Practica 1

Gonzalo Cruz Gómez, Lucía Arnaldo Cuevas

2024-10-20

Introducción

Práctica 1 de la asignatura de Inferencia Estadística. Se trabajará con los datos de los arrestos en EEUU de la librería 'datasets'

Pregunta 1

EDA

Cargo los datos de la librería datasets y las librerías que vamos a usar en la práctica

```
library(datasets)
library(dplyr)
library(ggplot2)
datos=datasets::USArrests
```

Estos datos representan los arrestos por cada 100000 habitantes en cada estado de EEUU en 1973, además del porcentaje de la población que vive en las ciudades

```
dim(datos)
```

```
## [1] 50  4
```

```
str(datos)
```

```
## 'data.frame':    50 obs. of  4 variables:
##  $ Murder  : num  13.2 10 8.1 8.8 9 7.9 3.3 5.9 15.4 17.4 ...
##  $ Assault : int  236 263 294 190 276 204 110 238 335 211 ...
##  $ UrbanPop: int  58 48 80 50 91 78 77 72 80 60 ...
##  $ Rape    : num  21.2 44.5 31 19.5 40.6 38.7 11.1 15.8 31.9 25.8 ...
```

Estas variables representan:

- Murder: numeric Murder arrests (per 100,000)
- Assault: numeric Assault arrests (per 100,000)
- UrbanPop: numeric Percent urban population

- Rape: numeric Rape arrests (per 100,000)

Todas las variables son variables continuas, pueden tomar cualquier valor, no tenemos variables discretas, para ello habría que discretizar una variable continua. Hay 50 observaciones y 4 características medidas. No tenemos variables de tipo texto ni variables irrelevantes

Pregunta 2

Estadísticos resumen de todas las variables (cuartiles, mediana, media, mínimos y máximos), además de las desviaciones típicas de cada variable:

```
summary(datos)
```

```
##      Murder          Assault         UrbanPop          Rape
##  Min.   : 0.800   Min.   : 45.0   Min.   :32.00   Min.   : 7.30
##  1st Qu.: 4.075   1st Qu.:109.0   1st Qu.:54.50   1st Qu.:15.07
##  Median : 7.250   Median :159.0   Median :66.00   Median :20.10
##  Mean   : 7.788   Mean   :170.8   Mean   :65.54   Mean   :21.23
##  3rd Qu.:11.250   3rd Qu.:249.0   3rd Qu.:77.75   3rd Qu.:26.18
##  Max.   :17.400   Max.   :337.0   Max.   :91.00   Max.   :46.00
```

```
print("desviaciones típicas de cada variable: \n")
```

```
## [1] "desviaciones típicas de cada variable: \n"
```

```
sd(datos$Murder)
```

```
## [1] 4.35551
```

```
sd(datos$Assault)
```

```
## [1] 83.33766
```

```
sd(datos$Rape)
```

```
## [1] 9.366385
```

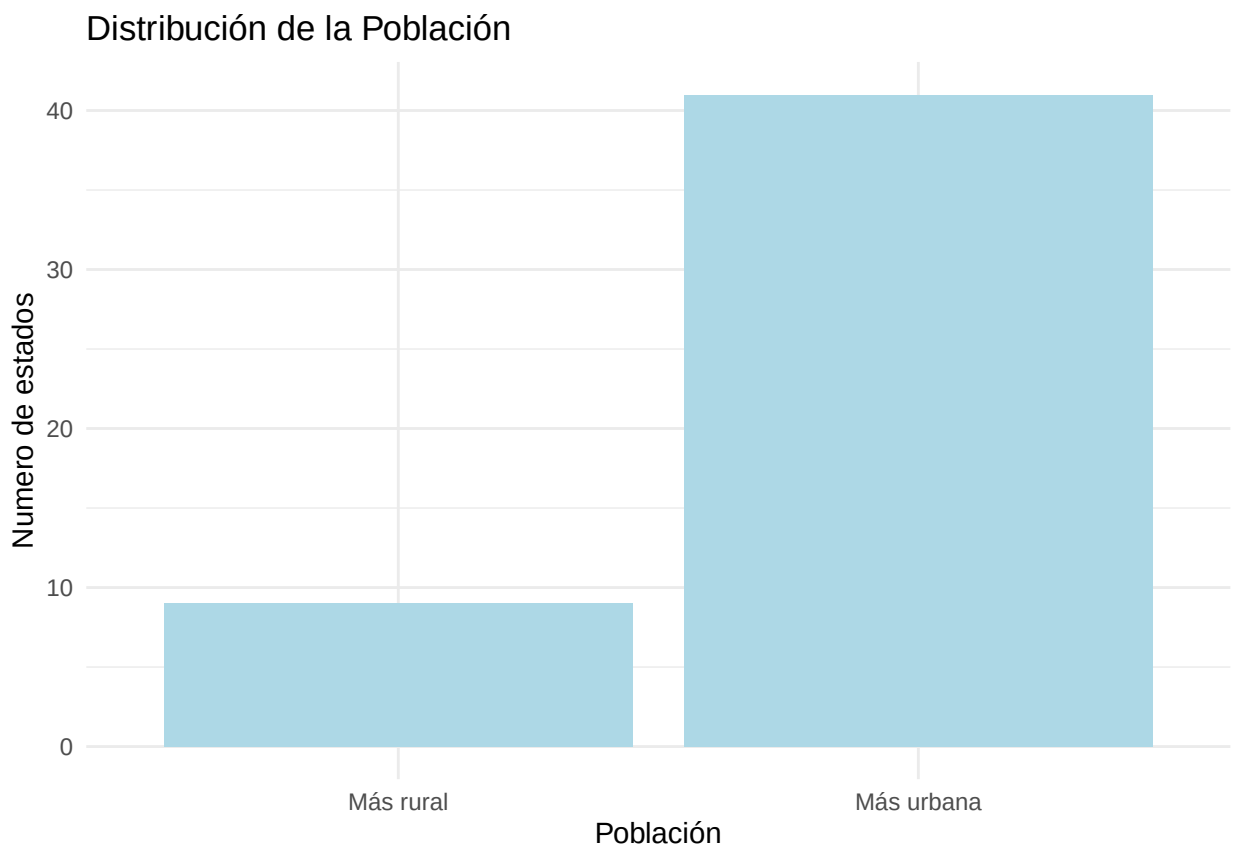
```
sd(datos$UrbanPop)
```

```
## [1] 14.47476
```

