Ejemplos de representaciones para una familia de álgebras de Hopf

por Alfio Antonio Rodriguez

Presentado ante la Facultad de Ciencias Exactas como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Licenciado en Matemática de la

Universidad Nacional de Salta

Marzo de 2020

Director: Dr. Agustín García Iglesias
Codirector: Lic. Gonzalo Maximiliano López

Resumen

En este trabajo abordamos la teoría de representaciones de álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos simétricos $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$. El primer caso ya ha sido estudiado en la literatura y, en particular, los módulos simples sobre esas álgebras están clasificados. Utilizando algunas ideas allí, que exponemos y explicamos en el trabajo, nos concentramos en una familia de álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_4$ y presentamos una colección de representaciones irreducibles para la misma. Esto constituye un aporte original a la teoría y sienta bases para un estudio sistemático que lleve a una comprensión completa de su teoría de representaciones, así como la de otras álgebras relacionadas.

Para esto, primero realizamos un estudio de la teoría de representaciones (lineales) de grupos finitos, presentando conceptos y resultados de esta teoría y que se encuentran en la literatura clásica que aborda estos temas. Luego, realizamos una introducción a las álgebras de Hopf y mostramos algunos de los resultados de mayor relevancia concernientes a ellas. Utilizamos estos conceptos para desarrollar el estudio antes mencionado.

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a mi director, Agustín, quien desde el primer momento se mostró totalmente dispuesto a guiarme en este trabajo con gran empeño, dedicación y una paciencia loable, y de quien he recibido un gran apoyo durante el desarrollo del mismo. Haber trabajado bajo su dirección ha sido una gran experiencia durante la cual logré sentirme motivado para continuar con mi formación como profesional de la matemática.

También agradezco a mi codirector, Gonzalo, con quien he compartido bastante tiempo durante la última etapa de mi formación como licenciado y de quien siempre he recibido consejos para lograr buenos resultados, siempre aspirando a la más sólida formación posible.

A mi familia, que siempre me mostró su apoyo incondicional en esta carrera que elegí y que supieron alentarme en todo momento para perseguir y lograr mis metas. Dedico de modo especial este logro a Carlitos, mi hermano, a quien siempre quiero ver triunfar en sus proyectos.

A mis amigos y amigas de siempre y a quienes conocí durante el transcurso de estos años en la universidad. Un agradecimiento especial a una gran persona, Mauricio López, a quien conocí desde nuestro ingreso a la Facultad y con quien hemos formado un gran lazo de amistad desde entonces. Siempre hemos compartido grandes momentos y, en esta etapa final, nos hemos alentado constantemente y con más énfasis para alcanzar nuestros objetivos.

Finalmente, mi agradecimiento a cada docente de quien recibí formación tanto académica como humana; cada docente que dedicó su tiempo a la enseñanza y a brindarme diversas charlas motivándome a descubrir nuevas cosas en el ámbito que he transitado.

Y a la Universidad Pública, sin la cual todo esto no hubiera sido posible.

Índice general

Introducción

Las álgebras de Hopf fueron mencionadas inicialmente por Pierre Cartier (1956), quien las llamó *hiperálgebras* y cuyo trabajo fue inspirado por el de Jean Dieudonné sobre grupos algebraicos en característica positiva, y por Armand Borel (1953), quien las refirió como *algèbre de Hopf* a modo de homenaje al trabajo de Heinz Hopf. Cartier introduce el concepto de hiperálgebra en [**C**], y en el se reconocen los axiomas que hoy definen a una biálgebra coconmutativa, junto con un axioma adicional, que implica la existencia de una antípoda, [**AFe**, Subsección 3.2]. Borel, en [**B**], se refiere a un álgebra con una estructura extra de comultiplicación, que no es necesariamente coasociativa, y las utiliza para estudiar la homología de los espacios homogéneos. En 1969, Sweedler publica su libro [**S**] y es allí donde las álgebras de Hopf se independizan para comenzar a ser estudiadas por sus propiedades algebraicas intrínsecas. En el artículo [**AFe**] se puede consultar más acerca del desarrollo histórico y evolución de esta teoría.

Las álgebras de Hopf tienen importantes aplicaciones en matemática y en física matemática. Por ejemplo, las álgebras de Hopf semisimples están presentes de una manera fundamental en la teoría de campos conformes. También existen los grupos cuánticos, introducidos en 1986 por Drinfeld en su Conferencia [**D**], una clase particular de álgebras de Hopf. Los mismos pueden ser presentados a partir de deformaciones en un parámetro de álgebras universales de álgebras de Lie o de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines.

Así, en los últimos años, las álgebras de Hopf han atraído el interés de matemáticos de distintas áreas. Especialmente, ha habido gran interés en problemas de clasificación de álgebras de Hopf, ver por ejemplo [**An**].

Es natural esperar que resultados de clasificación sobre álgebras de Hopf de dimensión finita tengan un impacto significante en las áreas mencionadas. En particular, a través de categorías tensoriales que surgen al considerar sus representaciones. En efecto, dos módulos V, V', con acciones $\triangleright$ y $\triangleright'$ respectivamente, sobre un álgebra de Hopf A se pueden "*tensorear*" dotando a $V \otimes V'$ de una estructura $\triangleright''$ de A-módulo vía

$$a \triangleright'' (v \otimes v') = \sum_i a_i \triangleright v \otimes a^i \triangleright' v'$$

donde $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes a^i$ denota la comultiplicación de $a \in A$.

Por otra parte, nuevos ejemplos pueden ser descubiertos en dichos estudios de clasificación.

La clasificación de todas las álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\Bbbk$ de característica cero es un problema ampliamente abierto. Técnicas estrictamente diferentes son empleadas cuando se trata con álgebras semisimples o no semisimples. En este último caso, técnicas muy útiles se han desarrollado para el caso especial de las álgebras de Hopf punteadas. En el caso de las álgebras de Hopf de dimensión finita punteadas, con grupo abeliano de elementos de tipo grupo, la clasificación fue completada recientemente en [**AGI**].

Un álgebra de Hopf punteada $\mathcal{H}$ está caracterizada por el hecho de que su mayor subálgebra cosemisimple coincide con el álgebra de grupo de sus elementos de tipo grupo, esto es, de los elementos $g \in \mathcal{H}$ tales que $\Delta(g) = g \otimes g$. Esta clase incluye a las álgebras de grupo $\Bbbk G$, G un grupo. Cabe mencionar el "método del levante" [**AS1**], como una herramienta fundamental y principal estrategia de clasificación de las mismas, junto con [**A+**].

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 estudiamos conceptos y resultados sobre los cuales basamos el desarrollo de los resultados que presentamos en los capítulos posteriores. Este capítulo contiene varias secciones: la primera de ellas trata sobre el producto tensorial, una aplicación bilineal que preserva estructuras de nuestro interés. Muchos de sus resultados son de utilidad al momento de encarar los conceptos de representaciones lineales de grupos finitos, que forman parte de la segunda sección junto a las representaciones de álgebras. Íntimamante relacionada con las representaciones, en las siguientes secciones presentamos la teoría de caracteres y, luego, las representaciones inducidas. Terminamos el capítulo desarrollando, como ejemplo de aplicación, las representaciones de $\mathbb{C}\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{C}\mathbb{S}_4$.

El capítulo 2 está dedicado de manera exclusiva al estudio de la teoría básica de álgebras de Hopf, presentando definiciones, conceptos y algunos resultados que existen en esta teoría. Un hecho importante que remarcamos en este capítulo es el siguiente, y que nos garantiza que el producto tensorial de dos módulos de Hopf es nuevamente un módulo de Hopf: (Definición 2.67)

DEFINICIÓN. *Sean H una álgebra de Hopf y V, W dos H-módulos a izquierda. Entonces $V \otimes W$ es también un H-módulo a izquierda, vía*

$$h \cdot (v \otimes w) = \sum (h_{(1)} \cdot v) \otimes (h_{(2)} \cdot w),$$

para todos $h \in H, V \in V, w \in W$.

De gran utilidad para este desarrollo son [**Mo**] y [**Sc**].

En el Capítulo 3, introducimos las álgebras de Hopf con las que trabajaremos y recordamos los resultados principales de [**GI**]. Destacamos [**GI**, Teorema 5.8], que brinda una lista completa de todos los $\mathcal{A}_1$-módulos simples (de Hopf). Luego de exponer esas ideas, las extendemos al contexto de álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_4$, al que extendemos los módulos simples definidos en la Sección 1.7.2. A su vez, probamos que algunas de esas técnicas pueden aplicarse en este contexto, y definimos una colección de módulos simples para una familia de estas álgebras, lo que constituye el aporte original de este trabajo. Estos quedan expresados en los siguientes resultados: Teorema 3.9 y, como consecuencia, el Corolario 3.10.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, primero trabajamos con nociones básicas de producto tensorial y algunos resultados. Luego presentamos conceptos y resultados relevantes de la Teoría de Representaciones (lineales) de grupos finitos. También fijamos la notación y recordamos algunos otros conceptos básicos que constituirán el lenguaje del trabajo.

Consideramos conocidos los conceptos y resultados principales de la Teoría de grupos y de espacios vectoriales por lo que, salvo que sea necesario, no los desarrollaremos en este trabajo.

1.1. Convenciones

Durante este capítulo, $\Bbbk$ será un cuerpo arbitrario y $\Bbbk^\times$ denotará a $\Bbbk - \{0\}$. Dado un espacio vectorial V sobre $\Bbbk$ (también diremos que V es un $\Bbbk$-espacio vectorial), $\mathrm{End}(V)$ denotará el espacio vectorial de las transformaciones de V en V. $\mathrm{GL}(V)$ será el subconjunto de $\mathrm{End}(V)$ formado por las transformaciones lineales biyectivas. Los espacios vectoriales estarán definidos sobre el mismo cuerpo $\Bbbk$, salvo indicación adicional y, en general, los consideraremos de dimensión finita.

1.2. Producto tensorial

En esta sección desarrollamos el concepto de producto tensorial, algunos resultados relevantes y ejemplos relacionados.

Sean V, W y U espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 1.1. Una *transformación bilineal* es una función $\varphi : V \times W \to U$ tal que

$$\varphi(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda\varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$$
$$\varphi(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda\varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)$$

para todos $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in \Bbbk$.

Si $U = \Bbbk$ diremos que φ es una *forma bilineal*. Una forma bilineal se dice *simétrica* si $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$ para todos $v \in V$, $w \in W$. De manera análoga, se dice *alternante* si $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$ para todos $v \in V$, $w \in W$.

DEFINICIÓN 1.2. Sean V, W y U espacios vectoriales. Definimos el *espacio de las transformaciones bilineales* de $V \times W \to U$ al siguiente conjunto

$$B(V, W; U) = \{\varphi | \varphi : V \times W \to U \text{ es bilineal}\}.$$

De manera análoga, definimos *espacio de las transformaciones lineales* de $T \to U$, T un espacio vectorial, al siguiente conjunto

$$L(T; U) = \{f | f : T \to U \text{ es lineal}\}.$$

1.2.1. Producto tensorial.

DEFINICIÓN 1.3. Sean V, W espacios vectoriales y $\varphi : V \times W \to T$ una transformación bilineal de $V \times W$ en un espacio vectorial T. El par (T, φ) es llamado *producto tensorial* entre V y W si para cualquier espacio vectorial U y $\psi : V \times W \to U$ transformación bilineal arbitraria existe una única transformación lineal $f : T \to U$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \\ T \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

A la Definición 1.3 se la conoce como *Propiedad de factorización única.* A esta propiedad la podemos expresar mediante otras dos condiciones equivalentes:

$\otimes_1$ Im $\varphi = T$

$\otimes_2$ Si $\psi : V \times W \to U$ es una transformación bilineal de $V \times W$ en un espacio arbitrario U entonces existe una transformación lineal $f : G \to U$ tal que $\psi = f \circ \varphi$.

Mostremos que tal equivalencia es cierta.

Si asumimos que se cumplen $\otimes_1$ y $\otimes_2$, dada una transformación bilineal $\psi : V \times W \to U$ hay dos transformaciones lineales $f : T \to U$ y $g : T \to U$ tales que

$$\psi = f \circ \varphi \qquad \text{y} \qquad \psi = g \circ \varphi.$$

Luego, $0 = \psi - \psi = (f - g) \circ \varphi$. Como se cumple $\otimes_1$, resulta $f = g$.

Recíprocamente, si se cumple la Propiedad de factorización única para (T, φ), es inmediato observar que se cumple $\otimes_2$. Para $\otimes_1$ consideremos la transformación bilineal $\tilde{\varphi} : V \times W \to \text{Im } \varphi$ definida por $\tilde{\varphi}(v, w) = \varphi(v, w)$. Existe una única transformación lineal $f : T \to \text{Im } \varphi$ tal que $\tilde{\varphi} = f \circ \varphi$ y, definiendo la inclusión $\iota : \text{Im } \varphi \to T$, tenemos que $\varphi = \iota \circ \tilde{\varphi}$. De esto, $(\iota \circ f) \circ \varphi = \iota \circ (f \circ \varphi) = \iota \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

Por otro lado, $\text{id} \circ \varphi = \varphi$, con id la tranformación identidad en T. Considerando $U = T$, $\psi = \varphi$ y la unicidad de la Propiedad, tenemos que $\iota \circ f = \text{id}$. Luego, ι resulta sobreyectiva y así Im $\varphi = T$.

Al denotar $V \otimes W$ nos referiremos al espacio T y, haciendo abuso de lenguaje, diremos que este es el producto tensorial. Además, a los elementos $\varphi(v, w)$ los escribiremos como $v \otimes w$.

A continuación damos un ejemplo de un producto tensorial.

EJEMPLO 1.4. Sean V un espacio vectorial y $\otimes : \Bbbk \times V \to V$ una transformación bilineal definida por $\lambda \otimes x = \lambda x$, el producto usual de un elemento de V por un escalar. Entonces el par $(V, \otimes)$ es el producto tensorial entre $\Bbbk$ y V.

Es sencillo notar que $\otimes_1$ se cumple trivialmente. Consideremos una transformación bilineal $f : \Bbbk \times V \to U$ para algún espacio vectorial U y definamos una transformación lineal $\bar{f} : V \to U$ del siguiente modo

$$\bar{f}(x) = f(1, x).$$

Entonces

$$\bar{f}(\lambda \otimes x) = \bar{f}(\lambda x) = f(1, \lambda x) = f(\lambda, x).$$

Luego, el par $(V, \otimes)$ es un producto tensorial entre $\Bbbk$ y V.

OBSERVACIÓN 1.5. En particular, podemos definir $\Bbbk \otimes \Bbbk = \Bbbk$ con $\lambda \otimes \mu = \lambda\mu$.

Mostraremos ahora que el producto tensorial entre dos espacios vectoriales es único salvo isomorfismos.

1.2.2. Existencia y unicidad.

1. **Unicidad**

   Supongamos que $V \otimes W$ y $V \tilde{\otimes} W$ son productos tensoriales entre V y W. Entonces hay un isomorfismo lineal $f : V \otimes W \to V \tilde{\otimes} W$ tal que

   $$f(v \otimes w) = v \tilde{\otimes} w.$$

   Dado que $\tilde{\otimes} : V \times W \to V \tilde{\otimes} W$ es bilineal y $(V \otimes W, \otimes)$ es un producto tensorial, por la Propiedad de factorización, existe $f : V \otimes W \to V \tilde{\otimes} W$ tal que

   $$v \tilde{\otimes} w = f(v \otimes w). \tag{1.1}$$

   Como $(V \tilde{\otimes} W, \tilde{\otimes})$ también es un producto tensorial, existe una transformación lineal $g : V \tilde{\otimes} W \to V \otimes W$ tal que

   $$v \otimes w = g(v \tilde{\otimes} w). \tag{1.2}$$

   De (1.1) y (1.2), resulta

   $$(g \circ f)(v \otimes w) = v \otimes w \quad \text{y} \quad (f \circ g)(v \tilde{\otimes} w) = v \tilde{\otimes} w. \tag{1.3}$$

   Así, al ser $V \otimes W$ y $V \tilde{\otimes} W$ generados por los productos $v \otimes w$ y $v \tilde{\otimes} w$ respectivamente, de (1.3) se sigue que

   $$g \circ f = \mathrm{id}_{V \otimes W} \qquad \text{y} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_{V \tilde{\otimes} W}.$$

   De este modo observamos que f es un isomorfismo lineal de $V \otimes W$ sobre $V \tilde{\otimes} W$ y g es el isomorfismo inverso.

2. **Existencia**

   Dados dos espacios vectoriales V y W y consideremos el espacio vectorial libre $C(V \times W)$ sobre $V \times W$. Sea $N(V, W) \subset C(V \times W)$ el subespacio generado por

   $$(\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda(v_1, w) - \mu(v_2, w)$$

   $$(v, \lambda w_1 + \mu w_2) - \lambda(v, w_1) - \mu(v, w_2)$$

   donde $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ y $\lambda, \mu \in \Bbbk$.

   Denotemos por π a la proyección canónica de $C(V \times W)$ sobre $T = C(V \times W)/N(V, W)$ y definamos $\varphi : V \times W \to T$ por

   $$\varphi(u, v) = \pi(u, v).$$

El par (T, φ) es un producto tensorial entre V y W. Por una sencilla comprobación vemos que φ es bilineal:

Aplicando π a $(\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda(v_1, w) - \mu(v_2, w) \in N(V, W)$ tenemos

$$\pi((\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda(v_1, w) - \mu(v_2, w)) = 0$$

por lo que

$$\pi(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda\pi(v_1, w) + \mu\pi(v_2, w)$$

y

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda v_1 + \mu v_2, w) &= \pi(\lambda v_1 + \mu v_2, w)\\ &= \lambda\pi(v_1, w) + \mu\pi(v_2, w)\\ &= \lambda\varphi(v_1, w) + \mu\varphi(v_2, w).\end{aligned}$$

De igual modo,

$$\varphi(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda\varphi(v, w_1) + \mu\varphi(v, w_2).$$

Ahora veamos que $\otimes_1$ y $\otimes_2$ se cumplen. Para $\otimes_1$, consideremos un elemento arbitrario en T

$$z = \pi \sum_{j,k} \lambda^{jk}(v_j, w_k)$$

Entonces,

$$z = \sum_{j,k} \lambda^{jk}\pi(v_j, w_k) = \sum_{j,k} \lambda^{jk}\varphi(v_j, w_k) \in \text{Im } T$$

Como z es arbitrario, Im $\varphi = T$.

Para mostrar $\otimes_2$, consideremos ψ una transformación bilineal de $V \times W$ en un espacio vectorial arbitrario U.

Dado que $C(V, W) = \langle\{(v, w) | v \in V, w \in W\}\rangle$ hay una única transformación lineal $g : C(V, W) \to U$ tal que

$$g(v, w) = \psi(v, w).$$

Por la bilinealidad de ψ observamos que los generadores de $N(V, W)$ tienen como imagen el vector nulo vía g. De hecho, si a un generador

$$z = (\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda(v_1, w) - \mu(v_2, w)$$

le aplicamos g obtenemos

$$\begin{aligned}g(z) &= g(\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda g((v_1, w)) - \mu g((v_2, w))\\ &= \psi((\lambda v_1 + \mu v_2, w)) - \lambda\psi((v_1, w)) - \mu\psi((v_2, w))\\ &= 0.\end{aligned}$$

De modo similar, el otro generador tiene imagen nula. Así, $N(V, W) \subset \ker g$. Así, g induce una transformación lineal $f : T \to U$ tal que

$$f \circ \pi = g.$$

En particular,

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)(v,w) &= (f\circ\pi)(v,w)\\ &= g(v,w)\\ &= \psi(v,w).\end{aligned}$$

Luego, se satisface $\otimes_2$ y (T,φ) es un producto tensorial entre V y W.

1.2.3. Reducción de transformaciones bilineales a transformaciones lineales. A continuación, mostramos una correspondencia, vía un isomorfsmo lineal, entre el espacio de las transformaciones bilineales y el de las lineales del siguiente modo.

Sean V y W dos espacios vectoriales y $V\otimes W$ el producto tensorial entre ellos. Para cada espacio vectorial U podemos definir un isomorfismo lineal $\Phi : L(V\otimes W;U) \xrightarrow{\simeq} B(V,W;U)$ dado por

$$\Phi(f) = f\circ\otimes, \qquad f\in L(V\otimes W;U)$$

Φ resulta sobreyectiva dado que, por $\otimes_2$, cualquier transformación bilineal $\varphi : V\times W\to U$ puede ser factorizada sobre el producto tensorial. Para probar que Φ es inyectiva consideremos una transformación lineal $f : V\otimes W \to U$ tal que $f\circ\otimes = 0$. Luego, para cualquier elemento $v\otimes w\in \mathrm{Im}\,\varphi$, tendremos que $(f\circ\otimes)(v,w) = 0$. Como $V\otimes W$ está generado por los productos $v\otimes w$, tiene que ser $f\equiv 0$. Así, $\ker\Phi = 0$ y Φ resulta inyectiva.

En el siguiente diagrama conmumativo observamos la correspondencia entre φ (bilineal) y f (lineal)

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & U \\ V\otimes W. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.6. *Sea $\varphi : V\times W\to U$ una tranformación bilineal y $f : V\otimes W\to U$ una transformación lineal inducida. Entonces f es sobreyectiva si, y solo si, φ satisface $\otimes_1$. Además, f es inyectiva si φ satisface $\otimes_2$.*

Demostración. La primera equivalencia es inmediata de $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\,f$ teniendo en cuenta que resulta $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\,f = U$. Para la segunda afirmación, asumamos f inyectiva. Entonces el par $(\mathrm{Im}\,\varphi,\varphi)$ es un producto tensorial entre V y W.

De este modo, cada transformación bilineal $\psi : V\times W\to K$ induce una transformación lineal $g : \mathrm{Im}\,U\to K$ tal que

$$\psi(v,w) = (g\circ\varphi)(v,w).$$

Si f es una extensión de g a una transformación lineal $f : U\to K$ se sigue que

$$\psi(v,w) = (g\circ\varphi)(v,w)$$

y así φ cumple $\otimes_2$.

Recíprocamente, si asumimos que φ satisface $\otimes_2$, la transformación bilineal $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ induce una transformación lineal $h : U \to V \otimes W$ tal que

$$v \otimes w = (h \circ \varphi)(v, w). \tag{1.4}$$

Por otro lado, como $\varphi(v, w) = f(v \otimes w)$ se sigue que

$$v \otimes w = (h \circ f)(v, w).$$

Luego, $h \circ f = \mathrm{id}$ y f resulta inyectiva. □

1.2.4. Subespacios y espacios factores.

PROPOSICIÓN 1.7. *Dados los espacios vectoriales V y W y $(V \otimes W, \varphi)$ un producto tensorial entre ellos y sean $V_1 \subset V, W_1 \subset W$ subespacios y $\varphi_1 = \varphi\mid_{V \otimes W}$ la restricción de φ a $V_1 \otimes W_1$. El par $(\mathrm{Im}\ \varphi_1, \varphi_1)$ es producto tensorial entre V_1 y W_1.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente observamos que φ_1 resulta bilineal de su definición y que $\mathrm{Im}\ \varphi = V_1 \times W_1$. De este modo, se satisface $\otimes_1$. Ahora, para verificar $\otimes_2$, consideremos una transformación bilineal ψ_1 de $V_1 \times W_1$ en un espacio vectorial U. Como $(V \otimes W, \varphi)$ es producto tensorial, elegimos una transformación bilineal $\psi : V \times W \to U$ tal que su restricción a $V_1 \times W_1$ resulte ψ_1. Además, existe una transformación lineal $f : V \otimes W \to U$ tal que $\psi = \varphi \circ f$. Así, si definimos $f_1 = f\mid_{\mathrm{Im}\ \varphi_1}$, tenemos que $\psi_1 = \varphi_1 \circ f_1$ tal como se esperaba. □

Denotaremos $\mathrm{Im}\ \varphi_1 = V_1 \otimes W_1$. Es claro que $V_1 \otimes W_1 \subset V \otimes W$. Además, los elementos $v \otimes w \in V_1 \otimes W_1$ conninciden con $v \otimes w \in V \otimes W$ para cualesquiera $v \in V$ y $w \in W$ por lo que no habrá ambigüedad al usar este elemento.

EJEMPLO 1.8. Dados los subespacios $V_1 \subset V$ y $W_1 \subset W$. Si $V \otimes W$ es un producto tensorial entre V y W entonces $V_1 \otimes W$ y $V \otimes W_1$ son productos tensoriales contenidos en $V \otimes W$. Veamos esto.

Dado el conjunto $T(V_1, W_1) = V_1 \otimes W + V \otimes W_1$, sea π la proyección canónica

$$\pi : V \otimes W \to V \otimes W / T(V_1, W_1)$$

y definamos la transformación bilineal $\beta : V \times W \to (V \otimes W)/T(V_1, W_1)$ por

$$\beta(v, w) = \pi(v \otimes w).$$

Para $v_1 \in V_1$ y $w_1 \in W_1$ resulta $\beta(v_1, w) = 0 = \beta(v, w_1)$, con $v \in V, w \in W$. Luego, β induce una transformación bilineal $\bar{\beta} : V/V_1 \times W/W_1 \to (V \otimes W)/T(V_1, W_1)$ dada por

$$\bar{\beta}(\bar{v}, \bar{w}) = \beta(v, w)$$

El par $((V \otimes W)/T(V_1, W_1), \bar{\beta})$ es un producto tensorial entre V/V_1 y W/W_1.

