



Universidad Nacional de Salta
Sede Regional Metán Rosario de la Frontera
2024

“Mi sabiduría viene de esta tierra”

Modelado matemático de la dinámica de sistemas biológicos

Autor: Fernández María Julieta

Director: Gonzalo Maximiliano López

Agradecimientos

Resumen

Las infecciones causadas por helmintos transmitidos por el suelo afectan a más de mil millones de personas en todo el mundo. Los modelos matemáticos desempeñan un papel importante en comprender como estos parásitos son transmitidos y permiten realizar un análisis del impacto de las medidas de control de estas infecciones. En este trabajo estudiamos la dinámica de transmisión de geohelmintos, para luego desarrollar estrategias de control y eliminación de estas infecciones. La distribución de los parásitos en sus hospedadores juega un rol importante en su dinámica de transmisión. Proponemos modelos estadísticos simples para la distribución de parásitos por hospedador como alternativa al modelo binomial negativo comúnmente usado. Los aportes al reservorio de huevos eliminados por los hospedadores forman parte fundamental del ciclo de vida de los parásitos y de la dinámica del reservorio. Por lo tanto modelamos las variables reproductivas de los parásitos que intervienen en la producción de huevos. Mostramos que estas variables cambian con la densidad de los parásitos por hospedador. Finalmente desarrollamos y analizamos modelos compartimentales deterministas basados en ecuaciones diferenciales no lineales y modelo estocásticos basados en individuos. Utilizamos estos modelos desarrollados para evaluar el impacto potencial de distintas estrategias de control, tales como las campañas de desparasitación masiva por grupos de riesgo e implementar mejoras en el acceso al agua potable segura, a los sistemas de saneamiento y en el acceso a la higiene en las comunidades donde estas infecciones son endémicas.

Índice

Introducción	VI
Introducción	9
Ejemplos introductorios	9
Ejemplo 1.....	9
Primeras definiciones	10
Definición 1	10
Definición 2	11
Sistema dinámico a tiempo continuo.....	11
Sistemas dinámicos a tiempo discreto	13
¿Qué (no) es caos?	15
Sistemas Dinámicos a tiempo continuo	16
Estabilidad de puntos de equilibrios hiperbólicos	17
Flujos lineales n-dimensionales.....	18
Estabilidad de puntos de equilibrio hiperbólicos (continuación).....	20
Sistemas dinámicos a tiempo discreto	24
Ejemplo.....	24
Teorema (Principio de Contracción)	25
Estabilidad de puntos fijos hiperbólicos.....	25
Definición	26
Teorema (Hartman-Grobman)	26
Definición	26
Teorema	26
Estabilidad de órbitas periódicas	27
Variedades invariantes de puntos fijos	28
Relaciones entre dinámica continua y dinámica discreta	29
Suspensión	29
Tomando el mapeo en tiempo τ	30
Propiedades generales de los retratos de fase	30
OBSERVACIONES	30
Bifurcaciones	32
Bifurcaciones sistemas dinámicos a tiempo continuo	32
Definición	32
Bifurcación Silla-Nodo	32

Ejemplo.....	32
Definición	33
Teorema (Bifurcación Silla-nodo).....	33
Bifurcación Transcrítica	36
Teorema (Bifurcación Transcrítica)	37
Bifurcación Pitchfork	38
Teorema (Bifurcación Pitchfork)	39
Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf	40
Teorema (Bifurcación de Hopf)	43
Bifurcaciones en sistemas n -dimensionales	44
Ejemplo.....	45
Bifurcaciones de sistemas dinámicos a tiempo discreto	48
Bifurcación silla-nodo.....	49
Teorema (Bifurcación Silla-Nodo)	50
Bifurcación flip	51
Teorema (Bifurcación Flip)	52
Bifurcación Neimarck-Sacker	53
Teorema (Bifurcación Neimarck-Sacker).....	55
Discusión y conclusión general	65
Apéndice A: Modelos clásicos para la dinámica de transmisión y control de la infección por geohelmintos.....	59
A.1. Bifurcación nodo silla	62

Introducción

Las geohelmintiasis o helmintiasis transmitidas por el suelo, comúnmente conocidas como infección por parásitos intestinales, son las infecciones más comunes a nivel mundial y afectan principalmente a las poblaciones más pobres y vulnerables. Los agentes causales de esta infección son los nematodos (*Ascaris lumbricoides*, *Trichuris trichiura*) y las uncinarias (*Necator americanus* y *Ancylostoma duodenale*), los cuales infectan a los humanos a través de la ingesta de alimentos contaminados con sus huevos o larvas, o por la penetración de larvas desde el suelo a través de la piel (larvas de *Ancylostoma*) principalmente al caminar descalzos en el suelo contaminado [? ?]. No existe transmisión directa de persona a persona. En todo el mundo, aproximadamente 1500 millones de personas están infectadas por geohelminths. Más de 267 millones de niños en edad preescolar y más de 568 millones en edad escolar viven en zonas donde la infección es endémica [? ?]. En América Latina se estima que alrededor 30 % de la población está infectada [?]. En Argentina se registraron prevalencias variando entre cero hasta cercanas al 90 % ([?]), lo que refleja la heterogeneidad de su distribución en nuestro país. Una revisión sistemática de los estudios poblacionales publicados entre 1980 y 2011 ([?]), muestra que la prevalencia para *Áscaris lumbricoides* 0 - 67 %, Uncinarias 0 - 90 %, *Trichuris trichiura* 0 - 24.5 %. En la mayoría de los casos se cuenta con datos de prevalencia fragmentados, procedentes de niños en edad escolar o de hospitales, que no son necesariamente representativos de la población en un área determinada. Históricamente, las geohelmintiasis se han considerado endémicas en las zonas del norte del país, donde se encuentran las condiciones climáticas y socio ambientales que favorecen la perpetuación de estas infecciones. Sin embargo, también se muestran focos de alta prevalencia en el centro del país, como en Santa Fe ([?]), (> 37 %) y Provincia de Buenos Aires, en población de asentamientos periurbanos de la ciudad de La Plata (25 % al 35 %, [?]), y en la ciudad de Brandsen del 19.2 % [?]. Valores que en los primeros casos, justificarían tratamiento antiparasitario masivo anual, según los criterios de la Organización Mundial de la Salud [?]. La política de la Organización Mundial de la Salud (OMS) para el control de las geohelmintiasis se enfoca en los programas de administración masiva de fármacos (antihelmínticos). También se están haciendo esfuerzos para mejorar el acceso al agua potable segura, saneamiento e higiene. La OMS recomienda tratamientos masivos para todos los grupos de riesgo en las comunidades donde la infección es endémica, especialmente las mujeres en edad fértil, los niños en edad preescolar y los niños en edad escolar [?]. Las infecciones se tratan con fármacos de administración oral siendo los más comunes Albendazol y Mebendazol. Estos antihelmínticos se administran en una sola dosis, son seguros, relativamente económicos y efectivos durante varios meses [?]. El objetivo general que nos planteamos en este trabajo es el desarrollo de modelos matemáticos que sirvan para la toma de decisiones en el diseño de estrategias de control de las geohelmintiasis en el norte de Argentina. Este trabajo se organiza de la siguiente manera: el capítulo 1 es introductorio. En este capítulo se analiza el desarrollo y la aplicación de los modelos matemáticos más relevantes en el estudio de la dinámica de transmisión y control de la infección por geohelminths. Modelos deterministas tanto para el caso de poblaciones homogéneas y heterogéneas de hospedadores, son analizados. Para el caso de los modelos estocásticos, analizamos un modelo basado en individuos. En el estudio