Pregunta 3

Como no tenemos variables discretas, hemos optado por discretizar la variable UrbanPop

```r
discretizada <- ifelse(USArrests$UrbanPop > 50, "Más urbana", "Más rural")

ggplot(USArrests, aes(x = discretizada)) +
  geom_bar(fill = "lightblue") +
  labs(title = "Distribución de la Población",
       x = "Población",
       y = "Numero de estados") +
  theme_minimal()
```

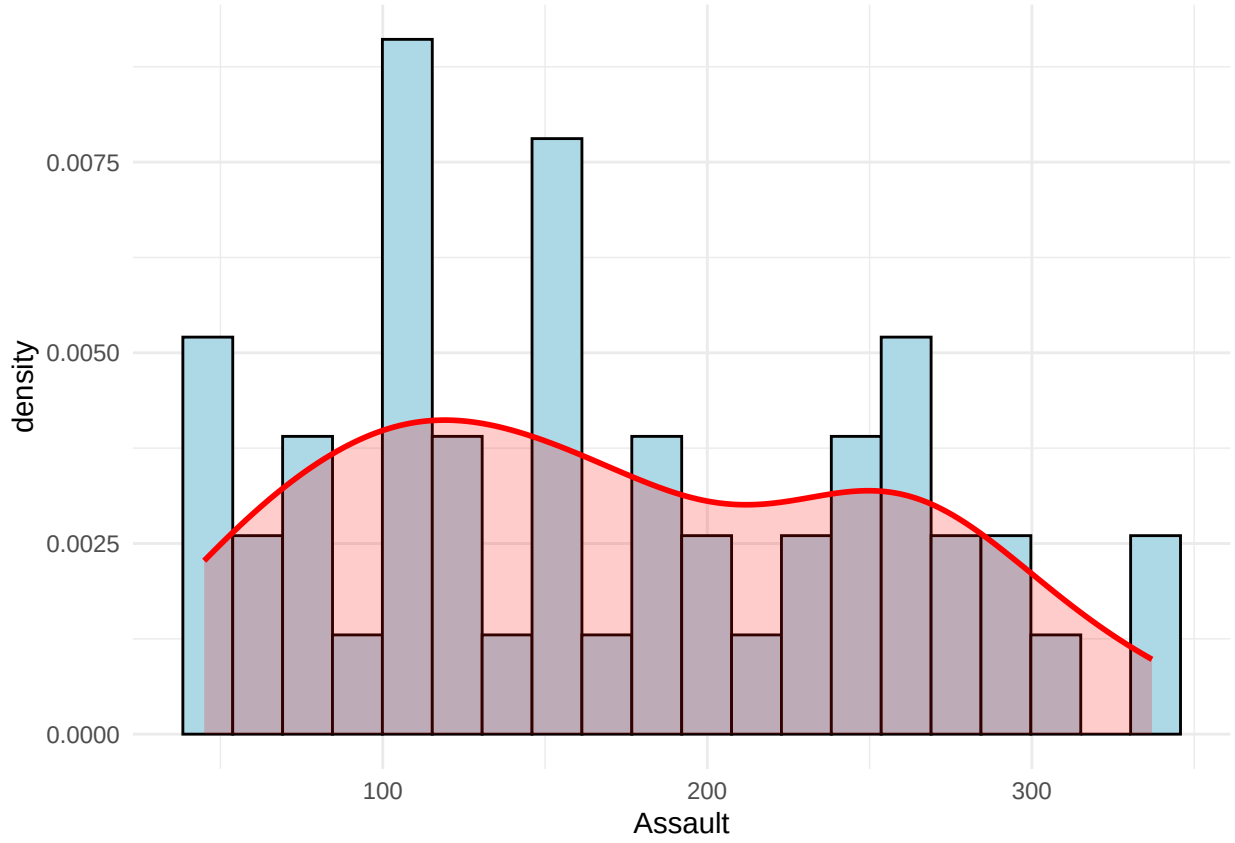


Esta gráfica de la distribucion de la poblacion demuestra que claramente hay más estados en los que predomina la población urbana que estados en los que predomina la población rural

