

Metodologías para la optimización de portafolios

- Profesores: Germán González - Andrés Galeano.
- Sesión 6: Black-Litterman & Trading algorítmico

Índice

Regla de Bayes

Modelo B&L bajo normalidad

Modelo B&L bajo no-normal

Estudio 1: Tesis German González

Trading algorítmico

Índice

Regla de Bayes

Modelo B&L bajo normalidad

Modelo B&L bajo no-normal

Estudio 1: Tesis German González

Trading algorítmico

Regla de Bayes

Recordemos la regla de Bayes (nos será muy útil más adelante):

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

La regla de Bayes nos permitirá, más adelante, combinar distribuciones.

- Dado un View que tengo del mercado y una distribución estadística, como puedo combinar ambas para generar una distribución que incorpore el View y dicha distribución.
- Miremos algunos ejemplos de la regla de Bayes.

Regla de Bayes

Ejemplo 1: Paradoja de la caja de Bertrand

Supongamos que tenemos 3 cajas:



Hacemos una prueba y sacamos una moneda de oro.

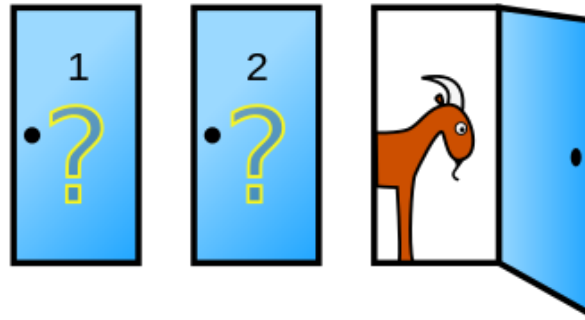
La pregunta es: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una moneda de oro?

$$P(OO|oro) = \frac{P(oro|OO) * P(OO)}{P(oro)} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Regla de Bayes

Ejemplo 1: Problema de Monty Hall

Supongamos que tenemos 3 cajas: en dos hay una cabra y otra un carro último modelo.



Escogemos una puerta y el presentador elimina una de las otras dos puertas. Nos pregunta si queremos cambiar. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si me cambio? ¿Cuál es si me quedo? Por simplicidad supongamos que yo escogí la puerta 1 y que el presentador abrió la puerta 3.

$$P(C_2|H_3, X_1) = \frac{P(H_3|C_2, X_1) * P(C_2, X_1)}{P(H_3, X_1)} = \frac{1 * P(C_2) * P(X_1)}{P(H_3|X_1) * P(X_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Índice

Regla de Bayes

Modelo B&L bajo normalidad

Modelo B&L bajo no-normal

Estudio 1: Tesis German González

Trading algorítmico

Modelo B&L

- Las acciones del S&P 500 se distribuyen normal multivariada
- Modelos estadísticos para calcular el retorno esperado
 - Ej: Retornos históricos
- Ideas adicionales sobre los retornos de algunas acciones: Apple recién lanzó el iPhone 11 y se espera un éxito rotundo en ventas.
- ¿Cómo combina sus percepciones con la estadística?

Modelo B&L

- Objetivo: Estimar los factores de mercado (μ, Σ)
- Se basa en la regla de Bayes:
 - $$P(\mu|v) = \frac{(P(\mu)*P(v|\mu))}{P(v)} = \frac{\frac{(P(\mu)*P(\mu,v))}{P(\mu)}}{P(v)} = \frac{P(\mu,v)}{P(v)}$$
$$\rightarrow P_{(\mu|v)}(\mu) = \frac{P_{\mu,v}(\mu, v)}{P_V(v)}$$
- Los activos del mercado (acciones) se denominarán X , t.q. $X \sim N(\pi, \Sigma)$

Modelo B&L

- No conocemos la distribución «verdadera» de μ . Asumiremos: $\mu \sim N(\pi, \tau \Sigma)$
- Meucci (2010) sugiere asignar $\tau = \frac{1}{T}$ pero hay otras formas. $\tau \in (0,1)$
- Views:
 - Se tienen views sobre algunos activos, no necesariamente todos. Matriz Pick...
 $\rightarrow P * \mu \sim N(v, \Omega)$

Modelo B&L

- Empecemos desde cero:
- Consideremos dos activos pero consideremos que tenemos únicamente el siguiente view:
 - El retorno del primer activo será 0%.
 - El retorno del segundo activo será 5%.
- Algebraicamente, se puede reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned}r_1 &= 0 \\r_2 &= 0.05\end{aligned}$$

Modelo B&L

- Así, matricialmente se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es lo que llamaremos la matriz Pick.

Modelo B&L

- Confianza: Representa la confianza que se tiene en el view. Va de 0 a infinito. Esto determina la desviación del mu del view (Ω).
- Meucci (2005) recomienda:

$$\Omega = \frac{1}{c} * P * \Sigma * t(P)$$

Modelo B&L

➤ Posterior: Usando la regla de Bayes se llega a:

$$\mu|(\nu, \Omega) \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL})$$

Con:

$$\begin{aligned}\Sigma_{BL}^{\mu} &= \left((\tau * \Sigma)^{-1} + t(P) * \Omega^{-1} * P \right)^{-1} \\ \mu_{BL} &= \left((\tau * \Sigma)^{-1} + t(P) * \Omega^{-1} * P \right)^{-1} * \left((\tau * \Sigma)^{-1} * \pi + t(P) * \Omega^{-1} * \nu \right) \\ \mu_{BL} &= \Sigma_{BL}^{\mu} * \left((\tau * \Sigma)^{-1} * \pi + t(P) * \Omega^{-1} * \nu \right)\end{aligned}$$

Modelo B&L

➤ Ya sabemos la distribución de μ . Pero y la de los activos?

