

### UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR Departamento de Matemáticas

### MA1116 abril-julio de 2009

Puras y Aplicadas.

### Ejercicios sugeridos para:

### los temas de las clases del 9 y 11 de junio de 2009.

#### **Temas:**

Dependencia e independencia lineal. Base y dimensión. Espacio de filas, espacio de columnas, espacio nulo de una matriz. Rango y nulidad de una matriz.

Secciones 4.5, 4.6, 4.7 del texto.

### Observación importante:

es muy importante que Usted resuelva también muchos ejercicios del texto.

E1.- En cada uno de los siguientes casos, halle para cuales valores de la constante a, el conjunto de vectores que se asigna es linealmente independiente y para cuales valores de a es linealmente dependiente.

$$\begin{array}{ll} \textbf{1a)} \ \left\{ (1,2), (2,3), (-1,a) \right\} \subseteq R^2 \ ; \ \textbf{3b)} \left\{ \ (1,0,-1), (2,a,1) \right\} \subseteq R^3 \ ; \\ \textbf{1c)} \ \left\{ \ (1,2,1), (0,a,2), (-1,1,1) \right\} \subseteq R^3 \ ; \\ \textbf{1d)} \ \left\{ \ (0,0,0), (a,2a,3a) \right\} \subseteq R^3 \ ; \\ \textbf{1e)} \ \left\{ \ \begin{bmatrix} 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 0 \ 1 \ a \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2,3} \ ; \\ \textbf{1f)} \ \left\{ \ \begin{bmatrix} 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 2 \ 2 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 3 \ 2 \ 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 \ a \ 2 \\ a \ 0 \ -1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2,3} \ ; \\ \textbf{1g)} \ \left\{ \ 1+x, 2-ax, a+3x, x \right\} \subseteq P_1 \ ; \\ \textbf{1h}) \ \left\{ \ x^2, a+x+x^2, x+x^2 \right\} \subseteq P_2 \ . \end{array}$$

- E2.- Demuestre que dos vectores de R<sup>3</sup> son linealmente dependientes si y sólo si son paralelos.
- E3.- Demuestre que tres vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , no nulos y dos a dos perpendiculares, son linealmente independientes.
- E4-. En cada uno de los siguientes casos, diga, justificando, si la afirmación es cierta o falsa: **E4a.** Si el conjunto  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  es linealmente independiente entonces, necesariamente, los tres conjuntos  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}, \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  son linealmente independientes; **E4b**. Si los tres conjuntos  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ,  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ ,  $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  son linealmente independientes, entonces el conjunto  $\{u_1, u_2, u_3\}$  tambien es linealmente independiente
- E5.- Dada una matriz, A, de tamaño mxn, se pueden considerar las filas de la matriz como vectores de R<sup>n</sup> y las columnas como vectores de R<sup>m</sup>; tambien, como toda solución del sistema homogéneo Ax=0 tiene n componentes, toda solución de este sistema homogéneo se puede considerar como un vector de R<sup>n</sup>.

De esta manera, si  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m$  son los m vectores "fila" de la matriz A y  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, ..., \mathbf{c}_n$  son los n vectores "columna" de A, se pueden considerar los espacios vectoriales siguientes :

- a) gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m\} = R_A = \text{"espacio de filas de A"};$
- b) gen $\{c_1, c_2,...,c_n\} = C_A$  = "espacio de columnas de A";
- c)  $N_A$  = "espacio nulo de A"= espacio vectorial de todas las soluciones del sistema homogéneo Ax=0.



### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

**Demuestre** que el subconjunto de R<sup>n</sup>, formado por todas las soluciones del sistema homogéneo Ax=0 es efectivamente un subespacio de  $R^n$ .

E6.- Sea A una matriz y sea B una matriz obtenida a partir de A efectuando una operación elemental de filas.

**6a.** demuestre que  $R_A = R_B$ ,  $N_A = N_B$ , es decir, las matrices A, B tienen el mismo espacio de filas y el mismo espacio nulo.

**6b.** Ponga en evidencia con un ejemplo, que puede ser  $C_A \neq C_B$ , es decir que generalmente el espacio de columnas **cambia** al efectuar un operación elemental de filas.

E7.- Diga, justificando, si es cierto o falso, que :

7a. las filas no nulas de una matriz escalonada son linealmente independientes;

**7b.** las columnas no nulas de una matriz escalonada son linealmente independientes.

E8. [vea tambien el ejercicio E14]. Demuestre que dos vectores de R<sup>2</sup> son linealmente independientes si y sólo si generan R<sup>2</sup>.