de las estrategias de control, implementamos sobre las simulaciones de los modelos anteriores, programas de desparasitación masiva con fármacos y analizamos las diferentes estrategias de su aplicación. Los resultados originales de este trabajo se concentran en los capítulos 2, 3 y 4. En el capítulo 2, se desarrollan modelos estadísticos teóricos para la distribución de geohelminthos en una población de hospedadores. La distribución binomial negativa es la distribución más utilizada para modelar la carga de macroparásitos en los hospedadores. Sin embargo, la estimación de parámetros por máxima verosimilitud a partir de los datos está lejos de ser trivial. No se dispone de una formula cerrada y la estimación numérica requiere métodos sofisticados. Utilizando datos de la literatura, mostramos que las alternativas simples a la binomial negativa, como la distribución geométrica inflada (o desinflada) en cero o la distribución obstáculo (hurdle por su nombre en inglés), producen un ajuste a los datos tan bueno o incluso mejor que la distribución binomial negativa. Derivamos formulas cerradas simples para la estimación de parámetros por máxima verosimilitud, lo que constituye una ventaja significativa de estas distribuciones sobre la distribución binomial negativa. En el capítulo 3, se desarrollan modelos estocásticos sobre la incorporación de nuevos estadios de transmisión en la infección por geohelminthos. Los hábitos reproductivos de los helmintos son de suma importancia para el estudio de la dinámica de su transmisión. Para poblaciones de parásitos distribuidos por los modelos Poisson o binomial negativa estos hábitos ya fueron estudiados. Sin embargo existen 2 otros modelos estadísticos que describen estas poblaciones, como los inflados en cero, pero donde las características reproductivas no fueron analizadas. Utilizando un modelo arbitrario para la población de parásitos, modelamos la distribución de hembras y machos por hospedador, y partir de estos modelamos los diferentes variables reproductivas como el número medio de hembras fértiles, la producción media de huevos, la probabilidad de apareamiento, la producción media de huevos fértiles. Mostramos que estas variables cambian por los efectos de una fecundidad denso-dependencia negativa, una característica propia de los parásitos helmintos. Presentamos los resultados obtenidos para algunas modelos particulares, como los inflados en cero y hurdle. En el capítulo 4, se desarrollan modelos matemáticos deterministas y estocásticos para analizar diferentes estrategias de control de las geohelminthiasis. La reducción y el control de la infección por geohelminthos se realizan mediante programas de desparasitación masiva (PDM). Sin embargo estudios recientes demostraron que el acceso al agua potable segura, instalaciones de saneamiento adecuadas y buenas prácticas de higiene que denotaremos por WASH también reducen la infección por geohelminthos. Por medio del desarrollo de modelos deterministas basados en estructura de edades y modelos estocásticos basados en individuos, modelamos tanto la transmisión y control de la infección para sus diferentes grupos de riesgo. Para diversos contextos epidemiológicos analizamos el impacto de las intervenciones WASH y PDM, y determinamos los tiempos eliminación la infección. Finalmente en el último capítulo presentamos una discusión y conclusión general de este trabajo.

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

1. Introducción

1.1. Ejemplos introductorios

1.2. Primeras definiciones

1.2.2 Sistemas dinámicos a tiempo continuo

1.2.2. Sistemas dinámicos a tiempo discreto

1.3. ¿Que (no) es caos?

1.4. Sistemas dinámicos a tiempo continuo

1.4.1. Estabilidad de puntos de equilibrio hiperbólicos

1.4.2. Flujos lineales n-dimensionales

1.4.3. Estabilidad de puntos de equilibrio

1.5. Sistemas dinámicos a tiempo discreto

1.5.1. Estabilidad de órbitas periódicas

1.5.2. Estabilidad de órbitas periódicas

1.5.3. Variedad invariantes de puntos fijos

1.6. Relación entre Sistema dinámico a tiempo continuo y Sistemas dinámicos a tiempo discreto

Introducción a los sistemas dinámicos

Que son los sistemas dinámicos. La teoría de los sistemas dinámicos busca explicar los mecanismos matemáticos subyacentes de estructuras o cantidades que evolucionan en el tiempo mediante la regla determinística. Típicamente, la evolución de estas cantidades puede venir gobernadas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Definido por el campo de vectores de $f(x, \alpha)$, el cual, el general, también puede depender de un vector de parámetros $\alpha \in \mathbb{R}^m$. En otras ocasiones, el sistema dinámico viene definido mediante un proceso iterativo que consiste en la composición reiterada de una aplicación

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde nuevamente $\alpha \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. Sin embargo, la noción de sistema dinámico también es aplicable en otros contextos más generales. Por ejemplo, una ecuación diferencial parcial parabólica

$$u_t = f(u) + uxx,$$

también puede entenderse como un sistema dinámico de la forma

$$u_t = F(u), u \in B,$$

donde el operador F está definido en algún espacio de Banach B apropiado. Incluso, si buscamos un poco más allá, podemos hallar ejemplos de sistemas dinámicos en contextos tan diversos como geometría compleja (acciones de grupos en superficies de Riemann), teoría de la medida (propiedades de sistemas dinámicos actuando sobre conjuntos medibles), topología diferencial (flujos definidos en variedades, campos de vectores sobre fibrados tangentes), etc.

En sus inicios, la dinámica, como rama de la ciencia, tuvo una motivación proveniente de la física para entender el movimiento de los cuerpos, aunque poco a poco su formalización y abstracción matemática fueron creciendo. Podemos encontrar sistemas dinámicos en todas partes: desde el sistema solar, el clima, los ecosistemas, hasta las máquinas creadas por el hombre y la bioquímica de nuestros propios cuerpos. Hoy en día, hablar de dinámica es referirse prácticamente a un área científica interdisciplinaria con facetas tanto matemáticas (teóricas), aplicadas (modelación), e incluso experimentales.

Ejemplos introductorios

Ejemplo 1

El péndulo clásico es uno de los sistemas mecánicos más simples. Se busca describir el desplazamiento angular $\theta = \theta(t)$ en función del tiempo $t > 0$ de un péndulo de masa m dada una posición inicial $\theta(t_0) = \theta_0$ en ausencia de roce con el aire. En la Figura 1.1(a) se ve la masa del péndulo sujeta a la fuerza de gravedad y unida a una cuerda rígida sin masa de

longitud L , la cual ejerce una tensión sobre la masa. Al aplicar las leyes de Newton a este sistema obtenemos una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

la cual puede ser reducida a un sistema de dos EDOs de primer orden. Como sabemos de un curso elemental de ecuaciones diferenciales, el ángulo inicial θ_0 es insuficiente como dato para determinar el estado futuro del péndulo, es decir, para conocer el par $(\theta, \dot{\theta})$. Debido a la naturaleza periódica de las incógnitas $(\theta, \dot{\theta})$, el “espacio de estados” donde “viven” estas variables $(\theta, \dot{\theta})$ es $X = S^1 \times \mathbb{R}$, donde $S^1 = \mathbb{R} \bmod 2\pi$

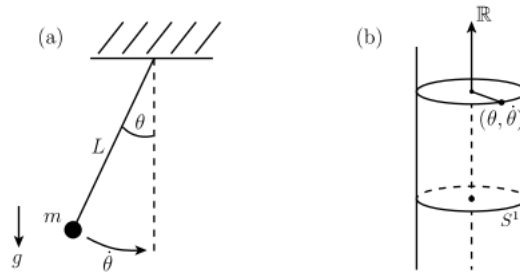


Figura 1.1: El péndulo no-lineal define un sistema dinámico a tiempo continuo. El espacio de estados corresponde a $S^1 \times \mathbb{R}$

Es el círculo unitario (parametrizado por $\theta \in [0, 2\pi]$), y \mathbb{R} es el eje real correspondiente a todas las posibles velocidades del péndulo. El conjunto X puede ser considerado como un círculo en \mathbb{R}^3 , ver figura 1.1 (b).

Este ejemplo del péndulo queda modelado por un sistema dinámico, el cual describe la ley de movimiento al considerar el tiempo $t > 0$ como una variable continua.

Primeras definiciones

Definición 1 Un **sistema dinámico** es un proceso cuyo comportamiento se puede describir mediante un operador de evolución

$$\phi^t: X \rightarrow X,$$

$$x_0 \mapsto \phi^t(x_0) = x_t$$

Definido en un espacio X para todo $t \in T$. El espacio X se llama **espacio de estado** o **espacio de fase**. El espacio T (o tiempo) puede ser \mathbb{R} (en cuyo caso hablamos de un espacio dinámico a tiempo continuo) o \mathbb{Z} (que corresponde a un **sistema a tiempo discreto**).

El operador ϕ^t debe satisfacer las siguientes condiciones para cualesquiera condiciones iniciales $x_0 \in X$ y para todo $t, s \in T$:

1. $\phi^0(x_0) = x_0$
Es decir, si el tiempo no corre, no hay evolución de la cantidad de x .
2. $\phi^{t+s}(x_0) = \phi^t(\phi^s(x_0))$.

La evolución en el tiempo es determinística y sólo depende del dato inicial x_0 y no de cómo “contamos” el paso del tiempo; ver figura 1.2.

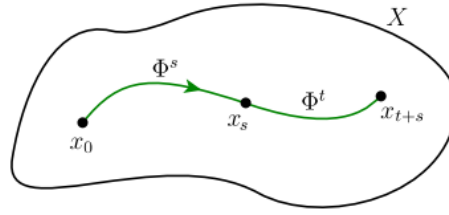


Figura 1.2: Evolución en el tiempo es determinística y sólo depende del dato inicial x_0 y no depende de cómo “contamos” el paso del tiempo.

Definición 2 Una órbita es un subconjunto ordenado del espacio de estados X definido por

$$\mathcal{O} = \{x \in X : x = \phi^t(x_0), \forall t \in T \text{ tal que } \phi^t(x_0) \in X\}$$

Una órbita nos indica qué sucede a un punto inicial x_0 a medida que pasa el tiempo; puede entenderse como el “itinerario” del sistema dinámico al partir desde el punto x_0 .

