

# Estudio de percolación de nodos en redes cuadradas 2d

Micaela Mosquera Panizo and Lucía Fabio

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.*

(Dated: 2 de mayo de 2017)

A partir de estudios computacionales hemos determinado el comportamiento crítico de una red de nodos bi-dimensional. Esta red percola siguiendo una transición de fase de 2° orden, siendo el parámetro de orden la intensidad del cluster percolante. Se buscó el punto crítico por distintos métodos para redes de diferentes tamaños, los cuales permitieron inferir el punto crítico de una red infinita. Se obtuvo para el mismo un valor de  $P_c(\infty) = 0,5939$ . Se calcularon además, los exponentes críticos correspondientes a la transición correspondiente a la red bi-dimensional.

## I. INTRODUCCIÓN

Los primeros estudios de percolación los realizaron Flory y Stockmayer alrededor de los años 40, durante la segunda guerra mundial. Usualmente los comienzos de la teoría se atribuyen al trabajo de Broadbent y Hammersley en el año 1957, introduciendo un tratamiento matemático, probabilístico y geométrico del mismo. A pesar de esto, la teoría de percolación enfocada a los exponentes críticos, comenzó a desarrollarse en la década del 70, a partir del trabajo de Essam y Gwilym, que desataron una *avalancha* de publicaciones en esa época. En resumidas palabras, la teoría de percolación tiene como objetivo, estudiar y resolver de manera simplificada, aunque no de manera exacta, transiciones de fase, a partir de un modelo basado en redes de nodos que pueden estar ocupados o no.

El modelo trabaja con diversas redes, desde redes unidimensionales hasta redes de dimensión infinita, donde cada nodo o sitio de la red tendrá una cierta probabilidad  $p$  de estar ocupado o desocupado, y la misma será independiente de la situación del nodo vecino. Grupos de vecinos inmediatos ocupados forman agrupaciones, que comúnmente se los conoce como clusters. Uno de los objetivos de este modelo es estudiar el comportamiento del sistema en el rango de probabilidades cercanas a una probabilidad crítica. La misma se corresponde con la aparición del cluster percolante (que atraviesa toda la red de arriba a abajo) en la red utilizada.

## II. EL MODELO

### A. Transición de fase

Cuando se varía la probabilidad de ocupación de los nodos de una red, se observa que existe un valor de probabilidad a partir del cual aparece un cluster percolante en la red que se está observando. Esto refleja una transición de fase, donde el parámetro de orden de la misma es la intensidad del cluster percolante (definido como el número de nodos que son parte del cluster percolante en relación al total de nodos de la red), el cual es nulo para probabi-

lidades menores o iguales que la crítica, para luego crecer exponencialmente a medida que se aumenta la probabilidad. Uno de los objetivos del estudio de las transiciones de fase es observar el comportamiento de diversas magnitudes asociadas al sistema en un entorno cercano al punto de la transición de fase. El comportamiento de estas magnitudes es diferente en cada caso: ciertas magnitudes presentan discontinuidades, algunas divergen, y otras comienzan a ser distintas de cero. Para explicar este comportamiento, es necesario recurrir a los exponentes críticos (el comportamiento de las magnitudes puede describirse como leyes de potencia), que son particulares del sistema que se esté analizando. En la próxima sección se ampliará el tema para sistemas percolantes en redes bidimensionales.

### B. Leyes de potencia y exponentes críticos

Los exponentes críticos, describen el comportamiento de ciertas magnitudes cerca de una transición de fase. Como se mencionó anteriormente, en percolación, la transición resulta en la aparición de un cluster infinito. Estos exponentes son universales, en el sentido que dependen sólo del modelo de percolación utilizado y de la dimensión espacial. La Tabla I resume las principales leyes de potencia obtenidas en la literatura para redes percolantes.

Cuadro I. Valores teóricos hallados en la literatura.

Símbolo	Ley	Valor
$d$	—	$d = 2$
$D$	$M \sim L^D$	$D = 91/48$
$\nu$	$\xi \sim  p - p_c ^{-\nu}$	$\nu = 4/3$
$\tau$	$n(p_c) \sim s^{-\tau}$	$\tau = 1 + d/D$
$\sigma$	$z = s^\sigma(p - p_c)$	$\sigma = (\nu D)^{-1}$
$\beta$	$m_1(p) \sim (p - p_c)^\beta$	$\beta = \nu(d - D) \text{ — } \beta = (\tau - 2)/\sigma$
$\gamma$	$m_2(p) \sim  p - p_c ^{-\gamma}$	$\gamma = (3 - \tau)/\sigma$

