

MATEMÁTICA 3 – 1º CUATRIMESTRE 2022
2º PARCIAL – 2º FECHA – TURNO MAÑANA

Nº de alumno: Carrera:.....

Apellido y nombre:.....

- 1) a) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una v.a. X con densidad dada por
Hallar el EMV de θ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{(-x/\theta)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- b) El estimador hallado en a) es insesgado?, es consistente?
c) Se mide la duración en meses de cierto tipo de motor eléctrico obteniéndose los siguientes datos:

5.178 0.848 11.244 3.920 13.342 3.424 1.879 2.001 0.677 13.254 4.556
1.941 3.3143 12.074 12.817

Si la duración en meses es una v.a. con densidad como en el inciso a), obtener el EMV de $P(X \leq 9)$,

y hallar la estimación de $P(X \leq 9)$. (Sugerencia: $P(X \leq 9) = 1 - e^{-\frac{9}{\theta}}$).

- 2) Se comparan dos procesos para fabricar cierto microchip. Se seleccionó una muestra de 400 chips de un proceso menos costoso, donde 62 estaban defectuosos. Se seleccionó una muestra de 100 chips de un proceso más costoso, pero 12 tenían defecto.

Determine un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las proporciones de los chips defectuosos producidos por los dos procesos.

- 3) Los estudiantes pueden elegir entre un curso de física de tres meses sin laboratorio y un curso de cuatro meses con laboratorio. El examen final escrito es el mismo para cada curso. Si 12 estudiantes del curso con laboratorio tienen una calificación promedio en el examen de 84 con una desviación estándar de 4, y 18 estudiantes del curso sin laboratorio tienen una calificación promedio de 77 con una desviación estándar de 6:

- a) Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia entre las calificaciones medias para ambos cursos. Suponga que las poblaciones se distribuyen de forma normal con varianzas iguales.
b) Utilice el intervalo del inciso anterior para probar la hipótesis de que hay diferencia entre las calificaciones medias de ambos cursos. ¿Cuál es el nivel de la prueba?. Explique.

- 4) a) Decir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando la respuesta:

La distribución Student se puede utilizar para construir un test de hipótesis para la media de cualquier población, en tanto que el tamaño muestral sea pequeño.

- b) Pruebe la hipótesis de que el contenido medio de los envases de un lubricante específico es de 10 litros, si los contenidos de una muestra aleatoria de 10 envases son 10.2, 9.7, 10.1, 10.3, 10.1, 9.8, 9.9, 10.4, 10.3 y 9.8 litros. Utilice un nivel de significancia de 0.01 y suponga que la distribución del contenido es normal.

- 5) Un fabricante de estaciones de trabajo de computadora está probando un nuevo proceso de ensamble automatizado. El proceso actual tiene una tasa de defectos de 5%. En una muestra de 400 estaciones de trabajo ensambladas con el nuevo proceso, 15 tenían defectos. ¿Se puede concluir que el nuevo proceso tiene una tasa menor de defectos?. Decida con el p-valor.

12/7/22

Matemática III
2da parcial 2da fecha

4

1) a) $X_i \sim E\left(\frac{1}{\theta}\right)$

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} & x_i > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$L(x_1, \dots, x_m, \theta) = \frac{1}{\theta^m} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^m x_i}$$

$$\ln(L) = -\frac{1}{\theta} \sum x_i - m \ln(\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln(L) = -\frac{1}{\theta^2} \sum x_i - \frac{m}{\theta} = 0 \rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

b) $E(\hat{\theta}) = E(\bar{x}) = E(X_i) = \theta$

$$V(\hat{\theta}) = V(\bar{x}) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m V(X_i) = \frac{V(X_i)}{m} = \frac{\theta^2}{m}$$

↑
ind y prop de varianza

Teor.

$$\bullet \text{ Si } \lim_{m \rightarrow +\infty} E(\hat{\theta}) = \theta \checkmark$$

$$\bullet \text{ Si } \lim_{m \rightarrow +\infty} V(\hat{\theta}) = 0 \checkmark$$

