Pronóstico de series de tiempo y simulaciones en R

Clase 5: Series temporales multivariantes

Germán Eduardo González

Índice

Dependencia entre variables

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Prueba de causalidad de Granger

Cointregración

Modelo de corrección de error vectoriales (VECM)

Aplicación

Índice

Dependencia entre variables

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Prueba de causalidad de Granger

Cointregración

Modelo de corrección de error vectoriales (VECM)

Aplicación

Dependencia entre variables

- La dependencia entre dos variables es cualquier relación estadística que permita pronosticar una con la otra.
- En particular, cuando el interés es pronosticar, lo que se busca son **causalidades predictivas**, diferente a lo que normalmente se entiende como **causalidad real**.
- La primera es una pregunta de ¿Qué variables X de la base datos son útiles para mejorar mi proyección de Y?, la segunda es ¿El cambio en Y es causado directamente por X?

Índice

Dependencia entre variables

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Prueba de causalidad de Granger

Cointregración

Modelo de corrección de error vectoriales (VECM)

Aplicación

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Univariado: En un modelo autoregresivo univariada de orden p, hacemos una regresión a la variable en p rezagos. AR (P)

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + u_t$$

Multivariada: Una modelo autoregresivo multivariado es un vector autoregresivo o VAR envuelve N variables. En N-variables tenemos que estimar N diferentes ecuaciones.

En cada ecuación, estimamos las variables de la mano izquierda con p rezagos, de igual manera para las variables de la mano derecha p rezagos.

Ejemplo: VAR (1)

$$y_{1,t} = \beta_{1,0} + \beta_{1,1} y_{1,t-1} + \alpha_{1,1} y_{2,t-1} + \epsilon_{1,t}$$
$$y_{2,t} = \beta_{2,0} + \beta_{2,1} y_{2,t-1} + \alpha_{2,1} y_{1,t-1} + \epsilon_{2,t}$$

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

VAR:

1. Hay **más** de una **variable dependiente**.
2. Conjunto de ecuaciones lineales dinámicas en donde cada variables es función de:
   - Un **número** igual de rezagos de si misma.
   - Todas las **otras variables** en el sistema.
3. Todas las variables son **endógenas**, es decir, son determinadas por el sistema.
4. El número de variables que queremos estimar determina el número de ecuaciones en el sistema

Beneficios: Incluye otro tipo de interacción multivariada. Las perturbaciones pueden estar correlacionadas, generando que un choque afecte el sistema. Estas interacciones brindan una ventaja en el pronostico que pierde el univariado.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \epsilon_t$$

Tenemos que estimar: α_0 y α_1.

$$y_{1,t} = \beta_{1,0} + \beta_{1,1} y_{1,t-1} + \alpha_{1,1} y_{2,t-1} + \epsilon_{1,t}$$
$$y_{2,t} = \beta_{2,0} + \beta_{2,1} y_{2,t-1} + \alpha_{2,1} y_{1,t-1} + \epsilon_{2,t}$$

$$\varepsilon_{1,t} \sim RB(0, \sigma_1{}^2)$$
$$\varepsilon_{2,t} \sim RB(0, \sigma_2{}^2)$$
$$cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sigma_{12}$$

Tenemos que estimar: $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\alpha_{1,1}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$ y $\alpha_{2,1}$.

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

VAR (2)

$$y_{1,t} = \beta_{1,0} + \beta_{1,1}y_{1,t-1} + \alpha_{1,1}y_{2,t-1} + \beta_{1,2}y_{1,t-2} + \alpha_{1,2}y_{2,t-2} + \epsilon_{1,t}$$
$$y_{2,t} = \beta_{2,0} + \beta_{2,1}y_{2,t-1} + \alpha_{2,1}y_{1,t-1} + \beta_{1,2}y_{2,t-2} + \alpha_{2,2}y_{1,t-2} + \epsilon_{2,t}$$

Note que:

AR(2)
Tenemos que estimar: α_0, α_1 y α_2 .

VAR(2)
Tenemos que estimar: $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\alpha_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$ $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\beta_{2,2}$ y $\alpha_{2,2}$.

