Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________________________

Carné: _______________ Sección: _____

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008

1$^{\text{er}}$ Examen Parcial (25 %)
Duración: 1h 50min
Tipo C

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Halle la antiderivada más general de las siguientes funciones

a) (2 puntos) $f(x) = x^3 + \operatorname{sen}(5x)$

b) (2 puntos) $g(x) = \sqrt[6]{\operatorname{sen}(3x)}\cos(3x)$

Pregunta 2. Halle el valor de las siguientes integrales definidas

a) (3 puntos) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t-3}{(t^2-6t+5)^2}dt$

b) (3 puntos) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (2 + |\operatorname{sen}(x)|)dx$

Pregunta 3. (6 puntos) Halle el área de la región limitada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $x = 3 - y^2$.

Pregunta 4. (4 puntos) Sea $F(x) = \displaystyle\int_{\cos(x)}^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$. Halle $F'(x)$.

Pregunta 5. (5 puntos) Halle el área bajo la curva $y = 2x^2+1$, entre $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ utilizando sumas de Riemann. Use particiones regulares, es decir, donde todos los intervalos tengan la misma longitud. Además tome a $\bar{x}_i$ como el extremo derecho del i-ésimo intervalo de la partición.

Nota: Si le hace falta puede hacer uso de cualquiera de las siguientes fórmulas, válidas para $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Soluciones

1) a) Usamos la linealidad de la integral indefinida y la sustitución $u = 5x$, $du = 5dx$ en la segunda integral

$$\begin{aligned}\int (x^3 + \operatorname{sen}(5x))dx &= \int x^3 dx + \int \operatorname{sen}(5x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{5}\int \operatorname{sen}(u)du \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{5}\cos(u) + C = \frac{x^4}{4} - \frac{\cos(5x)}{5} + C.\end{aligned}$$

b) Usamos la sustitución $u = \operatorname{sen}(3x)$, $du = 3\cos(3x)dx$

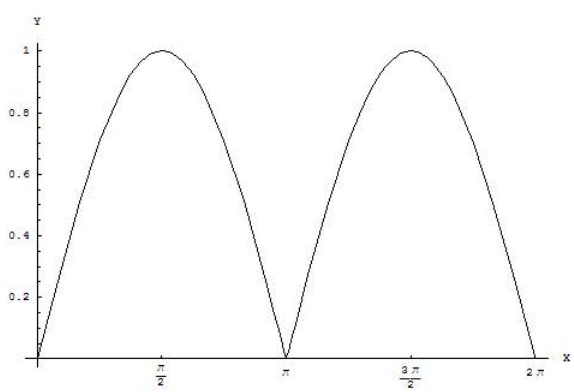
$$\begin{aligned}\int \sqrt[6]{\operatorname{sen}(3x)}\cos(3x)dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt[6]{u}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{6}}du \\ &= \frac{1}{3}\frac{6u^{\frac{7}{6}}}{7} + C = \frac{2(\operatorname{sen}(3x))^{\frac{7}{6}}}{7} + C\end{aligned}$$

2) a) Usamos la sustitución $u = t^2 - 6t + 5$, $du = (2t-6)dt = 2(t-3)dt$, entonces

$$\int_{-1}^{0} \frac{t-3}{(t^2-6t+5)^2}dt = \frac{1}{2}\int_{12}^{5}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int_{12}^{5} u^{-2}du = \frac{1}{2}(-u^{-1})\Big|_{12}^{5} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{12}\right) = -\frac{7}{120}.$$

b)

$$\int_0^{2\pi} (2 + |\operatorname{sen}(x)|)dx = 2\int_0^{\pi}(2 + \operatorname{sen} x)dx = 2(2x - \cos x)|_0^{\pi} = 2(2\pi + 1 + 1) = 4(\pi + 1).$$