Tenemos que

$$\mathrm{Im}\ \bar{\beta} = \mathrm{Im}\ \beta = \mathrm{Im}\ \pi = (V \otimes W)/T(V_1, W_1),$$

donde la última igualdad la obtenemos dado que π es la proyección canónica. Luego, se cumple $\otimes_1$.

Ahora, para $\otimes_2$, consideremos la transformación bilineal $\bar{\varphi}$ de $V/V_1 \times W/W_1$ en un espacio vectorial arbitrario U y definamos $\varphi : V \times W \to U$ por

$$\varphi(v, w) = \bar{\varphi}(\bar{v}, \bar{w}).$$

Entonces φ es bilineal y existe f lineal de $V \otimes W$ en U tal que

$$\varphi(v, w) = f(v \otimes w).$$

Además, para $v_1 \in V_1, w \in W$

$$f(v_1 \otimes w) = \varphi(v_1, w) = \bar{\varphi}(\bar{0}, \bar{w}) = 0.$$

De manera análoga, $f(v \otimes w_1) = 0$ para $w_1 \in W_1, v \in V$.

De este modo, $T(V_1, W_1) \subset \ker f$ y f induce una transformación lineal $f : (V \otimes W)/T(V_1, W_1) \to U$ tal que

$$\bar{f} \circ \pi = f.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}(\bar{v}, \bar{w}) &= \varphi(v, w) \\
&= f(v \otimes w) \\
&= (\bar{f} \circ \pi)(v \otimes w) \\
&= \bar{f} \circ \beta(v, w) \\
&= (\bar{f} \circ \bar{\beta})(v, w)
\end{aligned}$$

para todos $v \in V, w \in W$, por lo que

$$\bar{\varphi} = \bar{f} \circ \bar{\beta}.$$

Observación 1.9. Si $(V/V_1 \otimes W/W_1, \otimes)$ es cualquier producto tensorial entre V/V_1 y W/W_1 hay un isomorfismo lineal

$$g : V/V_1 \otimes W/W_1 \xrightarrow{\simeq} (V \otimes W)/T(V_1, W_1)$$

dado por

$$g(\bar{v}, \bar{w}) = \pi(\bar{v}, \bar{w}).$$

1.2.5. Producto tensorial de vectores base. Antes de desarrollar cuestiones acerca del comportamiento del producto de vectores de bases observemos lo siguiente:

Observación 1.10. Si $v^* \neq 0$ y $w^* \neq 0$ entonces $v^* \otimes w^* \neq 0$. De hecho, si $v^* \neq 0$ y $w^* \neq 0$ existen formas lineales f y g en V y W respectivamente tales que $f(v^*)$ y $g(w^*)$ son no nulos.

Dada la forma bilineal que envía pares (v, w) en $f(v)g(w)$, por $\otimes_2$, existe h lineal en $V \otimes W$ tal que

$$h(v \otimes w) = f(v)g(w).$$

Como $h(v^* \otimes w^*) = f(v^*)g(w^*) \neq 0$, tenemos $v \otimes w \neq 0$.

Observación 1.11. Cada $u \neq 0$ en $V \otimes W$ puede ser escrito como

$$u = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$$

con v_i, w_i linealmente independientes, $i = 1, ..., r$. Podemos elegir representar a u con la suma anterior donde r sea el mínimo número tal que v_i y w_i sean linealmente independientes.

Si $r = 1$, $u \neq 0$ implica v_i y w_i no nulos por Observación 1.10 y v_1, w_1 resultan linealmente independientes. Para $r \geq 2$:

Si v_i son linealmente dependientes podemos asumir que

$$v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda^i v_i.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} v_i \otimes w_i + v_r \otimes w_r \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} v_i \otimes w_i + \left(\sum_{i=1}^{r-1} \lambda^i v_i \right) \otimes w_r \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} v_i \otimes (w_i + \lambda^i v_r) = \sum_{i=1}^{r-1} v_i \otimes w_i'
\end{aligned}$$

y r no sería el mínimo. Bajo las mismas suposiciones para w_i, $i = 1, ..., r$, estas también resultan linealmente independientes.

Ahora, sean $v_j^* \in V$ r vectores arbitrarios y $w_j^* \in W$ r vectores linealmente independientes. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{r} v_j^* \otimes w_j^* = 0 \tag{1.5}$$

implica que $v_j^* = 0$ para cada j. Como w_j^* son linealmente independientes, podemos elegir r formas lineales g^i en W tal que

$$g^i(w_j^*) = \delta_j^i.$$

Consideremos la forma bilineal F definida por

$$F(v, w) = \sum_i f^i(v) g^i(w)$$

donde f^i son formas lineales arbitrarias en V. Por $\otimes_2$, existe una transformación lineal h en $V \otimes W$ tal que

$$h(v \otimes w) = F(v, w) = \sum_i f^i(v) g^i(w).$$

Entonces,

$$h\left(\sum_{j=1}^{r} v_j^* \otimes w_j^* \right) = \sum_{i,j} f^i(v_j^*) g^i(w_j^*) = \sum_i f^i(v_i)$$

y (1.5) implica que

$$\sum_i f^i(v_i) = 0. \tag{1.6}$$

Sea k cualquier entero entre 1 y r y elijamos $f^i = 0$ para $i \neq k$. De (1.6)

$$f^k(v_k) = 0.$$

Y como f^k son formas arbitrarias y k un entero arbitrario, se sigue que $v_k = 0$ para cada $k = 1, ..., r$.

DEFINICIÓN 1.12. Dado $(v, w) \in V \times W$, se llama *tensor elemental* a $\varphi(v, w) = v \otimes w$.

El conjunto de los tensores elementales genera todo $V \otimes W$, por lo que cada uno de sus elementos son de la forma

$$v \otimes w = \sum_{\substack{v_i \in \beta_V, \\ w_j \in \beta_W}} v_i \otimes w_j.$$

donde β_V es base de V y β_W de W.

TEOREMA 1.13. *Sean β_V y β_W bases de V y W, respectivamente. El conjunto $\beta_V \otimes \beta_W = \{v \otimes w \mid v \in \beta_V, w \in \beta_W\}$ es base de $V \otimes W$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\beta_V = \{v_i\}_{i=1}^n$ y $\beta_W = \{w_j\}_{j=1}^m$. Consideremos el conjunto $U = \langle\{v_i \otimes w_j | i = 1, ..., n; j = 1, ..., m\}\rangle$.

Claramente, U es un subespacio de $V \otimes W$. Sea $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ la transformación bilineal asociada al producto tensorial $V \otimes W$. Así, $\varphi(v, w) = v \otimes w$. Además $\operatorname{Im} \varphi = \langle\{\varphi(v_i, w_j) = v_i \otimes w_j | i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}\rangle$.

Luego, (U, φ) tambien es un producto tensorial y tenemos que $U \simeq V \otimes W$ y, así, $V \otimes W = \langle\{v_i \otimes w_j | i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}\rangle$.

Ahora, supongamos que

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j = 0.$$

Resulta

$$0 = \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \varphi(v_i, w_j) \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$$

para cada $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ por Observación 1.10. □

COROLARIO 1.14. *Si* $\dim V = m$ *y* $\dim W = n$ *entonces* $\dim(V \otimes W) = mn$.

1.2.6. Producto tensorial de transformaciones lineales, composiciones, imagen y núcleo. Será de gran utilidad conocer el comportamiento del producto tensorial de dos o más transformaciones lineales como así también de la composición de estas. Además, mostramos qué sucede con el núcleo y la imagen de las transformaciones lineales al trabajar con el producto tensorial.

DEFINICIÓN 1.15. Dados los espacios vectoriales V, V', W y W' y las transformaciones lineales $\varphi : V \to V'$ y $\psi : W \to W'$, el *producto tensorial de dos transformaciones lineales* es la transformación bilineal de $V \times W$ en $V' \otimes W'$ definida por

$$(v, w) \mapsto \varphi(v) \otimes \psi(w)$$

Por la Propiedad de factorización, existe una transformación lineal $\chi : V \otimes W \to V' \otimes W'$ tal que

$$\chi(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w) \tag{1.7}$$

que queda determinada de manera única por (1.7). La asignación $(\varphi, \psi) \to \chi$ define una transformación bilineal

$$\beta : L(V; V') \times L(W; W') \to L(V \otimes W; V' \otimes W').$$

PROPOSICIÓN 1.16. *Sea $(L(V; V') \otimes L(W; W'), \otimes)$ un producto tensorial entre $L(V; V')$ y $L(W; W')$. La transformación lineal*

$$f : L(V; V') \otimes L(W; W') \to L(V \otimes W; V' \otimes W')$$

inducida por la transformación bilineal β es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi \in L(V; V') \otimes L(W; W')$ tal que $f(\phi) = 0$. Si $\phi \neq 0$ entonces podemos escribirlo como

$$\phi = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \otimes \psi_i, \quad \varphi_i \in L(V; V'), \psi_i \in L(W; W')$$

con φ_i y ψ linealmente independientes.

Luego

$$f(\phi) = \sum_i \beta(\varphi_i, \psi_i)$$

y, de este modo, $f(\phi) = 0$ implica que

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(v) \otimes \psi_i(w) = 0 \tag{1.8}$$

para todo $(v, w) \in V \times W$. Elijamos $v^* \in V$ tal que $\varphi_1(v^*) \neq 0$. Sea $p \geq 1$ el mayor número de vectores linealmente independientes en $\{\varphi_i(v^*)\}_{i=1}^r$. Reordenando el conjunto podemos obtener $\{\varphi_i(v^*)\}_{i=1}^p$ linealmente independientes. Entonces de

$$\varphi_i(v^*) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji} \varphi_i(v^*), \qquad j = p + 1, ..., r$$

y (1.8) obtenemos que para cada $w \in W$

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(v^*) \otimes \psi_i(w) + \sum_{j=p+1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji} \varphi_i(v*) \right) \otimes \psi_j(w) = 0$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(v^*) \otimes \left(\sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji} \psi_j(v) + \psi_i(v) \right) = 0, \qquad w \in W.$$

Como $\{\varphi_i(v^*)\}_{i=1}^p$ es un conjunto linealmente independiente tenemos que

$$\sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j(v) + \psi_i(v) = 0, \qquad \text{para todo } w \in W,$$

es decir $\sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j + \psi_i = 0$. Esto contradice el hecho de que consideramos las transformaciones ψ_j linealmente independientes. Así, f debe ser inyectiva. $\square$

Ejercicio 1.17. El par $(\mathrm{Im}\ \beta, \beta)$ es un producto tensorial entre $L(V; V')$ y $L(W; W')$.

Trivialmente se cumple $\otimes_1$. Para observar que se cumple $\otimes_2$ basta recordar que los elementos del tipo $\beta(\varphi, \psi) \in \mathrm{Im}\ \beta$ generan a todo $\mathrm{Im}\ \beta$ (Teorema 1.13), donde $\varphi \in L(V; V')$ y $\psi \in L(W; W')$. Luego, usando la transformación lineal f del resultado anterior, tenemos que

$$(f \circ \beta)(\varphi, \psi) = f(\varphi \otimes \psi),$$

donde $\varphi \otimes \psi : V \otimes W \to V' \otimes W'$ y f lineal implica que $f(\varphi \otimes \psi) \in L(V \otimes V'; W \otimes W')$.

Observación 1.18. Cuando V y W son de dimensión finita los elementos $\beta(\varphi, \psi)$ generan el espacio $L(V \otimes W; V' \otimes W')$ como vimos anteriormente y el par $(L(V \otimes W; V' \otimes W'), \beta)$ es un producto tensorial entre $L(V; V')$ y $L(W; W')$.

Denotaremos al producto tensorial entre transformaciones lineales como $\beta(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$. Así

$$(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w).$$

Definición 1.19. Dados las transformaciones lineales

$$\varphi : V \to V', \qquad \psi : W \to W',$$

$$\varphi' : V' \to V'', \qquad \psi' : W' \to W''.$$

La *composición de productos tensoriales de transformaciones lineales* se define del siguiente modo:

$$(\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi). \tag{1.9}$$

Ejercicio 1.20. Si asumimos que φ y ψ son inyectivas, $\varphi \otimes \psi$ lo es.

De la inyectividad de φ y ψ tenemos la existencia de dos transformaciones lineales $\tilde{\varphi} : V' \to V$ y $\tilde{\psi} : W' \to W$ tales que

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi = \mathrm{id} \quad \text{y} \quad \tilde{\psi} \circ \psi = \mathrm{id}\,.$$

Luego, de (1.9)

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}) \circ (\varphi \otimes \psi) &= (\tilde{\varphi} \circ \varphi) \otimes (\tilde{\psi} \circ \psi)\\ &= \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \simeq \mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

por lo que $\varphi \otimes \psi$ es inyectiva.

De la Definición 1.15 se siguen las siguientes definiciones:

Definición 1.21. Si φ y ψ son dos transformaciones lineales entonces la *imagen del producto tensorial de transformaciones lineales* entre ellas es

$$\mathrm{Im}\,(\varphi \otimes \psi) = \mathrm{Im}\ \varphi \otimes \mathrm{Im}\ \psi. \tag{1.10}$$

Observación 1.22. Si φ y ψ son sobreyectivas entonces $\varphi \otimes \psi$ lo es.

Considerando

$$\begin{aligned}&\varphi \otimes \mathrm{id}_W : V \otimes W \to \varphi(V) \otimes W, \text{ y}\\ &\mathrm{id}_{\varphi(V)} \otimes \psi : \varphi(V) \otimes W \to \varphi(V) \otimes \psi(W),\end{aligned}$$

que resultan sobreyectivas, concluimos que también es sobreyectiva la siguiente composición:

$$(\mathrm{id}_{\varphi(V)} \otimes \psi) \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_W) = \varphi \otimes \psi.$$

Definición 1.23. Si φ y ψ son dos transformaciones lineales entonces el *núcleo del producto tensorial* entre ellas es

$$\ker(\varphi \otimes \psi) = \ker \varphi \otimes W + V \otimes \ker \psi. \tag{1.11}$$

Veamos que esta definición tiene sentido:

Dadas las siguientes transformaciones lineales (inducidas) inyectivas

$$\bar{\varphi} : V/\ker \varphi \to V' \qquad \text{y} \qquad \bar{\psi} : W/\ker \psi \to W'$$

tenemos que, por Observación 1.20,

$$\bar{\varphi} \otimes \bar{\psi} : V/\ker \varphi \otimes W/\ker \psi \to V' \otimes W'$$

resulta inyectiva.

Sean las proyecciones canónicas

$$\begin{gathered}\pi_1 : V/\ker \varphi \to V'\ , \qquad \pi_2 : W/\ker \psi \to W'\\ \text{y } \pi : V \otimes W \to (V \otimes W)/T(\ker \varphi, \ker \psi)\end{gathered}$$

donde $T(\ker \varphi, \ker \psi) = \ker \varphi \otimes W + V \otimes \ker \psi$. De la Observación 1.9, existe un isomorfismo lineal

$$g : V \ker \varphi \otimes W \ker \psi \xrightarrow{\simeq} (V \otimes W)/T(\ker \varphi, \ker \psi)$$

tal que

$$g(\pi_1(v) \otimes \pi_2(w)) = \pi(v \otimes w).$$

Ahora definamos la transformación lineal

$$\chi : (V \otimes W)/T(\ker \varphi, \ker \psi) \to V' \otimes W'$$

tal que

$$\chi = (\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}) \circ g^{-1}.$$

χ resulta inyectiva. Además, para cada $v \in V$ y $w \in W$ tenemos

$$\begin{aligned}(\chi \circ \pi)(v \otimes w) &= (\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}) \circ g^{-1} \circ g(\pi_1(v) \otimes \pi_2(w))\\ &= (\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi})(\pi_1(v) \otimes \pi_2(w))\\ &= (\tilde{\varphi} \circ \pi_1)(v) \otimes (\tilde{\psi} \circ \pi_2)(w)\\ &= \varphi(v) \otimes \psi(w).\end{aligned}$$

Así, $\chi \circ \pi = \varphi \otimes \psi$ y como χ es inyectiva tenemos que

$$\begin{aligned}\ker(\varphi \otimes \psi) &= \ker \pi \\ &= T(\ker \varphi, \ker \psi) \\ &= \ker \varphi \otimes W + V \otimes \ker \psi.\end{aligned}$$

1.2.7. Producto tensorial de varios espacios vectoriales. Definimos el producto tensorial de n espacios vectoriales ($p > 2$) y comentamos algunos resultados que son análogos a los obtenidos en el caso de dos espacios vectoriales.

Sean V_i ($i = 1, ..., p$) y U espacios vectoriales.

Definición 1.24. Una *transformación p-lineal* es una función $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to U$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, ..., v_{i-1}, \lambda v_i + \mu w_i, v_{i+1} ..., v_p) = \lambda\varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_p) + \\ + \mu\varphi(v_1, ..., w_i, ..., v_p)\end{aligned}$$

para todos $v_i, w_i \in V_i$, $w, x \in W$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$.

Si $U = \mathbb{k}$ entonces φ es llamada una *forma p-lineal* . Tal como en el caso de dos espacios vectoriales, al subespacio de U generado por los vectores $\varphi(v_1, ..., v_p)$, $v_i \in V_i$ lo denotaremos por Im φ. Si $L(V_1, ..., V_p; U)$ es el conjunto de todas las transformaciones p-lineales φ de $V_1 \times \cdots \times V_p$ en U, este tiene estructura de espacio vectorial dado por las operaciones

$$\begin{aligned}&(\varphi + \psi)(v_1, ..., v_p) = \varphi(v_1, ..., v_p) + \psi(v_1, ..., v_p) \text{ y} \\ &(\lambda\varphi)(v_1, ..., v_p) = \lambda\varphi(v_1, ..., v_p).\end{aligned}$$

Si $U = \mathbb{k}$, $L(V_1, ..., V_p; U) = L(V_1, ..., V_p)$.

Definición 1.25. Sean V_i ($i = 1, ..., p$) espacios vectoriales y $\varphi : V \times W \to T$ una transformación p-lineal de $V_1 \times \cdots \times V_p$ en un espacio vectorial T. El par (T, φ) es llamado *producto tensorial* entre los espacios V_i si para cualquier espacio vectorial U y $\psi : V_1 \times \cdots \times V_p \to U$ transformación bilineal existe una única transformación lineal $f : T \to U$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_p \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi=\otimes"'] & U \\ T = V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Al igual que en el caso $p = 2$, la Definición 1.25 se la conoce como *Propiedad de factorización única* y también podemos expresarla mediante las siguientes dos condiciones equivalentes:

$\otimes_1$ Im $\varphi = T$

$\otimes_2$ Cada transformación p-lineal $\psi : V_1 \times \cdots \times V_p \to U$ (U arbitrario) puede ser escrita como $\psi = f \circ \varphi$, donde $f : T \to U$ es una transformación lineal.

Análogo al caso de $p = 2$, también se satisfacen los teoremas de existencia y unicidad. Entendiendo esto, simplemente escribiremos $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p, \otimes)$ para denotar al producto tensorial entre los espacios $V_1, ..., V_p$. Cada elemento será $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$.

Proposición 1.26. *Dados tres espacios vectoriales V_1, V_2, V_3 existe un isomorfismo lineal $f : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ tal que*

$$f(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$$

Demostración. Sea la transformación 3-lineal $V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ definida por

$$(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$$

Por la Propiedad de factorización única existe una transformación lineal $f : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ tal que

$$f(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3. \tag{1.12}$$

Ahora, para cada $v_3 \in V_3$ fijo le corresponde una transformación bilineal $\beta_{v_3} : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ tal que

$$\beta_{v_3}(v_1, v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

β_{v_3} induce una transformación lineal $g_{v_3} : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ tal que

$$g_{v_3}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

Ahora, definiendo ψ bilineal de $(V_1 \otimes V_2) \times V_3$ en $V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ por

$$\psi(v_1 \otimes v_2, v_3) = g_{v_3}(v_1 \otimes v_2), \quad v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2, v_3 \in V_3$$

vemos que esta induce una transformación lineal g de $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ en $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ por

$$\psi(v_1 \otimes v_2, v_3) = g((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3), \quad v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2, v_3 \in V_3.$$

De este modo,

$$g((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = \psi(v_1 \otimes v_2, v_3) = g_{v_3}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3. \tag{1.13}$$

De (1.12) y (1.13) tenemos que

$$(g \circ f)(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \quad \text{y} \quad (f \circ g)((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$$

Así, f resulta un isomorfismo lineal de $V_1 \times V_2 \times V_3$ sobre $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ y g su inversa. $\square$

También se puede construir de modo análogo un isomorfismo $h : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \xrightarrow{\simeq} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ tal que

$$h(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$$

y luego, $h \circ f^{-1}$ es un isomorfismo ineal de $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ sobre $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ tal que $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$.

Observación 1.27. Si $V_1, ..., V_p, U$ son espacios vectoriales de dimensión finita

$$\dim L(V_1, ..., V_p; U) = \dim V_1 \cdots \dim V_p \dim U.$$

Observación 1.28. La imagen del producto tensorial de varios espacios vectoriales se define por

$$\mathrm{Im}\,(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) = \mathrm{Im}\ \varphi_1 \cdots \mathrm{Im}\ \varphi_p$$

y el núcleo por

$$\ker(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) = \sum_{i=1}^{p} V_1 \otimes \cdots \otimes \ker \varphi_i \otimes \cdots \otimes V_p.$$

El resto de la teoría y resultados desarrollados para el caso $p = 2$ es válido también en el caso general de $p > 2$.

1.2.8. Producto tensorial de álgebras. A continuación definimos el producto tensorial sobre una estructura particular, un álgebra, presentando un morfismo de estructura que determina este producto.

Definición 1.29. Una $\Bbbk$-*álgebra* (asociativa) o álgebra sobre $\Bbbk$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial A junto a un producto $\cdot : A \times A \to A$ asociativo y con unidad tal que verifica

1. $a(b + c) = ab + ac$
2. $(a + b)c = ac + bc$
3. $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

para todos $a, b, c \in A$, $\lambda \in \Bbbk$.

Definición 1.30. Si A es una $\Bbbk$-álgebra, la multiplicación $A \times A \to A$ determina un morfismo lineal $\mu_A : A \otimes A \to A$ tal que

$$\mu_a(x \otimes y) = xy. \tag{1.14}$$

Este morfismo μ_A es llamado *morfismo de estructura* del álgebra A.

Recíprocamente, si A es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\mu_A : A \otimes A \to A$ es un morfismo lineal, con la multiplicación en A inducida por

$$xy = \mu_A(x \otimes y), \tag{1.15}$$

A resulta una álgebra.

Observación 1.31. De lo observado en Definición 1.30 y comentarios posteriores podemos establecer que hay una correspondencia uno a uno entre los productos en A y los morfismos lineales $\mu_A : A \otimes A \to A$.

Ahora, sea B una $\Bbbk$-álgebra y μ_B su morfismo de estructura. Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo,

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \mu_A)(x \otimes y) &= \mu_B(\varphi x \otimes \varphi y)\\ &= (\mu_B \circ (\varphi \otimes \varphi))(x \otimes y)\end{aligned}$$

de donde

$$\varphi \circ \mu_A = \mu_B \circ (\varphi \otimes \varphi). \tag{1.16}$$

Recíprocamente, cualquier morfismo lineal que satisface (1.16) es un homomorfismo.

Si A y B son $\Bbbk$-álgebras con morfismos de estructura μ_A y μ_B, respectivamente, y consideramos el operador *"flip"*

$$\tau : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$$

definido por

$$\tau(x_1 \otimes y_1 \otimes x_2 \otimes y_2) = x_1 \otimes x_2 \otimes y_1 \otimes y_2. \tag{1.17}$$

tenemos la siguiente definición.

Definición 1.32. El morfismo lineal

$$\mu_{A\otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B$$

definido por

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_a \otimes \mu_B) \circ \tau$$

determina una estructura de álgebra en $A \otimes B$.

$A \otimes B$ es llamado el *producto tensorial canónico de álgebras* A y B.

Observación 1.33. La multiplicación en $A \otimes B$ satisface

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = x_1x_2 \otimes y_1y_2. \tag{1.18}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) &= \mu_{A\otimes B}((x_1 \otimes y_1) \otimes (x_2 \otimes y_2)) \\
&= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ \tau((x_1 \otimes y_1) \otimes (x_2 \otimes y_2)) \\
&= (\mu_A \otimes \mu_B)((x_1 \otimes x_1) \otimes (y_2 \otimes y_2)) \\
&= \mu_A(x_1 \otimes x_1) \otimes \mu_B(y_2 \otimes y_2) \\
&= x_1x_2 \otimes y_1y_2.
\end{aligned}$$

La Observación 1.33 muestra que el producto tensorial canónico de dos álgebras que son asociativas (conmutativas) es nuevamente una álgebra asociativa (conmutativa). Si A y B tienen unidades 1_A y 1_B, respectivamente, el elemento $1_A \otimes 1_B$ es la unidad en $A \otimes B$. Si B tiene unidad 1_B, podemos definir un morfismo lineal inyectivo $\varphi : A \to A \otimes B$ por

$$\varphi(x) = x \otimes 1_B, \quad x \in A.$$

Luego, por (1.18),

$$\varphi(xx') = xx' \otimes 1_B = (x \otimes 1_B)(x' \otimes 1_B) = \varphi(x)\varphi(x'),$$

es decir, φ preserva productos y, de este modo, es un monomorfismo.