VAR (P)

$$y_{1,t} = \beta_{1,0} + \beta_{1,1}y_{1,t-1} + \alpha_{1,1}y_{2,t-1} + \cdots + \beta_{1,p}y_{1,t-p} + \alpha_{1,p}y_{2,t-p} + \epsilon_{1,t}$$
$$y_{2,t} = \beta_{2,0} + \beta_{2,1}y_{2,t-1} + \alpha_{2,1}y_{1,t-1} + \cdots + \beta_{2,p}y_{2,t-p} + \alpha_{2,p}y_{1,t-p} + \epsilon_{1,t}$$

Note que:

AR(p)
Tenemos que estimar: $p+1$ parámetros.

VAR(p)
Tenemos que estimar: $2(2p+1)$ parámetros.

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

- La notación más frecuente en los libros es:

$$Y_{1,t} = \beta_{1,0} + \sum_{i=1}^{p_1} \gamma_{1,i} Y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{1,i} Y_{1,t-i} + u_{1,t}$$

$$Y_{2,t} = \beta_{2,0} + \sum_{i=1}^{p_1} \gamma_{2,i} Y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{2,i} Y_{2,t-i} + u_{2,t}$$

- Un requisito fundamental para poder estimar estas funciones es que **cada variable Y sea estacionaria.**
- Una alternativa, cuando la estacionariedad no sea el caso, es hacer alguna transformación tipo diferenciación, logarítmica o de retornos.
- En general, $p_1 = p_2 = p$, por lo cual, a un VAR con p-rezagos se le llama **VAR(p)**.

¿Cómo escoger el p?

- El modelo debe tener el número “correcto” de rezagos.
- Determinar el p es un trade–off entre la maldición de la dimensionalidad y modelos sencillos.

Muy pocos rezagos:

Autocorrelación del error
puede generar estimadores ineficientes

Muchos rezagos:

Problemas de grados de libertad.

Los modelos se escogen mediante los criterios de AIC y BIC.

Modelos VARS son sencillos de estimar, debido a que solo es necesario correr N regresiones lineales. Esta es una de las razones por la cual modelos VARs son muy populares.

Índice

Dependencia entre variables

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Prueba de causalidad de Granger

Cointregración

Modelo de corrección de error vectoriales (VECM)

Aplicación

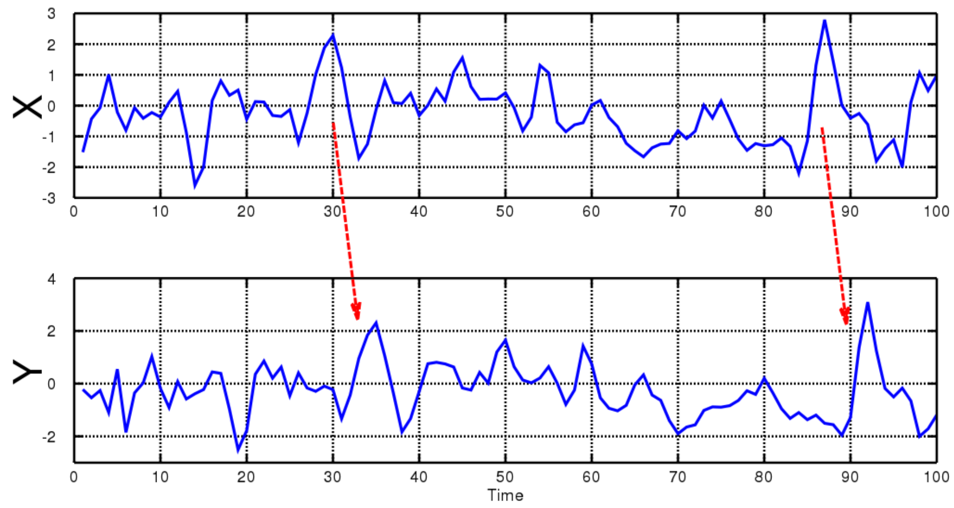
Prueba de causalidad de Granger

- **Ejemplo: Precios de vivienda**

- Es una prueba de **causalidad predictiva** no de **causalidad real.**

- De acuerdo con la causalidad de Granger, si una señal X1 "Granger-causa" una señal X2, entonces los valores pasados de X1 deben contener información que ayude a predecir X2 más allá de la información contenida en los valores pasados de X2 solamente. .