**E9.**- Complete el conjunto  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \{ (1,2,3,4), (2,0,1,2) \}$  a una base de  $\mathbb{R}^4$ .

**E10.-** Ponga en evidencia que los dos vectores  $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2,2}$  son linealmente independientes y halle dos vectores **u**<sub>3</sub>, **u**<sub>4</sub>, de manera que  $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4})$  sea una base para  $M_{2,2}$ .

E11a.- Halle una base y la dimensión, para el espacio vectorial de todas las matrices simétricas de tamaño 3x3;

**E11b.**- Halle una base y la dimensión, para el espacio vectorial de todas las matrices antisimétricas de tamaño 3x3.

**E12.-** Para cada una de las siguientes matrices, halle una base para  $N_A$ ,  $R_A$ ,  $C_A$ , [espacio nulo, espacio de filas, espacio de columnas], así como rango y nulidad:

E13.- Halle una base y la dimensión para cada uno de los siguientes espacios vectoriales :

**13a)**  $W_A = gen\{ (1, 2, 3), (2, 4, 6), (2, -1, 0), (1, -3, -3) \} = subespacio de <math>\mathbb{R}^3$ ;

**13b)** 
$$W_B = gen\{ (1, 2, 1, -1), (2, 3, -1, 2), (0, 1, 3, -4), (1, 1, -2, 3) \} = subespacio de R4; 
13c)  $W_C = gen\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \} = subespacio de M2,2;$$$

**13d)**  $W_D = gen\{1+x+x^2, 2-x+x^2, 1-2x, 3-3x+x^2\} = subsequence de P_2$ .



### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

**E14a**) Demuestre que tres vectores de R<sup>3</sup> son linealmente independientes si y sólo si ellos generan R<sup>3</sup>;

 ${\bf E14b}$ ) Demuestre que n vectores de  $R^n$  son linealmente independientes si y sólo si ellos generan  $R^n$ .

### respuestas.

**SE1a)** Los tres vectores son linealmente dependientes <u>para todo valor de a</u>. En efecto la dependencia lineal de los tres vectores dados, depende de la existencia de soluciones <u>no nulas</u> de la ecuación  $x_1(1, 2) + x_2(2, 3) + x_3(-1, a) = (0, 0)$  en las incógnitas  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y esta ecuación vectorial es equivalente al sistema homogéneo

 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  que tiene más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto infinitas soluciones [y por lo tanto soluciones no nulas].

**SE1b**) 
$$x_1(1, 0, -1) + x_2(2, a, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

Los dos vectores son linealmente independientes <u>para todo valor de a</u> ya que la única posibilidad que se cumpla  $x_1(1,0,-1)+x_2(2,a,1)=(0,0,0)$  es que  $x_1=x_2=0$ .

**SE1c)** 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3-a & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{hay solución única (la solución nula)}$$

si y sólo si  $a\neq 3$ ; por lo tanto los tres vectores dados son linealmente independientes si  $a\neq 3$ , son linealmente dependientes si a=3.

**SE1d,e)** Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es <u>linealmente</u> dependiente. En efecto, a título de ejemplo, dados 3 vectores :

 $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$  tales que  $\mathbf{u_1} = \mathbf{o} = \text{vector nulo}$ , existe la terna de números <u>no todos nulos</u>: 1, 0, 0 tales que  $1.\mathbf{u_1} + 0.\mathbf{u_2} + 0.\mathbf{u_3} = 1.\mathbf{o} + 0.\mathbf{u_2} + 0.\mathbf{u_3} = \mathbf{o} + \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ .

Por lo tanto en estos dos casos los vectores dados son linealmente dependientes para todo valor de a.

**SE1f**) 
$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a & 2 \\ a & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 2 & 3 & a & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{hay solución única (la solución nula) si y}$$



# UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR Departamento de Matemáticas

### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

sólo si  $a\neq 1$ ; por lo tanto los cuatro vectores dados son linealmente independientes si  $a\neq 1$ , son linealmente dependientes si a=1.

**SE1g)** Son linealmente dependientes para todo valor de <u>a</u>. [compare con 3a)].

**SE1h**) 
$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \text{ hay solución única (la solución nula) si y sólo}$$

si  $a\neq 0$ ; por lo tanto los tres vectores dados son linealmente independientes si  $a\neq 0$ , son linealmente dependientes si a=0.