 $\rightarrow \hat{\theta}$ es consistentec) $X_i =$ "duración del motor eléctrico" (meses)
 $i=1, \dots, m$ $m=15$

$$\hat{\theta} = \bar{x} = 6,031286667$$

$$P(X \leq 9) = 1 - e^{-9/\hat{\theta}} = 1 - e^{-9/6,03} \quad \text{Estimador}$$

↑
prop de invarianza

$$P(X \leq 9) = 1 - e^{-9/6,03} = 0,775 \quad \text{Estimación}$$

2) $X =$ "n° de chips menos costosos e/ 400"

$$X \sim B(m_1, p_1) \quad m_1 = 400 \quad \hat{p}_1 = \frac{X}{m_1} = \frac{62}{400}$$

 $Y =$ "n° de chips más costosos e/ 100"

$$Y \sim B(m_2, p_2) \quad m_2 = 100 \quad \hat{p}_2 = \frac{Y}{m_2} = \frac{12}{100}$$

$$1 - \alpha \approx 0,95$$

$$IC(p_1 - p_2) = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m_2}}$$

$$IC(p) = \left[\frac{62}{400} - \frac{12}{100} \pm 1,96 \sqrt{\frac{\frac{62}{400} \left(1 - \frac{62}{400}\right)}{400} + \frac{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}{100}} \right]$$

$$[-0,0379; 0,1079]$$

a) X_i = "calificación del i -ésimo alumno del curso con lab"
 $i = 1, \dots, m_1$ $m_1 = 12$ $\bar{X} = 84$ $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $S_1^2 = 4$

Y_j = "sin lab"
 $j = 1, \dots, m_2$ $m_2 = 18$

X, Y m. indep.

$Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\bar{Y} = 77$

$S_2^2 = 6$

$$1 - \alpha = 0,99$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

$$IC(\mu_1 - \mu_2) = \bar{X} - \bar{Y} \pm S_p t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

$$[1,53689; 12,4631]$$

c. Aux:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{28,1428} = 5,304984$$

$$t_{0,005}(28) = 2,76326$$

$$b) H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Rech H_0 si $0 \notin IC(\mu_1 - \mu_2)$

$$\text{Nivel } \alpha = 0,01$$

$$0 \notin [1,53; 12,46]$$

Conclusión: Rech H_0 con $\alpha = 0,01$, puedo afirmar que las medias difieren con $\alpha = 0,01$

4) Falso: se usa student si las variables tienen distribución normal.

b) X_i = contenido del envase i (litros)
 $i = 1, \dots, m$ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{X} = 10,06$$

$$S = 0,24585$$

$$\alpha = 0,01$$

$$H_0: \mu = 10$$

$$H_1: \mu \neq 10$$

Test bilateral

• Est. de prueba: $T = \frac{\bar{X} - 10}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ bajo H_0

Rech H_0 si $|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$

$$0,77 \not> t_{0,005}(9) = 3,249$$

Conclusión: No tengo evidencia suficiente para rechazar H_0 con $\alpha = 0,01$

No puedo afirmar que el contenido medio difiere de 10l con $\alpha = 0,01$

5) $X = "n"$ de estaciones de trabajo ensambladas con el nuevo proceso con "defectos e/m"

$$X \sim B(m; p)$$

$$m = 400$$

$$\hat{p} = \frac{X}{m} = \frac{15}{400}$$

$$H_0: p = 0,05$$

$$H_1: p < 0,05$$

Est de prueba:

$$Z = \frac{\hat{p} - 0,05}{\sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,95}{m}}} \stackrel{TCL}{\sim} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

• $p\text{-valor} = P(Z < -1,5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{=} P(Z > 1,5) \underset{TCL}{\approx} \boxed{0,125}$

concl: No tengo evidencia suficiente para rechazar H_0 porque el $p\text{-valor} > 0,05$

No puedo afirmar que el nuevo proceso tiene una tasa menor de defectos