- Explota la especificación VAR para verificar si los rezagos de X son significativos en la predicción de Y, condicional a los rezagos de la misma Y.



Prueba de causalidad de Granger

$$Y_{1,t} = \beta_{1,0} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_{1,i} Y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{1,i} Y_{1,t-i} + u_{1,t} \quad (1)$$

$$Y_{2,t} = \beta_{2,0} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_{2,i} Y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{2,i} Y_{2,t-i} + u_{2,t} \quad (2)$$

- En particular, consiste en hacer prueba de hipótesis de los coeficientes de las ecuación Y_1 asociados a las variables Y_2 .
- Posibles pruebas de Granger sobre la ecuación 1:
- Significancia individual: ¿El rezago $Y_{2,t-k}$ es significativo para la predicción de $Y_{1,t}$? :

$$H_0: \gamma_{1,k} = 0$$
$$H_0: \gamma_{1,k} \neq 0$$

Estadístico de prueba se distribuye t-student

- Significancia conjunta: ¿Los rezagos de 1 a p de $Y_{2,t}$ son significativos en el pronóstico de $Y_{1,t}$? :

$$H_0: \gamma_{1,1} = \gamma_{1,2} = \cdots = \gamma_{1,p} = 0$$
$$H_0: \gamma_{1,k} \neq 0 \; para \; algun \; k$$

Estadístico de prueba se distribuye F

Índice

Dependencia entre variables

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Prueba de causalidad de Granger

Cointregración

Modelo de corrección de error vectoriales (VECM)

Aplicación

Cointegración

- **Orden de integración (I (d)):** estadístico de resumen, que informa el número mínimo de diferencias requeridas para obtener una serie estacionaria de covarianza.
- Como se mencionó previamente, una forma de lidiar con la no estacionariedad para poder estimar modelos autorregresivos univariados y multivariados (como el VAR(p)) es transformar la serie de tiempo.
- Una segunda estrategia, para el caso multivariado, es **formar combinaciones lineales de estas**.
- **Cointegración:** combinaciones lineales estacionarias de series **no** estacionarias.
- **Se dice que dos series Y y X son cointegradas si ambas son I(d) y existe una combinación lineal que es I(0).**

Cointegración

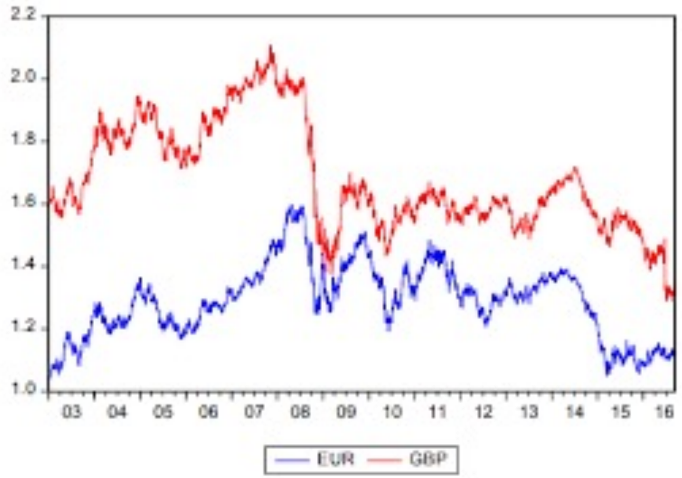
- **Orden de integración (I (d)):** estadístico de resumen, que informa el número mínimo de diferencias requeridas para obtener una serie estacionaria de covarianza.

Sean las variables $X_t \sim I(1)$ y $Y_t \sim I(1)$

Una combinación lineal de estas variables que sea estacionaria.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$$

Entonces, se dice que las variables Y, X están cointegradas si esta es I(0)



Cointegración

- En la vida real hay muchos ejemplos de estas relaciones de largo plazo:
  - Inflación y Desempleo.
  - Estructura de plazos de la tasa de interés.
  - Diferenciales precios de los combustibles.
  - **Hipótesis de ingreso permanente.**

Cointegración

- La cointegración implica un conjunto de equilibrios dinámicos de largo plazo donde los pesos usados para lograr la estacionariedad representan la relación de equilibrio.
- Un sistema de series cointegradas permite especificar las dinámicas de corto y largo plazo. Este modelo se conoce como Vector Error Correction Model (VECM).
- Este modelo permite identificar y parametrizar esas relaciones de largo plazo en series no estacionarias, información que se hubiera perdido en las transformaciones necesarias para volver las series estacionarias y calcular un VAR(p).

