**1**. Una partícula gira alrededor del eje $y$ con velocidad angular $\boldsymbol{W} = t^2\,\hat{\boldsymbol{u}}_y$, donde $t$ es el tiempo y todas las cantidades están dadas en unidades MKS. En el instante $t = 1$ la partícula se encuentra en el punto con vector posición $\boldsymbol{r} = 3\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + 2\,\hat{\boldsymbol{u}}_y + 4\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$.

**a.** Haga un dibujo que muestre la trayectoria de la partícula, los ejes cartesianos y el sentido de giro. Halle el radio del movimiento circular.

**b.** Halle el vector aceleración angular de la partícula.

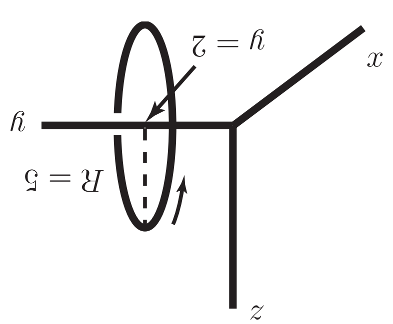
**c.** Determine para el instante $t = 1$ y en coordenadas cartesianas los vectores velocidad y aceleración de la partícula.

**1.**

**a.** La trayectoria es una circunferencia paralela al plano $xz$, con centro en $y = 2$ sobre el eje $y$ y radio $R = 5$.

**b.** $\boldsymbol{\alpha}(t) = 2t\,\hat{\boldsymbol{u}}_y$.

**c.** $\boldsymbol{v}(1) = 4\,\hat{\boldsymbol{u}}_x - 3\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$, $\qquad \boldsymbol{a}(1) = 5\,\hat{\boldsymbol{u}}_x - 10\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$.



**2**. Una partícula tiene un movimiento circular siendo su vector de posición en coordenadas cartesianas (de mano derecha) $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos(5t^2)\,\boldsymbol{i} + 2\mathrm{sen}(5t^2)\,\boldsymbol{k}$, donde $t$ es el tiempo y todas las cantidades están dadas en unidades MKS.

**a.** Halle el radio del movimiento circular. Haga un dibujo que muestre en el plano $xz$ la trayectoria de la partícula y el sentido de giro. Diga si el eje $y$ entra o sale del plano del dibujo.

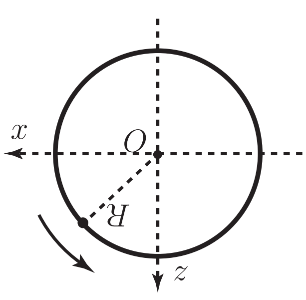
**b.** Escriba en coordenadas cartesianas los vectores velocidad, velocidad angular y aceleración angular.

**c.** Sean $\hat{\boldsymbol{u}}_r$ y $\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$ los vectores polares sobre la partícula en el plano $xz$. Determine estos vectores en la base $\{\boldsymbol{i},\, \boldsymbol{k}\}$. Ayuda: ¿qué direcciones poseen los vectores posición y velocidad de la partícula?

**d.** Determine en polares las aceleraciones radial y tangencial.

**2**.

**a.** El radio es $R = 2$ y el eje $y$ entra al plano del dibujo.



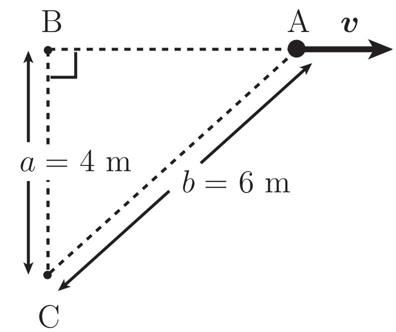

**b.**
$$\boldsymbol{v} = 20t[-\mathrm{sen}(5t^2)\,\boldsymbol{i} + \cos(5t^2)\,\boldsymbol{k}],$$
$$\boldsymbol{W} = -10t\,\boldsymbol{j}\,, \quad \boldsymbol{\alpha} = -10\,\boldsymbol{j}\,.$$

