

# Sistemas de ecuaciones diferenciales unidimensionales.

Esquemas de Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Runge-Kutta, para sistemas de primer orden y sus aplicaciones.

Francisco Ramón González Galeano

---

## I. INTRODUCCIÓN

Un sistema de “d” ecuaciones diferenciales unidimensionales( EDO's) de primer orden es equivalente a una ecuación diferencial de primer orden y dimensión d, además, un problema de valor inicial(PVI) asociado al sistema es equivalente a un problema de valor inicial multi-dimensional. Los métodos estudiados para resolver numéricamente un PVI unidimensional son válidos para el PVI “d” dimensional. Los métodos desarrollados para resolver un PVI d-dimensional de orden 1 sirven para resolver PVI's unidimensionales de orden d y sistemas de “d” ecuaciones unidimensionales de orden 1.

Los esquemas de Adams-Bashforth y Adams-Moulton son métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos métodos se basan en la idea de aproximar la solución mediante una combinación lineal de valores anteriores. Los métodos predictor-corrector y Runge-Kutta también son dos tipos de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Ambos métodos intentan aproximar la solución de una EDO en un intervalo de tiempo usando pasos discretos.

En la primera parte se obtendrán los esquemas de 4 pasos para el método de Adams-Bashforth, y de 3 pasos para el método Adams-Moulton, adaptando el caso unidimensional de primer orden a un sistema. En la segunda parte se resolverá numéricamente el sistema de lorentz para unos parámetros definidos, probando en varios intervalos, para ello se implementará el método de Runge-Kutta de orden 4, para luego utilizarlo como inicializador del método Predictor-Corrector de 4 pasos (explícito) y 3 pasos (implícito) Adams-Bashforth-Moulton. Por último se estudiará un problema clásico de la física: el movimiento de un proyectil lanzado al aire con cierta velocidad inicial, que experimenta una fuerza de fricción opuesta a su movimiento, que depende de la velocidad, será resuelta numéricamente la ecuación diferencial del movimiento luego de transformar la ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales unidimensionales de primer orden, para aplicar el método de Runge-Kutta de orden 4, también se implementara el método implícito de punto medio para este problema.

## II. DESARROLLO

### ❖ Actividad 1:

Dado un mallado de  $[a, b]$  de la forma  $h = \frac{b-a}{N}$ , y  $t_i = a + ih$ , con  $i = 0, \dots, N$ , podemos escribir (por el Teorema Fundamental del Cálculo):

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t(i)}^{t(i+1)} f(t, y(t)) dt, \dots\dots\dots (*)$$

donde  $y_i = y(t_i)$ . El método de Adams-Bashforth de  $m$  pasos, se obtiene al aproximar la

función  $g(t) := f(t, y(t)) = (g_1(t), \dots, g_d(t))$  por una función polinomial

$P(t) = (P_1(t), \dots, P_d(t))$  que interpola a  $g(t)$ . por los puntos  $(t_{i-m+1}, \dots, t_i)$ , y

considerando la aproximación  $w_j \approx y_j := y(t_j)$ . El método de Adams-Moulton de  $m$  pasos

se obtiene al considerar el polinomio interpolador a través de los puntos  $(t_{i-m+1}, \dots, t_{i+1})$ ,

y considerando la aproximación  $w_j \approx y_j := y(t_j)$ .

Donde  $h$  es el tamaño del paso,  $y_n$  Es el valor aproximado de la solución en el paso  $n$ , y  $f_n$

Es la función que define el sistema de ecuaciones diferenciales, Se tiene:

- Método de Adams-Bashforth explícito de 4 pasos:  $m = 4$ ,

$$\omega_0 = y_0, \omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = \alpha_2, \omega_3 = \alpha_3.$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, \omega_i) - 59f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, \omega_{i-3})] \dots\dots (1)$$

para  $i = 3, \dots, N - 1$ .

Este esquema es explícito, es decir, no requiere resolver ninguna ecuación para obtener  $y_{i+1}$ .

- Método de Adams-Moulton implícito de 3 pasos:

$$m = 3,$$

$$\omega_0 = y_0, \omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = \alpha_2.$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 19f(t_i, \omega_i) - 5f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + f(t_{i-2}, \omega_{i-2})] \dots\dots\dots (2)$$

para  $i = 3, \dots, N - 1$ .

Este esquema es implícito, es decir, requiere resolver una ecuación no lineal para obtener  $y_{i+1}$ . Esto se puede hacer mediante algún método iterativo, como el método de Newton.