**SE2.-** Sabemos que dos vectores de  $R^3$ ,  $\mathbf{u_1}$ ,  $\mathbf{u_2}$ , son paralelos, si y sólo si uno de ellos es igual al otro multiplicado por una constante, por ej.  $\mathbf{u_1} = \lambda \mathbf{u_2}$ , luego existen los dos números no ámbos nulos,  $-\lambda$ , 1, tales que :  $1.\mathbf{u_1} + (-\lambda)\mathbf{u_2} = \mathbf{o}$ , es decir,  $\mathbf{u_1}$ ,  $\mathbf{u_2}$ , son linealmente dependientes [análogamente se procede si  $\mathbf{u_2} = \lambda \mathbf{u_1}$ ];

inversamente, si  $\mathbf{u_1}$ ,  $\mathbf{u_2}$ , son linealmente dependientes entonces existen dos números a, b no ámbos nulos, tales que a. $\mathbf{u_1}$ +b. $\mathbf{u_2}$ = $\mathbf{o}$  y si por ejemplo a $\neq$ 0 entonces  $\mathbf{u_1}$ =(-b/a) $\mathbf{u_2}$  luego  $\mathbf{u_1}$ ,  $\mathbf{u_2}$ , son paralelos [ si acaso b $\neq$ 0 se considera  $\mathbf{u_2}$ = (-a/b)  $\mathbf{u_1}$  ].

**SE3.-** Sea  $x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}+x_3\mathbf{w}=\mathbf{o}$ ; pongamos en evidencia que la única posibilidad para que se cumpla esto es que sea  $x_1=x_2=x_3=0$ . En efecto, multiplicando escalarmente por  $\mathbf{u}$  ámbos miembros, se obtiene :  $x_1 |\mathbf{u}|^2 + x_2(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + x_3(\mathbf{u}.\mathbf{w}) = x_1 |\mathbf{u}|^2 + x_2(0) + x_3(0) = x_1 |\mathbf{u}|^2 = 0$  y como por hipótesis  $|\mathbf{u}| \neq 0$  sigue  $x_1=0$ ;

análogamente, multiplicando por v. w se pone en evidencia que  $x_2=0$ ,  $x_3=0$ .

**SE4a.** Es cierto . En efecto, si por ejemplo  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  fuese linealmente dependiente, entonces existirían números a, b no ámbos nulos, tales que  $\mathbf{a}\mathbf{u}+\mathbf{b}\mathbf{v}=\mathbf{o}$  y por consiguiente existirían los tres números, no todos nulos : a, b, 0, tales que sea  $\mathbf{a}.\mathbf{u}+\mathbf{b}.\mathbf{v}+0.\mathbf{w}=\mathbf{o}$ ;

**SE4b-.** Es <u>falso</u>, como lo demuestra el siguiente ejemplo : sean A, B, C los tres vértices de un triángulo y sean los vectores  $\mathbf{u_1} = \mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{u_2} = \mathbf{BC}$ ,  $\mathbf{u_3} = \mathbf{AC}$ . Entonces, como se trata de tres vectores dos a dos no paralelos, los tres conjuntos  $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ ,  $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_3}\}$ ,  $\{\mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$  son linealmente independientes ; sin embargo, como  $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = \mathbf{u_3}$ , existen los tres números (no todos nulos), 1, 1, -1, tales que  $1 \cdot \mathbf{u_1} + 1 \cdot \mathbf{u_2} + (-1) \cdot \mathbf{u_3} = \mathbf{o}$  de lo cual sigue que  $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$  es un conjunto linealmente dependiente.

**SE5.** El hecho que todo sistema homogéneo siempre tiene almenos la solución nula, nos asegura que  $N_A \neq \emptyset$ ; el hecho que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es tambien una solución, nos indica que el subconjunto,  $N_A$ , de  $R^n$  cumple con la propiedad de cierre respecto a la suma; el hecho que multiplicando una solución de un sistema homogéneo por un número se vuelve a obtener una solución, nos indica que el subconjunto,  $N_A$ , de  $R^n$  cumple con la propiedad de cierre respecto a la multiplicación por números. Por consiguiente  $N_A$  es subespacio de  $R^n$ .



### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

**SE6a.** Para el espacio nulo la propiedad  $N_A=N_B$  es evidente, si recordamos que las operaciones de filas transforman un sistema en otro equivalente (es decir en otro con las misma soluciones).