Definición 1.34. Dados A_1,B_1,A_2 y B_2 $\Bbbk$-álgebras y $\varphi_1 : A_1 \to B_1$, $\varphi_1 : A_2 \to B_2$ homomorfismos. Entonces $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ es *homorfismo de álgebras* de $A_1 \otimes A_2$ en $B_1 \otimes B_2$.

Veamos que la definición anterior tiene sentido.

Dado que

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_2) \circ \tau = \tau \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2),$$

entonces

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes \mu_{A_1 \otimes A_2} &= [(\varphi_1 \otimes \mu_{A_1}) \otimes (\varphi_2 \otimes \mu_{A_2})] \circ \tau \\ &= [(\mu_{B_1} \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_1)) \otimes (\mu_{B_2} \circ (\varphi_2 \otimes \varphi_2))] \circ \tau \\ &= [(\mu_{B_1} \otimes \mu_{B_2}) \circ \tau] \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2) \\ &= \mu_{B_1 \otimes B_2} \circ [(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes (\varphi_1 \otimes \varphi_2)].\end{aligned}$$

Introduciremos brevemente un modo de presentar una álgebra y que será de gran utilidad en lo que sigue del trabajo.

1.3. Álgebras definidas por generadores y relaciones

En algunas ocasiones tenemos un conjunto de elementos $\{a_1, ..., a_n\}$ que generan un álgebra libre $\Bbbk\langle a_1, ..., a_n\rangle$ y algunos elementos $\{r_1, ...r_m\}$ que le pertenecen.

Definición 1.35. Decimos que A es una $\Bbbk$-álgebra generada por elementos $x_1, ..., x_n$ junto a las relaciones $r_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., r_m(x_1, ..., x_n) = 0$ si A está definida como

$$A = \Bbbk\langle a_1, ..., a_n\rangle / \langle r_1, ...r_m\rangle.$$

Ejemplos 1.36. Algunos ejemplos:

1. El álgebra definida por los elementos $\{x, y\}$ y la relación $r = yx - xy - 1 = 0$, presentada como
$$\Bbbk\langle x, y\rangle / \langle\{yx - xy - 1\}\rangle$$
es conocida como el álgebra de Weyl.
2. El álgebra de Taft, que detallaremos en el ejemplo 2.37, es un álgebra que también es presentada por generadores y relaciones.
3. El álgebra de polinomio en una variable con coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$,
$$A = \Bbbk\langle t\rangle / \langle t^2\rangle.$$
4. El álgebra de polinomios en dos variables sobre un cuerpo $\Bbbk$ y que conmutan es presentada como
$$A = \Bbbk\langle t, s\rangle / \langle ts - st\rangle.$$

Observación 1.37. Un espacio vectorial M es un módulo sobre el álgebra A si puedo determinar una acción (con propiedad asociativa) de los generadores $x_1, ..., x_n$ que cumplen las relaciones $r_1, ..., r_m$:

$$\begin{aligned}&A_1, ..., A_n \in \mathrm{End}(M); \\ &r_j(A_1, ..., A_n) = 0 \qquad \text{para cada } j = 1, ..., m\end{aligned}$$

1.4. Representaciones de grupos finitos

En esta sección introducimos las representaciones de grupos (finitos) y desarrollamos algunos resultados más relevantes de esta teoría.

La teoría de representaciones nace a fines del siglo XIX con trabajos del matemático F. G. Frobenius. Este trabajo comenzó con una carta de R. Dedekind a Frobenius en la cual le hacía la siguiente observación: al tomar la tabla de multiplicación de un grupo finito G y convertirla en una matriz M_G reemplazando cada entrada g de la tabla por una variable m_g, el determinante de M_G es un producto de polinomios irreducibles en las variables $\{m_g\}$, donde cada uno tiene multiplicidad igual a su grado. Dedekind verificó este hecho para algunos casos especiales pero no pudo generalizar esto. Es allí cuando Frobenius, en pos de encontrar una solución al problema, creó la teoría de representaciones de grupos finitos. [**Cu**]

Definición 1.38. Dado un grupo G y un conjunto S, una acción de G sobre S es una función $\cdot : G \times S \to S$ tal que

$$(g, s) \mapsto g \cdot s$$

y se cumplen las condiciones

(i) $1 \cdot s = s$
(ii) $g \cdot (h \cdot s) = gh \cdot s$,

para todos $g, h \in G$, $s \in S$ y 1 la unidad de G.

Observación 1.39. A la acción de G en S podemos verla como una regla para operar (multiplicar) elementos de S por elementos de G de modo tal que el resultado sea otro elemento de S.

Definición 1.40. Una *representación* de A o un *A-módulo* es un $\Bbbk$-espacio vectorial V munido de una operación $\cdot : A \times V \to V$ tal que

$$\begin{aligned} (\lambda a) \cdot v &= a \cdot (\lambda v) \\ 1 \cdot v &= v \\ (a + b) \cdot v &= a \cdot v + b \cdot v \\ a \cdot (v + w) &= a \cdot v + a \cdot w \\ (ab) \cdot v &= a \cdot (b \cdot v) \end{aligned}$$

para todos $v, w \in V$, $a, b \in A$ y $\lambda \in \Bbbk$.

Ejemplo 1.41. Si V es un espacio vectorial entonces $\operatorname{End} V$ es un álgebra con el producto dado por la composición. Además resulta que V es una representación de $\operatorname{End}(V)$ donde la acción está dada por $T \cdot v \mapsto T(v)$, es decir, la evaluación.

Es equivalente hablar de representaciones y de módulos. Veamos esto en la siguiente proposición.

Proposición 1.42. *Si V es una representación de A entonces la aplicación $\rho : A \to \operatorname{End}(V)$ definida por*

$$\rho(a)(v) = a \cdot v \tag{1.19}$$

$a \in A$, $v \in V$, es un morfismo de álgebras. Recíprocamente, si $\rho : A \to \operatorname{End}(V)$ es un morfismo de álgebras entonces V es una representación de A con acción dada por (1.19).

Demostración. Hay que verificar que $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ y que $\rho(1) = \mathrm{Id}$, para todos $a, b \in A$ y 1 la unidad en A.

Sea $v \in V$. Como ρ es representación de A y por (1.19):

$$\begin{aligned} \rho(ab)(v) &= (ab) \cdot v \\ &= a \cdot (b \cdot v) \\ &= a \cdot (\rho(b)(v)) \\ &= \rho(a)(\rho(b)(v)) \\ &= \rho(a)\rho(b)(v). \end{aligned}$$

Luego, $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. Ahora,

$$\rho(1)(v) = 1 \cdot v = v = \mathrm{Id}(v)$$

Por lo tanto, $\rho(1) = \mathrm{Id}$ y ρ resulta un morfismo de álgebras.

Recíprocamente, si definimos la acción $\cdot : A \times V \to \mathrm{End}(V)$ por $a \cdot v = \rho(a)(v)$ para cada $a \in A$ y $v \in V$ entonces:

Para todos $a, b, 1 \in A$, $v, w \in V$ y $\lambda \in \Bbbk$

$$\begin{aligned} a \cdot (\lambda v) &= \lambda(a \cdot v) \\ &= \lambda(\rho(a)(v)) \\ &= \rho(\lambda a)(v) \\ &= (\lambda a) \cdot v, \end{aligned}$$

por lo que $a \cdot (\lambda v) = (\lambda a) \cdot v$.

Trivialmente observamos que $1 \cdot v = v$. En efecto,

$$1 \cdot v = \rho(1)(v) = \mathrm{Id}\, v = v.$$

Ahora, como ρ es morfismo de álgebras,

$$\begin{aligned} (\rho(a) + \rho(b))(v) &= \rho(a)(v) + \rho(b)(v) \\ &= a \cdot v + b \cdot v \end{aligned}$$

y

$$\rho(a + b)(v) = (a + b) \cdot v,$$

por lo que $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.

Dado que ρ es lineal,

$$\begin{aligned} a \cdot (v + w) &= \rho(a)(v + w) \\ &= \rho(a)(v) + \rho(a)(w) \\ &= a \cdot v + a \cdot w \end{aligned}$$

y $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$.

Finalmente, como $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$,

$$\rho(ab)(v) = (ab) \cdot v \quad \text{y} \quad (\rho(a)\rho(b))(v) = a \cdot (b \cdot v),$$

y así,

$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$$

Por lo tanto, V es una representación de A con la acción definida en (1.19). $\square$

Definición 1.43. Si V y W son dos A-módulos, un *morfismo de A-módulos* es una transformación lineal $f : V \to W$ tal que

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$$

para todos $a \in A$, $v \in V$.

Notación: Denotaremos por $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ al espacio de los morfismos de A-módulos entre V y W.

Definición 1.44. Un subespacio vectorial $W \subseteq V$ es un *submódulo de* V si la inclusión $\iota : W \hookrightarrow V$ es un morfismo de A-módulos.

Definición 1.45. Una representación V de A es *irreducible* si posee exactamente dos submódulos.

Definición 1.46. Dos representaciones V y W se dicen *representaciones isomorfas* si existe un morfismo de A-módulos $f : V \to W$que es biyectivo.

Definición 1.47. Una representación $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ se dice *representación fiel* si ρ es inyectiva.

Ejercicio 1.48. Si $T : V \to W$ es un morfismo de A-módulos entonces el núcleo $\ker(T)$ y la imagen $\mathrm{Im}\,(T)$ son submódulos de V y W, respectivamente. Veamos esto:

Sean $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,(T)$. Luego, $w_1 = T(v_1)$ y $w_2 = T(v_2)$, con $v_1, v_2 \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} a_1 w_1 + a_2 w_2 &= a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) \\ &= T(a_1 v_1 + a_2 v_2) \in \mathrm{Im}\,(T). \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Im}\,(T)$ es submódulo de W.

De modo similar, $\ker(T)$ resulta un submódulo de V.

El siguiente lema es de gran relevancia en esta teoría.

Lema 1.49. *(Schur) Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado y V, W A-módulos irreducibles de dimensión finita. Entonces si $T : V \to V$ es un morfismo de A-módulos existe $\lambda \in \Bbbk$ tal que $T = \lambda I$. Además, si $V \not\simeq W$ entonces* $\mathrm{Hom}_A(V, W) = 0$.

Demostración. Sea $T : V \to V$ un morfismo de A-módulos. Dado que $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado y V es de dimensión finita, existe v autovector no nulo en T cuyo autovalor es $\lambda \in \Bbbk$. En particular $\ker(T - \lambda I) \neq 0$. Como V es irreducible y $\ker(T - \lambda I)$ es submódulo de V entonces $\ker(T - \lambda I) = V$.

Ahora supongamos que $V \not\simeq W$ y que existe $T : V \to W$ un morfismo de A-módulos que es no nulo. Dado que $\ker(T)$ es submódulo de V y $T \neq 0$, $\ker(T) = V$. Entonces $T = 0$ y es una contradicción. Luego debe ser $\ker(T) = 0$ y T resulta inyectiva. Por otro lado, como $T \neq 0$ entonces $\mathrm{Im}\,(T) \neq 0$ y por ser $\mathrm{Im}\,(T)$ submódulo de W que es irreducible, $\mathrm{Im}\,(T) = W$. T también resulta sobreyectiva y, por lo tanto, biyectiva. Absurdo ya que $V \not\simeq W$. Luego, $T = 0$. $\square$

Podemos expresar al Lema 1.49 como

$$\mathrm{Hom}_A(V, W) = \delta_{V,W}\Bbbk$$

donde $\delta_{V,W} = 1$ si $V \simeq W$ y $\delta_{V,W} = 0$ si $V \not\simeq W$.

Si V, W son dos espacios vectoriales, una *proyección* de V en W es una transformación sobreyectiva $p : V \to W$ tal que $p^2 = p$. Tenemos el siguiente lema que establece relaciones entre las proyecciones y morfismos de A-módulos.

LEMA 1.50. *Sean V, W, U A-módulos. Son equivalentes:*
1. $V = W \oplus U$,
2. *Existe una proyección p de V en W que es morfismo de A-módulos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $V = W \oplus U$. Sea $p : V \to W$ definida por $p(w + u) = w$. Claramente es sobreyectiva y $p^2 = p$ ya que $p^2(w + u) = p(w) = p(w + 0) = w = p(w + u)$. Además, p es un morfismo de A-módulos ya que U es un A-módulo.

Ahora supongamos que existe una proyección p que es morfismo de V en W A-módulos. Sea $U = \ker(p)$. Como p es una proyección, $V = W \oplus U$. Y dado que es morfismo de A-módulos, U resulta un A-módulo. □

DEFINICIÓN 1.51. Un álgebra se dice *semisimple* si para todo $W \subseteq V$ submódulo, existe otro A-módulo U tal que $V = W \oplus U$. Podemos decir que todo submódulo posee un complemento directo.

OBSERVACIÓN 1.52. A es semisimple si para todo submódulo $W \subseteq V$ existe una proyección $V \to W$ que además es un morfismo de A-módulos.

EJEMPLO 1.53. Si un álgebra A como A-módulo vía la representación regular (dada por la acción regular) es suma de submódulos simples entonces A es un álgebra semisimple.

Para ver esto, usamos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 1.54. *Sea V un A-módulo. Son equivalentes*

(i) $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, *donde $V_i \subseteq V$ son submódulos simples.*
(ii) $V = \sum_{j \in J} V_j$, *donde $V_j \subseteq V$ son submódulos simples.*
(iii) *Todo submódulo $W \subseteq V$ admite un complementeo directo, es decir, existe $U \subseteq V$ tal que $V = W \oplus U$.*

DEMOSTRACIÓN. La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ es trivial.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$

  Sean $V = \sum_{j \in J} V_j$ y $W \subseteq V$. Veamos que W tiene un complemento directo en V.

  Consideremos los conjuntos de índices $K \subset J$ tales que W y los submódulos V_k, $k \in K$, están en suma directa. Sea $M = \{K | K \subseteq J, W \oplus \bigoplus_{k \in K} V_k\}$ el conjunto parcialmente ordenado por la inclusión. M es no vacío dado que $K = \emptyset$ cumple con la propiedad. También se cumple que toda cadena creciente de conjuntos de índices $H_1 \subseteq H_2 \subseteq$ ... tiene a $\tilde{K} = \cup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ como cota superior, que además está en M. Para verificar que esto último es cierto, W y todos los V_k, $k \in \tilde{K}$, deben estar en suma directa. Consideremos la escritura del 0 con elementos $w + \sum_{k \in \tilde{K}} v_k = 0$, para ciertos $w \in W, v_k \in V_k$ finitos no nulos. Como es una suma de cantidad finita, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que la suma anterior puede ser escrita con índices $k \in K_{i_0}$, es decir, $w + \sum_{k \in K_{i_0}} v_k = 0$. Como $K_{i_0} \in M$, $W \oplus \bigoplus_{k \in K_{i_0}} V_k$ es efectivamente una suma directa, y solo puede darse en el caso $w = 0$ y $v_k = 0$ para todos $k \in \tilde{K}$.

Aplicando el Lema de Zorn sobre M podemos concluir que existe un conjunto de índices K maximal tal que $W \oplus \bigoplus_{k\in K} V_k$ es suma directa. Veamos que $U = \bigoplus_{k\in K} V_k$ es el complemento directo buscado. Como $W \oplus U = V$, solo falta ver que $W + U = V$.

Supongamos que $W + U \neq V$. Entonces existe $j_0 \in J$ tal que el submódulo simple V_{j_0} no está contenido en $W + U$, pues si todos los V_j estuvieran en $W + U$, todo V lo estaría ya que es suma de los V_j.

El elemento j_0 no está en K por que sino $V_{j_0} \subseteq U = \bigoplus_{k\in K} V_k$. Por lo tanto, $K \subsetneq K \cup \{j_0\}$. Si $K' = K \cup \{j_0\}$ está en M, eso contradice el hecho de que K es maximal en M. Para esto, debe suceder que $W \oplus (\bigoplus_{k\in K} V_k) \oplus V_{j_0}$ sea una suma directa. Basta con que $(W + U) \cap V_{j_0} = 0$. Como V_{j_0} es simple, $(W + U) \cap V_{j_0}$ solo puede ser V_{j_0} o 0. Si la intersección es V_{j_0}, resulta $V_{j_0} \subseteq W + U$ que es absurdo porque V_{j_0} no está contenido en $W + U$.

Podemos ver que si $W = 0$, la misma construcción establece el complemento directo $U = \bigoplus_{k\in K} V_K$ tal que $V = U$. Esto nos dice que si V es suma de submódulos simples V_j entonces también podemos escribirlo como suma de submódulos simples V_k. Así, $(ii) \Rightarrow (i)$.

- $(iii) \Rightarrow (ii)$

  Sea $\tilde{V}$ la suma de todos los submódulos simples V_i de V. Veamos que $\tilde{V} = V$.

  Supongamos que $\tilde{V} \neq V$. Entonces $\tilde{V}$ tiene un complemento directo no vacío $U \subseteq V$, es decir que $\tilde{V} + U = V$, con $U \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $u \in U$ tal que el submódulo $\langle u\rangle$ no está contenido en $\tilde{V} = V$ y no es simple.

  Por el Lema de Zorn, $\langle u\rangle$ tiene un submódulo propio maximal $W \subsetneq \langle u\rangle$. Como W es maximal, $\langle u\rangle/W$ es simple.

  Entonces, por hipótesis, W tiene un complemento W' tal que $W \oplus W' = V$. Por lo tanto, $(W \oplus W') \cap \langle u\rangle = W \oplus (W' \cap \langle u\rangle) = \langle u\rangle$. Así, $W' \cap \langle u\rangle \simeq \langle u\rangle/W$. De este modo, $W' \cap \langle u\rangle$ es submódulo simple de $U \subseteq V$. Esto es absurdo ya que todos los submódulos simples de V están contenidos en $\tilde{V}$ y $\tilde{V} \cap U = \emptyset$ pues están en suma directa.

□

Entonces, considerando $V = A$, el A-módulo A del ejemplo escrito como suma de submódulos simples resulta semisimple.

1.4.1. Representaciones lineales de grupos finitos.

DEFINICIÓN 1.55. Dado un grupo G, el *álgebra de grupo* de G es el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene por base a $\{e_g : g \in G\}$ y por producto al definido en los elementos de la base por

$$e_g e_h = e_{gh}, \qquad \text{para todos } g, h \in G.$$

La unidad es e_1 y al álgebra lo denotamos por $\Bbbk G$.

Observación 1.56. Cada elemento de $\Bbbk G$ es una combinación lineal finita de la forma $\sum_{g\in G} \lambda_g e_g$ con $\lambda_g \in \Bbbk$.

Definición 1.57. Una *representación de* G o un G-módulo es un $\Bbbk G$-módulo V. En particular, una representación de G es un morfismo de álgebras $\rho: \ G \to \mathrm{End}(V)$.

Tener una representación de G es equivalente a tener un morfismo de grupos $\hat{\rho}: G \to GL(V)$. A veces, cuando el espacio vectorial V esté implícito, diremos que ρ es la representación de G. Denotaremos la acción de G en V por $g \cdot v$ o por $e_g \cdot v$ para todos $g \in G$, $v \in V$.

Si V y W son dos representaciones de G y $T: V \to W$ es una transformación lineal, diremos que T es un morfismo de G-módulos si es un morfismo de $\Bbbk G$-módulos, es decir si para todo $g \in G$, $v \in V$ se tiene que

$$T(g \cdot v) = g \cdot T(v).$$

Podemos expresar lo anterior del siguiente modo: si $\rho_V : G \to GL(V)$, $\rho_W : G \to GL(W)$ son representaciones entonces T es un morfismo de G-módulos si, y sólo si,

$$T \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ T, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Definición 1.58. Si V es una representación de G, el *grado* de V es la dimensión del espacio vectorial sobre $\Bbbk$, $\dim_{\Bbbk} V$.

Ejemplos 1.59.

(i) **Representación trivial**

Si V es un espacio vectorial de dimensión 1 entonces $GL(V) = \Bbbk^{\times}$. Luego, una representación de dimensión 1 proviene de un morfismo de grupos $\rho: G \to \Bbbk^{\times}$.

Dado un grupo G, el morfismo $\epsilon: G \to \Bbbk^{\times}$ de dimensión 1 es llamado la *representación trivial* y está determinado por $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Observación 1.60. Toda representación de grado 1 es irreducible.

(ii) **Representación regular**

En este caso $V = \Bbbk G$ y la representación está dada por

$$\rho_r : G \to GL(V), \quad \rho_r(g)(e_h) = e_{gh}$$

para todos $g, h \in G$.

Observación 1.61. Notar que la representación regular es irreducible si, y sólo si, el orden de G es 1. De hecho, si $v = \sum_{h\in G} e_h$ entonces $\rho_r(g)(v) = v$ para todo $g \in G$. En particular, el subespacio de V de dimensión 1 generado por v es invariante por la acción regular.

(iii) **La representación contragradiente**

Si V es una representación de G entonces $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, su espacio vectorial dual, tiene una acción dada por

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v), \quad \text{para todos } g \in G, f \in V^*, v \in V.$$

Observación 1.62. Si V es una representación irreducible de G entonces también lo es V^* con la representación contragradiente.

Proposición 1.63. *Si V,W son dos representaciones de G entonces la suma directa $V \oplus W$ y el producto tensorial $V \otimes W$ también son representaciones de G vía las acciones*

$$g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w), \quad g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w,$$

respectivamente, para todos $g \in G, v \in V, w \in W$.

El siguiente resultado, introducido por Maschke en 1888, analiza la semisimplicidad del álgebra de grupo. Como consecuencia podremos ver que cualquier $\Bbbk G$-módulo es suma directa de $\Bbbk G$-módulos irreducibles, donde $\Bbbk = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Con esto podemos reducir el estudio de representaciones al de $\Bbbk G$-módulos irreducibles. En el siguiente capítulo presentaremos una versión del teorema generalizado para álgebras de Hopf.

Teorema 1.64. *Sea G grupo finito. El álgebra de grupo $\Bbbk G$ es semisimple si, y solo si, $|G| \in \Bbbk^{\times}$.*

Demostración. Supongamos que $|G|$ es no nulo. Sea V una representación de G y $W \subset V$ un submódulo de V. Tomemos $U \subseteq V$ un espacio vectorial arbitrario tal que $V = W \oplus U$, y sea $\pi : V \to W$ la proyección que envía $w + u$ en w para todos $w \in W$, $u \in U$.

Sea $\hat{\pi} : V \to W$ un morfismo de módulos definido por

$$\hat{\pi}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v), \quad v \in V$$

Afirmaciones:

1. $\hat{\pi}(w) = w$ para todo $w \in W$,
2. $\hat{\pi} \circ \hat{\pi} = \hat{\pi}$,
3. $\hat{\pi}(h \cdot v) = h \cdot \hat{\pi}(v)$ para todos $v \in V$, $h \in G$.

Sea $w \in W$; entonces para todo $g \in G$, $g^{-1} \cdot w \in W$ ya que W es submódulo de V y $\pi(g^{-1} \cdot w) = g^{-1} \cdot w$. Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}(w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot w) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (g^{-1} \cdot v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w \\
&= \frac{|G|}{|G|} w \\
&= w.
\end{aligned}$$

De este modo, vale 1. y, de 1. se sigue 2. ya que para cada $v \in V$, $\hat{\pi}(v) \in W$. Probemos 3.: Sean $v \in V$, $h \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(h \cdot v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot (h \cdot v))\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg \cdot \pi((hg)^{-1} \cdot (h \cdot v))\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg \cdot \pi(g^{-1} \cdot v)\\ &= h \cdot \hat{\pi}(v).\end{aligned}$$

Luego, por Lema 1.50, $\Bbbk G$ es semisimple.

Ahora supongamos que $\Bbbk G$ es semisimple. Consideremos el morfismo $\epsilon : \Bbbk G \to \Bbbk$ que envía e_g a 1 para cada $g \in G$. Con la acción regular de G en $\Bbbk G$ y la acción trivial de G en $\Bbbk$, ϵ es un morfismo de $\Bbbk G$-módulos.

En particular, sabemos que $\ker(\epsilon) \subseteq \Bbbk G$ es un submódulo. Como $\Bbbk G$ es semisimple existe un submódulo $U \subseteq \Bbbk G$ necesariamente de dimensión 1 tal que $\Bbbk G = \ker(\Bbbk G) \oplus U$. Sea $\Lambda \in U$ un elemento no nulo, es decir, $\Lambda \notin \ker(\Bbbk G)$. Podemos suponer entonces que $\epsilon(\Lambda) = 1$.