La intensidad del cluster percolante está dada por la relación  $P \sim |p - p_c|^\beta$  para  $p$  mayor a  $p_c$ , y es nula en otro caso. El número de clusters de tamaño  $s$  que aparecen a

probabilidad  $p$  está dado por la expresión  $n_s(p) = q_0 s^{-\tau}$ . Otra relación importante para obtener el exponente crítico  $\gamma$ , es el momento de orden 2, cuya ecuación es la que sigue:

$$m_2(p) = \sum_s s^2 n_s(p) \sim |p - p_c|^{-\gamma} \quad (1)$$

Como se detallará con mayor detalle en la próxima sección, para obtener el exponente  $\tau$ , es necesario detallar la dependencia del factor  $q_0$  con el exponente crítico  $\tau$ . En este trabajo, primeramente, obtendremos una primera estimación del exponente crítico  $\tau$ , sin dar la dependencia de  $q_0$ , y luego, desarrollando otro método, se obtendrá una mejor estimación del mismo. Otro punto importante a señalar es la dependencia de la masa del cluster percolante respecto del tamaño de la red en función de la probabilidad. En el punto crítico, la masa del cluster infinito es proporcional al factor  $L^D$  del tamaño de la red.  $D$  se conoce como dimensión fractal. En probabilidades por encima de la crítica, la masa es en cambio proporcional al tamaño de la red  $L$  elevado a la dimensión de la red  $d$ ; como en este trabajo se utilizaron solo redes bidimensionales, se tiene que  $d = 2$ . Esto se puede ver resumido en la ecuación 2.

$$M(L) \begin{cases} L^d & \text{si } p > p_c \\ L^D & \text{si } p < p_c \end{cases} \quad (2)$$

Con el momento de orden 1,  $m_1(p)$ , se puede obtener el exponente crítico  $\beta$ , que a su vez se puede obtener a partir de  $\nu$  y  $D$ . Este momento se calcula a partir de la intensidad del cluster percolante. El momento de orden 2,  $m_2(p)$  nos da información sobre el exponente  $\gamma$ .

### C. Efectos de red finita

Cuando se busca resolver numericamente problemas de percolación, se tiene acceso a una ventana finita de la red infinita que se propone teóricamente. Cerca de la probabilidad crítica, magnitudes que presentan cambios abruptos en las redes infinitas, lo hacen de manera suave para las finitas. En resumen, el comportamiento de una red de tamaño finito se aparta del correspondiente para tamaño infinito. En cambio, en el punto de transición se encuentra que el sistema está libre de escalas y se pueden utilizar la leyes de exponentes críticos.

La ecuación 3 expresa la relación funcional entre el número de cluster de tamaño  $s$ , y el valor de  $s$ , utilizando una cierta función  $f(z)$ , la cual es determinada por métodos computacionales. La misma deberá satisfacer las restricciones físicas implica. Debido a que en la probabilidad crítica se espera una ley de potencias sobre  $s$ , es necesario que  $f(0)=1$ . Además, dado que para un  $s$  existe una cierta probabilidad que maximiza el número de clusters de ese tamaño, eso conlleva a que la función  $f(z)$  presente un único máximo. La función también debe anularse cuando  $z$  tiende a  $\pm\infty$ .

$$n_s(p) = q_0 s^{-\tau} f(z) \quad , \quad z = s^\sigma (p - p_c) \quad (3)$$

### D. Renormalización

Es posible además, explotar el hecho de que cerca de la transición de fase de muestra libre de escalas. Si se reescala el sistema, deben seguir siendo válidas las leyes de potencias anteriores. Esto refleja el hecho que la probabilidad crítica es un punto fijo respecto de la transformación. Dada una probabilidad, si la misma no coincide con la crítica y el sistema es reescalado, la probabilidad tenderá a dos atractores, el 0 y el 1, dependiendo de donde se tomo la probabilidad inicial. Esto implica que al renormalizar, me alejo del punto crítico. En cambio, si se toma como inicial la crítica, el sistema, al ser reescalado, se mantiene igual, se reconstruye a si mismo. Esto se debe a que la distancia de correlación, infinita en pc, seguirá siendo infinita, puesto que la renormalización siempre será sobre un valor finito. Al mantenerse infinita, implicará siempre estar en  $p_c$ . Cabe destacar que la renormalización de celda pequeña solo es válida para redes triangulares y redes bidimensionales. Por otro lado, es importante señalar que hay que elegir el criterio de normalización que mas se asemeje a la situación física del problema.

## III. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Se estudiaron redes cuadradas de lado  $L = 4, 16, 32, 64, 128$  por medio del algoritmo de Hoshen-Kopelman [1]. De las mismas se obtuvo la probabilidad crítica por diferentes métodos, uno de ellos promediando varios resultados obtenidos para redes generadas a partir de diferentes semillas de números aleatorios, a partir del cual se obtuvo la dispersión de este promedio y se calculó la probabilidad crítica correspondiente a la red infinita.

Se determinaron los exponentes críticos a partir de las leyes dadas para cada uno, estudiando tamaño de clusters, distribución de los mismos en función de la probabilidad, etc.

Se determina la dimensión fractal  $D$  a partir de la masa del cluster percolante, que se calcula como el número de nodos pertenecientes al mismo, y observando su dependencia con  $L$ .

