Problema 1. (10pts.) Determine si las siguiente series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

Solución: Por criterio de series alternantes

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(\infty+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(\infty)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\infty} = 0$
2. Sea $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)}$ derivando, $f'(x) = \frac{-(\frac{1}{x+1})}{(\ln(x+1))^2} < 0 \Rightarrow a_n$ **DECRECE**

Converge por serie alternante.
Ahora veamos si converge condicionalmente o absolutamente.
Tomando valor absoluto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$$

Veamos la siguiente comparación:

$$\ln(n+1) < (n+1)\ln(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{(\mathrm{n}+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mathrm{n}+1)\ln(n+1)}$$

Sí $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mathrm{n}+1)\ln(n+1)}$ ***diverge***, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ también ***diverge***.

Entonces, sea $f(x) = \frac{1}{(\mathrm{x}+1)\ln(x+1)}$ $\begin{cases} 1.\, Es\ positiva\ para\ \boldsymbol{x \geq 1} \\ 2.\, Es\ continua\ para\ [\mathbf{1},\infty) \\ 3.\, \boldsymbol{f'(x) = \frac{-(\ln(x+1)+1)}{((x+1)\ln(x+1))^2} < 0,\ f(x)\ DECRECE} \end{cases}$

Por criterio de la integral: (***Sí la integral diverge, la serie también diverge***)

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(\mathrm{x}+1)\ln(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{(\mathrm{x}+1)\ln(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\ln(\ln(b+1)) - \ln(\ln(2)) = \infty$$

La integral **diverge,** entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mathrm{n}+1)\ln(n+1)}$ **diverge**.
Por lo tanto, por serie minorante, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ **diverge.**

Concluimos que: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ **CONVERGE CONDICIONALMENTE**

Elaborado por: **José Ignacio Palma Misle** (*13-11044*)
Revisado por: **Prof. Nicolás Adames**

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$$

Solución: Por criterio del n-esimo termino

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \boldsymbol{DIVERGE}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n}{3n}}{\frac{3n}{3n}+\frac{1}{3n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{3n})^n} = \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \neq 0$$

Concluimos que: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$ **DIVERGE**

Problema 2. (13pts.) Hallar el conjunto de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x+1)^n}{n^2+4}$$

Solución: Por criterio del cociente absoluto

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(3x+1)^{n+1}}{(n+1)^2+4}}{\frac{(3x+1)^n}{n^2+4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x+1)^{n+1}(n^2+4)}{((n+1)^2+4)(3x+1)^n}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x+1)^n(3x+1)(n^2+4)}{((n+1)^2+4)(3x+1)^n}\right| = |3x+1|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2+4)}{((n+1)^2+4)}\right| =$$
$$= |3x+1|$$

Para que la serie converja $|3x+1| < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < 0$

Veamos si se incluyen los extremos

Para $x = -2/3$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3\left(-\frac{2}{3}\right)+1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$

Por criterio de comparación al límite: $a_n = \frac{1}{n^2+4} > 0$ y $b_n = \frac{1}{n^2} > 0 \rightarrow$ $\underset{\boldsymbol{por\ serie\ p}:(p=2>1)}{\boldsymbol{CONVERGE}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4} = 1$ Entonces, ambas (a_n y b_n) **CONVERGEN**

Para $x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3(0)+1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1)^n}{n^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}$

Por lo anterior, sabemos que la serie **CONVERGE ABSOLUTAMENTE**

Elaborado por: **José Ignacio Palma Misle** (*13-11044*)
Revisado por: **Prof. Nicolás Adames**

Concluimos que: $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x+1)^n}{n^2+4}\ \boldsymbol{CONVERGE}\ \forall \boldsymbol{x}\in\left[-\frac{2}{3},\mathbf{0}\right]\right]$

Problema 3. (12pts.) Hallar el desarrollo de Maclaurin de la función

$$f(x)=\frac{x}{(4-x)^2}$$

y determine su radio de convergencia.