Como U es submódulo entonces para cada $g \in G$ existe $\lambda_g \in \Bbbk$ tal que $e_g\Lambda = \lambda_g\Lambda$. Así,

$$1 = \epsilon(\Lambda) = \epsilon(e_g\Lambda) = \epsilon(\lambda_g\Lambda) = \lambda_g\epsilon(\Lambda) = \lambda_g.$$

Luego, $e_g\Lambda = \Lambda$ para todo $g \in G$. Sea $\Lambda = \sum_{h\in G} r_h e_h$, con $r_h \in \Bbbk$. Entonces

$$e_g\Lambda = \sum_{h\in G} r_h egh = \sum_{h\in G} r_h e_h = \Lambda.$$

Como $\{e_g\}_{g\in G}$ es base de $\Bbbk G$, $r_h = r_{gh}$ para todos $g, h \in G$. Luego los r_g son iguales y $\Lambda = r\sum_{h\in G} e_h$ donde $r = r_g$ para todo $g \in G$. Aplicando ϵ tenemos

$$1 = \epsilon(\Lambda) = r\sum_{h\in G} \epsilon(e_h) = r|G|,$$

y resulta $|G| \in \Bbbk^{\times}$. □

Corolario 1.65. *El álgebra de grupo $\Bbbk G$ es semisimple para cualquier grupo finito G y cualquier cuerpo $\Bbbk$ de característica cero.*

Proposición 1.66. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Si G es un grupo finito abeliano entonces toda representación irreducible es de grado 1.*

Demostración. Sea V una representación irreducible de G. Para cada $g \in G$, sea $L_g : V \to V$ la transformación lineal definida por $L_g(w) = g \cdot w$ para todo $w \in V$. Como G es abeliano, L_g respeta la acción de G:

$$\begin{aligned}L_g(h \cdot w) &= g \cdot (h \cdot w)\\ &= gh \cdot w\\ &= hg \cdot w\\ &= h \cdot L_g(w),\end{aligned}$$

para todo $h \in G$, $w \in V$. Luego, por el Lema 1.49 (de Schur) existe c tal que $L_g = c\,\mathrm{Id}$. Entonces si $v \in V$ es no nulo, $g \cdot v = c \cdot v$ para todo $g \in G$. Asi, vemos que el subespacio de dimensión 1 generado por v es un submódulo de V, que es irreducible. Luego, $V = \langle v \rangle$. □

Ejemplo 1.67. Sea $\mathbb{Z}_4 = \{1, g, g^2, g^3\}$ un grupo cíclico de cuatro elementos. Definamos la representación $\rho : \mathbb{Z}_4 \to GL_2(\mathbb{R})$ por

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $\rho(g)^4 = \mathrm{Id}$. Entonces, estamos definiendo una acción en $\mathbb{R}^2$ determinada por

$$g \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix},$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Esta representación es irreducible pues, de lo contrario, existiría $v \in \mathbb{R}^2$ no nulo que es estable bajo la acción de $\mathbb{Z}_4$, i.e., existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $g \cdot v = \lambda v$. Luego, si $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ entonces $b = \lambda a$ y $-a = \lambda b$. Y como $v \neq 0$, tiene que ser $\lambda^2 = -1$, y esto es absurdo.

De este modo, $\mathbb{Z}_4$ tiene un módulo irreducible de grado 2.

Observación 1.68. El ejemplo anterior no contradice la Proposición 1.66 pues $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado.

1.4.2. Producto tensorial de representaciones. Dadas las representaciones $\rho_V : G \to GL(V)$ y $\rho_W : G \to GL(W)$. Si $g \in G$, la representación $\rho_{V\otimes W}(g) \in GL(V \otimes W)$ se define por

$$\rho_{V\otimes W}(g)(v \otimes w) = \rho_V(g)(v) \otimes \rho_W(g)(w), \qquad v \in V, w \in W.$$

Las representaciones $\rho_{V\otimes W}$ definen una representación lineal de G en $V \otimes W$ llamada *producto tensorial de las representaciones* ρ_V y ρ_W dadas.

La denotamos por

$$\rho_{V\otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g).$$

En notación matricial, si $\{e_{i_1}\}$ es base de V, $a_{i_1 j_1}(g)$ la matriz de $\rho_V(g)$ en esta base, $\{e_{i_2}\}$ es base de W y $a_{i_2 j_2}(g)$ la matriz de $\rho_W(g)$ en esta base, entonces

$$\rho_V(g) = \sum_{i_1} a_{i_1 j_1}(g) e_{i_1} \quad \text{y} \quad \rho_W(g) = \sum_{i_2} a_{i_2 j_2}(g) e_{i_2}$$

implican que

$$\rho_{V\otimes W}(g)(e_{j_1} \otimes e_{j_2}) = \sum_{i_1 i_2} (a_{i_1 j_1}(g) \otimes a_{i_2 j_2}(g))(e_{i_1} \otimes e_{i_2}).$$

De este modo, la matriz de $\rho_{V\otimes W}(g)$ es el producto tensorial de las matrices $\rho_V(g)$ y $\rho_W(g)$.

En la siguiente sección realizamos un estudio sobre caracteres, una herramienta bastante útil para entender las representaciones de un grupo finito G.

1.5. Teoría de caracteres

Los caracteres de representaciones son una herramienta fundamental para el estudio de las representaciones. Tienen muchas propiedades y existen varios resultados que son de gran importancia y que brindan modos más sencillos de obtener información acerca de representaciones. Por ejemplo, concluiremos que dos representaciones que tengan el mismo caracter indica que son equivalentes, analizaremos cuándo un caracter establece que cierta representación es irreducible, entre otras cosas.

Trabajaremos considerando $\Bbbk = \mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 1.69. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de dimensión finita de G. El *caracter* asociado a ρ es la función $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)), \qquad \in G.$$

También denotaremos a χ_ρ como χ_V para referirnos al caracter asociado a la representación V.

LEMA 1.70. *Sea ρ una repesentación de grado n y χ su caracter asociado. Entonces:*

(*i*) $\chi(1) = n$,

(*ii*) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, *para todo* $g \in G$,

(*iii*) $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$, *para todo* $g, h \in G$,

Para la prueba, usaremos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.71. *Si $\rho : G \to \mathrm{Aut}\,(V)$ es una representación y $g \in G$, entonces V admite una base formada por vectores propios de $\rho(g)$, y los valores propios son raíces $|G|$-ésimas de la unidad.*

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es obvia ya que $\rho(1)$ es la matriz I_n cuya traza es igual a n.

(*ii*) Dada la representación $\rho : G \to \mathrm{Aut}\,(V)$, podemos elegir una base de V en la que $\rho(g)$ admite una matriz diagonal cuya diagonal está formada por raíces de la unidad que son elementos de $\mathbb{C}$ de módulo 1. Entonces

$$\chi(g^{-1}) = \sum_i \lambda_{ii}^{-1} = \sum_i \overline{\lambda_{ii}} = \overline{\chi(g)}.$$

(*iii*) Como $\rho(ghg^{-1}) = \rho(gh)\rho(g^{-1})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\chi(ghg^{-1}) &= \mathrm{tr}(\rho(ghg^{-1})) \\
&= \mathrm{tr}(\rho((gh)g^{-1})) \\
&= \mathrm{tr}(\rho(gh)\rho(g^{-1})) \\
&= \mathrm{tr}(\rho(g^{-1})\rho(gh)) \\
&= \mathrm{tr}(\rho(g^{-1}gh)) \\
&= \mathrm{tr}(\rho(h)) = \chi(h).
\end{aligned}$$

□

LEMA 1.72. *Sean V y W dos representaciones de G de dimensión finita.*

(i) *Si* $V \simeq W$ *entonces* $\chi_V = \chi_W$,
(ii) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$,
(iii) $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$,
(iv) $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$.

Demostración.

- (i) Sea $\varphi : V \to W$ un isomorfismo de G-módulos. Entonces

$$\varphi \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ \varphi, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Luego, $\rho_V(g) = \varphi^{-1} \circ \rho_W(g) \circ \varphi$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \chi_V(g) &= \operatorname{tr}(\rho_V(g)) \\ &= \operatorname{tr}(\varphi^{-1} \circ \rho_W(g) \circ \varphi) \\ &= \operatorname{tr}(\rho_W(g)) \\ &= \chi_W(g), \end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

- (ii) Dada $\{e_i\}$ una base de V y $\{f_i\}$ base del espacio dual V^*, es decir, $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Podemos asumir que la matriz de $\rho_V(g)$ en la base $\{e_i\}$ es $(A_{ij})(g)$ donde $g \cdot e_i = \sum_k A_{ki}(g)e_k$. Entonces

$$\begin{aligned} g \cdot f_i &= \sum_k (g \cdot f_i)(e_k) f_k \\ &= \sum_k f_i(g^{-1} \cdot e_k) f_k \\ &= \sum_k \sum_l A_{lk}(g^{-1}) f_i(e_l) f_k \\ &= \sum_k A_{ik}(g^{-1}) f_k. \end{aligned}$$

De este modo, observamos que la matriz de la representación contragradiente $\rho_{V^*}(g)$ en la base $\{f_i\}$ es la transpuesta de la matriz $(A_{ij})(g^{-1})$: $[\rho_{V^*}(g)] = [\rho_V(g^{-1})]^t$. Así,

$$\begin{aligned} \chi_{V^*}(g) &= \operatorname{tr}([\rho_{V^*}(g)]) \\ &= \operatorname{tr}([\rho_V(g^{-1})]^t) \\ &= \operatorname{tr}([\rho_V(g^{-1})]) \\ &= \chi_V(g^{-1}) \\ &= \overline{\chi_V(g)}. \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a (ii) del lema anterior.

- (iii) Sean $\rho_V(g)$ y $\rho_W(g)$ las matrices de las representaciones ρ_V y ρ_W, respectivamente, para $g \in G$.

La forma matricial de la representación $\rho_{V\oplus W}$ de la suma directa $V \oplus W$ es

$$\rho_{V\oplus W}(g) = \begin{pmatrix} \rho_V(g) & 0 \\ 0 & \rho_W(g) \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\chi_{V\oplus W}(g) &= \operatorname{tr}(\rho_{V\oplus W}(g)) \\ &= \operatorname{tr}(\rho_V(g)) + \operatorname{tr}(\rho_W(g)) \\ &= \chi_V(g) + \chi_W(g).\end{aligned}$$

- *(iv)* Dado que $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$ y de 1.4.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\chi_{V\otimes W}(g) &= \operatorname{tr}(\rho_{V\otimes W})(g) \\ &= \operatorname{tr}(\rho_V(g) \otimes \rho_W(g)) \\ &= \operatorname{tr}(\rho_V(g)) \operatorname{tr}\rho_W(g) \\ &= \chi_V(g)\chi_W(g).\end{aligned}$$

□

Una consecuencia del Lema de Schur (Lema 1.49), y que será de gran utilidad para mostrar algunas propiedades importantes sobre caracteres de representaciones irreducibles, es el siguiente resultado:

COROLARIO 1.73. *Sean $\rho_V : G \to GL(V)$ y $\rho_W : G \to GL(W)$ dos representaciones irreducibles de G, y sea $\phi : V \to W$ una transformación lineal. Definimos $\hat{\phi} : V \to W$ por*

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\cdot \phi(g\cdot v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_W(g^{-1})\circ\phi\circ\rho_V(v).\end{aligned}$$

Si $V \not\simeq W$ entonces $\hat{\phi} = 0$. Si $V \simeq W$, $\hat{\phi} = \frac{\operatorname{tr}(\phi)}{\dim V}\operatorname{Id}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que $\hat{\phi}$ es un morfismo de G-módulos. Sean $v \in V$, $h \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(h\cdot v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\cdot\phi(gh\cdot v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (gh^{-1})^{-1}\cdot\phi(g\cdot v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg^{-1}\cdot\phi(g\cdot v) \\ &= h\cdot\hat{\phi(v)}.\end{aligned}$$

Si suponemos $V \not\simeq W$, $\hat{\phi} = 0$ por Lema de Schur dado que V y W son irreducibles. Si $V \simeq W$, por Lema de Schur, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $\hat{\phi} = c\operatorname{Id}$.

A esta última igualdad le calculamos la traza:

$$\begin{aligned} c\dim V &= \operatorname{tr}(\hat{\phi}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(\rho_W(g^{-1})\circ\phi\circ\rho_V(g)) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(\phi) \\ &= \operatorname{tr}(\phi). \end{aligned}$$

Entonces, el valor de c es $\frac{\operatorname{tr}(\phi)}{\dim V}$. □

Si asumimos que para cada $g \in G$ podemos escribir a dos representaciones $\rho_V(g) = (A_{ij}(g))$, $\rho_W(g) = (B_{ij}(g))$, y $\phi = (C_{ij})$, $\hat{\phi} = (D_{ij})$, entonces al escribir $\hat{\phi}$ en forma matricial obtenemos

$$D = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} B(g^{-1})CA(g).$$

Luego, para cada i, j

$$D_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k,l} B_{ik}(g^{-1})C_{kl}A_{lj}(g). \tag{1.20}$$

Cuando $V \not\simeq W$, $\hat{\phi} = 0$. Por lo tanto

$$0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k,l} B_{ik}(g^{-1})C_{kl}A_{lj}(g).$$

La matriz C es arbitraria, por lo que para cada k, l fijado podemos elegir C como $C_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Entonces

$$0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} B_{ik}(g^{-1})A_{lj}(g) \tag{1.21}$$

para todos i, j, k, l. Cuando $V \simeq W$, es decir $A = B$, por Corolario 1.73, sabemos que $D = \frac{\operatorname{tr}(C)}{\dim V}\operatorname{Id}$ y así

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum_k C_{kk} \\ &= \frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum_{k,l}\delta_{kl}C_{kl}. \end{aligned}$$

En este caso, (1.21) queda

$$\frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum_{k,l}\delta_{kl}C_{kl} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k,l} A_{ik}(g^{-1})C_{kl}A_{lj}(g).$$

Con el mismo argumento anterior de que C es arbitraria,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} A_{ik}(g^{-1})A_{lj}(g) = \frac{1}{\dim V}\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{1.22}$$

1.5.1. Relaciones de ortogonalidad para caracteres. Para cada par de funciones de G en $\mathbb{C}$ χ, χ' denotamos

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi'(g)}. \tag{1.23}$$

OBSERVACIÓN 1.74. $\langle , \rangle$ es un producto interno.

TEOREMA 1.75. *Sean χ_V y χ_W caracteres correspondientes a dos representaciones V y W de G irreducibles y no isomorfas. Entonces*

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 0 \quad y \quad \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\rho_V : G \to GL(V)$ y $\rho_W : G \to GL(W)$ las representaciones y sean $\rho_V(g) = (A_{ij}(g))$, $\rho_W(g) = (B_{ij}(g))$. Entonces $\chi_V(g) = \sum_i A_{ii}(g)$ y $\chi_W(g) = \sum_i B_{ii}(g)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle \chi_V, \chi_V \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_V(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_V(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} A_{ii}(g) A_{jj}(g^{-1}) \\
&= \sum_{i,j} \frac{1}{\dim V} \delta_{ij} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donde la última igualdad la obtenemos de (1.22).

De modo similar, usando (1.21) podemos concluir que $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g) \overline{\chi_V(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g) \chi_V(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} B_{ii}(g) A_{jj}(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} A_{jj}(g^{-1}) B_{ii}(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} A_{jj}(g^{-1}) B_{ii}(g) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

En lo que sigue, vamos a denotar por $\{V_1, ..., V_s\}$ al conjunto completo de representantes de clases de isomorfismos de representaciones irreducibles. Para cada $i = 1, ..., s$ denotamos $\chi_i = \chi_{V_i}$ y $m_i = \dim V_i$.

Una consecuencia de la ortogonalidad de caracteres es que, como veremos, el caracter de una representación la determina completamente.

COROLARIO 1.76. *Sea W una representación con una descomposición en irreducibles*

$$W = \bigoplus_i V_i^{a_i}.$$

Si χ_W es el caracter de W entonces se tiene que $a_i = \langle \chi_W, \chi_i \rangle$ para todo $i = 1, ..., s$.

DEMOSTRACIÓN. Como $W = \bigoplus_i V_i^{a_i}$, tenemos que $\chi_W = \sum_j a_j \chi_j$. Luego

$$\langle \chi_W, \chi_i \rangle = \sum_j a_j \langle \chi_j, \chi_i \rangle = a_i.$$

□

COROLARIO 1.77. *Si V y W son dos representaciones de G de dimensión finita tales que $\chi_V = \chi_W$ entonces $V \simeq W$.*

DEMOSTRACIÓN. Descomponiendo a V y W en sumas de irreducibles $V = \bigoplus_i V_i^{a_i}$ y $W = \bigoplus_i V_i^{b_i}$, y usando el Corolario 1.76,

$$a_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle = \langle \chi_W, \chi_i \rangle = b_i$$

Luego, $V \simeq W$. □

COROLARIO 1.78. *Si V y W son dos representaciones de G de dimensión finita entonces*

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. Descomponiendo V y W en sumas de irreducibles $V = \bigoplus_i V_i^{a_i}$ y $W = \bigoplus_j V_j^{b_j}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_G(V, W) &\simeq \operatorname{Hom}_G\left(\bigoplus_i V_i^{a_i}, \bigoplus_j V_j^{b_j}\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i,j} \operatorname{Hom}_G(V_i, V_j)^{a_i b_j} \\ &\simeq \bigoplus_{i,j} \delta_{ij} a_i b_j \Bbbk \\ &\simeq \bigoplus_i a_i b_i \Bbbk. \end{aligned}$$

donde el último isomorfismo es debido al Lema 1.49. Así, $\dim(\operatorname{Hom}_G(V, W)) = \sum_i a_i b_i = \langle \chi_V, \chi_W \rangle$. □

Hay otra consecuencia de la ortogonalidad de caracteres y que caracteriza a las representaciones irreducibles en términos de sus caracteres asociados y es el siguiente corolario:

COROLARIO 1.79. *V es una representación irreducible de G si, y solo si, $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.*

Demostración. Si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ y $V = \bigoplus_i V_i^{a_i}$ es la descomposición de V en irreducibles entonces

$$1 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{ij} = \sum_i a_i^2.$$

Dado que a_i son enteros, solo puede ser $a_i = 0$ para todo i con la excepción de algún j en que $a_j = 1$. Luego, $V = V_j$ y V es irreducible. $\square$

Observación 1.80. Si V es una representación irreducible entonces V^* también lo es con la representación contragradiente. De hecho, si χ_{V^*} es el caracter de V^*:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{V^*}, \chi_{V^*} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V^*}(g) \overline{\chi_{V^*}(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V^*}(g)} \chi_{V^*}(g) \\
&= \langle \chi_V, \chi_V \rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Consideremos la representación regular $R_G : G \to GL(\mathbb{C}G)$ tal que para todo $g, h \in G$

$$R_G(g)(e_h) = e_{gh}.$$

Llamemos r_G su caracter. Si $g \neq 1$ entonces $gh \neq h$ para todo $h \in G$, por lo que los términos de la diagonal de $R_G(g)$ son nulos. En particular, $\mathrm{tr}(r_G(g)) = 0$. Y al considerar $g = 1$, $\mathrm{tr}(r_G(g)) = \mathrm{tr}(1) = \dim(R_G) = |G|$.

De este modo,

$$r_G(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1, \\ |G| & \text{si } g = 1. \end{cases} \tag{1.24}$$

De (1.24), podemos obtener el siguiente resultado.

Lema 1.81. $\mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^s V_i^{m_i}$.

Demostración. Para cada $i = 1, ..., s$,

$$\langle r_G, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_G(g) \overline{\chi_i(g)} = \chi_i(1) = m_i.$$

donde la segunda igualdad proviene del cálculo anterior en (1.24) y la conclusión del Corolario 1.76. $\square$

De la descomposición en irreducibles de $\mathbb{C}G$ tenemos

$$r_G = \sum_{i=1}^s m_i \chi_i.$$

Luego, en (1.24),

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} m_i^2, \quad \text{si } g = 1; \tag{1.25}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{s} m_i \chi_i(g), \quad \text{si } g \neq 1. \tag{1.26}$$

La igualdad (1.25) nos será bastante útil cuando busquemos todas las representaciones irreducibles de un grupo G. Esto implica que si encontramos una familia de representaciones cuyos cuadrados de sus dimensiones sumen $|G|$ entonces deben ser todas.

Ahora introduciremos unas funciones especiales que nos permitirán mostrar que la cantidad de representaciones irreducibles de G es igual a la cantidad de clases de conjugación de G.

Definición 1.82. Una función $f : G \to \mathbb{C}$ se dice *función de clase* si para todo $g, h \in G$ se cumple que $f(hgh^{-1}) = f(g)$.

Podemos decir que si $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{l}$ es el conjunto de clases de conjugación de G entonces una función de clase queda determinada por l valores $f(\mathcal{C}_i)$, para $i = 1, ..., l$.

Observación 1.83. Debido al Lema 1.70 (iii), todo caracter de una representación es una función de clases. Además, cualquier combinación lineal de caracteres es una función de clases.

Definamos $\mathcal{H} = \{f : G \to \mathbb{C} | f \text{ es una función de clase}\}$. Este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y tiene un producto interno definido por (1.23).

Como cada función de clase queda determinada por l valores, $\dim(\mathcal{H}) = l$. Y dado que $\{\chi_i\}_{i=1}^{s} \subseteq \mathcal{H}$ es un conjunto ortonormal, $s \leq l$. Veremos que los caracteres de las representaciones irreducibles de G forman una base de $\mathcal{H}$, con lo que concluiremos que $s = l$ y la cantidad de representaciones irreducibles de un grupo es igual a la cantidad de clases de conjugación.

Lema 1.84. *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación irreducible con caracter χ y sea $f \in \mathcal{H}$. Definamos $\rho_f : V \to V$ la función*

$$\rho_f(v) = \sum_{g \in G} f(g) g \cdot v,$$

para todo $v \in V$. Entonces $\rho_f = \frac{|G|}{\dim(V)} \langle f, \overline{\chi} \rangle \operatorname{Id}$.

Demostración. Mostremos que ρ_f respeta la acción de G. Sea $h \in G$, $v \in V$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_f(h \cdot v) &= \sum_{g \in G} f(g) gh \cdot v \\ &= \sum_{g \in G} f(hgh^{-1}) hgh^{-1}h \cdot v \\ &= \sum_{g \in G} f(g) hg \cdot v \\ &= h \cdot \rho_f(v).\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad cambiamos el índice g de la sumatoria por hgh^{-1}, la tercera igualdad es debido a que $f \in \mathcal{H}$. Y dado que V es irreducible, el Lema 1.49 (Schur) establece que $\rho_f = c\,\mathrm{Id}$ para algún $c \in \mathbb{C}$. El valor de c viene dado por el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}c \dim(V) &= \mathrm{tr}(\rho_f) \\ &= \sum_{g \in G} f(g)\,\mathrm{tr}(\rho(g)) \\ &= \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) \\ &= |G| \langle f, \overline{\chi} \rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.85. *$\{\chi_i\}_{i=1}^{s}$ es una base de $\mathcal{H}$.*

Demostración. Si asumimos que $\langle \{\chi_i\}_{i=1}^{s} \rangle \neq \mathcal{H}$, existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $f \neq 0$ y $\langle f, \chi_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, ..., s$.

Entonces la transformación asociada a ρ_f es la nula debido al Lema 1.84 para cualquier representación irreducible V. Pero como toda representación es suma de irreducibles, $\rho_f = 0$ para cualquier V; en particular, $V = \mathbb{C}G$ con la representación regular. Esto dice que

$$0 = \rho_f(e_1) = \sum_{g \in G} f(g) R_G(g)(e_1) = \sum_{g \in G} f(g) e_g.$$

Como $\{e_g\}_{g \in G}$ es base de $\mathbb{C}G$ entonces $f(g) = 0$ para todo $g \in G$. Así, $f = 0$. Esto es una contradiccón, por lo que sí es una base. $\square$

Como una inmediata aplicación de esta teoría, tenemos el siguiente resultado de estructura de grupo.

Proposición 1.86. *Sea G un grupo finito tal que $m_i = 1$ para todo $i = 1, ..., s$. Entonces G resulta abeliano.*

Demostración. Por (1.25), $|G| = \sum_{i=1}^{s} m_i^2 = \sum_{i=1}^{s} 1 = s$. Como s es la cantidad de clases de conjugación de G debe cumplirse para cada $g \in G$ $\mathcal{C}_g = \{g\}$. Luego, G es abeliano. $\square$

1.6. Inducción y restricción de representaciones

Sea $H \subseteq G$ un grupo. Si V es una representación de G vía $\rho : G \to GL(V)$ entonces V es una representación de H vía la restricción de ρ, es decir, definimos

$$\rho|_H : H \to GL(V).$$

Denotaremos a esta representación, llamada la restricción de G a H , por $\operatorname{Res}_H^G V$.

Recíprocamente, sea W una representación de H y consideremos el espacio $\Bbbk G \otimes W$. Este espacio posee una acción natural de G:

$$g \cdot (f \otimes w) = gf \otimes w,$$

para todos $g, f \in G$ y $w \in W$. El subespacio S de $\Bbbk G \otimes W$ generado por los elementos $\{gh \otimes w - g \otimes h \cdot w | g \in G, h \in H, w \in W\}$ es invariante bajo la acción de G. Obtenemos

$$\operatorname{Ind}_H^G W = (\Bbbk G \otimes W)/S.$$

Esta es la llamada *representación inducida* de H a G.

Ejemplo 1.87. Sea $G = \mathbb{Z}_n \ltimes \mathbb{Z}_2 = \langle t, s | sts^{-1} = t^{-1}, s^2 = 1, t^n = 1\rangle$ y $H = \mathbb{Z}_n = \langle t | t^n = 1\rangle$. Una representación $W = \mathbb{C}$ de $\mathbb{Z}_n$ resulta de elegir una raíz $g \in \mathbb{C}$ n-ésima de la unidad:

$$t \cdot 1 = g.$$

Induzcamos W a G.

Aplicando la definición:

$$\begin{aligned}
\Bbbk G \otimes_H W &= \Bbbk\langle t, s | t^n = 1, s^2 = 1, sts^{-1} = t^{-1}\rangle \otimes_{\langle t^n=1\rangle} \mathbb{C} \\
&= \Bbbk\langle s | s^2 = 1\rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \\
&= \Bbbk\{1 \otimes 1, s \otimes 1\},
\end{aligned}$$

que tiene dimensión 2.

