

GUIA DE EJERCICIOS

MATEMATICAS 3

La presente guía representa una herramienta para el estudiante para que practique los temas dictados en matemáticas 3. Tenga presente que algunos ejercicios se escapan de la dificultad del curso sin embargo son importante para ampliar más el conocimiento de los temas. Los temas que se aprecian en la guía son:

1. Matrices. Operaciones con matrices. Ejemplos.
2. Sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Operaciones elementales de fila. Matriz escalonada, matriz escalonada reducida. Métodos de Gauss y Gauss-Jordan
3. Sistemas con una solución, con infinitas soluciones e inconsistentes; Sistemas homogéneos y no homogéneos.
4. Matriz identidad. Matriz invertible. Cálculo de la inversa de una matriz; Matrices equivalentes por fila. Matriz transpuesta, matriz simétrica.
5. Determinantes. Propiedades. Determinantes de A^{-1} . Adjunta de una matriz. Cálculo de la matriz inversa usando la adjunta.
6. Coordenadas cartesianas en el plano y en el espacio. Vectores en el plano y en el espacio.
7. Producto escalar. Proyecciones ortogonales. Producto vectorial.
8. Rectas y planos en el espacio.
9. Espacios vectoriales. Subespacios.
10. Combinación lineal y espacio generado. Independencia lineal.
11. Base y dimensión. Rango, nulidad. Espacio fila y espacio columna.
12. Proyección ortogonal. Bases ortonormales. Algoritmo de Gram-Schmidt.
13. Producto interno (definiciones y ejemplos).
14. Transformaciones lineales. Imagen y núcleo.
15. Matriz asociada a la base canónica.
16. Autovalores y autovectores.
17. Matrices similares. Diagonalización.
18. Matrices reales simétricas. Diagonalización ortogonal.
19. Formas cuadráticas y secciones cónicas.

La guía consta con más 330 ejercicios.

GUIA DE EJERCICIOS “ALGEBRA LINEAL”.

INDICE.

TEMA	PAG
Primera Parte	
SISTEMAS DE ECUACIONES, MATRICES E INVERSA	3
DETERMINANTES, COFACTORES	4
MAS EJERCICIOS	5
EJERCICIOS DE PARCIALES	6
CLASE DE REPASO PRIMER PARCIAL	7
Segunda Parte	
VECTORES EN EL ESPACIO, RECTAS, PROYECCIONES Y PLANOS	11
ESPACIO VECTORIALES, SUBESPACIO	13
COMBINACION LINEAL.	16
DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL	18
BASE Y DIMENSION	19
REPASO SEGUNDO PARCIAL	20
Tercera Parte	
ESPACIO NULO, IMAGEN, NULIDAD Y RANGO	24
PRODUCTO INTERNO	25
GRAM-SCHMIDT	27
PROYECCION ORTOGONAL Y COMPLEMENTO ORTOGONAL	28
TRANSFORMACION LINEAL	29
AUTOVALORES Y AUTOVECTORES	33
DIAGONALIZACION DE MATRICES	34
REPASO TERCER PARCIAL.	36
SOLUCION A LOS EJERCICIOS	41

SISTEMAS DE ECUACIONES, MATRICES E INVERSAS.

1.- Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$a. - \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$b. - \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$$

$$c. - \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$d. - \begin{cases} -2x_1 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

2.- Determine los valores de las constantes para que el sistema sea;

a.- Inconsistente.

b.- Consistente $\begin{cases} \text{Soluciones Infinitas} \\ \text{Solucion unica} \end{cases}$

$$a. - \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = b \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = c \end{cases}$$

$$b. - \begin{cases} 2x - 6z = -6 \\ 2x + ay - z = -2 \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

$$c. - \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + (a+1)x_4 = b \end{cases}$$

$$d. - \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

3.- Realice los cálculos pedidos.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a. - A - 2B \quad b. - 2A - B + 2C \quad c. - 4C - 2B + 3A$$

$$d. - 3A - C \quad e. - 3A - C + 3B \quad f. - 2B - 3C + A$$

4.- Determine los productos

$$a.- \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b.- \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c.- \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad d.- \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

5.- Determine si las matrices son invertibles, en caso afirmativo halle la inversa.

$$a.- \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix} \quad b.- \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad c.- \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d.- \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad e.- \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES, COFACTORES, ADJUNTA.

6.- Halle los determinantes de las siguientes matrices.

$$a.- \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad b.- \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & -7 \end{pmatrix} \quad c.- \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d.- \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad e.- \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad f.- \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g.- \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

7.- ¿Para qué valores de α la matriz A no tiene inversa?

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}$$

8.- Halle la matriz de cofactores de las siguientes matrices.

a.- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b.- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8.1.- De las matrices anteriores halle la Adjunta.

8.2.- Determine los determinantes de las matrices.

8.3.- Halle la matriz inversa.

MÁS EJERCICIOS.

9.- Determine si la matriz es invertible, si es afirmativo hállela.

a.- $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

10.- Sea la matriz A, determine la adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

11.- Sea la matriz B, determine la inversa de la matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

12.- Sea la matriz A^{-1} , halle: (a) determinante de A (b) El cofactor A_{43}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13.- Dada la matriz A, calcule:

- a.- El menor M_{31} de la matriz.
- b.- El valor del determinante de A.
- c.- El cofactor A_{31}
- d.- ¿Cuál es el elemento a_{31} de la matriz Adjunta?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS DE PARCIALES.

14.- Sea la matriz B, determine

- a.- Para que valores de "t" la matriz B no tiene inversa
- b.- Calcule B^{-1} para $t = 1$
- c.- Halle el $\det(B^{-1})$ para $t = \frac{1}{3}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 2t & 2 \end{pmatrix}$$

15.- Considere la matriz W,

- a.- Encuentre $\det(W)$.
- b.- Sea A y C dos matrices 4 x 4. Si $\det(A) = \frac{4}{\det(W)}$ y $(AWC^{-1})^t C^{-1} = I_4$, calcule $\det(C)$.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

16.- Sean A y B matrices de n x n. Pruebe que la matriz $AB^t + BA^t$ es simétrica.

***Extra:** Indique si es Cierta o Falsa.

a.- Si B es invertible, entonces $(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$

b.- Sea A y B matrices 3 x 3. Si $\det(A) = \det(B) = 2$, entonces $\det(2BA^t) = 8$

c.- Todo sistema lineal no homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas ($m > n$) tiene infinitas soluciones.

CLASE DE REPASO PARA EL PRIMER PARCIAL.

17.- Sea A una matriz 3 x 3 con $\det(A) = 2$. Halle:

a.- $\det(A^2)$ b.- $\det(4A)$ c.- $\det(A + A)$

d.- $\det(A^t)$ e.- $\det(A^{-1})$ f.- $\det(A^k)$

18.- Sea A una matriz invertible tal que $A^2 = A + I$ demuestre que

a.- $A^{-1} = A - I$ b.- $A^4 = 3A + 2I$

19.- Sean A,B y C matrices 4 x 4 con $\det(A) = \frac{1}{2}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 18 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a.- Halle $\det(C)$

b.- Si $(CAB^{-1})^t = I$. Halle $\det(B)$

20.- Halle los valores de α y β tal que el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + w = 2 \\ 3x - 6y + 3z + 3\alpha w = \beta \\ y - 2z + 2w = 2 \\ (1 - \alpha)w = 3 + \beta \end{cases}$$

Sea:

a.- Sea inconsistente

b.- Soluciones Infinitas.

c.- Solución Única.

21.- Para qué valores de α y β el sistema tiene:

- a.- Infinita soluciones
- b.- Finitas soluciones
- c.- Inconsistente.

$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 6 \\ 3x + 4y + z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = \alpha \\ 2x + 3y + \beta z = 1 \end{cases}$$

22.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a.- Halle A^{-1}

b.- Halle la solución del sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

23.- Sea A y B matrices de $n \times n$. (Verdadero o Falso)

i.. Si $BA=B$ entonces $(AB)^2 = AB^2$

ii.- $((AB)^{-1})^t = (B^{-1})^t(A^{-1})^t$

iii.- Si $AB=0$ entonces $A=0$ o $B=0$

24.- Halle el valor de K para que $A^t A = I$

$$A = k \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

25.- Halle el $\det(C)$ si C es la matriz que se obtiene de la matriz B aplicando las siguientes operaciones de filas. Con $\det(B) = \frac{1}{3}$

i. - $R_2 \leftrightarrow R_3$

ii. - $R_1 \rightarrow R_1 + 4R_3$

iii. - $R_3 \rightarrow (-27)R_3$

26.- Sea A una matriz $n \times n$. Supongamos que $A^2 + A - I_n = 0$. Pruebe que A es invertible y que $A^{-1} = A + I_n$.