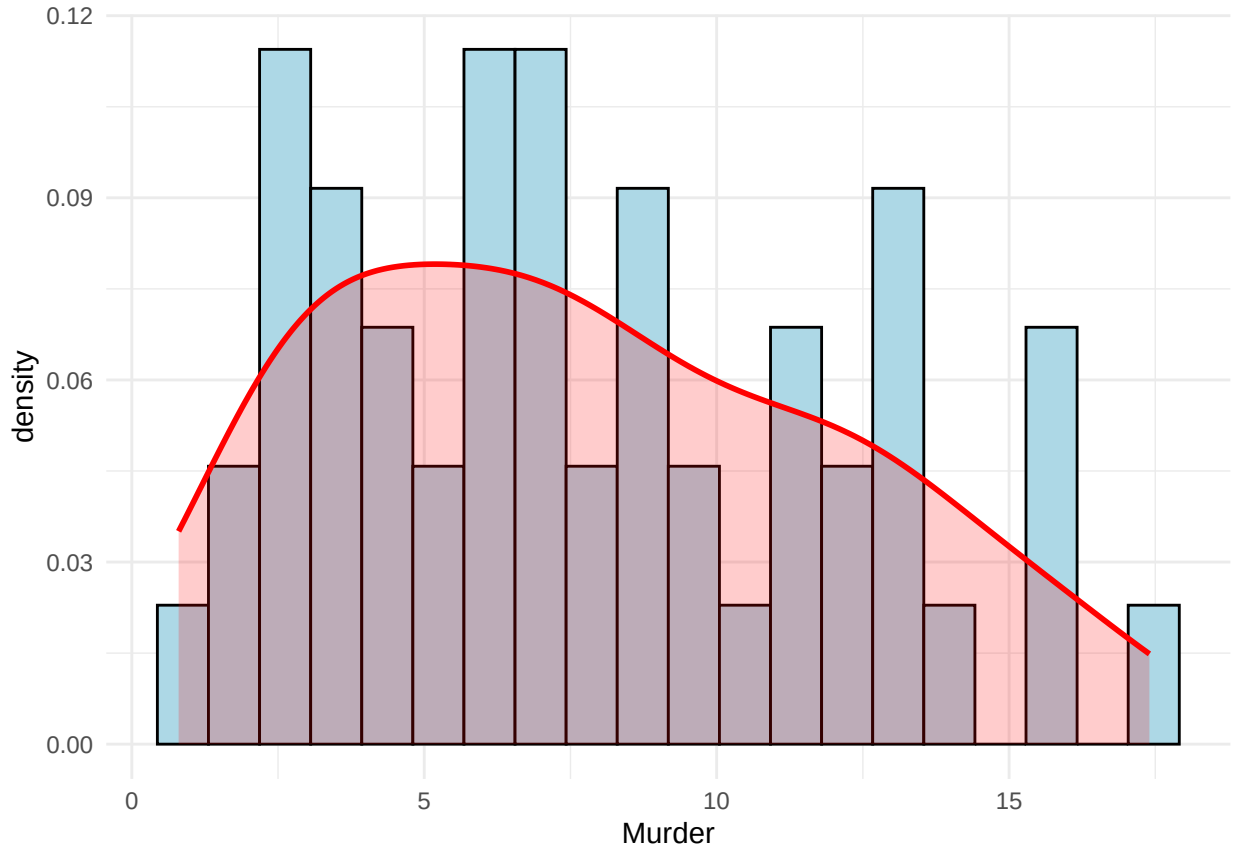
Pregunta 4

Distribución de los asesinatos, de los asaltos y de las violaciones, que son nuestras variables continuas

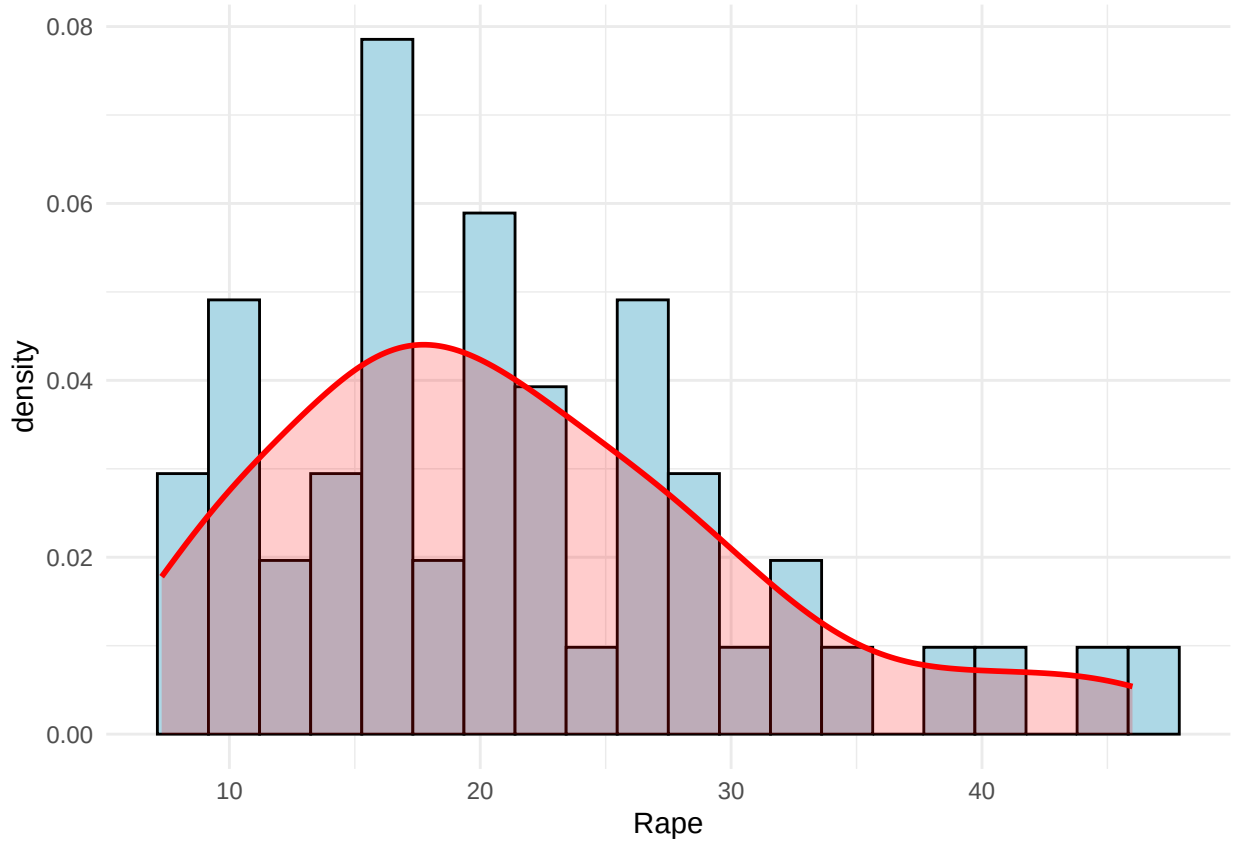
```r
ggplot(datos, aes(x = Assault)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..),
                 colour = 1, fill = "lightblue", bins=20) +
  geom_density(lwd = 1, colour = "red",
               fill = "red", alpha = 0.2) + theme_minimal()
```




```
ggplot(datos, aes(x = Murder)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..),
                 colour = 1, fill = "lightblue", bins=20) +
  geom_density(lwd = 1, colour = "red",
               fill = "red", alpha = 0.2) + theme_minimal()
```




```
ggplot(datos, aes(x = Rape)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..),
                 colour = 1, fill = "lightblue", bins=20) +
  geom_density(lwd = 1, colour = "red",
               fill = "red", alpha = 0.2) + theme_minimal()
```



