Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio, 2008
Duración: 1 hora, 50 minutos.

Carnet: ____________________

Nombre: ____________________

Sección: ____________________

MA-1112 —Primer Parcial, Martes 20-05-2008. (30 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo 81B

1. (12 ptos.) Calcule

   a) (4 ptos.)

$$\int_{-1}^{2} \left(\left|x^2 - 2x\right| + x^3\right) dx$$

Solución:
$x^2 - 2x = x(x-2)$, utilizando que

$$\left|x^2 - 2x\right| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad x \in (0, 2] \end{cases}$$

podemos reescribir la integral como

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-1}^{2} \left(\left|x^2 - 2x\right| + x^3\right) dx &= \textstyle\int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x + x^3\right) dx + \int_{0}^{2} \left(x^3 - x^2 + 2x\right) dx \\ &= \left[\tfrac{x^3}{3} - x^2 + \tfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2} \\ &= 0 - \left(-\tfrac{1}{3} - 1 + \tfrac{1}{4}\right) + \left(-\tfrac{8}{3} + 4 + 4\right) = -\tfrac{7}{3} + 9 - \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{77}{12}. \end{aligned}$$

   b) (4 ptos.)

$$\int \frac{1 + x - x^2}{\left(1 - x^2\right)^{3/2}} dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + x - x^2}{\left(1 - x^2\right)^{3/2}} dx &= \int \frac{1 - x^2}{\left(1 - x^2\right)^{3/2}} dx + \int \frac{x}{\left(1 - x^2\right)^{3/2}} dx \\ &= \int \frac{1 - x^2}{\left(1 - x^2\right) \cdot \left(1 - x^2\right)^{1/2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\left(1 - x^2\right)^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

Sea $u = 1 - x^2$, asi $du = -2xdx$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x-x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u)^{3/2}} \\
&= \operatorname{arc\,sen}(x) - \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du = \operatorname{arc\,sen}(x) - \frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C \\
&= \operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{1}{\sqrt{u}} + C = \operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

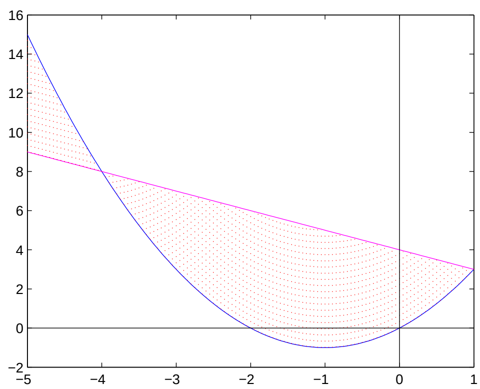
c) (4 ptos.)

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt[4]{\tan^3(x)}\sec^2(x)dx$$

Solución:
Se realiza el cambio de variable $u = \tan(x)$, luego $du = \sec^2(x)dx$. Además, $u = 0$ cuando $x = 0$ y $u = 1$ cuando $x = \pi/4$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt[4]{\tan^3(x)}\sec^2(x)dx &= \int_0^1 \sqrt[4]{u^3}du = \int_0^1 u^{3/4}du \\
&= \left[\frac{u^{7/4}}{7/4}\right]_0^1 = \frac{4}{7}\left[\sqrt[4]{u^7}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{7}\cdot(1-0) = \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

2. (6 ptos.) Determine el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$, en $[-5, 1]$.
Solución:



Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$, obtenemos $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$. Entonces, el área de la región que se muestra en la figura anterior es

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-5}^{-4} [(x^2+2x) - (4-x)]\,dx + \int_{-4}^{1} [(4-x) - (x^2+2x)]\,dx \\
&= \int_{-5}^{-4} [x^2+3x-4]\,dx + \int_{-4}^{1} [-x^2-3x+4]\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x\right]_{-5}^{-4} + \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{1} \\
&= \left(\frac{-64}{3} + 24 + 16\right) - \left(\frac{-125}{3} + \frac{75}{2} + 20\right) + \left(\frac{-1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) \\
&= -1 - 39 + 64 = 24.
\end{aligned}$$

3. (6 ptos.) Utilice la Propiedad de Comparación para integrales definidas para demostrar que:

$$\frac{-8}{11} \leq \int_{10}^{18} \frac{\cos(x)}{\sqrt{21+x^2}}dx \leq \frac{8}{11}$$

Solución:
La funcion $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{21+x^2}}$ es continua en el intervalo $[10, 18]$, además, $f(x)$ alcanza su valor minimo y maximo en $[10, 18]$. Luego, $11 = \sqrt{121} = \sqrt{21+10^2} \leq \sqrt{21+x^2} \leq \sqrt{21+18^2} = \sqrt{345} < 19 \left(\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{21+x^2}} \leq \frac{1}{11}\right)$ y dado que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$; tenemos que,

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{21+x^2}} \leq \frac{1}{11}.$$

Si tomamos $M = \frac{1}{11}$, se cumple que $M \geq Max f(x)$ para todo $x \in [10, 18]$. Utilizando la Propiedad de Acotación, obtenemos que

$$\int_{10}^{18} \frac{\cos(x)}{\sqrt{21+x^2}}dx \leq M \cdot (18-10).$$

Es decir,

$$\int_{10}^{18} \frac{\cos(x)}{\sqrt{21+x^2}}dx \leq \frac{1}{11} \cdot 8 = \frac{8}{11}.$$

4. (6 ptos.) Dada $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$ en $[-\pi, 2\pi]$, calcule la suma de Riemann empleando la particion $P = \left\{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$ y tomando como $\overline{x_i}$, al punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, 3)$.
Solución:
Claramente,

i	$\overline{x_i}$	$f(\overline{x_i})$	Δx_i
1	$\frac{\pi}{2}$	$2 + \operatorname{sen}(\pi/2) = 3$	π
2	$\frac{5\pi}{4}$	$2 + \operatorname{sen}(5\pi/4) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pi/2$
3	$\frac{7\pi}{4}$	$\operatorname{sen}(7\pi/4) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pi/2$

Asi,

$$R_p = \sum_{i=1}^{3} f(\overline{x_i})\Delta x_i = 3\pi + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \left(5 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi.$$