Veamos cómo actúan s y t, entendiendo que debemos averiguar el modo en que estos elementos actúan (a izquierda) en $\Bbbk G$:

$$\begin{aligned}
&s \cdot (1 \otimes 1) = s \cdot 1 \otimes 1 = s \otimes 1; \\
&s \cdot (s \otimes 1) = s \cdot s \otimes 1 = 1 \otimes 1; \\
&t \cdot (1 \otimes 1) = t \cdot 1 \otimes 1 = t \otimes 1 = 1 \otimes t \cdot 1 \\
&t \cdot (s \otimes 1) = t \cdot s \otimes 1 = s \cdot t^{-1} \otimes 1 = s \otimes t^{-1} \cdot 1 = g^{-1} \cdot s \otimes 1.
\end{aligned}$$

De este modo, observamos que $\operatorname{Ind}_H^G W$ es el G-módulo $\Bbbk\{v, w\}$ donde

$$\begin{aligned}
s \cdot v &= w, \qquad & s \cdot w &= v, \\
t \cdot v &= gv, \qquad & t \cdot w &= g^{-1}w.
\end{aligned}$$

Existe una relación entre las representaciones $\operatorname{Ind}_H^G W$ y $\operatorname{Res}_H^G V$. Enunciamos el siguiente resultado que expresa tal relación.

Proposición 1.88. *(Reciprocidad de Frobenius) Si V es una representación de G y W una representación de H entonces existen isomorfismos naturales tales que*

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, V) \simeq \operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G V).$$

Comentamos, además, otro resultado relacionado con las representaciones inducidas.

Proposición 1.89. *Si* $W = \bigoplus_i W_i$, *entonces* $\operatorname{Ind}_H^G W = \bigoplus_i \operatorname{Ind}_H^G W_i$.

1.7. Representaciones de $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$

Antes de indagar acerca de los casos $n = 3$ y $n = 4$ notemos lo siguiente:

El grupo $\mathbb{S}_n$, $n \geq 3$, tiene un representación de dimensión uno no trivial, la llamada *representación signo*, dada por

$$\rho : \mathbb{S}_n \to \mathbb{C}, \quad \rho(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{S}_n.$$

Ahora, $\mathbb{S}_n$ actúa en $\mathbb{C}^n$ permutando los vectores de la base estándar $\{e_1, \dots, e_n\}$. El vector $e = e_1 + \ldots + e_n$ es fijado por esta acción. El complemento ortogonal, con respecto al producto interno canónico, al espacio generado por este vector, con la acción restringida de $\mathbb{S}_n$, es la *representación estándar* de $\mathbb{S}_n$. La base canónica para este espacio está dada por $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ para $w_i = e_i - e_n$. La acción en esta base está dada por:

$$(i, i+1) \cdot w_j = w_{(i,i+1)(j)}, \text{ si } i < n-1,$$
$$(n-1, n) \cdot w_j = \begin{cases} w_j - w_n & \text{si } j < n, \\ -w_n & \text{si } j = n, \end{cases}$$

Observación 1.90. Esta representación es fiel.

Si $n \geq 4$, existe otra representación de $\mathbb{S}_n$ de dimensión $(n-1)$. Para este módulo, fijamos la base $\{v_i\}$, con $v_i = w_i \otimes z$, $i = 1, \dots, n-1$.

Para $\mathbb{S}_n$:

(1) Representación trivial, M_ϵ.
(2) Representación signo, M_{sgn}.
(3) Una representación que permuta una base en $\mathbb{C}^n$.

Las dos primeras claramente son simples. La última no, ya que admite el submódulo (isomorfo al trivial), generado por

$$e_1 + e_2 + \ldots e_n = (1, 1, \ldots 1).$$

Así, obtenemos una nueva representación, siguiendo el Teorema 1.64 (Maschke), dada por el complemento ortogonal M_{st}^+ tal que :

$$\mathbb{C}^n = M_\epsilon \oplus M_{\mathrm{st}}^+.$$

Esta es la llamada "representación estándar".

(4a) Representación estándar, M_{st}^+, cuya dimensión es $n-1$.

A su vez, el producto tensorial permite definir otra representación:

(4b) Representación $M_{\mathrm{st}}^- := M_{\mathrm{st}}^+ \otimes M_{\mathrm{sgn}}$, de dimensión $n-1$.

Esta representación es simple. La analizamos cuando $n = 3, 4$.

1.7.1. Representaciones sobre $\mathbb{S}_3$. En el caso $n = 3$, la representación estándar, la trivial y la signo son una lista exhaustiva de los módulos simples sobre el álgebra de grupo. En este caso, la representación estándar tiene dimensión 2. De este modo, si sumamos los cuadrados de las dimensiones de los módulos simples obtenemos que

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 3!$$

con lo que comprobamos que son todos los módulos simples, de acuerdo con 1.25.

Observación 1.91. Esto muestra que, en particular, M_{st}^+ debe ser isomorfo a M_{st}^-. Por esto, en el caso $n = 3$, solo nos referiremos a esta representación como M_{st}.

Veamos cómo surge la representación estándar.

Una acción natural de $\mathbb{S}_3$ en $\mathbb{C}^3$ está dada por la permutación de los elementos de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$. La representación resultante no es simple pues deja invariante el elemento $e = e_1 + e_2 + e_3$ al igual que la representación trivial. Vía el Teorema de Maschke determinemos la representación estándar, que surge del complementeo ortogonal y que, mediante un sencillo cálculo, podemos verificar su comportamiento:

Sea $\{w_1 \coloneqq e_1 - e_3, w_2 \coloneqq e_2 - e_3\}$ una base. Entonces, la acción de esta representación queda determinada de manera exhaustiva por

$$\begin{aligned}
&(12) \cdot w_1 = (12) \cdot (e_1 - e_3) = e_2 - e_3 = w_2,\\
&(12) \cdot w_2 = (12) \cdot (e_2 - e_3) = e_1 - e_3 = w_1,\\
&(23) \cdot w_1 = (23) \cdot (e_1 - e_3) = e_1 - e_2 = e_1 - e_3 - (e_2 - e_3) = w_1 - w_2,\\
&(23) \cdot w_2 = (23) \cdot (e_2 - e_3) = e_3 - e_2 = -(e_2 - e_3) = -w_2,\\
&(13) \cdot w_1 = (13) \cdot (e_1 - e_3) = e_3 - e_1 = -(e_1 - e_3) = -w_1,\\
&(13) \cdot w_2 = (13) \cdot (e_2 - e_3) = e_2 - e_1 = e_2 - e_3 - (e_1 - e_3) = -w_1 + w_2.
\end{aligned}$$

De este modo, sus matrices resultan

$$[(12)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [(23)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [(13)] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.7.2. Representaciones sobre $\mathbb{S}_4$. La siguiente proposición será de utilidad para enlistar los $\mathbb{S}_4$-módulos.

Proposición 1.92. *Sean A y B álgebras. Si $A \xrightarrow{\pi} B$ y M es un B-módulo entonces M es un A-módulo vía la acción*

$$a \cdot m = \pi(a) \cdot m, \qquad a \in A, m \in M.$$

Demostración. La acción $\cdot : A \times M \to M$ definida por

$$(a, m) \mapsto \pi(a) \cdot m,$$

donde π es un morfismo de álgebras, es tal que para todos $a_1, a_2 \in A$ y $m \in M$ se tiene que

$$(a_1 a_2) \cdot m = \pi(a_1 a_2) \cdot m = [\pi(a_1)\pi(a_2)] \cdot m = a_1 \cdot a_2 \cdot m$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el hecho de que M es un B-módulo. $\square$

OBSERVACIÓN 1.93. El morfismo π de la Proposición 1.92 es llamado *proyección de álgebras.*

Ahora, vía la proyección $\mathbb{S}_4 \twoheadrightarrow \mathbb{S}_3$ podemos establecer que todo módulo M sobre $\mathbb{S}_3$ es un $\mathbb{S}_4$-módulo M'. Con esto, obtenemos tres módulos simples: $M'_\epsilon := M_\epsilon$, $M'_{\text{sgn}} := M_{\text{sgn}}$, $M_2 := M_{\text{st}}$. Además, a la lista anterior tenemos que agregarle dos representaciones más: M^+_{st} y M^-_{st}, cada una de dimensión 3 y no isomorfas entre sí. Esto da la lista completa de las representaciones irreducibles; en efecto:

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24 = 4!,$$

con lo que se verifica 1.25.

En $\mathbb{S}_4$, para brindar una definición explícita de la representación estándar M^+_{st}, consideremos la base $\{w_i := e_i - e_4\}$ para $i = 1, 2, 3$.

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
(12)\cdot w_1 &= (12)\cdot(e_1 - e_4) = e_2 - e_4 = w_2,\\
(12)\cdot w_2 &= (12)\cdot(e_2 - e_4) = e_1 - e_4 = w_1,\\
(12)\cdot w_3 &= (12)\cdot(e_3 - e_4) = e_2 - e_4 = w_3,\\
(13)\cdot w_1 &= (13)\cdot(e_1 - e_4) = e_3 - e_4 = w_3,\\
(13)\cdot w_2 &= (13)\cdot(e_2 - e_4) = e_2 - e_4 = w_2,\\
(13)\cdot w_3 &= (13)\cdot(e_3 - e_4) = e_1 - e_4 = w_1,\\
(23)\cdot w_1 &= (23)\cdot(e_1 - e_4) = e_1 - e_4 = w_1,\\
(23)\cdot w_2 &= (23)\cdot(e_2 - e_4) = e_3 - e_4 = w_3,\\
(23)\cdot w_3 &= (23)\cdot(e_3 - e_4) = e_2 - e_4 = w_2,\\
(24)\cdot w_1 &= (24)\cdot(e_1 - e_4) = e_1 - e_2 = e_1 - e_4 - (e_2 - e_4) = w_1 - w_2,\\
(24)\cdot w_2 &= (24)\cdot(e_2 - e_4) = e_4 - e_2 = -(e_2 - e_4) = -w_2,\\
(24)\cdot w_3 &= (24)\cdot(e_3 - e_4) = e_3 - e_2 = e_3 - e_4 - (e_2 - e_4) = -w_2 + e_3,\\
(34)\cdot w_1 &= (34)\cdot(e_1 - e_4) = e_1 - e_3 = e_1 - e_4 - (e_3 - e_4) = w_1 - w_3,\\
(34)\cdot w_2 &= (34)\cdot(e_2 - e_4) = e_2 - e_3 = e_2 - e_4 - (e_3 - e_4) = w_2 - w_3,\\
(34)\cdot w_3 &= (34)\cdot(e_3 - e_4) = e_4 - e_3 = -(e_3 - e_4) = -w_3.
\end{aligned}$$

y sus matrices resultan

$$[(12)]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [(23)]^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [(13)]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[(34)]^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [(24)]^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, como M_{st}^{-} resulta de tensorear M_{st}^{+} con la representación M_{sgn}, actuamos con el signo y las matrices de esta representación son

$$[(12)]^{-} = -[(12)]^{+}, \quad [(23)]^{-} = -[(23)]^{+}, \quad [(13)]^{-} = -[(13)]^{+},$$
$$[(34)]^{-} = -[(34)]^{+}, \quad [(24)]^{-} = -[(24)]^{+}.$$

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

Desarrollamos aquí algunos de los conceptos básicos de la teoría de álgebras de Hopf y otras estructuras relacionadas, presentando algunos resultados importantes y que serán de utilidad en lo que sigue del trabajo.

Usamos de referencia para este desarrollo a [**Mo**] y [**Sc**].

Aunque muchas de las definiciones y algunos de los resultados alcanzan más generalidad al utilizar módulos y anillos, los presentamos mediante espacios vectoriales y cuerpos.

2.1. Estructuras relacionadas

En el Capítulo anterior hemos introducido el concepto de álgebra en la Definición 1.29. Esta definición, expresada en términos de diagramas, hace más sencilla la visualización de otro concepto presente en este capítulo, las coálgebras. Esto da lugar a que también podamos configurar en términos de diagramas conmutativos a otras estructuras, como los módulos y comódulos, entre otras.

2.1.1. Álgebras y coálgebras.

DEFINICIÓN 2.1. Una $\Bbbk$-*álgebra* asociativa y con unidad es un $\Bbbk$-espacio vectorial A junto con dos morfismos $\Bbbk$-lineales: la *multiplicación* $m : A \otimes A \to A$ y la unidad $u : \Bbbk \to A$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\Bbbk \otimes A \arrow[ur, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr] & & A \otimes \Bbbk \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes u"'] \arrow[dl] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

(Asociatividad) (Unidad)

Notar que la unidad en A está dada por $1_A = u(1_\Bbbk)$.

Introduciremos inmediatamente el concepto de coálgebra que, en muchos sentidos, es un concepto dual al de álgebra (asociativa).

Al dualizar la noción de álgebra podemos obtener la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2. Una $\Bbbk$-*coálgebra* coasociativa con counidad es un $\Bbbk$-espacio vectorial no nulo C dotado de dos morfismos lineales, la *comultiplicación* o *coproducto* $\Delta : C \to C \otimes C$ y la *counidad* $\epsilon : C \to \Bbbk$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes \mathrm{id}"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & C\otimes C\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ \Bbbk\otimes C & & C\otimes\Bbbk \\ & C\otimes C \arrow[ul, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Coasociatividad</u> <u>Counidad</u>

La counidad ϵ queda determinada de manera única por el par (C, Δ). El núcleo de ϵ será denotado por C^+.

De modo similar a 1.17, dados los espacios vectoriales V y W, también llamaremos *"flip"* al morfismo lineal $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ tal que $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ para todos $v \in V$, $w \in W$.

DEFINICIÓN 2.3. La $\Bbbk$-coálgebra C es *coconmutativa* si $\tau \circ \Delta = \Delta$ en C.

DEFINICIÓN 2.4. Dadas las coálgebras C y D con sus respectivas comultiplicaciones Δ_C, Δ_D y counidades ϵ_C y ϵ_D, respectivamante. Un *morfismo de coálgebras* es un morfismo $\Bbbk$-lineal $f : C \to D$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & \Bbbk & \end{tikzcd} .$$

También tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.5. Dada la coálgebra C y un subespacio $I \subseteq C$. I es un *coideal* si $\Delta I \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\epsilon(I) = 0$.

De esta última definición podemos notar que I es un coideal de C si, y solo si, el $\Bbbk$-espacio vectorial C/I es una coálgebra con multiplicación inducida de Δ.

OBSERVACIÓN 2.6. Como ϵ es un morfismo de coálgebras, el subespacio $C^+ = \ker(\epsilon) \subseteq C$ es un coideal de C.

Ejemplos de coálgebras son:

EJEMPLO 2.7. Sea X un conjunto. Entonces

$$\Bbbk\{X\} = \{\sum_{x \in X} a_x e_x |\ a_x \in \Bbbk,\ a_x \neq 0 \text{ para finitos } x\}$$

es una coálgebra coconmutativa. Su estructura está determinada por

$$\Delta(e_x) = e_x \otimes e_x \quad \text{y} \quad \epsilon(e_x) = 1, \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Ejemplo 2.8. Si (A, m, u) es un álgebra de dimensión finita, usando la identificación canónica $(A \otimes A)^* \simeq A^* \otimes A^*$, A^* resulta ser una coálgebra con comultiplicación m^* y counidad u^*. Explícitamente,

$$m^*(f)(a \otimes b) = f(ab), \qquad u^*(f) = f(1), \qquad \forall\, f \in A^*,\ a, b \in A.$$

Definición 2.9. Sea C una $\Bbbk$-coálgebra. Un *comódulo a derecha* sobre C es un par (M, ρ_M), donde M es un $\Bbbk$-módulo y $\rho_M : M \to M \otimes C$ es un morfismo $\Bbbk$-lineal (la estructura comódulo), y los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "\rho_M \otimes \mathrm{id}"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] & M \otimes C \otimes C, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\rho_M"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & M \otimes C \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \epsilon"] \\ & M \otimes \Bbbk & \end{tikzcd} \quad .$$

De un modo similar se define *C-comódulo a izquierda*.

Definición 2.10. Un bicomódulo M es un comódulo a izquierda y a derecha tal que los morfismos de estructura son compatibles. Esto es, si λ_M y ρ_M denotan las coacciones a izquierda y a derecha respectivamente, entonces

$$(\mathrm{id} \otimes \rho_M)\lambda_M = (\lambda_M \otimes \mathrm{id})\rho_M.$$

Ejemplo de comódulos son:

Ejemplo 2.11. Sea $C = \Bbbk G$, G un grupo. Entonces M es un C-comódulo (a derecha) si y sólo si M es un espacio vectorial G-graduado, esto es $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$. En efecto, dado $m \in M$, $\rho_M(m) = \sum m_g \otimes g$, para (finitos) $m_g \in M$. Se sigue de los axiomas que definen a la coacción ρ_M que $(m_g)_h = \delta_{g,h} m_g$ y por lo tanto $\rho_M(m_g) = m_g \otimes g$. Si $M_g = \{m_g : m \in M\}$, esto muestra que la suma es directa. Por otra parte, de los mismos axiomas se sigue que $\sum m_g = m$ y, por lo tanto, vale una implicación. La recíproca es inmediata, tomando $\rho_M(m) = m \otimes g$, para cada $m \in M_g$.

Definición 2.12. Dados dos C-comódulos M y N. Un morfismo $\Bbbk$-lineal $\phi : M \to N$ es llamado un *morfismo de comódulos* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\phi \otimes \mathrm{id}"'] & N \otimes C. \end{tikzcd}$$

Definición 2.13. Sea C una coálgebra. $c \in C$ es llamado un *elemento grupezco* o *elemento de tipo grupo* si $c \neq 0$ y $\Delta(c) = c \otimes c$, y es llamado un *elemento primitivo* si $\Delta(c) = 1 \otimes c + c \otimes 1$. A cada conjunto de elementos grupezcos y primitivos los denotamos por $G(C)$ y $P(C)$, respectivamente.

Si $c \in G(C)$ entonces $\epsilon(c) = 1$ y, si $c \in P(C)$, $\epsilon(c) = 0$.

Para $a, b \in C$ también podemos definir un *elemento* (a, b)*-casi-primitivo* c si $\Delta(c) = c \otimes a + b \otimes c$ y al conjunto de estos elementos los denotamos $P_{a,b}(C)$. El caso $a = b = 1$ genera el conjunto $P_{1,1}(C)$ que es precisamente $P(C)$, el conjunto de los elementos primitivos.

Observación 2.14. En $\Bbbk$, los elementos grupezcos son linealmente independientes. De este modo, si G es un grupo, el conjunto de los elementos grupezcos en $\Bbbk G$ conicide con G.

Definición 2.15. Sean C una coálgebra y M un C-comódulo a derecha. Definimos el conjunto de coinvariantes de C en M por

$$M^{\operatorname{co} C} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Análogamente, si M es un C-comódulo a izquierda, el conjunto de coinvariantes de C en M es

$${}^{\operatorname{co} C}M = \{m \in M \mid \lambda(m) = 1 \otimes m\}.$$

Definición 2.16. Diremos que una coálgebra C es *simple* si no posee subcoálgebras propias y diremos que es *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples.

Definición 2.17. Sea C coálgebra. El *corradical* de C es la suma de todas las subcoálgebras simples de C y se denota por C_0.

Definición 2.18. Si todas las subcoálgebras simples de una coálgebra C tienen dimensión uno, entonces C se dice *punteada* y se tiene que $C_0 = \Bbbk\{G(C)\}$.

Definición 2.19. Si C_0 es el corradical de C, entonces se define recursivamente C_n para $n \geq 1$ como:

$$C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

Esta filtración recibe el nombre de *filtración corradical* de C.

Una familia de subespacios $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de C es una *filtración de coálgebras* si

(i) $C_n \subseteq C_{n+1}$ y $C = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.
(ii) $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$.

La filtración corradical $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subcoálgebras de C que da una filtración de coálgebras. ([**Mo**, Cap. 5], [**S**, Cap. IX]).

2.1.2. Duales de álgebras y coálgebras. Mostramos una estrecha relación entre álgebras y coálgebras que resulta de mirar sus espacios duales.

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $V^* = \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ su dual (lineal). V y V^* determinan una forma bilineal no degenerada $\langle , \rangle : V^* \times V \to \Bbbk$ definida por $\langle f, v \rangle = f(v)$, que escribiremos de modo tal que podamos pensarla como una acción de V sobre V^*. Si $\phi : V \to W$ es un morfismo $\Bbbk$-lineal entonces la *traspuesta* de ϕ es $\phi^* : W^* \to V^*$ y está dada por

$$\phi^*(f)(v) = f(\phi(v)),$$

para todos $f \in W^*$, $v \in V$.

PROPOSICIÓN 2.20. *Si C es una coálgebra entonces C^* es un álgebra con multiplicación dada por $m = \Delta^*$ y unidad $u = \epsilon^*$. Si C es coconmutativa entonces C^* conmutativa.*

OBSERVACIÓN 2.21. Al dualizar el diagrama de la Definición 2.2, con la observación de que $C^* \otimes C^* \subseteq (C \otimes C)^*$, debemos restringir Δ^* para obtener $m : C^* \otimes C^* \to C^*$, que es la multiplicación en C^*. De manera explícita,

$$m(f \otimes g)(c) = \Delta^*(f \otimes g)(c) = (f \otimes g)\Delta c,$$

para todos $f, g \in C^*$, $c \in C$.

DEFINICIÓN 2.22. Dado un $\Bbbk$-álgebra A. El *dual finito* de A es $A = \{f \in A^* | f(I) = 0, \text{para algún ideal } I \text{ de } A \text{ tal que } \dim(A/I) < \infty\}$.

PROPOSICIÓN 2.23. *Si A es un álgebra, entonces A es una coálgebra con comultiplicación $\Delta = m^*$ y counidad $\epsilon = u^*$. Si A conmuta, A coconmuta.*

OBSERVACIÓN 2.24. La comultiplicación, de manera explícita es

$$\Delta f(a \otimes b) = m^* f(a \otimes b) = f(ab),$$

para todos $f \in A$, $a, b \in A$.

2.1.3. Biálgebras. Dado un $\Bbbk$-espacio vectorial B puede suceder que este posea estructura tanto de álgebra como de coálgebra. En el caso en que ambas estructuras posean cierta compatibilidad tenemos la siguiente estructura:

DEFINICIÓN 2.25. Sea B un $\Bbbk$-espacio vectorial. La terna (B, m, Δ) es una *biálgebra* si (B, m) es $\Bbbk$-álgebra con unidad u, (B, Δ) es coálgebra con counidad ϵ y $\Delta : B \to B \otimes B$, $\epsilon : A \to \Bbbk$ son morfismos de álgebras.

DEFINICIÓN 2.26. Sean A y B biálgebras. Un morfismo $\Bbbk$-lineal $\phi : A \to B$ es un *morfismo de biálgebras* si es, a su vez, morfismo de álgebras y de coálgebras.

DEFINICIÓN 2.27. Sea B una biálgebra. Un *biideal* de B es un subespacio $I \subseteq B$ que es, al mismo tiempo, ideal bilátero y coideal.

OBSERVACIÓN 2.28. El cociente B/I es una biálgebra cuando I un biideal de B.

OBSERVACIÓN 2.29. En la Definición 2.25, es equivalente pedir que m y u sean morfismos de coálgebras a pedir que Δ y ϵ sean morfismos de álgebras.

OBSERVACIÓN 2.30. Algunas consideraciones a tener en cuenta son

(i) En la Definición 2.25, $B \otimes B$ es considerada con la estructura natural de álgebra. (Definición 1.30)

En general, el producto tensorial de dos álgebras A y B tiene una estructura natural de álgebra (Definición 1.32) dada por

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd,$$

para todos $a, c \in A$, $b, d \in B$.

Además, la multiplicación $m_{A\otimes B}$ es la composición

$$A\otimes B\otimes A\otimes B \overset{\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}}{\longrightarrow} A\otimes A\otimes B\otimes B \overset{m_A\otimes m_B}{\longrightarrow} A\otimes B$$

Ahora, si C y D son coálgebras, su producto tensorial $C\otimes D$ puede tener una estructura de coálgebra del modo natural, con comultiplicación

$$C\otimes D \overset{\Delta_C\otimes\Delta_D}{\longrightarrow} C\otimes C\otimes D\otimes D \overset{\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}}{\longrightarrow} C\otimes D\otimes C\otimes D.$$

la counidad está dada por

$$C\otimes D \overset{\epsilon_C\otimes\epsilon_D}{\longrightarrow} \Bbbk\otimes\Bbbk\simeq\Bbbk.$$

(ii) El subespacio $\ker(\epsilon)$ en la biálgebra B es un biideal de codimensión 1, llamado *ideal de aumentación*.

Ejemplos 2.31. Ejemplos de biálgebras son

(1) El álgebra de grupo de un grupo G, $\Bbbk G$, donde la estructura de coálgebra está dada por la multiplicación $\Delta g = g\otimes g$ y counidad $\epsilon(g) = 1$, para todo $g\in G$.
(2) Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ y sea $B = U(\mathfrak{g})$ su álgebra universal envolvente. Esta es una biálgebra considerando $\Delta x = 1\otimes x + x\otimes 1$ y $\epsilon(x) = 0$, para todo $g\in\mathfrak{g}$.