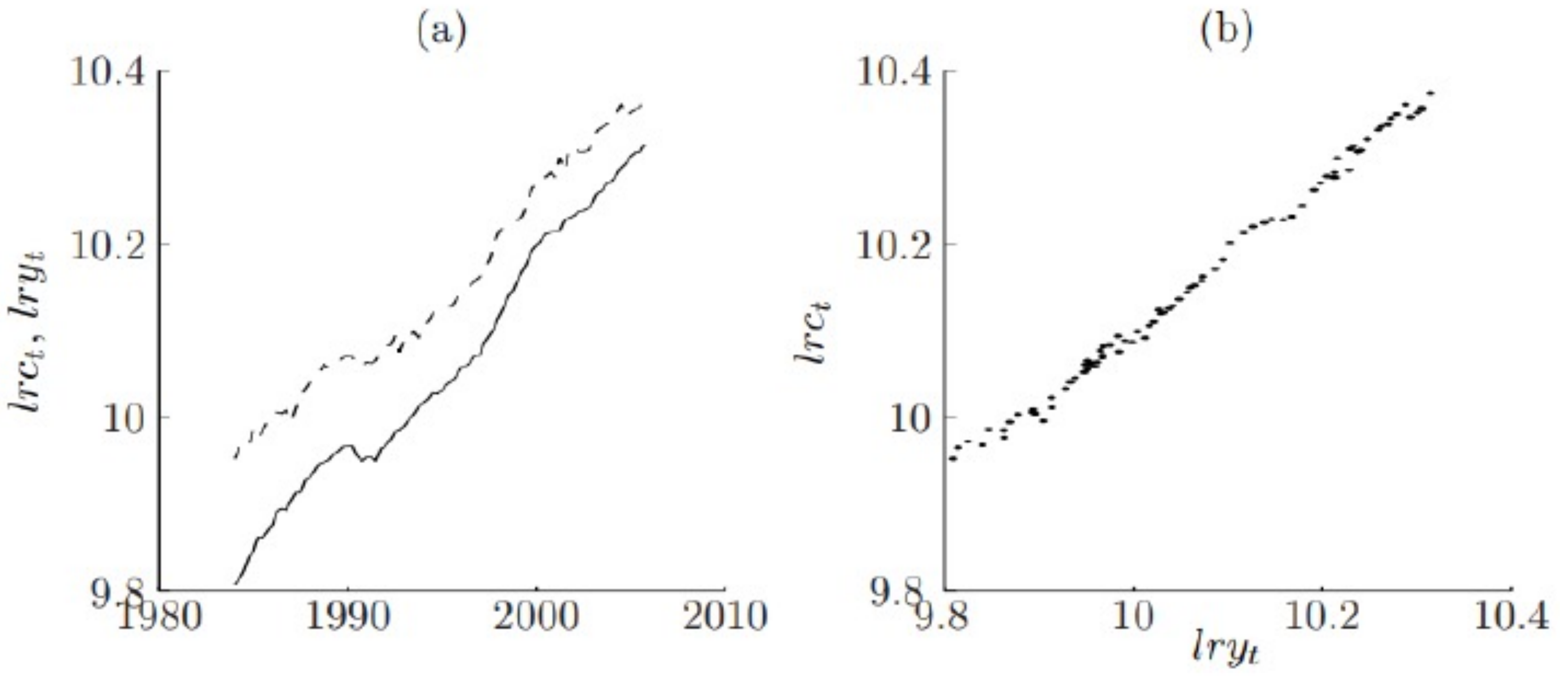
Cointegración

- Hipótesis de ingreso permanente: relación de largo plazo entre ingreso real y consumo real.

$$\ln(cr)_t = \beta_c + \beta_y \ln(yr)_t + u_t$$

cr: consumo real.
yr: ingreso real.
β_c, β_y: relación de largo plazo
u_t: término de error (desviación de corto plazo).

