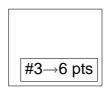
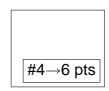
Nombre:			

Sección: \_ Carnet: \_

MA-2115—Primer Parcial, 02/02/05, 30 %—9:30am–A

#1→12 pts





Total→30 pts

1. (12 pts.) Determine cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen (3 pts. c/u):

a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{7}{n(n+1)} - \frac{2}{3^{n-1}} \right)$$

**b)** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
  
d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{5^{n-1}}$ 

Solución:

a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{7}{n(n+1)} - \frac{2}{3^{n-1}} \right)$$

Podemos mirar esta serie como la resta de dos series:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{7}{n(n+1)} - \frac{2}{3^{n-1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n(n+1)} - \frac{2}{3^{n-1}}$ 

 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ . Por un lado, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n(n+1)}$  es CONVERGENTE por comparación con la

serie (mayorante)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^2}$  que sabemos que es CONVERGENTE. Por otro lado, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$  es CONVERGENTE por ser una serie geométrica de razón  $r=\frac{1}{3}<1$  (con primer

Entonces la serie dada es CONVERGENTE, pues es la resta de dos series convergentes.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$  es CONVERGENTE por comparación con la serie (mayorante)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ que sabemos que es CONVERGENTE (p-serie con  $p=\frac{3}{2}>1$ ).

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Haciendo uso del criterio de la razón tenemos:  $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!}=$ 

## **Dpto. de MATEMATICAS**

MA-2115-9:30am-A

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Por lo tanto la serie dada es CONVERGENTE.

d) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{5^{n-1}}$$

Esta serie se puede escribir como  $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1}$ , y por lo tanto es una serie geométrica de razón  $r=-\frac{2}{5}$ , y como |r|<1 entonces la serie es CONVERGENTE.

2. (6 pts.) Halle el intervalo de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3n \, 7^n}$ .

**Solución:** Consideremos  $a_n = \frac{(x-5)^n}{3n\,7^n}$ . Usando el criterio de la razón (o cociente) tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{3(n+1)7^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{3n7^n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}3n7^n}{3(n+1)7^{n+1}(x-5)^n} \right| = \left| \frac{(x-5)}{7} \right| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{7}$$

Sabemos entonces que la serie de potencias es convergente si  $\frac{|x-5|}{7} < 1$ , es decir si |x-5| < 7, luego si -2 < x < 12. Es decir la serie es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE para  $x \in (-2,12)$ .

Analizando los extremos se tiene que para x=-2 tenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-2)-5)^n}{3n\,7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ , que es CONDICIONALMENTE CONVERGENTE. Por otro lado, para x=12 tenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((12)-5)^n}{3n\,7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ , que es DIVERGENTE.

Concluimos que la serie de potencias dada es CONVERGENTE para  $x \in [-2, 12)$ .

3. (6 pts.) Halle la serie de Maclaurin de la función  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{5+x}}$  Solución: Aplicando propiedades del logaritmo se tiene,

$$\begin{split} f(x) &= \ln \sqrt{\frac{1-x}{5+x}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-x}{5+x} \right) = \frac{1}{2} \left[ \ln(1-x) - \ln 5 \left( 1 + \frac{x}{5} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln(1-x) - \ln 5 - \ln \left( 1 + \frac{x}{5} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln(1-x) \right] - \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{x}{5} \right) \right] \end{split}$$

Como sabemos  $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ , si |x|<1, e integrando tenemos  $-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ , si

## Dpto. de MATEMATICAS *MA-2115-9:30am-A*

|x| < 1. Ahora tenemos que

$$\begin{split} f(x) &= \frac{1}{2} \left[ \ln(1-x) \right] - \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{x}{5} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right] + \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}} - 1 \right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{split}$$

O también, la forma equivalente  $f(x) = -\frac{1}{2}\ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1 + \left(-\left(\frac{1}{5}\right)\right)^n\right)\,x^n}{2n}$  para |x| < 1.

4. (6 pts.) Analice la sucesión definida por la fórmula de recurrencia

$$a_n = \frac{2n^4 - 1}{1 + 3n^4} a_{n-1}; \quad a_0 = 1.$$

Demuestre que la sucesión dada converge o demuestre que diverge según sea el caso.

**Solución:** Sabremos que  $a_0=1>0$ . Tenemos que  $a_1=\frac{1}{4}a_0=\frac{1}{4}< a_0$ . Observamos que  $\frac{2n^4-1}{1+3n^4}>0$  para todo  $n\geq 1$ , por lo tanto los  $a_n>0$  para todo  $n\in\mathbb{N}$ . Veamos que  $a_n< a_{n-1}$ , para todo  $n\geq 1$ . En efecto,  $a_n=\frac{2n^4-1}{1+3n^4}a_{n-1}<\frac{2n^4}{3n^4}a_{n-1}=\frac{2}{3}a_{n-1}< a_{n-1}$ . Por lo tanto la sucesión es decreciente y acotada inferiormente (por cero). Entonces la sucesión CONVERGE.

Además es fácil verificar que  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$  pues de lo anteriormente calculado se deduce que  $a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$  para  $n \ge 1$ .