. El otro se interseca con el primero en un ángulo de  $30^\circ$  a lo largo de un diámetro del cilindro. Encuentre el volumen de la cuña.
30. Encuentre el volumen común a dos esferas cada una con radio  $r$ , si el centro de cada una se encuentra en la superficie de la otra.
31. La base de un cierto sólido es un triángulo equilátero de lado  $a$ , con un vértice en el origen y una altura a lo largo del eje  $x$ . Cada plano perpendicular al eje  $x$  corta al sólido en una sección cuadrada con un lado en la base del sólido. Hallar el volumen.

32. Cada plano perpendicular al eje  $x$  corta a un cierto sólido en una sección circular cuyo diámetro está en el plano  $xy$  y se extiende desde  $x^2 = 4y$  hasta  $y^2 = 4x$ . El sólido está entre los puntos de intersección de estas curvas. Hallar su volumen.
33. Si la base de un sólido es un círculo con un radio de  $r$  unidades y si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadradas, encontrar el volumen del sólido.
34. Se corta una cuña de un cilindro de  $r$  pul por medio de dos planos, uno perpendicular al eje del cilindro y el otro intersectando al primero en un ángulo de  $60^\circ$  a lo largo de un diámetro de la sección plana circular, encontrar el volumen de la cuña.
35. La base de un sólido es un círculo que tiene un radio de  $r$  unidades. Encontrar el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.
36. Resolver el ejercicio 4 si los triángulos rectos isósceles tienen un cateto en el plano de la base.
37. Encontrar el volumen de una pirámide recta que tiene una altura de  $h$  unidades y una base cuadrada de  $a$  unidades de lado.
38. La base de un sólido es un círculo con un radio 4 pul y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo isósceles que tiene una altura de 10 pul y una cuerda del círculo como una base. Encontrar el volumen del sólido.
39. La base de un sólido es un círculo con un radio de 9 pul y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un cuadrado que tiene una cuerda del círculo como diagonal. Encontrar el volumen del sólido.
40. Una cuña se corta de un sólido en forma de cono recto circular que tiene un radio de la base de 5 pul y una altura de 20 pul por medios de dos planos a través del eje del cono. El ángulo entre los dos planos es de  $30^\circ$ . Encontrar el volumen de la cuña cortada.
41. Dibuje la región  $R$  limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, mostrando un rectángulo vertical característico. Encuentre después el volumen del sólido generado por la rotación de  $R$  alrededor del eje  $x$ .

$$1. \quad y = \frac{x^2}{4}, \quad x = 4, \quad y = 0$$

$$2. \quad y = x^{2/3}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 8$$

$$3. \quad y = x^3, \quad x = 2, \quad y = 0$$

$$4. \quad y = x^{3/2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$$

$$5. \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0$$

$$6. \quad y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$$

42. Dibuje la región  $R$  limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, mostrando un rectángulo vertical característico. Encuentre después el volumen del sólido generado por la rotación de  $R$  alrededor del eje  $y$ .

$$1. \quad x = y^2, \quad x = 0, \quad y = 2; \quad 2. \quad x = \frac{2}{y}, \quad y = 6, \quad y = 1, \quad x = 0; \quad 3. \quad x = \sqrt{y}, \quad y = 4, \quad x = 0;$$

$$4. \quad x = \sqrt{9 - y^2}, \quad x = 0; \quad 5. \quad x = y^{2/3}, \quad y = 8, \quad x = 0; \quad 6. \quad x = y^{3/2}, \quad y = 4, \quad x = 0;$$

43. Dibuje la región  $R$  limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, mostrando un rectángulo vertical característico. Encuentre después el volumen del sólido generado por la rotación de  $R$  alrededor del eje indicado.

