Metodologías para la optimización de portafolios

- **Profesores**: Germán González - Andrés Galeano.
- Sesión 2: Frontera Eficiente de Media - Varianza

Temario sugerido

Sesión 1: Introducción a la herramienta de matemática financiera y repaso probabilidad.
Sesión 2: Frontera Media-Varianza con dos y N activos riesgosos. Índices y centro de gravedad, optimización restringida y costos.
Sesión 3: Estimación de parámetros de media y varianza y métodos de selección de portafolios. Oportunidades de trading: estrategias de bandas.
Sesión 4: Optimización en dos etapas. Creación de índices y modelos para simulación de curvas.
Sesión 5: Extensiones al modelo de media-varianza: cópulas, componentes principales, no normalidad, Frontera-media-CvaR.
Sesión 6: Modelo de Black-Litterman.
Sesión 7: AssetLiability Managament. Trading Algorítmico.

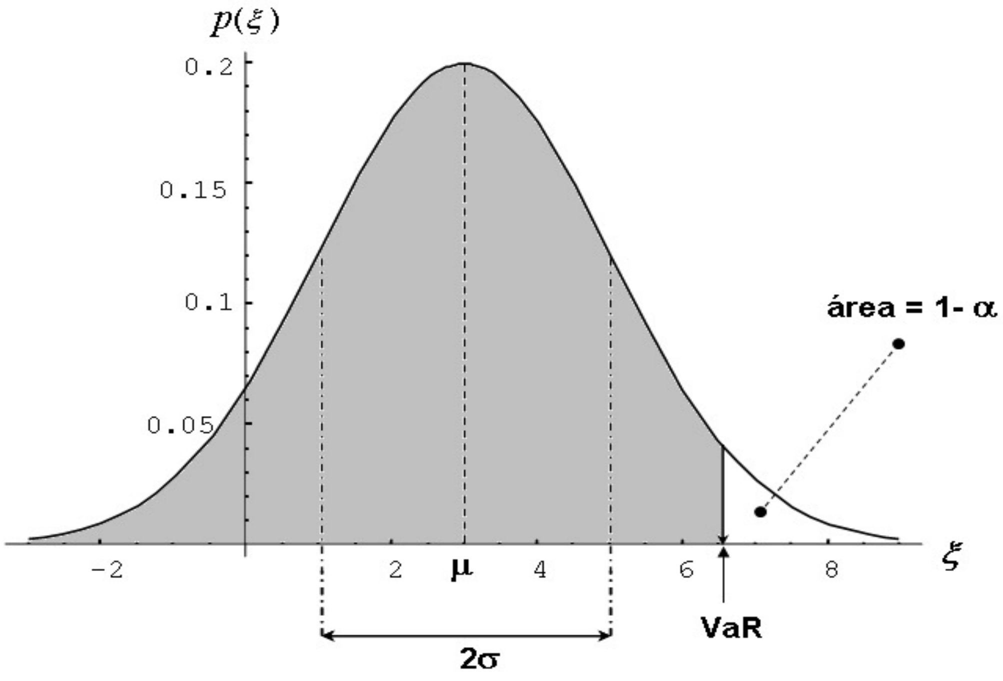
Índice

Universidad de los Andes

Índice

Valor en Riesgo (VaR)

- **VaR** es el percentil de la distribución de probabilidad al término del horizonte de gestión, en T + h; distribución que hoy (en T) desconocemos.
- **El VaR** corresponde a la máxima pérdida posible en el $\alpha \times 100\%$ de los mejores escenarios, o de forma equivalente a la mínima pérdida posible en el $(1 - \alpha) \times 100\%$ de las pérdidas más grandes.
- **Objetivo**: El administrador de riesgo tiene la idea de que la pérdida en su inversión no excederá el **VaR** con probabilidad α.

