Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio, 2008
Duración: 1 hora, 50 minutos.

Carnet: ______________________

Nombre: ______________________

Sección: ______________________

MA-1112 —Primer Parcial, Martes 20-05-2008. (30 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo 81C

1. (12 ptos.) Calcule

a) (4 ptos.)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(|\mathrm{sen}(x)| + |x-\pi|\right) dx$$

Solución:
Utilizando que

$$|\mathrm{sen}(x)| = \begin{cases} \mathrm{sen}(x) & \text{si } \ 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\mathrm{sen}(x) & \text{si } \ -\pi/2 \leq x < 0 \end{cases}$$

y $|x-\pi| = \pi - x$ si $x < \pi$, podemos reescribir la integral como

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(|\mathrm{sen}(x)| + |x-\pi|\right) dx &= \int_{-\pi/2}^{0} -\mathrm{sen}(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{sen}(x)dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\pi - x)dx \\ &= [\cos(x)]_{-\pi/2}^{0} + [-\cos(x)]_{0}^{\pi/2} + \left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= [1-0] + [0+1] + \left[-\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2}\right] - \left[-\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2}\right] = 2 + \pi^2. \end{aligned}$$

b) (4 ptos.)

$$\int_{1}^{8} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3}{3\sqrt[3]{x}} dx$$

Solución:
Realizando el cambio de variable $u = \sqrt[3]{x}$, $du = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$ y los limites de integracion

seran: $u = 1$ cuando $x = 1$ y $u = 2$ cuando $x = 8$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_1^8 \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{3\sqrt[3]{x}}dx &= \int_1^8 \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{3\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)^3}{3\sqrt[3]{x^2}}dx \\
&= \int_1^2 (u-1)^3 \cdot u du = \int_1^2 (u^4 - 3u^3 + 3u^2 - u) du \\
&= \left[\frac{u^5}{5} - \frac{3u^4}{4} + u^3 - \frac{u^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9}{20}.
\end{aligned}$$

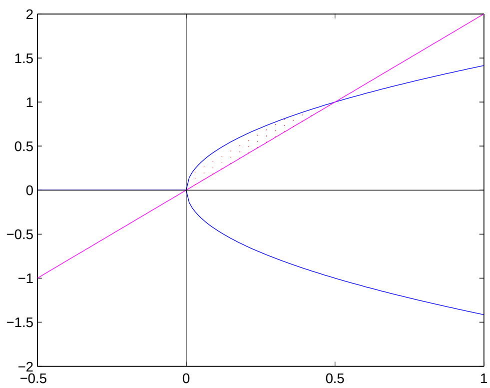
c) (4 ptos.)

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$$

Solución:
Realizando el cambio de variable $u = \sqrt{x-2} \Rightarrow u^2 = x - 2$ y $2udu = dx$. Asi,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx &= \int \frac{u^2+3}{(u^2+2)u} \cdot 2udu = 2\int \frac{u^2+3}{u^2+2}du \\
&= 2\left(\int \frac{u^2+1}{u^2+2}du + \int \frac{du}{u^2+2}\right) \\
&= 2\left(\int du + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{(u/\sqrt{2})^2+1} \cdot \frac{du}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\left(u + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(u/\sqrt{2})\right) + C \\
&= 2\left(\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{x-2}/\sqrt{2}\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

2. (6 ptos.) Determine el área de la región limitada por la parabola $y^2 = 2x$ y la recta $y = 2x$.
Solución:



Resolviendo el sistema con respecto a y: $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = 2x \end{cases}$, obtenemos que $\frac{1}{2}(y(y-1)) = 0$ cuando $y_1 = 0$ ó $y_2 = 1$. Entonces, integramos con respecto a y; el área de la región que se muestra en la figura anterior es

$$A = \int_0^1 \left[\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right] dx = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{12}.$$

3. (6 ptos.) Sea

$$G(x) = \int_{3\cos(x)}^{5x} \frac{1}{\cos(t^2)+1} dt$$

Halle $G'(x)$.
Solución:

$$G(x) = \int_{3\cos(x)}^{5x} \frac{1}{\cos(t^2)+1} dt = -\int_0^{3\cos(x)} \frac{1}{\cos(t^2)+1} dt + \int_0^{5x} \frac{1}{\cos(t^2)+1} dt$$

Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Calculo, obtenemos que

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{1}{\cos(9\cos^2(x))+1} \cdot (-3\operatorname{sen}(x)) + \frac{1}{\cos(25x^2)+1} \cdot 5 \\ &= \frac{3\operatorname{sen}(x)}{\cos(9\cos^2(x))+1} + \frac{5}{\cos(25x^2)+1}. \end{aligned}$$

4. (6 ptos.) Calcule

$$\int_2^3 (x+2)dx$$

usando la definición, empleando particiones regulares y tomando $\overline{x_i} = x_{i-1}$.
Solución:
Se divide el intervalo $[2,3]$ en n subintervalos (regulares), $\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{n}$ donde $x_i = 2 + \frac{i}{n}$ con $i = 0, 1, \ldots, n$ y $f(\overline{x_i}) = x_{i-1} + 2$ (tomando $\overline{x_i} = x_{i-1}$). Asi, $f(\overline{x_i}) = (2 + \frac{i}{n}) + 2 = 4 + \frac{(i-1)}{n}$ y

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(4 + \frac{(i-1)}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2},$$

$$R_p = 4 + \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Luego,

$$\int_2^3 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} Rp = \frac{9}{2}.$$