**c.** Tomaremos $\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$ en el mismo sentido del giro.
$$\hat{\boldsymbol{u}}_r = \cos(5t^2)\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}(5t^2)\,\boldsymbol{k}\,, \quad \hat{\boldsymbol{u}}_\theta = -\mathrm{sen}(5t^2)\,\boldsymbol{i} + \cos(5t^2)\,\boldsymbol{k}\,.$$

**d.**
$$\boldsymbol{a}_{\text{Tangencial}} = 20\,\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,, \qquad \boldsymbol{a}_{\text{Radial}} = -200t^2\,\hat{\boldsymbol{u}}_r\,.$$

**3**. En un instante dado una partícula de masa $M = 2$ kg se encuentra en un punto A, ver figura, moviéndose a la derecha con una rapidez $|\boldsymbol{v}| = 30$ m/s.

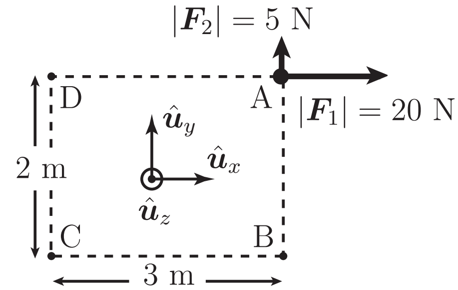
Calcule el vector momentum angular de la partícula en ese instante respecto a los puntos B y C .




**3**. Tomaremos el vector $\boldsymbol{k}$ perpendicular al dibujo y entrando al mismo desde el frente.

$$\boldsymbol{L}_B = 0 \, , \qquad \boldsymbol{L}_C = 240\,\boldsymbol{k} \text{ kg m}^2/\text{s} \, .$$

**4**. La figura muestra un rectángulo de vértices A, B, C y D. En el vértice A se encuentra una partícula sobre la que actúan, entre otras fuerzas, las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$.

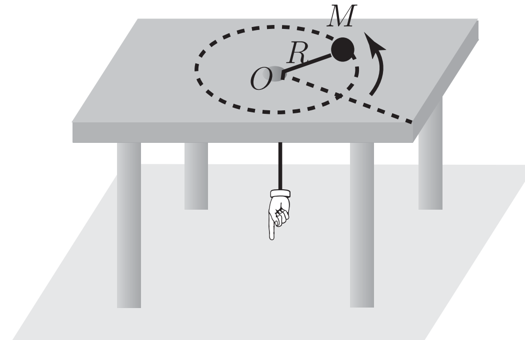



Calcule el torque resultante de estas dos fuerzas respecto a los puntos A, B, C y D.

**4.**

$\boldsymbol{\tau}_A = 0\,,\quad \boldsymbol{\tau}_B = -40\,\hat{\boldsymbol{u}}_z\ \mathrm{Nm}\,,\quad \boldsymbol{\tau}_C = -25\,\hat{\boldsymbol{u}}_z\ \mathrm{Nm}\,,\quad \boldsymbol{\tau}_D = 15\,\hat{\boldsymbol{u}}_z\ \mathrm{Nm}$

**5**. Sobre una mesa horizontal y lisa gira una partícula de masa $M$ en una circunferencia de radio $R$ y centro $O$, ver figura. La partícula está atada a una cuerda ideal que pasa por un pequeño orificio de la mesa en el punto $O$. La cuerda se mantiene tensa tirando de ella hacia abajo. Vista desde arriba la partícula gira en sentido antihorario con rapidez angular constante $\omega$.




**a.** Calcule el torque y el momentum angular de la partícula respecto al punto $O$.

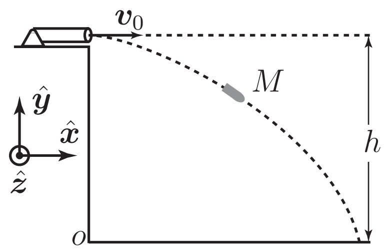
**b.** Se hala con más fuerza la cuerda de forma que el radio de la circunferencia se acorta a $1/4$ de su valor inicial. Halle la nueva rapidez angular de la partícula.

