Consulta Mate 3 15/05

jueves, 15 de mayo de 2025 17:54

① $P(B|A)=0{,}2 \quad P(B|A^c)=0{,}8 \quad P(B)=0{,}4$ } Datos

a) A y B son independientes: Si A y B fuesen independientes $P(B|A)=P(B)$, sin embargo $P(B|A)=0{,}2 \neq 0{,}4=P(B)$ → no son independientes → es falso

c) B y B^c son independientes: Si B y B^c fuesen independientes $P(B\cap B^c)=P(B)P(B^c)$
ahora: $P(B).P(B^c)=0{,}4\,.\,0{,}6=0{,}24$
Pero B y B^c son mutuamente excluyentes, entonces $P(B\cap B^c)=P(\emptyset)=0$
↳ $B\cap B^c=\emptyset$
Entonces $P(B\cap B^c)=0 \neq 0{,}24=P(B).P(B^c)$ → es falso

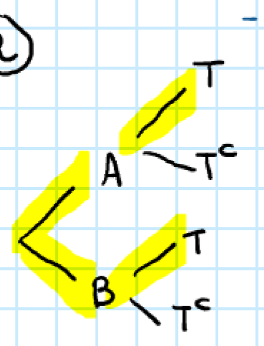
b) $P(A)=1/3$ → Se acuerdan que en clase dijimos que no podíamos usar probabilidad total con A y B, porque el enunciado no me dice que A y B sean una partición de S → Y NO LO PUEDO SUPONER

Peeero... A y A^c sí son una partición de S, porque
$\begin{cases} A\cup A^c=S \\ A\cap A^c=\emptyset \end{cases}$ trivial
$P(A)>0$ → esto no lo estoy
$P(A^c)>0$ suponiendo, lo sé porque $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=0{,}2$ — $P(A)$ es no nulo!

Luego:
$P(B)=P(A).P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)$
$0{,}4=P(A).0{,}2+(1-P(A)).0{,}8$
$0{,}4=0{,}2P(A)+0{,}8-0{,}8P(A)$
$-0{,}4=-0{,}6P(A) \to P(A)=\dfrac{-0{,}4}{-0{,}6}=\dfrac{2}{3}\neq\dfrac{1}{3}$ → es falso

→ el d) se los dejo a ustedes, pero ya saben que $P(A)=\frac{2}{3}$;)

②



A: "Llega primero el ascensor A" $P(A)=0{,}65$
B: " " " " B" $P(B)=1-P(A)=0{,}35$
T: "el ascensor se bloquea con una persona adentro"
$P(T|A)=0{,}004 \quad P(T|B)=0{,}02$

a) $P(T)=P(A).P(T|A)+P(B).P(T|B)$ Prob. Total pues hip. ⊛ $\begin{cases} A\cup B=S \\ A\cap B=\emptyset \\ P(A)>0 \;\; P(B)>0 \end{cases}$
$=0{,}65\,.\,0{,}004+0{,}35\,.\,0{,}02$
$=\boxed{\dfrac{6}{625}}$

b) $P(A|T)=\dfrac{P(T|A).P(A)}{P(T)}=\dfrac{0{,}004\,.\,0{,}65}{\frac{6}{625}}=\dfrac{13}{48}$
T. Bayes pues se verifica ⊛ y además $P(T)\neq 0$

③ X_{10}: "número de ratas de campo en 10 hectáreas" $E(X_{10})=20=\lambda$
$X_{10}\sim P(\lambda=20)$
10h — 20
1h
X_1: "número de ratas de campo en 1 hectárea" $E(X_1)=\lambda=2$
$X_1\sim P(\lambda=2)$

a) $P(X_1<5)=P(X_1\leq 4)=F(4)=0{,}9473$
↳ X_1 es una v.a. discreta
↳ tabla/app

b) encontrar menos de 5 ratas de campo en 2 de las siguientes 3 hectáreas inspeccionadas.

Y = "número de hectáreas de campo, entre 3 hectáreas, con menos de 5 ratas de campo".

$Y\sim B(3;\,0{,}9473)$
↳ probabilidad de "éxito" tener menos de 5 ratas en 1 hectárea.

