Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MA1116
Tercer Examen Parcial (Agosto-Septiembre 2006)
Turno 10:30

Nombre:____________________

Carnet:_____________________

1.- Sea $T : IR^5 \rightarrow IR^4$ la función que a cada $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in IR^5$ asigna por imagen el vector
$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5,\ x_2 - x_3 + 2x_4,\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5,\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5,) \in IR^4$
Encuentre una matriz A_{4x5} que satisfaga $T(u) = Au\ \ \forall\ u \in IR^5$, pruebe que T es una transformación lineal y calcule r(T) y n(T)

(12 puntos)

Respuesta:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in IR^5 \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 \end{pmatrix} =$$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$, de donde la matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dado que $\forall\ u \in IR^5$ $T(u) = Au$, se sigue que $\forall \in u_1, u_2 \in IR^5$ y $r \in IR$,
$T(u_1 + ru_2) = A(u_1 + ru_2) = Au_1 + r\,Au_2 = T(u_1) + rT(u_2)$ y T es una transformación lineal. (Resulta $A = A_T$)
r(t) = dim(IM(T)), pero IM(T) = IM(A), de donde r(T) = r(A) = dim (IM(A)) = dim(C_A) = dim(F_A). Ahora bien, las dos primeras filas de A son l.i. (ninguna es múltiplo de la otra) pero el resto de las filas son todas múltiplos de la primera, así que r(T) = dim (F_A) = 2.
De r(T) + n(T) = dim(IR^5) = 5 y r(T) = 2, se sigue que n(T) = 3

2.- Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

i) Verifique que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A estableciendo el valor propio al que están asociados.

ii) Encuentre un vector ortogonal a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y compruebe que éste es un vector propio de A, estableciendo el valor propio al que está asociado.

iii) Decida qué tipo de diagonalización admite A (ortogonal o no) y Diagonalice A, ortogonalmente, si es que A admite este tipo de diagonalización.

iv) Escriba el polinomio característico de A.

(14 puntos)

Respuesta:

i) De $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se sigue que los vectores en cuestión son vectores propios de A asociados al valor propio $\alpha_1 = 8$.

ii) Un vector ortogonal a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, es uno $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ ortogonal a cada uno de los dados. Para que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ sean ortogonales, debe ser $x = y$ y z y w pueden tomar cualquier valor.

Para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ sean ortogonales, x = z e y y w pueden tomar cualquier valor, así que para que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ sea ortogonal a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, debe ser x = y = z y w puede tomar cualquier valor. Finalmente, para que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ sea ortogonal a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, debe ser x = -w (o w = -x). Así que para que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ sea ortogonal a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, debe ser y = z = x y w = -x, de donde una base del complemento ortogonal de $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y dado que vectores propios asociados a valores propios diferentes de una matriz simétrica son ortogonales, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ debe ser un vector propio de A y basta multiplicarlo por A para determinar el valor propio:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

, con lo cual se da respuesta a la parte ii): $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es ortogonnal a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es un vector propio de A asociado al valor propio $\alpha_2 = 0$.

iii) A es simétrica, luego ortogonalmente diagonalizable. Para encontrar la matriz ortogonal Q, se debe primero ortonormalizar según G.-Sch. la base de vectores de E_8 formada por los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \left(\frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$, se puede tomar $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_3 = u_3 - \left(\frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 - \left(\frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$, se puede tomar $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, resulta $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonal de IR^4 compuesta por vectores propios de A y dividiendo cada vector de esta base entre su norma se obtiene una base ortonormal de IR^4 compuesta por vectores propios de A:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$, tomando los vectores de esta base se construye la matriz $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & -2/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ -1/2 & 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y con ésta

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

iv) Por varias razones el polinomio característico de A es $p_A(x) = x\,(x-8)^3$. Quizás la más simple es que hemos encontrado una base de IR^4 compuesta por un vector propio de A asociado al valor propio $\alpha_1 = 0$ y tres vectores propios de A asociados al valor propio $\alpha_2 = 8$.

3.- Sean $H = \{ (x, y, z) \in IR^3 \,/\, x = r,\ y = -r,\ z = 2r,\ r \in IR \}$, $u = (-1, 1, 1)$ y $v = (1, -1, -2)$ vectores de IR^3.

i) Calcule $\mathrm{Proy}_{H^\perp} v$

ii) Exprese $u = \mathrm{Proy}_H u + \mathrm{Proy}_{H^\perp} u$

(10 puntos)

Respuesta:

$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Como dim (H) = 1 y $\dim(H^\perp) = 2$, es siempre más fácil proyectar sobre H y despejar $\mathrm{Proy}_{H^\perp} u$ de la igualdad $u = \mathrm{Proy}_H u + \mathrm{Proy}_{H^\perp} u$ cuando sea necesario.

i) $\mathrm{Proy}_{H^\perp} v = v - \mathrm{Proy}_H v$ y, denotando al generador de H con la letra $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

se tiene $\mathrm{Proy}_H v = \left(\dfrac{v \cdot h}{h \cdot h}\right) h = \dfrac{-2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Proy}_{H^\perp} v = v - \mathrm{Proy}_H v =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

ii) $u \cdot (1, -1, 2) = (-1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$, de donde $u \in H^\perp$, $\mathrm{Proy}_H u = 0_{3x1}$ y

$\mathrm{Proy}_{H^\perp} u = u - \mathrm{Proy}_H u = u$ y la descomposición $u = \mathrm{Proy}_H u + \mathrm{Proy}_{H^\perp} u$, no es otra sino $u = 0_{3x1} + u$.

4.- Sea A una matriz nxn. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Cero no es valor propio de A.

ii) El sistema $A x = 0_{nx1}$ tiene sólo la solución trivial.

(4 puntos)

Respuesta:

Primero recordamos la definición de valor propio de una matriz: Un escalar α es valor propio de una matriz cuadrada A_{nxn}, si existe un vector no nulo en IR^n tal que $Av = \alpha v$.
Cero no es valor propio de $A \Leftrightarrow \forall\, v \in IR^n \setminus \{0_{nx1}\}\ Av \neq 0v = 0_{nx1} \Leftrightarrow$ El sistema $Ax = 0_{nx1}$ tiene sólo la solución trivial.