Los esquemas de Adams-Bashforth y Adams-Moulton tienen la ventaja de ser consistentes y convergentes, es decir, que el error tiende a cero cuando el paso de integración se hace más pequeño. Además, tienen un orden elevado, lo que significa que el error es proporcional a una potencia alta de  $h$ . Sin embargo, también tienen algunas desventajas, como la necesidad de conocer valores iniciales suficientes para empezar el método, o la posibilidad de inestabilidad si el paso de integración es demasiado grande.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1 y dimensión 1, es aquel donde,

$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ ,  $y: [a, b] \rightarrow R^d$  tal que  $f: R \times R^{nd} \rightarrow R^d$ , donde  $n = 1$  y  $d = 1$ .

Para el caso orden 1 y dimensión 1:

$$y'_1(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_d(t)) \dots\dots\dots (3)$$

$y'_d(t) = f_d(t, y_1(t), \dots, y_d(t))$ , donde  $y_i: [a, b] \rightarrow R$ , es derivable tantas veces como se necesite. Una solución del sistema (3) es una familia de funciones  $y_i: [a, b] \rightarrow R$  derivable, tal

que  $i = 1, \dots, d$ ;  $y'_i(t) = f_i(t, y_1(t), \dots, y_d(t))$ ;  $y_i(t_0) = \alpha_i$ ;  $y_i: [a, b] \rightarrow R^d$ :

Se tiene  $\gamma(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t))$ ,  $\gamma(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \alpha$ .

$$\gamma'(t) = (y'_1(t), \dots, y'_d(t)) = f_1(t, y_1, \dots, y_d) = f(t, \gamma)$$

$\gamma'(t) = f(t, \gamma)$ , aplicando (\*) y aproximando  $f(t, \gamma)$  por una función polinomial se obtendrán los esquemas (1) y (2) para sistemas de ecuaciones diferenciales. de donde se obtienen:

$$\omega_{i+1}^j = \omega_i^j + \frac{h}{24} \left[ 55f_j(t_i, \omega_i^j) - 59f_j(t_{i-1}, \omega_{i-1}^j) + 37f_j(t_{i-2}, \omega_{i-2}^j) - 9f_j(t_{i-3}, \omega_{i-3}^j) \right] \dots (4)$$

$$\omega_{i+1}^j = \omega_i^j + \frac{h}{24} \left[ 9f_j(t_{i+1}, \omega_{i+1}^j) + 19f_j(t_i, \omega_i^j) - 5f_j(t_{i-1}, \omega_{i-1}^j) + f_j(t_{i-2}, \omega_{i-2}^j) \right] \dots (5)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, d$ . La expresión (4) corresponde al esquema Adams-Bashforth explícito de 4 pasos para el sistema. La expresión (3), en cambio, corresponde al esquema Adams-Moulton implícito de 3 pasos para el sistema.

#### ❖ Actividad 2:

El sistema de Lorentz consiste en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sigma(y - x), \\ y'(t) &= x(\rho - z) - y, \\ z'(t) &= xy - \beta z. \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $x, y, z$  son funciones de  $t$  y  $\sigma, \rho, \beta$  son parámetros del sistema (independientes de  $t$ ). Este sistema fue originalmente planteado como un modelo simplificado de convección atmosférica. Los parámetros  $\sigma, \rho, \beta$  describen otras propiedades del fluido. El modelo aparece también en varios otros contextos, y tiene relevancia desde el punto de vista puramente matemático por exhibir comportamiento caótico, siendo ampliamente estudiado en el área de sistemas dinámicos conocida como teoría del caos.

Para resolver numéricamente se utiliza en este caso uno de los métodos más usados en la práctica, el esquema de Runge-Kutta de orden 4, el cual, es un método numérico para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Consiste en aproximar la solución  $z(t)$  en una sucesión de puntos  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . siguiendo el sistema dado en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0, \\ k_1 &= hf(t_i, \omega_i), \\ k_2 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= hf(t_{i+1}, \omega_i + k_3), \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

donde  $h = (b - a)/N$  e  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

El sistema (6) se implementa de acuerdo al esquema (7) en lenguaje python mediante la jupyter notebook, utilizando las librerías de numpy para la generación de datos, arrays y los cálculos necesarios, matplotlib para las gráficas de trayectoria. A este mismo sistema luego se aplica el método Predictor-Corrector de 4 pasos (explícito) y 3 pasos (implícito)

Adams-Bashforth-Moulton, usando el Runge-Kutta de orden 4 como inicializador. El método Predictor-Corrector es una alternativa interesante, ya que es el uso combinado de un método explícito junto con uno implícito. En esta estrategia, para calcular la aproximación  $w_{i+1}$  se utiliza primero un método explícito para determinar una aproximación inicial  $\hat{w}_{i+1}$ , el cual es ingresado en lugar de  $w_{i+1}$  en el lado derecho del esquema de aproximación implícito a fin de obtener la aproximación final  $w_{i+1}$ . A continuación se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos:

```
# parametros del sistema
sigma = 10
rho = 28
beta = 8/3
```

Figura 1. Valores de  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ .

Se analizan tres intervalos para valores fijos de los parámetros siguiendo la figura 1 de acuerdo al esquema (7).

```
# intervalo 0
a0 = 0.0
b0 = 25
h0 = 0.01
inicial0 = [0.1, 0.1, 0.1]
x0, y0, z0 = RK4_ecdif(a0, b0, h0, inicial0)
```

```
# intervalo 1
a1 = 25
b1 = 50
h1 = 0.01
inicial1 = [5, 5, 5]
x1, y1, z1 = RK4_ecdif(a1, b1, h1, inicial1)
```

```
# intervalo 2
a2 = 50
b2 = 100
h2 = 0.01
inicial2 = [15, 15, 15]
x2, y2, z2 = RK4_ecdif(a2, b2, h2, inicial2)
```

Figura 2. intervalo 0 al 2.

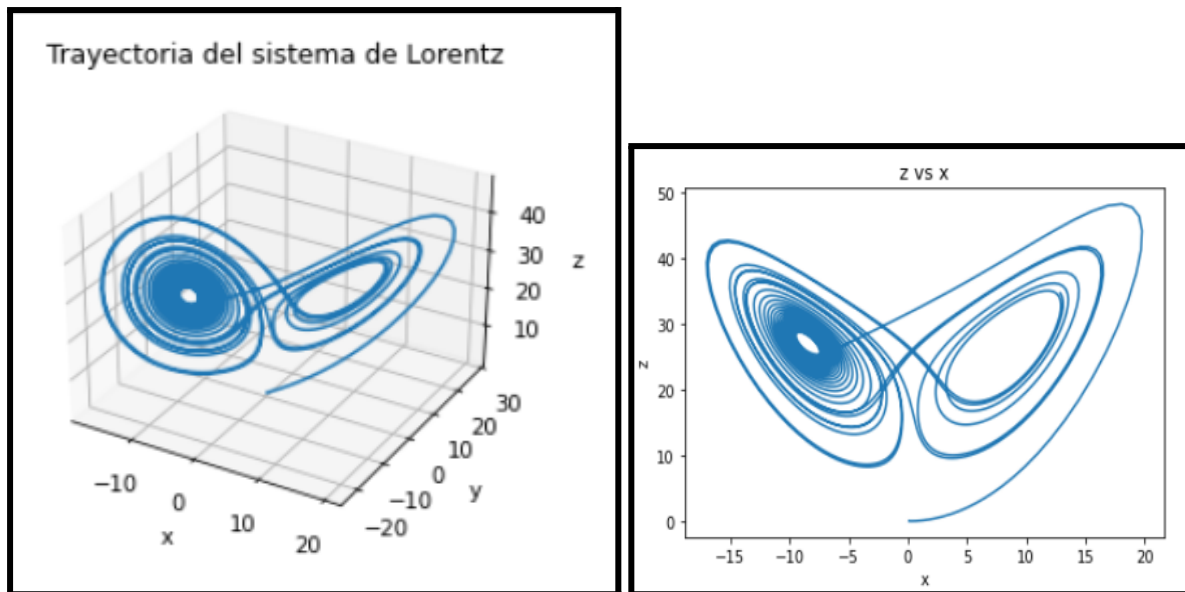


Figura 3.a. trayectorias del intervalo 0.