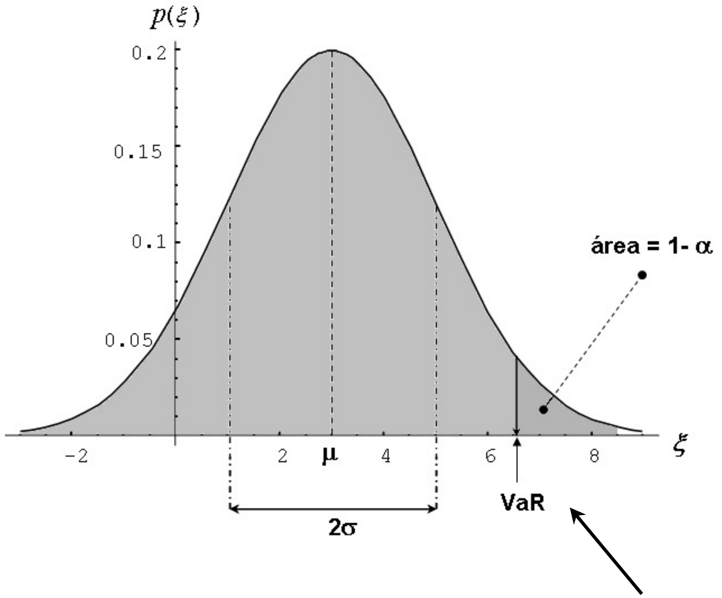


VaR condicional (CVaR)

CVaR: promedio de las pérdidas que superan el VaR.

$$\boxed{ES_\alpha(X) = E\left[X \mid X \geq VaR_\alpha(X)\right]}$$

$$\boxed{ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)d\beta}$$



- Si L ~ N(μ,σ),

$$\boxed{ES_\alpha(L) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}$$

donde Φ es la distribución (acumulada) de una variable normal estándar, y ϕ es su densidad

- ES sí es coherente
- Claramente, $ES_\alpha(L) \geq VaR_\alpha(L)$

Universidad de los Andes

Interpretación: Valor en Riesgo (VaR)

El analista de la empresa ACME calculo un VaR al 5% a un mes. Encontró que VaR al 5% a un mes es de 10 millones de pesos. ¿Cuál es la interpretación de este valor?

ACME

Resultado: Significa que existe un 5% de probabilidad de perder en un mes 10 millones de pesos, y un 95% de que la perdida sea menor a 10 millones. Es decir que 5 de cada 100 meses va a perder al menos 10 millones de pesos (1 de cada 20 meses va perder al menos 10 millones de pesos).

Metodología

- Histórica (no paramétrica):
  - Distribución de pérdidas
- Simulación (paramétrica):
  - Normal: $\mathbf{L_t} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)\ \ (\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}.\boldsymbol{d})$
  - ARMA
  - Volatilidad:
    - EWMA
    - Garch

Ejercicio 3: Calculo VaR Histórico

¿Qué se necesita?

- Portafolio de inversión.
- Precios observados. (Diarios)
- Fecha de valoración.
- Nivel de confianza.
- Número de días de historia que se quieren usar para calcular el VaR.

Ejercicio 3: Calculo VaR Histórico

Utilizando el siguiente portafolio:

