**Pregunta 1.** (12 ptos.) Sea $T: \mathbb{R}^3 \to M_{2x2}$ una transformación definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z & z \\ z & x+y-z \end{pmatrix}$$

a. Demuestre que $T$ es un transformación lineal

<u>*Solución:*</u> Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$

*i)* $T(\vec{v}+\vec{u}) = T(\vec{v}) + T(\vec{u})$

$$T(\vec{v}+\vec{u}) = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) & (z_1+z_2) \\ (z_1+z_2) & (x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 & z_1 \\ z_1 & x_1+y_1-z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2+z_2 & z_2 \\ z_2 & x_2+y_2-z_2 \end{pmatrix} = T(\vec{v}) + T(\vec{u})$$

*ii)* $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$

$$T(\alpha\vec{v}) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1+\alpha z_1 & \alpha z_1 \\ \alpha z_1 & \alpha x_1+\alpha y_1-\alpha z_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 & z_1 \\ z_1 & x_1+y_1-z_1 \end{pmatrix} = \alpha T(\vec{v})$$

Concluimos que T, es una transformación lineal.

b. Halle los subespacios Im($T$) y Nu($T$) y sus dimensiones.

<u>*Solución:*</u> Sabemos que

$$Im(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \mid T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Entonces todo vector o matriz, pertenecientes a la imagen de la transformación, se escribirá de la siguiente manera

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z & z \\ z & x+y-z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Im(T) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}}$$

Estos vectores por medio del proceso que fueron hallados, son L.I.

$$\Rightarrow B_{Im(T)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{\rho(T) = 2 = \dim Im(T)}$$

También, sabemos que

$$Nu(T) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{v}) = 0\ \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Entonces todo vector, perteneciente al núcleo de la transformación, se escribirá de la siguiente manera

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z & z \\ z & x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \Rightarrow x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Nu(T) = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$$

Como es un solo vector, es L.I., entonces, constituye una base para el núcleo de la transformación

$$B_{Nu(T)} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{\nu(T) = 1 = \dim Nu(T)}$$

Note que

$$\dim Im(T) + \dim Nu(T) = \rho(T) + \nu(T) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

c. Halle la matriz asociada a $T$ para las bases canónicas.

*Solución:*

$$B_{\mathbb{R}^3} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \longrightarrow T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\boldsymbol{A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ matriz\ asociada\ a\ la\ transformación}$$

**Pregunta 2.** (12 ptos.) Dado el espacio vectorial real $V = \mathbb{P}_2 = \{a_2t^2 + a_1t + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}; i = 2,1,0\}$ con el producto interno definido como

$$(u, v) = u(-1)v(-1) + u(0)v(0) + u(1)v(1);\ \ u(t), v(t) \in V$$

Sea $H = \{a_2t^2 + a_1t + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R},\ a_0 = -a_1\ y\ a_2 = a_1\}$ un subespacio de V.

a. Halle el subespacio ortogonal $H^{\perp}$

*__Solución:__* Hallemos primero una base para H

Un polinomio de H se verá o se escribirá de la siguiente manera

Sea $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0 \in H \Rightarrow p(t) = a_1t^2 + a_1t - a_1 = a_1(t^2 + t - 1)$

$$H = gen\{(t^2 + t - 1)\}$$

Como se trata de un único polinomio, este es L.I., entonces, constituye una base para H

$$B_H = \{(t^2 + t - 1)\} = \{H(t)\}$$

Ahora

$$H^\perp = \{(at^2 + bt + c) \in V \mid \langle (at^2 + bt + c), (t^2 + t - 1)\rangle = 0\,; \forall (t^2 + t - 1) \in H\}$$

Sean $p(t) = (at^2 + bt + c)$ y $H(t) = (t^2 + t - 1)$

Entonces

$$\langle p(t), H(t)\rangle = 0 = p(-1)H(-1) + p(0)H(0) + p(1)H(1) =$$

$$= \{[(a(-1)^2 + b(-1) + c)((-1)^2 + (-1) - 1)] + [(a(0)^2 + b(0) + c)((0)^2 + (0) - 1)] + [(a(1)^2 + b(1) + c)((1)^2 + (1) - 1)]\} =$$

$$= \{[(a - b + c)(-1)] + [(c)(-1)] + [(a + b + c)((1)]\} =$$

$$= \{[b - a - c] + [-c] + [a + b + c]\} = \mathbf{2b - c = 0}$$

**Nota: "$p(-1)H(-1) + p(0)H(0) + p(1)H(1)$" indica que se debe evaluar $p(t)$ y $H(t)$ en $(-1)$ y luego multiplicarlos, luego evaluarlos en $(0)$ y multiplicarlos, luego evaluarlos en $(1)$ y multiplicarlos y finalmente sumar todo.*