**5**. Llamaremos $\hat{\boldsymbol{z}}$ al vector unitario perpendicular a la mesa y que apunta hacia arriba.

**a.** $\boldsymbol{\tau} = 0\,, \quad \boldsymbol{L} = MR^2\omega\,\hat{\boldsymbol{z}}\,.$

**b.** $\omega_{\text{Final}} = 16\,\omega\,.$

**6**. La figura muestra la trayectoria de una bala lanzada por un cañón. La bala tiene masa $M$ y al instante $t = 0$ fue lanzada horizontalmente desde una altura $h$ respecto al piso y con una rapidez $v_0$. Tome el punto $o$ como origen de coordenadas.




**a.** Halle en función del tiempo (y mientras la bala esté en el aire) el vector fuerza sobre la bala y los vectores aceleración, velocidad y posición de la partícula.

**b.** Determine el momentum angular de la bala respecto a $o$.

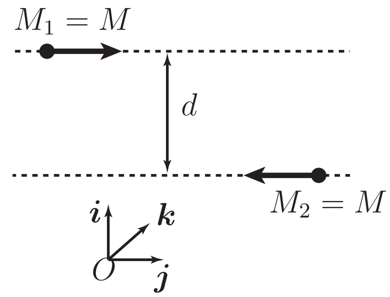
**c.** Determine el torque sobre la bala respecto a $o$ de dos formas distintas: a partir de su definición en términos de la fuerza y a partir de su relación con el momentum angular.

**6.** **a.** $\boldsymbol{F} = -Mg\,\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{a} = -g\,\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{v} = v_0\,\hat{\boldsymbol{x}} - gt\,\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{r} = v_0 t\,\hat{\boldsymbol{x}} + (-\frac{gt^2}{2} + h)\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

**b.** $\boldsymbol{L} \equiv M\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = -Mv_0(\frac{gt^2}{2} + h)\,\hat{\boldsymbol{z}}$

**c.** $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = -Mv_0 gt\,\hat{\boldsymbol{z}}$

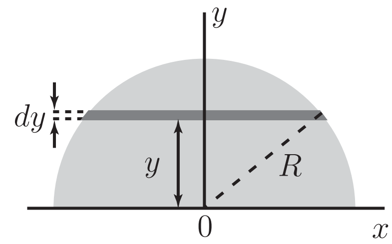
**7**. Un sistema está formado por dos partículas de masa $M$ y rapidez $v$ que viajan en direcciones opuestas siguiendo rectas paralelas separadas una distancia $d$.




Determine el momentum angular del sistema respecto al origen. ¿Depende el resultado del punto tomado como origen?

**7**. El resultado no depende del punto tomado como origen y es $\boldsymbol{L} = Mvd\,\boldsymbol{k}$.

**8**. En este problema se pide hallar el centro de masa de una placa semicircular homogénea de radio $R$ y masa $M$ por el método de dividirla en barras horizontales de ancho infinitesimal. En la figura se muestra, un poco más oscura, una de dichas barras; la barra tiene ancho $dy$ y se encuentra a una altura $y$.