A partir del cálculo de la intensidad del cluster percolante se puede obtener el exponente crítico  $\beta$ , modelando su comportamiento cerca de  $p_c$  como una ley de potencias.

Se verifica la hipótesis de scaling encontrando la forma funcional de la función de scaleo  $f(z)$ . A partir de la misma, se puede calcular el valor de  $\tau$  siguiendo la correspondiente ley de potencias ya mencionada.

Finalmente, para obtener el exponente  $\gamma$  se realiza un proceso de *gamma-matching*, donde se calcula el momen-

to de segundo orden y se observa su comportamiento en función de  $p$ .

#### IV. RESULTADOS

##### A. Determinación de $p_c(\infty)$ y $\nu$ , y $\tau$

Se usaron distintos métodos para la determinación numérica del punto crítico (*i.e.* búsqueda de  $p_{\text{medio}}$ , búsqueda de  $p_{\text{mediana}}$ , sintonizado de  $n_s(p_c)$ ). Es importante señalar que la probabilidad crítica corresponderá a la ventana de la red infinita a la que se tiene acceso. Por ello, es que para cada tamaño de red obtendremos diferentes probabilidades críticas, las cuales irán convergiendo a la probabilidad crítica infinita a medida que se aumente el tamaño de la ventana que se está observando.

Se comenzó un primer estudio de  $p_{\text{medio}}$ , con el fin de encontrar la probabilidad crítica. Dado un tamaño de red fijo, se poblaron nodos de la red aleatoriamente a partir de una semilla de números aleatorios y se verificó si la red percolaba o no. En caso afirmativo, se disminuye la probabilidad restándole  $\frac{1}{2^n}$  (para el  $n$ -ésimo paso) y se vuelve a poblar la red con la misma semilla y esta nueva probabilidad de ocupación de los nodos. En caso negativo, la probabilidad se aumenta en la misma cantidad que se restó en el caso anterior y se realiza el mismo proceso de repoblación de la red. Esto se realizó para los tamaños de red 4, 16, 32, 64 y 128, y se tomó la probabilidad crítica como el valor de probabilidad de la última iteración en que el sistema percola. Una vez finalizada la experiencia, y utilizando una semilla nueva de números aleatorios, se realizó el mismo proceso 5000 veces. La probabilidad crítica para cada red, finalmente, se tomó como el promedio de las probabilidades críticas de las 5000 realizaciones.

Los resultados obtenidos figuran en la tabla II.

Cuadro II. Promedios de  $P_c$  para cada tamaño de red estudiado

Tamaño de red	$P_c(L)$ promedio
4	0,583
16	0,586
32	0,594
64	0,593
128	0,593

Como segundo método de estimación de la probabilidad crítica, se llenó una red de un determinado tamaño 10,000 veces variando la semilla de números aleatorios para cada llenado de la red. Finalizado cada proceso de llenado, se calculó si existía un cluster percolante en la red. Realizando el proceso las 10,000 veces, se tomó como la probabilidad de que el cluster percole como la razón entre la cantidad de veces que la red percola y la cantidad de veces que se realiza el proceso de llenado. Se calculó la

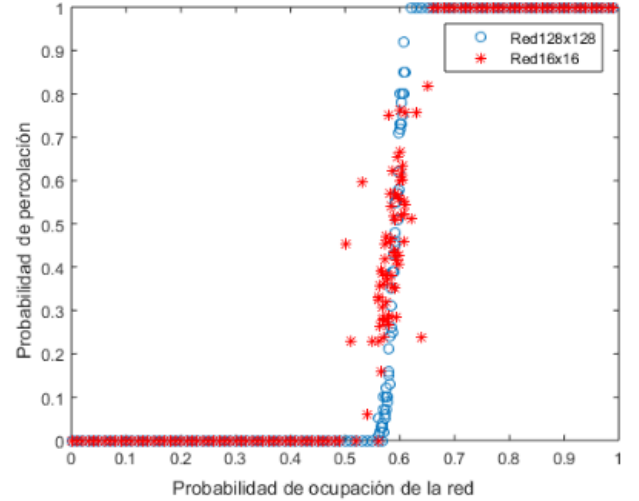


Figura 1. Probabilidad de percolación de dos redes vs Probabilidad de ocupación de la red. El gráfico azul se corresponde con una red bidimensional de tamaño 128, mientras que el rojo se corresponde a una red de tamaño 16.