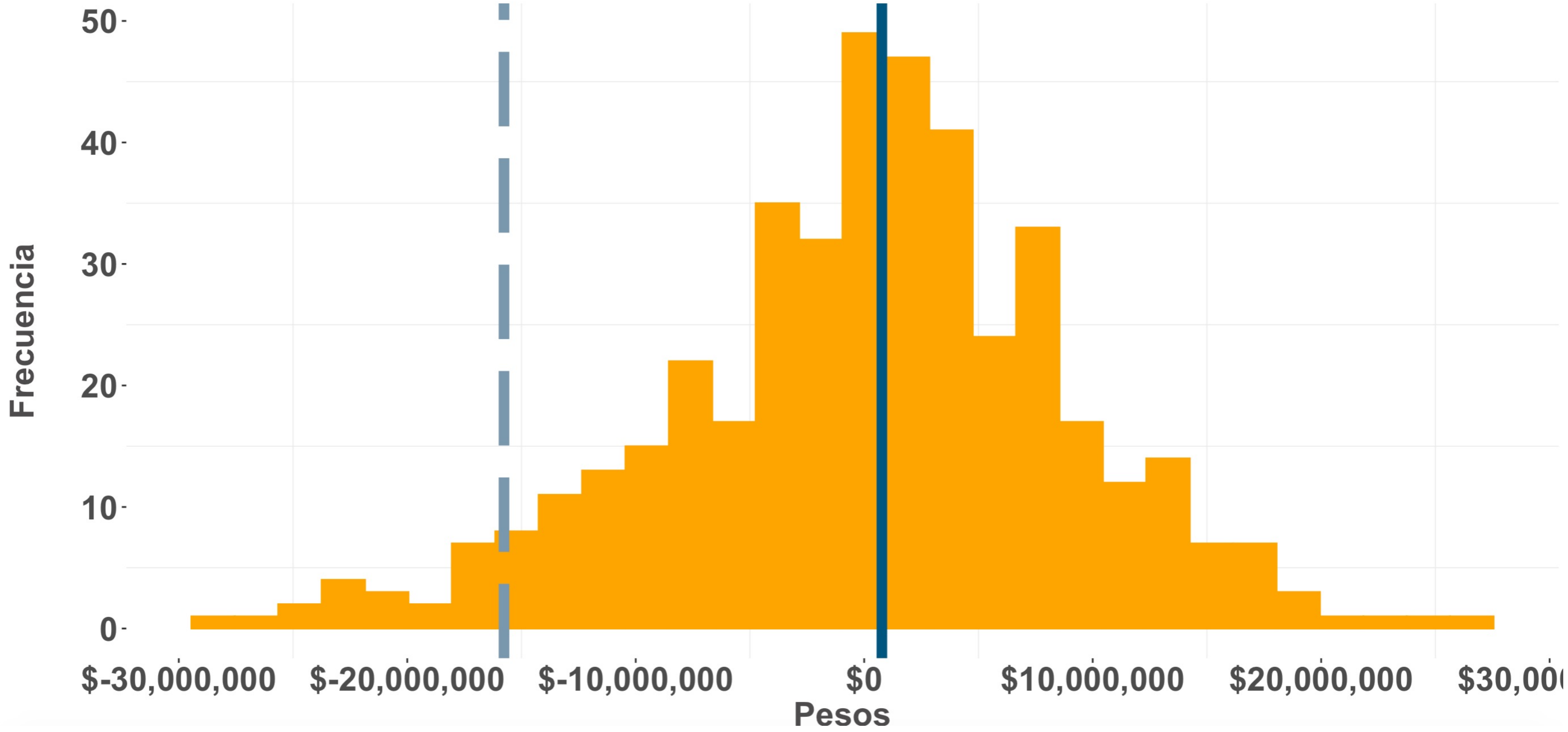
Empresa	Acciones
Bancolombia	10000
Celsia	5000
Cemargos	5000
Cemex	3000
Corficol	3000
Exito	10000
Grupo Argos	3000
Avianca	4000
Ecopetrol	20000
Nutresa	6000

Encuentre el VaR histórico a un día para las 10 acciones del portafolio. Utilice como fecha de análisis el 9 de octubre del 2019. Utilice un nivel de significancia $\alpha = 5\%$.

Mapa de ruta – VaR portafolio

- **Paso 1**: Cargar precios históricos de las acciones. (Historia.xlsx)
- **Paso 2:** Cargar portafolio de acciones (Portafolio.xlsx)
- **Paso 3:** Valor portafolio → Histórico Precios x Nocional de cada acción
- **Paso 4**: Sumar sobre las filas para obtener el valor total de portafolio en cada periodo.
- **Paso 5:** Distribución de los retornos sobre el valor total del portafolio.
- **Paso 5:** Calcular Var 5% porcentual: percentil → distribución histórica de cada acción.
- **Paso 6:** Calcular Var 5% niveles.

Resultados Portafolio



VaR Total Acciones (Individual): -25,034,107

VaR Portafolio: -15,766,057

Índice

- Medidas de riesgo
- Frontera eficiente: 2 y N activos
- Índices y centro de gravedad
- Optimización restringida.
- Costos de transacción

Frontera Eficiente

- Una frontera eficiente consiste en el conjunto de portafolios que minimizan alguna medida de riesgo dado una rentabilidad mínima.

- El primero en pensar en este concepto e implementarlo fue Markowitz (1952).

- El principio, aunque simple, es extremadamente fuerte, ya que permite capturar a todos los mejores portafolios sin necesidad de generar infinitas combinaciones.

Frontera Eficiente

- Algunos supuestos:
  - El riesgo del portafolio solo está dado por la variabilidad de los resultados (la varianza)
  - Los individuos siempre prefieren mayor retorno y menor riesgo.
  - Existe un activo libre de riesgo, sin incertidumbre.
  - Hay indivisibilidad perfecta del mercado.
  - Los precios son perfectamente observables y las matrices de varianza-covarianza, así como los retornos esperados son conocidos.
  - Es posible irse en corto (por ahora restringiremos esto).
  - Existen solo dos periodos: 0 y 1.

Frontera Eficiente

- En cualquier momento del tiempo, el valor del portafolio es:

$$V(t) = \sum_i x_i * S_i(t)$$

- Donde x_i es el número de acciones *i* en el portafolio, $S_i(t)$ es precio de la acción *i* y $V(t)$ es el valor del portafolio en el tiempo t.