27.- Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & p \end{pmatrix}$

Halle los valores de a y p para que se cumpla que $AP = PB$

28.- ¿ A es simétrica y $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ es simétrica?

29.- A es no singular y $AA^t = A \Rightarrow \det(A) = 1$

30.- ¿ CD es simétrica si y solo si $CD = DC$?

31.- Dado el sistema lineal
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = a \end{cases}$$

a.- Halle los valores de a para los cuales el sistema es consistente.

b.- Halle la solución general del sistema

c.- Halle una solución particular al sistema dado y la solución general del sistema homogéneo asociado.

32.- Determine para que valores de las constantes a y b el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + (a+1)x_4 = b \end{cases}$$

a.- Tiene solución única. De la solución.

b.- Tiene infinitas soluciones y describa las soluciones.

c.- Sea inconsistente.

33.- Para cada una de las siguientes proposiciones, indique si es cierto o falso.

a.- A^t esta definida solo si A es una matriz cuadrada.

b.- Todo sistema no lineal no homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas ($m > n$) tiene infinitas soluciones.

c.- Sea A y B matrices 3 x 3. Si $\det(A) = \det(B) = 2$ entonces $\det(3AB^t) = 108$

34.- Sea la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a.- Diga cuál es el determinante de B^{-1}

b.- El cofactor A_{24} de la matriz B^{-1}

SEGUNDA PARTE.

VECTORES EN EL ESPACIO, RECTAS. PROYECCIONES Y PLANOS.

35.- Sea los vectores.

$$\vec{a} = (2, -4, \sqrt{2}) \ ; \ \vec{b} = (0, 2, 1) \ ; \ \vec{c} = i + 3k \ ; \ \vec{d} = -i + 3j - 6k$$

Determine:

a.- $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

b.- $\vec{d} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

c.- $\vec{b}(\vec{a} + \vec{d})$

d.- $\vec{c} - \vec{d} + \vec{a}$

e.- $\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{d} \cdot \vec{c}$

Halle el vector UNITARIO a cada uno de los vectores dado en el problema.

36.- Determine el producto cruz para el par de los vectores dados a continuación.

a.- $\vec{u} = -3i - 2j + k$

$\vec{v} = -i + 7j - 3k$

b.- $\vec{u} = 2i - 3j + 5k$

$\vec{v} = -j + 3i - k$

c.- $\vec{u} = aj + bk$

$\vec{v} = ci + dk$

d.- $\vec{u} = 10i + 7j - 3k$

$\vec{v} = -3i + 4j - 3k$

37.- Determine dos vectores unitarios ortogonales a $\vec{u} = 2i - 3j$ y $\vec{v} = 4j + 3k$

38.- Determine el valor del seno del ángulo entre los vectores $\vec{u} = 2i + j - k$

$\vec{v} = -3i - 2j + 4k$

39.- Calcule el volumen generado por los vectores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ $\vec{v} = (1, 0, 4)$

$$\vec{w} = (-1, 3, 2)$$

Y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ calcule ahora el volumen generado por los vectores $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$

40.- Encuentre la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de las rectas indicadas.

a. — $A(-4, 1, 3)$ y $B(2, 0, -4)$ b. — $A(7, 1, 3)$ y $B(-1, -2, 3)$

c. — $A(2, 2, 1)$ y es paralela a $2i - j - k$

d. — $A(-2, 3, -2)$ y es ortogonal a la recta $-3j + 7k$

41.- Encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto pedido.

a. — $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{-z}{5}$; $\frac{3-x}{-7} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{3}$; $P(1, -3, 2)$

b. — $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = -7 + 5t \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 + 4s \\ y = 3 - 2s \\ z = 3 + s \end{cases}$; $P(-2, 3, 4)$

42.- Calcule la distancia que separa a las siguientes rectas.

a. — $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\frac{x-4}{-4} = \frac{5-y}{-4} = z+2$

b. — $\frac{3x+6}{9} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4}$; $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = z+1$

c. — $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{3}$; $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{21} = \frac{z-3}{9}$

43.- Encuentre la ecuación del plano.

a. — $P(-4, -7, 5)$ $\vec{n} = -3i - 4j + k$ b. — $P(-3, 11, 2)$ $\vec{n} = -7k + 4i + j$

c. — Contiene a $A(2, 3, -2)$ $B(4, -1, -1)$ $C(3, 1, 2)$

d. — Contiene a $A(-7, 1, 0)$ $B(2, -1, 3)$ $C(4, 1, 6)$

44.- Encuentre la ecuación de la recta que resulta al interceptar los planos.

a. - $\pi_1: x - y + z = 2$ $\pi_2: 2x - 3y + 4z = 7$

b. - $\pi_1: -2x - y + 17z = 4$ $\pi_2: 2x - y - z = -7$

c. - $\pi_1: 2x - y + z = 3$ $\pi_2: x + y + z = 3$

45.- Determine la distancia del punto dado al plano de ecuación.

a. - $A(-3,0,2)$ $\pi_1: -3x + y - 5z = 0$

b. - $A(-7,-2,-1)$ $\pi_1: -2x + 8z = -5$

c. - $A(4,0,1)$ $\pi_1: 2x - y + 8z = 3$

46.- Calcule $\text{proy}_v u$.

a. - $\vec{u} = 14i + 2k$; $\vec{v} = i + j$

b. - $\vec{u} = 2i - 5j$; $\vec{v} = -3i - 7j$

c. - $\vec{u} = 2i - 4j + k$; $\vec{v} = i - 2j + 3k$

d. - $\vec{u} = -3i + 2j + 5k$; $\vec{v} = 2i - 4j + k$

ESPACIO VECTORIALES, SUBESPACIO.

47.- Diga si el conjunto V es un espacio vectorial con la suma y el producto definido por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$k(a, b) = (a, kb)$$

48.- Sea R^3 con la suma usual y con el producto por un escalar como se indica en cada caso. Pruebe si es un espacio vectorial, en caso negativo justifique.

a. - $k(x, y, z) = (kx, ky, z)$

b. - $k(x, y, z) = (0, 0, 0)$

c. - $k(x, y, z) = (3kx, 3ky, 3kz)$

49.- Sea el conjunto R^2 se define la operación suma y multiplicación por un escalar como:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w + 1)$$

$$k(x, y) = (kx, ky + k - 1)$$

Diga si R^2 es un espacio vectorial.

50.- Sea el conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices de suma y multiplicación por un escalar usual, diga si es un espacio vectorial.

51.- Sea el conjunto de R^2 con la suma y la multiplicación por un escalar definida por:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z + 1, y + w + 1)$$

$$k(x, y) = (k + kx - 1, k + ky - 1)$$

Diga si es un espacio vectorial.

52.- Sea R^2 y considere las siguientes operaciones de suma y multiplicación por un escalar. Diga si es un espacio vectorial.

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$$

$$k(x, y) = (k^2x, ky)$$

53.- Sea $V = \{(x, y): x, y \in R\}$. Demuestre que V es un espacio vectorial donde se define la suma y la multiplicación por un escalar tal que:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$$

$$k(x, y) = (x^k, y^k)$$

54.- Sea R^2 y considere las siguientes operaciones

Diga si es un espacio vectorial

$$(x, y) + (z, w) = (0, 0)$$

$$k(x, y) = (kx, ky)$$

SUBESPACIO.

55.- Sea R^3 un espacio vectorial, entonces se define.

¿Es W un subespacio vectorial de R^3 ?

$$W = \{(a, b, c) : a \in R, \quad b = c = 0\}$$

56.- Decida si W es un subespacio de R^3 en cada uno de los casos.

a. $-W = \{(a, b, c) : a = 2b, c \in R\}$

b. $-W = \{(a, b, c) : a \leq b \leq c\}$

c. $-W = \{(a, b, c) : ab = 0\}$

57.- Si W, U son subespacios vectoriales de V entonces $W \cap U$ es un subespacio también.

58.- Sea $W = \{p(x) = a + (a - b)x^2 + bx^3\}$ Demuestre que W es un subespacio vectorial de $P_3(x)$.

59.- Decida si el conjunto dado en cada caso es un subespacio vectorial.

a. $-A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2} : a + b = 0 \right\}$

b. $-B = \{(x, y, z) : z - 2y = 2\} \in R^3$

60.- Sea $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c : 2a + c = b\}$. Demuestre que W es un subespacio vectorial de $P_2(x)$.

