

Metodologías para la optimización de portafolios

- **Profesores:** Germán González - Andrés Galeano.
- **Sesión 5:** Extensiones al modelo de media-varianza: cópulas, componentes principales, no normalidad, Frontera-media-CvaR.

Introducción

- En el mundo de Asset Allocation, suelen tenerse un conjunto grande de opciones de inversión.
 - Esto genera dificultades a la hora de implementar modelos avanzados de estadística, minería de datos u otros similares.
 - La gran mayoría de modelos multivariados asumen normalidad en las distribuciones o solo se concentran en explicar media y varianza.
- ¿Qué herramientas matemáticas podemos utilizar para modelar un mercado con muchos factores?
 - Componentes principales
 - Cópulas

Introducción

- Es importante usar estas herramientas:
 - Los modelos que hemos visto hasta ahora son sencillos y tienen bajo o medio poder predictivo.
 - Salir de normalidad es importante: el mundo no sigue distribuciones normales y pensar que sí es estimar mal los riesgos (y tal vez los retornos esperados).
 - Muchos de los modelos utilizados suponen normalidad y estiman los parámetros con ese supuesto.
 - Estas dos herramientas nos permiten tener modelos sofisticados y luego correlacionarlos.
 - ¡La mayoría de modelos sofisticados y de mayor poder predictivo son univariados!

Índice

Componentes principales

Cóputas

Calibración de marginales

Medidas de Riesgo

Frontera Media - CVaR

Índice

Componentes principales

Cóputas

Calibración de marginales

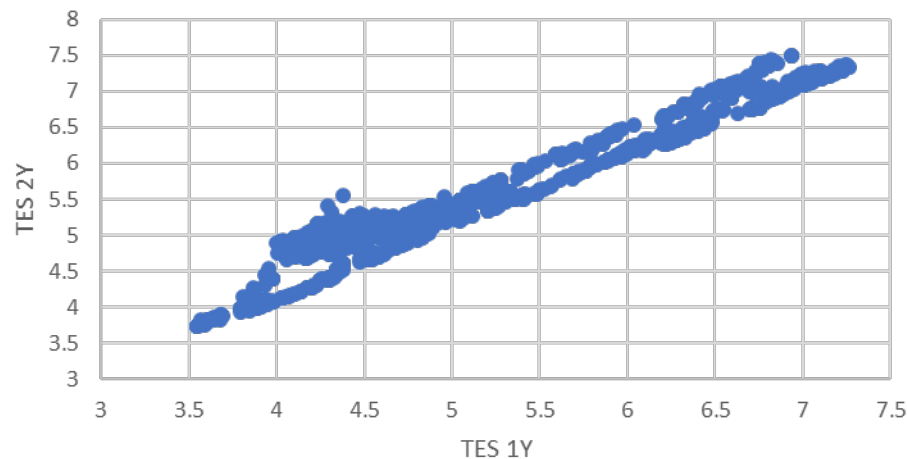
Medidas de Riesgo

Frontera Media - CVaR

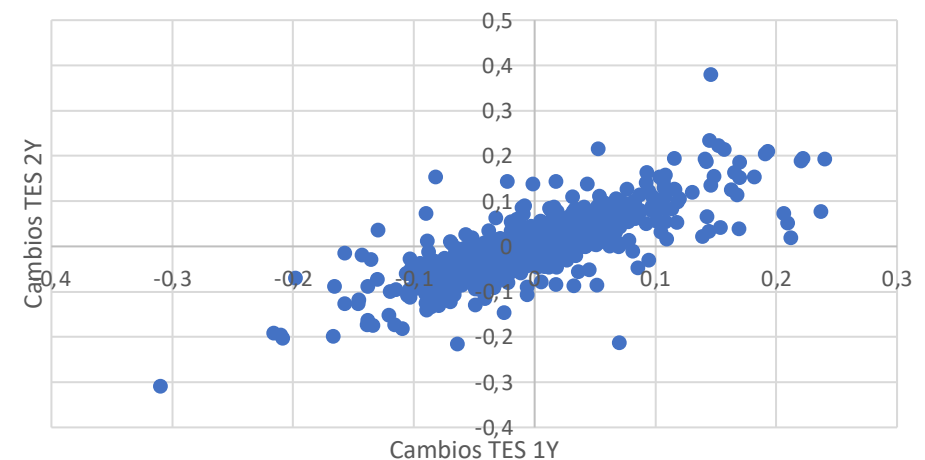
Componentes Principales

- Tomemos las siguientes dos variables:
 - Nodo 1Y de la curva TESCOP.
 - Nodo 2Y de la curva TESCOP.
- Es evidente que los dos nodos se parecen mucho, tanto en nivel como en cambios.