$P(Y=2)=\binom{3}{2}.(0{,}9473)^2.(1-0{,}9473)^1=0{,}14175$

④ X_i = "duración, en h, de la bombita i de luz" Con $i=1,2,\dots 16$
$X_i\sim N(800;40^2)$ las X_i son independientes por tratarse de focos distintos

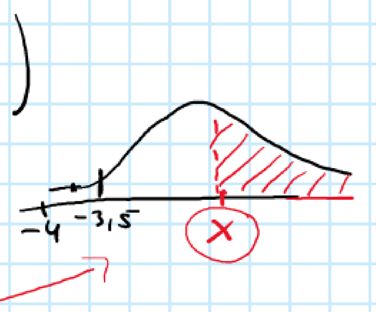
a) $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{16}X_i}{16}$ (pag 107) → $\bar{X}\sim N(\mu_{\bar{X}},\sigma^2_{\bar{X}})$
$X_1,X_2,\dots X_{16}$ son v.a. iid, con distribución normal $X_i\sim N(800,40^2)$

$\mu_{\bar{X}}=E(\bar{X})=E\left(\dfrac{1}{16}.\sum_{i=1}^{16}X_i\right)\underset{\text{linealidad de la esperanza}}{=}\dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}E(X_i)=\dfrac{1}{\cancel{16}}.\cancel{16}\,E(X_i)=800$
↳ c/ X_i tiene la misma distribución

$\sigma^2_{\bar{X}}=V(\bar{X})=V\left(\dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i\right)\underset{\text{independencia y c/ }X_i\text{ tiene misma distribución}}{=}\dfrac{1}{16^2}\sum_{i=1}^{16}V(X_i)=\dfrac{1}{16^{\cancel{2}}}.\cancel{16}.40^2=\dfrac{40^2}{16}$

$\bar{X}\sim N\left(800;\dfrac{40^2}{16}\right)$ → $V(\bar{X})$ → $\sigma=\sqrt{\dfrac{40^2}{16}}=\dfrac{40}{\sqrt{16}}$

$P(\bar{X}<755)=P\Bigg(\underbrace{\dfrac{\bar{X}-800}{40/\sqrt{16}}}_{Z\sim N(0,1)}<\dfrac{755-800}{40/\sqrt{16}}\Bigg)$
$=P(Z<-4{,}5)=\Phi(-4{,}5)=0$



b) $P(\bar{X}>x)=0{,}15$
$1-P(\bar{X}\leq x)=0{,}15$ prop. complemento
$0{,}85=P(\bar{X}\leq x)$
$0{,}85=P\Bigg(\underbrace{\dfrac{\bar{X}-800}{40/\sqrt{16}}}_{Z\sim N(0,1)}\leq\dfrac{x-800}{40/\sqrt{16}}\Bigg)$
$0{,}85=\Phi_Z\left(\dfrac{x-800}{40/\sqrt{16}}\right)$
por tabla
$\dfrac{x-800}{40/\sqrt{16}}=1{,}04$ → despejo x

Consigna (traten de hacerlo solos y después comparen)

Los tiempos que tarda un cajero en procesar el pedido de cada persona son variables aleatorias independientes con una media de 1,5 minutos y una desviación estándar de 1 minuto. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que se puedan procesar los pedidos de 100 personas en menos de 2 horas? ¿Podría calcular la probabilidad de que el tiempo de espera de una persona sea menor que 1 min?

Sea X_i: "tiempo, en minutos, que tarda el cajero en procesar el pedido de la persona i" $i=1,2,\dots,100$

Con $X_i\sim$? → ¡no conozco la distribución! → Pero sé que: $E(X_i)=1{,}5 \quad \underbrace{\sqrt{V(X_i)}}_{\text{desviación estándar}}=1$

Sea $T=X_1+X_2+\dots+X_{100}=\sum_{i=1}^{100}X_i$ → T mide el tiempo, en minutos, que se tarda en procesar los pedidos de las 100 personas

Ahora, quiero ver que T sea menor a 2 horas, pero ¡ojo! → T mide en minutos NO en horas
↳ 2 horas = 120 minutos

Me pide hallar: $P(T<120)$, pero no conozco la distribución de T, porque no conozco la de X_i

Entonces uso TCL, pues $n=100>30$ (es suf. grande) y las variables $X_1,X_2\dots X_{100}$ son independientes e idénticamente distribuidas. (recuerden justificar las hipótesis del TCL)

Luego: $E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)\underset{\text{linealidad}}{=}\sum_{i=1}^{100}E(X_i)=100.1{,}5=150$

$V(T)=V\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)\underset{\text{independencia}}{=}\sum_{i=1}^{100}V(X_i)=100.1^2=100$

Luego
$P(T<120)\overset{\text{estandarizo}}{=}P\Bigg(\underbrace{\dfrac{T-150}{\sqrt{100}}}_{Z\overset{TCL}{\approx}N(0,1)}<\dfrac{120-150}{\sqrt{100}}\Bigg)$

$=P(Z<-3)\approx\Phi(-3)=0{,}0013$

Rta. $P(T<120)\approx 0{,}0013$

¿Puedo calcular $P(X_1<1)$? No, porque no conozco la distribución de X_1 para calcularlo de forma exacta, y n no es lo suficientemente grande para calcularlo de manera aproximada (no puedo usar TCL)