Pregunta 1. (10 ptos.) Halle la ecuación del plano π que es paralelo al eje z y pasa por la recta L intersección de los planos π_1: $x - y - 2z + 1 = 0$ y π_2: $-x + 2y - 2z + 3 = 0$

Solución:

Hallemos la recta L a través de sus ecuaciones simétricas, L estará **contenida** en el plano π.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f2'=f2+f1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Nos queda que:

$\boldsymbol{y = -4 + 4z}$

$x = -1 + y + 2z \rightarrow x = -1 + (-4 + 4z) + 2z \rightarrow \boldsymbol{x = -5 + 6z}$

$\boldsymbol{z = z}$

Despejemos el parámetro "z" en y ^ x para obtener las ecuaciones simétricas de la recta (no es necesario para resolver el problema)

$$\begin{cases} z = \frac{y+4}{4} \\ z = \frac{x+5}{6} \rightarrow \mathbf{L}: \frac{x+5}{6} = \frac{y+4}{4} = z \rightarrow \overrightarrow{V_L} = (6,4,1)\,; P = (-5,-4,0) \\ z = z \end{cases}$$

Para hallar la ecuación de un plano necesitamos el vector normal (perpendicular) al plano y un punto contenido en el plano, en nuestro caso P. Para hallar el vector normal necesitamos dos vectores directores contenidos también en el plano. Como el plano π es paralelo al eje z, entonces también será paralelo al vector:

$$\overrightarrow{V_z} = (0,0,1)$$

Hacemos producto vectorial entre los vectores directores obtenidos y obtendremos el vector normal al plano π

$$\left|\overrightarrow{V_L} x \overrightarrow{V_z}\right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-0)i + (0-6)j + (0-0)k = 4i - 6j = \vec{n}$$

La ecuación del plano π se escribirá como:

$\pi: Ax + By + Cz + d = 0 \equiv Ax_0 + By_0 + Cz_0 = d$

Donde $A = 4\,; B = -6\,;\ C = 0 \rightarrow \pi: 4x - 6y + d = 0$

Donde "d" será un punto contenido y sustituido en la ecuación del plano

$$P = (-5,-4,0) \in \pi \rightarrow \pi: 4(-5) - 6(-4) + d = 0 \rightarrow \boldsymbol{d = -4}$$

Finalmente la ecuación del plano

$$\boldsymbol{\pi: 4x - 6y = 4}$$

Pregunta 2. (12 ptos.) Sean

$$V = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_i \in R, i = 0,1,2\}$$

$$H = \{p(x) \in V \mid a_2 + a_1 + a_0 = 0\}$$

Con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares para polinomios

a. Pruebe que H es un subespacio de V

Solución:

Definimos los siguientes polinomios y escalares

$A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in V\, ; B(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0\, ;\ \alpha \in R$

Probemos los axiomas:

- Sea $C(x) = 0x^2 + 0x + 0 = 0 \in V \rightarrow C(x) \in H \leftrightarrow C_2 + C_1 + C_0 = 0$
  En efecto $C_2 = C_1 = C_0 = 0 \rightarrow (0 + 0 + 0) = 0 \rightarrow C(x) \in H; H \neq \emptyset$ (Conjunto vacío) √
- $A(x) + B(x) \in V \rightarrow A(x) + B(x) \in H$ ¿ (Cerradura bajo la suma)
  $A(x) + B(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0) \mid a_2 = -a_1 - a_0$
  $A(x) + B(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \quad \mid b_2 = -b_1 - b_0$
  $A(x) + B(x) = [(-a_1 - a_0 - b_1 - b_0)]x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
  $\rightarrow\ (-a_1 - a_0 - b_1 - b_0) +\ (a_1 + b_1) +\ (a_0 + b_0) = 0$ √
  En efecto $\rightarrow A(x) + B(x) \in H$
- $\alpha A(x) \in V \rightarrow \alpha A(x) \in H$? (Cerradura bajo la multiplicación por escalar)
  $\alpha A(x) = \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \alpha(a_2)x^2 + \alpha(a_1)x + \alpha(a_0) \mid a_2 = -a_1 - a_0$
  $\rightarrow \alpha A(x) = \alpha(-a_1 - a_0)x^2 + \alpha(a_1)x + \alpha(a_0)$
  $\rightarrow\ \alpha(-a_1 - a_0) + \alpha(a_1) + \alpha(a_0) = 0 \rightarrow \alpha(-a_1 - a_0 + a_1 + a_0) = \alpha(0) = 0$ √
  En efecto $\rightarrow \alpha A(x) \in H$

