Segundo Parcial Matematicas 3 2012 Miguel Guzman

Pregunta (1)

Sea los puntos $A := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Buscamos el plano que contiene los 3 puntos. Realizamos dos vectores

$$l_1 := B - A \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad l_2 := C - A \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y luego buscamos la normal a estos dos vectores, que corresponde a la normal del plano.

$$n := l_1 \times l_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con un punto y la normal podemos generar la ecuacion del plano

$$n \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A \right] \rightarrow 2 \cdot \bar{z} - 7 \cdot \bar{y} - \bar{x} - 9$$

Ecuacion Del Plano

Para decir si dos planos son paralelos podemos realizar el producto cruz.

$n_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ plano dado por el problema luego

$$n \times n_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

distinto de CERO

NO SON PARALELOS

Para buscar la interseccion, buscamos el conjunto solucion.

$$x - 7y - 2z = 9$$
$$2z - 7y - x = 9$$

$$y_1 := \frac{-9}{7} \qquad x_1 := 2 \cdot t \qquad z_1 := t$$

Luego la ecuacion de la recta interseccion de los planos $\frac{x_1}{2} = z_1$ $y_1 = \frac{-9}{7}$

Ecuacion Recta

Pregunta (2)

De la definicion de dependencia e independencia lineal se tiene

$$\alpha\cdot\left[-1 + 2x + 3x^2 + (a-1)x^3\right] + \beta\cdot\left[-2 + (a-2)x^2\right] + \gamma\cdot[1 + (a-3)x] + \lambda\cdot(a-4) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

Agrupamos las 1, x, x^2 x^3

$$[-\alpha - 2\cdot\beta + \gamma + (a-4)\lambda] + x\cdot[2\alpha + (a-3)\cdot\gamma] + x^2[3\alpha + (a-2)\beta] + x^3[(a-1)\alpha] = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

Se genera un sistema de ecuaciones, para que se cumpla la igualdad

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & a-4 & 0 \\ 2 & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ 3 & a-2 & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que si el determinante de la matriz es igual a cero, el sistema tendra infinitas soluciones Por que?. y los vectores seran LD

$$\left|\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & a-4 \\ 2 & 0 & a-3 & 0 \\ 3 & a-2 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \text{ simplify } \rightarrow (a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)\cdot(a-4)$$

Se dio cuenta que es triangular superior. Luego el determinante solo sera la multiplicacion de la diagonal principal

$a_1 := 1$ $\quad a_2 := 2$ $\quad a_3 := 3$ $\quad a_4 := 4$ $\quad$ el subconjunto B es LD

Pregunta (3)

El espacio vectorial es R^4 con dos condiciones a cumplir.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

tal que $\quad y_2 = x_2 + z_2 + t_2 \quad$ implica $\quad y_2 = -x_2$

$$z_2 = -t_2 - 2x_2$$

si sustituimos estas condiciones en el elemento del espacio vectorial

$$u := \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -t-2x \\ t \end{pmatrix}$$ luego sea $$F := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ pertenece a H

luego H es NO vacio

Sea $$u_1 := \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \qquad u_2 := \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \\ t_5 \end{pmatrix}$$ y α e R

$$u_1 + u_2 \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 + x_5 \\ y_4 + y_5 \\ z_4 + z_5 \\ t_4 + t_5 \end{pmatrix}$$

verificamos

$$y_4 + y_5 = -x_4 - x_5 = -(x_4 + x_5)$$

$$z_4 + z_5 = -t_4 - 2x_4 - t_5 - 2x_5 = -(t_4 + t_5) - 2(x_4 + x_5)$$

entonces $u_1 + u_2$ e H

$$\alpha \cdot u_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_4 \\ \alpha \cdot y_4 \\ \alpha \cdot z_4 \\ \alpha \cdot t_4 \end{pmatrix}$$

verificamos

$$\alpha y_4 = \alpha \cdot (-x_4) = -(\alpha x_4)$$

$$\alpha \cdot z_4 = \alpha \cdot (-t_4 - 2x_4) = -(\alpha \cdot t_4) - 2(\alpha \cdot x_4)$$

luego $\alpha \cdot u_1$ e H

Se demuestra que H es un subespacio.

Para hallar la base sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -t-2x \\ t \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ luego $$H = gen\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Se demuestra que son LI por lo que

$$\text{Base}_H := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \dim(H) := 2$$

Pregunta (4)

a.- Contra ejemplo $p_1(x) := -x$ $\quad p_1(0) - p_1(1) \to 1$ pertenece

$p_2(x) := -x^2$ $\quad p_2(0) - p_2(1) \to 1$ pertenece

$g(x) := p_1(x) + p_2(x)$ $\quad g(0) - g(1) \to 2$ NO PERTENECE luego la suma no se cumple.

NO ES SUBESPACIO.

b.- Sea $p_3(x) := x - \frac{1}{2}$ $\quad \int_0^1 p_3(x)\,dx \to 0$ PERTENECE

luego H_2 es NO VACIO.

Sea $f(x), g(x) \text{ e } H_2$ y $\alpha \text{ e } R$

$f(x) + g(x)$ comprobamos

$$\int_0^1 f(x) + g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 0 + 0 = 0$$ PERTENECE

$\alpha \cdot f(x)$ comprobamos

$$\int_0^1 \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_0^1 f(x)\,dx = \alpha \cdot (0) = 0$$ PERTENECE Luego se concluye que H_2 es SUBESPACIO.