TES 1Y vs. TES 2Y



Cambios TES 1Y vs. TES 2Y

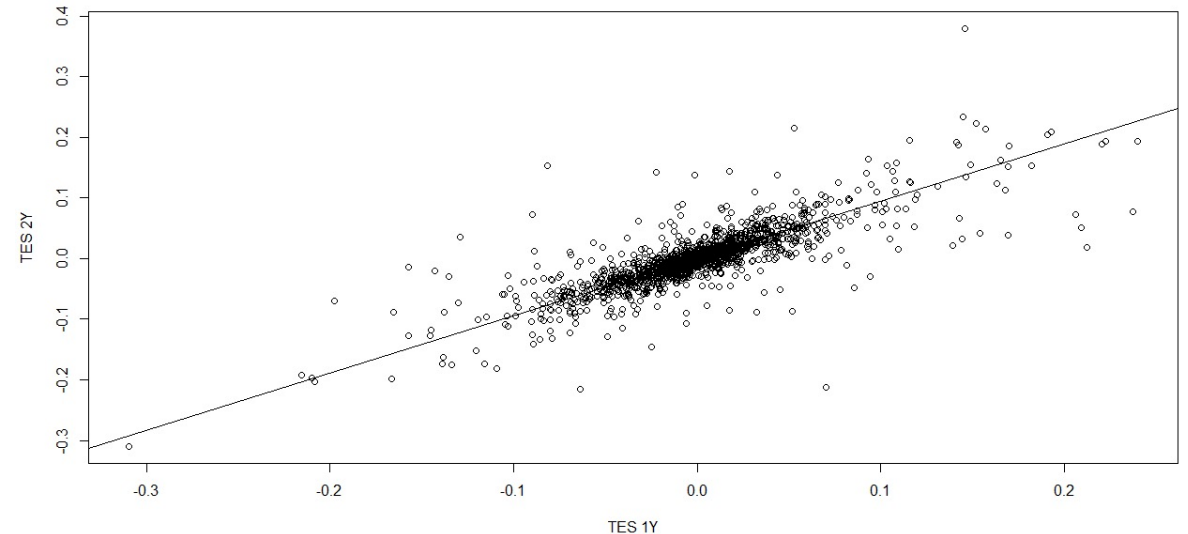


Componentes Principales

- Nuestro objetivo es hacer un modelo para predecir el comportamiento conjunto de los dos nodos.
 - Podríamos hacer un modelo conjunto (VAR, VEC, DCC – Garch, etc.).
 - O...
 - Podríamos hacer un modelo que correlacione de alguna manera ambas variables.
- Se observa que hay una alta correlación entre ambas variables.
- ¿Y si generamos una variable que represente a ambas?

Componentes Principales

- El análisis de componentes principales (ACP o PCA) consiste en generar variables independientes que expliquen lo mejor posible un conjunto de variables dependientes. Por ejemplo, generemos una variable.
- $C = 0.6873812 * \text{Nodo}_{1Y} + 0.7262968 * \text{Nodo}_{2Y}$
- ¿Por qué esos números?
 - Ya lo veremos pero por ahora:
$$\|w\| = 1$$
- Se ve bien:
- ¿Qué % de la varianza explica?



Componentes Principales

- Para saber que porcentaje de la varianza explica este componente, calculamos el siguiente valor:

$$\sum_i \frac{\sum_j (w * x_{i,j})^2}{J - 1}$$

- Para nuestro caso:

$$\sum_i \frac{\sum_j (w * x_{i,j})^2}{J - 1} = 0.00452$$

- Por otra parte, la varianza total es:

$$\sqrt{\sum_i \frac{\sum_j (x_{i,j})^2}{J - 1}} = 0.0050$$

- Es decir que el porcentaje de varianza explicada es:

$$\frac{0.0452}{0.0050} = 90.23\%$$

Componentes Principales

- Pero de donde salieron esos números:

$$w = \underset{\|w\|=1}{\operatorname{argmax}} \|Xw\| = \underset{\|w\|=1}{\operatorname{argmax}} w^T * X^T * X^T * w$$

- ¿Y esto con qué se come?
- ¡Esos de ahí son los vectores propios!
- Recordemos lo que es un vector propio y un valor propio:

Componentes Principales

- Tenemos nuestra matriz de Varianza-Covarianza: A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- Para obtener vectores y valores propios, necesitamos cumplir:

$$|A - \lambda * I| = 0$$
$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} \right|$$

- El determinante de esa matriz es:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

- Por lo que las dos posibles soluciones son:

$$\lambda_1 = -1 ; \lambda_2 = -2$$

Componentes Principales

- Ahora faltan encontrar los vectores de esta nueva matriz:

$$A * v = \lambda * v$$

- Hagamos el primero:

$$(A - \lambda) * v = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} * v = 0$$

- Donde $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 = -v_2$$

- Así, una solución posible es:

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Donde k_1 es una constante.
- Pero recordemos que $\|w\| = 1$
- Es decir:

$$\sqrt{k_1^2 + (-k_1)^2} = 1$$

$$2k_1^2 = 1$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Componentes Principales

Resumamos:

- Generamos nuestra matriz de varianza-covarianza.
- Encontramos los valores propios de la matriz cuadrada.
- Tomamos los valores propios de mayor a menor y obtenemos los vectores propios.
- Los valores propios representan la varianza explicada.
- Los vectores propios son los componentes principales – los pesos de nuestras nuevas variables.
- La suma de los valores propios son iguales a la suma de la varianza (diagonal de var-cov): la traza de la matriz es igual a la suma de sus valores propios.

Componentes Principales

Algunas consideraciones:

- Ventajas:
 - Las variables son linealmente independientes: podemos hacer modelos separados.
 - Es fácil de entender. Devolverse a las variables originales es trivial.
 - Usualmente permite reducir la dimensionalidad (esto es necesario!).
- Desventajas
 - Los pesos de nuestras variables son estáticos.
 - Esto hace que la correlación también lo sea.
 - El verdadero provecho se ve solo en variables correlacionadas.

Índice

Componentes principales

Cóputas

Calibración de marginales

Medidas de Riesgo

Frontera Media - CVaR

Cóputas

- Ya tenemos una buena herramienta para reducir la dimensionalidad y correlacionar a las variables.
- Sin embargo, no es la única metodología para modelar variables de forma conjunta.
- Las cóputas son una metodología muy utilizada en finanzas:
 - Permite correlacionar muchas variables con una sola distribución.
 - Con la correlación construida, se pueden modelar cada variable por separado y luego correlacionarlas.
 - La complejidad de los modelos univariados no afecta la complejidad del modelo multivariado.