Observación 2.32. Si B es una biálgebra y M, N son B-módulos, entonces el espacio vectorial $M\otimes N$ es nuevamente un B-módulo, vía la *acción diagonal* $\cdot$ dada por la comultiplicación:

$$b\cdot(m\otimes n) = \Delta(b)(m\otimes n), \quad \text{para todos } m\in M, n\in N, b\in B.$$

2.2. Álgebras de Hopf

En esta sección presentamos los conceptos y resultados más relevantes de la teoría de álgebras de Hopf.

Definición 2.33. Sea (H, m, Δ) una biálgebra. Decimos que H es un *álgebra de Hopf* si existe un morfismo $\Bbbk$-lineal $\mathcal{S}: H\to H$, llamada la *antípoda*, tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{S}"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "u\epsilon"'] & H\otimes H \arrow[d, "\mathcal{S}\otimes\mathrm{id}"] \\
H\otimes H \arrow[r, "m"'] & H & H\otimes H \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

Son ejemplos de álgebras de Hopf los siguientes:

Ejemplo 2.34. Dado un grupo G, el álgebra de grupo $\Bbbk G$ es un álgebra de Hopf con antípoda dada por $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$, para todo $g\in G$, con la identificación $e_g\mapsto g$ para todo $g\in G$.

Ejemplo 2.35. Dado $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, su envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con antípoda dada por $\mathcal{S}(x) = -x$, para todo $x\in\mathfrak{g}$.

EJEMPLO 2.36. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial, el álgebra tensorial $T(V)$ sobre V es un álgebra de Hopf junto con la estructura usual de álgebra más la estructura de coálgebra dada por la comultiplicación $\Delta(v) = v\otimes 1+1\otimes v$ y counidad $\epsilon(v) = 0$, y antípoda $\mathcal{S}(v) = -v$, para todo $v \in V$.

EJEMPLO 2.37. $T(\xi)$, el álgebra de Taft (1971)
Dado el cuerpo $\Bbbk$ y un número natural N. Supongamos que existe una raíz N-ésima raíz primitiva de la unidad $\xi \in \Bbbk$. Consideremos el álgebra H generada por dos elementos g y x junto a las relaciones $g^N = 1, x^N = 0, xg = \xi gx$.Asumamos que están bien definidos los morfismos de álgebras $\Delta : H \to H \otimes H, \mathcal{S} : H \to H^{op}, \epsilon : H \to \Bbbk$ y que están unívocamente determinados por

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g\otimes g, & \Delta(x) &= 1\otimes x + x\otimes g;\\ \Delta(g) &= g\otimes g, & \Delta(x) &= 1\otimes x + x\otimes g;\\ \mathcal{S}(g) &= g^{-1}, & \mathcal{S}(x) &= -xg^{-1}. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.38. H^{op} es un álgebra sobre $\Bbbk$ donde la operación está dada por "la opuesta" de H, esto es, si $\cdot$ es la operación en H, en H^{op} tendremos $a \cdot_{op} b = b \cdot a$.

Observemos que $\Delta(g)^N = 1$. De hecho,

$$\begin{aligned} \Delta(g)^N &= (g\otimes g)^N\\ &= g^N \otimes g^N\\ &= 1\otimes 1\\ &= 1. \end{aligned}$$

Además, $\Delta(x)\Delta(g) = \xi\Delta(g)\Delta(x)$, esto es, $\Delta(g)$ y $\Delta(x)$ ξ-conmutan. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta(x)\Delta(g) &= (1\otimes x + x\otimes g)(g\otimes g)\\ &= (1\otimes x)\otimes g + (x\otimes g)\otimes g\\ &= 1\otimes xg + xg\otimes g\\ &= 1\otimes \xi gx + \xi gx\otimes g\\ &= \xi(1\otimes gx + gx\otimes g)\\ &= \xi(g\otimes(1\otimes x) + g\otimes(x\otimes g))\\ &= \xi((g\otimes g)(1\otimes x + x\otimes g))\\ &= \xi\Delta(g)\Delta(x). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.39. En el álgebra de polinomio $\mathbb{Z}[q]$, consideramos los *coeficientes q-binomiales*

$$\binom{n}{i}_q = \frac{(n)!_q}{(n-i)!_q(i)!_q},$$

donde $(n)!_q = (n)_q...(2)_q(1)_q$ y $(n)_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le n$.

Por inducción sobre n se muestra que $\binom{n}{i}_q \in \mathbb{Z}[q]$ usando la identidad

$$q^k \binom{n}{k}_q + \binom{n}{k-1}_q = \binom{n+1}{k}_q, \tag{2.1}$$

para $0 \leq k \leq n$.

Para verificar que $\Delta(x)^N = 0$ necesitaremos del siguiente resultado:

Lema 2.40 (Fórmula del binomio cuántico). *Sea A una $\Bbbk$-álgebra asociativa y $q \in \Bbbk$. Si $x, y \in A$ son tales que $xy = qyx$ entonces se cumple, para cada $n \in \mathbb{N}$: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_q y^i x^{n-i}$.*

Demostración. Por inducción sobre n, usando (2.1), tenemos que

Si $n = 1$:

$$(x+y) = \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i}_q y^i x^{n-i} = \binom{1}{0}_q x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Asumamos que se cumple para $n = k$ y mostremos que se cumple para $n = k+1$.

Si $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q y^i x^{k-i} \\
&= x \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q y^i x^{k-i} + y \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q y^i x^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q x y^i x^{k-i} + y \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q y^i x^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q q^i y^i x^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q y^{i+1} x^{k-i} \\
&= \binom{k}{0}_q x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}_q q^i y^i x^{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1}_q y^i x^{k+1-i} \\
&= \binom{k}{0}_q x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}_q q^i y^i x^{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1}_q y^i x^{k+1-i} \\
&+ \binom{k}{k}_q y^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}_q x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[q^i \binom{k}{i}_q + \binom{k}{i-1}_q \right] y^i x^{k+1-i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\binom{k+1}{k+1}_q y^{k+1}\\
&=\binom{k+1}{0}_q x^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}_q y^i x^{k+1-i}+\binom{k+1}{k+1}_q y^{k+1}\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}_q y^i x^{k+1-i}.
\end{aligned}
$$

□

Volviendo al ejemplo debido a Taft, si ξ es una N-ésima raíz primitiva de la unidad, $\binom{N}{i}_\xi = 0$ para $0 < i < N$. Y dado que $1 \otimes x$ y $x \otimes g$ ξ-conmutan:

$$
\begin{aligned}
\Delta(x)^N &= (1 \otimes x + x \otimes g)^N\\
&= \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}_\xi (x \otimes g)^i (1 \otimes x)^{N-i}\\
&= (x \otimes g)^N + (1 \otimes x)^N\\
&= x^N \otimes g^N + 1 \otimes x^N\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Así, Δ está bien definido como morfismo de álgebras. Luego, H es un álgebra de Hopf (de dimensión N^2).

Ejemplo 2.41. Dado $\mathcal{O}(M_n(\Bbbk)) = \Bbbk[X_{ij} | 1 \leq i, j \leq n]$, funciones polinómicas con coeficientes en $\Bbbk$ sobre las matrices de tamaño $n \times n$, biálgebra, son álgebras de Hopf los cocientes $\mathcal{O}(SL_n(\Bbbk)) \coloneqq \mathcal{O}(M_n(\Bbbk))/(\det(X) - 1)$ y $\mathcal{O}(GL_n(\Bbbk)) \coloneqq \mathcal{O}(M_n(\Bbbk))/(\det(X))^{-1}$ con la antípoda $\mathcal{S}(X) = X^{-1}$, donde $\mathcal{S}(X_{ij})$ es la entrada (ij)-ésima de X^{-1}.

Definición 2.42. Una aplicación $f : H \to K$ entre dos álgebras de Hopf es un *morfismo de álgebras de Hopf* si f es un morfismo de biálgebras. Necesariamente, esto implica la compatibilidad $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ para todo $h \in H$.

Definición 2.43. Sea H un álgebra de Hopf y τ el morfismo *flip* en $H \otimes H$. Decimos que H es *coconmutativa* si $\tau \circ \Delta = \Delta$.

Observación 2.44. Algunas observaciones sobre los ejemplos anteriores:

- Los Ejemplos 2.34 y 2.35 son ejemplos de álgebras coconmutativas.
- El álgebra de Taft introducida en el Ejemplo 2.37, para $N = 2$, es el álgebra de Hopf de menor tamaño que es no conmutativa ni coconmutativa.
- Si G es un grupo finito entonces el álgebra de grupo $\Bbbk G$ es un álgebra de Hopf de dimensión finita y es coconmutativo. Además, si G es abeliano, $\Bbbk G$ es conmutativo.

    Afirmación 2.2.1. *Si $\Bbbk$ es un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero, todas las álgebras de Hopf de dimensión finita sobre $\Bbbk$ que son coconmutativas son isomorfas al álgebra de grupo $\Bbbk G$, para algún grupo G de dimensión finita.*

Lema 2.45. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Si H es un $\Bbbk$-álgebra de Hopf que es generado (como álgebra) por elementos primitivos, entonces el conjunto de elementos grupezcos de H, $G(H)$, es el trivial.*

Demostración. Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ la familia de elementos primitivos de H que son no nulos y, para cada $n \geq 0$, sea A_n el espacio lineal generado en H cuyos elementos son de la forma $x_{i_1}^{k_1}...x_{i_m}^{k_m}$ tal que los k_j son enteros no negativos y su suma $k_1 + \cdots k_m$ es igual a n.

Asumamos las siguientes propiedades sobre $\{A_n\}_{n\geq 0}$:

1. $A_N \subseteq A_{n+1}$, $\bigcup_{n\geq 0} A_n = H$;
2. $\Delta(A_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} A_i \otimes A_{n-i}$.

Ahora, tomemos $g \in G(H)$. Por la propiedad 1, existe m tal que $g \in A_n$, así que elegimos m de modo tal que sea el mínimo con esa propiedad. Si $g \notin \Bbbk = A_0$, existe $f \in H^*$ tal que $f(A_0) = 0$ pero $f(g) = 1$.

Dado que $g \in A_m$,

$$\Delta(g) = \sum_{i=0}^{m} a_i \otimes a_{m-i},$$

con $a_j \in A_j$. Esto implica que

$$g = \langle \mathrm{id} \otimes f, \Delta(g)\rangle = \sum_{i=1}^{m-1} a_i f(a_{m-i}) \in A_{m-1}.$$

Esto contradice la minimalidad de m. Así, $g \in \Bbbk$ y debe ser $g = 1$. □

Observación 2.46. $T(\xi)$ es un álgebra de Hopf tal que

$$G(T(\xi)) = \langle g\rangle \simeq \mathbb{Z}/(N).$$

Definición 2.47. Un álgebra de Hopf se dice *punteada* si la coálgebra subyacente lo es.

Observación 2.48. Sea G un grupo. Si H es punteada y $G(H) \simeq G$, decimos que H es *punteada sobre* G.

Ejemplo 2.49. Las álgebras de Hopf $\Bbbk G$, $U(\mathfrak{g})$ y $T(q)$ de los Ejemplos 2.34, 2.35 y 2.37 son punteadas.

Observación 2.50. Usando la dualidad entre álgebras y coálgebras podemos ver que un álgebra de Hopf H de dimensión finita es punteada si, y solo si, todos los H^*-módulos simples tienen dimensión uno.

2.2.1. La notación sigma. La notación que introducimos a continuación se debe a Sweedler.

Sean C una coálgebra y $c \in C$. Entonces $\Delta(c) \in C\otimes C$ podemos escribirlo como

$$\sum_i c_i \otimes c^i, \qquad c_i, c^i \in C.$$

De forma abreviada, escribiremos

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)},$$

y de manera aún más breve, omitiendo el símbolo de sumatoria, escribiremos

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Si V es un comódulo de C (a derecha) con estructura dada por Δ_V, para cada elemento $v \in V$ tenemos

$$\Delta_V(v) = \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} = v_{(0)} \otimes v_{(1)},$$

donde $v_{(0)}$ representa elementos de V y $v_{(1)} \in C$, y, de modo similar a los pasos previos, hemos omitido el símbolo de sumatoria.

La coasociatividad de la coálgebra C la podemos representar del siguiente modo en la notación sigma:

$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)},$$

para todo $c \in C$. Por esto, indicaremos $\Delta_2(c) \coloneqq (\Delta \circ \mathrm{id}) \circ \Delta(c) = (\mathrm{id} \circ \Delta) \circ \Delta(c)$ como

$$\Delta_2(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}.$$

Si definimos de manera recursiva $\Delta_{n+1} : C \to C^{\otimes(n+2)}, \Delta_{n+1} = (\Delta \circ \mathrm{id}^n) \circ \Delta_{n-1}, n \geq 2$, donde $\Delta_1 = \Delta$, podemos escribir sin que se produzca alguna ambigüedad,

$$\Delta_n(c) = c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n+1)}.$$

Luego, la composición $f \circ \Delta_n$ será, para cada $c \in C$

$$f \circ \Delta_n(c) = f(c_{(1)}, \ldots, c_{(n)}).$$

Para la counidad ϵ, tenemos

$$\epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = c_{(1)}\epsilon(c_{(2)}).$$

Y para un álgebra de Hopf H con antípoda $\mathcal{S}$ tenemos

$$\mathcal{S}(h_{(1)})(h_{(2)}) = \epsilon(h)1_H = h_{(1)}\mathcal{S}(h_{(2)}),$$

para todo $h \in H$.

Ejemplo 2.51. En la Observación 2.32, podemos expresar en términos de la notación sigma la acción diagonal presentada: dada la biálgebra B y los B-comódulos M y N, en $M \otimes N$ tenemos

$$b \cdot (m \otimes n) = \Delta(b)(m \otimes n) = b_{(1)}m \otimes b_{(2)}n,$$

para todos $m \in M, n \in N, b \in B$.

2.2.2. Producto convolución. El producto definido a continuación, llamado convolución, permite definir un álgebra de Hopf a partir de él, como veremos seguidamente:

Definición 2.52. Sean (C, Δ) una coálgebra y (A, m) un álgebra. Para $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ definimos el *producto convolución* de f y g al elemento de $\mathrm{Hom}(C, A)$, y lo denotamos por $f * g$, que se define por la composición

$$(f * g)(c) = m \circ (f \otimes g)(\Delta c), \qquad c \in C.$$

En la notación sigma, $(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)})$, $c \in C$.

Proposición 2.53. *Sean C una coálgebra con counidad ϵ y A un álgebra con unidad u. Entonces* $(\mathrm{Hom}(C, A), *)$ *es un álgebra con unidad $u\epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g, h \in \mathrm{Hom}(C, A)$. Claramente, $f * (g * h) = (f * g) * h$. Sea $c \in C$:

$$\begin{aligned} f * (g * h)(c) &= f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) \\ &= f(c_{(1)})(g(c_{(2)_{(1)}})h(c_{(2)_{(2)}})) \\ &= (f(c_{(1)_{(1)}})g(c_{(1)_{(2)}}))h(c_{(2)}) \\ &= (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\ &= (f * g) * h(c), \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que la coasociatividad de Δ la podemos expresar como $(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)}$.

Hemos probado que $*$ define una multiplicación asociativa en $(\mathrm{Hom}(C, A), *)$. Veamos que $u\epsilon$ es la unidad.

Sea $f \in \mathrm{Hom}(C, A)$. Para cada $c \in C$,

$$(f * u\epsilon)(c) = f(c_{(1)})\epsilon(c_{(2)})1_A = f(c_{(1)}\epsilon(c_{(2)})) = f(c).$$

De modo análogo podemos ver que $u\epsilon * f = f$. □

Si B es una biálgebra, la Proposición 2.53, con $*$ definido sobre $\mathrm{Hom}(B, B)$, establece que B tiene estructura de álgebra con el producto convolución. En el caso de un álgebra de Hopf, existe una relación muy estrecha entre esta estructura de álgebra y la antípoda.

DEFINICIÓN 2.54. Si (A, m_A) y (B, m_B) son álgebras un morfismo $f : A \to A$ es un *morfismo de antiálgebra* si $(f \circ m_A) = m_B^{op} \circ (f \otimes f)$ y $f \circ u_A = u_B$. Esto es, $f(xy) = f(y)f(x)$ para todos $x, y \in A$ y $f(1) = 1$.

DEFINICIÓN 2.55. Si (C, Δ_C) y (D, Δ_D) son coálgebras decimos que un morfismo $g : C \to D$ es un *morfismo de anticoálgebra* si $\Delta_D \circ g = (g \otimes g) \circ \Delta_C^{cop}$ y $\epsilon_D \circ g = \epsilon_C$. En la notación sigma, podemos escribir $g(c)_{(1)} \otimes g(c)_{(2)} = g(c_(2)) \otimes g(c_(2))$ para expresar la primera condición.

TEOREMA 2.56. *Sea H álgebra de Hopf. Entonces la antípoda $\mathcal{S}$ es la inversa de la identidad* $\mathrm{id} : H \to H$ *con respecto al producto convolución en* $\mathrm{Hom}(H, H)$. *En particular, esta es única. Además, tenemos*

(a) *$\mathcal{S}$ es una morfismo de antiálgebra.*
(b) *$\mathcal{S}$ es un morfismo de anticoálgebra.*
(c) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   1. $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$*;*
   2. $x_{(2)}\mathcal{S}(x_{(1)}) = \epsilon(x)1$ *para todo* $x \in H$
   3. $\mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)} = \epsilon(x)1$ *para todo* $x \in H$.

   En particular, si H es conmutativa o coconmutativa entonces $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$.
(d) *Sean H, K álgebras de Hopf con $\mathcal{S}_H$ y $\mathcal{S}_K$ sus repectivas antípodas. Si $\phi : H \to K$ es un morfismo de biálgebras, entonces ϕ es un morfismo de álgebras de Hopf, esto es, $\phi\mathcal{S}_H = \mathcal{S}_K\phi$.*

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es consecuencia de la definición de antípoda y es inmediato.

Para probar (a), consideremos el álgebra $(\mathrm{Hom}(H \otimes H, H), *)$. Llamando $m : H \otimes H \to H$ a la multiplicación en H, tenemos que (afirmación)

$$\mathcal{S} \circ m = m^{-1} = m^{op} \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}).$$

donde m^{-1} es la inversa de m con respecto al producto convolución. En efecto, sean $x, y \in H$:

$$\begin{aligned} ((\mathcal{S} \circ m) * m)(x \otimes y) &= \mathcal{S} \circ m(x_{(1)} \otimes y_{(1)}) m(x_{(2)} \otimes y_{(2)}) \\ &= \mathcal{S}(x_{(1)} y_{(1)}) x_{(2)} y_{(2)} \\ &= \epsilon(x)\epsilon(y) 1_H \\ &= \epsilon(x \otimes y) 1_H. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} ((m^{op} \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})) * m)(x \otimes y) &= \mathcal{S}(y_{(1)}) \mathcal{S}(x_{(1)}) x_{(2)} y_{(2)} \\ &= \epsilon(x)\epsilon(y) 1_H \\ &= \epsilon(x \otimes y) 1_H. \end{aligned}$$

Luego, $(\mathcal{S} \circ m) * m = (m^{op} \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})) * m = \epsilon u$, y de modo similar se comprueba que $m * (\mathcal{S} \circ m) = m * (m^{op} \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})) = u\epsilon$.

Y dado que la inversa es única, tenemos la identidad deseada.

También tenemos que

$$\mathcal{S}(1) = \mathcal{S} * \mathrm{id}(1) = 1.$$

Para probar que $\mathcal{S}$ es un morfismo de antiálgebra ((b)) usamos la identidad $\Delta \circ \mathcal{S} = \Delta^{-1} = (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta^{cop}$ en $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$. Si $x \in H$, al aplicar ϵ a

$$\epsilon(x) 1 = \mathcal{S}(x_{(1)}) x_{(2)},$$

tenemos

$$\epsilon(x) = \epsilon(\mathcal{S}(x_{(1)}) \epsilon(x_{(2)})) = \epsilon \circ \mathcal{S}(x).$$

La prueba de (c) considera las siguientes implicaciones:

1. $\Rightarrow$ 2. Si $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$, para $x \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned} x_{(2)} \mathcal{S}(x_{(1)}) &= \mathcal{S}^2(x_{(1)}) \mathcal{S}(x_{(2)}) \\ &= \mathcal{S}(x_{(1)} \mathcal{S}(x_{(2)})) \\ &= \mathcal{S}(\epsilon(x) 1) \\ &= \epsilon(x) 1, \end{aligned}$$

pues $\mathcal{S}$ es un morfismo de antiálgebra.

2. $\Rightarrow$ 1. Mostremos que $\mathcal{S}^2 * \mathcal{S} = u\epsilon$ y luego, al multiplicar (a derecha) por id, obtenemos $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$. Sea $x \in H$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^2 * \mathcal{S}(x) &= \mathcal{S}^2(x_{(1)}) \mathcal{S}(x_{(2)}) \\ &= \mathcal{S}(x_{(2)} \mathcal{S}(x_{(1)})) \\ &= \mathcal{S}(\epsilon(x) 1) \\ &= \epsilon(x) 1. \end{aligned}$$

De este modo, 1. es equivalente a 2..

De modo similar, se tiene la prueba de 1. $\Rightarrow$ 3. y 3. $\Rightarrow$ 1. y, con esto, la prueba de (c).

Para la prueba de (d), se considera la siguiente identidad en $\mathrm{Hom}(H, K)$:

$$\phi\mathcal{S}_H = \phi^{-1} = \mathcal{S}_K\phi.$$

□

2.2.3. El dual de un álgebra de Hopf. Dada la coálgebra C, sabemos que el $\Bbbk$-comódulo dual $C^* = \mathrm{Hom}(C, \Bbbk)$ es un álgebra con el producto convolución. Denotando fg en lugar de $f*g$ al producto de convolución para $f, g \in C*$, tenemos que para todo $c \in C$:

$$\langle fg, c\rangle = \langle f, c_{(1)}\rangle\langle g, c_{(2)}\rangle, \qquad 1_{C^*} = \epsilon. \tag{2.2}$$

El morfismo $C^* \otimes C^* \to C^*$ que define a este estructura de álgebra proviene de restringir la traspuesta de $\Delta : C \to C \otimes C$ a $\mathbb{C}^* \otimes C^* \subseteq (C \otimes C)^*$, y la unidad $\Bbbk \to C^*$ es la traspuesta de la counidad $\epsilon : C \to \Bbbk$ con la misma restricción.

Sea A una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Al identificar $A^* \otimes A^*$ con $(A \otimes A)^*$ vía el isomorfismo natural, la traspuesta de la multiplicación, m, y la unidad, u, definen los morfismos

$$\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*, \qquad \epsilon : A^* \to \Bbbk.$$

El par (A^*, Δ) es una coálgebra con counidad ϵ.

Para $f \in A^*$ y $x, y \in A$:

$$\langle\Delta(f), x \otimes y\rangle = \langle f, xy\rangle, \qquad \epsilon(f) = \langle f, 1\rangle. \tag{2.3}$$

Esto es, $\Delta(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ indica $\langle f, xy\rangle = \langle f_{(1)}, x\rangle\langle f_{(2)}, y\rangle$.

Si (A, m, Δ) es una biálgebra de dimensión finita, con unidad u y counidad ϵ, entonces Δ y ϵ son morfismos de álgebras. Esto implica que sus traspuestas Δ^* y ϵ^* son morfismos de coálgebras, y (A^*, Δ^*, m^*) también resulta una biálgebra.

Proposición 2.57. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita con antípoda $\mathcal{S}$ y H^* la biálgebra dual. Entonces H^* es un álgebra de Hopf con antípoda $\mathcal{S}^*$. Como $\Bbbk$ es un cuerpo, el morfismo $H \to H^{**}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf.*

Haciendo abuso de notación, también denotaremos Δ, ϵ y $\mathcal{S}$ a la comultiplicación, la counidad y la antípoda en H^*.

Observación 2.58. Sea H un álgebra de dimensión finita. H es conmutativa si, y solo si, H^* es coconmutativa.

Observación 2.59. Los elementos grupezcos en H^* son los morfismos de álgebras $H \to \Bbbk$ y los elementos primitivos los morfismos lineales $D : H \to \Bbbk$ tales que $D(ab) = \epsilon(a)D(b) + D(a)\epsilon(b)$ con $a, b \in H$.

Ejemplo 2.60. (1) Sea G un grupo, y consideremos el álgebra de grupo $\Bbbk G$. Entonces el álgebra de Hopf dual $\Bbbk G^*$ se identifica con el álgebra de fuciones sobre G, $\Bbbk^G$. Si G es finito, hay un isomorfismo de álgebras de Hopf $\Bbbk G \simeq \Bbbk^{G^*}$ dada por la evaluación $g \mapsto E_g$, donde $E_g(h) = h(g)$, para $g \in G$, $h \in \Bbbk^G$.

(2) Sea H el álgebra de Taft sobre $\Bbbk$. Entonces H es isomorfo a H^*.

Sea $G \in H^*$ el morfismo de álgebra dado por

$$G(g) = \xi^{-1}, \qquad G(x) = 0,$$

y sea X el morfismo $\Bbbk$-lineal $X : H \to \Bbbk$ tal que

$$X(g^i x) = 1, \quad 0 \leq i \leq N-1,$$
$$X(g^i x^j) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq N-1, j \neq 1.$$

Luego, el morfismo $g \to G$, $x \to X$, da un isomorfismo de álgebras de Hopf $H \to H^*$.

2.3. Módulos de Hopf e integrales

En esta sección, además de introducir otras estructuras, presentamos algunos resultados de gran relevancia de la teoría de álgebras de Hopf que se encuentran en [**LS**].

