Universidad Simón Bolivar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Primer Parcial MA-1112
Abril-Julio 2005
Tipo C
Duración: 1 hora 45 min.

Justifique claramente todas sus respuestas.

1. (4 pts. c/u) Resuelva las siguientes integrales:

a)

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx$$

Solución: Hacemos la sustitución $y = 2 + 4x$, $dy = 4dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx &= \int_6^{18} \frac{y-2}{16\sqrt{y}}dy \\
&= \int_6^{18} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{16} - \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{8}dy \\
&= \left[\frac{1}{24}y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{4}\right]_{y=6}^{y=18} \\
&= \frac{1}{24}(18)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(18)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}(6)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}(6)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{2\text{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{5\text{sen}(x)+3}}dx$$

Solución: Hacemos la sustitución $y = \text{sen}(x)$, $dy = \cos(x)\,dx$. Entonces

$$\int \frac{2\text{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{5\text{sen}(x)+3}}dx = \int \frac{2y}{\sqrt{5y+3}}dy$$

Ahora hacemos la sustitución $z = 5y + 3$, $dz = 5dy$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\text{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{5\text{sen}(x)+3}}dx &= \frac{2}{25}\int \frac{z-3}{\sqrt{z}}dz = \frac{2}{25}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - 6z^{\frac{1}{2}}\right] + C \\
&= \frac{2}{25}\left[\frac{2}{3}(5y+3)^{\frac{3}{2}} - 6(5y+3)^{\frac{1}{2}}\right] + C \\
&= \frac{2}{25}\left[\frac{2}{3}(5\text{sen}(x)+3)^{\frac{3}{2}} - 6(5\text{sen}(x)+3)^{\frac{1}{2}}\right] + C \\
&= \frac{4}{75}(5\text{sen}(x)+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{25}(5\text{sen}(x)+3)^{\frac{1}{2}} + C
\end{aligned}$$

c)

$$\int \frac{1}{4\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}+\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}}dx$$

Solución: Hacemos la sustitución $z=\sqrt{1+x}$, $dz=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$. Entonces

$$\int \frac{1}{4\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}+\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}}dx=\int \frac{1}{4\left(1+x\right)+1}\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=2\int \frac{1}{4z^2+1}dz$$

Ahora hacemos la sustitución $u=2z$, $du=2dz$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}+\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}}dx &= \int \frac{1}{u^2+1}du=\arctan\left(u\right)+C\\ &= \arctan\left(2z\right)+C=\arctan\left(2\sqrt{1+x}\right)+C\end{aligned}$$

2. (8 pts.) Suponga que f es una función continua en $[a,b]$.

   a) Sea $G(x)\equiv\int_a^x f(t)dt$. Demuestre que G es continua en $[a,b]$.
   Prueba: Como f es una función continua en $[a,b]$, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

   $$G'(x)=f(x)\quad \text{para todo } x\in[a,b]$$

   En particular, esto quiere decir que G es derivable y como tal debe ser una función continua. $\square$

   b) Sea $F(x)$ cualquier antiderivada de f en $[a,b]$. Demuestre que F es también una función continua en $[a,b]$.
   Prueba: Como $F(x)$ es cualquier antiderivada de f en $[a,b]$ difiere de G por a lo sumo una constante. Por lo tanto, F tiene que ser continua también. $\square$

3. (10 pts.) Sean

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = |x| + 1.$$

Halle el área de la región limitada por los gráficos de f y g.

Solución:

Llamemos R a la región limitada por los gráficos dados. Como ambas funciones son pares (es decir, simétricas con respecto al eje de las ordenadas) tenemos que

$$\begin{aligned} A(R) &= 2\int_0^1 [(x-1)^2 + 2 - (x+1)]dx + 2\int_1^2 [x + 1 - (x-1)^2 - 2]dx \\ &= 2\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx + 2\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx \\ &= 2. \end{aligned}$$