Metodologías para la optimización de portafolios

- **Profesores**: Germán González - Andrés Galeano.
- **Sesión 1**: Introducción a las herramientas de matemática financiera y repaso de probabilidad.

Índice

Índice

Objetivos

Abarcar temas generales teóricos y prácticos de metodologías modernas de optimización de portafolios desde Markowitz hasta Black-Litterman.

Tres objetivos secundario:

- ✓ Actualización y revisión de temas relacionados: medidas de riesgo, análisis bayesiano, cópulas, comparación de distribuciones.
- ✓ Abordar ejercicios prácticos de estas teorías aplicadas a portafolios de renta fija y renta variable.
- ✓ Brindar herramientas computacionales para la construcción, gestión y optimización de portafolio.

Temario sugerido

Sesión 1: Introducción a la herramienta de matemática financiera y repaso probabilidad.
Sesión 2: Frontera Media-Varianza con dos y N activos riesgosos.
Sesión 3: Índices y centro de gravedad, optimización restringida y costos.
Sesión 4: Estimación de parámetros de media y varianza: métodos de selección de portafolios.
Sesión 5: Extensiones al modelo de media-varianza: cópulas, componentes principales, no normalidad, Frontera-media-CvaR.
Sesión 6: Modelo de Black-Litterman.
Sesión 7: AssetLiability Managament.

Motivación

- Todos los administradores de fondos (de pensión, FICs, etc.) deben tomar decisiones sobre la composición de sus portafolios de inversión.
- La toma de decisión muchas veces se basa en la intuición y el conocimiento del mercado.
- Lo anterior no está mal, pero no aprovecha las herramientas matemáticas a su disposición.

Motivación

- Algunos beneficios de modelar el mercado son:
  - Generar un mejor entendimiento de las correlaciones entre los activos invertidos.
  - Estimar o anticipar clusters de volatilidad.
  - Generar una mejor medición del riesgo.
  - Anticipar las rentabilidades de los activos.
  - Diseñar estrategias específicas para los niveles de tolerancia de los individuos.

- Miremos un caso para Renta Variable:

Introducción

- Objetivo principal:
  - Construir portafolios que maximicen la utilidad del individuo.

- Objetivos secundarios
  - Demostrar que el mercado no poseen distribuciones normales.
  - Demostrar que las asignaciones bajo la frontera Media-CVaR supera las asignaciones de la frontera Media-Varianza.

Estrategia	RetTotal	RetPromedio	StdDev	VaR 5 %	Sharpe	EC semanal	EC total
COLCAP	136.74	0.10	2.38	-2.36	0.04		
CVaR - NN - AA	200.39	0.20	2.58	-2.67	0.08	0.02	10.05
Var - NN - AA	189.83	0.19	2.58	-2.61	0.07	0.00	3.85
Var - Nor - AA	185.20	0.18	2.61	-2.65	0.07	0.00	1.20
CVaR - NN - MA	184.29	0.18	2.72	-2.93	0.07	-0.01	-4.36
Var - NN - MA	163.01	0.15	2.72	-2.95	0.06	-0.04	-15.71
Var - Nor - MA	135.32	0.11	2.68	-2.95	0.04	-0.08	-28.90
CVaR - NN - BA	172.74	0.17	2.84	-3.11	0.06	-0.04	-15.39
Var - NN - BA	158.85	0.15	2.87	-3.12	0.05	-0.06	-23.35
Var - Nor - BA	159.40	0.15	2.81	-2.93	0.05	-0.06	-20.97

Plan de la presentación

- Universo de activos y estadísticas descriptivas
- Hipótesis
- Independencia, pruebas de normalidad y Kolmogorov-Smirnov
- Fronteras eficientes bajo no-normalidad
- Resultados en asignación de portafolios
- Conclusiones

Universo de Activos

- Datos semanales de precios de cierre de todas las acciones del mercado accionario colombiano

- Se toman solo aquellas que tengan una frecuencia transaccional superior al 80% de los días hábiles.

- Al final, se tienen 23 acciones, la mayoría incluídas en el índice COLCAP

Universo de Activos

	Media (%)	Varianza (%)	Curtosis	Asimetría
BCOLO.CB.Equity	-0.04	3.19	0.76	-0.03
BOGOTA.CB.Equity	0.09	2.14	2.05	0.48
CEMARGOS.CB.Equity	0.29	3.65	1.55	0.12
NUTRESA.CB.Equity	0.07	2.54	1.98	-0.16
CELSIA.CB.Equity	-0.03	3.82	1.78	-0.07
CORFICOL.CB.Equity	0.17	2.18	1.22	-0.63
ETB.CB.Equity	0.17	3.66	3.59	-0.18
EXITO.CB.Equity	-0.16	4.51	4.09	-0.46
AVAL.CB.Equity	-0.04	2.68	2.61	-0.29
INVERARG.CB.Equity	0.09	3.86	2.92	0.32
ISA.CB.Equity	-0.08	4.01	6.13	-0.01
PFBCOLO.CB.Equity	-0.02	3.14	0.98	-0.07
BVC.CB.Equity	-0.15	3.12	1.54	-0.03
ECOPETL.CB.Equity	-0.56	4.34	1.62	-0.29
ISAGEN.CB.Equity	0.35	3.53	4.91	0.00
EEB.CB.Equity	0.26	2.77	0.84	0.27
GRUPOSUR.CB.Equity	0.14	3.37	2.57	-0.34
PFDAVVND.CB.Equity	0.12	3.44	4.88	-0.47
CNEC.CB.Equity	0.08	9.21	6.81	1.16
PREC.CB.Equity	-0.96	9.46	4.37	-0.47
PFAVAL.CB.Equity	-0.05	2.77	2.78	-0.29
PFAVTA.CB.Equity	-0.23	4.21	1.67	0.06
ICOLCAP.CB.Equity	-0.10	2.38	2.73	0.17

Cuadro 1: Primeros momentos de los retornos accionarios

Primeras impresiones:

- Las distribuciones de las acciones parecen no aproximarse adecuadamente a una normal, observando los valores de asimetría y curtosis.

Hipótesis

1. En concordancia con estudios previos, el supuesto de normalidad no debe cumplirse para los retornos accionarios en Colombia.
2. Dado lo anterior, debe existir alguna distribución paramétrica que se ajuste mejor que la normal.

H1: A nivel individual, la distribución paramétrica que mejor se ajusta a los retornos accionarios semanales a nivel individual no es la distribución normal.

3. Se espera que la independencia en las colas no permita a la cópula gaussiana ajustarse mejor que la cópula t.

H2: La cópula t provee un mejor ajuste y desempeño que la cópula gaussiana.

Hipótesis

4. Se espera que la clase de distribución que mejor se ajusta a los datos sea estable en el tiempo.

H3: A nivel individual, la clase de distribución paramétrica con mejor ajuste es estable en el tiempo.