Para el espacio de filas daremos una demostración en el caso de una matriz, A, de dos filas, quedando evidente que con un procedimiento análogo se pueden justificar la propiedades consideradas para matrices de un número mayor de filas.

- i) gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  = gen $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1\}$  es evidente, ya que toda combinación lineal a $\mathbf{u}_1$ +b $\mathbf{u}_2$  se puede obtener con b $\mathbf{u}_2$ +a $\mathbf{u}_1$  e inversamente;
- ii) gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  =gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{k}\mathbf{u}_2\}$  [con  $\mathbf{k} \neq 0$ ], tambien es evidente, observando que :  $\mathbf{a}\mathbf{u}_1 + \mathbf{b}\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}/\mathbf{k})(\mathbf{k}\mathbf{u}_2)$  y que :  $\mathbf{a}\mathbf{u}_1 + \mathbf{b}(\mathbf{k}\mathbf{u}_2) = \mathbf{a}\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{u}_2$ .
- iii) averiguemos ahora, por ejemplo, que si  $k\neq$ , entonces gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ =gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1+k\mathbf{u}_2\}$ : si  $\mathbf{v}\in$  gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  entonces  $\mathbf{v}=$  a $\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2=$  (a-b/k) $\mathbf{u}_1+(b/k)(\mathbf{u}_1+k\mathbf{u}_2)\in$  gen $\{\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2\}$  e inversamente, si  $\mathbf{v}\in$  gen $\{\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2\}$  entonces  $\mathbf{v}=$ a $\mathbf{u}_1+$ b(k $\mathbf{u}_2$ )=a $\mathbf{u}_1+$ (bk) $\mathbf{u}_2$ ) $\in$  gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .

**Nota.** hay una manera mas sencilla de verificar que si A, B son matrices equivalentes por filas entonces  $R_A = R_B$ , cuando tengamos un mejor conocimiento de las propiedades del complemento ortogonal,  $W^{\perp}$ , de un subespacio W.

**SE6b.** Sea por ejemplo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  y apliquemos la operación elemental de filas :

 $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$  obteniendo la matriz  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; observemos que  $C_A = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$  mientras que

 $C_B=gen\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\} \neq gen\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\}$ ; inclusive las dos operaciones elementales de filas que consisten en intercambiar dos filas y multiplicar una fila por una constante no nula, tambien pueden cambiar al espacio columna. A título de ejemplo, consideremos :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} R_2 \leftrightarrow R_1 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C$$
,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} R_2 \rightarrow 2R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = D$  y observemos que :

$$C_C = gen\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\} \neq C_A \neq C_D = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\}.$$

### SE7. importante.

**SE7a**. Es cierto que las filas no nulas de una matriz escalonada son linealmente independientes. Verifiquemos esto en un caso particular (que sugiere como justificar el hecho en

el caso general) : dada una matriz, A, sea por ejemplo la matriz  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  una matriz

escalonada equivalente por filas a A. Entonces, si:

$$x_1(1, 2, 3, 4, 5) + x_2(0, 0, 1, 4, 2) + x_3(0, 0, 0, 0, 1) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$x_1=0$$
,  $x_2(0, 0, 1, 4, 2)+x_3(0, 0, 0, 0, 1)  $\Rightarrow x_1=x_2=0$ ,  $x_3(0, 0, 0, 0, 1) \Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$ .$ 

Lo **importante** de este hecho es que, [recordando que matrices equivalentes por filas tienen el mismo espacio de filas], nos proporciona una manera relativamente sencilla para hallar una <u>base de un espacio de filas</u> o de cualquier otro espacio vectorial cuyos vectores tengan un número finito de componentes dispuestas en filas. Veremos un ejemplo de este procedimiento en las resoluciones de los ejercicios **E12**, **E13**.

**SE7b**. <u>falso</u> Las columnas de una matriz escalonada generalmente no son linealmente independientes. Vea por ejemplo el conjunto de las cinco columnas de la matriz B de **SE7a**.



### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

**SE8**. [ vea tambien **SE14** ] Si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  son linealmente dependientes, entonces uno de ellos, por ej.  $\mathbf{v}$ , es múltiplo del otro, de manera que gen $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}=$ gen $\{\mathbf{u},\mathbf{ku}\}=$ gen $\{\mathbf{u}\}\neq R^2$ ; Si  $\mathbf{u}=(a_{11},a_{12})$ ,  $\mathbf{v}=(a_{21},a_{22})$ , son linealmente independientes, entonces  $x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}=\mathbf{o}$  se cumple si y sólo si  $x_1=x_2=0$  es decir si y sólo si el sistema  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  tiene solución única y esto se cumple si y solo si la matriz A es equivalente por filas a la matriz identidad.