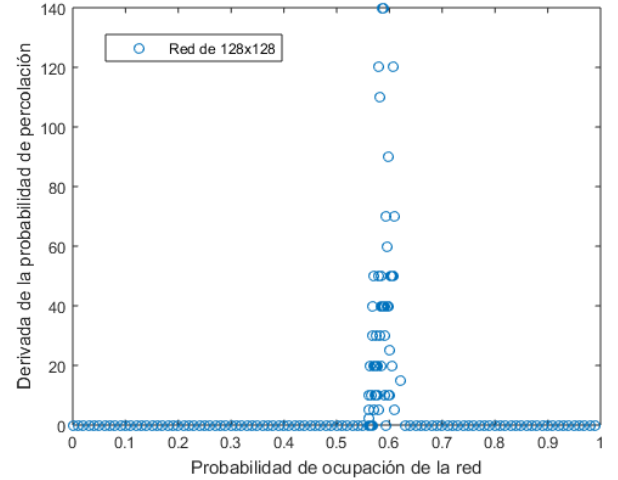


Figura 2. Derivada de la función de probabilidad de percolación, para una red de tamaño 128.

probabilidad que la red percole para las distintas probabilidades de llenado de la red, realizando un barrido más fino en el rango de la probabilidad teórica para la red bidimensional infinita. Se tomó como probabilidad crítica la probabilidad a la cual la red percola al menos la mitad de las veces.

En la figura 1 se muestra la probabilidad de percolación de la red, para una red de tamaño 16 en rojo y de tamaño 128 en azul, en función de la probabilidad de llenado de la misma. Además, se puede observar que la dispersión de los datos disminuye a medida que se aumenta el tamaño de la red. Se observa que a medida que aumenta el tamaño de la red, la probabilidad tiende a la función  $\Theta$  de

Cuadro III. Promedios de  $P_c(L)$  para diversos tamaños de lado de red.

Tamaño de red	$P_c(L)$ promedio
4	0,45
16	0,591
32	0,595
64	0,593
128	0,595

Heaviside, correspondiente a una red infinita. Además, se calculó la derivada de la función para la red de tamaño de 128, obteniendo la distribución que se muestra en la Figura 2. Las partes nulas de la función corresponden a las probabilidades donde, o la red nunca percola o lo hace siempre. Las probabilidades críticas, para los distintos tamaños de redes se exponen en la Tabla III.

Podemos atribuir el hecho de que la probabilidad se encuentre ligeramente por encima de la probabilidad infinita, al hecho de que el paso entre las probabilidades no fue suficientemente pequeño como para poder definir con mayor precisión la primer probabilidad en la cual la red percola al menos la mitad de las veces.

Para los primeros valores de  $p_c$  calculados a partir de  $p_{medio}$  se estudió la varianza con el fin de obtener  $P_c(\infty)$ . Los resultados pueden verse en la figura 9, donde la ordenada al origen del ajuste lineal corresponde al valor de  $P_c$  para la red infinita. El valor obtenido,  $P_c(\infty) = 0,5939$ , concuerda muy bien con el valor teórico de  $p_c$  para una red bidimensional infinita. Para obtener un resultado más preciso, se podría manipular la pendiente del ajuste manualmente hasta conseguir un mínimo valor de error de ajuste por cuadrados mínimos. La librería de *Python* usada para este ajuste realiza el proceso de minimización del error automáticamente, resultando satisfactoriamente en el valor ya mencionado.

A partir de los valores de probabilidad crítica obtenidos, se obtuvieron datos de tamaños de clusters en la red ( $s$ ) y número de clusters con tamaño  $s$  ( $n_s$ ), fijando la probabilidad en  $p_c(L)$ . Si se grafica  $n_s$  vs  $s$  en escala logarítmica, según la ley para el exponente crítico  $\tau$ , se debería observar un comportamiento lineal, cuya pendiente corresponde a este exponente crítico. El valor de  $\tau$  se consiguió realizando un ajuste lineal a los datos, lo cual se puede observar en la figura 4. El valor fue  $\tau = 1,77$ . El valor teórico de  $\tau$  esta por encima de 2, pero para esta forma de estimarlo se ignora el hecho que a  $s^\tau$  lo acompaña una constante  $q_0$  que depende de  $\tau$ . Es por esto que el resultado difiere del esperado.

## B. Determinación de la dimensión fractal $D$

Según la Ec. 2 es posible hallar  $D$  para un arreglo bidimensional, calculando la masa del cluster infinito en la probabilidad crítica. Se poblaron redes de tamaño de 4, 16, 32, 64 y 128 con una probabilidad correspondiente a

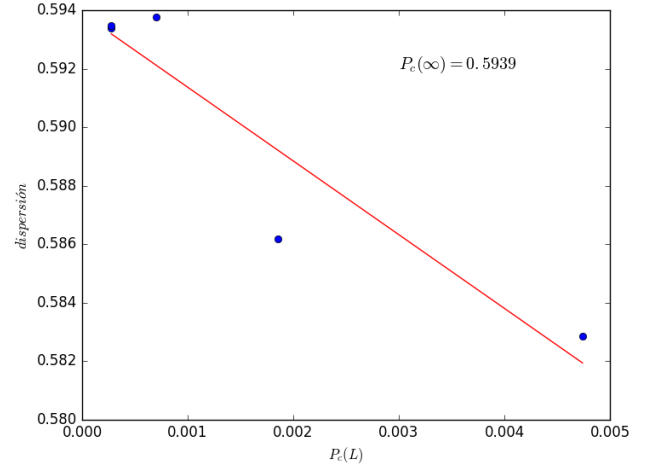


Figura 3. Ajuste lineal a los valores de dispersión obtenidos a partir de los valores de probabilidad crítica recolectados, los cuales fueron promediados para obtener la probabilidad crítica correspondiente a cada tamaño de red. La ordenada al origen del ajuste se corresponde con  $P_c(\infty)$ .