Región	Eje	Región	Eje
1. $x = y^2, \quad x = 1;$	$x = 1$	2. $x + y = 3, \quad y = 2x, \quad x = 0;$	eje $y$
3. $x = -y^2 + 2y, \quad x = 0;$	$x = 2$	4. $x + y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1;$	eje $x$
5. $y = x^{1/3}, \quad x = 0, \quad y = 1; \quad y = 2$		6. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x = 5, \quad y = 0;$	$x = 5$



44. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje  $x$  de la región limitada por la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el eje  $x$ , encuentre después el volumen del esferoide alargado. Aquí,  $a$  y  $b$  son constantes positivas, siendo  $a > b$ .

45. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje  $x$  de la región limitada por la recta  $y = 4x$  y la parábola  $y = 4x^2$ .
46. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje  $x$  de la región limitada por la recta  $x = -2y$  y la parábola  $y^2 - 2x = 0$ .
47. Halle el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $y = |x| - r$ , alrededor de  $x = r$ .
48. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje  $x$  de la región del primer cuadrante limitada por la recta  $x = r - h$ , el círculo  $x^2 + y^2 = r^2$ , siendo  $0 < h < r$  y encuentre después el volumen de un segmento esférico de altura  $h$ , si el radio de la esfera es  $r$ .
49. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje  $y$  de la región limitada por la recta  $y = 4x$  y la parábola  $y = 4x^2$ .
50. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas  $y = x^3$ ,  $y = x$ , alrededor de  $x = 2$ .
51. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor de la recta  $y = 2$  de la región limitada por las parábolas  $3x^2 - 16y + 48 = 0$  y  $x^2 - 16y + 80$  y el eje  $y$ .
52. Calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen al girar la región limitada por las curvas  $y = x$  y  $y = x^2$  alrededor de los siguientes ejes

(a) el eje  $x$

(b) el eje  $y$

(c)  $y = 2$

53. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región del primer cuadrante limitada por la curva  $y^2 = x^2$ , la recta  $x = 4$  y el eje  $x$ .

(a) alrededor de  $x = 4$

(b) alrededor de  $y = 8$

54. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región en el primer cuadrante aislada por la curva  $y^2 = x^3$ , la recta  $y = 8$  y el eje  $y$ .

(a) alrededor de  $x = 4$

(b) alrededor de  $y = 8$

55. Sea  $R$  la región del primer cuadrante limitada por las curvas  $y = x^3$  y  $y = 2x - x^2$ . Calcule las siguientes cantidades

(a) El área de  $R$ .

(b) El volumen que se obtiene al hacer girar  $R$  alrededor del eje  $x$ .

(c) El volumen que se obtiene al hacer girar  $R$  alrededor del eje  $y$ .

56. Sea  $R$  la región limitada por las curvas  $y = 1/x^3$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$  y  $y = 0$ . Formule, pero no calcule, integrales para cada uno de las siguientes cantidades

(a) El área de  $R$ .

(b) El volumen del sólido obtenido cuando  $R$  gira alrededor del eje  $y$ .

(c) El volumen del sólido que se obtiene cuando  $R$  gira alrededor de la recta  $y = -1$ .

(d) El volumen del sólido que se obtiene mediante la rotación de  $R$  alrededor de  $x = 4$ .