Solución: Sabemos que $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ \ |x|<1$

Se tiene que $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\overset{C.D.V.}{\cong}\frac{1}{4}\frac{1}{1-t}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(t)^n\ |t|<1\overset{D.C.}{\cong}\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{4})^n\ |x|<4$

Derivando

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4-x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n\right)\ |x|<4$$

$$\frac{1}{(4-x)^2}=\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}\ \ |x|<4$$

Multiplicando por **x**:

$$\frac{x}{(4-x)^2}=\frac{x}{16}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}\ \ |x|<4$$

Radio de convergencia: Notemos que la serie converge para $-4<x<4$

Entonces, su radio será $R=\frac{4-(-4)}{2}=\frac{8}{2}=4$

**NOTA:* C.D.V.: Cambio de variable, D.C.: Devolviendo el cambio. Se puede derivar la función y la suma también, por propiedades de la sumatoria, al derivarla no se modifica el intervalo de convergencia.

Problema 4. (15pts.) Hallar las trayectorias ortogonales a las familias $x^2+4y^2=Cx$

Solución: Despejemos C

$$C=\frac{x^2+4y^2}{x}$$

Derivemos por respecto a x

$$4y^2=Cx-x^2\overset{Derivando}{\cong}8y\frac{dy}{dx}=C-2x$$

Elaborado por: **José Ignacio Palma Misle** (*13-11044*)
Revisado por: **Prof. Nicolás Adames**

Sustituimos C, en la expresión obtenida

$$8y\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+4y^2}{x}-2x\Rightarrow 8y\frac{dy}{dx}=\frac{4y^2-x^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4y^2-x^2}{8yx}$$

Pendiente ortogonal

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8yx}{x^2-4y^2}\xrightarrow{E.D.Homogenea}\frac{dy}{dx}=\frac{8\frac{y}{x}}{1-4\frac{y^2}{x^2}}\quad \text{Cambio de variable:}\begin{cases} t=\frac{y}{x}\Rightarrow y=tx \\ \frac{dy}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t \end{cases}$$

Sustituyendo, nos queda

$$x\frac{dt}{dx}+t=\frac{8t}{1-4t^2}\Rightarrow x\frac{dt}{dx}=\frac{8t}{1-4t^2}-t\Longrightarrow \boldsymbol{x\frac{dt}{dx}=\frac{7t+4t^3}{1-4t^2}}\ (V.S.)$$

Despejando

$$\boldsymbol{\frac{1-4t^2}{7t+4t^3}dt=\frac{dx}{x}}$$

Integrando a ambos lados

$$\boldsymbol{\int\frac{1-4t^2}{7t+4t^3}dt=\int\frac{dx}{x}}$$

Consideremos cada lado de la igualdad

$$\boldsymbol{\int\frac{1-4t^2}{7t+4t^3}dt=\int\frac{1-4t^2}{t(7+4t^2)}dt=\frac{1}{7}\ln t-\frac{32}{56}\ln(7+4t^2)=Ln\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right)}$$

$$\boldsymbol{\int\frac{dx}{x}=Ln\,x+Ln\,C=Ln\,xC}$$

Entonces

$$\boldsymbol{Ln\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right)=Ln\,xC\ \Rightarrow e^{Ln\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right)}=e^{Ln\,xC}}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{t^{\frac{1}{7}}}{x(7+4t^2)^{\frac{32}{56}}}\right)=C\overset{D.C}{\Longrightarrow}\left(\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{7}}}{x(7+4\left(\frac{y}{x}\right)^2)^{\frac{32}{56}}}\right)=C}$$

*NOTA: Considere la siguiente descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1-4t^2}{7t+4t^3}=\frac{1-4t^2}{t(7+4t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{(7+4t^2)}\begin{cases}1-4t^2=A\left(7+4t^2\right)+Bt\\ A=\dfrac{1}{7},\ \ B=-\dfrac{32}{7}t\end{cases}$$

Note que para hallar B:

$$1-4t^2=7A+4At^2+Bt$$

$$1-4t^2=7\left(\frac{1}{7}\right)+4\left(\frac{1}{7}\right)t^2+Bt$$

$$1-4t^2=1+4\left(\frac{1}{7}\right)t^2+Bt$$

$$-4t^2-\frac{4}{7}t^2=Bt$$

$$-\frac{32}{7}t=B$$

La integral

$$\int\frac{1-4t^2}{t(7+4t^2)}dt=\int\frac{1}{7t}dt-\int\frac{32t}{7(7+4t^2)}dt=\frac{1}{7}\ln t-\frac{32}{56}\ln\left(7+4t^2\right)$$

Elaborado por: **José Ignacio Palma Misle** (*13-11044*)
Revisado por: **Prof. Nicolás Adames**