$$X \stackrel{d}{\rightarrow} \mu + Z ; Z \sim N(0, \Sigma)$$

$$X|(v, \Omega) \stackrel{d}{\rightarrow} \mu|(v, \Omega) + Z$$

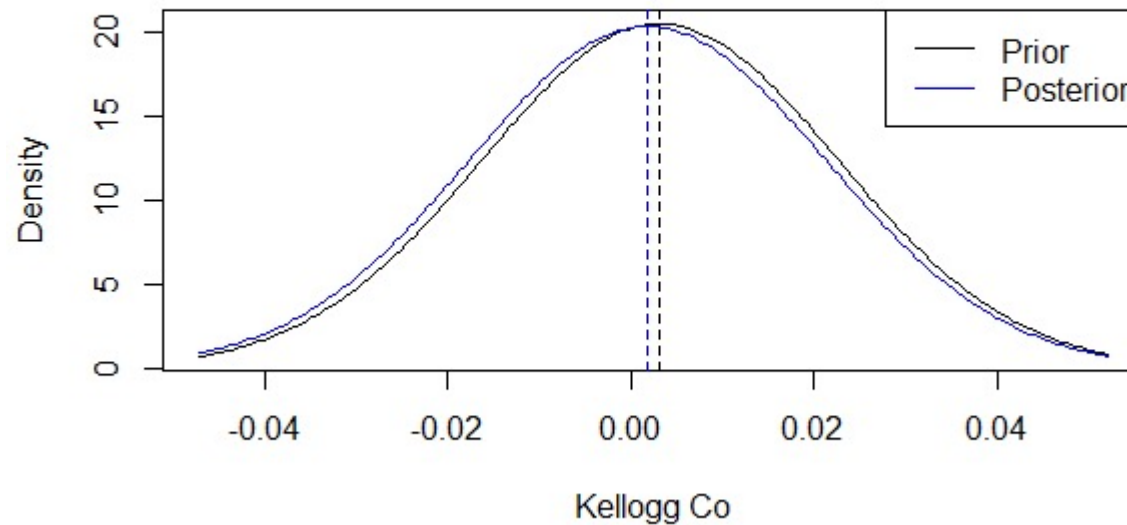
$$\begin{aligned} \text{Var}(X|(v, \Omega)) &= \text{Var}(\mu|(v, \Omega)) + \text{Var}(Z) + 2 * \text{Cov}(\mu|(v, \Omega)) \\ &= \text{Var}(\mu|(v, \Omega)) + \text{Var}(Z) = \Sigma_{BL}^{\mu} + \Sigma \end{aligned}$$

$$\mu = \mu|(v, \Omega) = \mu_{BL}$$

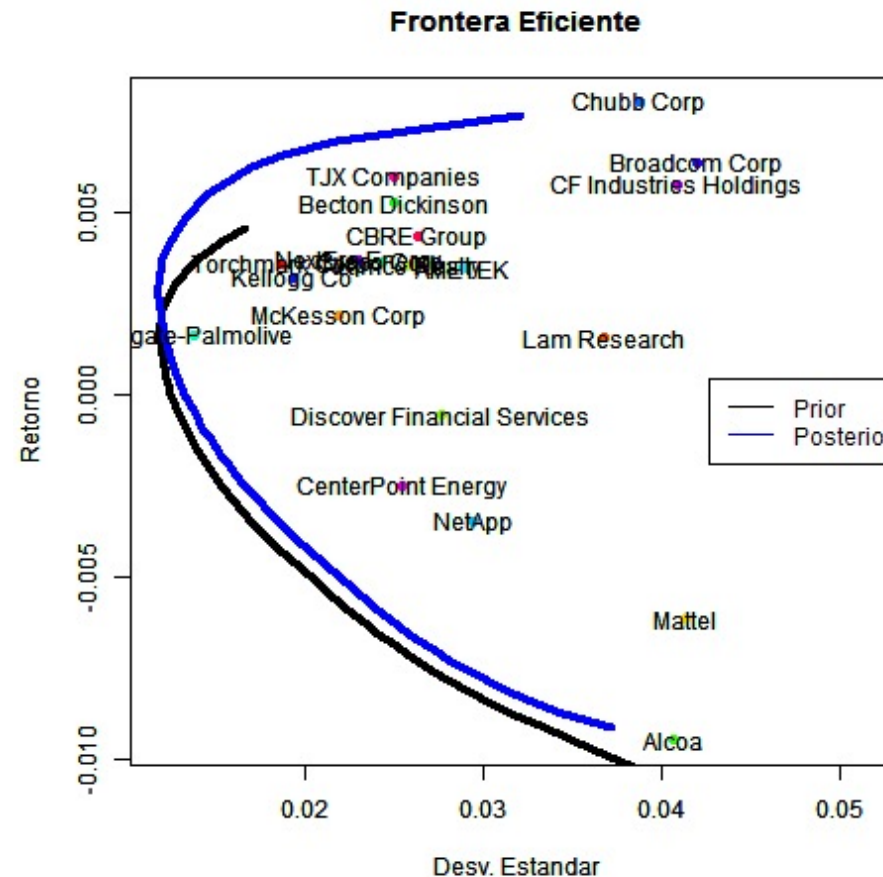
Modelo B&L

- 20 acciones del S&P 500
- 4.65 años de historia (2011-01-01 – hoy)
- Views:
 - Kellogg's va a retornar 200% durante el periodo
 - Mattel va a crecer 100% más que Sysco durante el periodo
 - El sector financiero tendrá un desempeño negativo de -15% durante el periodo
 - Desviación del view: 0.001 (confianza alta)