Cóputas

- ¿Qué es una cóputa?

Empecemos por un teoremita: Teorema de Sklar:

- Supongamos que tenemos un conjunto de K retornos de activos observados en T periodos:

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{T,1} & \dots & x_{T,K} \end{bmatrix}$$

- Nuestro objetivo es saber la siguiente probabilidad:

$$H(\vec{x}) = H(x_1, \dots, x_K) = \Pr[X_1 \leq x_1, \dots, X_K \leq x_K]$$

- Es decir, nos interesa saber la probabilidad acumulada de que los activos renten menos que \vec{x} .

Cóputas

- Teorema de Sklar:

Cualquier distribución conjunta de X , puede ser definida por dos componentes independientes:

1. Las marginales.

$$\Pr_i[X_i \leq x_i] \quad \forall i$$

2. Una distribución conjunta de uniformes.
 - Esto es lo que llamaremos cóputa.

Cóputas

¿Cómo se lee esto?

$$C(u_1, \dots, u_K) = \Pr[U_1 \leq u_1, \dots, U_K \leq u_K]$$

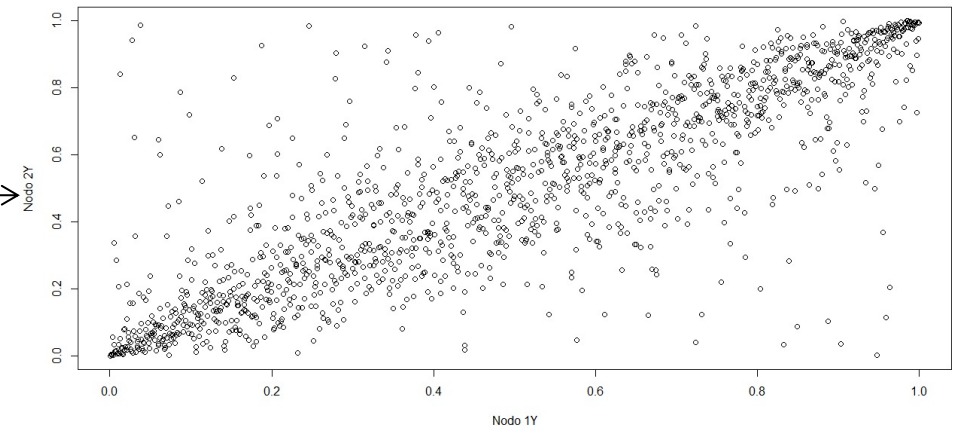
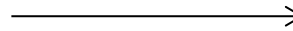
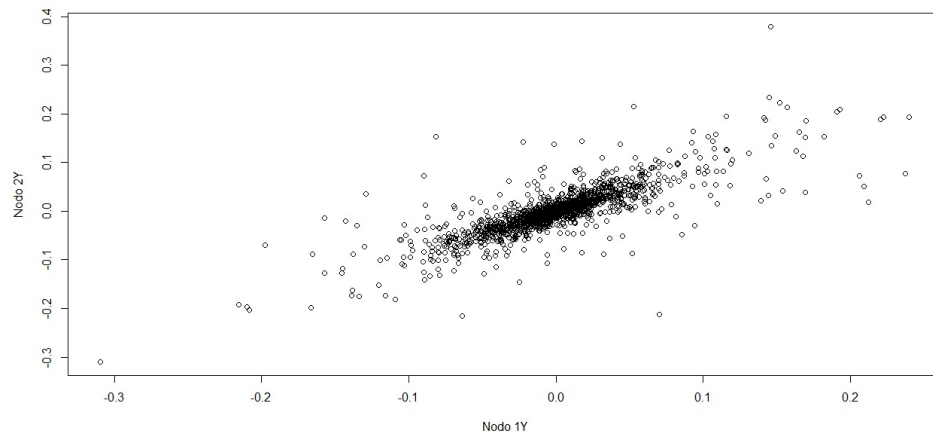
¿Y las U_i ?

$$U_i = \Pr[X_i \leq x_i] = F_i(x_i)$$

Cóputas

¿Cómo se calibra entonces la cóputa?

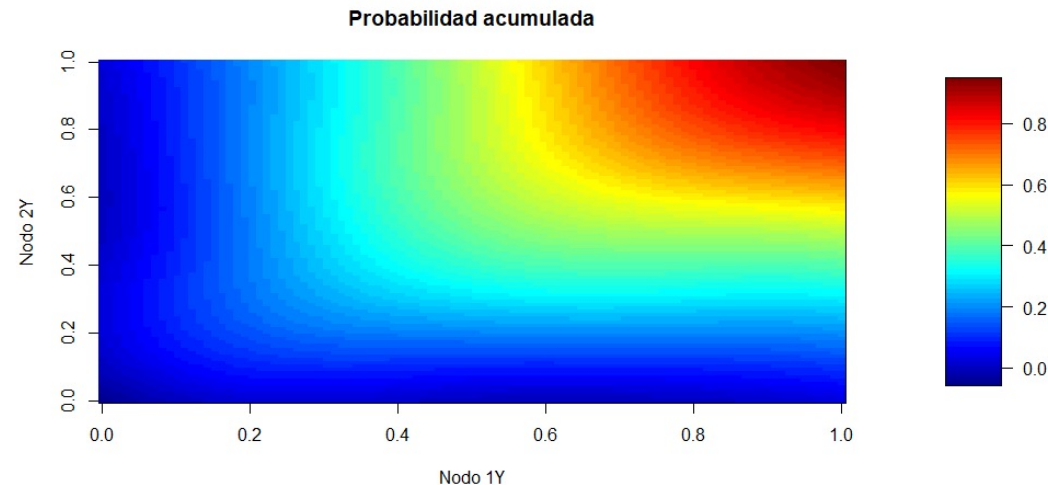
- Empecemos con la forma empírica:
 1. Transformemos nuestros X en U utilizando las distribuciones empíricas.