5. Al salir del supuesto de normalidad, la frontera eficiente de Media-Varianza pierde información valiosa.

H4: La frontera de Media-CVaR genera mejores asignaciones que la frontera de Media-Varianza

Hipótesis

- En primer lugar, se desea rechazar normalidad en la mayoría de distribuciones. Se realizan tres pruebas de normalidad:
  - Shapiro-Wilk
  - Jarque-Bera
  - Anderson-Darling

Acción	J-B	A-D	S-W	¿Se rechaza normalidad?
Bancolombia	0.01	0.06	0.03	No
Banco de Bogotá	0.00	0.00	0.00	Si
Cemargos	0.00	0.00	0.00	Si
Nutresa	0.00	0.00	0.00	Si
Celsia	0.01	0.00	0.00	Si
Corficolombiana	0.00	0.00	0.00	Si
ETB	0.00	0.00	0.00	Si
Exito	0.00	0.00	0.00	Si
Grupo Aval	0.00	0.00	0.00	Si
Inverargos	0.00	0.00	0.00	Si
ISA	0.00	0.00	0.00	Si
Pref Bancolombia	0.01	0.01	0.01	Si
BVC	0.02	0.00	0.01	Si
Ecopetrol	0.00	0.00	0.00	Si
Isagen	0.00	0.00	0.00	Si
EEB	0.01	0.01	0.02	Si
Grupo Suramericana	0.00	0.00	0.00	Si
Pref Davivienda	0.00	0.00	0.00	Si
Canacol Energy	0.00	0.00	0.00	Si
Pacific Rubiales	0.00	0.00	0.00	Si
Pref Grupo Aval	0.00	0.00	0.00	Si
Pref Avianca-Taca	0.00	0.00	0.00	Si
ICOLCAP	0.00	0.00	0.00	Si

¡No normalidad únicamente en Bancolombia Ordinaria!

Kolmogorov

Acción	Norm.	Logi.	T-Stud.	Hiperb.	Mejor ajuste
BCOLO.CB.Equity	0.30	0.96	0.00	0.98	Hiperbolica
BOGOTA.CB.Equity	0.05	0.21	0.00	0.83	Hiperbolica
CEMARGOS.CB.Equity	0.16	0.67	0.00	0.96	Hiperbolica
NUTRESA.CB.Equity	0.19	0.79	0.00	0.99	Hiperbolica
CELSIA.CB.Equity	0.35	0.91	0.00	0.93	Hiperbolica
CORFICOL.CB.Equity	0.03	0.67	0.00	0.98	Hiperbolica
ETB.CB.Equity	0.05	0.19	0.00	0.52	Hiperbolica
EXITO.CB.Equity	0.23	0.62	0.00	0.97	Hiperbolica
AVAL.CB.Equity	0.13	0.32	0.00	0.43	Hiperbolica
INVERARG.CB.Equity	0.28	0.77	0.00	0.94	Hiperbolica
ISA.CB.Equity	0.04	0.52	0.00	0.92	Hiperbolica
PFBCOLO.CB.Equity	0.49	1.00	0.00	1.00	Hiperbolica
BVC.CB.Equity	0.37	0.85	0.00	0.98	Hiperbolica
ECOPETL.CB.Equity	0.19	0.76	0.00	0.78	Hiperbolica
ISAGEN.CB.Equity	0.02	0.27	0.00	0.00	Logistica
EEB.CB.Equity	0.43	0.75	0.00	0.69	Logistica
GRUPOSUR.CB.Equity	0.07	0.43	0.00	0.00	Logistica
PFDAVVND.CB.Equity	0.04	0.79	0.00	0.98	Hiperbolica
CNEC.CB.Equity	0.05	0.66	0.00	0.92	Hiperbolica
PREC.CB.Equity	0.00	0.12	0.00	0.98	Hiperbolica
PFAVAL.CB.Equity	0.06	0.32	0.00	0.00	Logistica
PFAVTA.CB.Equity	0.39	0.89	0.00	0.98	Hiperbolica
ICOLCAP.CB.Equity	0.40	0.83	0.00	0.96	Hiperbolica

Se realiza Kolmogorov con un 2-fold CV para evitar que distribuciones con más parámetros ganen por overfitting.

¡La normal nunca es la mejor distribución!

Distribución en el tiempo

- La mayoría de las acciones repiten en un alto porcentaje la mejor clase de distribución.

Acción	Num Dist	P Cambio	P Hiper	Duración	Dura Hiper
BCOLO.CB.Equity	1	0.00	0.00	31.00	31.00
BOGOTA.CB.Equity	2	0.07	0.03	7.75	15.50
CEMARGOS.CB.Equity	1	0.00	0.00	31.00	31.00
NUTRESA.CB.Equity	2	0.03	0.03	10.33	28.00
CELSIA.CB.Equity	3	0.26	0.16	2.82	7.00
CORFICOL.CB.Equity	1	0.00	0.00	31.00	31.00
ETB.CB.Equity	1	0.03	0.00	15.50	31.00
EXITO.CB.Equity	2	0.23	0.13	4.00	11.00
AVAL.CB.Equity	1	0.03	0.00	15.50	31.00
INVERARG.CB.Equity	2	0.13	0.06	5.50	15.00
ISA.CB.Equity	2	0.10	0.06	6.60	26.00
PFBCOLO.CB.Equity	1	0.00	0.00	31.00	31.00
BVC.CB.Equity	3	0.20	0.13	3.89	7.33
ECOPETL.CB.Equity	2	0.23	0.13	3.89	7.75
ISAGEN.CB.Equity	2	0.19	0.10	3.88	8.33
EEB.CB.Equity	3	0.13	0.06	4.43	18.00
GRUPOSUR.CB.Equity	1	0.00	0.00	31.00	31.00
PFDAVVND.CB.Equity	2	0.07	0.03	7.75	15.50
CNEC.CB.Equity	2	0.16	0.10	4.57	12.50
PREC.CB.Equity	2	0.10	0.06	6.20	19.00
PFAVAL.CB.Equity	2	0.19	0.10	5.25	10.00
PFAVTA.CB.Equity	2	0.03	0.03	19.67	29.00
ICOLCAP.CB.Equity	2	0.03	0.03	10.33	15.50

Frontera Eficiente

- Idealmente, se desea construir el mayor número de portafolios posibles
- Es computacionalmente complejo con 23 activos
- Se definen dos fronteras con posibles candidatos: Media-Varianza y Media-CVaR

Construcción

- Construcción de fronteras eficientes:
  - Media-Varianza:

$$\min_{w} \sigma_w \;\; s.a: \;\mu_w = e; \; e \in \mathbb{R}$$

$$\min_{w} w * \Sigma * w^T \;\; s.a: \; w * \mu = e; \; e \in \mathbb{R}$$

  - Media-CVaR:

$$\min_{x} c^T * x \; ; \; s.a: \; A * x \geq b_0;$$

Donde:

$$c^T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{(1-\alpha)*S} & \dots & \frac{-1}{(1-\alpha)*S} & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^T = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_N & d_1 & \dots & d_S \end{pmatrix}$$