La variable Assaults se aproxima relativamente bastante a una distribución uniforme, de ello podemos extraer que la cantidad de asaltos es más o menos igual en todo el territorio. En cuanto a las violaciones y los asesinatos, ambas variables se aproximan a una distribución normal aunque con una media poco centrada, por lo cual podemos concluir que es más común que haya un numero menor de violaciones y asesinatos que una gran cantidad de ellos

Pregunta 5

Vamos a hacerlo para una distribución normal para luego compararlo con la distribución de las violaciones

Se trata de una distribución normal con parámetros $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ para una muestra de n datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con una función de densidad de probabilidad:

$$f(x_i|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Su función de verosimilitud es:

$$L(\mu, \sigma^2|x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ahora hacemos la log-verosimilitud, para ello tomamos logaritmos

$$\ell(\mu, \sigma^2|x) = \log L(\mu, \sigma^2|x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\ell(\mu, \sigma^2|x) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Para hallar el estimador ML de μ , derivamos con respecto a μ e igualamos a 0

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Hacemos lo mismo para σ^2 partiendo de la log-verosimilitud

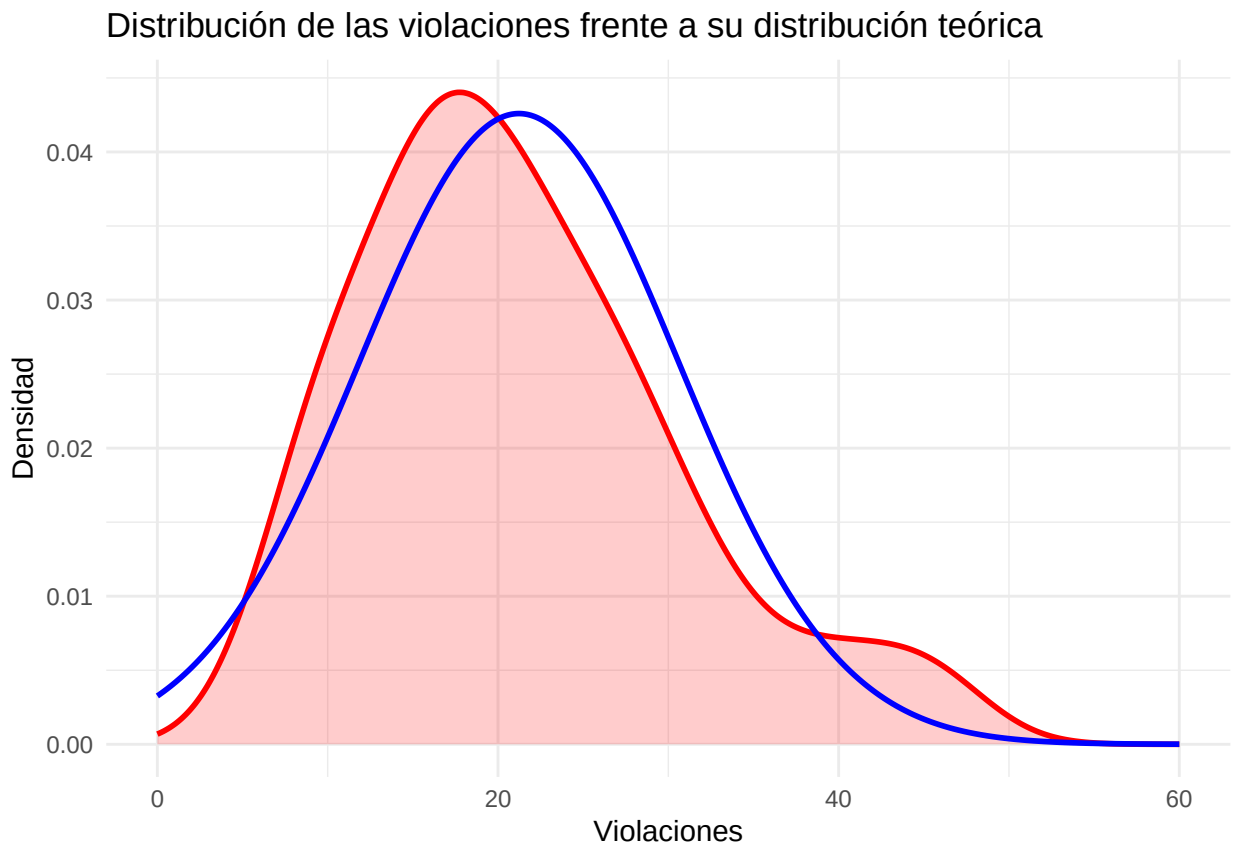
$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Por lo que podemos concluir que los estimadores ML para μ y σ^2 son la media muestral y la varianza muestral

```r
mean_value <- 21.23
sd_value <- 9.366385
x <- seq(0, 60, length.out = 1000)
y <- dnorm(x, mean = mean_value, sd = sd_value)

normal <- data.frame(x = x, y = y)

ggplot(USArrests, aes(x = Rape)) +
  geom_density(lwd = 1, colour = "red", fill = "red", alpha = 0.2) +
  geom_line(data = normal, aes(x = x, y = y), colour = "blue", lwd = 1) +
  theme_minimal() +
  labs(title = "Distribución de las violaciones frente a su distribución teórica",
       x = "Violaciones",
       y = "Densidad")
```