Definición 2.61. Sea H un álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$. Un $\Bbbk$-módulo V es llamado un *módulo de Hopf* (a derecha) para H si satisface las siguientes condiciones:

1. V es un H-módulo a derecha.
2. V es un H-comódulo a derecha, vía $\rho_V : V \to V \otimes H$.
3. *Condición de compatibilidad*: $\rho_V(v \cdot x) = v_{(0)} \cdot x_{(1)} \otimes v_{(1)} x_{(2)}$, para todos $x \in H, v \in V$.

Definición 2.62. Si V, W son módulos de Hopf, un morfismo $\Bbbk$-lineal $f : V \to W$ es llamado un *morfismo de módulos de Hopf* si es a su vez morfismo de módulos y de comódulos.

Observación 2.63. Si $\rho_V : V \to V \otimes H$ es el morfismo de estructura de comódulo sobre V, entonces la condición 3) dice que ρ_V es un morfismo de H-módulos a derecha, con la acción a derecha de H sobre $H \otimes V$ dada por $\Delta : (v \otimes g) \cdot h = v \cdot h_{(1)} \otimes gh_{(2)}$.

Ejemplo 2.64. Sea H un álgebra de Hopf. $V = H$ es un H-módulo de Hopf con $\rho_V = \Delta$.

Definición 2.65. Sea V es un módulo de Hopf a derecha, llamamos *submódulo invariante* de V a

$$V^H = \{v \in V | v \cdot h = \epsilon(h)v, \text{ para todo } h \in H\}.$$

Definición 2.66. Sea V es un módulo de Hopf a derecha, llamamos *submódulo coinvariante* de V a

$$V^{coH} = \{v \in V | \Delta_V(v) = v \otimes 1\}.$$

Dado un $\Bbbk$-módulo W, el producto tensorial $W \otimes H$ es un H-módulo de Hopf con

$$(w \otimes h) \cdot g = w \otimes gh, \quad \Delta_{W \otimes H}(w \otimes h) = w \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

para todos $w \in W, h, g \in H$. Este módulo de Hopf es llamado *trivial*.

Para una álgebra asociativa A, el producto tensorial $V \otimes W$ de dos A-módulos V y W es un espacio vectorial que no necesariamente es un A-módulo nuevamente.

Algo distinto sucede con las álgebras de Hopf: el producto tensorial de dos módulos de Hopf sobre la misma álgebra es nuevamente un módulo de Hopf. Podemos establecer que la acción de una álgebra de Hopf H sobre el producto tensorial de H-módulos extiende la acción diagonal (para grupos).

Definición 2.67. Sean H una álgebra de Hopf y V, W dos H-módulos a izquierda. Entonces $V \otimes W$ es también un H-módulo a izquierda, vía

$$h \cdot (v \otimes w) = \sum (h_{(1)} \cdot v) \otimes (h_{(2)} \cdot w), \tag{2.4}$$

para todos $h \in H, V \in V, w \in W$.

De modo similar, el producto tensorial de dos H-módulos a derecha es nuevamente un H-módulo a derecha.

Observación 2.68. La ecuación (2.4) es equivalente a la de la Observación 2.32, codificada en la notación sigma.

Observación 2.69. Podemos escribir la Definición 2.67 en término de morfismos: si $\phi_V : H \otimes V \to V$ y $\phi_W : H \otimes W \to W$ son las acciones, entonces

$$\phi_{V\otimes W} = (\phi_V \otimes \phi_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}^2) : H \otimes (V \otimes W) \to V \otimes W.$$

Dualizando esto último, obtenemos la siguiente definición:

Definición 2.70. Sea H una álgebra de Hopf, y V, W H-comódulos a derecha con morfismos de estructura ρ_V y ρ_W respectivamente. Entonces $V \otimes W$ es nuevamente un H-comódulo a derecha vía

$$\rho_{V\otimes W} = (\mathrm{id} \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\rho_V \otimes \rho_W) : V \otimes W \to (V \otimes W) \otimes H,$$

donde $\rho(v \otimes w) = \sum v_{(0)} \otimes w_{(0)} \otimes v_{(1)} w_{(1)}$.

A continuación enunciamos resultados sobre módulos de Hopf.

Teorema 2.71 (Teorema fundamental de módulos de Hopf (Larson-Sweedler, 1969)). *Sea V un H-módulo de Hopf a derecha. Entonces la multiplicación*

$$\rho : V^{coH} \otimes H \to V, \qquad v \otimes h \mapsto v \cdot h,$$

es un isomorfismo de módulos de Hopf (donde $V^{coH} \otimes H \to V$ tiene la estructura de módulo (de Hopf) trivial).

Definición 2.72. Sea H un álgebra de Hopf. El $\Bbbk$-espacio lineal definido a continuación es la *integral a derecha* en H

$$\mathcal{I}_r(H) = \{h \in H | hx = \epsilon(x)h, \text{para todos } x \in H\},$$

e *integral a izquierda*

$$\mathcal{I}_l(H) = \{h \in H | xh = \epsilon(x)h, \text{para todos } x \in H\}.$$

Si $\mathcal{I}_r(H) = \mathcal{I}_l(H)$, H es llamado *unimodular*.

Ejemplo 2.73. Dos ejemplos son:

(1) Sea G un grupo finito y $\Bbbk G$ el álgebra de grupo. Entonces $\Bbbk G$ unimodular, y la integral es $\mathcal{I}_r(\Bbbk G) = \mathcal{I}_l(\Bbbk G) = \Bbbk\left(\sum_{g\in G} g\right)$.

(2) Sea H el álgebra de Taft de dimensión N^2 sobre $\Bbbk$. Las integrales a izquierda y derecha son

$$\mathcal{I}_l(H) = \Bbbk(\sum_{j=0}^{N-1} g^j x^{N-1}), \qquad \mathcal{I}_r(H) = \Bbbk(\sum_{j=0}^{N-1} \xi^j g^j x^{N-1}).$$

Otros resultados concernientes a módulos de Hopf e integrales son los siguientes.

Teorema 2.74 (Larson-Sweedler, 1969). *Sea H un álgebra de dimensión finita. Entonces H^* un módulo de Hopf a derecha con acción $\leftharpoonup$ y coacción ρ.*

Teorema 2.75 (Larson-Sweedler, 1969). *Sea H un álgebra de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Entonces*

1. $\dim \mathcal{I}_l(H) = \dim \mathcal{I}_r(H)$*=1.*
2. *La antípoda mS es biyectiva, y $\mathcal{S}(\mathcal{I}_l) = \mathcal{I}_r$.*
3. *Para $0 \neq \lambda \in \mathcal{I}_l(H^*)$, el morfismo $H \to H^*$ dado por $h \mapsto h \rightharpoonup \lambda$, es un isomorfismo lineal a izquierda.*

2.3.1. Álgebra de Frobenius.

Definición 2.76. Sea A es un álgebra sobre $\Bbbk$. La *representación regular a izquierda* de A está determinada por la estructura de módulo en A dada por la multiplicación a izquierda La denotamos por ${}_AA$. De modo análogo, se define A_A, la *representación regular a derecha* de A.

Si M es un A-módulo a derecha, entonces M^* es un A-módulo a izquierda por

$$\langle a \cdot \phi, m\rangle = \langle \phi, m \cdot a\rangle, \quad a \in A, \phi \in M^*, m \in M.$$

En particular se cumple tomando M al módulo de la definición anterior.

Definición 2.77. Sea A un álgebra con dimensión $\dim A = n < \infty$, $\phi \in A^*$ y $r_i, l_i \in A, 1 \leq i \leq n$. Entonces ϕ es llamado *homomorfismo de Frobenius* con base duales (r_i, l_i) si alguna de las siguientes condiciones se cumplen (de manera equivalente):

(i) Para todo $x \in A, x = \sum_i r_i\langle \phi, l_i x\rangle$.
(ii) Para todo $x \in A, x = \sum_i \langle \phi, r_i x\rangle l_i$.

Proposición 2.78. *Sea A un álgebra de dimensión finita, y sea $f \in A^*$. Entonces son equivalentes:*

(i) *El morfismo ${}_AA \to A^*_A$ dado por $x \mapsto xf$ es un isomorfismo de A-módulos a izquierda.*
(ii) *Existen $r_i, l_i \in A, 1 \leq i \leq n, n = \dim A$ tales que f es un homomorfismo de Frobenius con bases duales (r_i, l_i).*
(iii) *El morfismo $A_A \to_A A^*$ dado por $x \mapsto fx$ es un isomorfismo de A-módulos a derecha.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea (l_i) una base para A sobre $\Bbbk$, y (f_i) su base dual. De (i), existen $()r_i \in A$ tal que $f_i = r_i f$. Entonces para todo $x \in A$

$$x = \sum_i \langle f_i, x\rangle l_i = \sum_i \langle r_i f, x\rangle l_i = \sum_i \langle f, x r_i\rangle l_i.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos $fx = 0$ para algún $x \in A$. Entonces, $\langle fx, y\rangle = \langle f, xy\rangle = 0$, para todo $y \in A$. Así,

$$x = \sum_i \langle f, x r_i\rangle l_i = 0.$$

De este modo, el morfismo $x \mapsto fx$ es inyectivo. Como $\dim A < \infty$, es biyectivo.

De modo análogo se muestra $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. □

Definición 2.79. Sea A $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Si A satisface cualquiera de las condiciones de la proposición anterior, A será llamada un *álgebra de Frobenius*

Observación 2.80. Por el Teorema 2.75, si H es álgebra de Hopf de dimensión finita entonces es un álgebra de Frobenius.

Además, si $0 \neq \lambda$ es una integral en H^*, los morfismos ${}_H H \to H^*_H$ dado por $h \mapsto h\lambda$, y $H_H \to_H H^*$ definido por $h \mapsto \lambda h$, son isomorfismos de H-módulos (a izquierda y derecha, respectivamente).

Si elegimos $\Lambda \in H$ tal que $\lambda\Lambda = \epsilon$, Λ es necesariamente una integral a derecha en H:

Sea I una integral a derecha en H. Entonces $\lambda I = \langle \lambda, I\rangle \epsilon$. Por la inyectividad de $h \mapsto \lambda h$, $\langle \lambda, I\rangle \neq 0$ si $I \neq 0$. De modo que podemos elegir I tal que $< \lambda, I >= 1$, y $\lambda I = \epsilon$. Usando nuevamente la inyectividad de $h \mapsto \lambda h$, $\Lambda = I$ es una integral en H y la condición $\Lambda\lambda = \epsilon$ equivale a $\langle \lambda, \Lambda\rangle = 1$.

2.4. Álgebras de Hopf de dimensión finita

Sea H un álgebra de Hopf sobre el cuerpo $\Bbbk$. Las siguientes conjeturas son debidas a Kaplansky (1975):

1. Si R es una subálgebra de Hopf de H, entonces H es un R-módulo libre. Esto es cierto siempre que H sea de dimensión finita.
2. Si $\dim H < \infty$ y H es semisimple entonces el cuadrado de la antípoda es la identidad. Esto es conocido sobre cuerpos de característica cero.
3. Si $\dim H = p$, p primo, entonces H es conmutativo y coconmutativo. También es conocido sobre cuerpos de característica cero.

Teorema 2.81. *Sean $0 \neq \lambda \in H^*$ una integral a izquierda, y $\Lambda \in H$ tal que $\lambda\Lambda = \epsilon$. Entonces λ es un homomorfismo de Frobenius con base dual $(\mathcal{S}(\Lambda_{(1)}), \Lambda_{(2)})$.*

Demostración. Sea $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\Lambda_{(1)})\langle \lambda, \Lambda_{(2)}x\rangle &= \mathcal{S}(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}x_{(1)}\langle \lambda, \Lambda_{(3)}x_{(2)}\rangle \\
&= x_{(1)}\langle \lambda, \Lambda x_{(2)}\rangle \\
&= x\langle \lambda, \Lambda\rangle \\
&= x.
\end{aligned}$$

□

De un modo similar se pueden obtener resultados para $\gamma \in H^*$, integral no nula a derecha, con $\Gamma \in H$ integral a izquierda tal que $\Gamma\gamma = \epsilon$.

DEFINICIÓN 2.82. Un $\Bbbk$-álgebra A es llamado *separable* si existe $r_i, l_i \in A, 1 \leq i \leq n = \dim A$, tal que

1. $\sum_i r_i l_i = 1$.
2. Para todo $x \in A$, $\sum_i x r_i \otimes l_i = \sum_i r_i \otimes l_i x$ en $A \otimes A$.

Decimos que un álgebra de Hopf es semisimple si es semisimple como álgebra, esto es, si cada H-módulo a izquierda de dimensión finita es completamente reducible.

EJEMPLO 2.83. Sea $\Bbbk G$ álgebra de grupo, con G finito. El Teorema 1.64 (Maschke) afirma que $\Bbbk G$ es semisimple si, y solo si, la característica de $\Bbbk$ no divide al orden $|G|$ de G. Sabemos que

$$|G| = \sum_{g \in G} \langle \epsilon, g \rangle = \langle \epsilon, \sum_{g \in G} g \rangle.$$

Como $\sum_{g \in G} g$ genera el espacio uno-dimensinal de integrales a izquierda en $\Bbbk G$, el Teorema de Maschke equivale a afirmar que "$\Bbbk G$ es semisimple si, y solo si, $\langle \epsilon, \mathcal{I}_l(\Bbbk G) \rangle \neq 0$".

Terminamos este capítulo presentando una generalización en el siguiente resultado.

TEOREMA 2.84 (Teorema de Maschke para álgebras de Hopf). *Sea H un álgebra de dimensión finita. Entonces son equivalentes:*

(*i*) *H es semisimple.*
(*ii*) *H es separable.*
(*iii*) *$\langle \epsilon, \mathcal{I}_l(\Bbbk G) \rangle \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{S}(\mathcal{I}_l(H)) = \mathcal{I}_r(H)$ y $\epsilon\mathcal{S} = \epsilon$ entonces $\langle \epsilon, \mathcal{I}_l(H) \rangle = 0$ si, y solo si, $\langle \epsilon, \mathcal{I}_r(H) \rangle = 0$.

1. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Tomemos $(r_i, p_i) = (\mathcal{S}(\Lambda_{(1)}), \Lambda_{(2)})$. Tenemos que
$$\sum_i r_i p_i = \mathcal{S}(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)} = \langle \epsilon, \Lambda \rangle 1,$$
y, por hipótesis, $t = \langle \epsilon, \Lambda \rangle \neq 0$. Luego por Teorema 2.81, y cambiando p_i por $l_i = t^{-1} p_i$ tenemos que (r_i, l_i) convierte a H en álgebra separable.
2. $(i) \Rightarrow (i)$ Sea Y un H-módulo de dimensión finita y X un submódulo de Y.

   Sea $\pi : Y \to X$ una proyección lineal, y definamos $\hat{\pi} : Y \to Y$ tal que $\hat{\pi}(y) = \sum_i r_i \cdot \pi(l_i \cdot y)$. $\hat{\pi}$ es una proyección H-lineal. Como X es un H-submódulo, $\hat{\pi}(Y) \subseteq X$. Por hipótesis, $\sum_i h r_i \otimes l_i = \sum_i r_i \otimes l_i h$ en $H \otimes H$, para todo $h \in H$. esto implica que
$$\sum_i h r_i \cdot \pi(l_i \cdot y) = \sum_i r_i \pi(l_i h \cdot y),$$

para todos $h \in H, y \in Y$. De este modo,

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(h \cdot y) &= \sum_i r_i \cdot \pi(l_i h \cdot y)\\ &= \sum_i h r_i \cdot \pi(l_i \cdot y)\\ &= h \cdot \hat{\pi}(y),\end{aligned}$$

para todos $h \in H, y \in Y$. Y $\hat{\pi}$ resulta lineal.

Y, finalmente,

$$\begin{aligned}\hat{\pi} &= \sum_i r_i \pi(l_i \cdot x)\\ &= \sum_i r_i l_i \cdot x\\ &= (\sum_i r_i l_i) \cdot x\\ &= 1 \cdot x\\ &= x,\end{aligned}$$

para todo $x \in X$, con lo que probamos la afirmación de que es una proyección H-lineal.

3. $(i) \Rightarrow (iii)$ Como H es semisimple, tenemos que cualquier secuencia exacta corta de H-módulos a izquierda

$$0 \to U \xrightarrow{\mu} V \xrightarrow{\pi} W \to 0,$$

divide. Esto es, hay un morfismo H-lineal $\nu : W \to V$ tal que $\pi(\nu) = \mathrm{id}_W$.

Aplicando esto a la secuencia exacta

$$0 \to \ker \epsilon \to H \xrightarrow{\epsilon} \Bbbk \to 0,$$

obtenemos que, en particular, $\langle \epsilon, \nu(1) \rangle = 1$.

Ahora, si $h \in H$, y como ν es H-lineal

$$h\nu(1) = \nu(\langle \epsilon, h \rangle) = \langle \epsilon, h \rangle \nu(1).$$

Esto muestra que $\nu(1)$ es una integral a izquierda en H. De este modo, $\langle \epsilon, \mathcal{I}_l(H) \rangle \neq 0$. Luego, $\langle \epsilon, \mathcal{I}_r(H) \rangle \neq 0$, y como Λ es una integral no nula a derecha, $\dim(\mathcal{I}_r(H)) = 1$, con lo que $\langle \epsilon, \Lambda \rangle \neq 0$.

□

Corolario 2.85. *Bajo las mismas condiciones para H^*, H^* resulta semisimple si, y solo si, $\langle \lambda, 1 \rangle \neq 0$, para alguna integral $\lambda \in H^*$.*

Capítulo 3

Representaciones de álgebras de Hopf punteadas: $\Bbbk\mathbb{S}_3$ y $\Bbbk\mathbb{S}_4$

En este capítulo, primeramente exponemos resultados ya presentados en [**GI**] para módulos simples sobre $\mathbb{S}_3$ detallando técnicas utilizadas para completar la lista de los módulos simples sobre las álgebras de Hopf $\mathcal{A}_\lambda$, que son punteadas sobre $\mathbb{S}_3$ y de dimensión finita. Estos módulos están soportados $\mathbb{S}_3$-módulos simples.

Usando algunas de esas ideas estudiamos estructuras de módulos para álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_4$, donde brindamos una colección de módulos simples para una familia de las álgebras mencionadas.

Para esto, nos hemos servido de conceptos y resultados presentados en los capítulos anteriores.

A los efectos de este capítulo, podemos dividir las álgebras de Hopf puntedas sobre un grupo G en

1. el álgebra (semisimple) de grupo $\Bbbk G$;
2. las álgebras graduadas $\mathfrak{B}\#\Bbbk G$, donde $\mathfrak{B}$ es un *álgebra de Nichols sobre* G;
3. deformaciones de las álgebras del item anterior.

El caso semisimple está bien estudiado y, en particular, hemos recordado las representaciones de los grupos $G = \mathbb{S}_3$ y $G = \mathbb{S}_4$ en un capítulo previo. Los módulos simples sobre las álgebras $\mathfrak{B}\#\Bbbk G$ también pueden describirse a partir de los del grupo G, como indicaremos a continuación.

Finalmente, son los módulos sobre las deformaciones de estas álgebras los que suscitan más interés y no son inmediatos de obtener.

Sea G un grupo y $\mathcal{H}$ un álgebra de Hopf punteada sobre G; en particular, $\Bbbk G \subset \mathcal{H}$ es una subálgebra de Hopf de $\mathcal{H}$.

Sea M una representación de G. Vamos a decir que un $\mathcal{H}$-módulo está *soportado* en el módulo M si

1. El espacio vectorial M tiene una estructura de $\mathcal{H}$-módulo.
2. La restricción de esta acción a la subálgebra $\Bbbk G \subset \mathcal{H}$ (o, análogamente, al grupo G) coincide con la representación original de G en M.

Brevemente, indicamos que un álgebra de Nichols $\mathfrak{B}$ [**AS2**] *sobre* un grupo finito G es cierta álgebra graduada

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_n \mathfrak{B}^n, \qquad \mathfrak{B}^n\mathfrak{B}^m \subset \mathfrak{B}^{n+m},$$

de manera que $\mathfrak{B}$ es un módulo Yetter-Drinfield sobre el álgebra de Hopf $\Bbbk G$. Esto es, $\mathfrak{B}$ es un $\Bbbk G$-módulo con una G-graduación

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{B}_{(g)}, \qquad \text{tal que } g \cdot \mathfrak{B}_{(g')} \subset \mathfrak{B}_{(gg'g^{-1})}.$$

Notar que esto define (y es equivalente a) una coacción

$$\delta : \mathfrak{B} \to \Bbbk G \otimes \mathfrak{B}, \qquad x \mapsto g \otimes x, \text{ si } x \in \mathfrak{B}_{(g)}.$$

Dada una tal $\mathfrak{B}$, se puede definir un álgebra de Hopf $\mathcal{A}$ vía el *biproducto de Radford* (también llamado *producto smash* o *bosonización*)

$$\mathcal{A} = \mathfrak{B} \# \mathbb{C}G.$$

Esta nueva álgebra también es graduada; con $\mathcal{A}^n = \mathfrak{B}^n \# \mathbb{C}G$.

El producto mencionado anteriormente está dado del siguiente modo:

Definición 3.1. Si R es un módulo Yetter-Drinfield sobre $\mathcal{H}$ se define el biproducto de Radford o bosonización $R\#\mathcal{H}$ como la siguiente álgebra de Hopf: $R\#\mathcal{H} = R \otimes \mathcal{H}$ como espacio vectorial, mientras que el producto y el coproducto están dados, respectivamente, por

$$(r\#h)(r'\#h') = r(h_1 \cdot r')\#h_2 h',$$
$$\Delta(r\#h) = (r^1 \# {r^2}_{(-1)} h_1) \otimes ({r^2}_{(0)} \# h_2),$$

para $r, r' \in R$, $h, h \in \mathcal{H}$ y donde $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ es el coproducto de $\mathcal{H}$, $\Delta_R(r) = r^1 \otimes r^2$ es el coproducto (trenzado) de R, $\delta(r) = r_{(-1)} \otimes r_{(0)}$ es la coacción del módulo de Yetter-Drinfeld R y $\cdot$ denota la acción.

Para los grupos simétricos $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ estas álgebras (y sus deformaciones) están clasificadas. A continuación incluimos un breve resumen.

1. Si $G = \mathbb{S}_3$:
- Existe una única álgebra de Nichols $\mathfrak{B}$ de dimensión finita; llamamos $\mathcal{A}_0 = \mathfrak{B}\#\mathbb{C}\mathbb{S}_3$ a la correspondiente álgebra de Hopf; [**AHS**].
- Hay, salvo isomorfismo, una única deformación $\mathcal{H} = \mathcal{A}_1$

Para el caso $\mathcal{A}_0$ (o sobre cualquier bosonización $\mathfrak{B}\#\Bbbk G$), sus módulos simples están en correspondencia biyectiva con los módulos simples sobre $\mathbb{S}_3$ (sobre G) [**GI**, Proposición 4.1].

Los módulos sobre $\mathcal{H}$ están clasificados en [**GI**, Teorema 5.8] y son: S_ϵ, S_{sgn}, $S_{\mathrm{st}}(\pm i)$ y $S_{\mathrm{st}}(\pm \frac{i}{3})$.
- S_ϵ y S_{sgn} son simples [**GI**, Proposición 3.12].
- $S_{\mathrm{st}}(\pm i)$ y $S_{\mathrm{st}}(\pm \frac{i}{3})$ son simples. [**GI**, Lema 5.6, Proposición 5.7].

2. Si $G = \mathbb{S}_4$:
- Existen exactamente tres álgebras de Nichols $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ y$\mathfrak{B}_3$, no isomorfas entre sí, de dimensión finita tal que $\mathfrak{B}_1\#\mathbb{C}\mathbb{S}_4 = \mathcal{A}_0$, $\mathfrak{B}_2\#\mathbb{C}\mathbb{S}_4 = \mathcal{A}_0$, $\mathfrak{B}_3\#\mathbb{C}\mathbb{S}_4 = \mathcal{A}_0$. [**AHS**, Teorema 4.7]
- Asociado a cada $\mathfrak{B}_i$ existen infinitas deformaciones no isomorfas. Una de estas álgebras, digamos $\mathfrak{B}_1$, satisface
  (a) $\mathcal{A}_0 \subset \mathfrak{B}_1\#\mathbb{C}\mathbb{S}_4$.

(b) $\mathcal{A}_1$ es una subálgebra de una deformación adecuada $\mathcal{H}_1$ de $\mathfrak{B}_1\#\mathbb{C}\mathbb{S}_4$.

A su vez, tenemos las siguientes proyecciones, ver Proposición 1.92, de álgebras:

(a') $\mathfrak{B}_1\#\mathbb{S}_4 \twoheadrightarrow \mathcal{A}_0$.

(b') $\mathcal{H}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{A}_1$.

Sea L una deformación $\mathfrak{B}_1\#\mathbb{C}\mathbb{S}_4$. Algunas preguntas que podemos hacernos son las siguientes:

- ¿Cómo son los módulos sobre L?
- ¿Cuáles de ellos son simples?
- ¿Cuáles indescomponibles?
- ¿Qué sucede con el producto tensorial $\otimes$ entre L-módulos?

Para responder a estas cuestiones contamos con las siguientes estrategias:

[**E1**] Analizar qué sucede al inducir módulos. Si S es un $\mathcal{A}_1$-módulo simple, averiguar qué sucede con $M = L \otimes_{\mathcal{A}_1} S = \operatorname{Ind}_{\mathcal{A}_1}^{L} S$.

