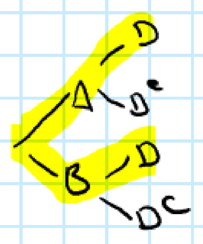
Consulta Mate 3 02-06

lunes, 2 de junio de 2025 18:05

① A: la tecla es fabricada por la máquina A.

B: " " " " " " " B.

D: la tecla seleccionada es defectuosa



Datos de la consigna: $P(D|A) = 0{,}04$ $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$P(D|B) = 0{,}01$ $P(B) = 0{,}5$

a) $\underset{\text{Teorema Prob. Total}}{P(D)} = P(D|A).P(A) + P(D|B)P(B)$ pues la hip. $\begin{cases} A\cap B = \emptyset \\ A\cup B = S \\ P(A)>0 \quad P(B)>0 \end{cases}$

$= 0{,}04 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0{,}025$

b) $P(A|D) \underset{\text{def condicional}}{=} \frac{P(A\cap D)}{P(D)} \underset{\text{regla multip.}}{=} \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}5}{0{,}025} = 0{,}8$

② $P(A\cup B) = 7/8$ $P(A\cap B) = 1/4$ $P(A^c) = 5/8$

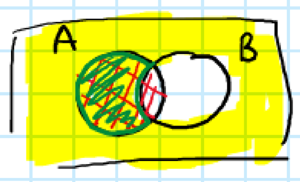
a) $P(A) \underset{\text{prop complemento}}{=} 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

b) $P(B) =$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\frac{7}{8} = \frac{3}{8} + P(B) - \frac{1}{4} \to P(B) = \frac{3}{4}$

c) $P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$



$P(A^c\cap B^c) = P[(A\cup B)^c]$

$= 1 - P(A\cup B)$

¿A y B son independientes? Si lo fuesen $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$\frac{1}{4} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4}$ → A y B no son independientes

si A y B^c fuesen independientes $P(A\cap B^c) = P(A).P(B^c)$

$\frac{1}{8} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$ → A y B^c no son independientes

③ $f(x) = \begin{cases} K(4x - 2x^2) & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

a) Como $f(x)$ es una función de densidad: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 K(4x - 2x^2)\,dx$

$= K\left[\cancel{4}^{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - 2\cdot\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^2$

$= K\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]\Big|_0^2 = K\left[2.2^2 - \frac{2}{3}.2^3 - 0\right]$

$= K\,\frac{8}{3} \underset{\text{quiero}}{=} 1$

$\boxed{K = \frac{3}{8}}$

Entonces $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

b) Demanda esperada en una semana

X: "demanda semanal, en millones de unidades, de la empresa"

$\underset{\text{def.}}{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 x\,\frac{3}{8}(4x - 2x^2)\,dx = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)dx$

$= \left(\frac{\cancel{3}}{2}\frac{x^3}{\cancel{3}} - \frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{2} - \frac{3}{16}\cdot 2^4 - (0) = 1$

c) $C = 5X + 40$

$E(C) = E(5X + 40) \underset{\text{linealidad}}{=} 5E(X) + 40 = 5.1 + 40 = \boxed{45}$

Rta. $E(C) = 45$

d) $P(X > 1{,}5) = \int_{1{,}5}^2 f(x)\,dx = \frac{5}{32}$

④ X: "capacidad, en cl, de determinado envase" $X \sim N(100, 0{,}4^2)$

Me pide la $P(99 < X < 101) \underset{\text{estandarizo}}{=} P\left(\frac{99 - 100}{0{,}4} < \underbrace{\frac{X - 100}{0{,}4}}_{Z = \frac{X-100}{0{,}4} \sim N(0,1)} < \frac{101 - 100}{0{,}4}\right)$

$= P(-2{,}5 < Z < 2{,}5)$

$= \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) =$

$\underset{\text{app/tabla}}{=} 0{,}9938 - 0{,}0062 = 0{,}9876$

Rsta: el porcentaje de envases que cumplen la norma es 98,76%

b) Y: "n° de unidades defectuosas en un lote" $Y \sim B(12, p)$

probabilidad de "éxito", es ser defectuoso $= 1 - 0{,}9876$

$p = 0{,}0124$

Rechazo el lote si $Y > 2$

$P(Y > 2) \underset{\text{prop. complemento}}{=} 1 - P(Y \le 2) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)]$

$= 1 - 0{,}9997 = 0{,}0003$

⑤ X_i: "cantidad de memoria en MB ocupada por la página i" $i = 1..500$

Desconozco la distribución de X_i, pero se $E(X_i) = 1{,}3$ $V(X_i) = 0{,}3^2$

Sea $S = \sum_{i=1}^{500} X_i \overset{\text{TCL}}{\approx} N(\mu_S, \underset{\text{varianza}}{\sigma_S^2})$ $\mu_S = 1{,}3.500 = 650$

pues $n = 500 \geq 30$ $\sigma_S^2 = 0{,}3^2.500 = 45$

las X_i son iid.

$P(S > 660) \underset{\text{prop. complemento}}{=} 1 - P(S \le 660) = 1 - P\left(\underbrace{\frac{S - 650}{\sqrt{45}}}_{Z \approx N(0,1)} \le \frac{660 - 650}{\sqrt{45}}\right)$

$= 1 - P(Z \le 1{,}491)$

$\overset{\text{TCL}}{\approx} 1 - \Phi(1{,}491) = 1 - 0{,}9319 = 0{,}0681$

$P(S > 660) \approx 0{,}0681$