3ra PARTE

TERCER PARCIAL

RANGO, NULIDAD, IMAGEN Y RANGO, ESPACIO COLUMNA, ESPACIO FILA.

1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ determine la base del espacio nulo y además diga la nulidad de la matriz A.

2.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ determine el espacio nulo, la nulidad, el espacio imagen, rango, espacio renglón y espacio columna de la matriz.

3.- Determine el rango y el espacio de los renglones de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4.- Determine una base para el espacio generado por los cuatros vectores en R² $u = (1,2,-3)$ $v = (-2,0,4)$ $w = (0,4,-2)$ $z = (-2,-4,6)$

5.- Determine el rango y nulidad para las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine a su vez una base para la imagen y el espacio nulo.

6.- Determine si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen o no soluciones única o infinita, (use las propiedades de espacio nulo e imagen)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ + 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

PRODUCTO INTERNO.

1.- En R^2, si $x = \binom{x_1}{x_2}$ y $y = \binom{y_1}{y_2}$ sea $(x \quad y) = x_1y_1 + 3x_2y_2$. Demuestre que (x, y)es un producto interno en R^2

2.- Demuestre que con $\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(x).g(x)dx$ se define un producto interno en el espacio vectorial P_2 de todos los polinomios de grado menor 2.

2.1.- Halle el modulo de los vectores $1, x, x^2 + x - 1$

2.2.- Halle todos los vectores de P_2 que sean ortogonales al vector (x).

3.- Dar razones por las cuales los siguientes condiciones no corresponden a un espacio con producto interno.

$a. -\langle(a, b); (c, d)\rangle = ac - bd \quad en\ R^2$

$b. - \langle A, B\rangle = tr(A + B)\ en\ M_{22}$

$$c. -(f, g) = \int_0^1 f'(x).g(x)dx \quad en\ P(R)$$

4.- Verifique en cada una de las siguientes proporciones si son producto interno del espacio vectorial.

$a. -V = R^2, \qquad u = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2)\ \ con\ \langle u, w\rangle = 2x_1x_2 + 4y_1y_2$

$b. -V = P_3 \ \ p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$c. -V = R^4.\ u = (x_1, y_1, z_1, t_1); w = (x_2, y_2, z_2, t_2)\ \ con$

$$\langle u, w\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + t_1t_2$$

5.- Sea $(x, y, z), (x', y', z') \in R^3$, definimos $\langle(x, y, z), (x'.y'.z')\rangle = \frac{xx'}{2} + \frac{yy'}{3} + \frac{zz'}{4}$

Verifique es un producto interno, además calcule $\langle(1, -1,1), (0,2,4)\rangle$

6.- Sea $f, g \in C([a, b]; R)$ definimos

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Un producto interno del espacio vectorial

Halle el valor para $f = \cos \quad y \quad g = \sin \qquad$ en el intervalo $(0,2\pi)$

56

7.- Sea $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{mxn}(R)$ definimos

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Calcule el valor de

$a.-A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$b.-A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -3 \end{pmatrix}$

EJERCICIO.

.- Sea espacio vectorial $I = [a, b]$ el conjunto de funciones de valores complejos que son continuos en el intervalo I. Para f y g en $CV[a, b]$ se define:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x).\overline{g(x)}\,dx$$

Demuestre que es un espacio vectorial.

SOLUCION.

HIPOTESIS: Sea $f(x) = f_1 + f_2 i$

i.- $\langle f, f\rangle \geq 0$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x).\overline{f(x)}dx = \int_a^b f_1^2 + f_2^2 \geq 0$$

Ya que se tiene: $f_1^2 \geq 0 \quad y \quad f_2^2 \geq 0 \quad => \quad f_1^2 + f_2^2 \geq 0$

ii.- $\langle f, f\rangle = 0 \quad => f = 0$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x).\overline{f(x)}dx = \int_a^b f_1^2 + f_2^2 = 0 \;=>\; f_1 = f_2 = 0 \quad ¿Por\ que?$$

Note que la integral debe ser cero para ello 1.- $a = b$ no ocurre o 2.- $f_1^2 + f_2^2 = 0 \;=>$ $f_1^2 = -f_2^2$ no tiene solución por lo cual la única solución es que sea idéntica a cero.