61.- Se define los siguientes conjuntos de R^3 . Sea subespacios vectoriales de R^3 .

a. $-U = \{(a, b, c) : a + b + c \leq 1\}$

b. $-W = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 0\}$

c. $-P = \{(x, y, z) : x + 2y = 0, y + z = 8\}$

62.- Determine si los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios

a. - $A = \{(x, y, z): x = 0\}$

b. - $B = \{(x, y, z) : z - 2y = 0\}$

c. - $C = \{(x, y, z): z - 2y = 2\}$

d. - $D = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

63.- Sea $V = M_2$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial de V ?

a. - $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$

b. - $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$

c. - $C = \{A \in V : \det(A) = 0\}$

d. - $D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + b = 0 \right\}$

64.- Sea $V = M_n$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial de V ?

a. - $A = \{A \in V : A = 3A^t\}$

b. - $B = \{A \in V : AC = CA, C \in V\}$

c. - $C = \{A \in V : A \text{ es simetrica} \}$

COMBINACION LINEAL.

65.- Determine si el vector $v = (1, 7, -4) \in R^3$ es combinacion lineal de los vectores del conjunto $A = \{v_1, v_2\}$ donde $v_1 = (1, 3, -2)$; $u_2 = (2, -1, -1)$.

66.- Considere $A = \{v_1, v_2\} \in R^4$ donde $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 2, 2)$. Determine si los siguientes vectores pertenecen a A.

a. - $v = (4, 4, 0, 7)$ b. - $w = (2, 1, 0, 3)$ c. - $r = (-2, 6, -8, -8)$

d. - $s = (4, 4, 0, 0)$ e. - $u = (4, 11, 7, 7)$ f. - $t = (-1, 4, 5, 5)$

67.- Considere $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : c = a - d, b = 0\}$ es un subespacio de P_3 determine un conjunto generador.

68.- Determine si los conjuntos G_1, G_2 generan al mismo espacio vectorial

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \quad G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

69.- Determinar si los siguientes vectores generan a R^4

a. - $(1, 1, 1, 1); (0, 1, 1, 1); (0, 0, 1, 1); (0, 0, 0, 1)$

b. - $(1, 3, -5, 0); (-2, 1, 0, 0); (0, 2, 1, -1); (1, -4, 5, 0)$

c. - $(1, 0, -2, 5); (2, 1, 0, -1); (1, 1, 2, 1)$

70.- Determine si el conjunto dado generan al espacio vectorial señalado.

a. - $(1, 2); (3, 4) \quad Ev = R^2$ b. - $(1, 1); (2, 2); (5, 5) \quad Ev = R^2$

c. - $(1, -1, 2); (1, 1, 2); (0, 0, 1) \quad Ev = R^3$

d. - $(1 - x); (3 - x^2) \quad Ev = P_2(x)$

e. - $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad Ev = M_{2 \times 2}$

f. - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad Ev = M_{2 \times 2}$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

71.- Determine si los siguientes vectores son o no linealmente independientes.

a. — $\{(6,1,1)(-2,0,0)(4,1,1)\}$ en R^3

b. — $\{(1,2,-1)(1,0,2)(2,4,-2)\}$ en R^3

72.- Si $\{u, v, w\} \in V$ es LI demuestre que $\{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ es LI.

73.- Determine cuál(es) de los siguientes conjuntos dados es o no un conjunto linealmente independiente.

a. — $A = \{(1,1,0,1)(1,-1,1,1)(2,2,1,2)(0,1,0,0)\} \in R^4$

b. — $B = \{(1,0,0,1)(0,1,0,1)(0,0,1,1)(1,1,1,1)\} \in R^4$

c. — $C = \{(t^3 - 4t^2 + 2t + 3)(t^3 + 2t^2 - 4t + 1)(2t^3 - t^2 + 3t - 5)\} \in P_3$

74.- Sea $A = \{f(t), g(t), h(t)\} \in V$ donde V es el espacio vectorial $P_2(t)$, tal que se tiene

$$f(t) = 2t^2 + 3t + 1, \quad g(t) = -t^2 + at + 2, \quad h(t) = 2t^2 + 3t + a - 5$$

Determine los valores de $a \in R$ para que A sea un conjunto linealmente independiente.

75.- Sea $A = \{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)(1,1,1)\} \in R^3$. Demuestre que A es un conjunto linealmente dependiente y que cualquier subconjunto de A con tres elementos es un conjunto linealmente independiente.

76.- Determine si el conjunto de vectores dado es LI o LD.

a. — En P_2 : $(1-x)(1+x)(x^2)$

b. — En P_3 : $(x)(x^2-x)(x^3-x)$

c. — En P_3 : $(2x)(x^3-3)(1+x-4x^3)(x^3+18x-9)$

d. — En $M_{2 \times 2}$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

BASE Y DIMENSION.

77.- Verifique que el conjunto $B = \{(1,5)(0,3)\}$ es base de R^2

78.- Sea V un espacio vectorial. Si $A = \{a, b, c\} \in V$ es base de V , demuestre que

$N = \{(a + b + c), (a), (a + c)\}$ También es base de V .

79.- Halle la dimensión del espacio vectorial conformado por las matrices $M_{2 \times 2}$.

80.- Sea $A = \{(1,0,-5), (0,1,1)\}$ y $B = \{(x,y,z) : x - 2y + z = 0\}$ subespacio vectorial de R^3 . Determine una base para $A \cap B$.

81.- Demuestre que $A = \{(2,1,0)(0,1,2)(1,0,3)\} \in R^3$ es base.

82.- Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & a & a \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in R \right\}$ determine la dimensión de A .

83.- Sea $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c : 2a + c = b\}$

a.- Demuestre que W es subespacio de P_2

b.- Determine la dimensión de W .

84.- Encuentre una base del conjunto solución del sistema, y determine su dimensión.

$$S = \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

85.- ¿Para qué valores de $a \in R$ es una base de los siguientes conjuntos?

a. - $A = \{(2,3,4)(6,7,8)(4,5-a,4)\} \in R^3$

b. - $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a+1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}$

86.- Sean $U = \{(x, y, z): x + 3y - 5z = 0\}$, $W = \{(x, y, z): x - y + 2z = 0\}$

- a.- Demostrar que U y W son subconjuntos de R^3
- b.- Encuentre una base para cada subespacio.
- c.- Encuentre una base para $U \cap W$.

87.- Sea $A = \{(1, 2, 1, 1)(-1, 1, 2, 2)\} \in R^4$

a.- ¿ $v_1 = (3, 2, 4, 5)$; $v_2 = (1, 3, 2, 2)$; $v_3 = (3, -3, 6, 6)$? $\in A$

b.- Encuentre una expresión funcional para los valores que pertenecen al espacio generado por el conjunto A .

88.- Hallar una base del subespacio vectorial F formado por las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

REPASO PARA EL SEGUNDO PARCIAL.

89.- Sea π el plano que pasa por los puntos, $P(2, 3, -1)$, $Q(1, 0, -1)$ y $R(0, -2, 1)$ y sea $\pi_1: 2x - 2y + 4z = 0$

- a.- Demuestre que ambos planos son no paralelos.
- b.- Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que resulta $\pi \cap \pi_1$
- c.- ¿El punto $(5, 2, -1)$ pertenece a L ?

90.- Sea el conjunto R^2 con las siguientes operaciones es un espacio vectorial:

$$\begin{cases} (x, y) + (z, w) = (1 + x + z, 2 + y + w) \\ k(x, y) = (k + kx - 1, 2k + ky - 2) \end{cases}$$

Diga si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de dicho espacio.

- a. $U = \{(x, y): x = y\}$
- b. $V = \{(x, y): y = 2x\}$

91.- Sea los vectores $\vec{u} = (-7, \alpha, 8, \beta)$; $\vec{v} = (-4, 2, -3, 1)$ y $\vec{w} = (1, 3, -1, 5)$ halle los valores de α y β para que los vectores sean dependientes.

92.- Sea las rectas de ecuaciones L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: x - 2 = \frac{y - 2}{3} = -(z + 1)$$

$$L_2: -(x - 2) = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{4}$$

a.- Halle la intersección de las dos rectas.

b.- Calcule el valor del coseno del ángulo que forman las dos rectas.

c.- De una ecuación que contiene a las dos rectas.

93.- Determine los valores de $r \in R$ tal que los vectores

$$\vec{u} = (1, 1, 0); \vec{v} = (0, -1, 1) ; \vec{w} = (4, -2, 2r)$$

No sean coplanares.

94.- Sean

$$H_1 = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - z = 0\}$$

$$H_2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y + z = 0\}$$

a.- Demuestre que $H_1 + H_2 = \{u + v : u \in H_1 \quad v \in H_2\}$ es un subespacio vectorial de R^3

b.- Hallar la dimensión de $H_1 + H_2$

95.- Determinar si el conjunto de polinomios $\{-x, x^2 - 2x, 3x + 5x^2\}$ en CP_2 es linealmente independiente o linealmente dependiente.

96.- En P_3 decida si los vectores $\{(t), (1 - t), (2t^2 + t - 6)\}$ son linealmente independiente.