Entonces, como en este caso A es equivalente por filas a la matriz identidad,  $I_2$ , tiene solución única tambien cualquier sistema del tipo  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  lo cual significa que gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \mathbb{R}^2$ .

**SE9.-**Para que los cuatro vectores  $\mathbf{u}_1$ =(1,2,3,4),  $\mathbf{u}_2$ =(2,0,1,2),  $\mathbf{u}_3$ = (a, b, c, d),  $\mathbf{u}_4$ =(e, f, g, h) generen R<sup>4</sup> y sean linealmente independientes, es necesario y suficiente que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & e \\ 2 & 0 & b & f \\ 3 & 1 & c & g \\ 4 & 2 & d & h \end{bmatrix}$$
 sea equivalente por filas a la matriz identidad [o, si se prefiere, que su

determinante no sea nulo]. Hay entonces muchas posibilidades para escoger vectores  $\mathbf{u}_3$ ,  $\mathbf{u}_4$  que cumplan con lo que se pide. Por ejemplo podríamos definir:

$$\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

**SE10.-**  $x_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  si y sólo  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  es solución del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y como este sistema tienen solución única [la solución

nula] es evidente los vectores  $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  son linealmente independientes.

Representando los vectores de  $M_{2,2}$  con filas de una matriz de cuatro columnas, podemos entonces proceder como en la solución del ejercicio anterior : por ejemplo, si

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
,  $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  entonces los cuatro vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$  quedan

representados por las cuatro columnas de la matriz:  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y como esta matriz tiene

determinante no nulo, los cuatro vectores considerados forman una base para M22.

**SE11a.** 
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

por lo tanto los siguientes 6 vectores forman una base para el espacio dado [por supuesto hay que verificar que son linealmente independientes]:

$$\mathbf{u}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La dimensión de este espacio vectorial es 6 [ ya que la dimensión de un espacio vectorial es igual al número de vectores que tiene cualquier base del mismo].

**SE11b.**- 
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ; la dimensión es 3.

SE12a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{0} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

SE12a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \stackrel{0}{0} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Solución del sistema homogéneo asociado a la matriz  $A : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Los tres vectores que aparecen en el segundo miembro de esta fórmula, forman una base para el espacio nulo [cuyos vectores se obtienen como las soluciones del sistema homogéneo asociado a la matriz dada];

las filas no nulas de cualquier matriz escalonada que se obtiene a partir de la matriz A aplicando operaciones elementales de fila, forman una base para el espacio de filas; en nuestro caso, podemos considerar  $\mathbf{u}=(1\ 0\ -2\ -1\ 4), \mathbf{v}=(0\ 1\ 2\ 1\ -2)$ .

Por un teorema conocido,  $\dim(R_A) = \dim(C_A)$  [ en nuestro caso = 2];

Conociendo que  $\dim(C_A)=2$ , podemos obtener una base para el espacio  $C_A$ , mediante dos

cualesquiera columnas linealmente independientes de A, por ejemplo  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

El rango de A = 
$$\rho(A)$$
 =dim( $R_A$ )= dim( $C_A$ )=2;  
la nulidad de A =  $\nu(A)$ = dim( $N_A$ ) = 3.

### Observación importante.

 $\rho(A) + \nu(A) = \text{número de columnas de } A.$ 

**SE12b**) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

el sistema homogéneo tiene sólamente la solución nula.



### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

 $R_B = R^3$ ; una base para el espacio de filas es  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ;

 $C_B$  es el subespacio de  $R^5$  generado por las tres columnas de la matriz B; como  $\dim(R_B)=\dim(C_B)=3$ , las tres columnas de la matriz en este caso son linealmente independientes y por lo tanto forman una base para el espacio de columnas. La nulidad de  $B=\dim(N_B)=0$ ; número de columnas de  $B=3=\rho(B)+\nu(B)=3+0$ .

ninguna columna, asi que las cuatro incógnitas, x, y, z, t pueden tener valores arbitrarios y el espacio vectorial formado por todas las soluciones del sistema homogéneo asociado es R<sup>4</sup>.