Ahora debemos demostrar lo contrario, si $f = 0$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x).\overline{f(x)}dx = 0$$

iii.- $\langle f, g + h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$

$$\langle f, g + h\rangle = \int_a^b f(x).\overline{g(x) + h(x)}dx = \int_a^b f(x).\left(\overline{g(x)} + \overline{h(x)}\right)dx$$

$$= \int_a^b f(x).\overline{g(x)}dx + \int_a^b f(x).\overline{h(x)}dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$$

iv.- Similar a iii.

v.- $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x).\overline{g(x)}dx = \int_a^b \overline{g(x)}.f(x)dx$$

$$\overline{\langle g,f\rangle} = \int_a^b \overline{g(x).\overline{f(x)}}dx = \int_a^b \overline{g(x)}.f(x)dx$$

HIPOTESIS: Sea $\alpha \in CV$

vi.- $\langle \alpha f,g\rangle = \alpha\langle f,g\rangle$

$$\langle \alpha f,g\rangle = \int_a^b \alpha f(x).\overline{g(x)}dx = \alpha\int_a^b f(x).\overline{g(x)}dx = \alpha\langle f,g\rangle$$

vii.- $\langle f,\alpha g\rangle = \bar{\alpha}\langle f,g\rangle$

$$\langle f,\alpha g\rangle = \int_a^b f(x).\overline{\alpha g(x)}dx = \bar{\alpha}\int_a^b f(x).\overline{g(x)}dx = \bar{\alpha}\langle f,g\rangle$$

NOTA: Ud debió demostrar las hipótesis de la suma ya que esta no varían (no se definió nueva suma) solo interesa la sección de multiplicación ya que fue aquí se hubo nueva definición. Para efecto de parcial se debe demostrar todo.

.- Demuestre que $f(x) = \sin(x) + i\cos(x)$ y $g(x) = \sin(x) - i\cos(x)$ son ortogonales en $CV[0,\pi]$

.- Calcule $\|\sin(x) + i\cos(x)\|$ en $CV[0,\pi]$

.- En M_{nn} defina $\langle A, B\rangle = Ъ(AB^t)$. Demuestre que con este producto interno, M_{nn} es un espacio vectorial con producto interno.

SOLUCION.

Preliminar.- Sea $A = \left(a_{ij}\right)$ y $B^t = \left(b_{ji}\right)$ entonces.

$$(AB^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk}$$

De manera que:

$$Ъ(AB^t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

i.- $\langle A, A\rangle = Ъ(A, A^t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$ ¿Por qué?

ii.- $\langle A, A\rangle = 0 \;=>\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \;=>\; a_{ij}^2 = 0 \;\forall i, j \;=> A = 0$

Por otro lado

$A = 0 \quad A^t = 0 \quad y \quad AA^t = 0 \quad => \quad Ъ(AA^t) = 0$

iii.- $\langle A, B + C\rangle = Ъ(A(B + C)^t) = Ъ\big(A(B^t + C^t)\big) = Ъ(AB^t + AC^t) =$

$Ъ(AB^t) + Ъ(AC^t) = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$

iv.- $\langle A + B, C\rangle$ (de manera igual)

v.- $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ij} = Ъ(BA^t) = \langle B, A\rangle$

vi.- $\langle \alpha A, B\rangle = Ъ(\alpha AB^t) = \alpha Ъ(AB^t) = \alpha\langle A, B\rangle$

vii.- $\langle A, \alpha B\rangle = \langle \alpha B, A\rangle = \alpha\langle B, A\rangle = \alpha\langle A, B\rangle$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1.- Sea $T: R^2 \to R^2$ dada por $T(x,y) = (y, 4x)$ encuentre los autovalores y autovectores asociados a la transformación lineal.

2.- Sea $T: R^2 \to R^2$ dada por $T(x,y) = (-y, x)$ encuentre los autovalores y autovectores asociados a la transformación lineal.

