Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Primer Parcial - MA1112
Abril-Julio 2007
Soluciones Tipo 2

1. *a)* $t = \sqrt[3]{x} \implies x = t^3 \implies dx = 3t^2 dt$ (1 punto)

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{3t^2 \operatorname{sen} t}{t^2} dt = 3\int \operatorname{sen} t\, dt = -3\cos t + C$$
$$= -3\cos\sqrt[3]{x} \quad \text{(2 puntos)}$$

entonces

$$\int_0^{\pi^3/8} \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \left[-3\cos\sqrt[3]{x}\right]_0^{\pi^3/8} \quad \text{(1 punto)}$$
$$= -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0\right) \quad \text{(1 punto)}$$

b) Cambio: $u = \sqrt{2}\, x^2 \implies du = \sqrt{2}\, 2x dx$ (2 puntos)

$$\int \frac{x}{2x^4+5} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\frac{u}{\sqrt{5}} + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{10}} \frac{\sqrt{2}\, x^2}{\sqrt{5}} + C \quad \text{(3 puntos)}$$

2.

$$G(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt = \int_{1/x}^{0} \cos t^2 dt + \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \quad \text{(1 punto)}$$
$$= -\int_0^{1/x} \cos t^2 dt + \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \quad \text{(1 punto)}$$
$$\implies G'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x \quad \text{(3 puntos)}$$

3. $y = \dfrac{x^2}{6}$ tiene una única raíz en $x = 0$, $y = x^2 - 6x$ tiene raíces en $x = 0$ y $x = 6$ y la recta $y = -\dfrac{4}{3}x + 8$ corta al eje x en $x = 6$. La intersección en el primer cuadrante de la recta y la parábola $\dfrac{x^2}{6}$ es el punto $(4, 8/3)$. (Intersección: 2 puntos, esbozar región: 1 punto.)

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^4 \left(\frac{x^2}{6} - (x^2 - 6x)\right) dx + \int_4^6 \left(\left(-\frac{4}{3}x + 8\right) - (x^2 - 6x)\right) dx \quad \text{(2 puntos)}\\
&= \int_0^4 \left(-\frac{5}{6}x^2 + 6x\right) dx + \int_4^6 \left(-x^2 + \frac{14}{3}x + 8\right) dx\\
&= \left[-\frac{5}{18}x^3 + 3x^2\right]_0^4 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x^2 + 8x\right]_4^6 \quad \text{(2 puntos)}\\
&= \frac{380}{9} \quad \text{(1 punto)}
\end{aligned}$$

4. *a*)

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n} \\
\bar{x}_i &= x_0 + i\Delta x = 1 + \frac{9i}{n} \quad \text{(1 punto)} \\
f(\bar{x}_i) &= 1 + 1 + \frac{9i}{n} = 2 + \frac{9i}{n} \quad \text{(1 punto)} \\
S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\Delta x &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(2 + \frac{9i}{n}\right)\frac{9}{n} = \frac{18}{n}(n-1) + \frac{81}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i \quad \text{(2 puntos)} \\
&= 18 - \frac{18}{n} + \frac{81}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{117}{2} - \frac{18}{n} - \frac{81}{2n} \quad \text{(1 punto)}
\end{aligned}
$$

b)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{117}{2} - \frac{18}{n} - \frac{81}{2n} = \frac{117}{2} \quad \text{(2 puntos)}$$