UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2007
MA1116 tercer examen parcial (40%)
11-12-2007

TIPO C1

SOLUCIONES

1.- (12 ptos.) Sean los vectores $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{v} = (1, 3, 0, 1)$ y el subespacio $W = \text{gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$;

1a) Use el algoritmo de Gram-Schmidt para completar el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ a una base ortonormal de R^4 ;

1b) conociendo que la proyección de **v** sobre W es el vector $\text{proy}_W(\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$,

halle la proyección de **v** sobre el complemento ortogonal, $W^{\perp}$, de W .

1a) El algoritmo de Gram-Schmidt transforma una base de un espacio vectorial en una base ortonormal; por lo tanto deberemos primero completar el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ a una base de R^4 .
Por ejemplo podemos agregar el vector $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 0)$.
Los cuatro vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, v_4$ forman una base para R^4 ya que son L.I.
Esto se verifica facilmente observando por ejemplo que el determinante de la matriz :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ no es nulo .

Como los tres vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ya son dos a dos perpendiculares y tienen todos módulo =1 , bastará hallar el vector $\mathbf{u}_4$ aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt.

$(\mathbf{v}_4)' = \mathbf{v}_4 - [\, (\mathbf{v}_4.\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_4.\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{v}_4.\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3 \,] =$
$= (1, 0, 0, 0) - [\, (1/2)\mathbf{u}_1 + (1/\sqrt{2})\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3] =$
$(1, 0, 0, 0) - [\, (1/4)(1, ,1 ,1 ,1) + (1/2)(1,-1, 0, 0) + (0, 0, 0, 0) \,] =$
$= \frac{1}{4}\left((4, 0, 0, 0) - (1, 1, 1, 1) - (2,-2, 0, 0) \right) = \frac{1}{4}(1, 1, -1, -1)$;

$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4' / |\mathbf{v}_4'| = \dfrac{(1, 1, -1, -1)}{|(1, 1, -1, -1)|} = (1, 1, -1, -1) / 2$

Los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ forman una base ortonormal para R^4 .

1b) Recordando que dado un subespacio, W , todo vector, **v** se puede expresar en manera única como suma $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p}$ siendo
$\mathbf{h} = \text{proy}_W \mathbf{v}$, $\mathbf{p} = \text{proy}_{W\perp} \mathbf{v}$;

se tiene : $\mathbf{p} = \text{proy}_{W\perp} \mathbf{v} = \mathbf{v} - \text{proy}_W \mathbf{v} = (1, 3, 0, 1) - \frac{1}{4}(1, 9, 3, 7) =$

$= \frac{1}{4}[\,(4, 12, 0, 4) - (1, 9, 3, 7)\,] = \frac{1}{4}(3, 3, -3, -3) = \frac{3}{4}(1, 1, -1, -1)$.

Observemos que tambien habríamos podido proceder el la siguiente manera , tomando en cuenta que $W^{\perp} = \text{gen}(\mathbf{u}_4)$:

$\mathbf{p} = \text{proy}_{W\perp} \mathbf{v} = (\mathbf{u}_4.\mathbf{v})\mathbf{u}_4 = \frac{3}{2}\ \mathbf{u}_4 = \frac{3}{4}(1, 1, -1, -1)$.

2.- (12 ptos.) Sea $T : R^3 \to P_3$ la transformación lineal definida por

$T(a, b, c) = (a+b)+(a-c)x+(b+c)x^2+(a+b)x^3$;

2a) halle la matriz, A_T , asociada a T con las bases naturales;

2b) halle una base y la dimensión, $\rho(T)$, de la imagen de T;

2c) halle para cuales valores de la constante k el vector $\mathbf{w} = 2+kx-3x^2+2x^3$ pertenece a la imagen de T .

2a) Como en la k-ésima columna de la matriz asociada se hallan las componentes de la imagen del k-ésimo vector de la base (natural) del dominio, se tiene :
$T(1, 0, 0) = 1+x+x^3$, $T(0, 1, 0)= 1+x^2+x^3$, $T(0, 0, 1) = -x + x^2$ y por lo tanto

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

2b) llevando la matriz A_T a forma escalonada : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nos percatamos que su rango es =2 por lo cual la dimensión de la imagen de T es =2 y se obtiene una base con dos de sus vectores L.I. , por ejemplo los dos vectores representados por las primeras dos columnas de la matriz A_T : $1+x+x^3$, $1+x^2+x^3$;

2c) $w = 2+kx-3x^2+2x^3 \in$ Imagen(T) si y sólo si es combinación lineal de los vectores de la base que hallamos en 2**b**) :

$$2+kx-3x^2+2x^3 = x_1(1+x+x^3) + x_2(1+x^2+x^3) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 0 & k-5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ k=5 .

3.- (10 ptos.) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; halle una matriz <u>ortogonal</u>, Q, y una matriz diagonal, D, tales que $Q^{-1}AQ = D$.

Solución.

Hallemos primero los autovalores de A :

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = \lambda(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

por lo tanto los autovalores de A son : $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$;

luego hallemos una base para cada autoespacio :

$$\lambda_1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow E_0 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \;;$$

$$\lambda_2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow E_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \;;$$

$$\lambda_3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow E_3 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \;;$$

Observemos que como A es real simétrica, los tres autovectores [que generan respectivamente los tres autoespacios E_0, E_1, E_3] , por ser asociados a autovalores diferentes son necesariamente dos a dos perpendiculares; por lo tanto para hallar una base ortonormal de autovectores es suficiente dividir a cada autovector por su módulo. De esta manera obtenemos :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

4.- (6 ptos.) Demuestre que si una matriz real , A, es diagonalizable <u>ortogonalmente</u> [es decir si existe una matriz ortogonal, Q, tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal], entonces necesariamente A es simétrica.

Solución.

Como Q es ortogonal, se tiene $Q^{-1}=Q^t$; entonces :