Cointegración



Cointegración

- Una de las pruebas más famosas de cointegración para dos (o N) variables es la de Engel y Granger (1987), que consta de 2 pasos.
- Suponiendo que tiene las variables Y_t y Z_t:

1. Utilizando pruebas Dickey Fuller de raíz unitaria, verifique si las series son **integradas del mismo orden**. En caso de no serlo **no** son **cointegradas**.
2. **Estime** la relación de **equilibrio** y verifique que las **desviaciones** de corto **plazo** son estacionarias.

$$Y_t = \beta_c + \beta_y Z_t + \epsilon_t$$

Hacer pruebas de raíz unitaria sobre $\widehat{\epsilon_t}$.

Índice

Dependencia entre variables

Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Prueba de causalidad de Granger

Cointregración

Modelo de corrección de error vectoriales (VECM)

Aplicación

Modelo de corrección de error vectoriales

- Considere un modelo con dos variables I(1), $Y_{1,t}$ y $Y_{2,t}$ y la siguiente relación de largo plazo:

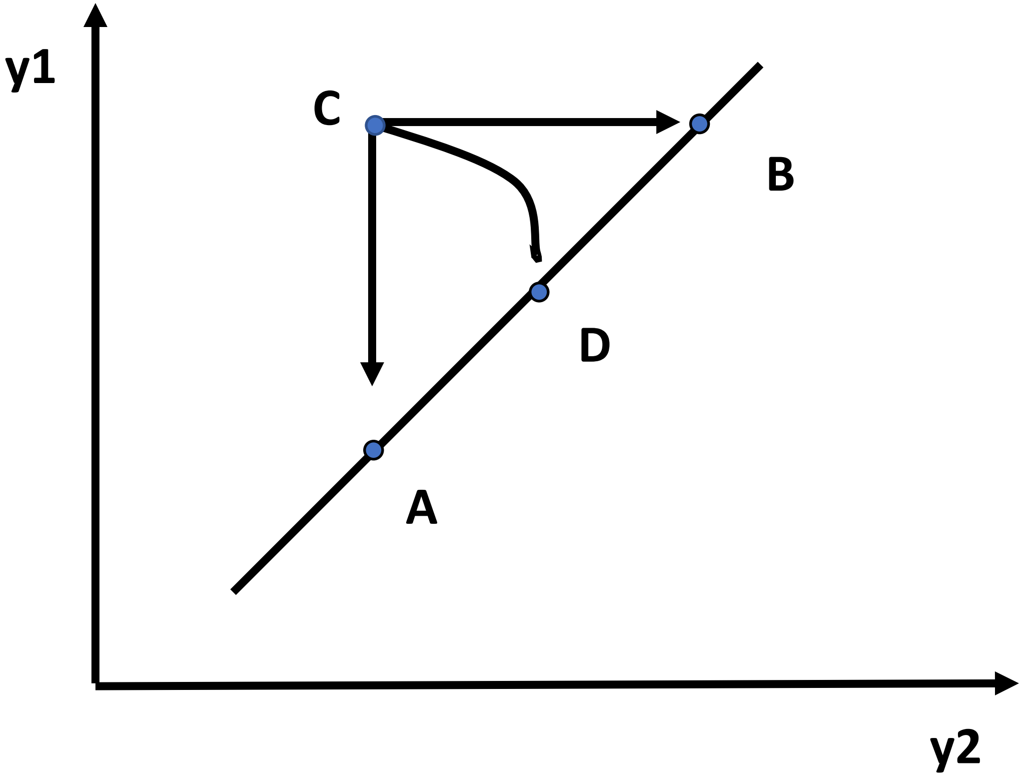
$$Y_{1,t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2,t} + u_t$$

- $Y_{1,t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2,t}$ es el equilibrio de largo plazo.

- u_t son las desviaciones de corto plazo (que se suponen estacionarias y por tanto las series están cointegradas).
- Revisemos el caso $\beta_1 > 0$.