Concluimos entonces que

$$\boldsymbol{H^\perp = \{(at^2 + bt + c) \in V \mid 2b - c = 0\}}$$

Un polinomio de $H^\perp$se vera de la forma:

$$H^\perp(t) = at^2 + bt + c = at^2 + bt + 2b = a(t^2) + b(t + 2)$$

$$H^\perp = gen\,\{t^2, t + 2\}$$

Estos polinomios son L.I., por ende, constituyen una base para $H^\perp$

$$B_{H^\perp} = \{t^2, t + 2\} = \{{H^\perp}_1, {H^\perp}_2\}$$

b. Si $v(t) = 4 + t + 3t^2$, halle $Proy_{H^\perp}v(t)$

*__Solución:__* Por definición

$$Proy_{H^\perp}v(t) = \langle v(t), u_1\rangle u_1 + \langle v(t), u_2\rangle u_2$$

Con $u_1$ y $u_2$ polinomios ortonormales de una base ortonormal de $H^\perp$

Hallemos entonces a $u_1$ y $u_2$, así

$$u_1 = \frac{H^{\perp}{}_1}{|H^{\perp}{}_1|};\ |H^{\perp}{}_1| = \sqrt{H^{\perp}{}_1(-1)H^{\perp}{}_1(-1) + H^{\perp}{}_1(0)H^{\perp}{}_1(0) + H^{\perp}{}_1(1)H^{\perp}{}_1(1)} =$$

$$= \sqrt{(-1)^2(-1)^2 + (0)^2(0)^2 + (1)^2(1)^2} = \sqrt{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^2)$$

Ahora

$$H^{\perp}{}'_2 = H^{\perp}{}_2 - \langle H^{\perp}{}_2, u_1\rangle u_1$$

$$H^{\perp}{}'_2 = (t+2) - \frac{1}{2}\langle H^{\perp}{}_2(-1)u_1(-1) + H^{\perp}{}_2(0)u_1(0) + H^{\perp}{}_2(1)u_1(1)\rangle(t^2)$$

$$H^{\perp}{}'_2 = (t+2) - \frac{1}{2}\langle (1)(1) + (2)(0) + (3)(1)\rangle(t^2)$$

$$H^{\perp}{}'_2 = (t+2) - \frac{1}{2}\langle 4\rangle(t^2)$$

$$H^{\perp}{}'_2 = (t+2) - 2(t^2)$$

Entonces

$$u_2 = \frac{H^{\perp}{}_2{}'}{|H^{\perp}{}_2{}'|};\ |H^{\perp}{}_2{}'| = \sqrt{H^{\perp}{}_2{}'(-1)H^{\perp}{}_2{}'(-1) + H^{\perp}{}_2{}'(0)H^{\perp}{}_2{}'(0) + H^{\perp}{}_2{}'(1)H^{\perp}{}_2{}'(1)} =$$

$$= \sqrt{(-1)(-1) + 4 + (1)(1)} = \sqrt{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\ (t+2) - 2(t^2)$$

Se concluye que una base ortonormal para $H^{\perp}$

$$B_{H^{\perp}}{}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2), \frac{1}{\sqrt{6}}\ (t+2) - 2(t^2)\right\} = \{u_1, u_2\}$$

Para finalizar

$$Proy_{H^{\perp}}v(t) = \langle(4 + t + 3t^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(t^2)\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2) + \langle(4 + t + 3t^2), \frac{1}{\sqrt{6}}\ (t+2) - 2(t^2)\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\ (t+2) - 2(t^2)$$

$$Proy_{H^{\perp}}v(t) = (7t^2) + (\frac{5}{3}t + \frac{10}{3} - \frac{10}{3}t^2)$$

$$\boldsymbol{Proy_{H^{\perp}}v(t) = \frac{5}{3}t + \frac{10}{3} + \frac{11}{3}t^2}$$

Este procedimiento, es el más largo. Ahora, también se pudo expresar la proyección de otra manera a través del **teorema de proyección**

$$Proy_{H^{\perp}}v(t) = v(t) - Proy_{H}v(t)$$

**Nota: Este teorema se puede utilizar, debido a que $H$ y $H^{\perp}$ son de dimensión finita*

Entonces

$$Proy_{H^{\perp}}v(t) = v(t) - Proy_{H}v(t) = v(t) - \langle v(t), h(t)\rangle h(t)$$

Con $h(t)$ como un elemento de la base ortonormal de $H$ (un polinomio ortonormal de la base $H$)

$h(t) = \frac{H(t)}{|H(t)|}$; $|H(t)| = \sqrt{H(-1)H(-1) + H(0)H(0) + H(1)H(1)} =$

$$= \sqrt{(-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1)} = \sqrt{3}$$