Último dato de Kellogg's

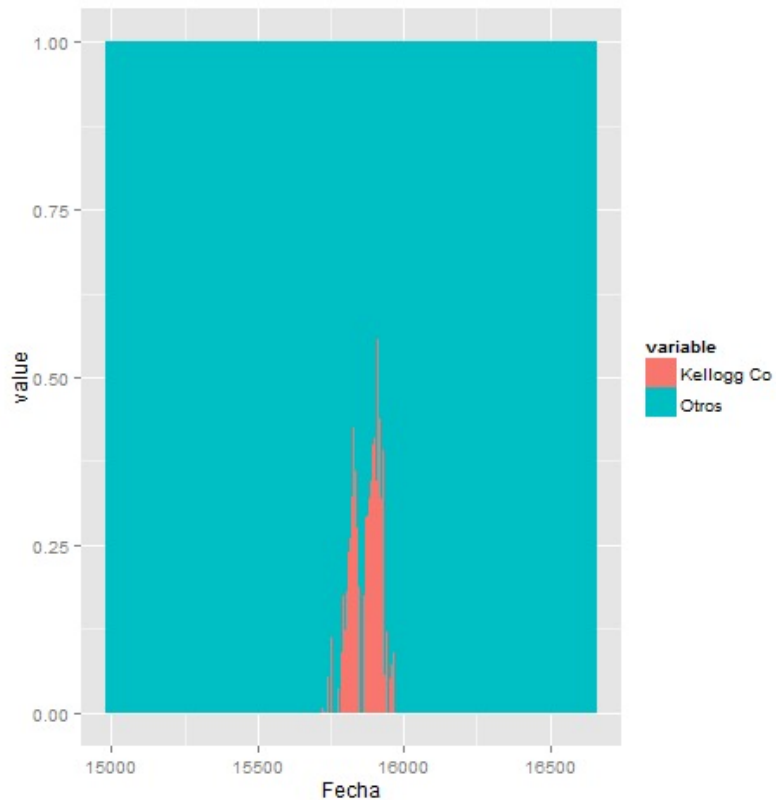


Frontera eficiente

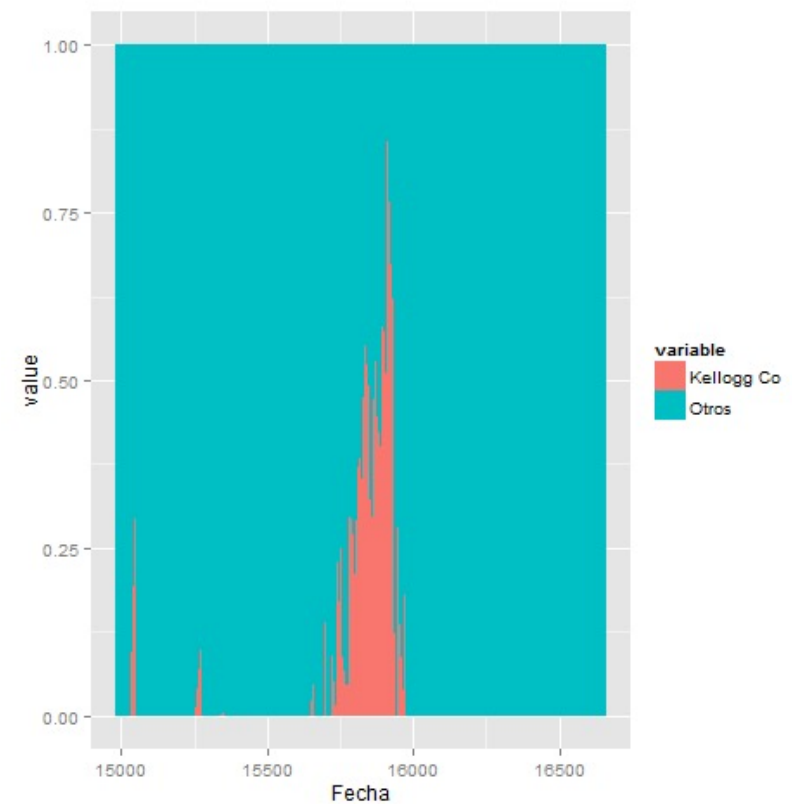


Peso de Kellogs en el portafolio

- Prior

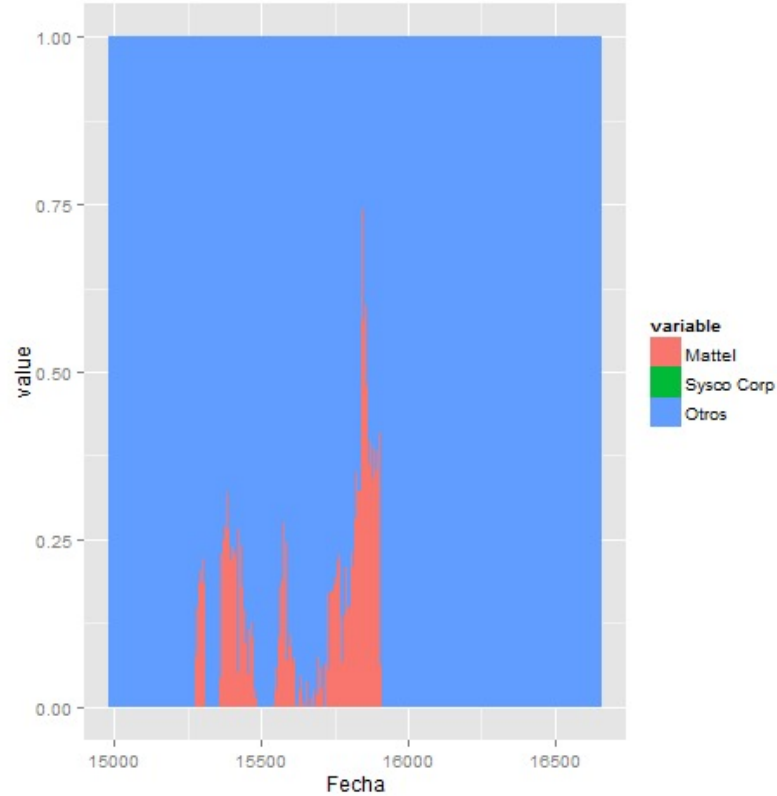


- Posterior

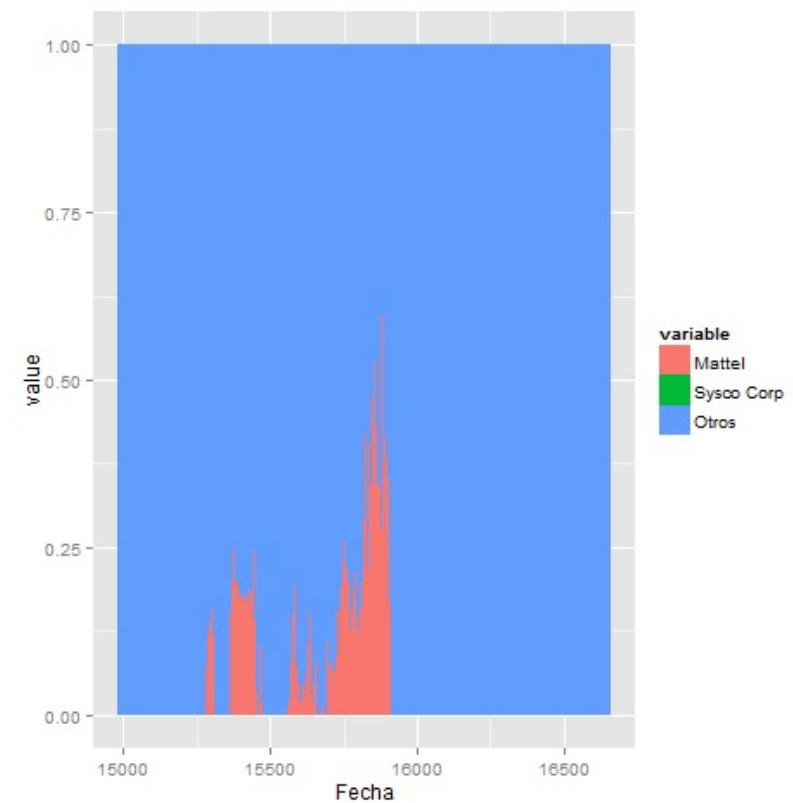


Peso Mattel y Sysco

- Prior

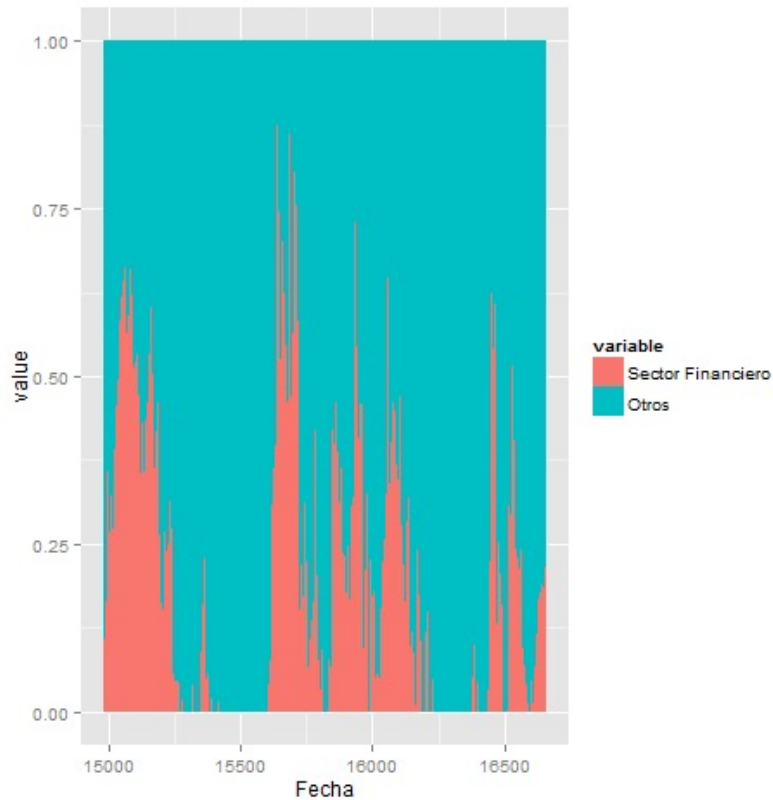


- Posterior

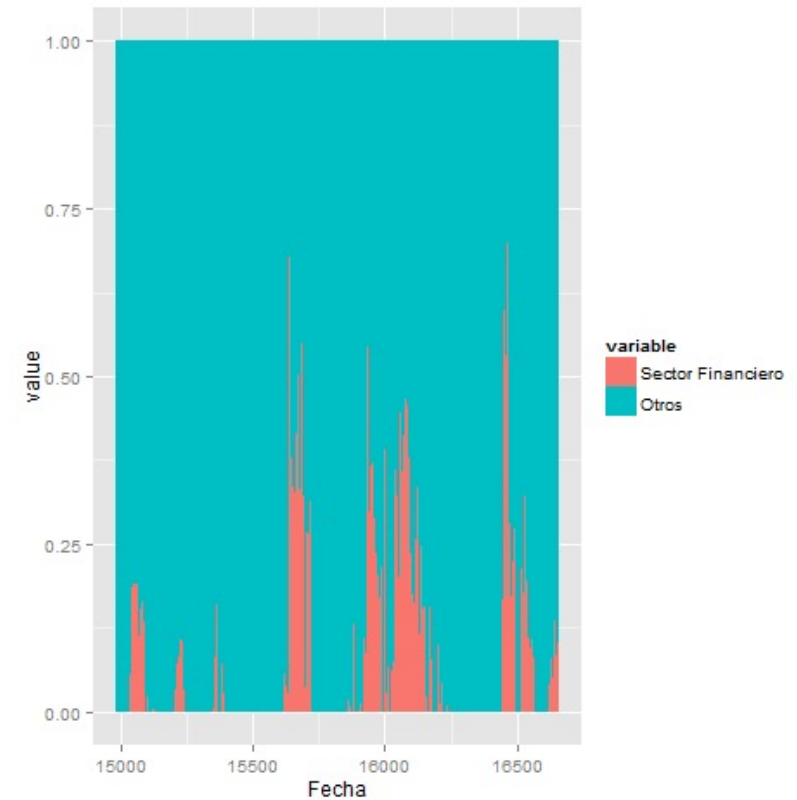


Peso Sector Financiero

- Prior



- Posterior



Índice

Regla de Bayes

Modelo B&L bajo normalidad

Modelo B&L bajo no-normal

Estudio 1: Tesis German González

Trading algorítmico

Modelo B&L

- En la realidad, el mismo no posee distribuciones normales.
- ¿Cómo funcionaría entonces el modelo de B&L bajo no normalidad?
- Nótese que el supuesto de normalidad es fundamental para B&L, es vital porque la probabilidad condicional se genera a partir de la prior (normal) y los views (normales).
 - Se aprovecha el hecho de que la combinación de normales siempre es normal.
- Sin normalidad, no podemos aplicar el modelo anterior.