- En adelante, definamos el peso de un activo cualquiera en el portafolio en el tiempo t como:

$$w_{i,t} = \frac{x_i * S_i(t)}{V(t)}$$

- Al ser el valor del portafolio la suma del valor de todos los activos en este:

$$\sum_i w_i = 1$$

Caso 2 activos

- Para el caso de dos activos, calculemos el retorno esperado del portafolio:

$$E(r) = E\left(\frac{V(1)}{V(0)}\right) - 1 = E\left(\frac{x_1 * S_1(1) + x_2 * S_2(1)}{V(0)}\right) - 1$$

$$= E\left(\frac{x_1 * S_1(0) * (1 + r_1) + x_2 * S_2(0) * (1 + r_2)}{V(0)}\right) - 1$$

$$E\left(\frac{V(0) + (x_1 * S_1(0) * r_1 + x_2 * S_2(0) * r_2)}{V(0)}\right) - 1 = E\left(1 + \frac{x_1 * S_1(0) * r_1 + x_2 * S_2(0) * r_2}{V(0)}\right) - 1$$

$$E(r) = E(r_1 * w_1 + r_2 w_2) = w_1 * \mu_1 + w_2 * \mu_2$$

- Más aún:

$$r_p = w_1 * r_1 + w_2 * r_2$$

Caso 2 activos

- Ahora miremos la varianza

$$V(r) = V(r_1 * w_1 + r_2 w_2) = V(r_1 * w_1) + V(r_2 * w_2) - 2Cov(r_1 * w_1 + r_2 w_2)$$
$$V(r) = w_1^2 * V(r_1) + w_2^2 * V(r_2) - 2 * w_1 * w_2 * Cov(r_1, r_2)$$

- Algunas medidas adicionales:

$$\sigma_1 = \sqrt{V(r_1)}; \sigma_2 = \sqrt{V(r_2)}\ ;\ \rho_{1,2} = \frac{Cov(r_1, r_2)}{\sigma_1 * \sigma_2}$$

- Entonces podemos reescribir la varianza como:

$$V(r) = w_1^2 * \sigma_1^2 + w_2^2 * \sigma_2^2 + 2 * w_1 * w_2 * \rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2$$

Caso 2 activos

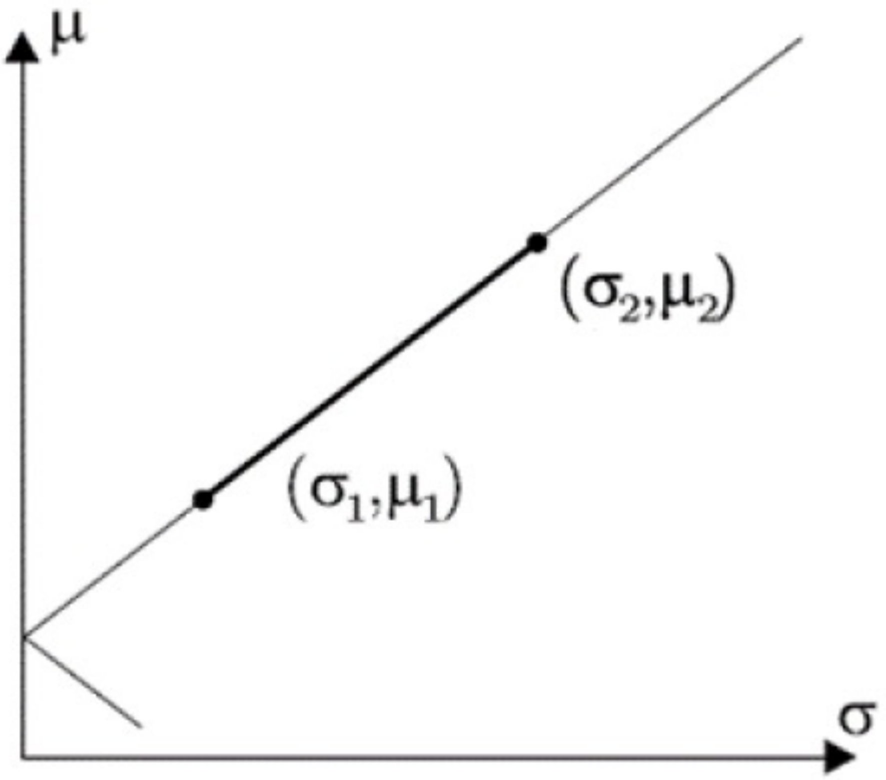
- Si los activos están perfectamente correlacionados positivamente:
  - $\rho_{1,2} = 1$

$$V(r) = w_1^2 * \sigma^2 + w_2^2 * \sigma^2 + 2 * w_1 * w_2 * \sigma_1 * \sigma_2$$
$$= (w_1 * \sigma_1 + w_2 * \sigma_2)^2$$
$$\sigma = |w_1 * \sigma_1 + w_2 * \sigma_2|$$

