

**Objetivos a cubrir****Código : MAT4-CDI.6**

- Series de potencias.
- Convergencia y divergencia de una serie numérica.

1. Determine el conjunto de convergencia de la serie de potencias dadas

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^{1/2} 5^n}$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^3}$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n) x^n}{3^n}$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{1/2} (2x)^n$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} x^n}{10^n}$
13.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^n}{n \ln n}$
14.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^n}$
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{3n-1}$
19.  $\sum_{n=0}^{\infty} (5x-3)^n$
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 10^n}{n!} (x-10)^n$
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^4+16}$
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x+1)^n}{3^n}$
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{n^3}$
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$
26.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n^2}$
27.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{2^n (n+1)^3}$
28.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 10^n} (x-2)^n$
29.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$
30.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$
31.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{n^2}$
32.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$
33.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (x-5)^n$
34.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$
35.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} (x+2)^n$
36.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$
37.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n}$
38.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{1+2n}} x^n$
39.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^2+1}{5} \right)^n$
40.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
41.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n} (x-2)^n$
42.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n} (x+3)^n$
43.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^2} (x-1)^n$
44.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n!} x^n$
45.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$
46.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)} x^n$
47.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\ln(n+1)}$
48.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n \cdot 2^n}$
49.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (x+1)^n$
50.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n}{4^n \sqrt{n}}$

2. Escriba la serie de potencia correspondiente y determine el conjunto de convergencia

1.  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
2.  $\frac{x}{1 \cdot 2} - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} - \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \frac{x^5}{5 \cdot 6} - \dots$
3.  $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$
4.  $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$
5.  $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$
6.  $x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + 4^2 x^4 + \dots$

7.  $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots$
8.  $1 + x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \frac{x^5}{\sqrt{5}} + \dots$
9.  $1 - \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^3}{3 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 6} - \dots$
10.  $\frac{x}{2^2 - 1} + \frac{x^2}{3^2 - 1} + \frac{x^3}{4^2 - 1} + \frac{x^4}{5^2 - 1} + \dots$
11.  $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{2^4} - \dots$
12.  $1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \dots$
13.  $1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^4x^4}{4!} + \dots$
14.  $\frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$
15.  $\frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + \frac{3x^3}{4} + \frac{4x^4}{5} + \frac{5x^5}{6} + \dots$
16.  $1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \dots$
17.  $1 + \frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(x+1)^3}{2^3} + \dots$
18.  $\frac{x-2}{1^2} + \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(x-2)^3}{3^2} + \frac{(x-2)^4}{4^2} + \dots$
19.  $\frac{x+5}{1 \cdot 2} + \frac{(x+5)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(x+5)^3}{3 \cdot 4} + \frac{(x+5)^4}{4 \cdot 5} + \dots$
20.  $(x+3) - 2(x+3)^2 + 3(x+3)^3 - 4(x+3)^4 + \dots$

3. Determine el radio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^{2n+1}$$

4. Determine el radio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pn)!}{(n!)^p} x^n$$

en donde  $p$  es un entero positivo.

5. Determine la suma  $S(x)$  de  $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$ . ¿Cuál es el conjunto de convergencia?

6. Suponga que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$  converge en  $x = -1$ . ¿Por qué podemos concluir que converge en  $x = 6$ ? ¿Podemos asegurar que converge en  $x = 7$ ? Explique.

7. Suponga que  $a_{n+3} = a_n$  y sea  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Demuestre que la serie converge para  $|x| < 1$  y proporcione una fórmula para  $S(x)$ .

8. Determine la representación en serie de potencias para la función  $y = f(x)$  y especifique el radio de convergencia. Cada una está relacionada en cierto sentido con una serie geométrica.

1.  $f(x) = \frac{1}{1+x}$
2.  $f(x) = \frac{1}{2-3x}$
3.  $f(x) = \frac{1}{3+2x}$
4.  $f(x) = \frac{5-x}{2-x}$
5.  $f(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$
6.  $f(x) = \frac{x^3}{2-x^3}$
7.  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
8.  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$
9.  $y = \frac{x}{(x+1)^2}$
10.  $f(x) = \ln(1+x^2)$
11.  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$
12.  $y = \ln x$
13.  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$
14.  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{3-x^2}\right)$
15.  $f(x) = \arctan x$
16.  $f(x) = \arctan(x-3)$
17.  $f(x) = x^3 \arctan x$
18.  $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$

$$\begin{array}{lll}
19. & f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7} & 20. & f(x) = \frac{1}{2x - x^2 + 6} & 21. & f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 9} \\
22. & f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 6} & 23. & f(x) = \frac{3x - 11}{7x - x^2 - 12} & 24. & f(x) = \frac{4x + 11}{x^2 + 7x + 10}
\end{array}$$