Sistema dinámico a tiempo continuo

Si $T = \mathbb{R}$ (caso continuo), el sistema dinámico viene dado típicamente como un sistema de ecuaciones diferenciales o un campo de vectores. La forma general de un campo de vectores en \mathbb{R}^n es:

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (1.1)$$

Donde $x \in X = \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. La función $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ asigna un vector

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f_1(x, \lambda) \\ \vdots \\ f_n(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

A cada punto en el espacio de fase. De esta forma, el campo vectorial f puede interpretarse como un campo de fuerzas en \mathbb{R}^n .

En el caso continuo, el operador de evolución describe el **flujo** del campo de vectores en la forma de una familia $\{\phi^t(x_0)\}_{x_0 \in X}$, donde usamos la notación $\phi_{x_0}(t) = \phi^t(x_0)$ para recalcar la dependencia de ϕ como función del tiempo t desde una condición inicial $x_0 \in X$. Luego, este flujo satisface la EDO (1.1), es decir,

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t)), \quad \forall t \in T. \quad (1.2)$$

En el caso continuo las órbitas son curvas en X parametrizadas por t y orientadas en la dirección de crecimiento de t . Si el campo de vectores f es suficientemente suave también podemos ir “hacia atrás” en el tiempo y seguir el flujo en reversa y ver “desde dónde” venía el punto x_0 ; ver figura 1.3.

OBSERVACIÓN. En lo que nos concierne, asumiendo que el campo f es suficientemente suave de manera que el pasado y el futuro estén únicamente determinados

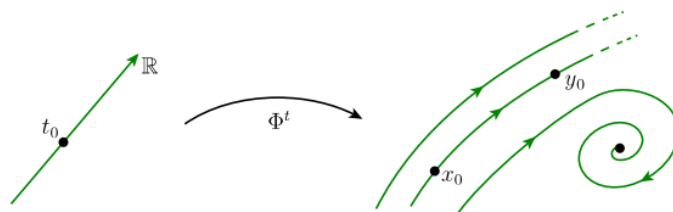


Figura 1.: Órbitas en el caso continuo.

Por la condición inicial x_0 . En otras palabras, la EDO (1.1) siempre tendrá soluciones únicas para un número suficiente de condiciones iniciales o condiciones de frontera.

Proposición 1 Si $y_0 = \Phi^t(x_0)$ para algún $t \in T$, entonces las órbitas $\mathcal{O}(y_0)$ y $\mathcal{O}(x_0)$ coinciden.

Ejemplo 3 El sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

Es un sistema dinámico continuo tridimensional, es decir, $X = \mathbb{R}^3$, y $Y = \mathbb{R}$. Aunque no podemos resolver explícitamente este sistema de EDOs, igual podemos determinar las soluciones en forma única hacia adelante y hacia atrás en tiempo dada una condición inicial (x_0, y_0, z_0) .

Órbitas especiales en el caso continuo

1. **Puntos de equilibrio:** Son puntos $x^* \in X$ tales que $f(x^*) = 0$.
2. **Órbitas periódicas:** Para un punto $x^* \in X$ existe un instante $\tau \in \mathbb{R}$ con $\tau > 0$ tal que $\Phi^t(x^*) = x$. La órbita periódica está definida como la curva cerrada γ en X $\gamma = \{\Phi^t(x) \in X : 0 \leq t < \tau^*\}$,
Donde $\tau^* > 0$ es el número τ más pequeño tal que $\Phi^t(x^*) = x$ y se llama el período de γ .

Definición 2 El **retraso de fase** de un sistema dinámico es una partición del espacio de estados X en órbitas. Esta definición también es la misma para sistemas a tiempo discreto.

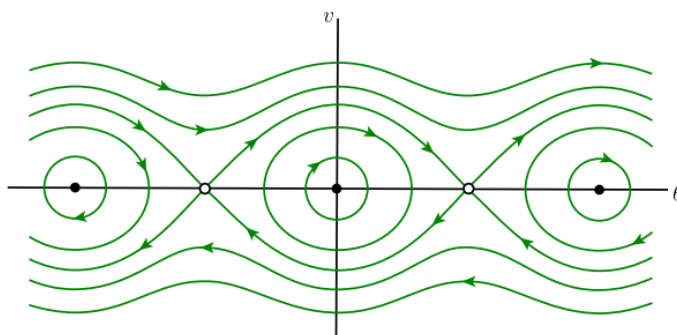


Figura 1.4: Retrato de fase para el sistema (1.4)

Como ha quedado claro del ejemplo anterior, el retrato de fase contiene mucha información sobre el comportamiento de un sistema dinámico, a saber:

- Cantidad de estados asintóticos hacia los cuales el sistema tiende a medida que $t \rightarrow \pm\infty$.
- Características de los estados asintóticos (atractores, repulsores, etc.).

Muchos de los teoremas y técnicas estudiadas están destinados a entender y caracterizar el retrato de fase de un sistema dinámico.

Sistemas dinámicos a tiempo discreto

Si $T = \mathbb{Z}$ (caso discreto), el sistema queda definido por un mapeo o aplicación

$$x \mapsto g(x)$$

Donde $g: X \rightarrow X$ es una función. El operador de evolución es el mismo mapeo g y $\Phi^t(x) = \Phi^n(x) = g^n(x), n \in \mathbb{Z}$, donde

$$g^n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{n \text{ veces}}$$

Denota la n -ésima composición (o iteración) de g .

En el caso discreto las órbitas son secuencias de puntos en X enumeradas por enteros crecientes. Si g es invertible entonces podemos también mirar el “pasado” del punto x_0 ; ver figura 1.5 (sin embargo siempre podemos considerar la semiórbita positiva de un sistema dinámico

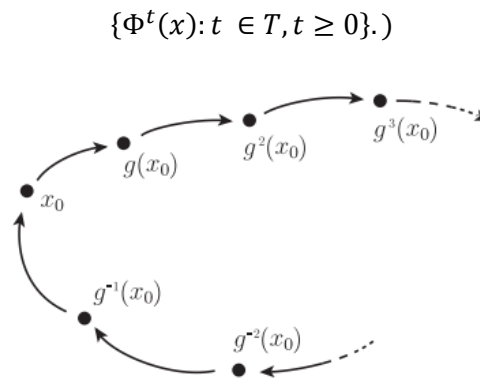


Figura 1.5: Órbitas en el caso discreto para un sistema invertible.

Órbitas especiales en el caso discreto:

1. **Puntos fijos:** son puntos $x^* \in X$ tales que $g(x^*) = x^*$.
2. **Puntos periódicos:** son puntos $x_0 \in X$ tales que $g^n(x_0) = x_0$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, mientras que $g^i(x) \neq x$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ con $0 < i < n$. Aquí n es el **período** de x_0
3. **Órbitas periódicas:** Es un subconjunto (discreto) $\gamma \subset X$ de n puntos compuesto por la órbita de un punto periódico x_0 :

$$\gamma = \{g^i(x_0): 0 \leq i < n\}.$$

Aquí n se dice el **período** de γ . La diferencia entre orbitas periódicas en el caso continuo y el caso discreto se ilustra en la figura 1.6.

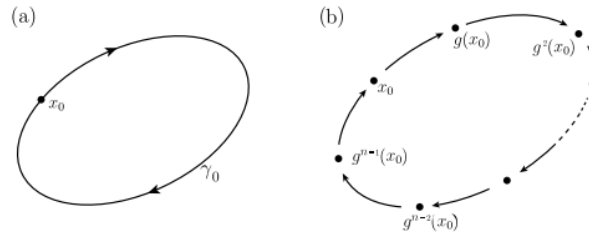


Figura 1.6: Orbitas periódicas en el caso continuo (a) y en el caso discreto (b).

Ejemplo 1 (Mapeo logístico)

$$x \mapsto rx(1 - x).$$

Es un sistema dinámico discreto unidimensional para cualquier valor del parámetro $r \in \mathbb{R}$. Concretamente, $X = \mathbb{R}$. En este caso, las orbitas son iteraciones (o composiciones) de $g(x) = rx(1 - x)$ a partir de una condición inicial x_0 . Sin embargo, este mapeo no es invertible, luego solo podemos mirar las órbitas positivas, es decir, $T = \mathbb{N}_0$. Más aun, dado que x representa individuos o densidad de población, nos concentramos en valores no-negativos para x .

Es claro que $x^* = 0$ es otro punto fijo para todo $r \in \mathbb{R}$. Si $r > 1$, el punto $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ es otro punto fijo positivo. Sin embargo, la estructura del conjunto de órbitas periódicas puede ser extremadamente complicada dependiendo del valor de r , como veremos más adelante, transformándose en la práctica en la columna vertebral de comportamientos caótico por el cual el mapeo logístico es famoso.