97.- Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : 2x - y + 3z = 0 \right\}$

- a.- Demuestre que H es subespacio de R^3
- b.- Halle una base para H.
- c.- Halle dimensión de H.

98.- Sea las rectas de ecuaciones

$$L_1 = \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad y \quad L_2 = (x - 3) = (y - 2) = \frac{z - 1}{3}$$

Halle la ecuación del plano que contiene ambas rectas (si existe)

99.- Sea $W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3 : b - d = 0\}$

- a.- Demuestre que W es un subespacio vectorial de P_3
- b.- Halle una base para W.

100.- En P_3 determinar si $v_1 = 1 + 2t + t^3$ $v_2 = 1 + t$ $v_3 = 1 + 4t + 3t^3$ son LI o LD.

101.- Halle todos los vectores perpendiculares a u y unitarios.

$$u = (3, 4, 12)$$

102.- Sean $\pi_1 : x - y + z = 0$ y $\pi_2 : 2x + y - 4z = 5$

- a.- Halle la recta que resulta al interceptar los planos.
- b.- Hallar la ecuación del plano perpendicular a los planos dados y que pasa por $(4, 0, -2)$

103.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1, -1, 1)$ es perpendicular a la recta de ecuación $l : 3x = 2y = z$ y paralela al plano $\pi : x + y - z = 0$.

104.- Halle los valores de k para que $\vec{u} = (1, -2, k)$; $\vec{v} = (3, 0, -2)$ y $\vec{w} = (2, 1, -5)$ para que u sea combinación lineal.

105.- Sea $W = \left\{ A \in M_{2 \times 2} : A \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} A \right\}$ demuestre que es un subespacio vectorial y además halle la dimensión de dicho subespacio.

106.- Sea $A(2,4,6)$; $B(6,2,8)$ y $C(-2,2,0)$ sea $L = AB$ halle $CP \perp L$.

107.- Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

a.- Halle p para que A sea invertible.

b.- Para $p = 2$ hallar la adjunta de A.

TERCERA PARTE.

ESPACIO NULO, IMAGEN, NULIDAD Y RANGO.

108.- Sea la matriz A determine la base del espacio nulo y además diga la nulidad de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

109.- Sea la matriz B determine el espacio nulo, la nulidad, el espacio imagen, rango, espacio renglón y espacio columna de la matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

110.- Determine el rango y el espacio de los renglones de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

111.- Determine una base para el espacio generado por los cuatro vectores en R^3

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

112.- Determine el rango y nulidad para las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

113.- Determine si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen o no soluciones únicas o infinitas. (use las propiedades de espacio nulo e imagen).

$$a. - \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases} ; \quad b. - \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

PRODUCTO INTERNO.

114.- En R^2 se define el producto interno como

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ; \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 3x_2 y_2$$

Demuestre q es un producto interno del espacio.

115.- Demuestre que con

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(x)g(x)dx$$

Se define un producto interno en el espacio vectorial $P_2(x)$ de todos los polinomios de grado menor que 2.

a.- Halle el módulo de los vectores $(1)(x)(x^2 + x - 1)$

b.- Halle todos los vectores de P_2 que sean ortogonales al vector $(3x)$

116.- Dar razones por las cuales los siguientes condiciones no corresponden a un espacio con producto interno.

a. - $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd$ en R^2

b. - $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A + B)$ en $M_{2 \times 2}$

c. - $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(x) \cdot g(x) dx$ en $P(R)$

117.- Verifique en cada una de las siguientes apartados si son producto interno del espacio vectorial señalado.

a. - $V = R^2$, $u = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$ con $\langle u, w \rangle = 2x_1 x_2 + 4y_1 y_2$

b. - $V = P_3(t)$, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$

$$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

c. - $V = R^4$, $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ con $\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + t_1 t_2$

118.- Sea $u = (x, y, z), w = (x', y', z') \in R^3$ definimos

$$\langle u, w \rangle = \frac{xx'}{2} + \frac{yy'}{3} + \frac{zz'}{4}$$

Verifique que es un producto interno, ademas calcule $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$.

119.- Sea $f, g \in C([a, b]; R)$ definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Un producto interno del espacio vectorial. Halle el valor para

$$f(x) = \cos(x) \text{ y } g = \sin(x) \text{ en } I[0, 2\pi]$$

120.- Sea $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ definimos

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

Calcule el valor de

$$a. - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b. - A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

GRAM-SCHMIDT.

121.- Construya una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.

a. — $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$

b. — $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$

c. — $\pi = \{(x, y, z) : 3x - 2y + 6z = 0\}$

122.- En cada uno de los incisos siguientes aplicar el proceso de Gram-Schmidt al subconjunto dado S del espacio con producto interno V .

a. — $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 1, 1)(0, 1, 1)(1, 3, 2)\}$

b. — $V = P_2$ con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $S = \{1, x, x^2\}$

c. — $V = CV(a, b)$ con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$, $S = \{(x + i)(1 + x^2i)\}$ en $(0, 1)$

123.- Encuentre una base ortonormal para $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$.

124.- Determine una base ortonormal para cada uno de los tres subespacios vectoriales W con productor interno señalado.

a. — $V = \mathbb{R}^4$ con producto interno usual y $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

b. — $V = P_3$ con producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $W = \{1, 1 + x, x^3\}$

c. — $V = M_{2 \times 2}$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^t B)$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

PROYECCION ORTOGONAL Y COMPLEMENTO ORTOGONAL.

125.- Encuentre la proyección ortogonal de π sobre V donde

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\} \text{ y } v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determine la proyección sobre el complemento ortogonal de π .

126.- En los siguientes ejercicios se da los subespacio vectorial H ,

a.-Determine una base para cada subespacio,

b.- Calcule la proyección del vector v sobre el subespacio,

c.- Encuentre una base ortonormal para el complemento ortogonal,

d.- Escriba el vector v como la suma de h más un vector p .

a. - $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0 \right\} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. - $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0 \right\} \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. - $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y \text{ y } w = 3y \right\} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d. - $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \right\} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

127.- Sea $V = \mathbb{C}^3$ y $S = \{(1,0,i)(1,2,1)\}$ calcular S^\perp .

128.- Sea $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno ordinario y sea $W = \{(i, 0,1)\}$. Encontrar las bases ortonormales para W y W^\perp .

129.- Diga si los vectores son ortogonales entre sí con el producto interno señalado. En caso negativo determine una base ortonormal.

a. $-V = R^3$ con producto interno usual, $S = \{(0,1,1)(1,1,0)\}$

b. $- V = P_2(a, b)$ con producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx, \quad S = \{t, t^2\} \quad P_2(0,1)$$

c. $- V = M_{2 \times 2}$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^t B)$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

130.- Encuentre una base ortonormal para $P_2(0,2)$, para un producto interno igual a 129.b.

TRANSFORMACION LINEALES.

131.- Verifique que la transformación $T: R^2 \rightarrow R^3$ tal que

$$T(x, y) = (x + y, y, x - y)$$

Es una transformación lineal.

132.- Verifique si la transformación $T: R^2 \rightarrow R^3$ tal que

$$T(x, y) = (x + y, x + y + 2, y)$$

Es una transformación lineal.

133.- Compruebe que la transformación $T: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$ tal que $T(A) = MA + AM$ donde M es una matriz fija en $M_n(R)$ es una transformación lineal.

134.- Determine una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que se cumpla

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; T \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

135.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal tal que

$$T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z)$$

Determine la matriz asociada a la transformación.

136.- Sea $T: P_2 \rightarrow M_2$ una transformación lineal tal que

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a + b + c \end{pmatrix}$$

Determine el núcleo de la transformación lineal.

137.- Considere la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (x + y, x - y + z)$$

Determine la imagen de T.

138.- Determine una transformación lineal de $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que se cumpla

$$nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } Im(T) = gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Determine además el valor de $T(-1, 2, 3)$

139.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ una transformación lineal tal que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determine: (a) $T(x, y, z)$ (b) $T(1, 2, 3)$

140.- Determine cuál de las siguientes transformaciones son transformaciones lineales.

a. - $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y, z) = (x, y)$

b. - $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$

c. - $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x, y, x - z)$

d. - $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y) = (x^2, y^2)$

e. - $T: R^2 \rightarrow R$ tal que $T(x, y) = |x - y|$

f. - $T: M_{2 \times 2} \rightarrow R$ tal que $T(A) = \det(A)$

g. - $T: M_n \rightarrow M_n$ tal que:

i. - $T(A) = AB - BA$ con $B \in M_n$ matriz fija.

ii. - $T(A) = A^t$

141.- Sea V el espacio formado por todas las funciones continuas en R en R definimos la transformación

$$T(f(x)) = \int_0^x f(t) dt$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

142.- Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal tal que

$$T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

Determine el núcleo de la transformación lineal.