$h(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(t^2 + t - 1)$

Para terminar

$Proy_{H^{\perp}}v(t) = (4 + t + 3t^2) - \frac{1}{3}\langle(4 + t + 3t^2), (t^2 + t - 1)\rangle(t^2 + t - 1)$

$Proy_{H^{\perp}}v(t) = (4 + t + 3t^2) - \frac{1}{3}\langle(6)(-1) + (4)(-1) + (8)(1)\rangle(t^2 + t - 1)$

$Proy_{H^{\perp}}v(t) = (4 + t + 3t^2) - \frac{1}{3}\langle -2\rangle(t^2 + t - 1)$

$Proy_{H^{\perp}}v(t) = (4 + t + 3t^2) + \frac{2}{3}(t^2 + t - 1)$

$\boldsymbol{Proy_{H^{\perp}}v(t) = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}t + \frac{11}{3}t^2}$

**Pregunta 3.** (10 ptos.) Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable; en caso de serlo, halle la matriz diagonalizante C.

*Solución:*

Una matriz será diagonalizable cuando sus autovalores tengan (M.A: Multiplicidad algebraica) igual a la (M.G: Multiplicidad geométrica) de los autovectores correspondientes.

Sabemos que $(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \lambda$ es un autovalor y $\vec{v}$ es un autovector asociado

$$\boldsymbol{(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$$

A partir de esta matriz, calcularemos los autovalores a través del polinomio característico que se define como $p(\lambda) = |(A - \lambda I)| = \det(A - \lambda I)$, hallamos las raíces y ellas serán autovalores de la matriz A.

$$\boldsymbol{p(\lambda) = (1-\lambda)[(-5-\lambda)(1-\lambda)+9] - 3[(-3)((1-\lambda)+9] + 3[(-9)-3(-5-\lambda)]}$$

$$\boldsymbol{p(\lambda) = (1-\lambda)[(-5+5\lambda-\lambda+\lambda^2)+9] - 3[-3+3\lambda+9] + 3[(-9)+15+3\lambda)]}$$

$$\boldsymbol{p(\lambda) = (1-\lambda)[(\lambda^2+4\lambda+4)] - 3[3\lambda+6] + 3[3\lambda+6]}$$

$$\boldsymbol{p(\lambda) = (-\lambda^3-3\lambda^2+4) = -(\lambda^3+3\lambda^2-4)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
1 & & 1 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

<u>**Hallamos las raíces a través de Ruffini**</u>

$$\boldsymbol{p(\lambda) = -(\lambda^3+3\lambda^2-4) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \lambda_1 = 1\ (M.A.=1)\ ;\ \lambda_2 = -2\ (M.A.=2)}$$

<u>Para $\lambda = 1$:</u>

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-6} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+2y+z=0 \Rightarrow \boldsymbol{x=z} \\ \boldsymbol{y=-z} \end{array} \right.$$

El autovector asociado al autovalor 1, es de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\ (\boldsymbol{M.G.=1})$$

<u>Para $\lambda = -2$:</u>

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ \Rightarrow \boldsymbol{x=-y-z} \end{array} \right.$$

El autovector asociado al autovalor -2, es de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-2} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\ (\boldsymbol{M.G.=2})$$

Concluimos que la matriz A es diagonalizable, entonces

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

**Pregunta 4.** (6 ptos.) Sea $A$ una matriz n x n no singular (no simétrica) con autovalores $\lambda_i$ y autovectores asociados $v_i, i = 1, 2, \dots, n$. Halle los autovalores de las matrices

a. $A^T$

*<u>Solución:</u>* Propongamos lo siguiente.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (A\vec{v})^T = (\lambda\vec{v})^T \Rightarrow (A^T - \lambda I)\vec{v} = 0$$

No suele ser tan claro. Entonces, pensemos lo siguiente.

Si $A$ es una matriz n x n (cuadrada) no singular (no simétrica), su transpuesta siempre tendrá la misma diagonal. En otras palabras, el polinomio característico $p(\lambda)$ siempre será el mismo para $A$ y $A^T$, entonces el autovalor $\lambda$ de A, también es un autovalor de $A^T$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I) = p(\lambda)$$

b. $A^{-1}$

*<u>Solución:</u>* Por definición sabemos que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ o bien $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$, de cualquier forma

$$(A^{-1})A\vec{v} = (A^{-1})\lambda\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \lambda(A^{-1})\vec{v} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{\lambda}\vec{v} = A^{-1}\vec{v}}$$

Concluimos que $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor asociado a la matriz $A^{-1}$

c. $A - 3I$

*<u>Solución:</u>* Por lo anteriormente planteado

$$(A - 3I + 3I - \lambda I)\vec{v} = \big((A - 3I) - (\lambda - 3)I\big)\vec{v} = 0$$

Concluimos que $(\lambda - 3)$ es un autovalor asociado a la matriz $(A - 3I)$