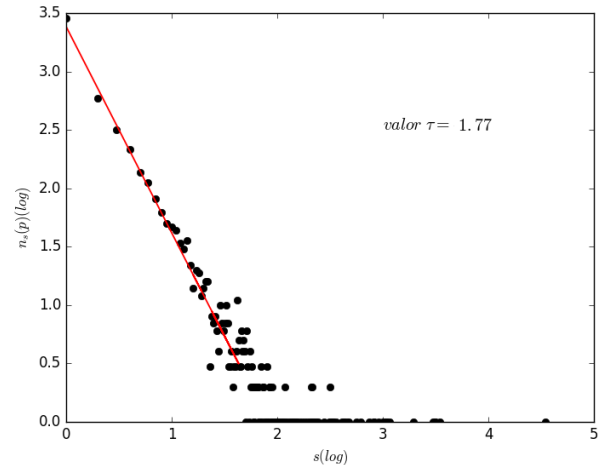


Figura 4. Ajuste lineal de  $n_s(\log)$  vs.  $s(\log)$ , del cual se obtuvo un coeficiente crítico  $\tau = 1,77$ .

la probabilidad crítica para cada tamaño. Se realizaron 10,000 iteraciones, y se tomó la masa del cluster percolante como el promedio de la masa del cluster percolante obtenido en cada iteración. La imagen 5 muestra el logaritmo de la masa del cluster percolante, en función del logaritmo del tamaño de la red. Se observa que la misma sigue un comportamiento lineal, cuya pendiente se corresponde a la dimensión fractal. Realizando un ajuste lineal para los datos obtenidos, se obtuvo un valor para la dimensión fractal de  $D = 1,848$ .

Se observa, tal como se esperaba teóricamente, que la masa del cluster percolante en el punto crítico, no es proporcional al volumen, sino que es proporcional a  $D$ , la

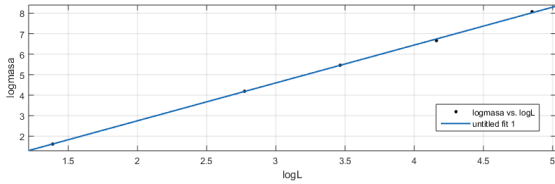


Figura 5. La imagen muestra el logaritmo de la masa del cluster percolante en función del logaritmo del lado de la red. Se observa un comportamiento lineal del mismo.

dimension fractal de la red. Teóricamente, el valor de la dimensión fractal es de  $D = 1,8958$ , con lo que el resultado obtenido tiene un error respecto del teórico menor al 10%. Con este valor, es posible volver a calcular el exponente crítico  $\tau$ , con el que se obtiene un valor de  $\tau = 2,082$ .

### C. Obtención de $\beta$ a partir de la intensidad $P_\infty$

A partir de la información en el gráfico de  $P_\infty(p)$  podemos hallar el exponente crítico  $\beta$ , realizando un ajuste en un entorno cercano al punto crítico. La siguiente imagen, figura 6, muestra la intensidad del cluster percolante en función de la probabilidad de llenado de la red. Se ilustran los resultados para dos valores de lado de red, 128 en azul y 64 en rojo.

Se observa que para probabilidades por debajo de la crítica la intensidad del cluster percolante es nula, puesto que para esas probabilidades la red no percola. A partir del punto crítico (valor al cual se espera, teóricamente, que sea el último punto al cual la intensidad es nula) la intensidad comienza a crecer a medida que se aumenta la probabilidad. Este parámetro se conoce como parámetro de orden del sistema. Se puede ver que la probabilidad en la cual la intensidad deja de ser nula es ligeramente menor que la esperada para una red infinita, que corresponde con la crítica. Este corrimiento es uno de los efectos de trabajar con redes finitas, puesto que no se tiene acceso a la red infinita. Debido a que la intensidad sigue una ley de potencias según el exponente crítico, se calcula el mismo realizando un ajuste sobre la zona creciente de la curva, como se observa en la Fig. 7.

Se obtuvo a partir del ajuste un valor de  $\beta = 0,149$ , el cual difiere del teórico en aproximadamente 0,01, puesto que el mismo es 0,138. Es posible con este valor de beta, estimar nuevamente el valor de  $\tau$ , obteniendo  $\tau = 2,0589$ . Este valor cumple la condición impuesta para dicho exponente crítico,  $2 < \tau < 3$  y difiere en menos de una centésima del valor teórico,  $\tau_{teórico} = 2,05$ . Utilizando este valor de  $\beta$  y el valor obtenido para  $D$ , es posible calcular el exponente crítico  $\nu$ . Se obtiene para el mismo, un valor de  $\nu = 0,98$ , el cual es algo lejano al valor esperado de  $\nu$ .