Modelo de corrección de error vectoriales

- Partamos del punto de equilibrio A.
- Un choque positivo de corto plazo en el periodo anterior $u_{t-1} > 0$ lleva $Y_{1,t}$ al punto C sin afectar $Y_{2,t}$.
- Hay 3 trayectorias posibles para volver al equilibrio, las cuales se quieren rescatar con el modelo VECM.



Modelo de corrección de error vectoriales

- Suponiendo que los **movimientos de corto plazo** de $Y_{1,t}$ y $Y_{2,t}$ son una función lineal de las desviaciones de equilibrio se tiene que:

$$Y_{1,t} - Y_{1,t-1} = \gamma_1 u_{t-1} + v_{1,t} = \gamma_1 \left(Y_{1,t-1} - \beta_0 - \beta_1 Y_{2,t-1} \right) + v_{1,t}$$
$$Y_{2,t} - Y_{2,t-1} = \gamma_2 u_{t-1} + v_{2,t} = \gamma_1 \left(Y_{1,t-1} - \beta_0 - \beta_1 Y_{2,t-1} \right) + v_{2,t}$$

- Si $\gamma_1 < 0$ y $\gamma_2 = 0$, se observaría la trayectoria hacia A.
- Si $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 > 0$, se observaría la trayectoria hacia B.
- Si $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$, se observaría la trayectoria hacia algún punto D.

Modelo de corrección de error vectoriales

- Se puede controlar por rezagos de las mismas variables del sistema (en su transformación estacionaria):

$$\Delta Y_{1,t} = \gamma_1\left(Y_{1,t-1} - \beta_0 - \beta_1 Y_{2,t-1}\right) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{1,i}\Delta Y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{p} \phi_{1,i}\Delta Y_{2,t-i} + v_{1,t}$$

$$\Delta Y_{2,t} = \gamma_1\left(Y_{1,t-1} - \beta_0 - \beta_1 Y_{2,t-1}\right) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{2,i}\Delta Y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^{p} \phi_{2,i}\Delta Y_{1,t-i} + v_{2,t}$$

- Note que es una especificación bastante parecida a la especificación del VAR(p) pero controlando por el equilibrio de largo plazo, esta es la información que se pierde en el VAR vs el VECM cuando las series son cointegradas.

Modelo de corrección de error vectoriales

- Re organizando se tiene que:

$$\Delta Y_{1,t} = -\gamma_1\beta_0 + \gamma_1 Y_{1,t-1} - \gamma_1\beta_1 Y_{2,t-1} + \sum_{i=1}^{p}\alpha_{1,i}\Delta Y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_{1,i}\Delta Y_{2,t-i} + v_{1,t}$$

$$\Delta Y_{2,t} = -\gamma_1\beta_0 + \gamma_1 Y_{1,t-1} - \gamma_1\beta_1 Y_{2,t-1} + \sum_{i=1}^{p}\alpha_{2,i}\Delta Y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_{2,i}\Delta Y_{1,t-i} + v_{2,t}$$

$$\Delta Y_{1,t} = -\pi_{1,0} + \pi_{1,1} Y_{1,t-1} - \pi_{1,2} Y_{2,t-1} + \sum_{i=1}^{p}\alpha_{1,i}\Delta Y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_{1,i}\Delta Y_{2,t-i} + v_{1,t}$$

$$\Delta Y_{2,t} = -\pi_{2,0} + \pi_{2,1} Y_{1,t-1} - \pi_{2,2} Y_{2,t-1} + \sum_{i=1}^{p}\alpha_{2,i}\Delta Y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_{2,i}\Delta Y_{1,t-i} + v_{2,t}$$

- Se puede estimar en una sola etapa como un VAR(p) con los controles y restricciones respondientes, o estimar en una primera etapa el equilibrio de largo plazo e incluir como control en el VAR(p) las desviaciones de corto plazo en una segunda etapa.

Referencia

- González y Hernández (2016). Impactos indirectos de los precios del petróleo en el crecimiento económico colombiano. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-25962016000100004#4
- Wills, D. (2018). Pronóstico en finanzas, economía y otros. Clase posgrado Universidad de los Andes.
- Enders, W(2014). Applied Econometric Time Series. Recuperado de: https://www.wiley.com/en-us/Applied+Econometric+Time+Series%2C+4th+Edition-p-9781118808566

Gracias