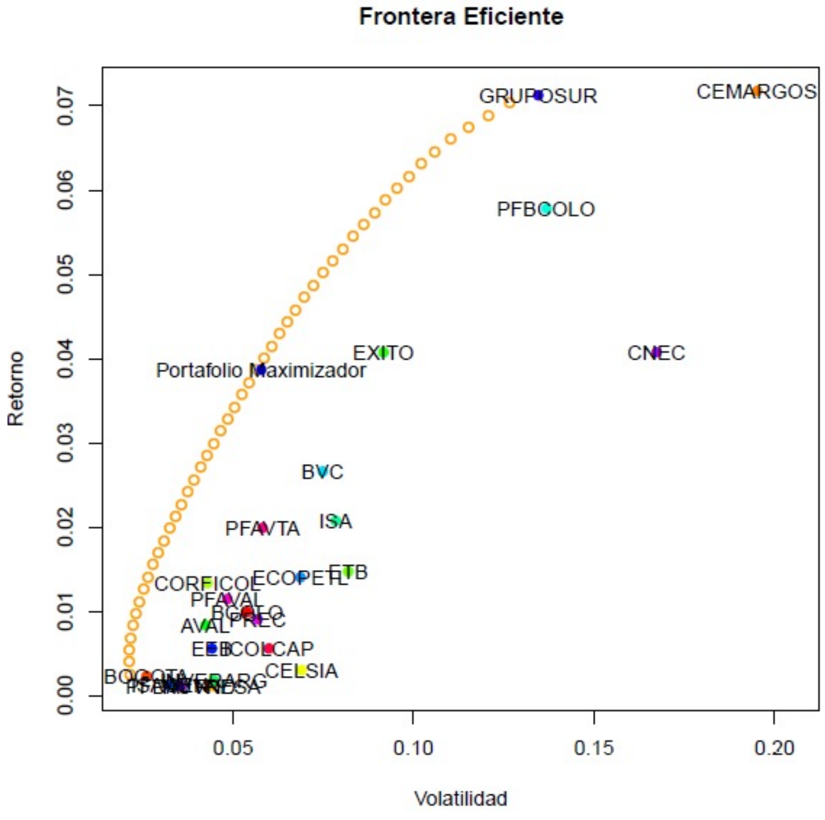
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & \dots & \mu_N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{11} & \dots & r_{1N} & 1 & 0 & \dots & 1 \\ r_{21} & \dots & r_{2N} & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ r_{S1} & \dots & r_{SN} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_{Min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