143.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ una transformación tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a.- Demuestre que $A = \{(1, -1, 1)(0, 2, 0)(1, 0, 0)\}$ es base de R^3

b.- Determine la transformación lineal de $T(x, y, z)$

c.- Determine el núcleo de la transformación.

144.- Determine una transformación lineal $T: M_{3 \times 1} \rightarrow R^3$ tal que

$$nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad y \quad Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

145.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ una transformación lineal tal que

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$$

¿Qué condiciones deben cumplir $a, b, c \in R$ para que $(a, b, c) \in nu(T)$?

146.- Sea $T: M_n \rightarrow M_n$ una transformación lineal tal que $T(A) = BAB^t$ con $B \in M_n$ una matriz fija

a.- Demuestre que T es una transformación lineal.

b.- Si $n = 2$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine la forma general de la transformación.

c.- Determine el núcleo de la transformación.

147.- Hallar una transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^3$ tal que

$$\text{nu}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

148.- Sea $T: P_2(x) \rightarrow R$ una transformación lineal tal que

$$T(ax^2 + bx + c) = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx$$

a.- Determine el núcleo.

b.- Determine el rango.

149.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, 2z)$$

a.- Si B es la base canónica de R^3 y B_1 es la base R^2 determine la matriz asociada a la transformación lineal T .

b. – Si $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

¿Cuál es la nueva matriz asociada a la transformación lineal?

150.- Defina una transformación lineal $T: M_n \rightarrow R$ por

$$T(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

151.- Defínase la transformación lineal $T: P_2 \rightarrow M_2$ mediante

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

Determine el núcleo y rango de la transformación lineal.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.

152.- Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, 4x)$ encuentre los autovalores y autovectores asociados a la transformación lineal.

153.- Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-y, x)$ encuentre los autovalores y autovectores asociados a la transformación lineal.

154.- Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, x)$ encuentre los autovalores y autovectores asociados a la transformación lineal.

155.- Para las siguientes matrices determine los autovalores y autovectores así como también la multiplicidad algebraica y geométrica.

$$a. - \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad b. - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad c. - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad d. - \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e. - \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \quad f. - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad g. - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

156.- De la siguiente matriz se sabe que $\lambda_1 = 1$ es uno de sus autovalores y que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al autovalor conocido. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix}$$

a.- Hallar los valores de las incógnitas α, β, γ

b.- Halle los autovalores restantes así como sus autovectores.

157.- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determine los autovalores asociados a los autovectores dados.

158.- Determine los autovalores y autovectores de ser posible halle el espacio generado por los autovectores.

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACION DE MATRICES.

159.- Dadas las siguientes matrices, determine si la matriz es diagonalizable en caso afirmativo halle la matriz C que cumple $C^{-1}AC = D$.

$$a.- A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad b.- B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad c.- C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d.- D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e.- E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad f.- F = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$g.- G = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad h.- H = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

160.- Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^t A Q = D$.

$$a.- A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad b.- B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad c.- C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d.- D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad e.- E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f.- F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

161.- Demuestre que si $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal, entonces $b = \pm c$.

162.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ definida mediante

$$T(x, y, z) = (-2y - 3z, x + 3y + 3z, z)$$

Determine la matriz que diagonaliza con la matriz asociada a T.

163.- Para cada uno de los siguientes operadores lineales T , probar si T es diagonalizable y en caso de serlo, encontrar la matriz diagonal.

$a. - T: P_3(x) \rightarrow P_3(x)$ definida mediante $T(f(x)) = f'(x) + f''(x)$

$b. - T: P_2 \rightarrow P_2$ definida mediante $T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$

$c. - T: R^3 \rightarrow R^3$ definida mediante $T(x, y, z) = (y, -x, 2z)$

164.- Para cada una de las siguientes matrices probar si es diagonalizable y en caso de serlo, encontrar una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

$a. - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b. - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad c. - C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$d. - D = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad e. - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$f. - F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad g. - G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

REPASO TERCER PARCIAL.

165.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ halle una base ortonormal para su espacio nulo.

166.- Sea $T: M_{2 \times 2} \rightarrow R^3$ la función definida por $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, c, d)$

a.- Demuestre que T es una transformación lineal.

b.- Halle la matriz asociada a T con las bases naturales.

c.- Halle la nulidad de T.

d.- Halle el rango de T.

167.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a.- Halle los autovalores de A.

b.- Halle los autoespacios de A.

c.- Diga si A es diagonalizable, en caso afirmativo halle dos matrices P y D tales que $P^{-1}AP = D$ y la matriz D sea diagonal.

168.- Demuestre que para toda matriz A de tamaño $n \times n$, las dos matrices A, A^t tienen los mismos autovalores.

169.- Halle la proyección ortogonal del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio W de R^3

definido por $W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

170.- Sea $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ tal que

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.- Halle una forma para T

b.- Halle la nulidad y el rango de T.

171.- Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$ Halle una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que cumpla la relación $Q^{-1}AQ = D$

$$\text{Conociendo que } \det \begin{pmatrix} 10 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 13 - \lambda & 4 \\ 2 & 4 & 13 - \lambda \end{pmatrix} = (-1)(\lambda - 9)^2(\lambda - 18)$$

172.- Demuestre que si λ es un autovalor de una matriz A de tamaño $n \times n$, entonces λ^2 es un autovalor de A^2 .

173.- Sean los vectores $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el subespacio

generado por $W = \text{gen}\{u, v, w\}$

a.- Complete el conjunto que genera a R^4 de manera que obtenga una base ortonormal al espacio.

b.- Conociendo que la proyección de z sobre W es el vector

$$\text{proy}_W z = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Halle la proyección de z sobre el complemento ortogonal de W.

174.- Sea $T: R^3 \rightarrow P_3$ la transformación lineal definida por:

$$T(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (b + c)x^2 + (a + b)x^3$$

a.- Halle la matriz asociada a T.

b.- Halle una base y la dimensión para la imagen.

c.- Halle para cuales valores de la constante k el vector

$$w = 2 + kx - 3x^2 + 2x^3$$

Pertenece a la imagen de T.

175.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ halle una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $Q^{-1}AQ = D$.

176.- Demuestre que si una matriz real A es diagonalizable ortogonalmente entonces necesariamente A es simétrica.

177.- Sea a, b y c tres números reales no nulos. Sea A la matriz de tamaño 3x3.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

a.- Halla la imagen y el rango de A.

b.- Determinar el núcleo y nulidad de A.

178.- Sea A la matriz 3x3 dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- Determine los valores propios de A y halle los vectores propios asociados a cada valor propio de A.

b.- Sea los tres vectores de R^3 dados por: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mostrar que $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ son vectores propios de A.

c.- Mostrar que los vectores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ forman una base de R^3

179.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ determinar una matriz diagonal D, definida por $D = P^{-1}AP$

180.- Sean $a, b, c \in R$, halle un autovalor y un autovector correspondiente a la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

181.- Halle la base ortonormal a R^3 donde $R^3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

i.- Sea $H = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, escriba una base ortonormal para H^\perp

ii.- Halle $\text{proy}_{H^\perp} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

182.- De la transformación lineal $T: P_2 \rightarrow P_3$ se conocen los transformados de los elementos de la base $B = \{(-1 + x + x^2)(x + 2x^2)(x + x^2)\} \in P_2$

$$T(-1 + x + x^2) = (1 + x); \quad T(x + 2x^2) = (x^3); \quad T(x + x^2) = (x^2)$$

a.- Halle la forma de T para cualquier polinomio de la forma $f(x) = a + bx + cx^2$

b.- Halle la matriz de T con respecto a las bases $B_2 = \{1, x, x^2\} \in P_2$ y

$$B_3 = \{1, x, x^2, x^3\} \in P_3$$

c.- Halle nucleo de T y nulidad.

183.- Para cada enunciado diga si es verdadero o falso.

a.- En R^2 el producto $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 - y_1y_2$ define un producto interno.

b.- Si λ es un autovalor de la matriz A, entonces $(A - \lambda I)v > 0$

c.- Existe una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d.- La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal

184.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a.- Diga si la matriz A es diagonalizable.

b.- En caso afirmativo determine la matriz D y P de manera que $D = P^{-1}AP$

185.- En $W = P_3$ se define el siguiente producto interno, si $p(t)q(t) \in P_3$ entonces.

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

a.- Halle una base ortonormal de W

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS.

Pregunta 1.

a.- Solución Trivial.

b.- Infinitas Soluciones

$$x_1 = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}x_3 \quad ; \quad x_2 = \frac{24}{5} + \frac{9}{5}x_3$$

c.- Sistema Inconsistente.

d.- Solución Trivial.

Pregunta 2.

a.- Si $c - 2a + b = 0$ INFINITAS SOL.