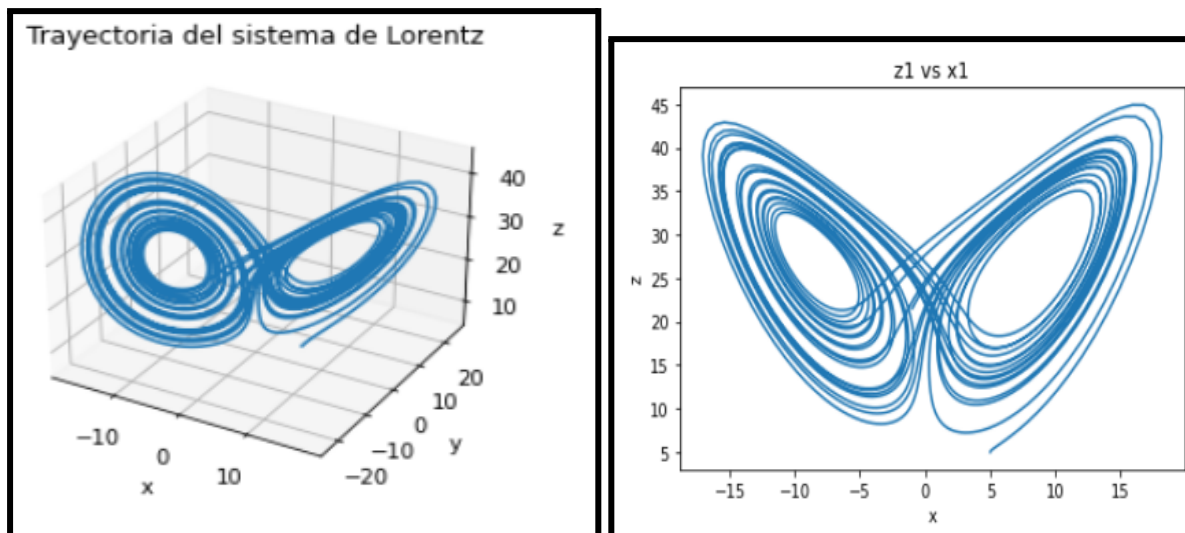


Figura 3.b. trayectorias del intervalo 1.

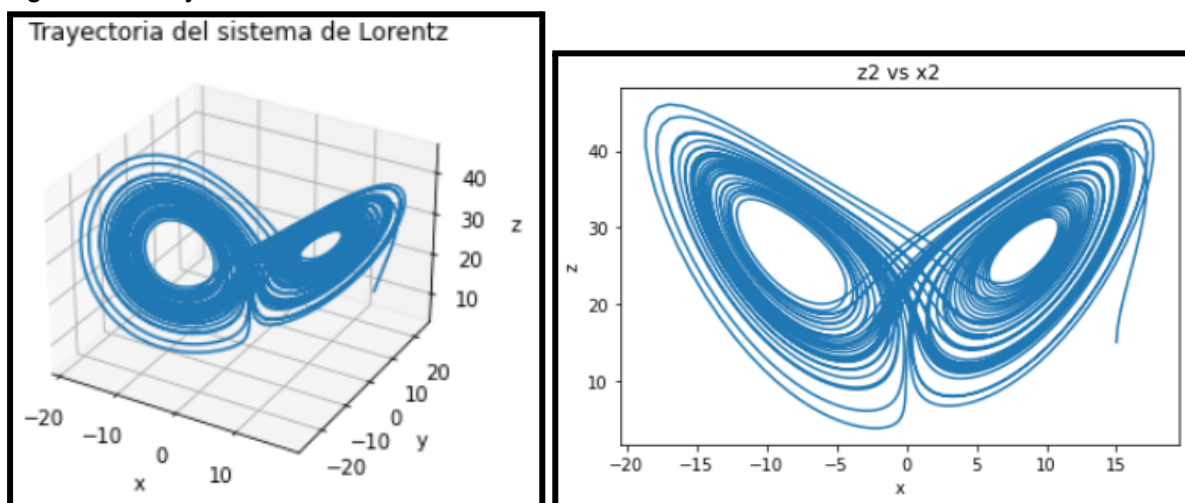


Figura 3.c. trayectorias del intervalo 2.

```
# intervalo 2, aumento de paso(h)
a2 = 50
b2 = 100
h3 = 0.1 # cambio de paso
inicial2 = [15,15,15]
x3,y3,z3 = RK4_ecdif(a2, b2, h3, inicial2)
```