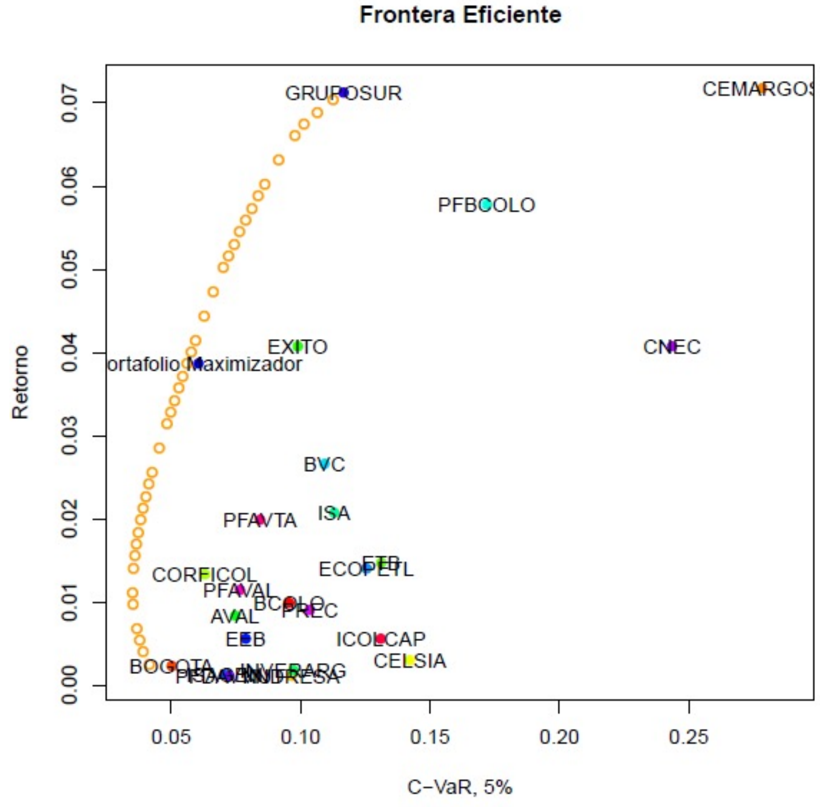
Universidad de los Andes

Resultados gráficos

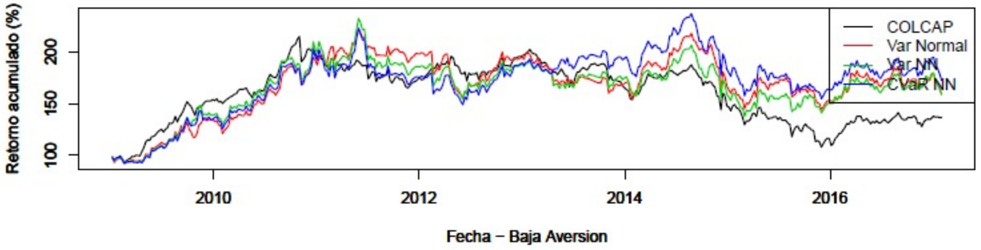
- Media-Varianza

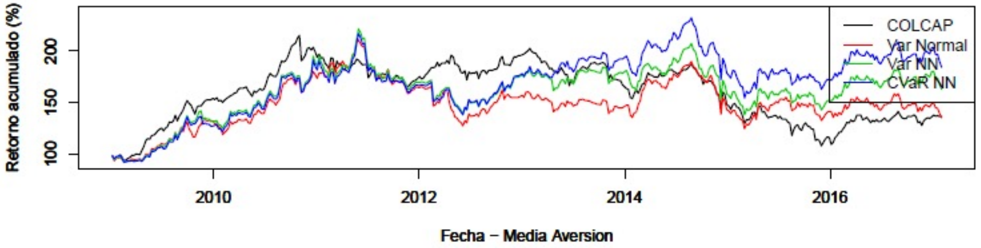


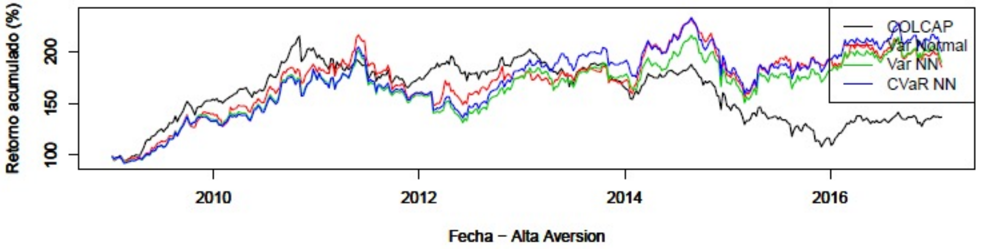
- Media-CVaR



Resultados numéricos







Estrategia	RetTotal	RetPromedio	StdDev	VaR 5 %	Sharpe	EC semanal	EC total
COLCAP	136.74	0.10	2.38	-2.36	0.04		
CVaR - NN - AA	200.39	0.20	2.58	-2.67	0.08	0.02	10.05
Var - NN - AA	189.83	0.19	2.58	-2.61	0.07	0.00	3.85
Var - Nor - AA	185.20	0.18	2.61	-2.65	0.07	0.00	1.20
CVaR - NN - MA	184.29	0.18	2.72	-2.93	0.07	-0.01	-4.36
Var - NN - MA	163.01	0.15	2.72	-2.95	0.06	-0.04	-15.71
Var - Nor - MA	135.32	0.11	2.68	-2.95	0.04	-0.08	-28.90
CVaR - NN - BA	172.74	0.17	2.84	-3.11	0.06	-0.04	-15.39
Var - NN - BA	158.85	0.15	2.87	-3.12	0.05	-0.06	-23.35
Var - Nor - BA	159.40	0.15	2.81	-2.93	0.05	-0.06	-20.97

Conclusiones

- No se cumple el supuesto de normalidad en los retornos accionarios colombianos, incluso después de controlar la volatilidad.
- Asumir normalidad pudo costar entre 2% y 3% de rentabilidad anual.
- Las distribuciones ganadoras son estables en el tiempo, duran en promedio 20 meses si es una distribución hiperbólica generalizada
- La frontera de Media-CVaR, aunque produce resultados similares, superan la asignación de portafolios de la frontera Media-Varianza.

Índice

Estadística

- Recordemos algunas propiedades importantes:
  - Propiedades muestrales:
    - Media:

$$\mu = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{T}$$

    - Varianza:

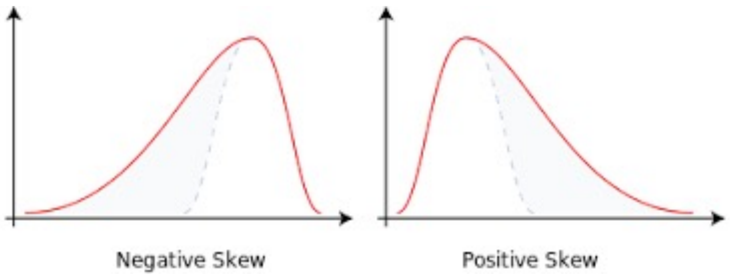
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}{T-1}$$

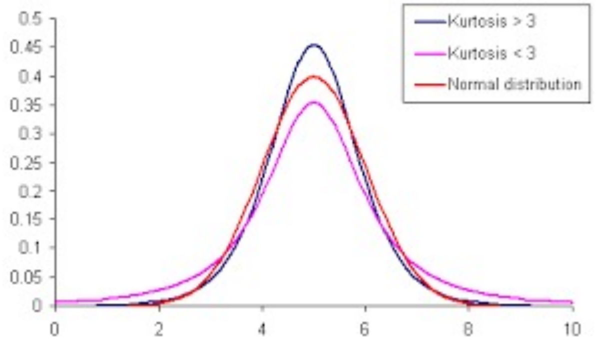
    - Asimetría

$$\frac{\sum_{i=1}^{T}\left(\frac{x_t - \bar{x}}{\sigma}\right)^3}{T}$$

    - Curtósis:

$$\frac{\sum_{i=1}^{T}\left(\frac{x_t - \bar{x}}{\sigma}\right)^4}{T}$$





Estadística

- Recordemos algunas propiedades importantes:
  - Distribuciones típicas en Finanzas:

  - Normal ($N(\mu, \sigma^2)$):
    - Media$= \mu, Std = \sqrt{\sigma^2}$
    - $Skewness = 0, Curtosis: 3$

  - Logística ((μ, s)):
    - Media$= \mu, Std = \frac{s*\pi}{3}$
    - $Skewness = 0, Curtosis: 3 + \frac{6}{5}$

T-student ($N(\mu, \nu)$):

- Media$= 0, Std = \frac{\nu}{\nu - 2}$
- $Skewness = 0, Curtosis: 3$

Hiperbólica generalizada ($(\lambda, \alpha, \beta, \delta)$):

- $Media = \mu + \frac{\delta\beta K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{\gamma K_\lambda(\delta\gamma)}$
- $Std = \frac{\delta K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{\gamma K_\lambda(\delta\gamma)} + \frac{\beta^2\delta^2}{\gamma^2}\left(\frac{K_{\lambda+2}(\delta\gamma)}{K_\lambda(\delta\gamma)} - \frac{K^2_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{K^2_\lambda(\delta\gamma)}\right)$

Estadística

- ¿Cómo se escoge la mejor distribución?
  - Alguna métricas estándar:

1. Testear normalidad
   - Test de Jarque-Bera
     - $JB = \frac{n}{6} * \left(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2\right)$

True α level	20	30	50	70	100
0.1	0.307	0.252	0.201	0.183	0.1560
0.05	0.1461	0.109	0.079	0.067	0.062
0.025	0.051	0.0303	0.020	0.016	0.0168
0.01	0.0064	0.0033	0.0015	0.0012	0.002

- Test de Shapiro Wilk
  - $W = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(a_i * x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2)}$
  - $a = \frac{m^T * V^{-1}}{C}, C = m^T * V^{-1} * V^{-1} * m^T$
  - m^T son los valores esperados de la distribución en cada orden.
  - V es la matriz de varianza-covarianza de los ordenes.

Estadística

- ¿Cómo se escoge la mejor distribución?

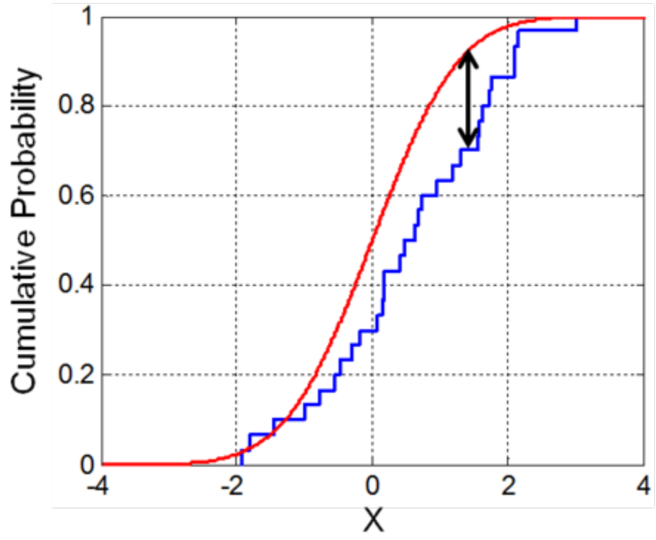
  - Kolmogorov-Smirnoff: la que más usaremos
    - La definición formal es:
    - Sea F_n la distribución empírica, tal que:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{[-\infty,x]}(X_i)$$

    - Para una distribución dada $F(x)$, el indicador de K-S es:

$$D_n = \sup(F_n(x) - F(x))$$

$$\mathrm{P}(D_n < x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{8x^2}}$$



Estadística

- Hasta ahora, hemos visto como se comporta cada serie por separado. Miremos propiedades de la distribución conjunta.

