MA-1116. Solución del Tercer Parcial, Martes 25-11-2014. (40 %).

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo A

1. (8 puntos) Sea la transformación lineal $T: P_3 \to P_4$ definida por:

$$T(p(x)) = x^2 p'(x)$$

a) Halle la matriz, A_T , asociada a T con la base canónica.

Bases canónicas de P_3 y P_4 son:

$$Ba\sec P_3 = \{1, x, x^2, x^3\},$$
$$Ba\sec P_4 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\},$$

Primero calculamos la transformación a cada elemento de la base canónica:

$$T(1)=x^2(1)'=0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ ,T(x)=x^2(x)'=x^2.1=x^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(x^2)=x^2(x^2)'=x^2.2x=2x^3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix},\ T(x^3)=x^3(x^3)'=x^2.3x^2=3x^4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$$

Luego la representación matricial de T es:

$$A_T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

b**)** Halle el rango de T: ρ(T).

Sabiendo que el rango de T, es la cantidad de Pivotes de A_T, entonces: ρ(T)=3.

c) Hállese el núcleo y la nulidad de T.

Resolviendo $A_{5x4}\,X_{4x1}=O_{5x1}$, se obtiene el Ker(T)=nu(T),

Tomando la matriz ampliada del sistema y usando el Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Al volver al sistema:

$$\begin{matrix} y=0, \\ 2z=0, \\ 3w=0, \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Nu(T)=Nu(A_t)=gen\{1\}, \gamma(T)=1,$$

$$Además: \rho(T)+\gamma(T)=3+1=4(\dim P_3)$$

2. (12 puntos) Constrúyase una base ortonormal para $B'=\{u_1,u_2\}$ por el método de Gram-Schmidt, a partir de la base $B=\{v_1,v_2\}=\{1,x\}$ de P_1, con el producto interno dado por:

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 x^2 f(x)g(x)dx$$

Solución:

Se tiene que:

$$u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}, \|v_1\|=\|1\|=\sqrt{\int_0^1 x^2dx}=\sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow u_{1=}\sqrt{3},$$

$$u_2=\frac{v_2^{\acute{}1}}{\|v_2^1\|},$$

$$v_2^1=v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1=x-(\int x^2.\sqrt{2}xdx)\sqrt{3}=x-\frac{3}{4},$$

$$\|v_2^1\|=\left\|x-\frac{3}{4}\right\|=\sqrt{\int_0^1 x^2(x-\frac{3}{4})^2dx}=\sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}=\frac{1}{\sqrt{80}}=\frac{1}{4\sqrt{5}},$$

$$\Rightarrow u_{2=}-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}x,$$

Así la base ortormal de P1 es:

$$B_{ortonormalP1}=\{\sqrt{3},-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}x\}$$

3. (12 puntos) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Hállense sus autovalores y sus respectivas multiplicidades algebraicas.
Para calcular los autovalores, se calcula el polinomio característico:

$$p(\lambda)=(1-\lambda)^2(2-\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0,$$
$$\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=2,$$
$$ma(1)=2,ma(2)=1,$$

b) Hállense sus autovectores, los espacios característicos y las respectivas multiplicidades geométricas de los respectivos autovalores.

$$Usando-que:$$
$$(A-\lambda I)V=0_{3x1},$$
$$i)\lambda_1=1,V_1=(1,0,0),V_2=(0,1,1),$$
$$E_1=gen\{(1,0,0),(0,1,1)\},mg(2)=2,$$

$$ii)\lambda_3=2,V_3=(-1,0,1),$$
$$E_2=gen\{(-1,0,1)\},mg(2)=1,$$

c) Decidir si la matriz A es diagonalizable Luego, en caso afirmativo encontrar la matriz diagonal y la matriz de paso.

Como en este caso:

$$ma(1)=mg(1)=2,$$
$$ma(2)=mg(2)=1,$$

Entonces A es diagonalizable, la matriz diagonal D y la matriz de paso C son:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

4. (8 puntos) Sea $A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

a) Encuentre $\rho(A),\gamma(A)$
b) Determine si los vectores (1,-1,2,1), (-1,0,1,2), (1,2,5,4) y (-2,2,-4,-1) forman una base para Im(A).
c) Determine si el vector (-1, 0, 3,-2) está en N_A.

Solución:

a) Sabiendo que Im(T)=Im(A)=C_A, utilizando el método de Gauss se reduce la matriz dada a escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R1 \to R1 + R2 \\ R4 \leftrightarrow R3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R2 \to -R2 \\ R4 \to R4 + 2R3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R1 \to R1 - R2, \\ R4 \to \frac{1}{3} R4, \\ R3 \to R3 - R4, \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \to -R1, \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \mathrm{Im}(A) = gen\left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\} = \Re^4, \rho(A) = 4$$

$$\rho(A) + \gamma(A) = 4, (Número - de - columnas - de - la - matriz),$$
$$\Rightarrow \gamma(A) = 0, es - decir : N(A) = \left\{ \vec{o} \right\}$$

b) Como la base de Im(A) es la canónica de R^4, cualquier vector en este espacio se puede escribir como combinación lineal de ellos, es decir los vectores:

(1,-1,2,1), (-1,0,1,2), (1,2,5,4) y (-2,2,-4,-1)

Se pueden escribir como combinación lineal de la base de R^4, entonces estos vectores pertenecen a la Im(A), luego falta probar si son linealmente independientes:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -12 \neq 0, los - vectores - son - l.i$$

Entonces estos vectores forman una base de Im(A).

c) El vector (-1, 0, 3,-2) no está en N_A, ya que $N(A) = \left\{ \vec{o} \right\}$.