Pregunta 6

Utilizando el método de los momentos:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Tenemos que igualar los momentos muestrales con los momentos teóricos:

$$\mu_1 = E(X) = \mu$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + E(X)^2 = \mu^2 + \sigma^2$$

$$m_1 = \bar{X} = \mu$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mu_2 = \mu^2 + \sigma^2$$

Resolvemos el sistema

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

Y como resultado tenemos los estimadores de los parámetros Los valores de estos estimadores son:

```r
print(paste("media =", mean(USArrests$Rape)))
```

```
## [1] "media = 21.232"
```

```r
print(paste("desviación típica = " , sd(datos$Rape)))
```

```
## [1] "desviación típica =  9.36638453105965"
```

Ahora calculamos el intervalo de confianza al 95% para una distribucion normal con la media y desviación típica anteriores

$$IC = (\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde el valor crítico para un nivel de confianza del 95% es 1.96

$$IC = 21.232 \pm 1.96 \cdot \frac{9.36638453105965}{\sqrt{50}}$$

Calculandolo con r:

```r
media <- 21.232
sd <- 9.36638453105965
n <- 50
valor_critico <- 1.96

error_std <- valor_critico * (sd / sqrt(n))

IC_inferior <- media - error_std
IC_superior <- media + error_std

print(paste("IC_95% = (",IC_inferior,", ", IC_superior,")"))
```

```
## [1] "IC_95% = ( 18.6357706652917 ,  23.8282293347083 )"
```

Pregunta 7

Apartado a)

Vamos a calcular la probabilidad de que haya más de 10 asesinatos, sabiendo que la media es 7,78 y la desviación típica es 4.355 (pregunta 2)

$$\text{Murder} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$P(\text{Murder} > x) = P\left(Z > \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$z = \frac{10 - 7.788}{4.355} \approx 0.507$$

$$P(Z > 0.507) = 1 - 0.6943 = 0.3057$$

Por lo tanto la probabilidad de que en un estado haya mas de 10 asesinatos por cada 100000 habitantes es de aproximadamente un 30%

Apartado b

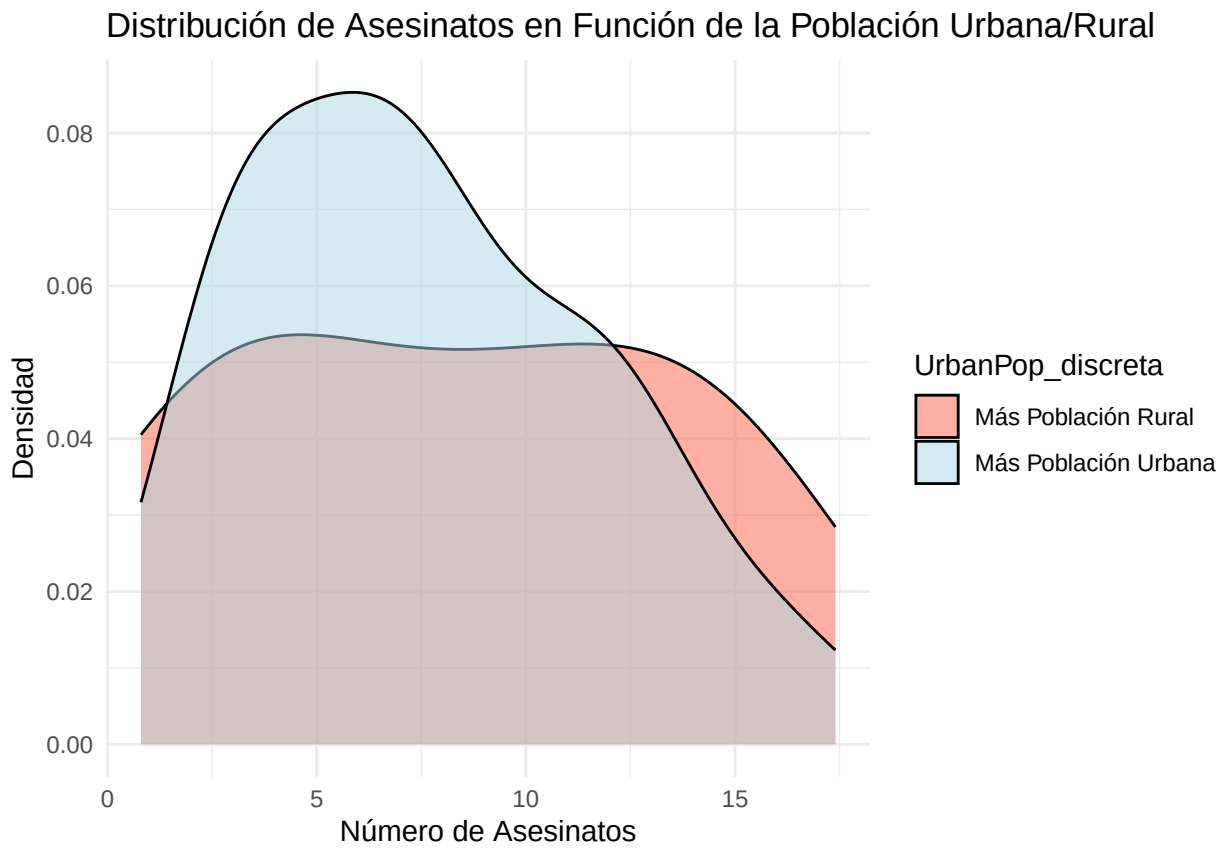
Si ahora en vez de calcular el valor de manera teórica, lo hacemos mediante una simulación en r:

```
x <- 10
n <- 10000
simulacion <- rnorm(n, mean = mean(USArrests$Murder), sd = sd(USArrests$Murder))
prob <- mean(simulacion > x)
print(paste("Probabilidad de que haya más de 10 asesinatos = ", prob))
```

```
## [1] "Probabilidad de que haya más de 10 asesinatos =  0.3044"
```