Ejemplo 2 (Dinámica Simbólica)

Consideremos un conjunto $X = \Omega_2$ de todos las posibles secuencias bi-infinitas de dos símbolos, por ejemplo, $\{1, 2\}$. Un punto $w \in \Omega_2$ entonces es la forma

$$w = \{\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots\}$$

Donde $w_i \in \{1, 2\}$. A la “coordenada” w_0 la llamamos la “posición cero”.

A continuación, consideremos un mapeo

$$\sigma: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2,$$

El cual transforma la sucesión $w = \{\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots\} \in \Omega_2$ en la sucesión Ω_2

Donde $\theta_k = w_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Es decir, el mapeo σ simplemente desplaza la sucesión en una posición hacia la izquierda. Por esto, se lo conoce como **mapeo shift**. El mapeo shift σ define un sistema dinámico discreto sobre Ω_2 , el cual es invertible (¿Cuál es σ^{-1} ?). el proceso definido por el mapeo shift es usualmente conocido como dinámica simbólica.

Los puntos fijos y periódicos son muy fáciles de hallar (casi trivialmente!).

¿Puedes determinarlos?

A pesar de quedar determinado mediante un proceso tan sencillo como desplazar una posición hacia la izquierda, la descripción de las propiedades matemáticas de la dinámica simbólica puede ser increíblemente compleja, como veremos más adelante.

¿Qué (no) es caos?

A continuación damos una primera idea sobre lo que se entiende por caos. Ésta no es una definición rigurosa (de hecho, no existe una definición universalmente aceptada de caos), pero nos basta para ilustrar ciertas propiedades que un sistema debe presentar –o no debe presentar– para ser considerado caótico.

Consideremos el comportamiento en el largo plazo de la evolución de una condición inicial x_0 bajo el operador Φ^t . Los posibles “destinos” de la órbita de x_0 podría ser, por ejemplo:

- $\Phi^t(x_0)$ tiende a un punto de equilibrio (o punto fijo) cuando $t \rightarrow \infty$.
- $\Phi^t(x_0)$ tiende a una órbita periódica cuando $t \rightarrow \infty$.
- $\Phi^t(x_0)$ se escapa a la frontera de X cuando $t \rightarrow \infty$. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, entonces, $\Phi^t(x_0) \rightarrow \pm\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Estos tres comportamientos no son caóticos, pues son predecibles. Un sistema es caótico si posee un subconjunto de órbitas confinadas a una región compacta, en donde éstas se comporten en forma impredecible.

Por ejemplo, consideremos el sistema de Lorenz (1.3) con $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$. Para cualquier condición inicial, las órbitas parecen acumularse (para $t \rightarrow \infty$) en un objeto con forma de alas de mariposa: El famoso atractor caótico de Lorenz.

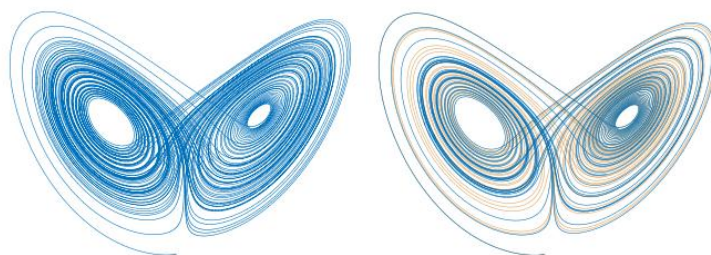


Figura 1.7: Las órbitas en el atractor de Lorenz muestran sensibilidad a las condiciones iniciales: En la imagen a la derecha, dos órbitas inicialmente muy cercanas inevitablemente se separan después de un tiempo finito.

La figura 1.7 muestra en el lado derecho dos órbitas en el atractor de Lorenz (una naranja y otra azul); ambas convergen en el largo plazo al mismo conjunto atractor con forma de alas mostrando en la imagen izquierda. Estas dos órbitas parten desde condiciones iniciales muy cercanas. Tan cercanas que ambas se comportan inicialmente en forma muy similar y es difícil distinguir la órbita naranja de la azul. Sin embargo, de pronto las dos órbitas comienzan a comportarse de manera muy diferente, a divergir una de la otra y, luego de un tiempo, ya se vuelve imposible adivinar que alguna vez ambas estuvieron tan cerca inicialmente; compare

también las series temporales correspondientes para la variable z vs t en la figura 1.8. este fenómeno se conoce como *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales* o *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

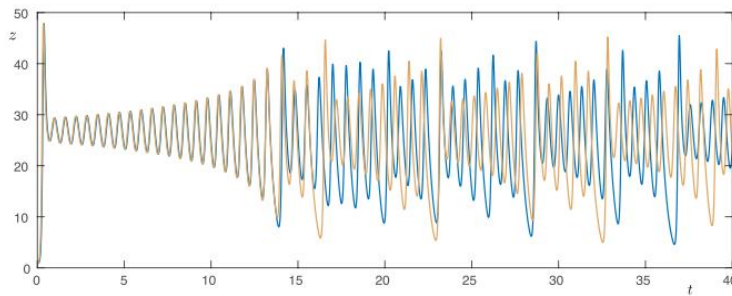


Figura 1.8: Dos órbitas en el modelo de Lorenz mostrando dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

Esta propiedad es una característica del tipo de comportamiento que hoy llamamos caótico: Si un sistema, como el modelo de Lorenz, exhibe dependencia sensitiva a las condiciones iniciales para un rango de los valores de sus parámetros, entonces el comportamiento de ese sistema se vuelve virtualmente impredecible, i.e., no podemos predecir en detalle su comportamiento en el largo plazo. El sistema todavía es determinístico, en el sentido de que si conociéramos exactamente las condiciones iniciales de una órbita, entonces podríamos predecir el futuro de esa órbita al integrar (o resolver) las ecuaciones de evolución para el sistema. Pero si hacemos el más mínimo cambio en las condiciones iniciales, la órbita resultante rápidamente diverge siguiendo un camino distinto al original. Dado que siempre hay alguna imprecisión al especificar las condiciones iniciales en cualquier experimento real o en un cálculo numérico, veremos que el comportamiento futuro es de hecho impredecible para un sistema caótico.

En resumen, el futuro o evolución de un sistema caótico es esencialmente impredecible aun cuando el sistema sea determinístico. En otras palabras, al modelarlo matemáticamente no necesitamos agregar un ruido externo para producir o explicar su comportamiento complejo y aparentemente aleatorio.

Sistemas Dinámicos a tiempo continuo

Para estudiar y describir la forma geométrica de las órbitas de

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

Lo primero que debemos notar es que el campo de vectores (2.1) le asocia un vector $f(x)$ a cada punto x . Localmente, una órbita de (2.1) es una curva: $(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que pasa por un punto $x(0) = p$ y cuyo campo de vectores tangentes (o campo de velocidades) coincide con f en cada punto, es decir, tal que $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(t) = f(\alpha(t))$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

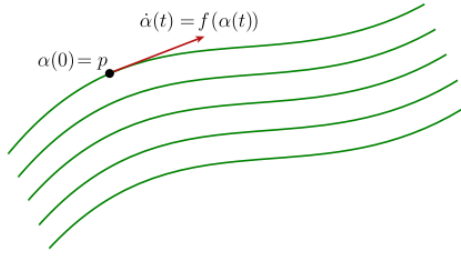


Figura 2.1: El campo de vectores es tangente a las órbitas del sistema en cada punto

Como vimos anteriormente las órbitas coinciden o son disjuntas. Esto es, el retrato de fase (2.1) se puede descomponer en una unión disjuntas de curvas diferenciales, pudiendo cada una de ellas ser:

- a) Imagen biunívoca de un intervalo de \mathbb{R} ,
- b) Un punto (de equilibrio), o
- c) Difeomorfa a círculo (i.e., una órbita periódica).

En general, nos interesa poder dar una descripción cuantitativa de este retrato de fase. Las primeras preguntas que uno puede hacerse son, entonces: ¿Cuáles y cuántos son los estados asintóticos del sistema (por ejemplo, equilibrio y órbitas periódicas)? ¿Cuál es la estabilidad de estos conjuntos invariantes ante pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales?

Estabilidad de puntos de equilibrios hiperbólicos

Considere el campo de vectores $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, o equivalentemente en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Con un equilibrio en $x_0 \in \mathbb{R}$. La matriz Jacobiana $Df(x_0)$ de f en x_0 está definida como la matriz $n \times n$

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Definimos las tres cantidades siguientes:

- n_0 = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real nula;
- n_+ = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real positiva;
- n_- = Numero de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real negativa.

Obviamente, $n_0 + n_+ + n_- = n$ al considerar la multiplicidad de valores propios.