**a.** Halle el área infinitesimal $dA$ de la barra como función de $y$.

**b.** Halle la densidad superficial $\sigma$ de la placa y la masa $dm$ de la barra.

**c.** Halle el centro de masa de la placa.

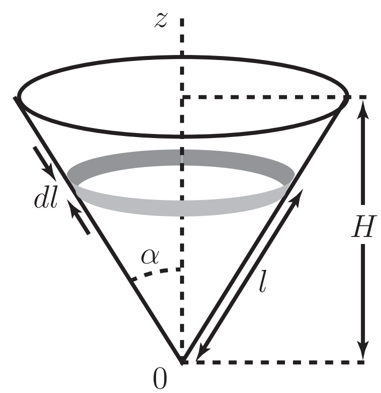
**8.**

**a.** $dA = 2\sqrt{R^2 - y^2}\; dy$

**b.** $\sigma = \dfrac{2M}{\pi R^2}\,, \quad dm = \dfrac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}\; dy$

**c.** $x_{\rm cm} = 0\,, \quad y_{\rm cm} = \dfrac{4R}{3\pi}$

**9**. En este problema se pide hallar el centro de masa de una superficie cónica de masa $M$ uniformemente distribuida, altura $H$ y ángulo $\alpha$ entre la superficie y el eje de simetría. Use el método de dividir el cono en cintas horizontales de ancho infinitesimal. En la figura se muestra oscurecida una de dichas cintas de ancho $dl$ y a una distancia $l$ del vértice medida sobre la superficie del cono.




**a.** Halle el área infinitesimal $dA$ de la cinta como función de $l$ y encuentre el área total $A$ de la superficie cónica.

**b.** Determine la densidad superficial $\sigma$ del cono y la masa $dm$ de la cinta.

**c.** Halle el centro de masa del cono.

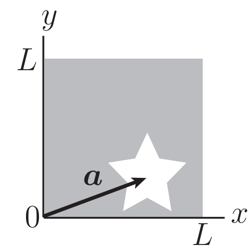
**9.**

**a.** $dA = 2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha)\, l\, dl\,, \quad A = \dfrac{\pi\,\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} H^2$

**b.** $\sigma = \dfrac{M\cos^2(\alpha)}{\pi\,\mathrm{sen}(\alpha)\, H^2}\,, \quad dm = \dfrac{2M\cos^2(\alpha)}{H^2}\, l\, dl\,.$

**c.** $x_{\rm cm} = 0\,, \quad y_{\rm cm} = 0\,, \quad z_{\rm cm} = \dfrac{2H}{3}\,.$

**10**. La figura muestra una placa cuadrada de lado $L = 4$ cm, con masa uniformemente distribuida y con un hueco en forma de estrella. La estrella tiene un área de 3 cm$^2$ y su centro geométrico se encuentra en el punto $\boldsymbol{a} = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}/3)$ cm.

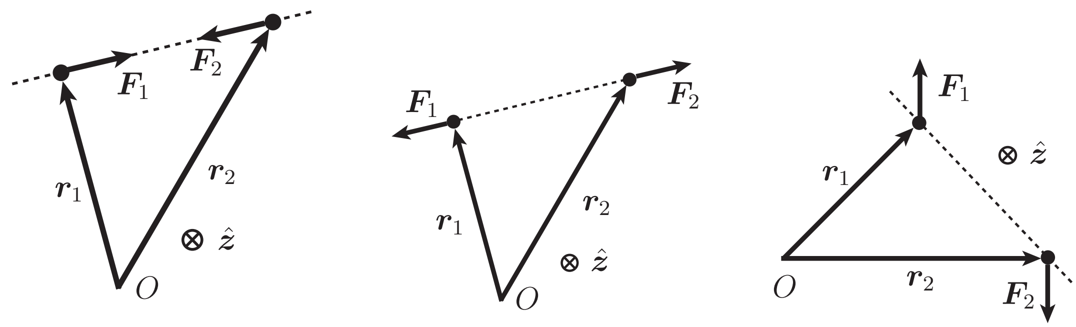



Encuentre la posición del centro de masa de la placa.

**10.** $\boldsymbol{r}_{\text{cm}} = \dfrac{23\boldsymbol{i} + 28\boldsymbol{j}}{13}$ cm.

**11**. En cada una de las tres figuras se muestra un sistema de dos partículas y la fuerza neta que actúa sobre cada una. Las dos fuerzas son opuestas y de la misma magnitud. Suponga que el vector $\hat{\boldsymbol{z}}$ entra perpendicularmente por el frente de las figuras.