La integral también se puede calcular observando que para $x \in [0, 2\pi]$

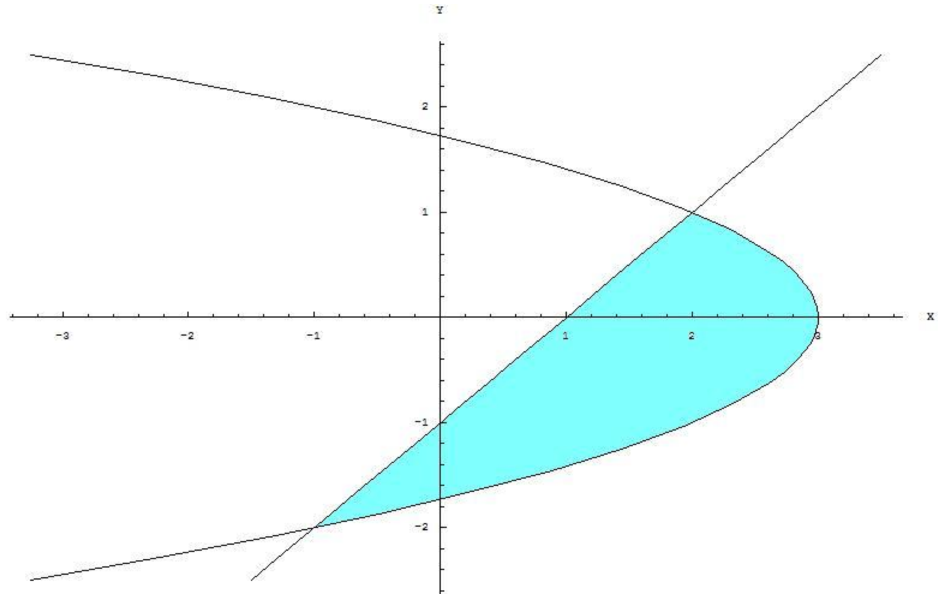
$$|\operatorname{sen}(x)| = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ -\operatorname{sen}(x) & \text{si } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

y calculando

$$\int_0^{2\pi}(2 + |\operatorname{sen}(x)|)dx = \int_0^{\pi}(2 + \operatorname{sen}(x))dx + \int_{\pi}^{2\pi}(2 - \operatorname{sen}(x))dx.$$

3) Calculamos la coordenada y de los puntos de intersección de las gráficas:

$$y+1=3-y^2 \Rightarrow y^2+y-2=0 \Rightarrow (y+2)(y-1)=0 \Rightarrow y=1, y=-2.$$



Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1}(3-y^2-(y+1))dy = \int_{-2}^{1}(-y^2-y+2))dy = -\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\Big|_{-2}^{1} \\ &= -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{8}{3}-2-4\right) = 2+6-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}-\frac{1}{2} = 8-3-\frac{1}{2} = 5-\frac{1}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Una manera alterna de calcular el área es usar integración respecto a x. En ese caso el área viene dada por

$$A = \int_{-1}^{2}\left(x-1-(-\sqrt{3-x})\right)dx + \int_{2}^{3}(\sqrt{3-x}-(-\sqrt{3-x}))dx.$$

4) Como la función $f(t)=\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$ tiene una discontinuidad removible en $t=0$ (recordemos que $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}=1$), básicamente estamos integrando una función continua en $\mathbb{R}$, por lo que podemos usar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para derivar F (también usamos la regla de la cadena y la propiedad de aditividad sobre intervalos de la integral definida), entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_{\cos(x)}^{0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt + \int_{0}^{x^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt\right)' = \left(-\int_{0}^{\cos(x)}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt + \int_{0}^{x^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt\right)' \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(\cos(x))}{\cos(x)}(-\operatorname{sen}(x)) + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}2x = \operatorname{sen}(\cos(x))\tan(x) + \frac{2\operatorname{sen}(x^2)}{x}. \end{aligned}$$

5) Dividimos al intervalo $[0,3]$ en n subintervalos de la misma longitud, es decir, de longitud $\Delta x_i = \frac{3}{n}$. Para ello consideramos las particiones:

$$P_n : x_0 = 0 < x_1 = \frac{3}{n} < x_2 = \frac{6}{n} < x_3 = \frac{9}{n} < \cdots < x_n = 3,$$

es decir, $x_i = \frac{3i}{n}$. Tenemos que $\bar{x}_i$ es el extremo derecho del i-ésimo intervalo, es decir, $\bar{x}_i = \frac{3i}{n}$. Entonces

$$\begin{aligned}
R_{P_n} &= \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(\frac{3i}{n}\right)^2 + 1\right)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\left(2\sum_{i=1}^{n}\frac{9i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{3}{n}\left(\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + n\right) = \frac{3}{n}\left(\frac{18}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\right) \\
&= 9\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} + 3
\end{aligned}$$

Finalmente calculamos el área buscada

$$A = \lim_{n\to\infty} R_{P_n} = \lim_{n\to\infty}\left(9\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} + 3\right) = 18 + 3 = 21$$