Figura 4.a. aumento en el paso del

intervalo 2

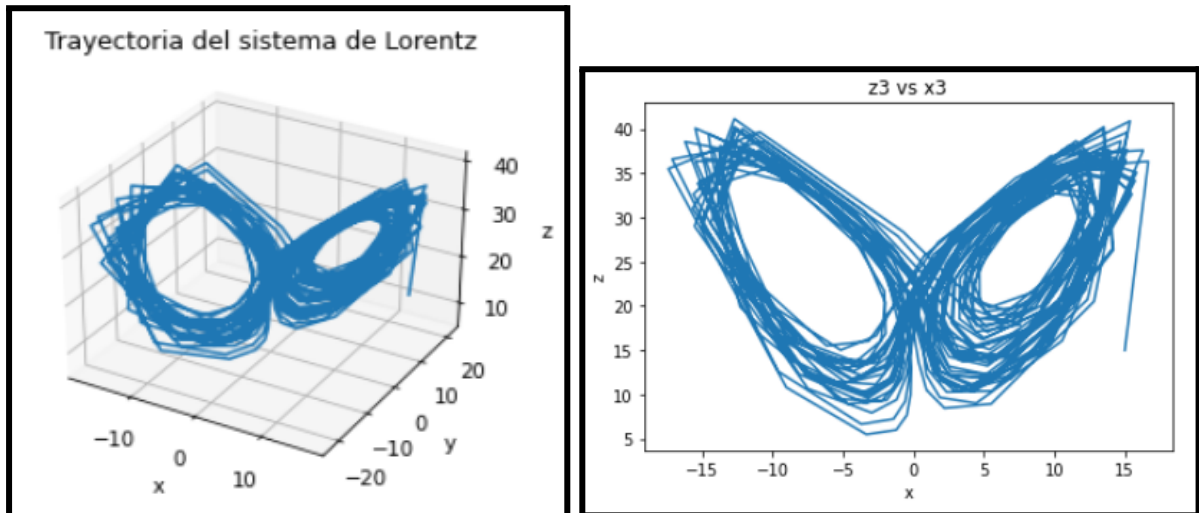


Figura 4.b. trayectoria del intervalo 2 para h mayor.

A continuación, por el método Predictor-Corrector para los mismos parámetros e intervalos de las figuras (1) y (2).

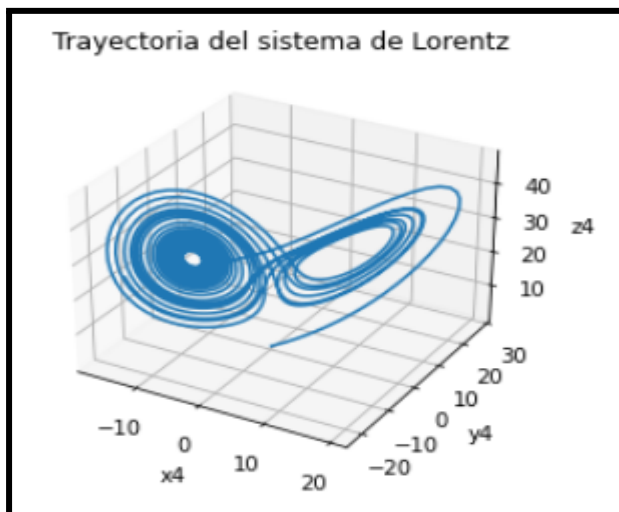


Figura 5. trayectoria para intervalo 0.

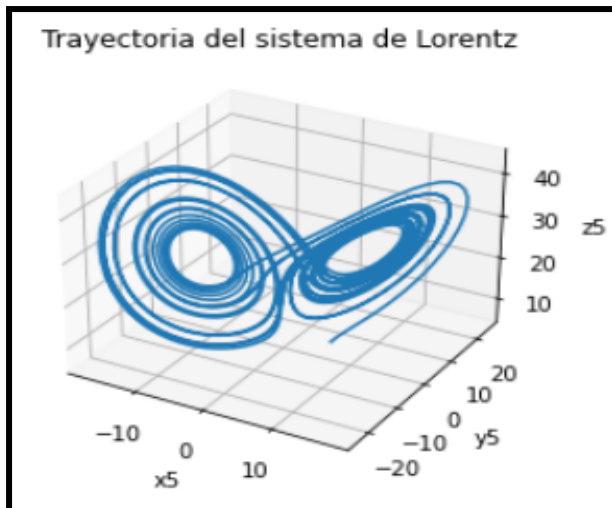


Figura 6. intervalo 1.

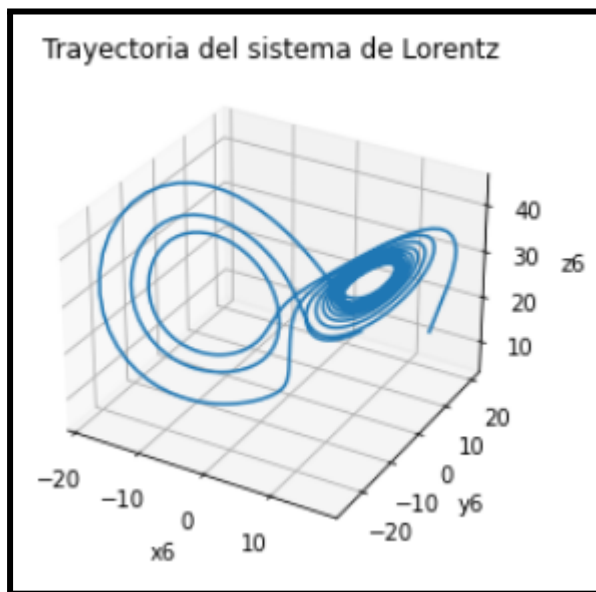


Figura 7. intervalo 2.