57. Siga las instrucciones del problema 56 para la región limitada por  $y = x^3 + 1$  y  $y = 0$  entre  $x = 0$  y  $x = 2$ .
58. Aplique el método de las envolventes cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje  $x$  la región limitada por las curvas dadas
1.  $x = \sqrt[4]{y}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 16$  ;    2.  $x = y^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = 5$  ;    3.  $y = x^2$ ,  $y = 9$
  4.  $y^2 - 6y + x = 0$ ,  $x = 0$  ;    5.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 2$  ;    6.  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $x + y = 2$
59. Utilice el método de las envolventes cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar alrededor del eje  $y$  la región limitada por las curvas dadas
1.  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$                       2.  $y = 1/x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 10$
  3.  $y^2 = x$ ,  $x = 2y$     4.  $y = \sin(x^2)$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{\pi}$
  5.  $y = x^2$ ,  $y = 4$ ,  $x \geq 0$                                   6.  $y = \sqrt{4 + x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$
  7.  $y = x^2 - x^3$ ,  $y = 0$                                       8.  $y = -x^2 - 6x + 10$ ,  $y = -x^2 + 6x - 6$ ,  $x = 0$
  9.  $y = -x^2 + 4x - 3$ ,  $y = 0$                                 10.  $y = x - 2$ ,  $y = \sqrt{x - 2}$
60. Aplique el método de las envolventes cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje indicado la región limitada por las curvas dadas. Dibuje la región y una rectángulo representativa.
- (a)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ; alrededor del eje  $y$ .
  - (b)  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = -1$ ; alrededor del eje  $y$ .
  - (c)  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ; alrededor de  $x = 1$ .
  - (d)  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = -1$ ; alrededor de  $x = 4$ .
  - (e)  $y = \sqrt{x - 1}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 5$ , alrededor de  $y = 3$ .
  - (f)  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 8x - 2x^2$ , alrededor de  $x = -2$ .
61. Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por las curvas dadas alrededor del eje indicado.
- (a)  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2\pi$ ,  $x = 3\pi$ ; alrededor del eje  $y$ .
  - (b)  $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ ; alrededor del eje  $y$ .
  - (c)  $y = -x^2 + 7x - 10$ ,  $y = x - 2$ , alrededor del eje  $x$ .
  - (d)  $x = \cos y$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \pi/4$ ; alrededor del eje  $x$ .
  - (e)  $y = x^4$ ,  $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ,  $x = 5$ , alrededor de  $x = -1$ .
  - (f)  $x = 4 - y^2$ ,  $x = 8 - 2y^2$ , alrededor de  $y = 5$ .
62. Halle el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas  $y = 3 - \sqrt{1 - x^2}$ ,  $y = |x|$ ,  $x = -1$  y  $x = 1$ , alrededor de  $y = 3$ .

63. Las integrales que se proporcionan a continuación representan volúmenes de sólidos. Describa los sólidos correspondientes.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx & 2. \int_0^9 2\pi y^{3/2} \, dy & 3. \int_0^1 2\pi (x^3 - x^7) \, dx \\ 4. \int_0^\pi 2\pi (4-x) \sin^4 x \, dx & 5. \int_0^\pi \pi \sin^2 x \, dx & 6. \int_0^2 2\pi y (4-y^2) \, dy \end{array}$$

64. La región limitada por las curvas dadas se hace girar alrededor del eje indicado. Calcule, por cualquier método, el volumen del sólido resultante

(a)  $y = x^2 + x - 2$ ,  $y = 0$ , alrededor del eje  $x$ .

(b)  $y = x^2 - 3x + 2$ ,  $y = 0$ , alrededor del eje  $y$ .

(c)  $x = 1 - y^2$ ,  $x = 0$ , alrededor del eje  $y$ .

(d)  $y = x \sqrt{1+x^3}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ; alrededor del eje  $y$ .

65. Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por las curvas dadas alrededor del eje indicado

(a)  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$ ; alrededor del eje  $y$ .

(b)  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = 1$ ; alrededor del eje  $y$ .

(c)  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $y = 0$ ; alrededor del eje  $x$ .

(d)  $y = e^{-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ ; alrededor de  $x = 1$ .

(e)  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ ; alrededor de  $y = 3$ .

(f)  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$ ; alrededor de  $y = 3$ .

66. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por  $x = \frac{2}{y}$ ,  $y = 6$ ,  $x = 0$  alrededor del eje  $y$ .

67. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por  $y = \arctan x$ ,  $x = 0$  con  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  alrededor del eje  $y$ .

68. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por  $y = e^{1/x}$ ,  $x = 1$ , y los ejes coordenados, alrededor del eje  $x$ .

69. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por  $y = \sec x$ , con  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , alrededor de la recta  $y = -1$ .

