Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas

Nombre: ____________________

Carnet: __________ Sección: 6

MA-1112 1^{er} Examen Parcial (30 %)
Intensivo 2013.

1. (8 puntos) Resuelva las siguientes integrales

   (a) (4 puntos) $\displaystyle\int \frac{5\cos^2 x - 3\tan x}{\cos x}dx$

   Solution:

$$\begin{aligned}\int \frac{5\cos^2 x - 3\tan x}{\cos x}dx &= 5\int \frac{\cos^2 x}{\cos x} - 3\int \frac{\tan x}{\cos x}dx = 5\int \cos x dx - 3\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx \\ &= 5\operatorname{sen} x - \int \frac{du}{u^2} = 5\operatorname{sen} x + 3u^{-1} + C = 5\operatorname{sen} x + 3\frac{1}{u} + C \\ &= 5\operatorname{sen} x + 3\frac{1}{\cos x} + C = 5\operatorname{sen} x + 3\sec x + C\end{aligned}$$

   (b) (4 puntos) $\displaystyle\int_3^4 x^3\sqrt{x^2-9}dx$

   Solution:

$$\begin{aligned}\int_3^4 x^3\sqrt{x^2-9}dx &= \frac{1}{2}\int_4^3 x2x^2\sqrt{x^2-9}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{7}}(u-9)\sqrt{u}du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{7}} u^{3/2}du - \frac{9}{2}\int_0^{\sqrt{7}} u^{1/2}du = \frac{1}{5}u^{5/2} - 3u^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{7}} \\ &= \frac{7}{5}7^{1/4} - 6\cdot 21^{1/4} \\ &= 7^{1/4}(\frac{7}{5} - 6\cdot 3^{1/4})\end{aligned}$$

2. (10 puntos) Calcular el área de la región acotada por la curva $y^2 = 4x+4$ y el eje y

   (a) (5 puntos) Usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

   Solution:

$$\int_{-2}^{2}\left[0 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\right]dx = 2\int_0^2\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^2 = 2\left(2 - \frac{8}{12}\right) = \frac{8}{3}$$

(b) (5 puntos) Usando sumas de Riemann

Solution: Sean $x_i = i\frac{2}{n}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\Delta x = \frac{2}{n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} -2\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= -2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4}x_i^2 - 1\right)\frac{2}{n} \\
&= -2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\left(i\frac{2}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{2}{n} \\
&= -2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2 8}{4n^3} - \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\right) \\
&= -2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{4n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\right) \\
&= -2\left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

3. (7 puntos) Demuestre la desigualdad

$$\sqrt{2} \leq \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 2$$

Solution: La función es continua y decreciente en $[5, 9]$. Por lo cual

$$5 \leq x \leq 9$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{2}$$

Usando el Teorema del Valor Medio para integrales tenemos

$$\frac{4}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot (9-5) \leq \frac{4}{2}$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}} \leq f(x) \cdot 4 \leq \frac{4}{2}$$
$$\sqrt{2} \leq \int_5^9 f(x)dx \leq 2$$