Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008

Nombre: ______________________________

Carné: ______________ Sección: _____

1^{er} Examen Parcial (25 %)
Duración: 1h 50min
Tipo A

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Calcule las siguientes integrales indefinidas

a) (2 puntos) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}dx$

b) (2 puntos) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(\pi x^2)dx$

Pregunta 2. Calcule las siguientes integrales definidas

a) (3 puntos) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx$

b) (3 puntos) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\arctan(x^2)}{1+x^4}dx$

Pregunta 3. (6 puntos) Halle el área limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ 2x-3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 4x-5 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

y el eje Y.

Pregunta 4. (5 puntos) Dada la función $f(x)=2x^2+3x+3$ definida en el intervalo $[1,4]$, halle el valor de $c\in(1,4)$ tal que

$$f(c)=\frac{1}{3}\int_1^4 (2x^2+3x+3)dx$$

Pregunta 5. (4 puntos) Dada la función $f(x)=3+\mathrm{sen}(x)$ en $[-\pi,2\pi]$, calcule la suma de Riemann empleando la partición

$$P: x_0=-\pi, x_1=0, x_2=\pi, x_3=\frac{3\pi}{2}, x_4=2\pi$$

y tomando como $\bar{x}_i$, al punto medio de $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,3,4$.

Soluciones

1) a) Usamos la sustitución $u = \sqrt{x} + 1$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, es decir, $2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Entonces

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int u^{\frac{3}{2}}du = 2\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}(\sqrt{x}+1)^{\frac{5}{2}} + C.$$

b) Sea $u = \pi x^2$, $du = 2x\pi dx$, es decir, $\frac{du}{2\pi} = xdx$. Entonces

$$\int x \operatorname{sen}(\pi x^2)dx = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{sen}(u)du = -\frac{1}{2\pi}\cos(u) + C = -\frac{\cos(\pi x^2)}{2\pi} + C.$$

2) a) Usamos la sustitución $u = x^3 + 3x$, $du = (3x^2+3)dx$, es decir, $\frac{du}{3} = (x^2+1)dx$

$$\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx = \int_4^{36} \frac{du}{3\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int_4^{36} u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}2u^{\frac{1}{2}}\Big|_4^{36} = \frac{2}{3}(\sqrt{36}-\sqrt{4}) = \frac{8}{3}.$$

b) Usamos la sustitución $u = \arctan(x^2)$, $du = \frac{2x}{1+x^4}dx$, es decir, $\frac{du}{2} = \frac{x}{1+x^4}dx$

$$\int_0^1 \frac{x\arctan(x^2)}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} udu = \frac{u^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0^2\right) = \frac{\pi^2}{64}.$$

Nota: También se puede calcular la integral usando primero la sustitución $y = x^2$, $dy = 2xdx$ y después $z = \arctan(y)$, $dz = \frac{1}{1+y^2}dy$.

3) Hallamos las intersecciones de las gráfica $y = f(x)$ con la gráfica $y = g(x)$:

(I) Cuando $x < 0$

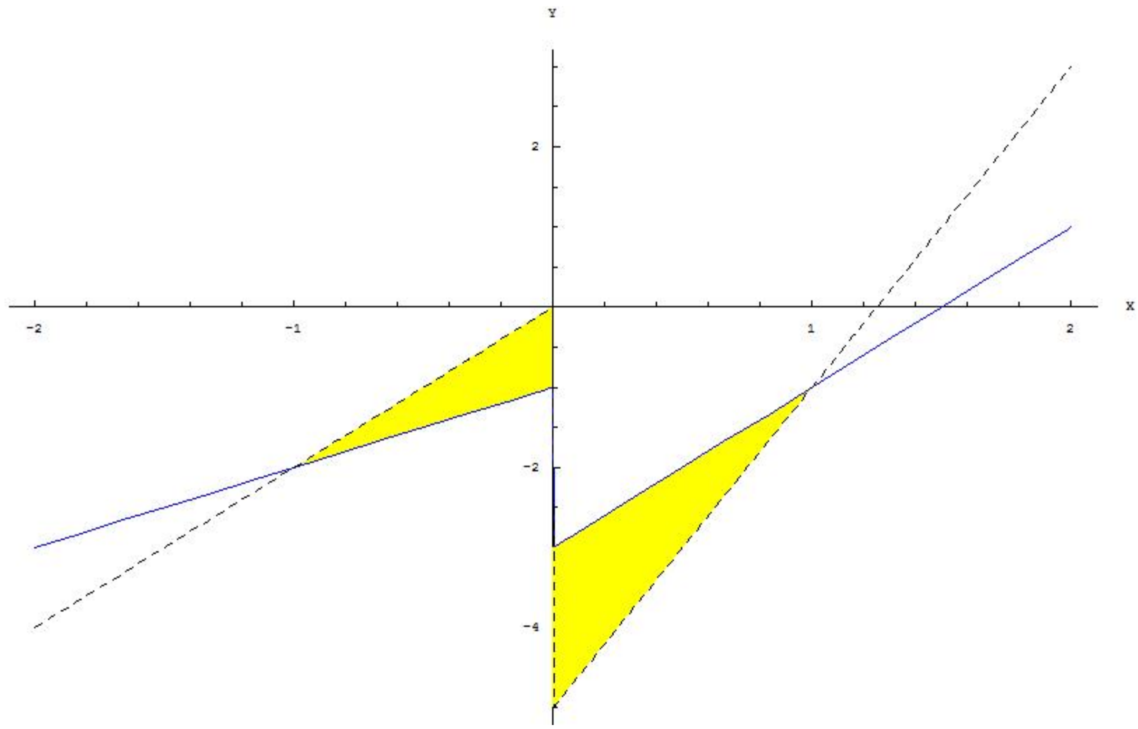
$$x - 1 = 2x \Rightarrow x = -1 \text{ y entonces } y = f(-1) = -1 - 1 = -2.$$

(II) Cuando $x \geq 0$

$$2x - 3 = 4x - 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ y entonces } y = f(1) = 2(1) - 3 = -1.$$

El área que queremos calcular es la que se indica en la figura (la línea continua es f y la punteada es g):

Nota: *El segmento punteado que aparece sobre el eje Y* **no** *es parte de la gráfica de g.*



Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0}(2x-(x-1))dx+\int_{0}^{1}((2x-3)-(4x-5))dx \\
&= \int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}(-2x+2)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}+\left[-x^2+2x\right]_0^1=-\left(\frac{1}{2}-1\right)-1+2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

4) Primero calculamos la integral

$$
\begin{aligned}
\int_1^4(2x^2+3x+3)dx &= \left.\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right|_1^4=\frac{128}{3}+24+12-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-3 \\
&= 126+33-\frac{3}{2}=42+33-\frac{3}{2}=75-\frac{3}{2}=\frac{147}{2}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$f(c)=\frac{1}{3}\frac{147}{2}=\frac{147}{6}$$

es decir,

$$c^2+3c+3=\frac{147}{6}$$

Entonces

$$2c^2+3c+3-\frac{147}{6}=0\Rightarrow 2c^2+3c-\frac{129}{6}=0\Rightarrow 2c^2+3c-\frac{43}{2}=0.$$

Entonces
$$c=\frac{-3\pm\sqrt{9+172}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{181}}{4}.$$
Observamos que $\frac{-3-\sqrt{181}}{4}<0$, por lo que descartamos esta solución (recordemos que $c\in(0,4)$). Por lo tanto
$$c=\frac{-3+\sqrt{181}}{4}.$$

5) Tenemos que
$$\bar{x}_1=-\frac{\pi}{2},\ \bar{x}_2=\frac{\pi}{2},\ \bar{x}_3=\frac{\pi+\frac{3\pi}{2}}{2}=\frac{5\pi}{4},\ \bar{x}_4=\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2}=\frac{7\pi}{4}.$$

Entonces
$$\begin{aligned} R_P &= \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\pi+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\pi+f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\frac{\pi}{2}+f\left(\frac{7\pi}{4}\right)\frac{\pi}{2}\\ &= \left(3+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\pi+\left(3+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\pi+\left(3+\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\frac{\pi}{2}+\left(3+\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\frac{\pi}{2}\\ &= (3-1)\pi+(3+1)\pi+\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2}+\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2}\\ &= 6\pi+3\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=9\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\pi\left(9-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$