❖ Actividad 3:

Se considera un proyectil de masa  $m$  en movimiento plano vertical bajo la acción de la gravedad  $g$  y una fuerza de fricción opuesta a la velocidad  $v$  y proporcional a  $\|v\|^2$ . Si denotamos por  $r(t) = (x(t), y(t))$  la posición del proyectil, por  $w = (0, -mg)$  el vector de la fuerza gravitacional y  $fr = -c\|v\|^2 \hat{v}$ , con  $c > 0$ , la fuerza de resistencia, obtenemos la ecuación diferencial del movimiento mediante la 2da Ley de Newton:

$$r'' = \frac{1}{m} (w - fr), \dots\dots\dots(8)$$

ecuación diferencial de orden 2 y dimensión 2.

Para transformar la ecuación (8) a un sistema de ecuaciones diferenciales unidimensionales de primer orden, se denota por  $r' = v$ ,  $\Rightarrow v' = a$ ,  $\Rightarrow a = \frac{1}{m}(w - fr)$ .

donde  $v$ : Es la velocidad en forma vectorial, y  $a$ : Es la aceleración en forma vectorial.

Introducimos las variables auxiliares  $v(t) = (vx(t), vy(t))$  y  $a(t) = (ax(t), ay(t))$ , que representan la velocidad y la aceleración del proyectil, respectivamente. Entonces, podemos escribir:

$$x' = v_x, \dots\dots\dots(9)$$

$$y' = v_y, \dots\dots\dots(10)$$

$$v'_x = a_x,$$

$$v'_y = a_y,$$

$$v'_x = -\frac{c}{m} (||v||^2) \widehat{v}_x, \dots\dots\dots(11)$$

$$v'_y = -\frac{w}{m} - \frac{c}{m} (||v||^2) \widehat{v}_y, \dots\dots\dots(12)$$

Por lo tanto, la ecuación (8) pasa a ser el sistema formado por (9),(10),(11),(12). Dicho sistema será pasara a ser el sistema (13),

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales unidimensionales de primer orden, que podemos escribir en forma matricial como:

$z' = f(z)$ , donde  $z = (x, y, vx, vy)$  es el vector de estado y  $f(z)$  es una función vectorial que depende de  $z$ . Luego se resuelve numéricamente el sistema resultante usando el método de Runge-Kutta de orden 4. Aplicando el esquema (7) al sistema (13) cuya implementación se realiza en python, en una jupyter notebook, utilizando las librerías numpy y matplotlib para facilitar los cálculos y las gráficas, respectivamente. En primer lugar se definen los parámetros del sistema de acuerdo a la Figura 8.

```
# Definimos los parámetros del problema
m = 1 # masa del proyectil en kg
g = 9.81 # aceleración de la gravedad en m/s^2
c = 0.15 # coeficiente de fricción en kg/m
u0 = 0.0 # velocidad inicial horizontal en m/s
v0 = 300 # velocidad inicial vertical en m/s
x0 = 0 # posición inicial horizontal en m
y0 = 0 # posición inicial vertical en m
a = 0 # tiempo inicial en s
b = 10 # tiempo final en s
h = 0.01 # tamaño del paso en s
```

Figura 8. sistema proyectil.



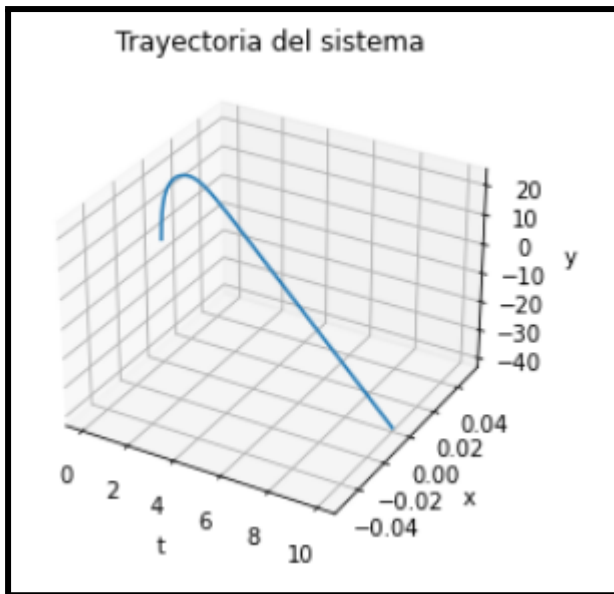


Figura 9. Trayectoria 3D descrita en función del tiempo.