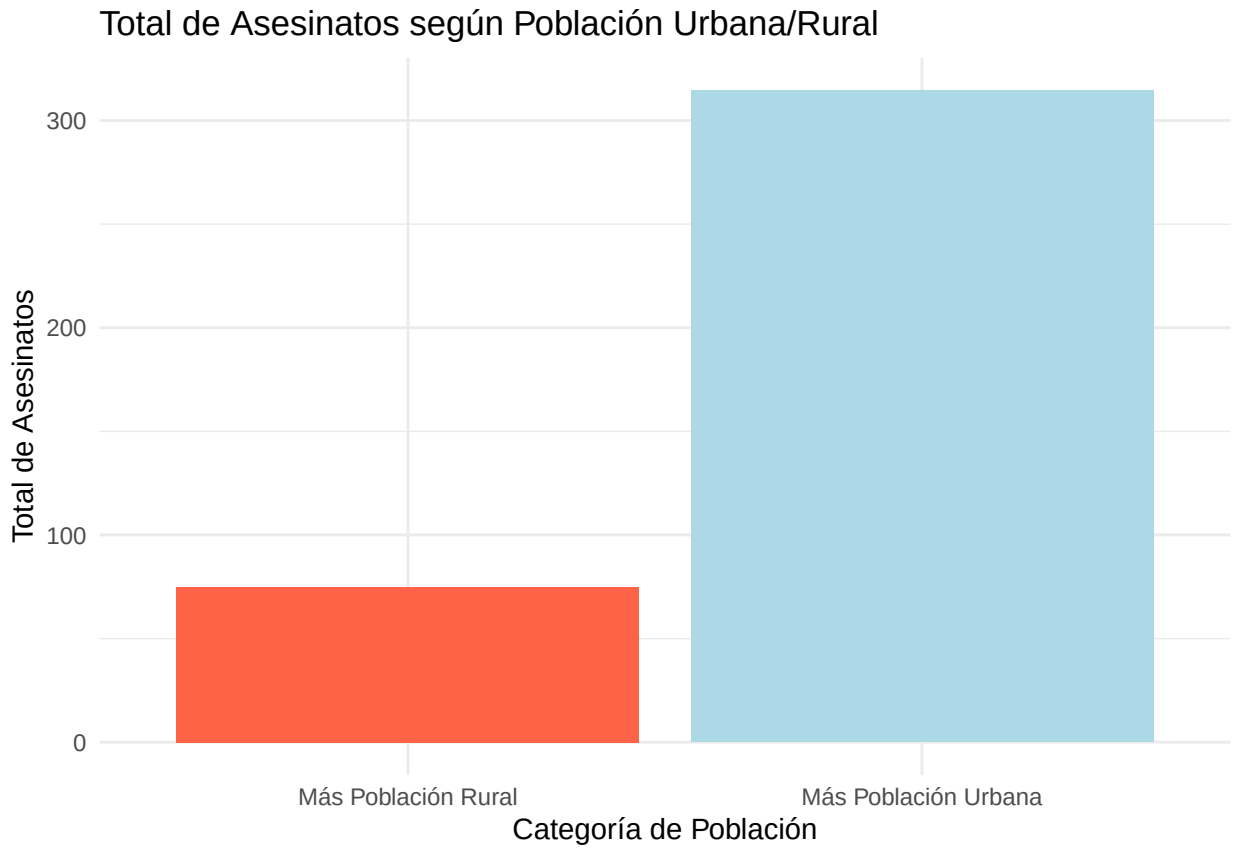
Pregunta 8

```
# Discretizar la variable UrbanPop
USArrests$UrbanPop_discreta <- ifelse(USArrests$UrbanPop > 50, "Más Población Urbana", "Más Población Ru

ggplot(USArrests, aes(x = Murder, fill = UrbanPop_discreta)) +
  geom_density(alpha = 0.5, show.legend = TRUE) +
  labs(title = "Distribución de Asesinatos en Función de la Población Urbana/Rural",
       x = "Número de Asesinatos",
       y = "Densidad") +
  scale_fill_manual(values = c("Más Población Urbana" = "lightblue", "Más Población Rural" = "tomato"))
  theme_minimal()
```



Con esto podemos observar que la distribución de los asesinatos en los estados con mas población rural se aproxima mucho a una distribución uniforme, mientras que en los estados con población más urbana se acerca más a una normal.