- Por último, usemos la restricción de pesos del portafolio:

$$\sigma = |w_1 * \sigma_1 + (1 - w_1) * \sigma_2|$$

- Solo se puede reducir el riesgo tomando posiciones cortas en activos riesgosos.



Caso 2 activos

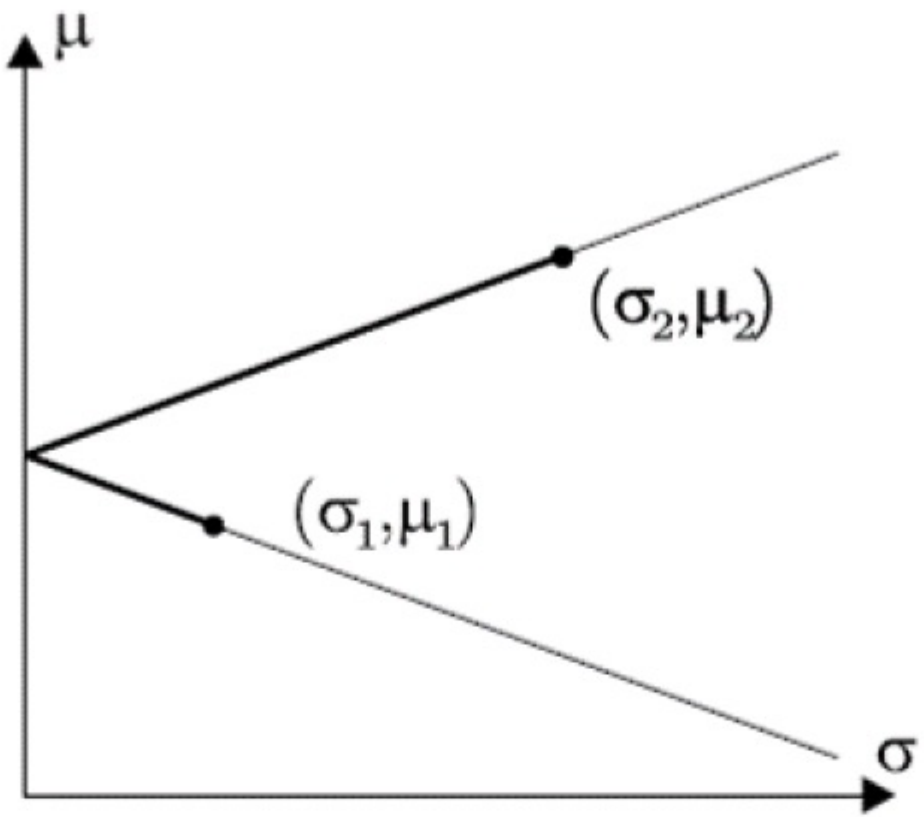
- Si los activos están perfectamente correlacionados negativamente:
  - $\rho_{1,2} = -1$

$$V(r) = w_1^2 * \sigma^2 + w_2^2 * \sigma^2 - 2 * w_1 * w_2 * \sigma_1 * \sigma_2$$
$$= (w_1 * \sigma_1 - w_2 * \sigma_2)^2$$
$$\sigma = |w_1 * \sigma_1 - w_2 * \sigma_2|$$

- Por último, usemos la restricción de pesos del portafolio:

$$\sigma = |w_1 * \sigma_1 - (1 - w_1) * \sigma_2|$$

- El riesgo se reduce con una combinación de ambos activos.



Caso 2 activos

- Por último, encontremos el punto de mínima varianza:

$$\min_{w_1} w_1^2 * \sigma_1^2 + (1-w_1)^2 * \sigma_2^2 + 2 * w_1 * (1-w_1) * \rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial w_1} = 2w_1 * \sigma_1^2 - 2(1-w_1) * \sigma_2^2 + 2 * (1-2w_1)\rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2 = 0$$

$$2w_1 * \sigma_1^2 + 2w_1 * \sigma^2 - 4w_1\rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2 = 2\sigma_2^2 - 2\rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2$$

$$w_1(\sigma_1^2 + \sigma^2 - 2\rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2) = \sigma_2^2 - \rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2$$

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma^2 - 2\rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2}$$

Caso 2 activos

- Miremos un ejercicio para dos activos.