- Recordemos:
  - Covarianza:

$$Cov(x,y) = E\left(\left(X - E(X)\right) * \left(Y - E(Y)\right)\right)$$

$$Cov(x,y) = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})$$

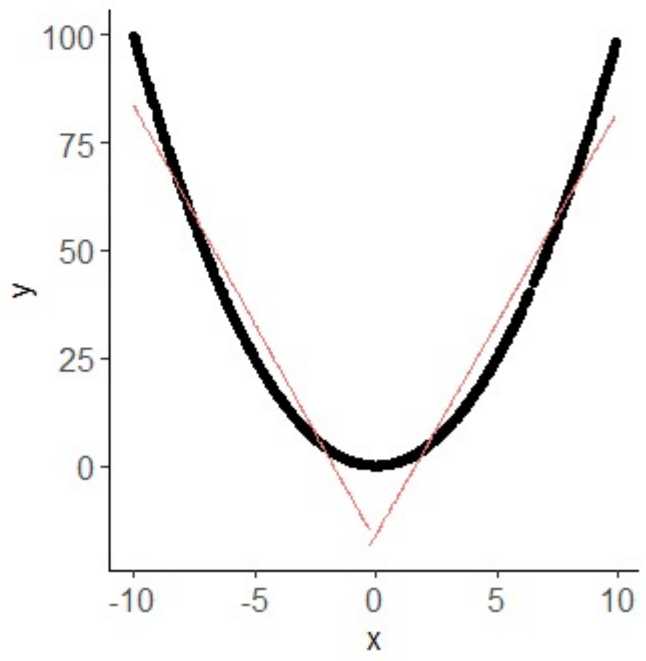
  - Correlación de Pearson:

$$\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Estadística

- ¿Qué problemas puede haber con el coeficientes de correlación de Pearson?
  - Es un coeficiente de correlación lineal:
    - Supongamos que: $y = x^2$ $\rightarrow$ la relación es evidente pero:
    - $\rho \approx 0.$
- ¿Cómo podemos solucionar este problema?
  - Probar otros métodos de correlación (aunque no lo solucionan del todo): Kendall o Spearman.
  - Probar un método no lineal: Estimar la correlación global por un promedio de correlaciones locales.

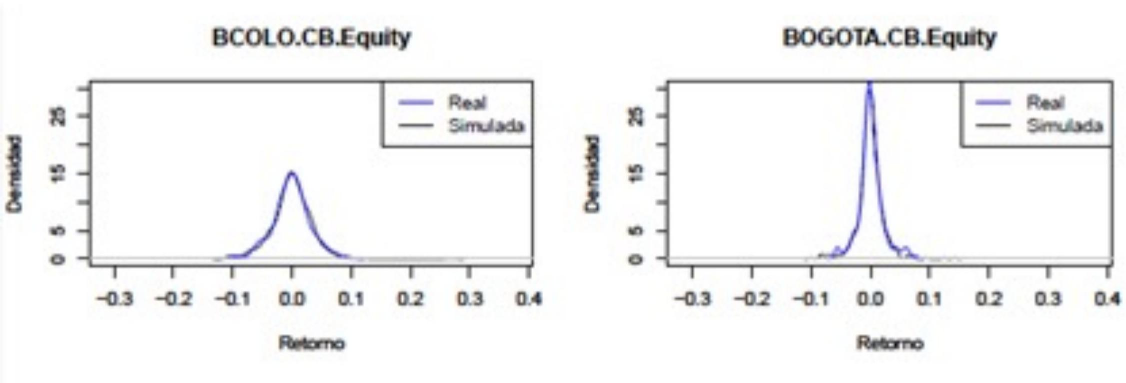
```
> cor(x,y,method = "pearson")
[1] -0.01831755
> cor(x,y,method = "kendall")
[1] -0.02197397
> cor(x,y,method = "pearson")
[1] -0.01831755
> nlcor(x,y,plt = T)$cor.estimate
[1] 0.9959783
```



Estadística

- ¿Qué alternativas hay para modelar el mercado?
  - ¡Cópulas!
  - ¿Qué son?

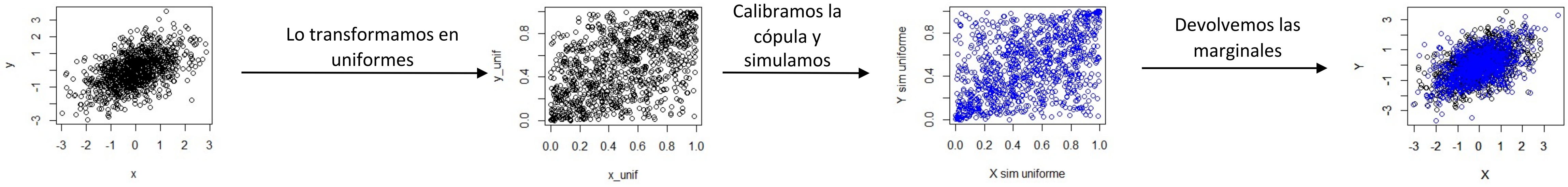
  - Imaginemos que tenemos dos distribuciones (no necesariamente el mismo tipo de distribución).



Estadística

- Una cópula me permite separar los comportamientos individuales de los comportamientos conjuntos.

- Por un lado, voy a organizar todos mis retornos de manera ascendente y luego voy a calcular la probabilidad acumulada (¿recuerdan $F_n(x)$?).
- Una vez hecho esto, voy a reescribir mis datos por $F_n(x)$ y $F_n(y)$.
- Ahora, voy ver como se comportan conjuntamente, calibrar y simular.



Ejercicio 1

Gráficar distribuciones sacar percentiles, media, varianza, Asimetria y kurtosis.

Ejercicio 2

Kolmogorov-Smirnoff: Distribución de los retornos de 10 acciones.

Ejercicio 2

```r
###------  Simples ------ ##
Retornos_simples = function(Valores){
  ### ------ Retorno simple (Pt-Pt-1)/(Pt-1) ----- #####
  Resultado= diff(Valores)/Valores[-length(Valores)]
  return(Resultado)
}

###------  Simples ------ ##
Retornos_log = function(Valores){
  ###
  ### ------ Retorno simple (Pt-Pt-1)/(Pt-1) ----- #####
  Resultado= log(Valores[-1]/Valores[-length(Valores)])
  return(Resultado)
}

### ---------- Retornos simples ---------- ###
```

Índice

Regla de Bayes

Recordemos la regla de Bayes (nos será muy útil más adelante):

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

La regla de Bayes nos permitirá, más adelante, combinar distribuciones.

- Dado un View que tengo del mercado y una distribución estadística, como puedo combinar ambas para generar una distribución que incorpore el View y dicha distribución.