## Respuestas

- 1.1.  $(-1, 1)$ ; 1.2.  $[-1, 1)$ ; 1.3.  $(-2, 2)$ ; 1.4.  $x = 0$ ; 1.5.  $(-5, 5)$ ; 1.6.  $[-1, 1]$ ; 1.7.  $(-3, 3)$ ;  
 1.8.  $(-e, e)$ ; 1.9.  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ; 1.10.  $(-3, 3)$ ; 1.11.  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; 1.12.  $(-10, 10)$ ; 1.13.  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ;  
 1.14.  $(-1, 1)$ ; 1.15.  $\mathbb{R}$ ; 1.16.  $[-2, 2)$ ; 1.17.  $(-1, 1]$ ; 1.18.  $(-1, 1)$ ; 1.19.  $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ ; 1.20.  $\mathbb{R}$ ;  
 1.21.  $[0, 1]$ ; 1.22.  $(-4, 2)$ ; 1.23.  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ; 1.24.  $[2, 4]$ ; 1.25.  $\mathbb{R}$ ; 1.26.  $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$ ; 1.27.  $[-2, 2]$ ;  
 1.28.  $(-8, 12]$ ; 1.29.  $[-1, 1]$ ; 1.30.  $\mathbb{R}$ ; 1.31.  $[1, 3]$ ; 1.32.  $x = 0$ ; 1.33.  $x = 5$ ; 1.34.  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ;  
 1.35.  $(-3, -1]$ ; 1.36.  $(-1, 1]$ ; 1.37.  $(1, 3]$ ; 1.38.  $(-1, 1)$ ; 1.39.  $(-2, 2)$ ; 1.40.  $x = 0$ ; 1.41.  $x = 2$ ;  
 1.42.  $(-6, 0)$ ; 1.43.  $x = 1$ ; 1.44.  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; 1.45.  $\mathbb{R}$ ; 1.46.  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ; 1.47.  $[0, 2)$ ; 1.48.  $[-1, \frac{1}{3})$ ;  
 1.49.  $(-\frac{e+1}{e}, \frac{1-e}{e})$ ; 1.50.  $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$ ; 2.1.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ;  $R = \mathbb{R}$ ; 2.2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)}$ ;  $R = [-1, 1]$ ;  
 2.3.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ;  $R = \mathbb{R}$ ; 2.4.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ;  $R = \mathbb{R}$ ; 2.5.  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ;  $R = (-1, 1)$ ;  
 2.6.  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ ;  $R = (-1, 1)$ ; 2.7.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ;  $R = (-1, 1]$ ; 2.8.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ;  $R = [-1, 1)$ ;  
 2.9.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+2)}$ ;  $R = [-1, 1]$ ; 2.10.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ ;  $R = [-1, 1]$ ; 2.11.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ ;  $R = (-2, 2)$ ;  
 2.12.  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ ;  $R = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; 2.13.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ ;  $R = \mathbb{R}$ ; 2.14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ ;  $R = [0, 2)$ ;  
 2.15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$ ;  $R = (-1, 1)$ ; 2.16.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$ ;  $R = \mathbb{R}$ ; 2.17.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$ ;  $R = (-3, 1)$ ;  
 2.18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ ;  $R = [1, 3]$ ; 2.19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n(n+1)}$ ;  $R = [-6, -4]$ ; 2.20.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(x+3)^n$ ;  $R = (-4, -2)$ ;  
 3.  $R = 0$ ; 4.  $R = \frac{1}{p^p}$ ; 5.  $S(x) = \frac{1}{4-x}$ ,  $(2, 4)$ ; 6. Conv. en  $x = 6$  y  $x = 7$ ; 9.1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ;  
 9.2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2^{n+1}}$ ; 9.3.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$ ; 9.4.  $1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2^{n+1}}$ ; 9.5.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+2}$ ; 9.6.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^{n+1}$ ;  
 9.7.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{n-1}$ ; 9.8.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-2}$ ; 9.9.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^n$ ; 9.10.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ ;  
 9.11.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ; 9.12.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$ ; 9.13.  $\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ;  
 9.14.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ ; 9.15.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$ ; 9.16.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n+1}}{2^{n+1}}$ ; 9.17.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2^{n+1}}$ ;  
 9.18.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$ ; 9.19.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$ ; 9.20.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{7^{n+1}}$ ; 9.21.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{5^{n+1}}$ ;  
 9.22.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$ ; 9.23.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$ ; 9.24.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$ ;

## Bibliografía

1. Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.: "Cálculo". Novena Edición. Pearson Prentice Hall.
2. Stewart, J.: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.