Si $c - 2a + b \neq 0$ Inconsistente.

b.- Si $a = 0$ Solución Única.

Si $a \neq 0$ y $a \neq -5$ y $a \neq 2$ Solución Única

Si $a = -5$ Inconsistente.

Si $a = 2$ Soluciones infinita.

d.- Si $k = \frac{95}{11}$ Soluciones Infinitas.

Si $k \neq \frac{95}{11}$ Solución Única (Trivial)

Pregunta 3.

a.- $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ -14 & 13 & -1 \end{pmatrix}$ b.- $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 9 & 10 & 5 \\ -7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

c.- $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 12 \\ 15 & 16 & 5 \\ -14 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ d.- $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 6 & 11 & 15 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

e.- $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 15 & 11 & 30 \\ 21 & -13 & -7 \end{pmatrix}$ f.- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 15 \\ 14 & -5 & -13 \end{pmatrix}$

Pregunta 4.

a.- $\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$ b.- $\begin{pmatrix} 13 & -1 & 17 \\ 7 & 4 & 30 \\ -3 & 17 & 31 \end{pmatrix}$ c.- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 11 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

d.- $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Pregunta 5.

a.- No es invertible.

b.- Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c.- Si $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

d.- Si $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 13 & -4 & -1 \\ -15 & 4 & 3 \\ 10 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

e.- Si $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 21 & -3 & -3 & -6 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -15 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Pregunta 6.

a.- 6 b.- -145 c.- 51 d.- 47 e.- 32 f.- -36 g.- 0

Pregunta 7.

No tiene inversa para $a = 0$ o $a = 5$

Pregunta 8.

a.- Adjunta $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = -2$

Inversa: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b.- Adjunta $\begin{pmatrix} 10 & 10 & -10 \\ -16 & 8 & 4 \\ 17 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $|A| = 60$

Inversa: $\frac{1}{60} \begin{pmatrix} 10 & 10 & -10 \\ -16 & 8 & 4 \\ 17 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Pregunta 9.

No es invertible.

Pregunta 10.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 11.

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 12.

Determinante: $|A| = -1/6$

Cofactor: $A_{4,3} = -\frac{1}{2}$

Pregunta 13.

a.- $M_{3,1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

b.- $|A| = -294$

c.- $A_{3,1} = 43$

d.- $a_{3,1} = 14$

Pregunta 14.

a.- No tiene inversa para $t = 0$

b.- $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c.- $|B^{-1}| = -\frac{9}{2}$

Pregunta 15.

- a.- $\det(W) = 16$
 b.- $\det(C) = \pm 2$

***Extra**

- a.- Cierto.
 b.- Falso
 c.- Falso

Pregunta 17

- a.- 4 b.- 128 c.- 16 d.- 2 e.- $\frac{1}{2}$ f.- $2k$

Pregunta 19

- a.- $\det(C) = 72$
 b.- $\det(B) = 36$

Pregunta 20.

- Si $\alpha \neq 1$ Solución Única.
 Si $\alpha = 1$ y $\beta = -3$ Infinitas Soluciones
 Si $\alpha = 1$ y $\beta \neq -3$ Inconsistente.

Pregunta 21.

- Si $\alpha = 4$ y $\beta = 2$ Infinitas Soluciones.
 Si $\alpha \neq 4$ Inconsistente.
 Si $\alpha = 4$ y $\beta \neq 2$ Solución Única.

Pregunta 22.

- a.- $A^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -10 & -11 & 15 \\ 6 & 13 & -9 \\ 16 & 8 & -8 \end{pmatrix}$ b.- $X = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -31 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix}$

Pregunta 23

- a.- Verdadero.
 b.- Falso
 c.- Falso.

Pregunta 27.

$$a = -1 \quad y \quad p = 2$$

Pregunta 31.

- a.- Si $a = 5$ el sistema es consistente.
 b.- Solución general del sistema para el valor de (a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 62 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 90 \\ -16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -71 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c.- Solución Particular: $X_p = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 62 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Solución Homogénea: } X_h = \frac{1}{7} \left(x_3 \begin{pmatrix} 90 \\ -16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -71 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Pregunta 33.

- a.- Falso c.- Verdadero.

Pregunta 34

- a.- $\det(B^{-1}) = -\frac{1}{7}$ b.- $A_{2,4} = 0$

SEGUNDO PARCIAL.**Pregunta 35.**

- a.- $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$ b.- $(-6\sqrt{2}-11)$ c.- $\sqrt{2}-8$
 d.- $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ \sqrt{2}+9 \end{pmatrix}$ e.- $3\sqrt{2}+21$

Vectores Unitarios.

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{d} = \frac{1}{\sqrt{46}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Pregunta 36.

- a.- $\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -23 \end{pmatrix}$ b.- $\begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ c.- $\begin{pmatrix} ad \\ bc \\ -ac \end{pmatrix}$ d.- $\begin{pmatrix} -9 \\ 39 \\ 61 \end{pmatrix}$

Pregunta 37.

$$W = \pm \frac{1}{\sqrt{181}} \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Pregunta 38.

$$\sin(\alpha) = 0,415$$

Pregunta 39.

- a.- Volumen $V = 18$ b.- Volumen $V_1 = 1224$

Pregunta 40.

- a.- Vectorial. $(x, y, z) = (2, 0, -4) + t(6, -1, -7)$

$$\text{Paramétrica. } \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -t \\ z = -4 - 7t \end{cases}$$

$$\text{Simétrica: } \frac{x-2}{6} = -y = \frac{z+4}{-7}$$

- b.- Vectorial. $(x, y, z) = (-1, -2, 3) + t(8, 3, 0)$

$$\text{Paramétrica. } \begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{Simétrica: } \frac{x+1}{8} = \frac{y+2}{3} \quad z = 3$$

- c.- Vectorial. $(x, y, z) = (2, 2, 1) + t(2, -1, -1)$

$$\text{Paramétrica. } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{Simétrica. } \frac{x-2}{2} = 2 - y = 1 - z$$

- d.- Vectorial. $(x, y, z) = (-2, 3, -2) + t(0, 7, 3)$

$$\text{Paramétrica. } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 + 7t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

$$\text{Simétrica: } x = -2 \quad \frac{y-3}{7} = \frac{z+2}{3}$$

Pregunta 41.

$$a.- \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-26} = \frac{z-2}{-22}$$

$$b.- \frac{x+2}{13} = \frac{y-3}{22} = \frac{z-4}{-8}$$

Pregunta 42.

$$a.- d = \frac{48}{\sqrt{437}} \quad b.- d = 3 \quad c.- d = \frac{2}{31}\sqrt{2821}$$

Pregunta 43.

$$a.- z - 4y - 3x = 45$$

$$b.- 4x + y - 7z = -15$$

$$c.- 14x + 7y = 49$$

$$d.- 22z - 21y - 12x = 63$$

Pregunta 44.

$$a.- (x+1) = \frac{y+3}{2} = z$$

$$b.- \frac{x + \frac{11}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{y - \frac{3}{2}}{8} = z$$

$$c.- x = 2y = \frac{3-z}{\frac{3}{2}}$$

Pregunta 45.

$$a.- d = \frac{1}{\sqrt{35}} \quad b.- d = \frac{11\sqrt{17}}{34} \quad c.- d = \frac{13\sqrt{69}}{69}$$

Pregunta 46.

$$a.- \text{proy}_v U = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b.- \text{proy}_v U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c.- \text{proy}_v U = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ 39 \end{pmatrix} \quad d.- \text{proy}_v U = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 47.

NO es espacio vectorial. Axioma (8).

Pregunta 48.

a.- No es espacio vectorial (8).
b.- No es espacio vectorial (10).
c.- No es espacio vectorial (10).

Pregunta 49.

Si es espacio vectorial. Compruebe los 10 axiomas y el elemento nulo es $0 = (0, -1)$

Pregunta 50.

No es espacio vectorial. El cero no pertenece al espacio.

Pregunta 51.

Si es un espacio. Demostrar los 10 axiomas y el elemento nulo $0 = (-1, -1)$.

Pregunta 52.

NO es espacio vectorial.

Pregunta 53.

No es espacio vectorial. Axioma (7,8).

Pregunta 54.

No es espacio vectorial. Axioma (3).

Pregunta 55.

Si es subespacio vectorial.

Pregunta 56.

a.- Si es subespacio vectorial.
b.- Si es subespacio vectorial.
c.- No es subespacio vectorial.

Pregunta 57.

Si es subespacio vectorial.

Pregunta 58.

Si es subespacio vectorial.

Pregunta 59.

a.- Si es subespacio vectorial.
b.- No es subespacio vectorial.

Pregunta 60.

Si es subespacio vectorial.