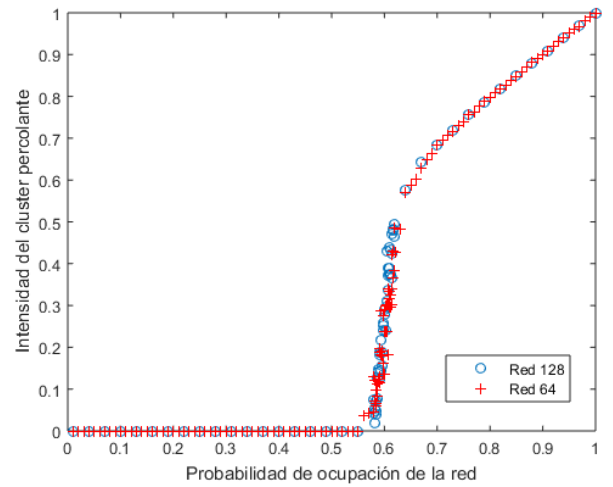


Figura 6. intensidad del cluster percolante en función de la probabilidad de ocupación de la red. El gráfico azul corresponde a una red de tamaño 128 y el rojo a una red de tamaño 64.

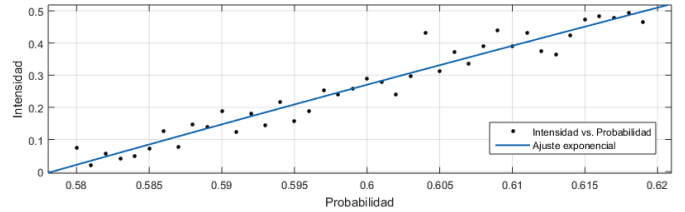


Figura 7. Ajuste sobre los datos obtenidos para la intensidad del cluster percolante, en un entorno cercano al punto crítico. Se observa que el comportamiento sigue una ley de potencias.

### D. Espectro de fragmentos y verificación de la hipótesis de *scaling*

La hipótesis de *scaling* se presenta en la Ec. 3 en donde se observa que para distintos valores de  $s$  y  $p - p_c$ , el espectro de fragmentos debe colapsar en una única curva  $f(z) = n_s(p)/n_s(p_c)$ , donde  $z = s^\sigma(p - p_c)$ . En consecuencia, verificamos la hipótesis de *scaling* graficando  $f(z)$  y determinando el punto  $f_{\max} = f(z_{\max})$ , lo cual se puede observar en la figura 8 para varios valores de  $s$ . Este valor se corresponde con una probabilidad  $p_{\max}$  para un cada tamaño  $s$  fijo. La ley de potencia con exponente  $\sigma$  será entonces

$$\ln(p_{\max} - p_c) = -\sigma \ln(s) + \ln(z_{\max}) + C \quad (4)$$

Para obtener este exponente, se realizó un ajuste lineal de los valores en escala logarítmica, el cual se puede observar en la figura 9. El valor obtenido fue de  $\sigma = 0,2095$ , el cual está lejos del valor teórico de este exponente, el cual es aproximadamente  $\sigma_{teo} = 0,39$ . Esto puede deberse a que por efectos de red finita, la forma funcional de

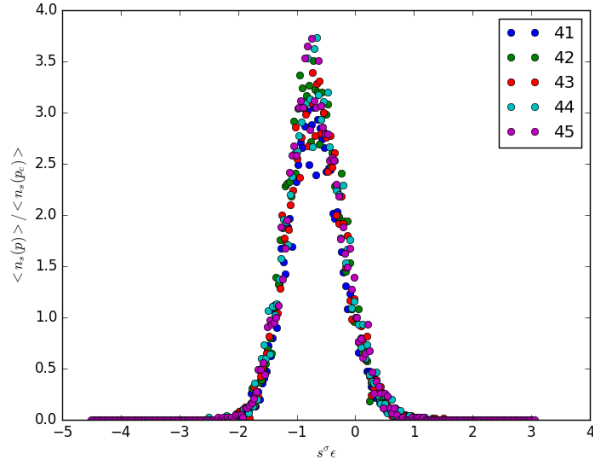


Figura 8. Curvas de la función de scaling  $f(z)$  para distintos valores de  $s$ .