Definición Un equilibrio x_0 de sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, se dice **hiperbólico** si $n_0 = 0$

Las propiedades de estabilidad de un equilibrio hiperbólico x_0 de un sistema dinámico no-lineal está determinadas por la *linealización* del campo vectorial f alrededor de x_0 . Esto se conoce como el teorema de Hartman-Grobman, del cual omitimos su demostración.

Teorema (Hartman-Grobman) si el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Tiene un equilibrio hiperbólico x_0 , entonces existe una vecindad \mathcal{U} de x_0 tal que en \mathcal{U} es localmente topológicamente equivalente al sistema linealizado

$$\dot{x} = Df(x_0)x$$

En una vecindad \mathcal{V} del origen.

Flujos lineales n-dimensionales

En el caso n-dimensional general tenemos que la solución de

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Región	Valores propios	Retrato de fase	Estabilidad
①			Nodo Atractor
①a			Foco Atractor
②			Nodo Repulsor
②a			Foco Repulsor
③			Punto Silla

Figura 2.5: Retrato de fase del origen del sistema bidimensional $\dot{x} = Ax$ en los casos hiperbólicos genéricos.

Viene dada por

$$x(x_0, t) = e^{t.A} x_0 \quad (2,5)$$

Donde $x(0) = x_0$ es condición inicial y $e^{t.A}$ se define formalmente como la serie convergente

$$e^{t.A} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots \quad (2,6)$$

Una solución general (2,4) se puede obtener como combinación lineal de n soluciones linealmente independientes $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$;

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t), \quad (2,7)$$

Donde las constantes c_j quedan determinadas por las condiciones iniciales. Si A tienen n vectores propios linealmente independientes $v^j, j = 1, \dots, n$

Entonces podemos tomar como una base para el espacio de soluciones a las siguientes funciones vectoriales

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j$$

Donde λ_j es el valor propio asociado a v^j . Para valores propios complejos sin multiplicidad, $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, con vectores propios $v^R \pm i v^I$, podemos tomar

$$\begin{aligned} x^j &= e^{\alpha_j t} (v^R \cos(\beta t) - v^I \sin(\beta t)) \\ x^{j+1} &= e^{\alpha_j t} (v^R \sin(\beta t) + v^I \cos(\beta t)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como el par de soluciones (reales) linealmente independientes asociadas. Cuando hay valores propios repetidos y menos de n vectores propios, entonces uno genera los vectores propios generalizados. Denotamos la solución fundamental a aquella matriz $n \times n$ que contiene n soluciones linealmente independientes en sus columnas como

$$X(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)] \quad (2.10)$$

Las columnas $x^j, j = 1, \dots, n$ de $X(t)$ forman una base del espacio de soluciones de (2.4). es fácil probar que:

$$e^{t.A} = X(t)X^{-1}(0). \quad (2.11)$$

Por otro lado, la ecuación (2.4) también se puede resolver al primero hallar una transformación invertible T que diagonalice A o a menos la ponga en su forma normal de Jordan (si hay valores propios repetidos). La ecuación (2.4) se transforma en

$$y' = Jy, \quad (2.12)$$

Donde $J = T^{-1}AT$ y $x = Ty$. Es más fácil trabajar con (2.12), pero dado que las columnas de T son justamente los vectores propios (generalizados) de A , al final se requiere la misma cantidad de trabajo que con el primer método. La exponencial e^{tA} se puede calcular como

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}. \quad (2.13)$$

En particular, las exponenciales para las matrices de Jordan de tamaño 2×2 son:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & e^{tA} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, & e^{tA} &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}; \quad (2.14) \\ A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, & e^{tA} &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos también que si v^j es un vector propio asociado a un valor propio real λ_j de A , entonces v^j es también un vector propio asociado al valor propio $e^{\lambda_j t}$ de e^{tA} . Más aún, si el subespacio generado por $\operatorname{Re}(v^j)$ y $\operatorname{Im}(v^j)$ es un espacio propio asociado al par de valores propios complejos conjugados $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$, entonces es también un espacio propio asociado a $e^{\lambda_j t}, e^{\bar{\lambda}_j t}$.

Estabilidad de puntos de equilibrio hiperbólicos (continuación)

Definición Un equilibrio x_0 hiperbólico del sistema $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$, se dice atractor si $n_- = n$; x_0 es un repulsor si $n_+ = n$; y x_0 es un **punto silla** si el producto $n_+ \cdot n_- \neq 0$.

El siguiente teorema es consecuencia del anterior y del teorema de Hartman-Grodmán:

Teorema Considere los dos sistemas no-lineales

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.18)$$

$$y = g(y), \quad (2.19)$$

Con equilibrio hiperbólico x_0 de (2.18) e y_0 de (2.19). Entonces, los retratos de fase de (2.18) y (2.19) son localmente topológicamente equivalentes cerca de x_0 e y_0 , respectivamente, si y sólo si estos equilibrios tienen el mismo número n_- (y n_+) de valores propios con parte real negativa (y positiva).

Ejemplo Consideremos un modelo de depredación entre dos especies dado por el sistema de dos EDOs no-lineales:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N \left[r \left(a \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{kP}{N+D} \right) \right] \\ \frac{dP}{dt} = P \left[s \left(1 - \frac{hP}{N} \right) \right] \end{cases} \quad (2.20)$$

Donde r, K, k, D, s y h son constantes positivas. Aquí, la especie N es presa del depredador P . Los parámetros r y s son las tasas de crecimiento intrínseco de N y P , respectivamente. En ausencia de depredador, la especie N sigue un crecimiento logístico en donde, en el largo

plazo, se alcanza una capacidad de carga K , que indica cuánto es el máximo de recursos que tiene el ambiente para albergar a la especie N . El término de depredación (también llamado la respuesta funcional del depredador) es $\frac{kNP}{N+D}$, el cual indica cómo cambia (disminuye) el crecimiento de N ante encuentros con el depredador P . En este caso, la respuesta funcional muestra un efecto de saturación de los depredadores. Por último, el crecimiento de los depredadores es también del tipo logístico, en donde la capacidad de soporte de P aquí es $\frac{N}{h}$, es decir, proporcional a la cantidad de presas disponibles.

Como un primer paso del análisis, expresemos el modelo en términos de nuevas variables y nuevos parámetros mediante la equivalencia topológica:

$$u(\tau) = \frac{N(t)}{K}, \quad v(\tau) = \frac{hP(t)}{K}, \quad \tau = rt,$$

Y la reparametrización

$$a = \frac{k}{hr}, \quad b = \frac{s}{r}, \quad d = \frac{D}{K}$$

De esta forma, el sistema (2.20) nos queda:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \frac{auv}{u+d} = f(u,v), \\ \frac{dv}{d\tau} = bv\left(a - \frac{v}{u}\right) = g(u,v), \end{cases}$$

El cual sólo tiene 3 parámetros adimensionales a, b y d . El proceso de adimensionalización reduce el número de parámetros al agruparlos en una forma que tenga sentido. Estos agrupamientos generalmente dan medidas relativas del efecto de los parámetros originales. Por ejemplo, b es la razón entre la tasa de crecimiento del depredador y la de la presa y así $b < 1$ y $b > 1$ tienen significados ecológicos definidos; con el primero las presas se reproducen más rápido que los depredadores.

Los puntos de equilibrio (u^*, v^*) de (2.21) satisfacen

$$u^*(1-u^*) - \frac{au^*v^*}{u^*+d} = 0, \quad bv^*\left(1 - \frac{v^*}{u^*}\right) = 0. \quad (2.22)$$

Sólo nos interesan los equilibrios positivos, es decir, las soluciones positivas de

$$v^* = u^*, \quad (u^*)^2 + (a+d-1)u^* - d = 0$$

De las cuales la única positiva es

$$u^* = \frac{(1-a-d) + \{(1-a-d)^2 + 4d\}^{1/2}}{2}, \quad v^* = u^*$$

La matriz jacobiana A de (2.21) en (u^*, v^*) es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial f}{\partial v}(u^*, v^*) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial g}{\partial v}(u^*, v^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \left[\frac{au^*}{(u^* + d)^2 - 1} \right] & -\frac{au^*}{u^* + d} \\ b & -b \end{pmatrix}$$

Para la coexistencia en el largo plazo de ambas especies, requerimos que el punto (u^*, v^*) se atractor. Luego, las condiciones necesarias y suficientes para esto son

$$Tr(A) < 0 \Rightarrow u^* \left[\frac{au^*}{(u^* + d)^2 - 1} \right] < b, \quad (2.23)$$

$$\det(A) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{a}{u^* + d} - \frac{au^*}{(u^* + d)^2} > 0, \quad (2.24)$$

Sustituyendo el valor de la coordenada u^* obtenemos las condiciones de estabilidad explícitas en términos de los parámetros a, b y d , y luego, en términos de los parámetros originales r, K, k, D, s y h en (2.20).