Caso N activos

- Ahora analicemos las diferencias con N activos.
- Existe una matriz de Varianza-Covarianza (dada):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{1,1} & \cdots & \cdots & \sigma_{N,N} \end{bmatrix}; donde\ \sigma_{i,i} = \sigma_i^2$$

Supondremos que la matriz Σ es invertible. Solo se incumple si un activo es replicable por una combinación de otros activos o si un activo tiene varianza cero.

- Además, existe un vector de retornos esperados:

$$\mathrm{M} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]$$

- El retorno del portafolio se descompone en el retorno de los activos que lo componen:

$$r_p = w_1 * r_1 + \cdots + w_N * r_N = \sum_i w_i * r_i$$

Caso N activos

- Utilizando el resultado anterior:

$$E(r_p) = \mu_p = \sum_i w_i * E(r_i) = \sum_i w_i * \mu_i$$

En adelante, representaremos esto de manera matricial:

$$\mu_p = \mathrm{M} * w^T$$

$$V(r_p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i * w_j * \sigma_{i,j} = w * \Sigma * w^T$$

Caso N activos

- Para este nuevo caso de N activos, la frontera no surge de la combinación de dos activos, sino de la utilización al mismo tiempo de distintos pesos para distintos activos. **En pocas palabras, no tiene forma cerrada.** De esta manera, definimos un algoritmo para generar dicha frontera:

1. Definimos un conjunto de retornos objetivo.

2. Para cada retorno objetivo, encontramos el punto de mínima varianza.

3. El conjunto de puntos (portafolios) encontrados representa la frontera eficiente.

Afortunadamente, el problema del punto 2 es convexo y se puede encontrar a partir de derivadas (computacionalmente fácil):

Caso N activos

- Objetivo: Encontrar el portafolio de mínima varianza.

Recordemos que:

$$p * Var(x) + (1 - p) * Var(y) \geq Var(p * x + (1 - p) * y)$$

Lo anterior nos define un problema convexo, lo que permite encontrar relativamente la solución a problema complejos, (i) sin la necesidad de mapear todos los escenarios y (ii) con un tiempo de optimización considerablemente bajo.

El problema a resolver es:

$$\min_{w} w * \Sigma * w^T \; s.a. \, \mathrm{M} * w^T = e$$

Donde e es el objetivo de retorno. Miremos un ejercicio en Excel.

Índice

Índices

- Los índices son una guía del mercado y punto de referencia al compararse con el resto de competidores.
- La utilización de índices refleja el deseo de los participantes del mercado de:
    1. Exceder las rentabilidades de sus competidores.
    2. No distanciarse en comportamiento general.
    3. Brindarle al inversionista un nivel de comparación.

- Muchas veces, los inversionistas lo hacen de manera intuitiva y no siguen el índice de la manera que lo deberían hacer.
    1. Tratan de no distanciar sus posiciones de las participaciones del índice.
    2. Invierten en el ETF del índice (iCOLCAP).

Índices

- El ETF del COLCAP sigue muy de cerca el COLCAP, pero es indeseable invertir en él:
  - Esto lo puede hacer un inversionista, acá no hay valor agregado.

- Los pesos del COLCAP cambian un poquito todos los días. Recalcular los pesos es una tarea desgastante si se hace diariamente, pero es posible hacerlo.

- Temas adicionales para considerar:
  - Emisiones o recompra de títulos afectan el COLCAP hasta 3 meses después.
  - Una vez tomado el portafolio, los pesos cambian y es posible que se debe rebalancear para seguir al índice (costos de transacción).

Centro de gravedad

- El centro de gravedad es un concepto en el cual los retornos absolutos se vuelven relativos frente a algún activo, usualmente un índice o un indicador de rentabilidad general que se quiera seguir.

- Usualmente se relativizan los retornos frente a algún índice del mercado en el que participan, pero no existe restricción alguna para que esto sea así:
  - Es posible crear portafolios con los activos que intenten seguir algún indicador internacional.
  - Es posible crear portafolios con derivados que sigan el COLCAP.
  - Etc.