R<sub>C</sub> y C<sub>C</sub> tienen únicamente el vector nulo ;

 $\rho(C) = \dim(R_C) = \dim(C_C) = 0$ ;

 $\nu(C)=\dim(N_C)=4$ 

**SE12d**) I<sub>3</sub>. En este caso el sistema homogéneo asociado tiene solo la solución nula, mientras ámbos, espacio de filas y espacio de columnas son  $\mathbb{R}^3$ .

 $\rho(D) = \dim(R_D) = \dim(C_D) = 3;$ 

 $v(D) = dim(N_D) = 0$ .

**SE12e**) [1 1 -1] . Solución del sistema homogéneo asociado :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{y} + \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{y} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \text{ los dos vectores } \mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k} \text{ forman una base para el}$$

espacio nulo de la matriz dada;

 $\nu(E)=2$ ;

 $R_E$ = subespacio de  $R^3$ generado por (1, 1,-1);

 $C_E=R^1=R$ .

 $\rho(E)=\dim(R_E)=\dim(C_E)=1$ .

**SE13a.**- W<sub>A</sub>= gen{ (1, 2, 3), (2, 4, 6), (2,-1, 0), (1,-3,-3) } = R<sub>A</sub>= espacio de filas de la matriz 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow una posible base para WA es$$

 $\{(1,2,3),(0,5,6) \text{ o tambien } \{1,0,3/5),(0\ 1\ 6/5)\} \text{ o tambien } : \{(5,0,3),(0,5,6)\}; \dim(W_A)=2$  .

**SE13b)** 
$$W_B = gen\{ (1, 2, 1, -1), (2, 3, -1, 2), (0, 1, 3, -4), (1, 1, -2, 3) \} = R_B$$



### MA1116 abril-julio de 2009

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

$$\begin{array}{l} con \ B = \begin{bmatrix} 1 \ 2 \ 1 \ -1 \\ 2 \ 3 \ -1 \ 2 \\ 0 \ 1 \ 3 \ -4 \\ 1 \ 1 \ -2 \ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \ 2 \ 1 \ -1 \\ 0 \ 1 \ 3 \ -4 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ posible \ base \ \{1, \ 2, \ 1, -1\}, \ (0, \ 1, \ 3, -4)\} \ , \ dim(W_B) = 2. \end{array}$$

 $\begin{aligned} \textbf{SE13c.-} & \text{ Representando los vectores de } W_C = \text{gen} \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \} & \text{con} \\ \text{filas de una matriz}, C, \text{ de cuatro columnas} : C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \text{posible base para } & R_C : \{ (1, 0, 0, 0), 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \} \Rightarrow \\ \text{posible base para } & W_C : \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}, & \text{dim}(W_C) = 2. \end{aligned}$ 

**SE13d.-** Representando los vectores de  $W_D = gen\{1+x+x^2, 2-x+x^2, 1-2x, 3-3x+x^2\}$  con filas de una matriz, D, de tres columnas :  $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$  posible base para  $R_D : \{(1, 1, 1), (0, 3, 1)\} \Rightarrow$  posible base para  $W_D : \{1+x+x^2, 3x+x^2\}\}$ ,  $dim(W_D) = 2$ .

**SE14a.-** Sean  $\mathbf{u} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ,  $\mathbf{v} = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ ,  $\mathbf{w} = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ ;

Los tres vectores dados son linealmente independientes, si y sólo si el sistema homogéneo que se obtiene a partir de la ecuación vectorial  $x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}+x_3\mathbf{w}=\mathbf{o}$  tiene solución única y esto se cumple si y sólo si la matriz (3x3)  $A=[a_{ij}]$  es equivalente por filas a la matriz identidad  $I_3$ ;

Los tres vectores dados generan  $\mathbb{R}^3\,$  si y sólo si la ecuación vectorial

 $x_1$ **u**+ $x_2$ **v**+ $x_3$ w=**b**<sup>t</sup>=(a, b, c) tiene solución, para todo vector (a, b, c) de R<sup>3</sup> y esto significa que el sistema de ecuaciones A**x**=**b** es consistente cualquiera que sea el vector columna, **b**. Esto se cumple si y sólo si la matriz A es equivalente por filas a la matriz identidad I<sub>3</sub>.

En conclusión, ámbas propiedades, i) que los tres vectores sean linealmente independientes, ii) que los tres vectores generen R<sup>3</sup> son equivalentes a la misma condición, que la matriz A sea equivalente por filas a la matriz identidad.

**SE14b**) Igual que **SE14a**) esta vez con una matriz A de tamaño nxn.