Notemos que, en general, esto determina un dominio abierto en el espacio de parámetros (a, b, d) tal que, si los parámetros yacen dentro de él, el equilibrio (u^*, v^*) es siempre un atractor, y si están fuera de él, el equilibrio es inestable. Este último caso requiere que al menos una de las ecuaciones (2.2) o (2.24) no se satisfaga. Por ejemplo, reemplazando el valor de u^* , usando la primera ecuación en (2.22) y $v^* = u^*$ se tiene

$$\det(A) = \left[1 + \frac{a}{u^* + d} - \frac{au^*}{(u^* + d)^2} \right] bu^* = \left[1 + \frac{ad}{(u^* + d)^2} \right] bu^* > 0$$

Para todo $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$ y luego (2.24) siempre se satisface. Entonces, el dominio de estabilidad queda enteramente determinado por (2.2), es decir, $Tr(A) < 0$, lo cual al reemplazar u^* y de nuevo usando (2.22) queda de la forma

$$b > \left[a - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2} \right] \frac{[1 + a + d - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2}]}{2a}.$$

Para cualquier valor de $(a, b, d) \in \mathbb{R}_+^3$ satisface esta desigualdad, se obtiene un retrato de fase topológicamente equivalente en donde (u^*, v^*) es un equilibrio atractor.

La frontera de este dominio de estabilidad queda definida por la ecuación

$$b = \left[a - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2} \right] \frac{[1 + a + d - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2}]}{2a} \quad (2.25)$$

La cual representa una superficie en el primer octante del espacio (a, b, d) en esta superficie, el equilibrio (u^*, v^*) es no-hiperbólico (¿Por qué?). más aún, cada vez que un punto (a, b, d) cruza esta superficie pasando desde la región $Tr(A) < 0$ hacia $Tr(A) > 0$ o viceversa, el equilibrio (u^*, v^*) cambia su estabilidad. Es decir, a cada lado de esta superficie el sistema (2.21) tiene retratos de fase no equivalentes. Decimos que (2.25) define una superficie de bifurcación.

Variedades invariantes

Hasta el momento hemos visto principalmente métodos para determinar existencia y estabilidad local de puntos de equilibrio. Más aún, excepto condiciones muy específicas, solamente podemos describir la dinámica en una vecindad de puntos. La linealización y la equivalencia topológica implicadas en el teorema Hartman-Grobman son propiedades locales. En consecuencia, sabemos muy poco sobre propiedades más globales de un sistema dinámico y sobre cómo “pegar” distintas informaciones para obtener un retrato de fase completo.

Esto es de especial importancia si hay más de un conjunto atractor en el espacio fase: ¿De qué manera debemos escoger una condición inicial para que su órbita finalmente converja a un punto atractor dado y no a otro? Por ejemplo, imaginemos una hoja que es llevada río abajo por la corriente. Si una roca se ubica en el centro del río, entonces, podemos esperar que la hoja pase o bien por la derecha de la roca o por el lado izquierdo. Solamente habrá un conjunto especial de órbitas posibles para las cuales la hoja llega justo a la roca. Estas órbitas especiales determinan la frontera entre pasar a uno u otro lado de la roca y seguir río abajo. Si imaginemos que la roca es una analogía para un punto de equilibrio de sistema, entonces este equilibrio sería de tipo silla y aquellas *órbitas especiales* que convergen a este equilibrio forman un conjunto de órbitas llamado la *variedad estable*.

Definición Sea x^* un punto de equilibrio hiperbólico del campo de vectores

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Definimos las **variedades estable e inestable locales** de x^* como:

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U: \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, y \Phi^t(x) \in U, \forall t \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(x^*) = \{x \in U: \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty, y \Phi^t(x) \in U, \forall t \leq 0\},$$

Donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad de x^* .

Teorema (variedad estable) Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r, r \geq 1, \quad (2.26)$$

Posee un punto de equilibrio hiperbólico x^* . Entonces existen los conjuntos $W_{loc}^s(x^*)$ y $W_{loc}^u(x^*)$. Estos conjuntos son variedades diferenciales de dimensiones $n_s = \dim E^s(x^*)$, y con el mismo grado de diferenciabilidad r que f . Además $W_{loc}^s(x^*)$ es invariante bajo el flujo Φ^t de (2.26) para $t > 0$ y tangente a $E^s(x^*)$ en x^* ; análogamente, $W_{loc}^u(x^*)$ es invariante bajo el flujo Φ^t de (2.26) para $t < 0$ y es tangente a $E^u(x^*)$ en x^* .

La figura 2.6 muestra bosquejos de las variedades invariantes $W_{loc}^s(x^*)$ y $W_{loc}^u(x^*)$ en un sistema bidimensional.

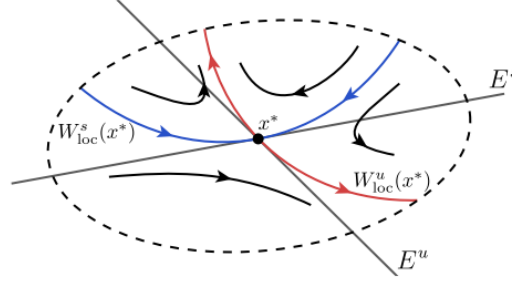


Figura 2.6: Bosquejo de las variedades estable e inestable locales $W_{loc}^s(x^*)$ y $W_{loc}^u(x^*)$ de un punto silla en un sistema bidimensional continuo.

Las variedades invariantes locales poseen análogos *globales* obtenidos al permitir que los puntos $W_{loc}^s(x^*)$ fluyan hacia atrás en el tiempo y aquellos en $W_{loc}^u(x^*)$ fluyan hacia adelante:

$$W_{loc}^s(x^*) = \bigcup_{t \leq 0} \Phi^t(W_{loc}^s(x^*)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow \infty\},$$

$$W_{loc}^u(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \Phi^t(W_{loc}^u(x^*)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\},$$

OBSERVACIONES.

1. La existencia y unicidad de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias implica que las variedades estable (resp. inestable) de dos puntos de equilibrio distintos no se pueden intersectar. Por el mismo argumento, una variedad estable (resp. inestable) no se puede intersectar a sí misma.
2. La intersección de variedades estables con inestables si puede ocurrir a lo largo de órbitas **homoclínicas** y **heteroclínicas**. En muchos casos, estas órbitas son la fuente de la mayoría de los comportamientos caóticos hallados en sistemas dinámicos.
3. En general, no es posible encontrar expresiones analíticas para variedades estable e inestable, y uno debe recurrir a herramientas numéricas y computacionales para encontrarlas.

Sistemas dinámicos a tiempo discreto

Estudiaremos las propiedades de los elementos de un sistema dinámico definidos mediante la composición o iteración de mapeos.

$$x \mapsto g(x)$$

O, equivalentemente, como ecuaciones en recurrencia de la forma

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Ejemplo Considere la aplicación lineal unidimensional $x \mapsto \mu x, x \in \mathbb{R}$, donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Claramente $x = 0$ es el único punto fijo y su estabilidad depende de μ . Se tienen los siguientes casos:

1. $\mu > 1$: Dado que $x_{n+1} = \mu x_n$, se tiene que la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \mu \quad (3.1)$$

- Es mayor que 1. Luego, si $x_0 \neq 0$, la sucesión $\{x_n\}$ posee magnitud monótonamente creciente como en la figura 3.1 (a). Luego, el origen es un repulsor.
2. $0 < \mu < 1$: De (3.1) se tiene que el origen es un atractor. Si $x_0 \neq 0$, la órbita $\{x_n\}$ converge monótonamente al origen como en la figura 3.1 (b).
 3. $-1 < \mu < 0$: De la igualdad (3.1) se desprende que, si x_0 , la órbita $\{x_n\}$ también converge al origen pero alterando entre valores positivos y negativos como en la figura .1 (c). Luego, el origen es un atractor, pero el mapeo invierte la orientación de movimiento.
 4. $\mu < -1$: El origen es un repulsor que la orientación como en la figura .1 (d).

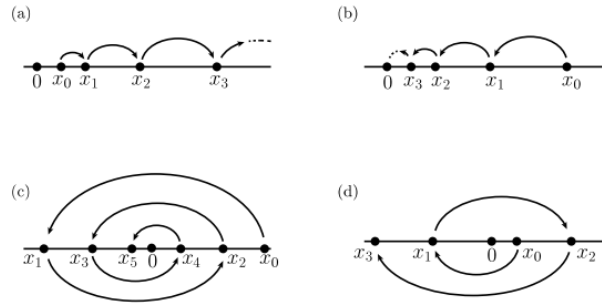


Figura .1: Retratos de fase del sistema $x \mapsto \mu x$ par los distintos valor de μ .