Modelo B&L

- Meucci (2006) creó la extensión de B&L para no normalidad.
- Esencialmente, se basa en combinar dos distribuciones (la distribución del view y la distribución prior).
- Para esto, crea variables nuevas, que son la combinación de los activos (¿recuerdan componentes principales?)

Modelo B&L

- Empecemos desde cero:
- Consideremos dos activos pero consideremos que tenemos únicamente el siguiente view:
 - El retorno promedio de los dos activos será 0%.
- Algebraicamente, se puede reescribir lo anterior como:

$$\frac{(r_1 + r_2)}{2} = 0$$
$$0.5 * r_1 + 0.5 * r_2 = 0$$

Modelo B&L

- Así, matricialmente se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = 0$$

- Lo que queremos ahora, es adicionarle un vector, de manera que quedemos con una matriz 2x2 que sea ortonormal.
- Esto es importante porque quedamos con una matriz cuadrada que me transforma mis variables en nuevas variables.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Constante \end{bmatrix}$$

Tal que:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Constante \end{bmatrix}$$

Modelo B&L

- La solución a lo anterior es:

$$x_1 = -x_2$$

- Por último, hacemos que el vector tenga norma 1.

$$(k_1)^2 + (-k_1)^2 = 1$$

$$k_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$$

- En adelante llamaremos a esto la matriz pick:

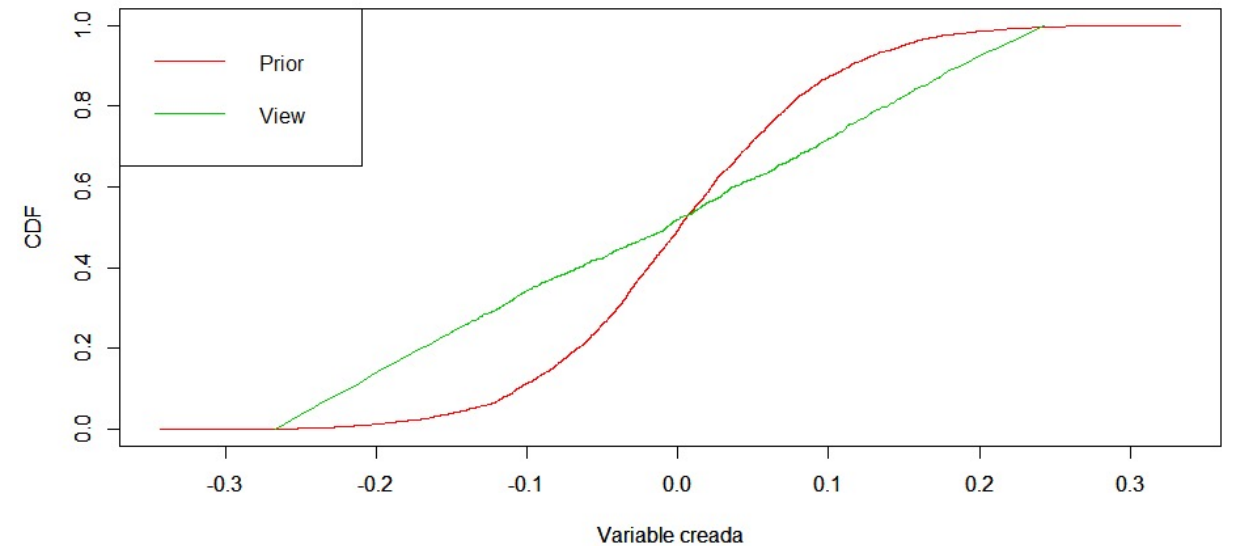
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- Con lo anterior, nuestras nuevas variables son:

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{T,1} & \dots & x_{T,K} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0.5 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Modelo B&L

- Hasta ahora hemos creado unas nuevas variables, ¿pero cómo vamos a incorporar los views?
- Recordemos que la prior posee una distribución (y por tanto una CDF).
- Así mismo, el view también lo debe tener (supongamos que es uniforme).



Modelo B&L

- Ahora, podemos repensar una distribución como la combinación de dos distribuciones a partir de sus CDF:

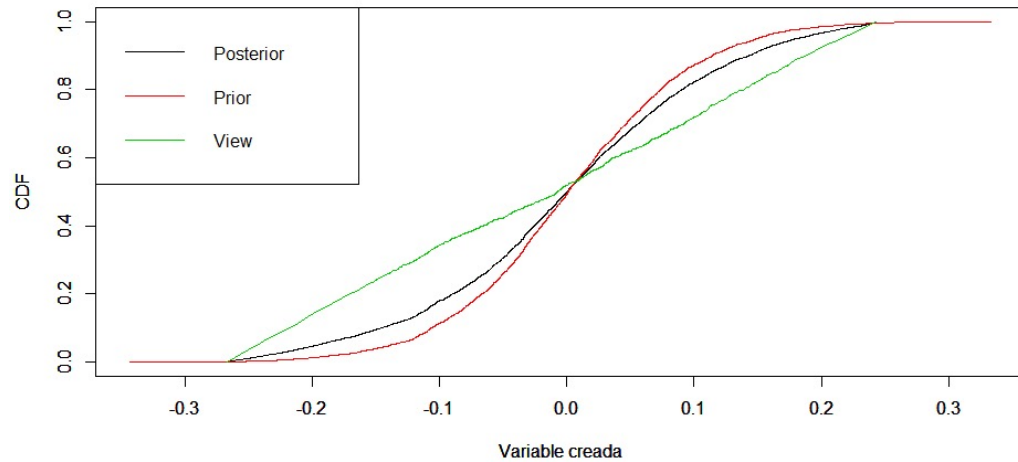
$$\tilde{F}(x) = (1 - c) * F_{Prior}(x) + c * F_{View}(x)$$

- Con la fórmula anterior, tenemos una mixtura de dos distribuciones, cada una de las cuales posee su propia distribución.
- Esto nos permite tener views con unas distribuciones y priors con otras distribuciones y combinarlas.