Cóputas

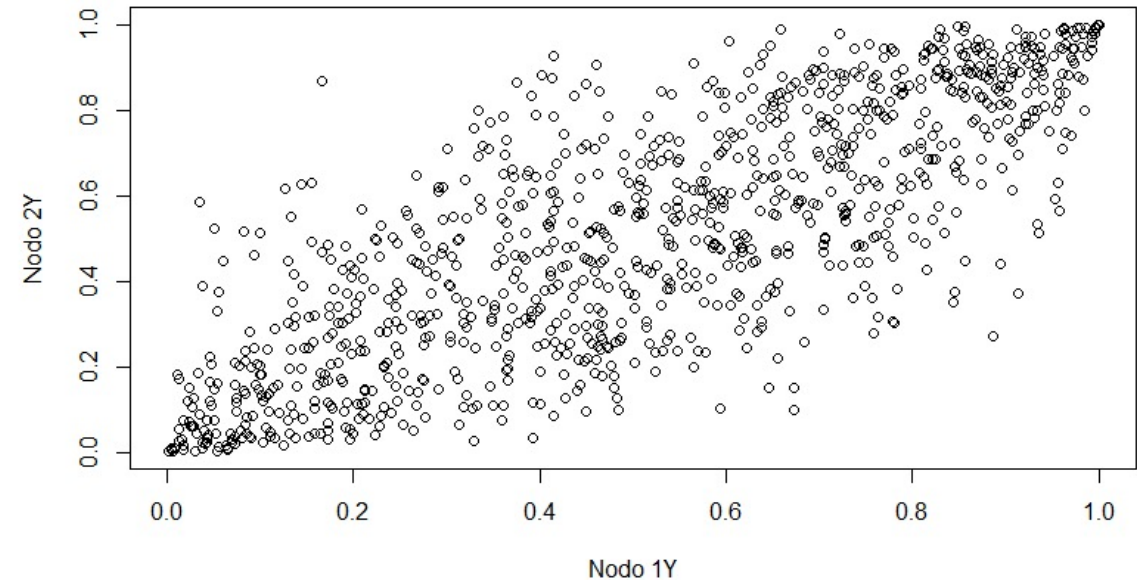
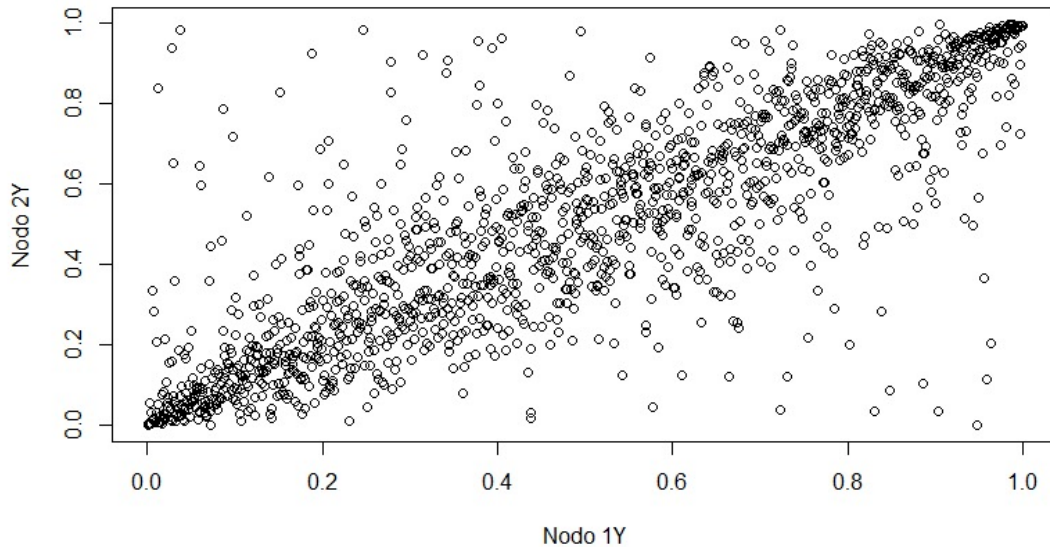
2. Calibramos una distribución conjunta con alguna de las distribuciones a nuestra disposición.
 - Esto es equivalente a usar marginales normal, logística, etc. para calibrar las marginales.

Por ejemplo, podríamos usar la empírica:



Cóputas

3. Con las distribuciones acumuladas, podemos obtener las distribuciones de densidad. Con esto, generar simulaciones es trivial.



Cóputas

Miremos una distribución normal multivariada. Su función de densidad está dada por:

$$f(x_1, \dots, x_K) = \frac{e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu)*\Sigma^{-1}*(x-\mu)}}{\sqrt{(2\pi)^K * \det(\Sigma)}}$$

- Lo anterior nos da una probabilidad dado un vector de X , unos valores esperados μ y una matriz de varianza covarianza Σ .

Miremos como se ve una cóputa normal:

$$f(U_1, \dots, U_K) = \frac{e^{-\frac{1}{2}*\begin{pmatrix} \phi^{-1}(U_1) \\ \dots \\ \phi^{-1}(U_K) \end{pmatrix}^T * (R^{-1} - I) * \begin{pmatrix} \phi^{-1}(U_1) \\ \dots \\ \phi^{-1}(U_K) \end{pmatrix}}}{\sqrt{\det(R)}}$$

- Se ven parecidos (y lo son).
 - Las medias son 0, por definición de normal estándar.
 - La desviación es 1, por la misma razón.
 - La matriz de varianza-covarianza se reduce a la matriz de correlaciones.
- ¿La diferencia?
 - Las U son uniforme, mientras que las x son normales.
 - Luego se transforman las uniformes a las distribuciones marginales que queramos.