Teorema (Principio de Contracción) Sea X un espacio métrico completo con distancia ρ . Supongamos que existe una aplicación $g: X \rightarrow X$ continua tal que

$$\rho(g(x), g(y)) \leq \lambda \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

Para alguna constante $0 < \lambda < 1$. Entonces el sistema dinámico discreto dado por $x \mapsto g(x)$ tiene un único punto fijo atractor $x^* \in X$. Más aún, $g^k \rightarrow x^*$ cuando $k \mapsto \infty$, para cualquier punto $x \in X$.

Estabilidad de puntos fijos hiperbólicos

En general, si x^* es un punto fijo de un sistema dinámico discreto, suave, finito-dimensional, entonces podemos formular condiciones suficientes para su estabilidad en términos de matriz Jacobiana evaluada en x^* . Consideremos un sistema dinámico discreto $x \mapsto g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde g es suficientemente diferenciable junto con su inversa g^{-1} (es decir, g es un C^k -difeomorfismo, para algún $k \geq 1$ suficientemente grande). Sin pérdida de generalidad, sumamos que $x^* = 0$ es un punto fijo sistema, es decir, $g(0) = 0$, y sea $A = Dg(x^*)$ la matriz Jacobiana de g evaluada en x^* con valores propios

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n.$$

Notemos que, si la matriz A es invertible, entonces ninguno de estos valores propios es cero.

Definamos las siguientes cantidades:

- n_s : Número de valores propios de x^* con norma menor a 1.
- n_u : Número de valores propios de x^* con norma mayor a 1.
- n_c : Número de valores propios de x^* con norma igual a 1.

En otras palabras, n_s, n_u y n_c son el número de valores propios de A dentro, fuera y sobre el círculo unitario $\{\mu \in \mathbb{C}: |\mu| = 1\}$, respectivamente.

Definición Un punto fijo se dice **hiperbólico** si $n_c = 0$.

Teorema (Hartman-Grobman) Sea $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 -difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico en $x^* = 0$. Entonces existe un homeomorfismo h definido en alguna vecindad U de x^* tal que

$$h(g(x)) = Dg(x^*)h(x), \quad \forall x \in U$$

Análogamente al caso continuo, el teorema de Hartman-Grobman nos dice que si x^* es un punto hiperbólico (sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x^* = 0$), el mapeo g es localmente topológicamente al mapeo lineal $u \mapsto Dg(x^*)u$ en una vecindad del origen.

OBSERVACIONES.

1. Los valores propios de un punto son comúnmente llamados multiplicadores por razones que quedaran más claras más adelante.
2. En el caso lineal ($g(x) = Ax$), el teorema es inmediato al escribir A en su forma estándar diagonal o de Jordan.

Definición Sea A un difeomorfismo lineal hiperbólico en \mathbb{R}^n , es decir, $x \mapsto Ax$, donde A es una matriz $n \times n$ invertible con ningún valor propio sobre el círculo unitario. Definimos el espacio estable de A —denotamos por E^s — como el subconjunto generado por los vectores propios (generalizados) de A correspondientes a los valores propios con módulo menor a 1. Similarmente, el espacio inestable de A —denotamos por E^u — es el subespacio generado por los vectores propios (generados) de A correspondientes a los valores propios con módulo mayor a 1.

De esta definición se desprende inmediatamente que $\dim E^s = n_s$ y $\dim E^u = n_u$. Análogamente al caso continuo, las órbitas en E^s y E^u están caracterizadas por contracción y expansión, respectivamente. Si todos los valores propios de A son simples, entonces las contracciones y expansión están acotadas por series geométricas. Es decir, existen constantes $c > 0$ $\alpha < 1$ tales que para $n \geq 0$,

$$|x_n| \leq c \alpha^n |x_0|, x_0 \in E^s$$

$$|x_{-n}| \leq c \alpha^n |x_0|, x_0 \in E^u$$

(3.2)

(si hay valores múltiples, la tasa de expansión (contracción) puede que no sea exponencial)

Definición 18 Sea A un difeomorfismo lineal hiperbólico en \mathbb{R}^n . Definimos las restricciones de A a sus subespacios estables e inestables por $A_s = A|_{E^s}$ y $A_u = A|_{E^u}$, respectivamente. En particular, A_s (resp. A_u) es un difeomorfismo lineal hiperbólico atractor (resp. Repulsor) en \mathbb{R}^{n_s} (resp. \mathbb{R}^{n_u}).

Teorema Considere un sistema dinámico discreto

$$x \mapsto g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Donde g es una función suave. Suponga que g tiene un punto fijo x^* hiperbólico, es decir, $g(x^*) = x^*$ y denotamos

$$A = Dg(x^*)$$

La matriz Jacobiana de g evaluada en x^* . Entonces, x^* es atractor si $n_s = n$, es decir, todos los valores propios $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ de A satisfacen

$$|\mu_i| < 1$$

En caso contrario, si $n_u = n$, i.e., $|\mu_i| > 1$, para todo $i = 1, \dots, n$, entonces x^* es repulsor. Por otro lado, si el producto $n_s n_u \neq 0$, x^* es un punto silla.

Estabilidad de órbitas periódicas

Podemos usar los resultados de esta sección para estudiar la estabilidad de una órbita periódica

$$\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

de período k del mapeo g , también llamado un k -ciclo. Concretamente, cada uno de los puntos $x_i \in \gamma$ es un punto fijo de g^k , la k -ésima iteración de g . Por lo tanto, el k -ciclo γ del mapeo $x \mapsto g(x)$ es estable si y sólo si cada punto $x_i \in \gamma$ es un punto fijo estable de $x \mapsto g^k(x)$. En general, la estabilidad de cualquier punto $x_i \in \gamma$ como punto fijo de g^k es la misma estabilidad del ciclo γ completo con respecto a g .

Veamos el caso particular de $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g \in C^1$. Para un 2-ciclo $\{x_1, x_2\}$ con $x_2 = g(x_1)$ y $x_1 = g(x_2)$, tenemos:

$$(g \circ g)'(x_1) = g'(g(x_1))g'(x_1) = g'(x_2)g'(x_1)$$

Luego x_1 es un punto fijo estable de g^2 si y solo si $|g'(x_2)g'(x_1)| < 1$; y en consecuencia, el 2-ciclo $\{x_1, x_2\}$ es estable si y solo si $|g'(x_2)g'(x_1)| < 1$.

Para un 3-ciclo $\{x_1, x_2, x_3\}$ tenemos

$$(g \circ g \circ g)'(x_1) = g'(g(g(x_1)))g'(g(x_1))g'(x_1) = g'(x_3)g'(x_2)g'(x_1),$$

de donde podemos concluir sobre la estabilidad de manera análoga. Inductivamente, en el caso general para un k -ciclo obtenemos:

$$(g^k)'(x_1) = g'(x_1)g'(x_2) \cdots g'(x_{k-1})g'(x_k)$$

Luego, se desprende el siguiente resultado.
Proposición 2 Considere una órbita periódica

$$\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

de período k del mapeo $x \mapsto g(x), x \in \mathbb{R}, g \in C^1$. Si

$$|g'(x_1)g'(x_2) \cdots g'(x_{k-1})g'(x_k)| < 1$$

entonces el k -ciclo es estable; en cambio, si

$$|g'(x_1)g'(x_2) \cdots g'(x_{k-1})g'(x_k)| > 1$$

el k -ciclo es inestable.

Ejemplo 30 Encontramos todas las órbitas 2-periódicas de $g(x) = 1 - x^2, x \in [-1,1]$ y determinemos su estabilidad.

En primer lugar, busquemos los puntos fijos de $x \mapsto 1 - x^2, x \in [-1,1]$. Resolviendo para $x^2 + x - 1 = 0$ se obtienen los puntos fijos $x_1^* = -1/2 - \sqrt{5}/2, x_2^* = -1/2 + \sqrt{5}/2$. Notemos que $x_1^* \notin [-1,1]$ y $x_2^* \in [-1,1]$. Además, $g'(x) = -2x$; luego, $g'(x_2^*) \approx -1,23607$. Por lo tanto x_2^* es inestable.

Para hallar los 2-ciclos consideremos

$$f^2(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$$

Pero notemos que x_1^*, x_2^* también son puntos fijos de f^2 . Luego,

$$f^2(x) = x \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

Es decir, $f^2(x) - x$ es factorizable por $x^2 + x - 1 = (x - x_1^*)(x - x_2^*)$. Por lo tanto, el 2ciclo corresponde a la órbita $\{0,1\}$, con estabilidad dada por $|f'(0)f'(1)| = 0 < 1$. Luego, el 2-ciclo es estable.

Variedades invariantes de puntos fijos

En el caso discreto se tienen resultados análogos a los vistos para sistemas dinámicos continuos. En particular tenemos...