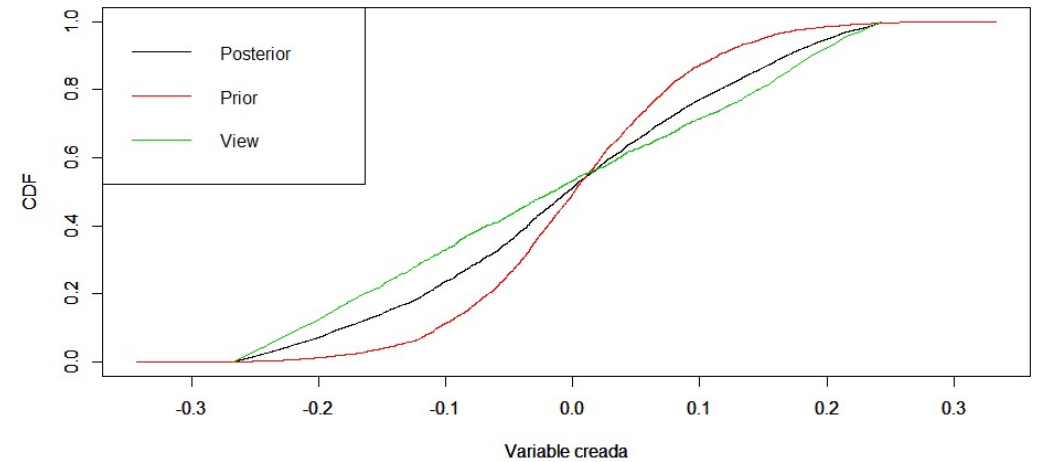
Modelo B&L

- Miremos como se ven las nuevas CDF:

C=0.5



C=0.9



Modelo B&L

- Lo único que nos falta es devolvernos a las variables originales:
 - Recordemos que nuestras variables creadas son:

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{T,1} & \dots & x_{T,K} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dots & \dots \\ 0.5 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{T,1} & \dots & y_{T,K} \end{bmatrix}$$

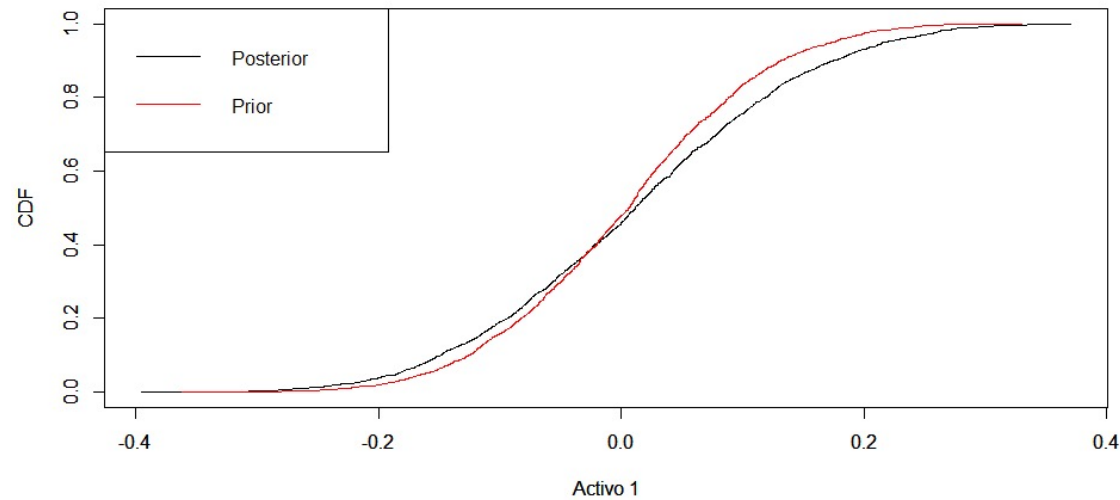
- Con nuestras variables ajustadas (y), podemos devolvernos a los x :

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{T,1} & \dots & x_{T,K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{T,1} & \dots & y_{T,K} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dots & \dots \\ 0.5 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{T,1} & \dots & y_{T,K} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

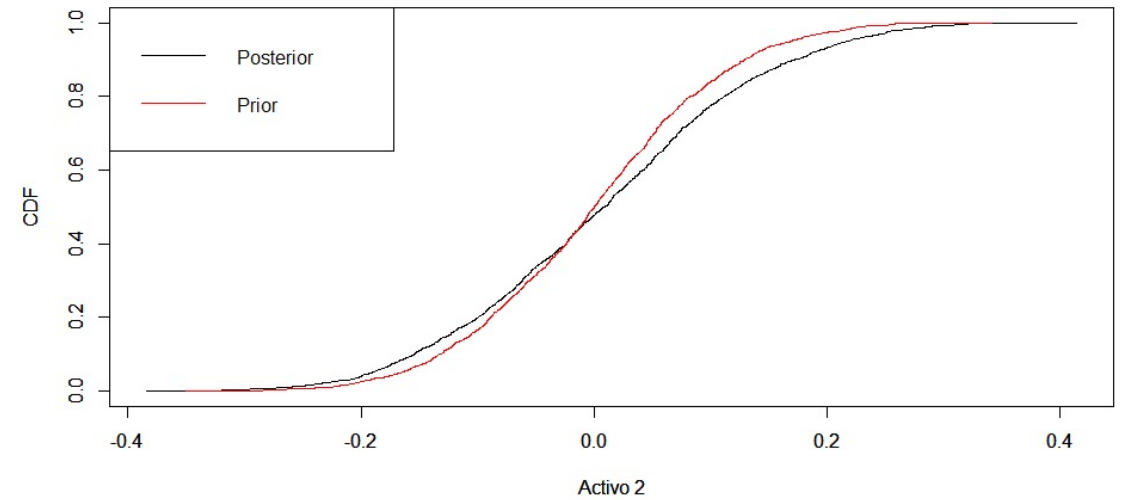
Modelo B&L

- Miremos como se ven las nuevas CDF:

Activo 1



Activo 2



Índice

Regla de Bayes

Modelo B&L bajo normalidad

Modelo B&L bajo no-normal

Estudio 1: Tesis German González

Trading algorítmico

Índice

Regla de Bayes

Modelo B&L bajo normalidad

Modelo B&L bajo no-normal

Estudio 1: Tesis German González

Trading algorítmico

Trading algorítmico

- TES 24's del MEC.
- Julio de 2011-marzo de 2016. **1.143** días de **300** minutos.
- Supuesto 1: Las puntas se mantienen constantes.
 - 66% de los minutos no presentan transacción.
- Supuesto 2: No se afecta las puntas.
 - \$1.289 MM por transacción y dos transacciones por minuto.