- Miremos algunos ejemplos de la regla de Bayes.

Regla de Bayes

Ejemplo 1: Paradoja de la caja de Bertrand

Supongamos que tenemos 3 cajas:

Hacemos una prueba y sacamos una moneda de oro.

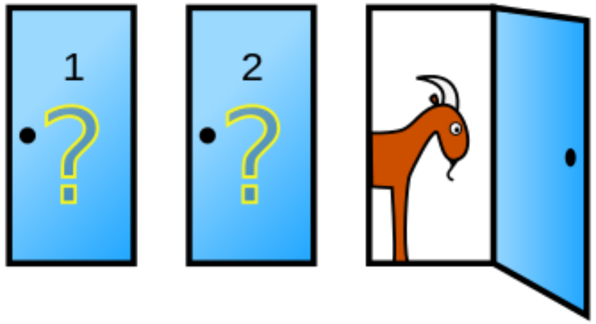
La pregunta es: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una moneda de oro?

$$P(OO|oro) = \frac{P(oro|OO) * P(OO)}{P(oro)} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Regla de Bayes

Ejemplo 1: Problema de Monty Hall

Supongamos que tenemos 3 cajas: en dos hay una cabra y otra un carro último modelo.



Escogemos una puerta y el presentador elimina una de las otras dos puertas. Nos pregunta si queremos cambiar. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si me cambio? ¿Cuál es si me quedo? Por simplicidad supongamos que yo escogí la puerta 1 y que el presentador abrió la puerta 3.

$$P(C_2|H_3,X_1) = \frac{P(H_3|C_2,X_1) * P(C_2,X_1)}{P(H_3,X_1)} = \frac{1 * P(C_2) * P(X_1)}{P(H_3|X_1) * P(X_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Índice

Retornos

En este curso las variables de análisis: retornos de los activos.

Retornos Aritméticos

$$r_{i,t} = \frac{r_{i,t} - r_{i,t.1}}{r_{i,t-1}}$$

Retornos Logarítmicos

$$r_{i,t} = \log(\frac{r_{i,t}}{r_{i,t-1}})$$

- Retornos iid?
- Se reconoce la incertidumbre inherente en los rendimientos futuros de distintos mercados riesgos al invertir capital en los mercados
- Medición del riesgo: capturar nivel de dispersión

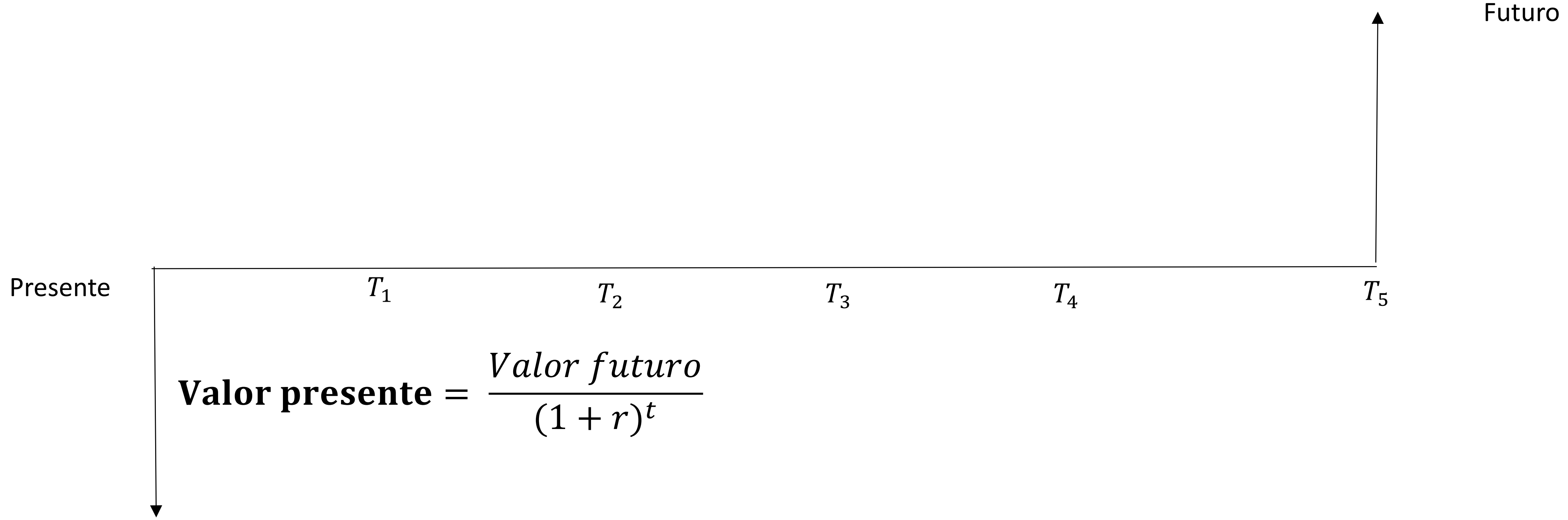
Tasa de interés nominal

Tasa de interés nominal: Tasa que se obtiene al final de un periodo sin que los rendimientos generados en cada periodo sean reinvertidos.

Tasa de interés efectiva: Tasa que se obtiene al final de un periodo reinvirtiendo los rendimientos generados en cada periodo.

Valor presente – Valor futuro

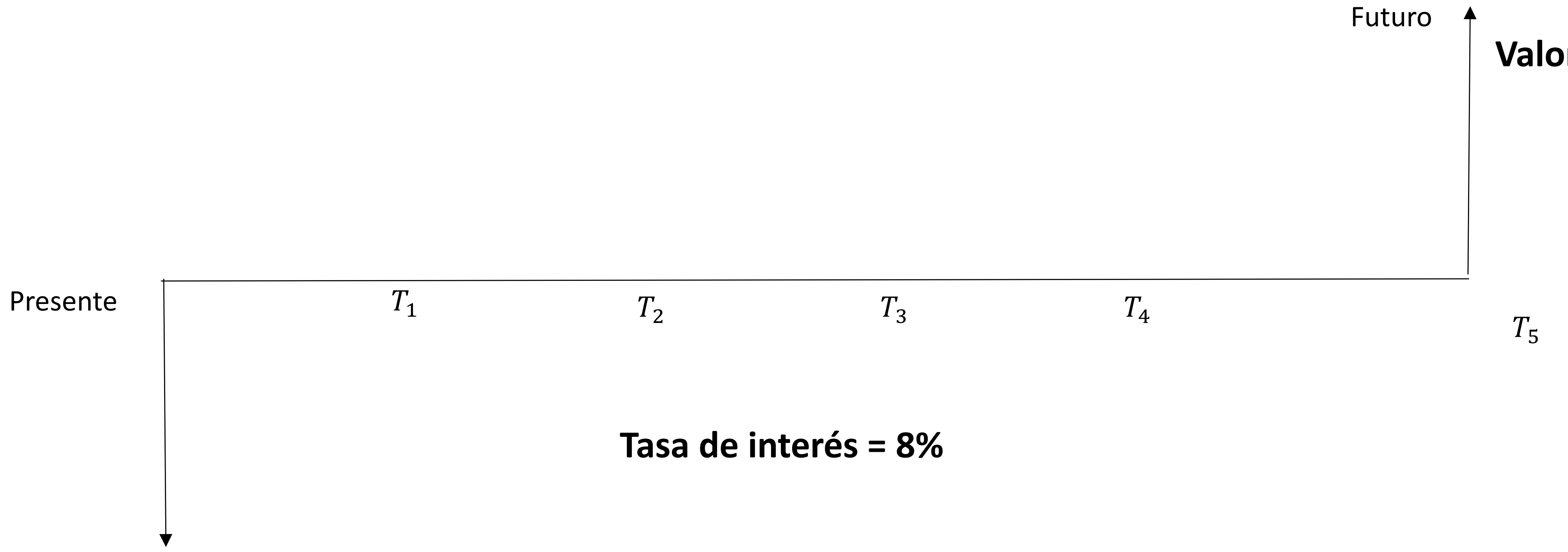
$$\textbf{Valor Futuro} = Valor\ Presente * (1+r)^t$$