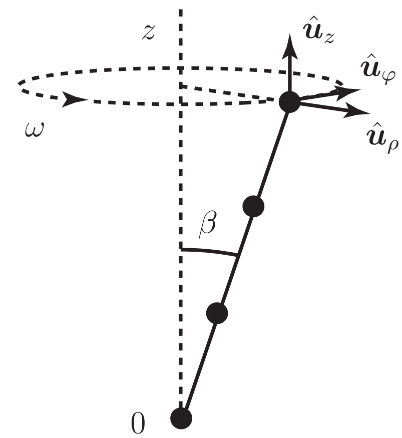
Para cada situación diga si el torque neto del sistema respecto al punto $O$ tiene la misma dirección de $\hat{\boldsymbol{z}}$, dirección opuesta o es nulo.




**a.** **b.** **c.**

**11.** $\boldsymbol{\tau}_a = \boldsymbol{\tau}_b = 0\,, \quad \boldsymbol{\tau}_c$ es paralelo a $\hat{\boldsymbol{z}}$.

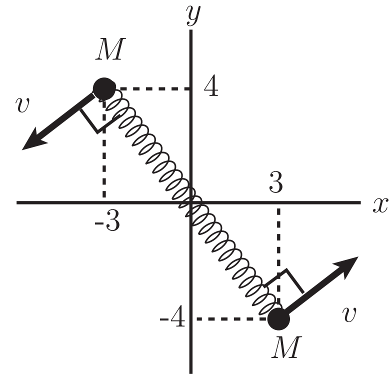
**12**. La figura muestra un sistema formado por 4 partículas de igual masa $m$ incrustadas en una varilla de masa despreciable. La distancia entre cada par de partículas contiguas es $d$. La varilla mantiene siempre un ángulo $\beta$ con el eje $z$ mientras gira con velocidad angular constante $\omega$ en el sentido indicado. Los vectores unitarios $\{\hat{\boldsymbol{u}}_\rho, \hat{\boldsymbol{u}}_\varphi, \hat{\boldsymbol{u}}_z\}$ (vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas) son perpendiculares entre sí y viajan con la varilla. Exprese sus respuestas en términos de estos vectores.




Halle el momentum angular del sistema respecto al punto 0. Derivando el momentum angular determine el torque del sistema.

**12.** $\boldsymbol{L} = 14md^2\omega\,\mathrm{sen}(\beta)\,[-\cos(\beta)\,\hat{\boldsymbol{u}}_\rho + \mathrm{sen}(\beta)\,\hat{\boldsymbol{u}}_z]$ , $\boldsymbol{\tau} = -14md^2\omega^2\mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta)\,\hat{\boldsymbol{u}}_\varphi$ .

**13**. Cierto sistema está formado por dos partículas de igual masa, $M = 2$ kg, unidas por un resorte de masa despreciable. Las partículas se mueven sobre una mesa horizontal lisa, siendo la fuerza del resorte la fuerza neta que actúa sobre cada una de ellas. En el instante $t = 0$ el sistema tiene la configuración mostrada en la figura (en el gráfico, la unidad es el metro) y las partículas se mueven en las direcciones señaladas con la misma rapidez $v = 4$ m/s.




**a.** Halle para cualquier instante posterior la posición del centro de masa del sistema $\boldsymbol{r}_{\rm cm}(t)$. ¿Cómo se comparan entre sí las posiciones de las partículas al tiempo $t$? ¿Cómo se comparan sus velocidades?

**b.** Encuentre el momentum angular del sistema respecto al origen $\boldsymbol{L}(t)$.

**c.** Al instante $t = 2$ una de las partículas se encuentra en el punto $(2, 0)$. Determine para ese instante la posición de la otra partícula y la componente de la velocidad perpendicular al resorte de cada partícula.

**13.**

**a.** $\boldsymbol{r}_{\rm cm}(t) = 0$ , $\boldsymbol{r}_1(t) = -\boldsymbol{r}_2(t)$ , $\boldsymbol{v}_1(t) = -\boldsymbol{v}_2(t)$ .

**b.** $\boldsymbol{L}(t) = 80\boldsymbol{k}$ kg m$^2$/s.

**c.** $\boldsymbol{r}_1 = (2, 0)$ m $\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}_2 = (-2, 0)$ m , $v_{1y} = 10$ m/s , $v_{2y} = -10$ m/s .