Concluimos que H es un subespacio de V

b. Halle una base para H

Solución:

Sea $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 + a_1 + a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -a_1 - a_0$ (Condición)

$$p(x) = (-a_1 - a_0)x^2 + a_1x + a_0 \rightarrow p(x) = a_1(-x^2 + x) + a_0(-x^2 + 1)$$

Concluimos que una base para H seria

$$B(H) = \{(\boldsymbol{-x^2 + x}); (\boldsymbol{-x^2 + 1})\}$$

Verifiquemos si son L.I.

$$0x^2 + 0x + 0 = \alpha(-x^2 + x) + \beta(-x^2 + 1)$$

$$\begin{cases} 0 = -\alpha - \beta \\ 0 = \alpha \\ 0 = \beta \end{cases}$$

Obtenemos un sistema con solución única y trivial, son L.I.

Observe que

Sea $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 + a_1 + a_0 = 0 \rightarrow a_0 = -a_1 - a_2$ (Condición)

$$p(x) = (a_2)x^2 + (a_1)x + (-a_1 - a_2) \rightarrow p(x) = a_2(x^2 - 1) + a_1(x - 1)$$

Concluimos que otra base para H es

$$B(H) = \{(\boldsymbol{x^2 - 1}); (\boldsymbol{x - 1})\}$$

Pregunta 3. (8 ptos.) Determine si el conjunto $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 22 & 23 \end{pmatrix}\right\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente.

Solución:

La respuesta la obtendremos al resolver el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 22 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 8\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 22\lambda_3 &= 0 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 23\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -8 & 0 \\ 4 & -2 & 22 & 0 \\ 5 & 3 & 22 & 0 \end{array}\right)$$

La solución del sistema la hallamos reduciendo la matriz obtenida

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -8 & 0 \\ 4 & -2 & 22 & 0 \\ 5 & 3 & 22 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f4'=f4-5f1}]{\substack{f2'=f2+f1 \\ f3'=f3-4f1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & -17 & 18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f4'=f4+17f2'}]{\substack{f2'=\frac{f2}{7} \\ f3'=f3+18f2'}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f3' \leftrightarrow f4'}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \lambda_3 = 0\,;\ \lambda_2 = \lambda_3\,;\ \lambda_1 = -4\lambda_2 - \lambda_3$$

El sistema posee solución única y trivial, entonces, el conjunto B es **linealmente independiente.**

Pregunta 4. (5 ptos.) Sean $\vec{u} = (2,-1,0)$; $\vec{v} = (1,0,4)$ y $\vec{w} = (-1,3,2)$

a. Calcule el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Solución:

Aplicaciones del producto vectorial

$$|\vec{u}x\vec{v}| = Area\ del\ paralelogramo$$

$$|\vec{u}x\vec{v}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = |-4i - 8j + k| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 64 + 1} = \sqrt{81} = 9$$

El área del paralelogramo es 9.

b. Calcule el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$

Solución:

$$|\vec{u}.(\vec{v}x\vec{w})| = Volumen\ del\ paralelepipedo$$

Calculemos primero $(\vec{v}x\vec{w})$

$$(\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12i - 6j + 3k = (-12,-6,3)$$

$$|\vec{u}.(\vec{v}x\vec{w})| = |\vec{u}.(-12,-6,3)| = |(2,-1,0).(-12,-6,3)| = |-24 + 6| = |-18| = 18$$

El volumen del paralelepípedo es 18.