Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
Justifique todas sus respuestas.

19 de junio de 2007.
Matemáticas III (MA–1116)

2^{do} Parcial. (30 %)
TIPO B1

1. (7 puntos) De cierta matriz A sabemos que $\det(A) < 0$ y que su adjunta es:

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Halle A^{-1}.

Como

$$A \cdot \operatorname{Adj}(A) = \det(A) I_3$$

tomando determinantes a ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned} \det(A \cdot \operatorname{Adj}(A)) &= \det(\det(A) I_3) \\ \det(A)\det(\operatorname{Adj}(A)) &= \det(A)^3 \\ \det(\operatorname{Adj}(A)) &= \det(A)^2 \text{ pues } \det(A) < 0. \end{aligned}$$

ademas,

$$\det(\operatorname{Adj}(A)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Luego $\det(A)^2 = \det(\operatorname{Adj}(A)) = 4$ de donde $\det(A) = -2$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

En el tipo **B2** sólo cambia el signo de la primera y segunda fila.

2. Sea $\mathbf{P}_3$ el espacio vectorial formado por el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3, con coeficientes reales y con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares reales.

   a) (4 puntos) ¿Es $\mathbb{H} = \{p(x) \in \mathbf{P}_3 \, : \, p(x) = p(-x)\}$ un subespacio de $\mathbf{P}_3$?

      i) Claramente el polinomio cero está en $\mathbb{H}$, también se puede tomar el polinomio x^2, por lo cual $\mathbb{H} \neq \emptyset$.

      ii) Sean $p(x)$ y $q(x) \in \mathbb{H}$ entonces $p(x) = p(-x)$ y $q(x) = q(-x)$, de donde se deduce que,

      $$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = p(-x) = q(-x) = (p+q)(-x).$$

      por lo cual $p(x) + q(x) \in \mathbb{H}$.

      iii) Si α es un escalar, $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \alpha p(-x) = (\alpha p)(-x)$.

   b) (3 puntos) Determine si $2x + 1 \in \operatorname{gen}\{1, x^3\}$.

   Para ello, deben existir escalares a y b tales que,

   $$2x + 1 = a \cdot 1 + bx^3$$

   de donde igualando los coeficientes de x, obtenemos $2 = 0$. Por lo cual $2x+1$ no pertenece a $\operatorname{gen}\{1, x^3\}$.

3. (8 puntos) Sea r la recta intersección de los planos

$$\pi_1: \; x+y+3z=1 \quad \text{y} \quad \pi_2: \; 2x-y+3z=2$$

y sea π_3 el plano que pasa por el origen y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(-2,0,4)$. Sea P el punto intersección de la recta r y el plano π_3. Halle la distancia del punto P al punto $Q=(-1,-2,1)$.

Solución: Resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+3z &=& 1 \\ 2x-y+3z &=& 2. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1-2t \\ y &=& -t \\ z &=& t \end{array} \right.$$

el plano π_3 tiene vector normal

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(8-0)-\hat{\jmath}(4+6)+\hat{k}(0+4)=(8,-10,4)$$

así la ecuación del plano es $8x-10y+4z=0$ o $4x-5y+2z=0$. El punto intersección se obtiene resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x-5y+2z &=& 0 \\ x &=& 1-2t \\ y &=& -t \\ z &=& t \end{array} \right. \Rightarrow 4(1-2t)-5(-t)+2(t)=0 \Rightarrow 4-t=0 \Rightarrow t=4 \Rightarrow P=(-7,-4,4)$$

y finalmente la distancia de P a Q es

$$\text{dist}(P,Q)=\sqrt{(-7-(-1))^2+(-4-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7$$

En el tipo **B2** sólo cambian las coordenada de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{u}\times\vec{v}=(-8,-4,10)$, la respuesta es la misma.

4. Sea V un espacio vectorial, $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\in V$ y $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\neq\vec{0}$. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) (4 puntos) Si el conjunto $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ es linealmente dependiente entonces $\vec{u}_1=\alpha\vec{u}_2$.
   Como $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ son linealmente dependientes existen escalares a y b no ambos nulos tales que $a\vec{u}_1+b\vec{u}_2=\vec{0}$, veamos que $a\neq 0$. Esto es cierto pues, si $a=0$ tenemos que $b\vec{u}_2=\vec{0}$ y como por hipotesis $\vec{u}_2\neq\vec{0}$ obtenemos $b=0$ lo cual contradice la hipotesis de dependencia lineal. Luego, $b\neq 0$ y despejando obtenemos $\vec{u}_1=-\frac{a}{b}\vec{u}_2$.

   b) (5 puntos) Si el conjunto $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es linealmente independiente entonces el conjunto $\{2\vec{u}_1,\,3\vec{u}_2,\,\vec{u}_3\}$ es linealmente independiente.
   Supongamos que existen escalares a,b y c tales que $a(2\vec{u}_1)+b(3\vec{u}_2)+c\vec{u}_3=\vec{0}$ entonces $2a(\vec{u}_1)+3b(\vec{u}_2)+c\vec{u}_3=\vec{0}$, como $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ son linealmente independiente tenemos que $2a=0$, $3b=0$ y $c=0$ de donde se deduce la independecia lineal de $2\vec{u}_1,3\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.