Pregunta 61.

a.- No es subespacio vectorial (Contraejemplo)
b.- No es subespacio vectorial.
c.- No es subespacio vectorial.

Pregunta 62.

a.- Si es subespacio vectorial.
b.- Si es subespacio vectorial.
c.- No es subespacio vectorial.
d.- No es subespacio vectorial.

Pregunta 63.

a.- Si es subespacio vectorial.
b.- No es subespacio vectorial.
c.- No es subespacio vectorial.
d.- Si es subespacio vectorial.

Pregunta 64.

a.- Si es subespacio vectorial.
b.- Si es subespacio vectorial.
c.- Si es subespacio vectorial.

Pregunta 65.

No es combinación lineal.

Pregunta 66.

a.- NO b.- NO c.- NO d.- SI donde $\alpha = \frac{8}{3}$ y $\beta = -\frac{4}{3}$
e.- SI $\alpha = 5$ y $\beta = 1$ f.- SI $\alpha = 1$ y $\beta = 2$

Pregunta 67

$$P_3(x) = \text{gen}((1 + x^2), (x^3 - x^2))$$

Pregunta 68.

Si generan al mismo espacio definido por:

$$x + y + z = 0$$

Pregunta 69.

a.- Si generan a R4
b.- Generan un hiperplano de ecuación
 $5x + 10y + 7z + 27w = 0$
c.- No generan a R4

Pregunta 70.

a.- Si generan el espacio.
b.- No, generan un subespacio de la forma

$$\text{Sub} = \text{gen}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

c.- Si generan el espacio.
d.- No, generan un subespacio de la forma
 $H = \text{gen}((x^2 - 3), (x - 1))$
e.- Si generan el espacio.
f.- No generan el espacio.

Pregunta 71.

a.- Es linealmente dependiente
b.- Es linealmente dependiente.

Pregunta 73.

a.- Linealmente dependiente.
b.- Linealmente independiente.
c.- Linealmente independiente.

Pregunta 74.

El valor de la variable (a) es

$$a_1 = 6 \quad y \quad a_2 = -\frac{3}{2}$$

Para que sean LI

Pregunta 76.

a.- Linealmente independiente.
b.- Linealmente independiente.
c.- Linealmente dependiente.
d.- Linealmente dependiente.

Pregunta 77.

i.- Son Linealmente independiente y
ii.- Generan a R3 con

$$\alpha = x \quad y \quad \beta = \frac{y}{3} - \frac{5}{3}x$$

Pregunta 79.

Dimensión 4.

Pregunta 80.

$$B_{A \cap B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Pregunta 82.

Dimensión 2

Pregunta 83.

b.- Dimensión 2

Pregunta 84.

Único elemento $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dimensión 0

Pregunta 85.

a.- $a \neq 1$
b.- $a \neq \frac{5}{3}$

Pregunta 86.

b.- Base para U $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
c.- Base para la intercepción.

$$B_{\text{Inte}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 87.

a.- Solo v_2 pertenece a A.
b.- La expresión funcional seria

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad z = w = y - 2x$$

Pregunta 88.

$$\text{Base}_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 89.

a.- El producto cruz de las normales no es cero

$$n_\pi x n_{\pi_1} = (6, 22, 8)$$

b.- La intercepción es

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}t + \frac{5}{4} \\ y = \frac{11}{4}t + \frac{5}{4} \\ z = t \end{cases}$$

c.- El punto NO pertenece a la recta.

Pregunta 91.

$$\alpha = -23 \quad y \quad \beta = -38$$

Pregunta 93.

$$r \neq 3$$

Pregunta 95.

Son Linealmente Dependientes.

Pregunta 96.

Son Linealmente Independientes.

Pregunta 97.

$$\text{b.- } Base_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c.- Dimensión 2

Pregunta 98.

$$\pi: 2x - 8y + 2z = -8$$

Pregunta 99.

$$\text{b.- } Base_W = \{(x^3), (x^2 + 1), (x)\}$$

Pregunta 100.

Son Linealmente Dependientes.

Pregunta 101

$$L_{\text{perpendicular}} = \left(-\frac{4}{3} - 4z, y, z \right)$$

Pregunta 102.

a.- La recta que resulta al interceptar

$$x = \frac{y + \frac{5}{3}}{2} = z + \frac{5}{3}$$

b.- La ecuación del plano es

$$6 = 3x + 6y + 3z$$

Pregunta 103

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{-1}$$

Pregunta 104

$$k = \frac{20}{3}$$

Pregunta 106.

$$PC = \begin{pmatrix} x+2 \\ 2x+z+4 \\ z \end{pmatrix}$$

Pregunta 107

a.- A es invertible para

$$p \neq 0 ; p \neq 1 \quad y \quad p \neq -1$$

$$\text{b.- } Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

TERCERA PARTE.

Pregunta 108

$$N_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad v = 2$$

Pregunta 109

$$N_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v = 1 ; \quad Im(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \rho = 2$$

Pregunta 110

$$\rho = 2 \quad R_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 111

$$Base_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 112

$$A: v = 2 \quad \rho = 1$$

$$B: v = 0 \quad \rho = 3$$

Pregunta 113.

a.- Inconsistente.

b.- Infinitas soluciones.

Pregunta 115

a.- Módulos:

$$|1| = \sqrt{2} ; |x| = \frac{2}{3}\sqrt{6} ; |x^2 + x - 1| = \sqrt{\frac{146}{15}}$$

b.- Los vectores ortogonales a (x)

$$P(x) = \text{gen} \left\{ (x^2 - 2) \left(x - \frac{4}{3} \right) \right\}$$

Pregunta 116.

a.- No se cumple las condiciones 1 y 2.

b.- No se cumple las condiciones 1 y 2.

c.- No se cumple la condición 5.

Pregunta 117

a.- Si es producto interno.

b.- Si es producto interno

c.- Si es producto interno

Pregunta 118

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3}$$

Pregunta 119

$$\langle \cos(x), \sin(x) \rangle = 0$$

Pregunta 120

a.- $\langle A, B \rangle = 0$

b.- $\langle A, B \rangle = \frac{33}{2}$

Pregunta 121.

a.- $Base_H = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b.- $Base_H = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\}$

c.- $Base_\pi = \left\{ \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{13}}{91} \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$

Pregunta 122

a.- $Base_V = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b.- $Base_V = \left\{ (1), \left(2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right), \left(6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \right) \right\}$

c.-

$B_V = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (x + i) \right), \left(\frac{\sqrt{3705}}{494} (7 - 10x + i(16x^2 + 9x - 10)) \right) \right\}$

Pregunta 123.

$$Base_W = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 124.

a.- $Base_W = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{17}}{51} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

b.- $Base_W = \left\{ (1), \left(2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right), \left(\frac{10}{3} \sqrt{7} \left(x^3 - \frac{9}{10} x + \frac{1}{5} \right) \right) \right\}$

c.- $Base_W = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Pregunta 125.

$$Base_H = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{70}}{70} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Proy_H V = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } Proj_{H^\perp} V = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Pregunta 126.

a.- $Base_H = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, Proj_H V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Base_{H^\perp} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, Proj_{H^\perp} V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b.- $Base_H = \left\{ \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{13}}{91} \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}, Proj_H V = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -186 \\ 75 \\ 118 \end{pmatrix}$

$$Base_{H^\perp} = \left\{ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}, Proj_{H^\perp} V = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 39 \\ -26 \\ 78 \end{pmatrix}$$

c.- $Base_H = \left\{ \frac{\sqrt{11}}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, Proj_H V = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$Base_{H^\perp} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{22}}{22} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, Proj_{H^\perp} V = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -15 \\ 18 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d.- $Base_H = \left\{ \frac{\sqrt{29}}{29} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, Proj_H V = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 36 \end{pmatrix}$

$$Base_{H^\perp} = \left\{ \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{377}}{377} \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}, Proj_{H^\perp} V = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Pregunta 127.

$$S_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 128.

$$Base_W = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; Base_{W^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 129.

a.- No son ortogonales.

$$Base_S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

b.- No son ortogonales.

$$Base_S = \left\{ (\sqrt{3}t), \left(4\sqrt{5} \left(t^2 - \frac{3}{4}t \right) \right) \right\}$$

c.- Si son ortogonales.

Pregunta 130.

$$Base_{p_3} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{2} (x - 1) \right), \left(\frac{3}{4} \sqrt{10} \left(x^2 - 2x + \frac{2}{3} \right) \right) \right\}$$

Pregunta 131.

Si es transformación lineal.

Pregunta 132.

No es transformación lineal.

$$T(0,0,0) = (0,2,0)$$

Pregunta 133.

Si es transformación lineal.

Pregunta 134.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 5y - 3x \end{pmatrix}$$

Pregunta 135.

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 136.

$$Nu(T) = (x^2 - x)$$

Pregunta 137.

$$Im(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 140.