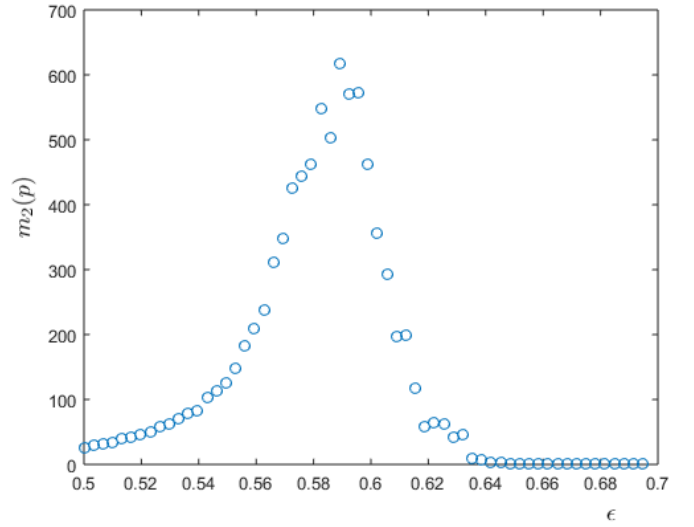


Figura 10. Momento de orden dos en función de la probabilidad de llenado de la red.

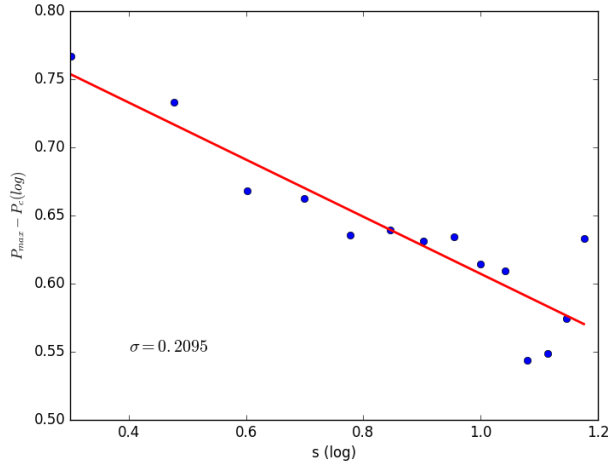


Figura 9. Ajuste lineal a  $P_{max} - P_c$  contra  $s$ , con el fin de obtener el valor del exponente crítico  $\sigma$ . Se tomaron clusters de tamaños 2 a 15, y se obtuvo un valor de exponente crítico  $\sigma = 0.2095$ .

$f(z)$  no es tan precisa como se esperaba para obtener  $P_{max}$ .

Otro exponente crítico que se calculó fue  $\gamma$ , y para ello fue necesario obtener el momento de orden dos,  $m_2$  de la red. Se graficó el mismo en función de  $\epsilon = \frac{p-p_c}{p_c}$ , para una red de tamaño 128, como se puede observar en la Figura 11. Se realizó un barrido de 60 probabilidades en el rango de 0,50 a 0,70, promediando sobre 100 realizaciones en cada probabilidad. Se tuvo especial cuidado en determinar todos los clusters percolantes, para quitarlos de la suma para el cálculo correspondiente de  $m_2$ .

Se observa que a medida que el módulo de  $\epsilon$  aumenta, el momento decrece, puesto que lejos del punto crítico la aparición de fragmentos grandes que contribuyen a la

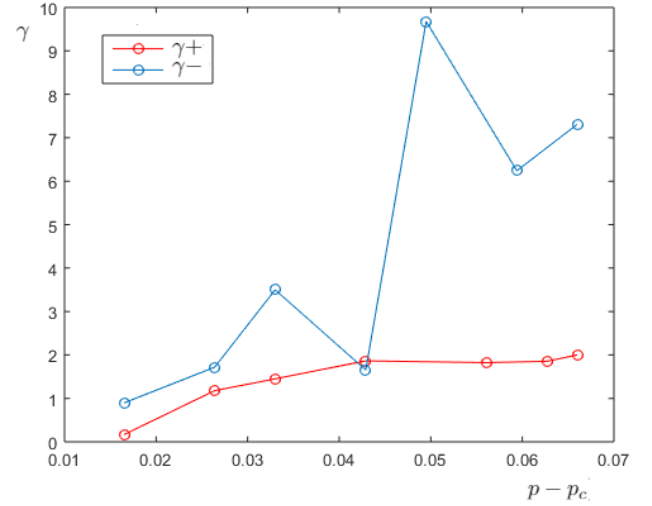


Figura 11. Se muestra en azul las pendientes del ajuste obtenidas para probabilidades por encima de la crítica y en rojo las pendientes del ajuste para probabilidades por debajo del punto crítico. Se toma como el valor de  $\gamma$  el punto donde los gráficos se intersectan.

suma para el momento, decrecen, tanto para probabilidades bajas, como para probabilidades altas, donde la mayor parte de los nodos pertenecen al cluster percolante. Por otro lado, la dispersión de los datos observados en el pico de la función, se atribuyen a los efectos de trabajar con redes finitas.

