Universidad de San Andrés

Matemática I – Final – 1/12/2021

1 (2.5p)	2 (2.5p)	3 (2p)	4 (3p)	Nota

Apellido y nombre: ....

Tutor: ....

Justificar todas las respuestas.

Escribir todos los razonamientos y las cuentas que conducen a las respuestas.

---

1. (*2.5 puntos*) Sean $f(x) = x^3$ y $g(x)$ la función lineal de pendiente m cuyo gráfico pasa por el origen. Hallar un valor de $m > 0$ de modo que la región acotada comprendida entre los gráficos de f y g tenga área igual a 18.

   Sugerencia: graficar f y g.

---

2. (*2.5 puntos*) Sea $f(x) = 3 + 9x^2 + (6x-2)e^{3x}$.

   (a) Hallar el dominio natural de f, sus intervalos de crecimiento/decrecimiento y sus extremos locales.

   (b) Analizar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de f.

   (c) Hacer un gráfico aproximado de f que refleje los resultados obtenidos en (a) y en (b).

   (d) Calcular la imagen de f.

---

3. (*2 puntos*) Sea $H : \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$H(x) = \int_{1+2x}^{1} \frac{e^{t-1}}{t}\, dt$$

   Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de H centrado en $x = 0$.

---

4. (*3 puntos*) Determinar si las siguientes series convergen o no. Cuando converjan, calcular su suma:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 5(-1)^n}{3^{n-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

Tema 1

1	2	3	4	Calificación

Apellido: Teórica: 1 / 2 / 3

Nombre: Tutor/a: Marisol / Sergio / Emiliano

Matemática 1 - Semestre Primavera - Final (01/12/2021)

Justificar todas las respuestas

---

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 2$ es $P(x) = x^2 + 3x - 1$. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x^2+1) + a(x-1)^2 + b(x-1)$ Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $g'(1) = 7$ y $g''(1) = 6$.

---

2. Hallar el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$, $g(x) = 2x^2 + 8x + 9$ y la recta $y = 3$.

---

3. Sea
$$F(x) = \int_0^{x^2-4x} t^2 e^{-t^2} dt.$$
   a) Explicar por qué F es una función derivable en $\mathbb{R}$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos locales.

   b) Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}.$$

---

4. Sea $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+7}$.

   a) Probar que $f \geq 0$ en $[2, +\infty)$.

   b) Probar que f es decreciente en $[2, +\infty)$.

   c) Analizar la convergencia de la siguiente integral
$$\int_2^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx.$$
   d) Decidir si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2+4n+7}$ es convergente o no. Justificar.

TEMA 1

1	2	3	4	Nota

APELLIDO: TUTOR:

NOMBRE:

Matemática I

Final • 01/12/2021

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1. Sea $f\colon \mathbb{R}\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2-b}{x-a}$.

   a) Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x = 2$ y $x = 4$ sean puntos crítico de f.

   b) Para los valores de a y b hallados, encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f determinar si $x = 2$ y $x = 4$ máximos o mínimos relativos y/o absolutos.

   c) Para los valores de a y b hallados, calcular Imf.

---

2. Considere las funciones $f(x) = e^x(x^2-1)$ y $g(x) = x^2-1$.

   a) Determinar los intervalos donde $f(x) > g(x)$ y donde $f(x) < g(x)$.

   b) Hallar el área encerrada por los gráficos de f y g.

---

3. *a*) Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\ln^2(n^2+1)}$ converge o no.

   b) Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{6}\,\frac{2^{n+1}}{3^{n-2}}$ converge o no. En caso de converger, calcular la suma.

---

4. Considere la función $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2-3} e^{-t^2+1}\,dt$.

   a) Calcular el polinomio de Taylor de F orden 2 centrado en $x = 2$.

   b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{F(x)}{\sqrt{x^2-4}}$

UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS

MATEMÁTICA I FINAL 30/11/21

APELLIDO Y NOMBRES:

TUTOR: **Emilia** **Matías** **(Marcar el que corresponda)**

1	2	3	4	NOTA

TEMA 1 **JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS**

1. (25 puntos)
   Calcular la $\int cos\left(\sqrt{x}-1\right)\, dx$.

2. (25 puntos)
   Sean $f(x)=-2|x|+4$, $g(x)=2|x|-4$.
   Hallar el área de la región encerrada por el gráfico de f y el gráfico de g.
   (Sugerencia: Realice un gráfico aproximado de la región).

3. (25 puntos)
   Sea g una función infinitamente derivable en R tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $x=2$ es $P(x)=3(x+2)^2-18(x+2)+28$.
   Sea $f(x)=\int_{g(x)-3}^{x^2-x-1} e^{-t^2+1}\, dt + ln\left(g'(x)-5\right)$.
   Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x=2$.

4. (25 puntos) **<u>JUSTIFIQUE EXPLICANDO CON CLARIDAD</u>**
   a) ¿Porqué la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$ es divergente? (12 puntos)
   b) Hallar el conjunto de los $a \in R$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n\cdot 3^n}{(a+1)^n}$ es convergente. (13 puntos)