- a.- SI es transformación lineal.
 b.- NO es transformación lineal.
 c.- SI es transformación lineal.
 d.- NO es transformación lineal.
 e.- NO es transformación lineal.
 f.- NO es transformación lineal.
 g.- i.- SI es transformación lineal.
 ii.- SI es transformación lineal.

Pregunta 141.

Si es transformación lineal.

Pregunta 142.

$$Nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 143.

a.- Si es base de R3 con las condiciones

$$\alpha = z ; \beta = \frac{1}{2}(y + z) ; \gamma = x - z$$

b.- La transformación es de la forma

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix}$$

c.- Único elemento $Nu(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 145.

$$Nu(T) = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 146.

b.- La transformación es de la forma

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4w & -2w \\ -2w & w \end{pmatrix}$$

c.- Núcleo de la transformación

$$Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 147.

La transformación que cumple las condiciones puede ser

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w + 4y + z \\ w + 5y + 2z \\ -2w - 4y - z \end{pmatrix}$$

Pregunta 148.

- a.- $Nu(T) = (2x - 3x^2)(1 - 3x^2)$
 b.- $\rho = 1$

Pregunta 149.

- a.- $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 b.- $A_{TB} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Pregunta 150.

Si es transformación lineal.

Pregunta 151.

$$Nu(T) = (x^2 - 3x)$$

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \rho = 2$$

Pregunta 152.

$$\lambda_1 = 2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = -2 \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 153.

$$\lambda_1 = i \quad v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = -i \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 154.

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_3 = 0 \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 155.

$$a.- \lambda_1 = 3 \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = -4 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicidad Algebraica y Geométrica 1 para cada autovalor.

$$b.- \lambda_1 = i \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = -i \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}$$

MA = MG = 1 Para cada autovalor.

$$c.- \lambda_1 = -3 \quad MA = 2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad MG = 1$$

$$d.- \lambda_1 = -5 \quad MA = 2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad MG = 1$$

$$e.- \lambda_1 = 2 \quad MA = 2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad MG = 1$$

$$\lambda_2 = 1 \quad MA = 1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad MG = 1$$

$$f.- \lambda_1 = 2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = 1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_3 = -1 \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MA=MG=1 Para cada autovalor

$$g.- \lambda_1 = i \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = -i \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\lambda_3 = -1 \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad MA = MG = 1 \quad c/u$$

Pregunta 156.

$$\alpha = -2 \quad \beta = -2 \quad \gamma = -3$$

$$\lambda_2 = -1 \quad MA = 2 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad MG = 2$$

Pregunta 157.

$$\lambda_1 = -2 \quad y \quad \lambda_2 = 5$$

Pregunta 158.

a.- $\lambda_1 = 1 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = -1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}$
 $E_\lambda = \{v_1, v_2\}$

b.- $\lambda_1 = 3 \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_2 = 2 \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda_3 = 1 \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pregunta 159.

a.- Si es diagonalizable.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

b.- Si es diagonalizable

$$C = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

c.- Si es diagonalizable.

$$C = \begin{pmatrix} -1+3i & -1-3i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

d.- Si es diagonalizable.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e.- Si es diagonalizable.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f.- Si es diagonalizable.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

g.- No es diagonalizable

h.- No es diagonalizable.

Pregunta 160.

a.- $Q^t A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ donde $Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b.- $Q^t B Q = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

donde $Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

c.- $Q^t C Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ donde $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d.- $Q^t D Q = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ donde $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

e.- $Q^t E Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ donde $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

f.- $Q^t F Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Pregunta 162.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 163.

a.- No es diagonalizable.

b.- Si es diagonalizable donde

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.- Si es diagonalizable. Dónde:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 164.

a.- No es diagonalizable.

b.- Si es diagonalizable.

$$Q^{-1} D Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ donde } Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c.- Si es diagonalizable.

$$Q^{-1} D Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ donde } Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d.- No es diagonalizable.

e.- Si es diagonalizable.

$$Q^{-1} D Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ donde } Q = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -1-i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

f.- No es diagonalizable

g.- Si es diagonalizable.

$$Q^{-1} D Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ donde } Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 165.

$$N_A = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{30}}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 166.

b.- $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c.- $\nu = 1$ d.- $\rho = 3$

Pregunta 167.

a.- $\lambda_1 = 3 \quad MA = 2 \quad \lambda_2 = 2 \quad MA = 2$

b.- $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} < -\lambda_2 \quad MG = 2$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} < -\lambda_1 \quad MG = 2$$

c.- Si es diagonalizable.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 169.

$$\text{Proy}_W V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Pregunta 170.

a.- La transformación es de la forma

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b \\ -b & d-a \end{pmatrix}$$

b.- $v = 1 \quad \rho = 3$

Pregunta 171

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Pregunta 173.

a.- Sea $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ se completa la base para R^4 y además los

vectores ya son ortogonales entre sí, luego.

$$\text{Base}_{R^4} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b.- La proyección será

$$\text{Proy}_{W^\perp} Z = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 174.

$$\text{a.- } A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b.- $\text{Im}(T) = \{(1+x+x^3), (1+x^2+x^3)\} \quad \rho = 2$

c.- $k = 5$

Pregunta 175.

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 177.

a.- $\text{Im}(A) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \rho = 1$

b.- $N_A = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} \right\} \quad v = 2$

Pregunta 178.

a.- $\lambda_1 = 2 \quad MA = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad MA = 2$

$$v_{2.1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{2.2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c.- Si forma R^3 dadas las condiciones

$$\alpha = \frac{1}{3}(x+y+z); \quad \beta = \frac{1}{3}(2x-y-z); \quad \gamma = \frac{1}{3}(2y-x-z)$$

Pregunta 179.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{14}(1-3\sqrt{3}i) & \frac{1}{14}(1+3\sqrt{3}i) \\ 1 & \frac{1}{7}(-3+2\sqrt{3}i) & -\frac{1}{7}(3+2\sqrt{3}i) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 180

$\lambda_1 = 0 \quad MA = 2 \quad \lambda_2 = a+b+c \quad MA = 1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{1.2} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad MG = 2 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 181.

$$\text{Base}_{R^3} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{i.- } \text{Base}_{H^\perp} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{15} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ii.- } \text{Proy}_{H^\perp} = \frac{1}{3}(4, 5, 2)$$

Pregunta 183.

a.- Falso

b.- Falso

c.- Verdadero.

d.- Falso.

Pregunta 184.

a.- Si es diagonalizable.

$$\text{d.- } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 4+2\sqrt{2}i \end{pmatrix};$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{6}(1-2\sqrt{2}i) & \frac{1}{6}(1+2\sqrt{2}i) \\ 1 & -\frac{1}{6}(1+4\sqrt{2}i) & \frac{1}{6}(-1+4\sqrt{2}i) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 185.

$$B_{P_3} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} t, \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ 4 \end{pmatrix} (3t^2-1), \begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ 4 \end{pmatrix} (5t^3-3t) \right\}$$

PUNTOS FINALES.

1.- Matemáticas 3 tiene mucha teoría que aprenderse para el tercer parcial más que todo, sin embargo si practica bien los ejercicios y entiende los teoremas no se hará difícil.

2.- Para determinar el polinomio característico de una matriz de orden 3×3 se puede usar. Sea la matriz $A_{3 \times 3}$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C$$

Donde $A = \text{Tr}(A)$, $B = \sum \det(M_{ij})$ para $i = j$, $C = \det(A)$

3.- Este atento a nuevas definiciones de sumar vectores o multiplicación por un escalar así como el producto interno de los espacios vectoriales. Si se le ha definido una nueva forma de sumar, multiplicar DEBE usar esta definición.

4.- Para una rápida demostración de los subespacios vectoriales o transformaciones lineales puede tomar en cuenta que el Cero (0) del espacio debe pertenecer al subespacio, luego tome como primer elemento el Cero si corresponde proceda a demostrar los otros dos axioma de cerradura, si no pertenece entonces demuestre que no se cumple el axioma de la SUMA. En cuanto a las transformaciones el Cero del ESPACIO SALIDA debe corresponder al Cero del ESPACIO LLEGADA, si no es así el axioma de la suma no se cumple.

SIRVASE DE AYUDA PARA PRACTICAR “ALGEBRA LINEAL” MATEMATICAS 3.

CUALQUIER ERROR TIPOGRAFICO O DE RESULTADOS FAVOR AVISAR A magt369@gmail.com PARA SU CORRECCION. MENCIONE NUMERO DE PAG, NUMERO DE EJERCICIO, QUE DICE Y QUE DEBERIA DECIR.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.

Stanley I. Grossman. Algebra Lineal, Ed. Mc Graw Hill, 5ta. Edición.

REVISADA: **ABRIL 2012**

Elaborado por: Miguel Guzmán