Para calcular el mencionado exponente crítico, siguiendo la ecuación 1, se realizó un ajuste lineal para diferentes zonas de la curva, para la función  $\log(m_2) = -\gamma \log(\epsilon) + \hat{c}_{\pm}$ . Las zonas de la curva se tomaron simétricas respecto del punto crítico de la red. Se realizaron

7 ajustes, tanto para el lado izquierdo como el derecho respecto del punto crítico. Se graficó la pendiente obtenida en cada ajuste, en función de la distancia al punto crítico, donde la distancia al punto crítico se tomó como la distancia del punto más alejado del intervalo respecto del punto crítico hasta este último. Estos resultados se reflejan en el gráfico 11, donde  $\gamma+$  se corresponden a los ajustes del lado izquierdo y  $\gamma-$  los correspondientes al derecho. Se infiere el valor del exponente crítico  $\gamma$  como el punto de corte de las pendientes, que en este caso fue de  $\gamma = 1,864$ . Este valor es menor que el esperado teóricamente, puesto que  $\gamma_{teórico} = 2,3889$ . Esta discrepancia puede deberse al hecho de tomar pocos puntos a la hora de realizar un barrido en probabilidades.

## V. RENORMALIZACIÓN

Existen diversos criterios de renormalización, pero exponedremos el criterio de percolación vertical, puesto que el de criterio de mayoría simple, (solo se transforma en supernodo aquella celda que tiene tres o cuatro lugares ocupados) da una probabilidad crítica mucho mayor a la teórica. En el criterio de percolación vertical, la renormalización a un supernodo, ocurre no sólo para tres y cuatro lugares ocupados, sino también para aquellos donde existe un camino finito desde un borde al otro de la red, habiéndose ocupado solo dos nodos. El resto de los casos, se considera que en la renormalización, el *super-nodo* se encontrará desocupado. La nueva probabilidad, escrita en términos de la probabilidad original, se escribe como :

$$p' = p^4 + 4p^3(1 - p) + 2p^2(1 - p)^2 \quad (5)$$

Es inmediato observar que tanto 0 y 1 cumplen la ecuación anterior para  $p'$ . Estos casos son triviales, puesto que  $p=1$  corresponde a una red poblada en su totalidad, con lo que todas las renormalizaciones llevarán a *super-nodo* ocupados, y por otro lado,  $p=0$ , corresponde a una red despoblada completamente, que conllevará a una red despoblada también. Pero además, existe otro punto fijo de la ecuación anterior, correspondiente a la probabilidad crítica, que en este caso, tiene un valor de  $p_c = 0,61803$ . La consecuencia de obtener una misma probabilidad luego de renormalizar la red, es que el sistema, en ese punto particular, se encuentra libre de escalas. Este característica, es solo lograda en el punto fijo o probabilidad crítica, ya que, de no estar en el punto crítico, al ir renormalizando, se irá variando la escala, obteniendo como último

resultado una red llena, o vacía. Debido a ello, las probabilidades 0 y 1 se las conoce como atractores, puesto que si se comienza tomando una probabilidad distinta de la crítica, el sistema terminará con una probabilidad de 1 o 0.

## VI. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se estudió la transición de fase en un modelo de percolación bidimensional, obteniendo la probabilidad crítica, o sea la probabilidad a partir de la cual aparece el cluster percolante en la red, el parámetro de orden, que en este caso es la intensidad del cluster percolante, así como también se obtuvieron los exponentes críticos del modelo cerca de la transición. Los valores obtenidos se resumen en la table IV.

Cuadro IV. Resultados obtenidos a lo largo de este trabajo

Símbolo	Valor obtenido
$D$	$D = 1,848$
$P_c(\infty)$	$P_c(\infty) = 0,5939$
$\nu$	$\nu = 0,98$
$\tau$	$\tau = 2,0589$
$\sigma$	$\sigma = 0,2095$
$\beta$	$\beta = 0,149$
$\gamma$	$\gamma = 1,864$

Se puede ver que la mayoría de los valores obtenidos concuerdan bien con los valores teóricos, excepto  $\sigma$ ,  $\nu$  y  $\tau$ .

El valor de tau obtenido a partir del ajuste lineal de  $n_s$  vs  $s$ , que fué de  $\tau = 1,77$ , está lejos del valor teórico a causa de que el coeficiente  $q_0$  (que se utilizó en la estimación de este exponente) de hecho depende del valor de  $\tau$ . La estimación posterior fue mucho mas precisa y acorde al valor teórico esperado.

El valor del exponente crítico  $\sigma$  resultó ser alrededor del 50 % del valor teórico. Esto puede haber ocurrido debido a que, por efectos de red finita, la forma funcional de  $f(z)$  resultó muy difusa en su punto máximo, por lo que el punto máximo (que se utilizó en el cálculo de  $\sigma$ ) no estaba muy bien definido. Calculándolo a partir de los valores de  $D$  y  $\nu$  obtenidos, se obtiene que el valor de  $\sigma$  es 0,378, que coincide casi perfectamente con el valor teórico.

Como ya se mencionó previamente, el valor obtenido para  $\gamma$  y su diferencia con el valor teórico puede deberse a que se tomaron pocos puntos al realizar un barrido en probabilidades, sumado a arrastre de errores.