Trading algorítmico

$$E[P_{t+i}|\Phi_t] = f[P_t - P_{t-s}, P_t - k(P_t, j), Var(P_t, P_{t-i}), Sum(q_t, q_{t-i})]$$

para s en (1, 3, 5, 7, 10, 20, 30)

para j en (.03, 0.1, 0.3, 0.7, 1, 6, 10, 20)

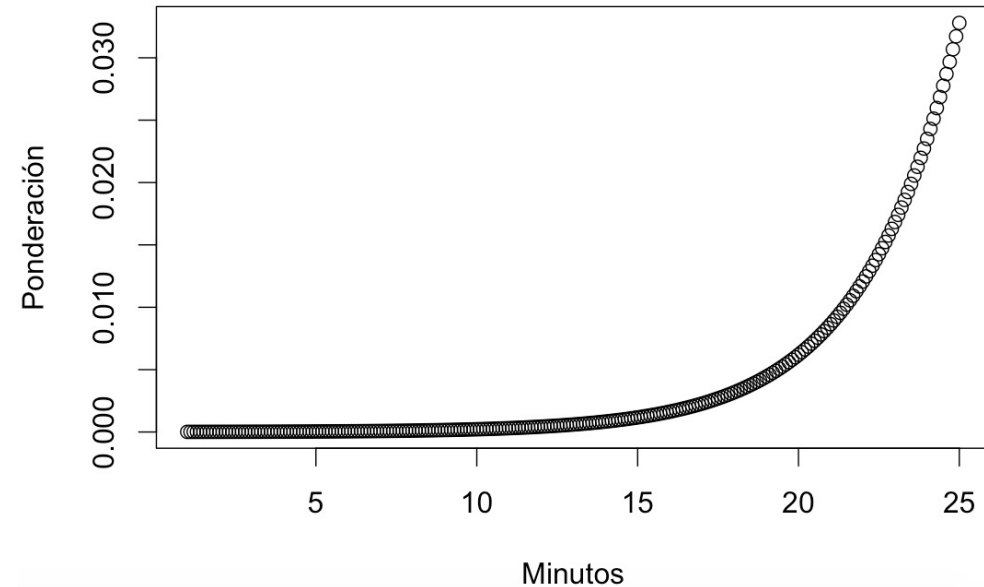
- TES 24's del MEC.
- Las variables de pronóstico son:
 - Puntos de referencia (1,3,5,7,10,20,30 min).
 - Suavización Exponencial Kernels (.03,.1,.3,.7,1,6,10,20).
 - Varianza, Volumen de los i minutos anteriores.
 - Meses de calibración.

Trading algorítmico

- Kernels:

$$k(P_t, j) = \frac{\sum_{u=1}^t (w_{t-u} * N_{t-u} * P_{t-u})}{\sum_{u=1}^t (w_{t-u} * N_{t-u})}$$

$$w_{t-u} = \frac{e^{-\frac{|t-u|}{j}}}{j}$$



- Lo et al. (2000) Cross-Validation.
- Epanechnikov y Gaussiano.

Trading algorítmico

- Se plantean 3 modelos de predicción $f(x)$:
 - Logit.
$$E[P_{t+10}|\Phi_t] = f[P_t - P_{t-s}, P_t - k(P_t, j), Var(P_t, P_{t-10})]$$
 - S, U, D, RU, RD.
 - 6 meses.
 - Random Forest.
$$E[P_{t+10}|\Phi_t] = f[P_t - P_{t-s}, P_t - k(P_t, j), Var(P_t, P_{t-10})]$$
 - 4 meses.
 - Support Vectors Machine.
$$E[P_{t+2}|\Phi_t] = f[P_t - P_{t-s}, P_t - k(P_t, j)]$$
 - 6 meses.
- Se comparan los modelos por el PyG ajustado por riesgo.

$$U(x) = -(x + 100)^{-0.4}$$

Trading algorítmico

$$U(x) = -(x + 100)^{-0.4}$$

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{1.4}{x + 100}.$$

$$\frac{-(100 + 100)^{-.4} - (100 + 0)^{-.4}}{2} = -(100 + x)^{-.4}$$

$$x = 38.075$$

Trading algorítmico

➤ Generales:

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P	PyG EC
Logit	355.50	2116	0.17	6.33	0.16	0.52	0.70	-0.86	2.26	208.65
RF	451.00	3006	0.15	6.82	0.14	0.51	0.81	-0.83	1.62	254.21
SVM	895.00	3396	0.26	10.01	0.26	0.69	0.74	-1.04	2.95	604.10

➤ 24 – 16.

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P
16's	435.60	1338	0.33	24.39	0.31	0.66	1.04	-1.57	2.85
24's-16's	2227.80	3887	0.285	9.36	0.285	0.81	0.42	-0.44	5.30

Trading algorítmico

Resultados 2011

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P	PyG EC
Diciembre	4.50	24.00	0.19	26.38	0.18	0.58	0.84	-0.80	1.56	3.10
Total	4.50	24.00	0.19	26.38	0.18	0.58	0.84	-0.80	1.56	3.10