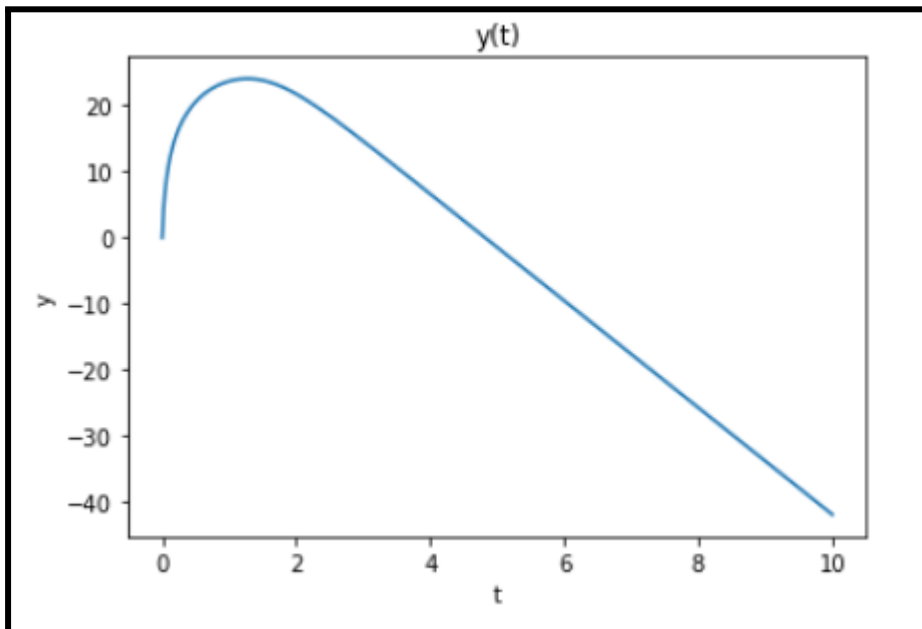
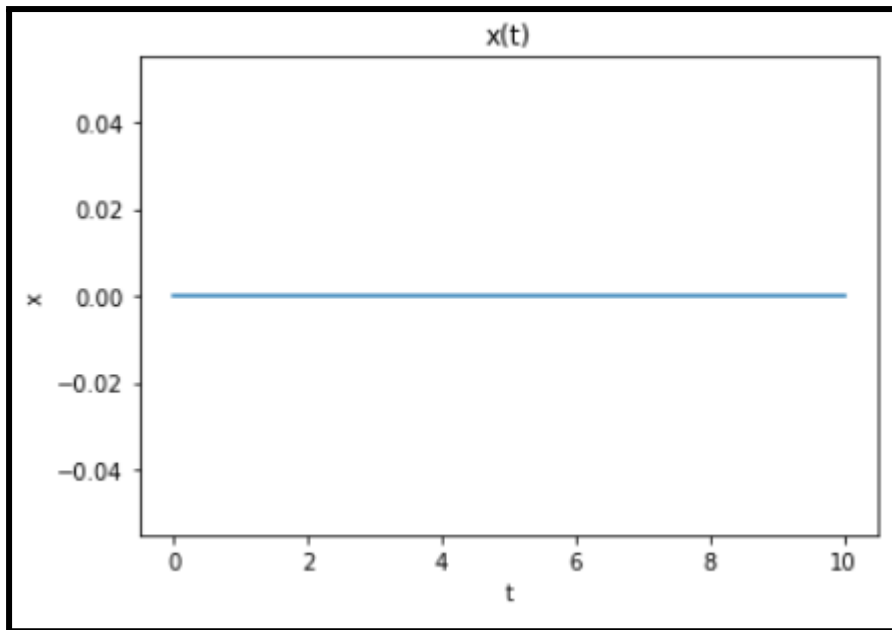


Figura 10.  $y(t)$ .