Componentes Principales

Algunas consideraciones:

- Ventajas:
 - Podemos separar la distribución individual de la conjunta, permitiendo modelos complejos para las marginales.
 - Es usualmente más difícil de comprender frente a componentes principales pero: hay muchas opciones de cópulas y muchas formas de obtener las uniformes.
- Desventajas
 - Escoger mal la cópula es fatal: la normal, por ejemplo, tiene independencia en colas.
 - Esta metodología no permite reducir la dimensionalidad.

Índice

Componentes principales

Cóputas

Calibración de marginales

Medidas de Riesgo

Frontera Media - CVaR

Calibración de marginal

- Hasta ahora nos hemos concentrado en la distribución conjunta de las variables.
 - En cópulas nos concentramos a la distribución de las uniformes.
 - En componentes principales nos concentramos en el cálculo de los pesos y en la construcción de variables linealmente independientes.
- Pero igual de importante es construir correctamente las variables individuales:
 - En las cópulas, nos concentramos en las marginales.
 - En los componentes, nos concentramos en los scores (las variables creadas).

Calibración de marginal

1. ARMA-GARCH: Más que un mundo de modelos, concentrémonos en uno general que nos permita aproximarnos a los problemas de manera más general.
2. Modelos de minería de datos: Este conjunto de técnicas nos puede ser de utilidad cuando tengamos muchos datos.

Calibración de marginal

1. ARMA-GARCH:

- Lo que queremos acá es generar errores que sean iid.
- ¿Para qué?
 - Necesitamos variables iid para poder aplicar la cópula. Recordemos que las marginales son una sola por cada variable. Si la marginal no es iid, tenemos un gran problema.
- Ejemplo: Supongamos que la volatilidad de un activo en el tiempo t es 0.9 por la volatilidad del tiempo pasado y que el retorno tiene una distribución normal con dicha volatilidad cambiante.
 - Así, es incorrecto decir que la marginal es una normal con media cero y varianza σ^2 , simplemente porque σ^2 no es constante en el tiempo.

Calibración de marginal

Entonces, ¿cómo volvemos nuestra distribución iid?

- Acá es donde hay más trabajo.
- Lo primero es identificar los problemas que tiene:
 - Heteroscedasticidad.
 - Autocorrelación serial.
 - Etc.
- ¿Cómo corregimos estos problemas?
 - Autocorrelación serial: ARIMA.
 - Heteroscedasticidad: GARCH.

Calibración de marginal

1. Modelo ARMA(p,q):

$$r_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i * r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \Theta_i * \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

$\varepsilon \sim N(0, \sigma_t^2)$

2. Modelo GARCH(p,q):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i * \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i * \sigma_{t-i}^2 + \mu_t$$

$\mu \sim N(0, \eta)$

3. DEGARCH:

$$\frac{r_t}{\sigma_t} = \frac{c + \sum_{i=1}^p \varphi_i * r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \Theta_i * \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t}{\sigma_t}$$

$\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \sim N(0,1) \rightarrow es\ iid$

$f\left(\frac{r_t}{\sigma_t} \middle| t-1\right)$ posee la misma distribución que el error

Calibración de marginal

Aunque en el caso anterior asumimos $\varepsilon \sim N(0, \sigma_t^2)$, queremos poder extender a otras distribuciones.

- Por ejemplo, $\varepsilon \sim t(v_t)$.
- El caso anterior es similar a nuestro problema anterior. Si la varianza no es constante, tampoco lo es los grados de libertad.
- El proceso general se puede describir como:
 1. Definimos la distribución del error.
 2. Estimamos σ_t^2 y los parámetros por máxima verosimilitud.
 3. Hacemos DEGARCHING.

Calibración de marginal

Algunas consideraciones

- Ventajas:
 - Logramos crear variables que son iid.
 - Si lo hicimos bien, obtuvimos la mejor distribución conocida para el error, lo que nos dará un gran poder para medir el riesgo y los retornos esperados.
- Desventajas
 - El modelo asume relaciones lineales.
 - Se asumió que la curtosis y la asimetría eran constantes en el tiempo. Si esto no se cumple, seguimos sin tener una distribución iid.

Calibración de marginales

- Miremos algunos:

Regresión lineal:

$$\hat{Y} = X * \hat{B} + \varepsilon$$
$$\varepsilon \sim N(0, \sigma)$$

- Minimizamos el error cuadrático.
- Acá nuestros X pueden ser los rezagos u otras variables de interés.
- Permite capturar efectos unidireccionales de las variables.
- Es un modelo interpretable y fácil de usar e implementar.
- Ventajas: Simple, fácil de estimar e interpretable.
- Desventajas: Bajo poder predictivo, poca personalización y solo efectos unidireccionales.