### Respuestas: Ejercicios

1. 72;      2.  $\frac{16}{315}$ ;      3.  $\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$ ;      4.  $\frac{r^3}{3}$ ;      5.  $\frac{128}{3}$ ;      6. 2;      7.  $\frac{16}{3} r^3$ ;      8.  $\frac{9\pi}{280}$ ;
9.  $\frac{2}{3} r^3 \text{ pul}^3$ ;      10.  $\frac{64}{15}$ ;      11.  $\frac{125\sqrt{3}}{3}$ ;      12.a.  $\frac{4\pi}{3}$ ;      12.b.  $\frac{4\pi}{3}$ ;      13.  $a = \frac{4}{3}$ ;      14.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ;
15.  $\frac{4a^5}{5}$ ;      16.  $\frac{h}{6} (B_1 + 4M + B_2)$ ;      17.  $\frac{\pi r^2 h}{3}$ ;      18.  $\frac{\pi h}{3} (R^2 - Rr + r^2)$ ;      19.  $\frac{4h}{3} (b^2 + ab + a^2)$ ;
20.  $\frac{2}{3} b^2 h$ ;      21.  $\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h$ ;      22.  $10 \text{ cm}^3$ ;      23.  $\frac{16}{3} r^3$ ;      24.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      25. 2;      26.  $\frac{\pi}{3}$ ;
27. 3;      28.a.  $8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy$ ;      28.b.  $2\pi^2 r^2 R$ ;      29.  $\frac{128}{9} \sqrt{3}$ ;      30.  $\frac{5}{12} \pi r^3$ ;      31.  $\frac{\sqrt{3}}{6} a^3$ ;
32.  $\frac{72}{35} \pi$ ;      33.  $\frac{16}{3} r^3$ ;      34.  $\frac{2}{3} \sqrt{3} r^3 \text{ pul}^3$ ;      35.  $\frac{4}{3} \sqrt{3} r^3$ ;      36.  $\frac{8}{3} r^3$ ;      37.  $\frac{a^2 h}{3}$ ;      38.  $80\pi$ ;
39.  $1944 \text{ pul}^3$ ;      40. ;      41.1.  $\frac{64}{5} \pi$ ;      41.2.  $\frac{381}{7} \pi$ ;      41.3.  $\frac{128}{7} \pi$ ;      41.4.  $20\pi$ ;      41.5.  $\frac{3}{4} \pi$ ;      41.6.  $9\pi$ ;