3.- Sea $T: R^3 \to R^3$ dada por $T(x,y,z) = (x, y, x)$ encuentre los autovalores y autovectores asociados a la transformación lineal.

4.- Sea $T: R^2 \to R^2$ dada por $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ determine el polinomio característico.

5.- Para las siguientes matrices determine las autovalores y autovectores así como también la multiplicidad algebraica y geométrica:

a.- $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ b.- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ c.- $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ d.- $\begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

e.- $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ f.- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ g.- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6.- De la siguiente matriz se sabe que $\lambda_1 = 1$ es uno de sus autovalores y que $v = (1,1,1)$ es un vector propio de A asociado al autovalor dado

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix}$$

a.- Hallar los valores de α, β, γ.

b.- Hallar los autovalores y los subespacios propios de A.

7.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ determine los autovalores asociados a las autovectores dados

8.- Determine los autovalores, autovectores, de ser posible halle el espacio generado por los autovectores.

$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

DIAGONALIZACION DE MATRICES.

1.- Dadas las siguientes matrices, determine si la matriz es diagonalizable en caso afirmativo halle la matriz C que cumple $C^{-1}AC = D$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.- Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^tAQ = D$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Demuestre que si $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal, entonces $b = \pm c$

4.- Sea $T: R^3 \to R^3$ definida mediante $T(x, y, z) = (-2y - 3z, x + 3y + 3z, z)$ determine la matriz que diagonaliza con la matriz asociada a T.

5.- Para cada uno de los siguientes operadores lineales T, probar si T es diagonalizable y en caso de serlo, encontrar la matriz diagonal.

a.- $T: P_3 \to P_3$ definida mediante $T(f) = f' + f''$

b.- $T: P_2 \to P_2$ definida mediante $T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$

c.- $T: R^3 \to R^3$ definida mediante $T(x, y, z) = (y, -x, 2z)$

6\.- Para cada una de las siguientes matrices A probar si A es diagonalizable y en caso de serlo, encontrar una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

a.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

d.- $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

e.- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

g.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

REPASO TERCER PARCIAL

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ halle una base ortonormal para su espacio nulo (12).

2.- Sea $T: M_{22} \to R^3$ la función por: $T: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, c, d)$ (10)

a.- Demuestre que T es una transformación lineal.

b.- Halle la matriz A_T asociada a T con las bases naturales.

c.- Halle la nulidad de T

d.- Halle el rango de T.

3.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (12)

a.- Halle los autovalores de A

b.- Halle los autoespacios de A

c.- Diga si A es diagonalizable; en caso afirmativo halle dos matrices P,D tales que $P^{-1}AP = D$ y la matriz D sea diagonal.

4.- Demuestre que para toda matriz A de tamaño n x n, las dos matrices A, A^t tienen los mismos autovalores. (6)

5.- Halle la proyección ortogonal del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio W de R^3 definido por $W = gen\{(1,1,2)(-2,1,-1)\}$ (12)

6.- Sea $T: M_{22} \to M_{22}$ tal que: (10)

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a.- Halle una forma para T

b.- Halle la nulidad y el rango de T.

7.- Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$ (12)

Halle una matriz ortogonal, Q, y una matriz diagonal D tales que $Q^{-1}AQ = D$

Conociendo que $\det\begin{pmatrix} 10-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 13-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 13-\lambda \end{pmatrix} = (-1)(\lambda-9)^2(\lambda-18)$

8.- Demuestre que si λ es un autovalor de una matriz A de tamaño n x n, entonces λ^2 es un autovalor de A^2 (6)

9.- Sean los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el subespacio $W = gen\{u_1, u_2, u_3\}$ (12)

a.- Complete el conjunto que genera a R^4 y de manera que obtenga una base ortonormal al espacio.

b.- Conociendo que la proyección de v sobre W es el vector $proy_w v = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ halle la proyección de v sobre el complemento ortogonal de W.

10.- Sea $T: R^3 \rightarrow P_3$ la transformación lineal definida por:

$$T(a,b,c) = (a+b) + (a-c)x + (b+c)x^2 + (a+b)x^3$$

a.- Halle la matriz asociada a T

b.- Halle una base y la dimensión para la imagen

c.- Halle para cuales valores de la constante k el vector $w = 2 + kx - 3x^2 + 2x^3$ pertenece a la imagen de T.