Regresión cuantílica:

$$Q_{\tau}(\hat{Y}) = X * \hat{B} + \varepsilon$$
$$\varepsilon \sim N(0, \sigma)$$

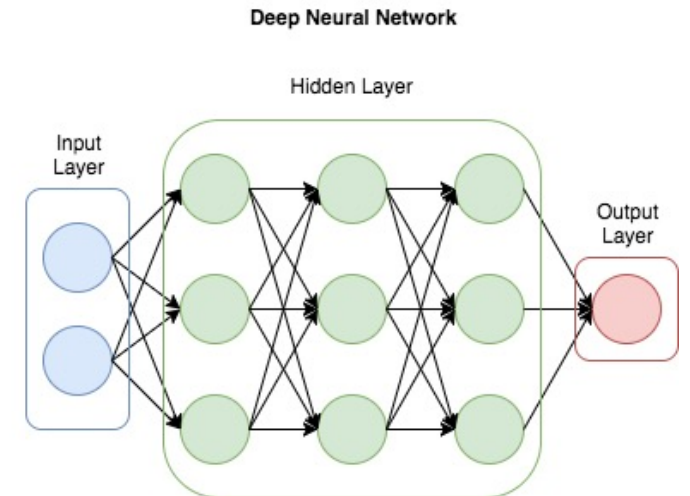
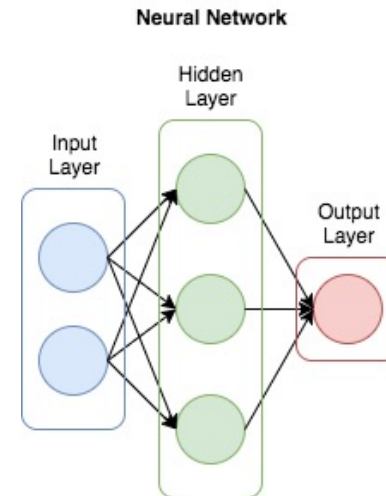
- Minimizamos el error contra algún percentil específico (τ).
- Acá nuestros X pueden ser los rezagos u otras variables de interés.
- Permite capturar efectos unidireccionales de las variables.
- Es un modelo interpretable y fácil de usar e implementar.
- Ventajas: Simple, fácil de estimar e interpretable.
- Desventajas: Bajo poder predictivo, poca personalización y solo efectos unidireccionales.

Calibración de marginales

- Miremos algunos:

Redes neuronales:

- <https://playground.tensorflow.org/>
- Compleja red de interacciones entre las variables.
 - Funciones de activación.
 - Capas.
 - Tasas de aprendizaje.
 - Regularización.
- Ventajas: Muy potentes, alta capacidad predictiva y posibilidad de capturar interacciones y relaciones no lineales.
- Desventajas: Cero interpretabilidad, alto costo computacional y probabilidad de sobreajuste.

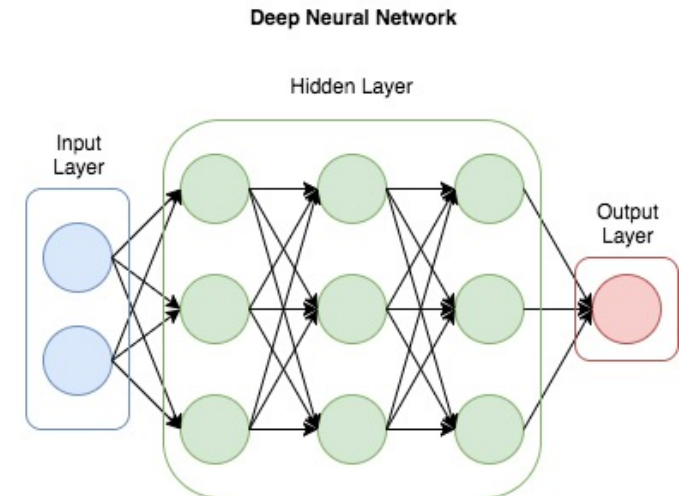
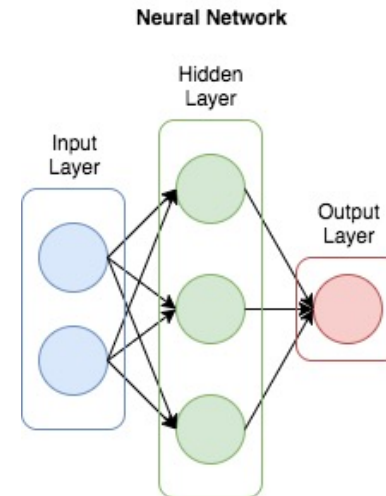


Calibración de marginales

- Miremos algunos:

Redes neuronales:

- <https://playground.tensorflow.org/>
- Compleja red de interacciones entre las variables.
 - Funciones de activación.
 - Capas.
 - Tasas de aprendizaje.
 - Regularización.
- Ventajas: Muy potentes, alta capacidad predictiva y posibilidad de capturar interacciones y relaciones no lineales.
- Desventajas: Cero interpretabilidad, alto costo computacional y probabilidad de sobreajuste.



Calibración de marginales

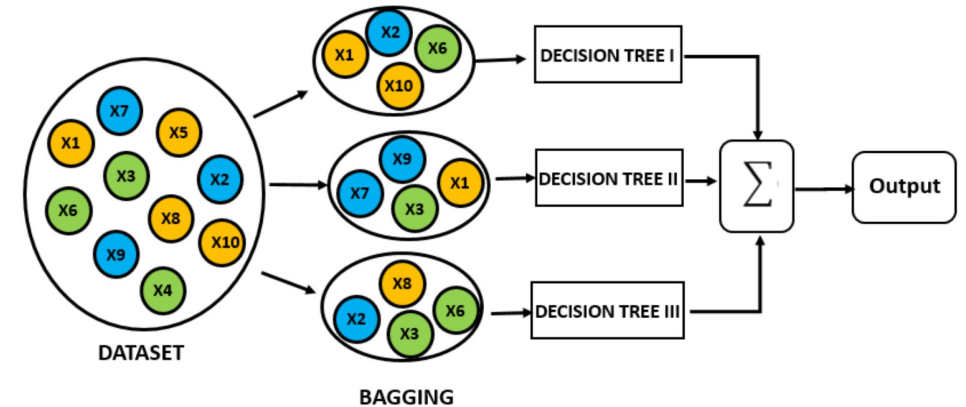
- Random Forest

Metodología que busca dividir la muestra de entrenamiento en diferentes **sub-muestras** con las cuales luego se construyen diferentes estimadores a partir de árboles de decisión a esas sub-muestras.