Resultados 2012

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P	PyG EC
Enero	4.20	38.00	0.11	26.32	0.10	0.63	0.70	-1.04	2.00	2.32
Febrero	-0.70	40.00	-0.02	16.02	-0.03	0.62	0.51	-1.34	2.50	-2.24
Marzo	12.40	40.00	0.31	7.78	0.31	0.72	0.50	-0.33	4.83	9.77
Abril	11.20	37.00	0.30	7.54	0.30	0.81	0.43	-0.27	5.00	8.89
Mayo	8.10	17.00	0.48	7.88	0.48	1.00	0.48		Inf	6.76
Junio	16.20	58.00	0.28	9.31	0.28	0.78	0.44	-0.46	5.62	12.64
Julio	14.40	51.00	0.28	9.78	0.28	0.80	0.46	-0.63	5.86	11.50
Agosto	15.30	67.00	0.23	9.12	0.23	0.78	0.43	-0.51	3.71	11.90
Septiembre	1.40	46.00	0.03	11.35	0.03	0.67	0.39	-0.96	2.82	-0.49
Octubre	3.70	16.00	0.23	6.94	0.23	0.69	0.41	-0.40	5.50	3.03
Noviembre	5.00	75.00	0.07	12.71	0.05	0.68	0.61	-1.74	3.40	1.94
Diciembre	28.40	67.00	0.42	12.33	0.42	0.78	0.70	-0.88	5.78	25.92
Total	119.60	552.00	0.22	11.64	0.21	0.74	0.51	-0.90	4.08	91.95

Resultados 2013

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P	PyG EC
Enero	14.10	89.00	0.16	11.36	0.16	0.70	0.48	-0.63	2.48	11.30
Febrero	8.10	51.00	0.16	14.14	0.16	0.73	0.42	-0.62	3.08	6.72
Marzo	6.70	69.00	0.10	8.81	0.09	0.68	0.46	-1.05	3.36	4.52
Abril	17.30	115.00	0.15	8.09	0.14	0.69	0.58	-0.95	2.63	14.06
Mayo	5.80	115.00	0.05	9.71	0.05	0.57	0.52	-0.76	1.76	1.52
Junio	-0.10	107.00	-0.00	7.46	-0.02	0.58	1.09	-2.04	1.88	-4.37
Julio	47.60	296.00	0.16	7.59	0.15	0.62	0.83	-1.33	2.35	30.75
Agosto	26.70	78.00	0.34	14.55	0.33	0.65	0.92	-0.96	2.43	19.98
Septiembre	18.30	63.00	0.29	6.79	0.29	0.65	0.72	-0.80	2.93	13.37
Octubre	29.20	78.00	0.37	7.91	0.37	0.72	0.77	-0.99	4.00	22.70
Noviembre	45.30	93.00	0.49	7.45	0.48	0.75	0.90	-0.97	3.89	35.33
Diciembre	25.00	36.00	0.69	7.56	0.68	0.83	1.08	-1.50	6.00	20.04
Total	244.00	1190.00	0.21	8.89	0.20	0.66	0.74	-1.12	2.60	175.93

Resultados 2014

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P	PyG EC
Enero	0.70	18.00	0.04	17.50	0.03	0.72	0.72	-1.72	2.60	-0.14
Febrero	11.20	31.00	0.36	7.61	0.36	0.77	0.60	-0.83	6.00	7.91
Marzo	11.30	50.00	0.23	7.06	0.22	0.70	0.78	-1.23	2.69	7.45
Abril	35.30	122.00	0.29	6.69	0.28	0.70	0.77	-1.14	3.19	25.95
Mayo	30.60	87.00	0.35	6.41	0.35	0.75	0.67	-0.85	4.33	23.09
Junio	18.00	40.00	0.45	12.18	0.44	0.80	0.81	-1.32	5.33	13.67
Julio	13.60	49.00	0.28	9.20	0.27	0.65	0.69	-0.78	2.91	9.39
Agosto	31.90	76.00	0.42	10.72	0.42	0.76	0.71	-0.63	3.87	23.23
Septiembre	17.80	59.00	0.30	9.90	0.30	0.78	0.67	-1.09	3.83	12.21
Octubre	19.80	51.00	0.39	9.16	0.39	0.78	0.59	-0.67	6.67	13.99
Noviembre	-7.40	29.00	-0.26	13.03	-0.29	0.66	0.54	-2.21	2.38	-7.19
Diciembre	22.40	36.00	0.62	10.58	0.62	0.67	1.05	-0.90	8.00	16.04
Total	205.20	648.00	0.32	9.01	0.31	0.73	0.72	-1.08	3.79	145.61

Resultados 2015

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P	PyG EC
Enero	30.70	137.00	0.22	9.42	0.22	0.67	0.73	-0.96	2.42	18.69
Febrero	37.20	109.00	0.34	8.69	0.34	0.69	0.81	-0.92	2.88	25.14
Marzo	26.20	80.00	0.33	7.66	0.32	0.68	0.85	-0.99	2.70	16.89
Abril	26.90	69.00	0.39	10.06	0.39	0.68	0.74	-0.71	4.27	17.92
Mayo	7.20	20.00	0.36	6.30	0.36	0.70	0.74	-0.62	2.80	4.64
Junio	17.20	52.00	0.33	10.15	0.33	0.67	0.75	-0.83	3.18	10.55
Julio	1.80	6.00	0.30	9.17	0.30	0.67	0.75	-0.60	2.00	1.07
Agosto	2.90	43.00	0.07	10.84	0.06	0.60	0.73	-1.08	1.73	0.31
Septiembre	23.90	107.00	0.22	11.64	0.21	0.64	0.87	-1.01	1.94	11.81
Octubre	19.00	51.00	0.37	14.00	0.36	0.67	1.06	-1.22	2.43	10.85
Noviembre	37.90	105.00	0.36	11.70	0.36	0.69	0.82	-0.91	3.13	20.86
Diciembre	19.40	42.00	0.46	15.24	0.45	0.60	1.20	-0.89	2.08	10.71
Total	250.30	821.00	0.30	10.41	0.30	0.67	0.83	-0.95	2.58	149.45

Resultados 2016

	PyG Total	Número de Entradas	PyG Prom	Duración Posiciones	E. Certeza	P.Éxitos	PyG Éxito	PyG Pérdida	E P	PyG EC
Enero	18.20	57.00	0.32	12.82	0.31	0.60	1.14	-1.08	1.79	9.04
Febrero	15.10	42.00	0.36	10.50	0.35	0.67	0.94	-0.93	2.33	7.51
Marzo	38.10	62.00	0.61	13.03	0.60	0.74	1.29	-1.63	3.54	21.52
Total	71.40	161.00	0.44	12.30	0.43	0.67	1.15	-1.20	2.45	38.07

Gracias