11.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ halle una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $Q^{-1}AQ = D$

12.- Demuestre que si una matriz real A es diagonalizable ortogonalmente entonces necesariamente A es simétrica. (6)

13.- Sea a, b y c tres números reales no nulos. Sea A la matriz de tamaño 3x3.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

a.- Halla la imagen y el rango de A.

b.- Determinar el núcleo y nulidad de A.

14.- Sea A la matriz 3x3 dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- Determine los valores propios de A y halle los vectores propios asociados a cada valor propio de A.

b.- Sea los tres vectores de R^3 dados por: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mostrar que $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son vectores propios de A.

c.- Mostrar que los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ forman una base de R^3

15.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ determinar una matriz diagonal D, definida por $D = P^{-1}AP$

16.- Sean $a, b, c, d \in R$, halle un autovalor y un autovector correspondiente a la matriz A=$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

17.- Halle la base ortonormal a R^3 donde $R^3 = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

i.- Sea $H = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, escriba una base ortonormal para $H^{\perp}$

ii.- Halle $proy_{H^{\perp}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

65

18.- De la transformación línea $T: P_2 \to P_3$ se conoce los transformados de los elementos de la base $B = \{(-1 + x + x^2); (x + 2x^2)(x + x^2)\}\ de\ P_2$

$$T(-1 + x + x^2) = (1 + x)$$

$$T(x + 2x^2) = (x^3)$$

$$T(x + x^2) = (x^2)$$

a) Halle la imagen de T con cualquier polinomio de la forma $f = a + bx + cx^2$

b.- Halle la matriz de T con respecto a las bases $B_2 = \{1, x, x^2\}\ de\ P_2$ y $B_3 = \{(1, x, x^2, x^3)\}\ de\ P_3$

c.- Halle núcleo de T y nulidad.

19.- Para cada enunciado diga si es verdadero o falso.

a.- En R^2 el producto $\langle (x_1, y_1); (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$ define un producto interno.

b.- Existe una transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ tal que $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

c.- Si λ es un autovalor de la matriz A, entonces $v(A - \lambda I) > 0$

d.- La matriz $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ es ortogonal.

20.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\1 & 3 & -3\\2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

a.-Diga si la matriz A es diagonalizable.

b.- En caso afirmativo determine la matriz D y P de manera que $D = P^{-1}AP$

21.- En P_2 se define el siguiente producto interno: Si $p(t), q(t) \in P_2$ entonces

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

a.- Halle una base ortonormal de w.

22.- Sea $T: P_2 \to R^2$ una transformación lineal definida por:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a, b)$$

a.- Demuestre que T es una transformación lineal.

b.- Halle una base para la imagen y el núcleo de T.

23.- Demuestre que si A es diagonalizable entonces A^t es diagonalizable.

24.- Dado el subespacio H de R^4 definido por:

$$H = gen\,\{(1,1,0,1)(2,-1,0,0)(0,1,1,0)(3,1,1,1)\}$$

a.- Halle una base para el complemento ortogonal de H

b.- Halle $proy_H v$ siendo $v = (0,0,1,1)$

25.- De cierta transformación lineal $T: R^2 \to R^3$ se conoce que:

$T(1,2) = (1,2,3), T(2,2) = (0,-1,1)$

a.- Halle la matriz asociada a T

b.- Halle $T(3,8)$

c.- Halle el rango y nulidad de T

26.- En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor que 2, se define el producto interno: $\langle p, q\rangle = \int_0^1 2x.p(x)q(x)dx$; determine qué condiciones deben cumplir las constantes a,b para que el polinomio $f(x) = a + bx^2$ sea ortogonal al polinomio $q(x) = 1 + x$

27.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a.- Halle sus autovalores y autoespacios.

b.- Diga si A es o no es diagonalizable.

c.- Diga si A es o no semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

28.- Demuestre que si A,B son matrices de tamaño n x n, semejantes, entonces necesariamente $\det(A) = \det(B)$