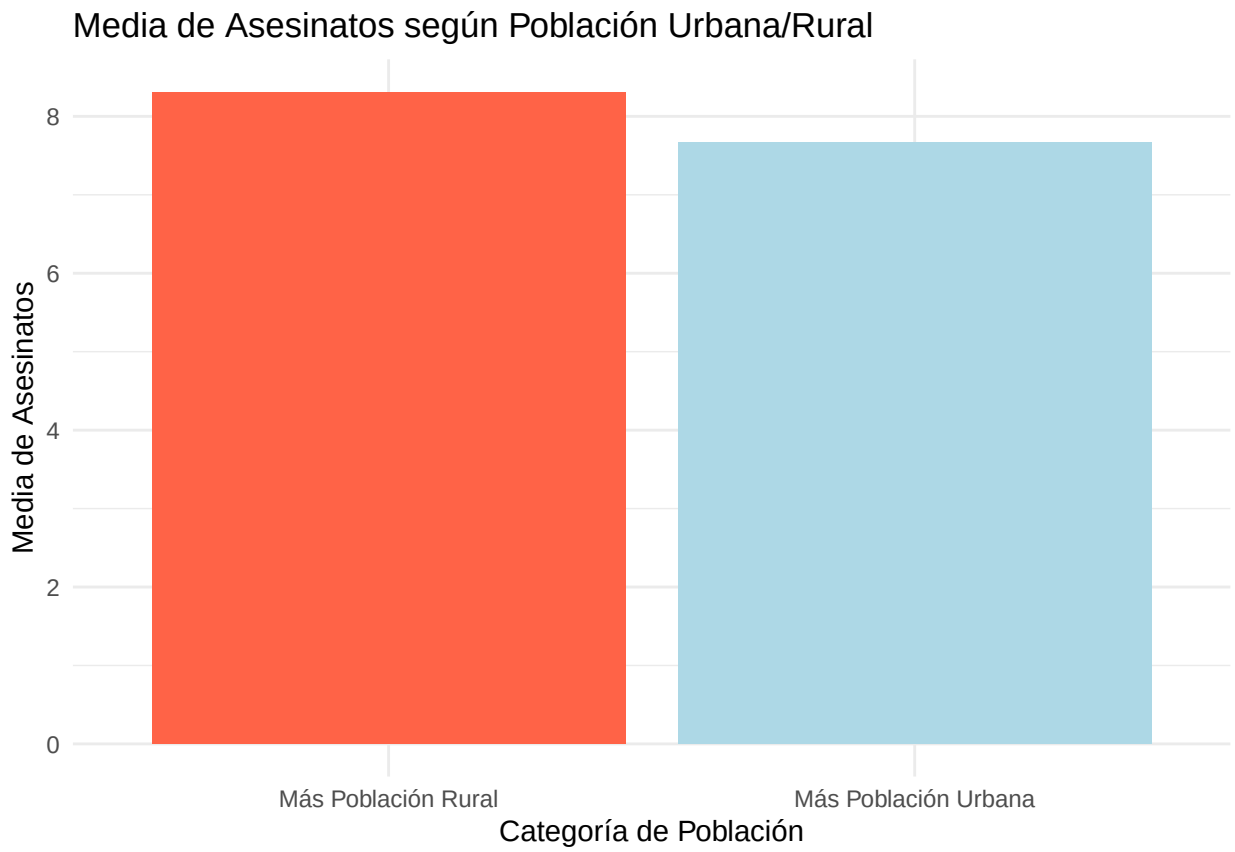
```
murder_summary <- USArrests |>
  group_by(UrbanPop_discreta) |>
  summarize(Total_asesinatos = sum(Murder))

ggplot(murder_summary, aes(x = UrbanPop_discreta, y = Total_asesinatos, fill = UrbanPop_discreta)) +
  geom_bar(stat = "identity", show.legend = FALSE) +
  labs(title = "Total de Asesinatos según Población Urbana/Rural",
       x = "Categoría de Población",
       y = "Total de Asesinatos") +
  scale_fill_manual(values = c("Más Población Urbana" = "lightblue", "Más Población Rural" = "tomato")) +
  theme_minimal()
```