- 42.1.  $\frac{32}{5}\pi$ ; 42.2.  $\frac{10}{3}\pi$ ; 42.3.  $8\pi$ ; 42.4.  $36\pi$ ; 42.5.  $\frac{96}{5}\pi$ ; 42.6.  $\frac{64}{5}\pi$ ; 43.1.  $\frac{16}{15}\pi$ ; 43.2.  $\frac{25}{4}\pi$ ;  
 43.3.  $\frac{64}{15}\pi$ ; 43.4.  $\frac{4}{3}\pi$ ; 43.5.  $\frac{3}{5}\pi$ ; 43.6.  $\frac{256}{15}\pi$ ; 44.  $\frac{4ab^2}{3}\pi$ ; 45.  $\frac{32}{15}\pi$ ; 46.  $\frac{64}{5}\pi$ ; 47.  $r\pi^2$ ;  
 48.  $\pi\left(\frac{h^3}{3} + \frac{2}{3}r^3 - h^2r\right)$ ,  $V = \pi\left(hr^2 - \frac{h^3}{3}\right)$ ; 49.  $\frac{2}{3}\pi$ ; 50.  $2\pi$ ; 51.  $16\pi$ ; 52.a.  $\frac{2\pi}{15}$ ; 52.b.  $\frac{\pi}{6}$ ;  
 52.c.  $\frac{8\pi}{15}$ ; 53.a.  $\frac{1024}{35}\pi$ ; 53.b.  $\frac{704}{5}\pi$ ; 54.a.  $\frac{3456}{35}\pi$ ; 54.b.  $\frac{576}{5}\pi$ ; 55.a.  $\frac{37}{12}$ ; 55.b.  $\frac{531}{35}\pi$ ;  
 55.c.  $\frac{63}{10}\pi$ ; 56.a.  $\frac{4}{9}$ ; 56.b.  $\frac{4}{3}\pi$ ; 56.c.  $\frac{20}{9}\pi$ ; 56.d.  $\frac{20}{9}\pi$ ; 57.a.  $6$ ; 57.b.  $\frac{84}{5}\pi$ ; 57.c.  $\frac{144}{5}\pi$ ;  
 57.d.  $\frac{156}{5}\pi$ ; 58.1.  $\frac{4096}{9}\pi$ ; 58.2.  $\frac{609}{2}\pi$ ; 58.3.  $\frac{1944}{5}\pi$ ; 58.4.  $216\pi$ ; 58.5.  $\frac{5}{6}\pi$ ; 58.6.  $2\pi$ ; 59.1.  $\frac{15}{2}\pi$ ;  
 59.2.  $18\pi$ ; 59.3.  $\frac{64}{15}\pi$ ; 59.4.  $2\pi$ ; 59.5.  $8\pi$ ; 59.6.  $\frac{16\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$ ; 59.7.  $\frac{\pi}{10}$ ; 59.8.  $\frac{256}{27}\pi$ ; 59.9.  $\frac{16}{3}\pi$ ;  
 59.10.  $\frac{4}{5}\pi$ ; 60.a.  $\frac{124}{5}\pi$ ; 60.b.  $\frac{15}{2}\pi$ ; 60.c.  $\frac{17}{6}\pi$ ; 60.d.  $\frac{67}{6}\pi$ ; 60.e.  $\frac{136}{3}\pi$ ; 60.f.  $\frac{256}{3}\pi$ ;  
 61.a.  $V = 2\pi \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x \, dx$ ; 61.b.  $V = 2\pi \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} \, dx$ ; 61.c.  $V = \pi \int_2^4 ((7x - x^2 - 10)^2 - (x - 2)^2) \, dx$ ;  
 61.d.  $V = 2\pi \int_0^{\pi/4} y \cos y \, dy$ ; 61.e.  $V = 2\pi \int_0^1 (x+1) (\sin(\frac{\pi x}{2}) - x^4) \, dx + 2\pi \int_1^5 (x+1) (x^4 - \sin(\frac{\pi x}{2})) \, dx$ ;  
 61.f.  $V = 2\pi \int_{-2}^2 (5-y)(4-y^2) \, dy$ ; 62.  $\frac{34}{3}\pi$ ; 63.1. Región :  $f(x) = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ , Eje revolución :  $y$ ;  
 63.2. Región :  $f(y) = y^{3/2}$ ,  $y = 0$ ,  $y = 9$ , Eje revolución :  $x$ ; 63.3. Región :  $f(x) = x^2 - x^6$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , Eje revolución :  $y$ ;  
 63.4. Región :  $f(x) = \sin^4 x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ , Eje revolución :  $x = 4$ ; 63.5. Región :  $y = \sin^2 x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ , Eje revolución :  $x$ ;  
 63.6. Región :  $f(y) = 4 - y^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ , Eje revolución :  $x$ ; 64.a.  $\frac{81}{10}\pi$ ; 64.b.  $\frac{1}{2}\pi$ ; 64.c.  $\frac{16}{15}\pi$ ; 64.d.  $\frac{104}{9}\pi$ ;  
 65.a.  $V = 2\pi \int_1^e x \ln x \, dx$ ; 65.b.  $V = 2\pi \int_0^1 x(e^x - e^{-x}) \, dx$ ; 65.c.  $V = \pi \int_0^\pi e^{2x} \, dx$ ; 65.d.  $V = 2\pi \int_{-1}^0 (1-x)e^{-x} \, dx$ ;  
 65.e.  $V = \pi \int_0^\pi ((3 - e^x)^2 - 1) \, dx$ ; 65.f.  $V = \pi \int_1^e (9 - (3 - \ln x)^2) \, dx$ ; 66. Div.; 67. Div.; 68. Div.;  
 69. Div.;

### Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS.**