Centro de gravedad

- Al usar el centro de gravedad como el COLCAP, el modelo tratará de minimizar su distancia contra el COLCAP, al tiempo que genera excesos relativos contra éste.
  - En otras palabras, permite cumplir con el objetivo propuesto: no alejarse demasiado del mercado, pero sí superarlo.

- El portafolio de mínima varianza (que tiene exceso de retorno 0) es la composición del COLCAP.

- El CML difiere de la teoría tradicional: el risk free ahora es el COLCAP, no el activo libre de riesgo.
  - Como existe un portafolio con cero varianza, no existe el CML.

- No se debe descartar la tasa libre de riesgo como activo. Es ideal incluir el activo en la optimización.

Centro de gravedad

- Miremos esto como se ve para el COLCAP.

Índice

Optimización restringida

- Recordemos nuestro problema anterior:

$$\min_{w} w * \Sigma * w^T \; s.a. \, \mathrm{M} * w^T = e$$

- Lo anterior es una única restricción. Una restricción adicional natural es que la suma de los pesos es igual a 1.

$$M * w^T = e \;\rightarrow [\mu_1, \dots, \mu_N] * w^T = e$$
$$1' * w^T = 1 \;\rightarrow [1, \dots, 1] * w^T = 1$$

- Las dos restricciones anteriores se pueden rescribir en una sola de manera matricial:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_N \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}$$

Optimización restringida

- En general, la restricciones de los fondos de inversión van más allá de no permitir posiciones cortas.

- Algunas de éstas son:
  - Topes por sector.
  - Topes por emisor.
  - Topes individuales.
  - Requerimientos de liquidez.
  - Topes adicionales establecidos por la norma.

- Aunque estas restricciones pueden parecer complejas de incorporar, en este modelo es, de hecho, bastante fácil.

Optimización restringida

- Aprendamos a incorporar algunas de estas:
  - Para estos ejercicios, supongamos que tenemos 4 activos, dos del sector financiero y dos del sector de construcción.

  - Restricción: Ninguna acción puede tener más del 50% del portafolio.
    - Esto de hecho son 4 restricciones:

$$[1,0,0,0] * w^T = 0.5$$
$$[0,1,0,0] * w^T = 0.5$$
$$[0,0,1,0] * w^T = 0.5$$
$$[0,0,0,1] * w^T = 0.5$$

      - Nota: al utilizar restricciones con desigualdades se pasa a un problema similar pero con una técnica distinta.

Optimización restringida

- Aprendamos a incorporar algunas de estas:
  - Para estos ejercicios, supongamos que tenemos 4 activos, dos del sector financiero y dos del sector de construcción.

  - Restricción: el sector financiero no puede tener más del 80%.

$$[1,1,0,0] * w^T = 0.8$$

  - Restricción: el sector financiero no puede tener más del 30% que el sector de construcción.

$$[1,1,-1,-1] * w^T = 0.3$$

  - Restricción: el sector financiero no puede tener más del doble que el sector de construcción.

$$[1,1,-2,-2] * w^T = 0$$

  - Restricción: el sector financiero debe tener más que el sector de construcción.

$$[-1,-1,1,1] * w^T = 0$$

Índice

Costos de transacción

- En el contexto de la optimización de portafolio, los costos de transacción son aquellos derivados de rebalancear el portafolio. Una aproximación común es tomar el spread bid-ask.

- Usualmente, no se calcula ni estima el costo de rebalanceo y mucho menos se tiene en cuenta el efecto que este tiene sobre la optimización.

- Consideremos el caso de 2 activos y miremos como cambiaría la frontera eficiente para distintos niveles de costos.

- Supongamos los siguientes parámetros:

$$\mu_1 = 4\%, \mu_2 = 5\%, \sigma_1 = 5\%, \sigma_2 = 5\%, \rho = -0.5$$
$$W_0 = [0.2, 0.8]$$

El bid ask (%) es:

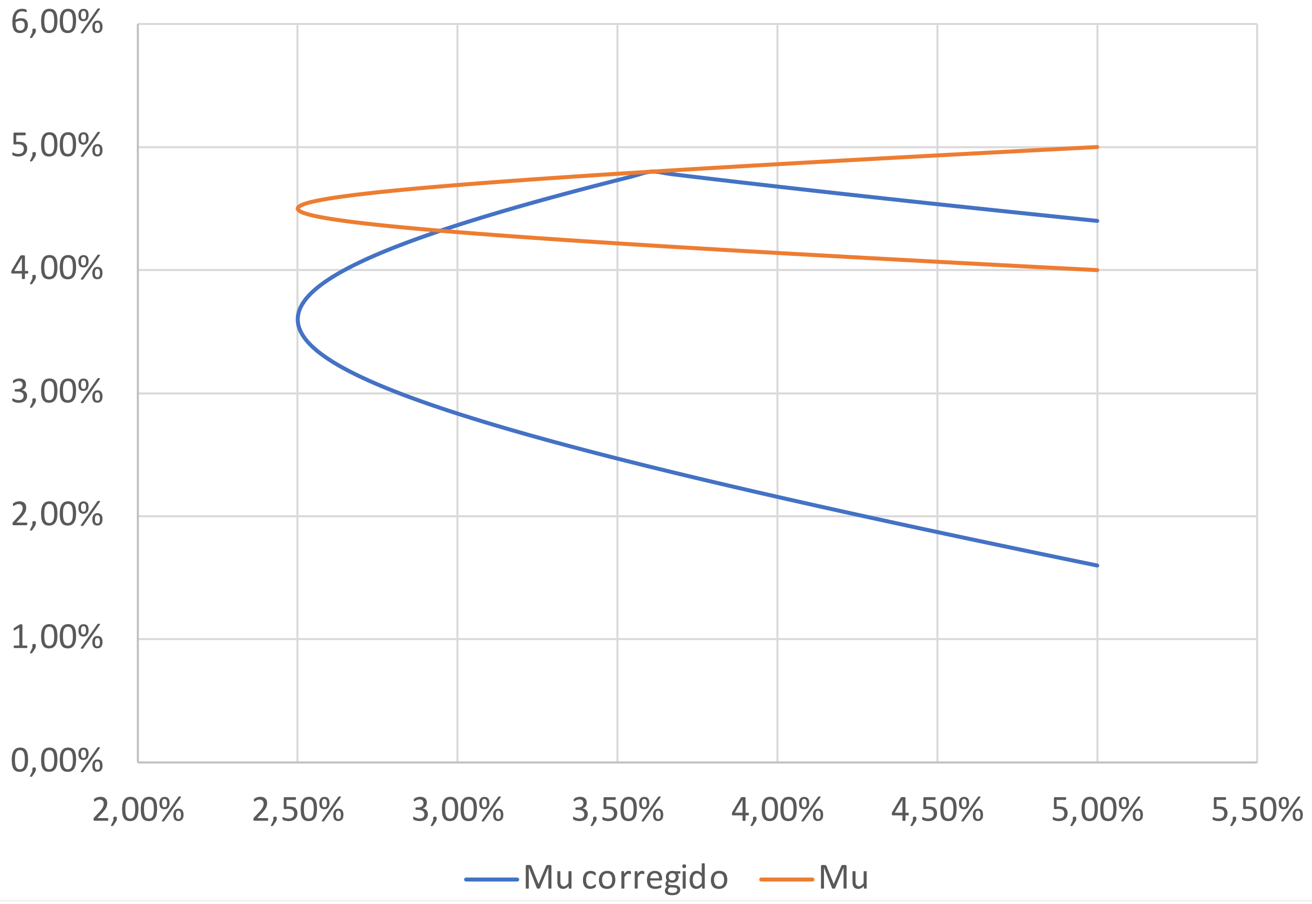
$$BA_1 = 0.5\% \, , BA_2 = 2.5\%$$

Costos de transacción

- Nuestras restricciones permanecen todas iguales excepto una:
  - Supongamos que tenemos un portafolio inicial w^0
$$w^0 = [w_1^0, \dots, w_N^0]$$
  - Ahora consideremos el escenario en el que queremos cambiar al portafolio w:
$$w = [w_1, \dots, w_N]$$
  - Por último, consideremos que comprar o vender cada activo tiene un costo (comprar y vender paga la diferencia bid-ask).
$$CT_i = \frac{Bid_i - Ask_i}{2}, CT_i(\%) = \frac{\frac{Bid_i - Ask_i}{2}}{S_i}$$
  - Así, rebalancear tiene un costo, que viene dado por la cantidad de compras o ventas de cada activo:
$$CT = \sum_i abs\left(w_i - w_i^0\right) * CT_i(\%)$$

Costos de transacción

- Tener un portafolio distorsiona la frontera.
- Solo permanece igual el portafolio actual (si este está sobre la frontera).
- La obtención de esta frontera es extremadamente compleja.
  - El problema ya no es convexo.
- La solución parcial es trazar una combinación entre la frontera y el punto escogido sobre una optimización estándar.



Gracias

Universidad de los Andes