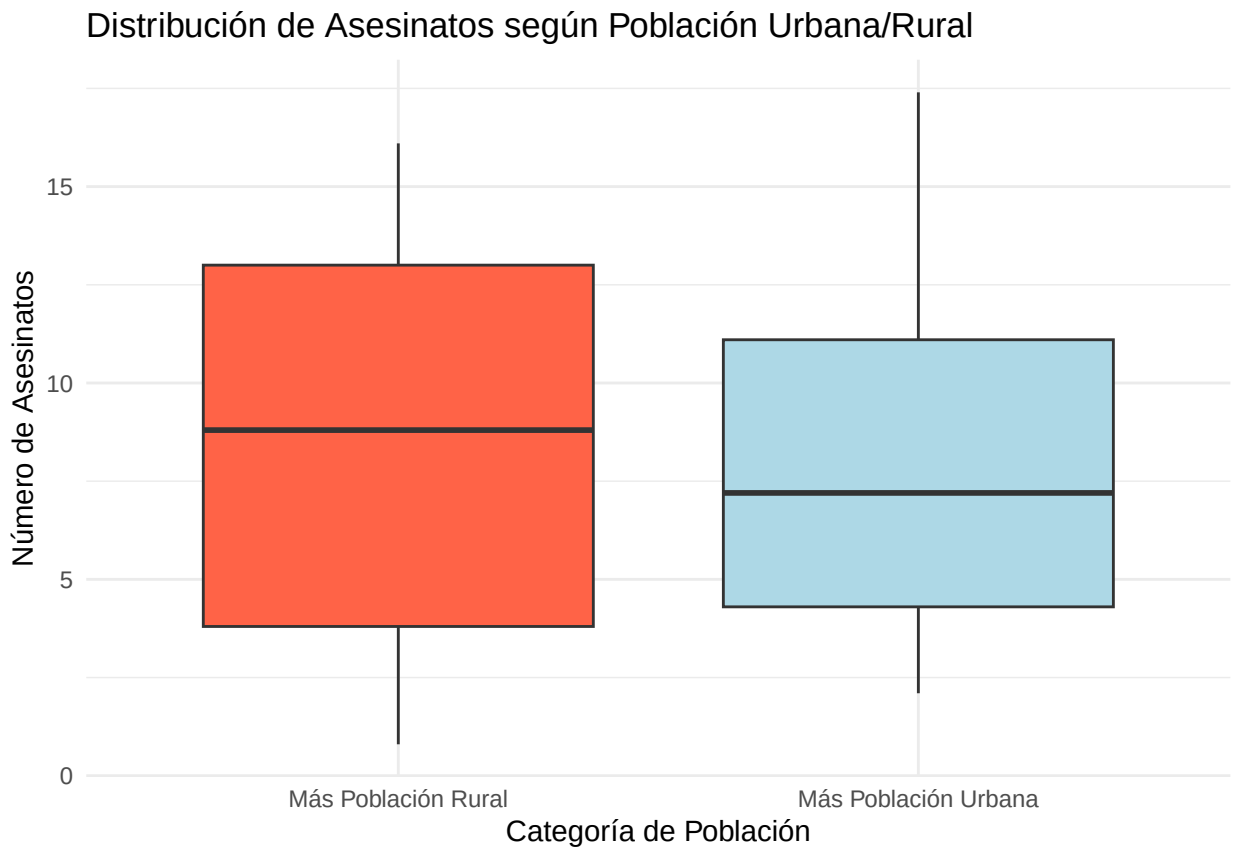
Este gráfico nos muestra que se cometen muchos más asesinatos en zonas con mayor población urbana que en zonas con mayor población rural. Aun así podríamos ver la media de asesinatos que nos podría dar otra perspectiva:

```
murder_summary_2 <- USArrests |>
  group_by(UrbanPop_discreta) |>
  summarize(Media_asesinatos = mean(Murder))

ggplot(murder_summary_2, aes(x = UrbanPop_discreta, y = Media_asesinatos, fill = UrbanPop_discreta)) +
  geom_bar(stat = "identity", show.legend = FALSE) +
```

```
  labs(title = "Media de Asesinatos según Población Urbana/Rural",
       x = "Categoría de Población",
       y = "Media de Asesinatos") +
  scale_fill_manual(values = c("Más Población Urbana" = "lightblue", "Más Población Rural" = "tomato")) +
  theme_minimal()
```




```
ggplot(USArrests, aes(x = UrbanPop_discreta, y = Murder, fill = UrbanPop_discreta)) +
  geom_boxplot(show.legend = FALSE) +
  labs(title = "Distribución de Asesinatos según Población Urbana/Rural",
       x = "Categoría de Población",
       y = "Número de Asesinatos") +
  scale_fill_manual(values = c("Más Población Urbana" = "lightblue", "Más Población Rural" = "tomato")) +
  theme_minimal()
```



Aunque la distribución de los asesinatos pueda indicar lo contrario, la media de asesinatos en poblacion rural es ligeramente superior a la urbana. Las anteriores gráficas puede llevar a equivocación debido a que hay muchos más estados con más población urbana que rural, por lo cual más asesinatos se cometen en estados urbanos, también al haber más población hay más asesinatos, a pesar de que de media se cometan más en los estados rurales

Pregunta 9

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos plantear un contraste de hipótesis en el que veamos si de media se comete un numero significativamente mayor de asesinatos en zonas urbanas o rurales

Para resolver este contraste de hipótesis utilizamos el test t, teniendo en cuenta que nuestra hipótesis nula es que las medias sean iguales y nuestra hipótesis alternativa es que sean distintas

```
urbano <- USArrests |> filter(UrbanPop_discreta == "Más Población Urbana") |> select(Murder)
rural <- USArrests |> filter(UrbanPop_discreta == "Más Población Rural") |> select(Murder)

result <- t.test(urbano$Murder, rural$Murder, var.equal = FALSE)
print(result)
```

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  urbano$Murder and rural$Murder
## t = -0.32718, df = 10.058, p-value = 0.7502
```

```
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -4.978969  3.703088
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  7.673171  8.311111
```

Como el valor p es mayor a 0.05 no podemos decir que haya una diferencia significativa entre la media de asesinatos en zonas rurales y en zonas urbanas. Por lo que no podemos decir que haya una relacion significativa entre la distribucion de la poblacion y la media de asesinatos. Y viendo los dos gráficos anteriores esto se puede observar claramente