$$\textbf{Valor presente} = \frac{Valor\ futuro}{(1+r)^t}$$

Ejemplo 1

$$\textbf{Valor Futuro} = 34{,}000{,}000 * (1 + 0.08)^{t}$$



Valor futuro = 49,957,155

Tasa de interés = 8%

$\textbf{Valor presente} = 34{,}000{,}000$

Ejemplo 2

Un inversionista extranjero esta interesado en invertir en Colombia y quiere comprar la Quinta de Bolívar en Bogotá. Si se estima que la casa puede venderse dentro de un año en $ 4,950 MM con una tasa de retorno del 10% ¿Cuál debe ser el precio actual de la Quinta de Bolívar?

$$Valor\ futuro = valor\ acual(1 + r)$$

$$valor\ presente = \frac{4.950.000}{1 + 0.10} = \frac{4.950.000}{1.10} = 4.500.000$$

El precio actual de la casa Quinta de Bolívar debe ser de $4.500.000

Ejemplo 2:

Si el inversionista extranjero puede invertir también su dinero en bonos del gobierno colombiano, donde cada $ 10 invertidos hoy le devuelven $ 11.1 el año entrante ¿Qué recomendación le haría usted con respecto a su mejor inversión? ¿Cómo sería su respuesta si el gobierno solo paga $ 11 por cada $ 10 invertidos?

La tasa de retorno de los bonos del gobierno es:

$$r = \frac{valor\ futuro}{valor\ actual} - 1$$

$$r = \frac{11.1}{10} - 1 = 0.11$$

$$r = 11\%$$

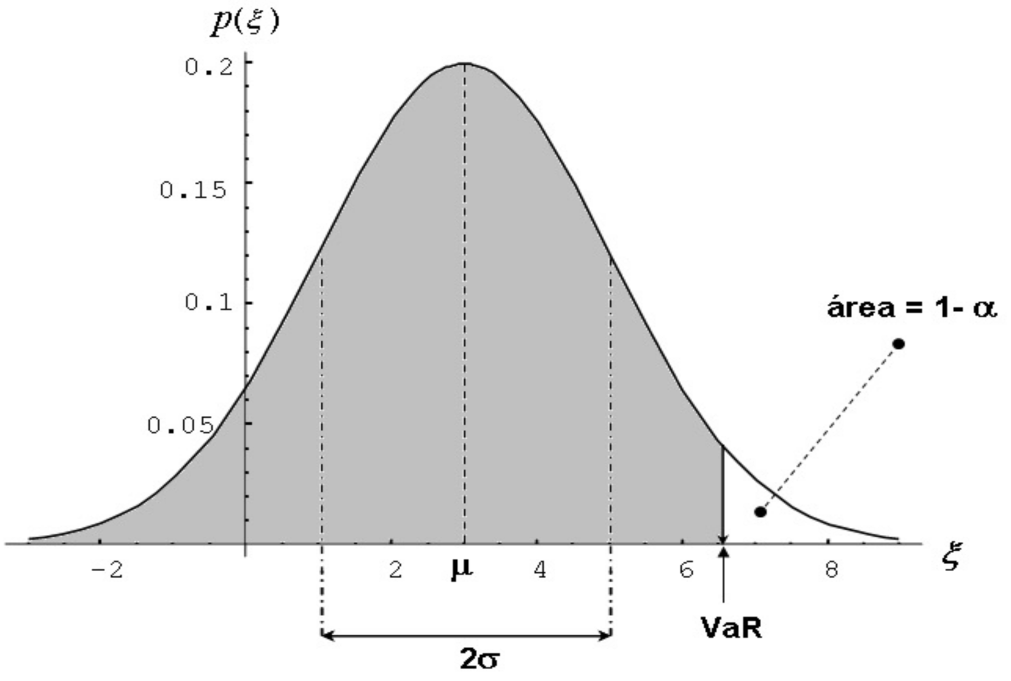
Por lo tanto los bonos del gobierno tienen un mayor retorno que la casa Quinta Bolívar y es mas rentable invertir en estos.

Índice

- Introducción al curso
- Repaso de probabilidad
- Regla de Bayes
- Repaso matemáticas financieras
- Medidas de riesgo

Valor en Riesgo (VaR)

- **VaR** es el percentil de la distribución de probabilidad al término del horizonte de gestión, en T + h; distribución que hoy (en T) desconocemos.
- **El VaR** corresponde a la máxima pérdida posible en el $\alpha \times 100\%$ de los mejores escenarios, o de forma equivalente a la mínima pérdida posible en el $(1 - \alpha) \times 100\%$ de las pérdidas más grandes.
- **Objetivo**: El administrador de riesgo tiene la idea de que la pérdida en su inversión no excederá el **VaR** con probabilidad α.

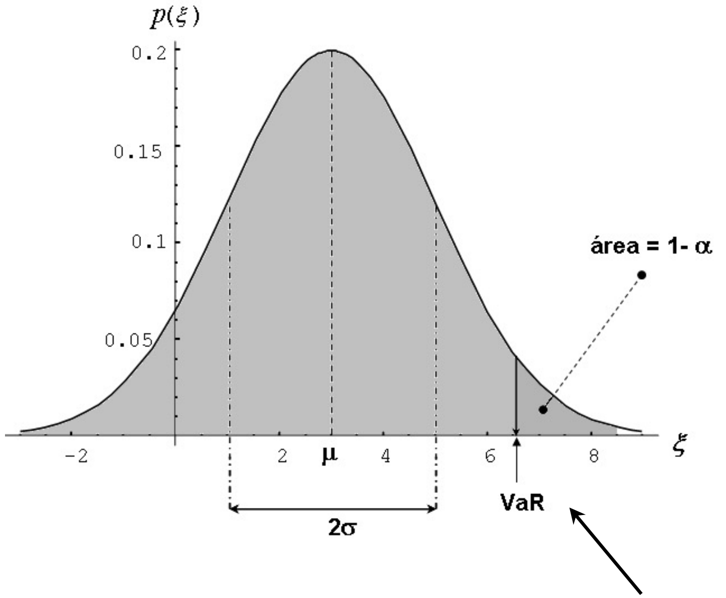


VaR condicional (CVaR)