Un árbol inicia desde la raíz, y se extiende en diferentes particiones que tienen como objetivo **dividir la muestra** en dos o más conjunto de datos dependiendo de las **características de cada observación**.

Objetivo: crear **grupos homogéneos** que se separan a partir de características relevantes de la muestra.

Entre más correlación existe entre los modelos:
La importancia de dos características iguales se reduce a la mitad debido a que menor es el poder predictivo.
son elegidos al azar con la misma probabilidad.



Índice

Componentes principales

Cóputas

Calibración de marginales

Medidas de Riesgo

Frontera Media - CVaR

Medidas de riesgo

Distribución de pérdidas

- Arrancamos de un portafolio, y unos factores de riesgo
- Portafolio: colección de instrumentos financieros
- Factores de riesgo $\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$.
- Variación en el tiempo: $\mathbf{Z}(t)$
- Valoración del portafolio:

$$V = V(t, \mathbf{Z}(t))$$

- Cambios en los factores de riesgo durante Δt :

$$\mathbf{X}(t) = \Delta \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}(t + \Delta t) - \mathbf{Z}(t)$$

- Δt es el horizonte de análisis (1 día, 10 días, ...)
- Se buscan modelos donde \mathbf{X} es estacionario (por ejemplo, distribución independiente de t)

Medidas de riesgo

- Proceso de pérdidas:

$$L_{[t, t+\Delta t]} = L(t) = -\Delta V(t) = -[V(t+\Delta t, \mathbf{Z}(t+\Delta t)) - V(t, \mathbf{Z}(t))]$$

$$L(t, \mathbf{x}) = -[V(t+\Delta t, \mathbf{Z}(t)+\mathbf{x}) - V(t, \mathbf{Z}(t))]$$

- Para estudiar el riesgo del portafolio se analiza la distribución de $L(t, \mathbf{x})$
- Aproximación de primer orden:
- Esas derivadas parciales son las mismas sensibilidades del portafolio

Medidas de riesgo

- Lo importante no es la pérdida como concepto
- Lo importante es identificar la variable objetivo y sus fuentes de incertidumbre (factores de riesgo usados para determinar esa variable)
- La plataforma de análisis es la distribución de esta variable objetivo
- ¿Cómo obtener esta distribución? A partir de la distribución de los factores de riesgo
- ¿Cómo obtener esa distribución? Historia + Modelo

Medidas de riesgo

- Denotamos por F_X la distribución de X (independiente de t)
- En general, la historia de X es el punto de arranque para calibrar F_X
- Llamemos $\mathfrak{F}_T = \sigma(X(t); t \leq T)$ la información generada hasta el tiempo T
- En general $F_{X_{t+1} | \mathfrak{F}_t}$ no es igual a F_X
- Cuando los X_t son independientes del pasado, entonces las dos distribuciones (condicional y no condicional) son iguales
- La distribución no condicional de las pérdidas es

$$F_{L_t}(l) = \mathbf{P}[L_t \leq l]$$

- La distribución condicional de pérdidas es

$$F_{L_t | \mathfrak{F}_t}(l) = \mathbf{P}[L_t \leq l | \mathfrak{F}_t]$$

Medidas de riesgo

➤ Necesidad

- Dado un Portafolio, ¿cuánto dinero es conveniente provisionar para asumir posibles pérdidas?

➤ Elementos usados para contestar la pregunta:

- Horizonte de Inversión T_{final}
- Factores de Riesgo
- Función de Valoración – o de Pérdidas – (en términos de estos factores)
- Distribución de los factores, y del valor del portafolio
- Medición del Riesgo \Rightarrow Provisión necesaria = Medida de Riesgo

Medidas de riesgo

- Se arranca de un espacio de probabilidad dado

$$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

- Ω es el conjunto de posibles “estados del mundo” en el futuro, \mathfrak{F} es el conjunto de “eventos” y P es una función probabilidad sobre los eventos
- La **pérdida** de un portafolio, Z , es una variable aleatoria en este espacio
- Una medida estática de riesgo es una función que le asigna un número real a pérdidas finales de portafolios:

$$\rho: \{\text{Variables Aleatorias en } \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Supongamos tasas de interés iguales a 0, por simplicidad

Medidas de riesgo

- ¿Qué propiedades debe cumplir ρ ?
- Adoptemos los axiomas de Coherencia, introducidos por Artzner, Delbaen, Eber, Heath (1999)
- Sean Z , Z_1 y Z_2 pérdidas de portafolios (variables aleatorias en Ω):

1. Monotonicidad:

$$Z_1 \leq Z_2 \Rightarrow \rho(Z_1) \leq \rho(Z_2)$$

2. Homogeneidad Positiva:

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \rho(aZ) = a\rho(Z)$$

3. Subaditividad:

$$\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$$

4. Invarianza bajo Traslación:

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(Z + a) = \rho(Z) + a$$

Medidas de riesgo

➤ ¿Cómo se mide en general el riesgo de portafolios?