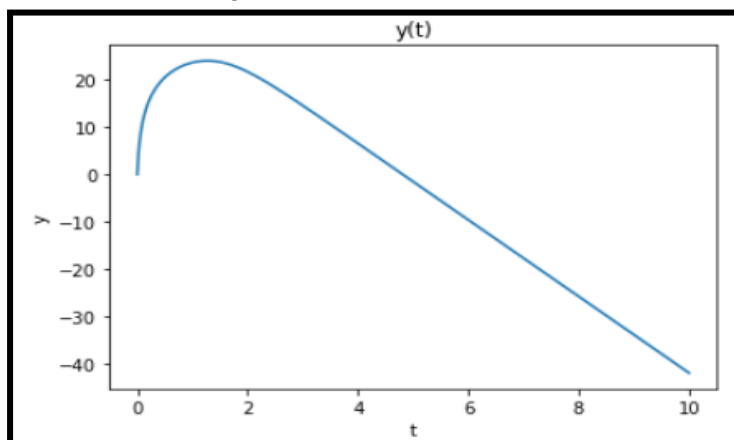
Las figuras (9) y (10) corresponden a la solución por el método de Runge-Kutta de orden 4, bajo las condiciones de la figura (8). Dichas condiciones suponen un movimiento solamente en el eje “y” de coordenadas, ya que la velocidad inicial en “x” se considera 0. por lo que la posición  $x(t)$  se mantiene constante en el tiempo en este caso, como se puede apreciar en la figura 11.

Figura 11.  $x(t)$ 

El método implícito de punto medio es otro método numérico para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se basa en la idea de aproximar el valor de la solución en el punto medio del intervalo de integración y usarlo para calcular el valor en el siguiente punto. El método implícito de punto medio tiene la ventaja de ser estable y conservar las propiedades geométricas de la solución, como la energía o el momento. Consiste en aproximar la solución  $z(t)$  en una sucesión de puntos  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , usando la siguiente fórmula recursiva:

$$z(i+1) = z(i) + h * f((z(i) + z(i+1))/2)$$

donde  $h$  es el paso temporal y  $f(z)$  es la misma función vectorial que antes. Este método al ser implícito, significa que para calcular  $z(i+1)$  debemos resolver una ecuación no lineal en cada paso. Esto hace que el método sea más difícil de implementar y más costoso computacionalmente que el método de Runge-Kutta de orden 4. Para aplicar este método al sistema anterior, debemos elegir los mismos valores iniciales que antes para  $z(0)$ ,  $h$  y  $n$ . Dicho método se aplicará en este caso como corrector al método de Runge-Kutta. Bajo las mismas condiciones iniciales de la figura (8). Se observa que las trayectorias son similares, de acuerdo a la figura 12.

Figura 12. Mid-point trayecto  $y(t)$ .

### III. CONCLUSIÓN

Los métodos predictor-corrector y Runge-Kutta son dos tipos de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Ambos métodos intentan aproximar la solución en un intervalo de tiempo usando pasos discretos. La diferencia principal es que los métodos predictor-corrector usan un valor estimado (predicho) de la solución en el siguiente paso para calcular un valor corregido, mientras que los métodos Runge-Kutta usan una combinación de valores intermedios de la solución dentro del paso para calcular el valor final. El comportamiento de estos métodos depende del tamaño del paso  $h$ , la precisión y la estabilidad. En general, se dice que los métodos predictor-corrector son más rápidos que los métodos Runge-Kutta de orden correspondiente, ambos métodos son comparables en precisión. Sin embargo, la estabilidad puede variar según el problema y el método específico. Algunos problemas pueden requerir pasos más pequeños o más grandes para evitar errores numéricos o inestabilidades. Esto se puede observar en la actividad 2, donde el paso aumento de un  $h = 0.01$  a  $h = 0.1$  produciendo un cambio considerable en las trayectorias (figura 4 en comparación con figura 3.c).

También se consiguió ampliar los métodos expuestos anteriormente a su representación para sistemas de ecuaciones, así como un cambio de variable puede reducir el orden de una ecuación diferencial. Por último se aplicó una ligera mejoría mediante el método implícito de punto medio, el cual posee entre sus ventajas, la de ser estable y conservar las propiedades geométricas de la solución, como la energía. También tiene ligeras desventajas, ya que es más difícil de implementar y más costoso computacionalmente que otros métodos.

### IV. REFERENCIAS

- Métodos Numéricos para ingenieros, séptima edición. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale. Año 2015. McGraw-Hill.
- Métodos Numéricos (Notas de Clase). Material de Inocencio Ortiz. Año 2022. Facultad de Ingeniería UNA.
- Análisis Numérico, 10 edición. Richard L. Burden, J. Douglas Faires y Annette M. Burden. Año 2017. Cengage Learning.
- github: [https://github.com/gonzalezf333/MN-Reportes/tree/Reporte\\_4](https://github.com/gonzalezf333/MN-Reportes/tree/Reporte_4).