CVaR: **promedio de las pérdidas que superan el VaR.**

$$ES_{\alpha}(X) = E\left[X \mid X \geq VaR_{\alpha}(X)\right]$$

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_{\beta}(X)\,d\beta$$



- Si L ~ N(μ,σ),

$$ES_{\alpha}(L) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

donde Φ es la distribución (acumulada) de una variable normal estándar, y ϕ es su densidad

- ES sí es coherente
- Claramente, $ES_{\alpha}(L) \geq VaR_{\alpha}(L)$

Interpretación: Valor en Riesgo (VaR)

El analista de la empresa ACME calculo un VaR al 5% a un mes. Encontró que VaR al 5% a un mes es de 10 millones de pesos. ¿Cuál es la interpretación de este valor?

Resultado: Significa que existe un 5% de probabilidad de perder en un mes 10 millones de pesos, y un 95% de que la perdida sea menor a 10 millones. Es decir que 5 de cada 100 meses va a perder al menos 10 millones de pesos (1 de cada 20 meses va perder al menos 10 millones de pesos).

Metodología

- Histórica (no paramétrica):
  - Distribución de pérdidas
- Simulación (paramétrica):
  - Normal: $\mathbf{L_t} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)\ \ (\boldsymbol{i.i.d})$
  - ARMA
  - Volatilidad:
    - EWMA
    - Garch

Ejercicio 3: Calculo VaR Histórico

¿Qué se necesita?

- Portafolio de inversión.
- Precios observados. (Diarios)
- Fecha de valoración.
- Nivel de confianza.
- Número de días de historia que se quieren usar para calcular el VaR.

Ejercicio 3: Calculo VaR Histórico

Utilizando el siguiente portafolio:

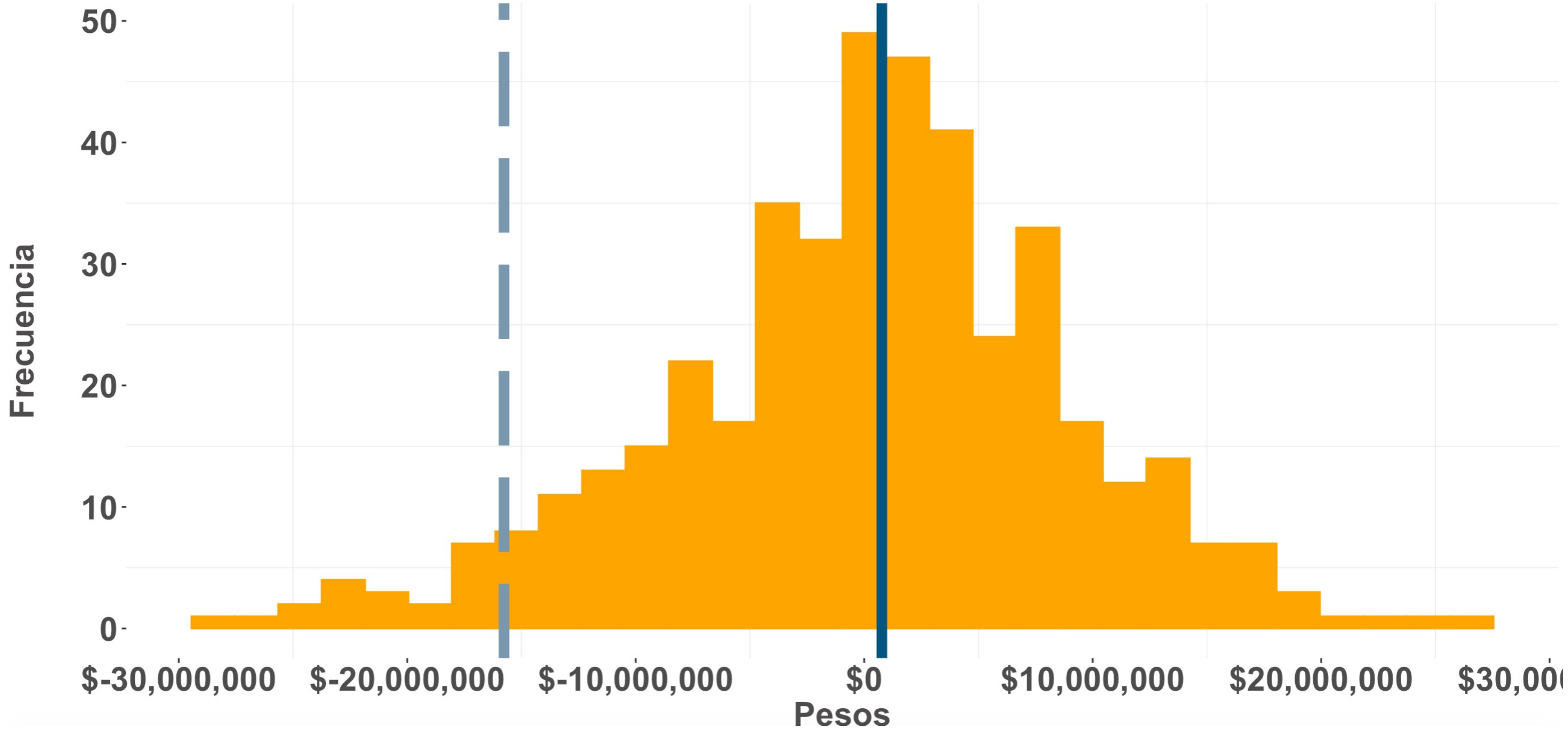
Empresa	Acciones
Bancolombia	10000
Celsia	5000
Cemargos	5000
Cemex	3000
Corficol	3000
Exito	10000
Grupo Argos	3000
Avianca	4000
Ecopetrol	20000
Nutresa	6000

Encuentre el VaR histórico a un día para las 10 acciones del portafolio. Utilice como fecha de análisis el 9 de octubre del 2019. Utilice un nivel de significancia $\alpha = 5\%$.

Mapa de ruta – VaR portafolio

- **Paso 1**: Cargar precios históricos de las acciones. (Historia.xlsx)
- **Paso 2:** Cargar portafolio de acciones (Portafolio.xlsx)
- **Paso 3:** Valor portafolio → Histórico Precios x Nocional de cada acción
- **Paso 4**: Sumar sobre las filas para obtener el valor total de portafolio en cada periodo.
- **Paso 5:** Distribución de los retornos sobre el valor total del portafolio.
- **Paso 5:** Calcular Var 5% porcentual: percentil → distribución histórica de cada acción.
- **Paso 6:** Calcular Var 5% niveles.

Resultados - Portafolio



VaR Total Acciones (Individual): -25,034,107

VaR Portafolio: -15,766,057

Gracias

Universidad de los Andes