➤ VaR

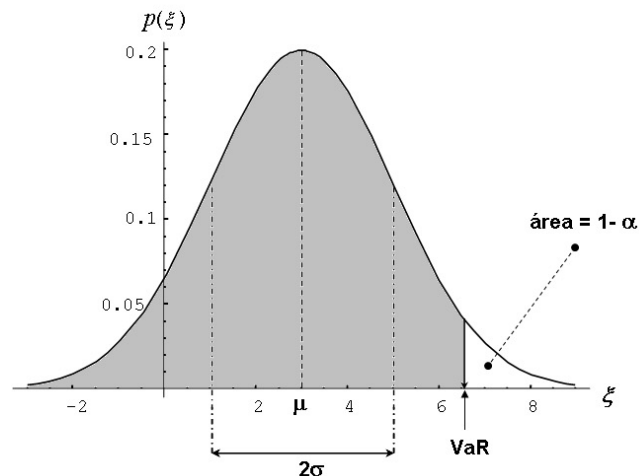
- VaR histórico.
- VaR por factores.

➤ Otras

- ES, CVaR.
- Máxima pérdida y ganancia: Drawdown.
- Promedio.
- Promedio de pérdidas y ganancias.

Medidas de riesgo

- **VaR.** Para un portafolio y nivel de confianza α dado, VaR_α es un umbral de pérdidas, tal que, para cierto horizonte de tiempo, la probabilidad que la pérdida del portafolio supere el umbral es $(1 - \alpha)$.
- Para un nivel de confianza α (e.g., 95%),



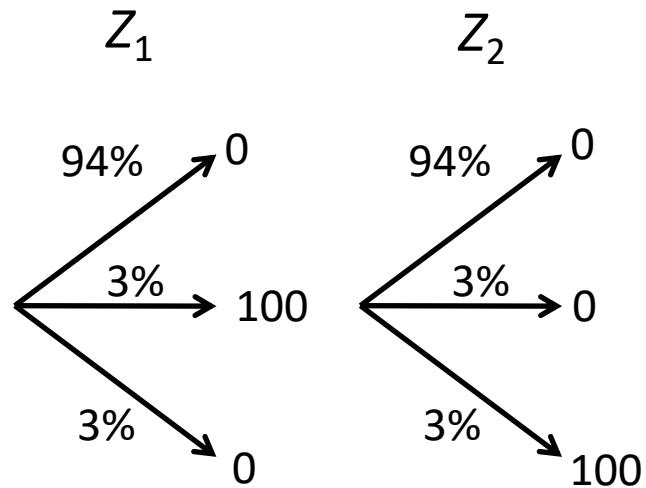
- Si $L \sim N(\mu, \sigma)$,

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha),$$

donde Φ es la distribución (acumulada) de una variable normal estándar

Medidas de riesgo

- VaR no es coherente.
- No cumple subaditividad (en ocasiones, fomenta la desdiversificación)



Confianza: 95%
 $\text{VaR}(Z_1)=0$
 $\text{VaR}(Z_2)=0$
 $\text{VaR}(Z_1+Z_2)=100$

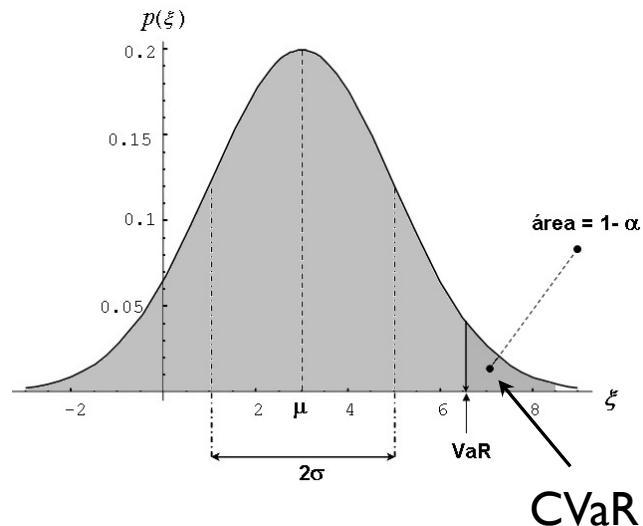
Medidas de riesgo

- **CVaR (AVaR, ES).** El promedio de las pérdidas que superan el VaR.

$$ES_{\alpha}(X) = E[X \mid X \geq VaR_{\alpha}(X)]$$

- Para un nivel de confianza α ,

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_{\beta}(X) d\beta$$



- Si $L \sim N(\mu, \sigma)$,

$$ES_{\alpha}(L) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha))$$

donde Φ es la distribución (acumulada) de una variable normal estándar, y ϕ es su densidad

- ES sí es coherente
- Claramente, $ES_{\alpha}(L) \geq VaR_{\alpha}(L)$

Índice

Componentes principales

Cóputas

Calibración de marginales

Medidas de Riesgo

Frontera Media - CVaR

Fronteras eficientes

- Media-Varianza:

$$\min_w \sigma_w \quad s.a : \mu_w = e; e \in \mathbb{R}$$

$$\min_w w * \Sigma * w^T \quad s.a : w * \mu = e; e \in \mathbb{R}$$

- Media-CVaR:

Donde:

$$\min_x c^T * x; s.a : A * x \geq b_0;$$

$$c^T = \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{-1}{(1-\alpha)*S} \quad \dots \quad \frac{-1}{(1-\alpha)*S} \quad -1 \right)$$

$$x^T = (w_1 \quad \dots \quad w_N \quad d_1 \quad \dots \quad d_S)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & \dots & \mu_N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{11} & \dots & r_{1N} & 1 & 0 & \dots & 1 \\ r_{21} & \dots & r_{2N} & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ r_{S1} & \dots & r_{SN} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_{Min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Fronteras eficientes

- ¿Cómo obtenemos todos estos números?
 1. Simulamos los retornos (s escenarios).
 2. Generamos las restricciones.
 3. Definimos nuestro vector de retornos esperados a calcular (los que recorremos en cada punto de la frontera).
 4. Aplicamos el optimizador.

Gracias