[**E2**] Extender la estructura de un $\mathcal{A}_1$-módulo a un $\mathcal{H}_1$-módulo vía la proyección $\mathcal{H}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{A}_1$.

[**E3**] Intentar dar estructura de L-módulo a los $\mathbb{S}_4$-módulos simples, tal como lo realizado en [**GI**] para el caso de $\mathbb{S}_3$.

En esta primera etapa nos concentraremos en hallar familias de módulos simples.

Nos concentraremos, en este trabajo, en los métodos [**E2**] y [**E3**], a fin de hallar ejemplos de módulos simples sobre estas álgebras.

A continuación, desarrollamos los resultados mencionados en la introducción del capítulo.

3.1. Resultados para $\Bbbk\mathbb{S}_3$

Si consideramos el álgebra de grupo $\Bbbk\mathbb{S}_3$, el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}$ viene dada por [**GI**, Sección 5]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = \mathbb{C}\langle x_0, x_1, x_2\rangle/\langle x_0^2; x_1^2; x_2^2;& \\ & x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0; \\ & x_1x_0 + x_0x_2 + x_2x_1\rangle\end{aligned}$$

tal que $\mathcal{A}_0 = \mathfrak{B}\#\mathbb{C}\mathbb{S}_3$ está presentada por generadores

$$x_0, x_1, x_2$$

y relaciones

$$\begin{aligned}& x_0^2 = x_1^2 = x_2^2 = 0; \\ & x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0; \\ & x_1x_0 + x_0x_2 + x_2x_1 = 0; \\ & \sigma \cdot x_i = \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma\cdot i} \cdot \sigma.\end{aligned}$$

donde la última relación, de manera exhaustiva, es

$$\begin{aligned} (12)\cdot x_0 &= -x_0\cdot(12); & (23)\cdot x_0 &= -x_1\cdot(23);\\ (12)\cdot x_1 &= -x_2\cdot(12); & (23)\cdot x_1 &= -x_0\cdot(23);\\ (12)\cdot x_2 &= -x_1\cdot(12); & (23)\cdot x_2 &= -x_2\cdot(23). \end{aligned}$$

En el último desarrollo solo hemos considerado las acciones de (12) y (23) dado que esas trasposiciones generan a todo $\mathbb{S}_3$.

Las deformaciones $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \neq 0$, están dadas por

$$\begin{aligned} &x_0, x_1, x_2; && \sigma \in X := \{\text{trasposiciones en } \mathbb{S}_3\}\\ &x_0^2 = x_1^2 = x_2^2 = 0;\\ &x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = \lambda(1-(132));\\ &x_1x_0 + x_0x_2 + x_2x_1 = \lambda(1-(123));\\ &\sigma x_i = \operatorname{sgn}(\sigma)x_{\sigma\cdot i}\sigma. \end{aligned}$$

Observación 3.2. Notar que definiendo $y_i := \frac{x_i}{\sqrt{\lambda}}$ para cada $i = 0, 1, 2$, solo basta considerar $\mathcal{A}_1$, ya que esto define un isomorfismo $\mathcal{A}_\lambda \simeq \mathcal{A}_1$.

Recordemos que todos los módulos simples sobre $\Bbbk\mathbb{S}_3$ fueron definidos en la Sección 1.7.1. Estos son M_ϵ, M_{sgn} y M_{st}. Luego, por [**GI**, Proposición 4.1], éstos son los módulos simples sobre $\mathcal{A}_0$, en los que los generadores x_i actúan por cero. Los módulos simples sobre $\mathcal{A}_0$ son exactamente tres, y son las extensiones de los módulos simples sobre $\Bbbk\mathbb{S}_3$.

Ahora, para hallar un módulo simple para $\mathcal{A}_1$, soportado en M_{st}, consideremos el problema de encontrar una matriz $A := [a_{12}] \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ que represente la acción del elemento a_{12}, es decir tal que

- $A^2 = 0$
- $[(12)]A = -A[(12)]$
- $AB + CA + BC = \mathrm{Id} - [(23)][(12)]$

donde $[\sigma]$ representa la matriz de la acción de cada elemento $\sigma \in \mathbb{S}_3$,

$$B := -[(23)]A[(23)], \qquad C := -[(13)]A[(13)].$$

Dado que debe ser $A^2 = 0$ entonces podemos considerar

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{C}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\ \Rightarrow \begin{pmatrix} ka & kb \\ a & b \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} b & a \\ kb & ka \end{pmatrix}\\ \Rightarrow k &= \pm 1. \end{aligned}$$

Así

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Tomando $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$:

- $A^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -ab = b^2$
-

$$\begin{aligned} AB + CA + BC &= \begin{pmatrix} 7a^2 + 2b^2 - 6ab & 2a^2 + b^2 \\ -5a^2 + 2b^2 & -4a^2 + b^2 + 3ab \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De las condiciones anteriores podemos determinar que $a = b = \pm i$ o $a = b = \pm\frac{i}{3}$.

Para el caso $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ no hay solución.

Finalmente, tenemos como resultado que las matrices que satisfacen tales condiciones son

$$[a_{12}] = \begin{pmatrix} t & t \\ -t & -t \end{pmatrix}, \quad t = \pm i; \qquad [a_{12}] = \begin{pmatrix} t & -t \\ t & -t \end{pmatrix}, \quad t = \pm\frac{i}{3}.$$

PROPOSICIÓN 3.3. [**GI**, Lema 5.6]
Sea $M_{st} = \Bbbk\{v, w\}$. Entonces, las siguientes fórmulas definen cuatro $\mathcal{A}_1$-módulos no isomorfos soportados sobre M_{st}:

$$\begin{aligned} a_{12}v &= i(v - w), & a_{12}w &= i(v - w); \\ a_{12}v &= -i(v - w), & a_{12}w &= -i(v - w); \\ a_{12}v &= \frac{i}{3}(v + w), & a_{12}w &= -\frac{i}{3}(v + w); \\ a_{12}v &= -\frac{i}{3}(v + w), & a_{12}w &= \frac{i}{3}(v + w). \end{aligned}$$

Son simples y los denotamos por $S_{\mathrm{st}}(i), S_{\mathrm{st}}(-i), S_{\mathrm{st}}(\frac{i}{3})$ y $S_{\mathrm{st}}(-\frac{i}{3})$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. La prueba de este resultado está basada en el cálculo que hemos desarrollado previo al enunciado, a la par del hecho de que partimos de un módulo simple sobre $\mathbb{S}_3$. □

OBSERVACIÓN 3.4. Una lista completa de los módulos simples sobre $\mathcal{A}_1$ puede observarse en [**GI**, Teorema 5.8]:

TEOREMA 3.5. *Sea M un $\mathcal{A}_1$-módulo simple. Entonces M es isomorfo a uno, y solamente uno, de los siguientes*

1. *S_ϵ;*
2. *S_{sgn};*
3. *$S_{\mathrm{st}}(i), S_{\mathrm{st}}(-i), S_{\mathrm{st}}(\frac{i}{3})$ o $S_{\mathrm{st}}(-\frac{i}{3})$.*

3.2. Resultados para $\Bbbk\mathbb{S}_4$

3.2.0.1. Álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_4$. Previamente presentamos las relaciones que definen a $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda = 0, 1$. Las recordamos, con una notación que nos permite generalizarlas.

Definimos los siguientes elementos:

$$x_{(12)} := x_0;$$
$$x_{(13)} := x_1;$$
$$x_{(23)} := x_2.$$

Entonces las relaciones son

$$r_1 := x_\sigma^2 = 0, \qquad \sigma \in X := \{\text{trasposiciones en } \mathbb{S}_4\};$$
$$r_2 := x_\sigma x_\tau + x_\tau x_{\sigma\tau\sigma} + x_{\sigma\tau\sigma} x_\sigma = \lambda(1 - [\sigma][\tau]), \quad \text{si } \sigma\tau \neq \tau\sigma, \sigma \neq \tau \in X;$$
$$r_3 := g x_\sigma = \operatorname{sgn}(g) x_{g\sigma g^{-1}} g, \qquad \sigma \in X, g \in \mathbb{S}_4.$$

Así, más generalmente, $G = \mathbb{S}_n$ y $X = X_n = \{\text{trasposiciones en } \mathbb{S}_n\}$, podemos considerar el álgebra generada por variables x_σ, $\sigma \in X$ y $g \in G$, con las relaciones r_1, r_2, r_3 antes expuestas junto a

$$r_4 := x_\sigma x_\tau + x_\tau x_\sigma = \mu(1 - [\sigma][\tau])), \qquad \sigma\tau = \tau\sigma, \sigma \neq \tau \in X.$$

Más aún, éstas álgebras son ejemplos de álgebras de Hopf de dimensión finita punteadas sobre $\mathbb{S}_4$, [**GG**]. Fijamos entonces:

$$L_{\lambda,\mu} = \mathbb{C}\langle x_\sigma, g \in \mathbb{S}_4, \sigma \in X\rangle / \langle r_j, j = 1, 2, 3, 4\rangle$$

Para indagar acerca de los módulos sobre $L_{\lambda,\mu}$ vamos a hacer uso de las estrategias **E2** y **E3** planteadas al inicio.

LEMA 3.6. *$\mathcal{A}_\lambda$ es una subálgebra de Hopf de $L_{\lambda,\mu}$, para cada λ, μ.*

DEMOSTRACIÓN. Es isomorfo a la subálgebra generada por $a_{(12)}$, $[(12)]$ y $[(23)]$. □

3.2.0.2. El método de la proyección. Recordemos de la Proposición 1.92 que existe una proyección de grupos $\pi\colon \mathbb{S}_4 \twoheadrightarrow \mathbb{S}_3$, dada por

$$(12) \mapsto (12), \qquad (23) \mapsto (23), \qquad (34) \mapsto (12).$$

Esta proyección se extiende al presente contexto.

LEMA 3.7. *Existe una proyección de álgebras de Hopf $\Pi\colon L_{\lambda,\mu} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\lambda$, para cada λ, μ, que extiende la proyección de grupos $\pi\colon \mathbb{S}_4 \twoheadrightarrow \mathbb{S}_3$. Explícitamente,*

$$x_\sigma \mapsto x_{\pi(\sigma)}.$$

En particular, $\Pi(x_{(12)}) = \Pi(x_{(34)}) = x_{(12)}$.

DEMOSTRACIÓN. Chequeamos que Π respeta las relaciones $r_1, \dots, r_4$ que definen a $L_{\lambda,\mu}$. Por ejemplo, notemos que

$$\Pi(x_{(12)}x_{(34)} + x_{(34)}x_{(12)}) = x_{(12)}^2 + x_{(12)}^2 = 0, \text{ y}$$
$$\Pi(1 - (12)(34)) = 1 - [(12)]^2 = 0.$$

Así, $\Pi(r_4) = 0$. Análogamente, se sigue que $\Pi(r_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. □

Así, si consideramos la proyección $\Pi\colon L_{\lambda,\mu} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\lambda$, todo $\mathcal{A}_\lambda$-módulo M da lugar a un $L_{\lambda,\mu}$-módulo, con la "identificación"

$$[(34)] = [(12)]$$
$$[x_{(34)}] = [x_{(12)}],$$

Entonces, podemos concluir lo siguiente.

PROPOSICIÓN 3.8. *M_ϵ, $M_{\rm sgn}$ y $M_{\rm st}(t)$, con $t = \pm i, \pm\frac{i}{3}$, son L-módulos simples.*

DEMOSTRACIÓN. Que son L-módulos se sigue de los Lemas 1.92 y 3.7. Además, son simples puesto que son simples sobre una subálgebra, ver Lema 3.6. □

3.2.0.3. Módulos sobre la representación estándard. Hemos podido extender los $\mathcal{A}_\lambda$-módulos simples, soportados en las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_3$, como $L_{\lambda,\mu}$-módulos. Ahora nos ocupamos de $\mathbb{S}_4$-módulos M, donde M “no proviene” de $\mathbb{S}_3$.

Dado que $L_{\lambda,\mu}$ está generada por

$$x_{(12)};$$
$$(12), (23), (34),$$

con las relaciones

$$\begin{aligned}
&x_{(12)}^2 = 0;\\
&\sigma \cdot x_{(12)} = \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma\cdot(12)} \cdot (12);\\
&x_{(12)}x_{(13)} + x_{(23)}x_{(12)} + x_{(13)}x_{(23)} = \mu(1 - (132));\\
&x_{(12)}x_{(34)} + x_{(34)}x_{(12)} = \lambda(1 - (12)(34)),
\end{aligned}$$

tenemos que encontrar $x_{(12)}$ tal que cumpla las relaciones de $L_{\lambda,\mu}$.

Entonces, el problema a resolver podemos escribirlo en detalle como:

Hallar tal $\mathbb{S}_4$-módulo, llamémosle $M_{\rm st}^+$. Ver Sección 1.7.2.

Llamamos $[(\sigma)]$, σ trasposición de $\mathbb{S}_4$, a la matriz asociada a la representación $M_{\rm st}^+$ de $\mathbb{S}_4$. A continuación, buscamos condiciones necesarias y suficientes para determinar $A = [x_{(12)}] \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que cumpla:

$$\begin{cases}
A^2 = 0;\\
[(34)]A = -A[(34)];\\
[(12)]A = -A[(12)];\\
AC + BA + CB = \mu(1 - [(12)][(13)]);\\
AD + DA = \lambda(1 - [(12)[(34)]);
\end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned}
B &:= -[(13)]A[(13)],\\
C &:= -[(23)]A[(23)],\\
D &:= -[(24)]B[(24)].
\end{aligned}$$

Sea entonces $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$.

Usando $[(12)]A[(12)] = -A$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & -\alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & -\alpha_{31} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Usando $[(34)]A[(34)] = -A$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{13} & \alpha_{12} - \alpha_{13} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21} - \alpha_{23} & \alpha_{22} - \alpha_{23} & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31} + \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} & -\alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} + \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} & \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & 2\alpha_{11} \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & 2\alpha_{21} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & -2(\alpha_{11} - \alpha_{21}) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2):

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & 2\alpha_{11} \\ -\alpha_{11} & -\alpha_{11} & -2\alpha_{11} \\ \alpha_{31} & -\alpha_{31} & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando $A^2 = 0$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2\alpha_{11}\alpha_{31} & -2\alpha_{11}\alpha_{31} & 0 \\ -2\alpha_{11}\alpha_{31} & 2\alpha_{11}\alpha_{31} & 0 \\ 2\alpha_{11}\alpha_{31} & 2\alpha_{11}\alpha_{31} & 4\alpha_{11}\alpha_{31} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

por lo que

$$\alpha_{11}\alpha_{31} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = 0 \vee \alpha_{31} = 0.$$

nos muestra dos posibilidades para A:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & 2\alpha_{11} \\ -\alpha_{11} & -\alpha_{11} & -2\alpha_{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & -\alpha_{31} & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando $AC + BA + CB = \lambda(1 - [(12)][(13)])$:

Si $\alpha_{11} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{11}^2 & \alpha_{11}^2 & 0 \\ 0 & -\alpha_{11}^2 & \alpha_{11}^2 \\ \alpha_{11}^2 & 0 & -\alpha_{11}^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

por lo que $\alpha_{11}^2 = -\lambda \Rightarrow \alpha_{11} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

De manera análoga, considerando $\alpha_{31} \neq 0$, se obtiene $\alpha_{31} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

Usando $AD + DA = \mu(1 - [(12)][(34)])$:

Nuevamente, consideramos $\alpha_{11} \neq 0$. Para $\alpha_{31} \neq 0$ es análogo.

Obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_{11}^2 & -2\alpha_{11}^2 & 0 \\ -2\alpha_{11}^2 & \alpha_{11}^2 & 0 \\ 2\alpha_{11}^2 & 2\alpha_{11}^2 & 4\alpha_{11}^2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

por lo que $\alpha_{11}^2 = \frac{\mu}{2} \Rightarrow \alpha_{11} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}$.

De este modo, arribamos a la siguiente conclusión.

TEOREMA 3.9. *Sea $\mathcal{H} = L_{\lambda,\mu}$. Entonces M_{st}^+ admite una estructura de $\mathcal{H}$-módulo extendiendo la de $\mathbb{S}_4$, si, y solo si, $0 \neq \mu = -2\lambda$.*

Existen las siguientes posibilidades como tales $\mathcal{H}$-módulos, algunos pares isomorfos, $A[t] = M_{\mathrm{st}}^+[t]$, $t = (\pm\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}), (\pm\sqrt{-\lambda}, \alpha_{13}), (\pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{11}), (\pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{13})$ determinados por:

$$A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}] = \sqrt{-\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A[-\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}] = -\sqrt{-\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{13}] = \sqrt{-\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A[\sqrt{-\lambda}, -\alpha_{13}] = -\sqrt{-\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A\left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{11}\right] = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A\left[-\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{11}\right] = -\sqrt{\frac{\mu}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A\left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{13}\right] = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A\left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}, -\alpha_{13}\right] = -\sqrt{\frac{\mu}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. Las cuentas que determinan la estructura de $\mathcal{H}$-módulos fueron presentadas en el desarrollo previo.

Ahora veamos que $A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}]$ y $A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{13}]$ no son isomorfos como $\mathcal{H}-$módulos.

Supongamos que existe un isomorfismo $\varphi : A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}] \to A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{13}]$ y que es no nulo. φ será de $\mathbb{S}_4$-módulos y $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{S}_4}(A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}]) \simeq \mathbb{C}$. Así, existe $c \neq 0$ tal que

$$\varphi(v) = cv' \quad \varphi(w) = cw' \quad \varphi(u) = cu'$$

donde $\{v, w, u\}$ y $\{v', w', u'\}$ son bases de $A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}]$ y $A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{13}]$ respectivamente.

Luego, como

$$A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}] \cdot (u, v, w) = \sqrt{-\lambda}(v + w + 2u, -(v + w + 2u), 0)$$

tenemos que $\varphi(A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}]\cdot v) = c\sqrt{-\lambda}(v+w+2u)$, mientras que $A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}]\cdot \varphi(v) = 0$. Si φ fuese isomorfismo, debiera suceder $\varphi(A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}] \cdot v) = A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}] \cdot \varphi(v)$, con lo que debe ser $c = 0$. Así, no existe tal isomorfismo.

De modo similar podemos descartar demás isomorfismos entre otros pares quedando isomorfos los siguientes pares:

- $A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}] \simeq A[-\sqrt{-\lambda}, \alpha_{11}]$;
- $A[\sqrt{-\lambda}, \alpha_{13}] \simeq A[\sqrt{-\lambda}, -\alpha_{13}]$;
- $A\left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{11}\right] \simeq A\left[-\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{11}\right]$;
- $A\left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}, \alpha_{13}\right] \simeq A\left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}, -\alpha_{13}\right]$.

$\square$

COROLARIO 3.10. *Dados los $\mathcal{H}$-módulos $M^+_{\mathrm{st}}[t]$ podemos obtener los $\mathcal{H}$-módulos $M^-_{\mathrm{st}}[t]$.*

DEMOSTRACIÓN. $M^-_{\mathrm{st}}[t] = M^+_{\mathrm{st}}[t] \otimes M_{\mathrm{sgn}} = M^+_{\mathrm{st}}[t] \otimes \mathbb{C}$ donde en $\mathbb{C}$ actuamos con el signo. En efecto la acción queda determinada por

$$\left\{ \begin{array}{ll} [\sigma]^- = -[\sigma]^+ & \sigma \in X \\ x^-_{(12)} = x^+_{(12)} & \end{array} \right. \tag{3.6}$$

donde para $(m \otimes 1) \in M^-_{\mathrm{st}}[t]$ tenemos que

$$x_{(12)} \cdot (m \otimes 1) = \Delta(x_{(12)}) \cdot (m \otimes 1) = (x_{(12)}) \cdot m \otimes 1 \cdot 1 + (12) \cdot m \otimes (x_{(12)}) \cdot 1 = (x_{(12)}) \cdot m.$$

con Δ la comultiplicación en $\mathcal{H}$:

$$\Delta(x_{(12)}) = x_{(12)} \otimes 1 + (12) \otimes x_{(12)}.$$

$\square$

Bibliografía

[An] ANDRUSKIEWITSCH, N., *About finite dimensional Hopf algebras*, Notes of a course given at the CIMPA School "Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics" Bariloche 2000. Contemp. Math 294, 1–57 (2002).

[A+] ANDRUSKIEWITSCH, N., ANGIONO, I., GARCÍA IGLESIAS, A., MASUOKA, M., VAY, C. *Lifting via cocycle deformation*. J. Pure Appl. Alg. **218** (4), 684–703 (2014).

[AF] ANDRUSKIEWITSCH, N. y FANTINO, F., *On pointed Hopf algebras associated to unmixed conjugacy classes in* $\mathbb{S}_n$, J. Math. Phys. **48**, 033502 1–26 (2007).

[AFGV1] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F. , GARCÍA, G. A. y VENDRAMÍN, L., *On Nichols algebras associated to simple racks*. Groups, Algebras and Applications, Contemporary Mathematics, vol. 537, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 31-56.

[AFGV2] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F. , GARCÍA, G. A. y VENDRAMÍN, L., *On twisted homogeneous racks of type D*. Revista de la Unión Matemática Argentina vol. 51-2 (2010), pp. 1-16.

[AFGV] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F., GRAÑA, M., y VENDRAMÍN, L., *Finite-dimensional pointed Hopf algebras with alternating groups are trivial*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) Volume 190, Number 2, 225-245 (2011).

[AFZ] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F., y ZHANG, F., *On pointed Hopf algebras associated with the symmetric groups*, Manuscripta Math., Vol. **128**, N. 3, 359–371 2009.

[AFe] ANDRUSKIEWITSCH, N. y FERRER, W. *The begginings of the theory of Hopf algebras*, Acta Applicandae Mathematicae (2009) 108: 3–17. Revisions available here: `arXiv:0901.2460`.

[AG] ANDRUSKIEWITSCH, N. y GRAÑA, M., *From racks to pointed Hopf algebras*, Adv. in Math. **178** (2), 177–243 (2003).

[AHS] ANDRUSKIEWITSCH, N., HECKENBERGER, I., y SCHNEIDER, H.J. *The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module*. Amer. J. Math., vol. 132, no. 6, December 2010, , pp. 1493-1547.

[AM] ANDRUSKIEWITSCH, N. y MOMBELLI, M., *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **314** (2007), 383–418.

[AS1] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *Liftings of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order* p^3, J. Algebra **209**, 658-691 (1998).

[AS2] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Adv. Math. **154**, 1–45 (2000).

[AS3] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *Pointed Hopf algebras*, "New directions in Hopf algebras", MSRI series Cambridge Univ. Press; 1–68 (2002).

[AS4] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. Math. 171 (2010), No. 1, 375–417.

[AZ] ANDRUSKIEWITSCH, N. y ZHANG, F., *On pointed Hopf algebras associated to some conjugacy classes in* $\mathbb{S}_n$, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2723–2731.

[AGI] ANGIONO, I. y GARCÍA IGLESIAS, A., *Liftings of Nichols algebras of diagonal type II. All liftings are cocycle deformations.* Selecta Math. (2019).

[B] BOREL, A., *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts*, Ann. Math **87**, (1953), 115–207.

[C] CARTIER, P., *Hyperalgèbres et groupes de Lie formels*, Seminaire "Sophus Lie" 2e année: 1955/56, (1957).

[CR] Curtis, C. W. y Reiner, I., *Methods of representation theory, with applications to finite groups and orders I*, Wiley Classics Library, (1981).

[Cu] Curtis, C., *Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer*, AMS (1999).

[D] Doi, Y., *Braided bialgebras and quadratic algebras*, Comm. Algebra 21, No.5 (1993), 1731-1749.

[GG] García, G. A. y García Iglesias, A., *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over* $\mathbb{S}_4$. Israel Journal of Mathematics 183 (2011), 417–444.

[GI] García Iglesias, A., *Representations of pointed Hopf algebras over* $\mathbb{S}_3$. Revista de la Unión Matemática Argentina 51 (1) pp. 51–78 (2010).

[GM] García Iglesias, A. y Mombelli, M., *Representations of the category of modules over pointed Hopf algebras over* $\mathbb{S}_3$ *and* $\mathbb{S}_4$. Pacific Journal of Mathematics, 252 (2) (2011), pp. 343–378.

[G] Günther, *Crossed products for pointed Hopf algebras*, Comm. Algebra 27, No. 9 (1999), 4389-4410.

[LS] Larson, R. G. y Sweedler, M., *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*, Adv. Math. **171** (2002), no. 2, 183–227.

[L] Lusztig, G., *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser (1993).

[M1] Mombelli, M., *Module categories over pointed Hopf algebras.* Mathematische Zeitschrift 266 n$^{\underline{o}}$2 (2010) 319-344.

[Mo] Montgomery, S., *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Lecture Notes 82, American Math Society, Providence, RI, (1993)

[Sch1] Schauenburg, P., *Hopf modules and Yetter-Drinfel'd modules*, J, of Algebra **169** (1994) 874–890.

[Sc] Schneider, H. J. *Lectures on Hopf algebras*, Trabajos de Matemática 31/95, FaMAF (1995).

[S] Sweedler, M., *Hopf algebras*, Benjamin, New York, (1969).

[TW] Taft, E. J. and Wilson, R.L. *On antipodes in pointed Hopf algebras*, J. of Algebra **29** (1974) 27–32.