Teorema 15 (Variedad estable para mapeos) Sea $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase $C^r, r \geq 1$, con un punto fijo hiperbólico x^* . Sea $x \mapsto Bx$, con $B = Dg(x^*)$, la linealización de g en x^* . Entonces existen variedades estable e inestable locales $W_{loc}^s(x^*)$ y $W_{loc}^u(x^*)$, tangentes a los subespacios lineales $E^s(x^*)$ y $E^u(x^*)$ y de dimensiones $n_s = \dim E^s(x^*)$ y $n_u = \dim E^u(x^*)$, respectivamente. Además, $W_{loc}^s(x^*)$ y $W_{loc}^u(x^*)$ poseen la misma diferenciabilidad de clase C^r que g .

En este caso las variedades estable e inestable se definen de forma similar como para flujos. Tenemos:

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U: g^n(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } n \rightarrow \infty, y g(x) \in U, \forall n \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(x^*) = \{x \in U: g^{-n}(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } n \rightarrow \infty, y g^{-n}(x) \in U, \forall n \geq 0\},$$

Donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad de x^* . Análogamente, definimos las variedades estable e inestable globales, al tomar uniones de iteraciones en reserva y hacia adelante, respectivamente, de las variedades locales:

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} g^n(W_{loc}^s(x^*))$$

$$W^u(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} g^n(W_{loc}^u(x^*))$$

Notemos que, a diferencia del caso continuo, las variedades invariantes de mapeos son uniones de orbitas discretas. Esto se ilustra en la figura 3.4.

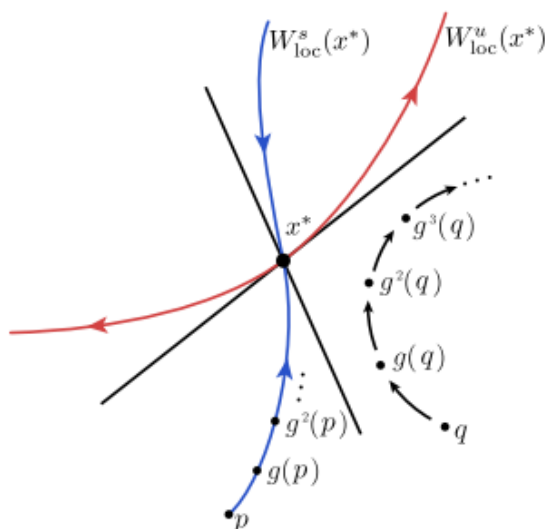


Figura 3.4: bosquejo de las variedades estable e inestable locales $W_{loc}^s(x^*)$ y $W_{loc}^u(x^*)$ de un punto fijo silla en un sistema bidimensional discreto.

Relaciones entre dinámica continua y dinámica discreta

Existen varias maneras de construir nuevos sistemas dinámicos a partir de uno dado. La aplicación de retorno de Poincaré (vista en cualquier curso de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales y que veremos también más adelante) es uno de los ejemplos más comunes. Estas construcciones nos dan una indicación de cómo traducir resultados para sistemas dinámicos en tiempo continuo a aquellos con tiempo discreto, y viceversa.

Además de la aplicación de retorno de Poincaré, tenemos...

Suspensión

Es una construcción general por la cual uno "extiende" un sistema a tiempo discreto para obtener un sistema a tiempo continuo. En cierto sentido, es casi el proceso inverso al mapeo de retorno de Poincaré. Más formalmente, si comenzamos con una aplicación invertible $\varphi: X \rightarrow X$ como sistema dinámico a tiempo discreto con $T = \mathbb{Z}$, entonces el nuevo sistema a tiempo continuo está definido en el espacio cociente $\tilde{X} = X \times \mathbb{R}/\sim$, donde \sim representa la relación de equivalencia dada por

$$(x_1, s_1) \sim (x_2, s_2) \Leftrightarrow s_2 - s_1 \in \mathbb{Z} \text{ y } \varphi^{s_2 - s_1}(x_2) = x_1$$

Otra forma de construir \tilde{X} es tomar $X \times [0,1]$ e identificar los "bordes" $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ tal que los puntos $(x, 0)$ y $(\varphi^1(x), 1)$ "se peguen".

Tomando el mapeo en tiempo τ

Si comenzamos con un sistema dinámico con $T = \mathbb{R}$, podemos obtener un nuevo sistema dinámico al restringir el operador de evolución o flujo Φ^t al conjunto de tiempos

$$T' = \{n\tau \mid n \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}_+\}$$

para algún $\tau > 0$ fijo. Éste es otro ejemplo de cómo un flujo continuo da origen a una dinámica discreta asociada. Esta construcción tiene un interés teórico pues muchos métodos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales se basan en (una aproximación de) un mapeo a tiempo τ , usualmente para un valor de τ pequeño.

Propiedades generales de los retratos de fase

Definición 4 Un conjunto invariante de un sistema dinámico es un subconjunto $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$ entonces $\Phi^t(x_0) \in S, \forall t \in T$. En particular, esta definición implica que $\Phi^t(S) \subseteq S, \forall t \in T$.

OBSERVACIONES

1. Un conjunto invariante S consiste de órbitas de un sistema dinámico.
2. Cualquier órbita individual $\mathcal{O}(x_0)$ es obviamente un conjunto invariante por sí misma. Por lo tanto, puntos de equilibrio y órbitas periódicas son conjuntos invariantes.
3. Siempre es posible restringir el operador Φ^t a un conjunto invariante y considerar el operador

$$\Psi^t = \Phi^t|_S: S \rightarrow S$$

inducido por Φ^t en S .

4. Si el espacio de estados X posee una métrica ρ , podemos considerar conjuntos invariantes cerrados en X . Por ejemplo, con la métrica euclidiana usual podemos tener los siguientes conjuntos invariantes cerrados:

a) Puntos de equilibrio y órbitas periódicas.

b) En muchos sistemas a tiempo continuo aparecen toros topológicos en los cuales la dinámica es invariante. Un ejemplo concreto ocurre siempre que un sistema exhibe un fenómeno conocido como bifurcación Neimark-Sacker; hablaremos de ello más adelante en el capítulo sobre teoría de bifurcaciones.

c) Algunos sistemas dinámicos diferenciables, invertibles y definidos por ecuaciones (algebraicamente) muy simples pueden llegar a tener conjuntos invariantes cerrados extremadamente complicados de describir. Por ejemplo, veremos más adelante que el sistema dinámico discreto planar conocido como la herradura de Smale - un ejemplo clásico de sistema caótico- posee un conjunto invariante cerrado Λ que contiene un número infinito de órbitas periódicas y aperiódicas. Este conjunto invariante Λ es (en algún sentido) equivalente a un conjunto de Cantor bidimensional; sin embargo, la restricción de la dinámica a Λ se comporta como una dinámica simbólica como la del mapeo shift (!).

Capítulo 2

Teoría de bifurcación

2.1. Sistemas dinámicos a tiempo continuo

Bifurcaciones

Bifurcación silla-nodo

Bifurcación transcítica

Bifurcación Pitchfork

Bifurcación de Poicaré-Andronov-Hopf

Bifurcaciones en sistemas n-dimensionales

2.2 Sistema dinámico a tiempo discreto

Bifurcaciones

Bifurcación silla-nodo

Bifurcación flip

Bifurcación Neimarc-Sacker

Bifurcaciones

Bifurcaciones sistemas dinámicos a tiempo continuo

En la teoría de sistemas dinámicos, uno puede tomar en cuenta cualquier incerteza del modelo mediante la variación de los parámetros del mismo. No sabemos exactamente el valor del coeficiente de fricción para el péndulo planar amortiguado, pero hay uno; no sabemos exactamente el efecto inhibitorio de una especie sobre otra, pero parece haber uno; etcétera. Por lo tanto, el modelo es típicamente de la forma general

$$\dot{x} = f(x; \lambda),$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Puede que solo se sepa que el valor del parámetro λ se halla en un cierto intervalo o región. Sin conocer exactamente λ , ¿qué se puede decir sobre el sistema? Recordemos el ejemplo de las especies en competencia. La extinción de una especie depende en realidad de si α y β son menores que 1. Para cualquier valor de $\alpha, \beta < 1$ obtenemos un retrato de fase topológicamente equivalente, el cual no es topológicamente equivalente al retrato de fase para el caso $\beta < 1 < \alpha$.

Definición considere el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \lambda),$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que el retrato de fase del sistema para una elección particular de $\lambda = \lambda_1$ es topológicamente diferente al retrato de fase para otra elección $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1$. Si la diferencia entre λ_1 y λ_2 es suficientemente pequeña, entonces existe un único λ^* con $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$ tal que el retrato de fase para cualquier $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$ es topológicamente equivalente al de λ_2 . Decimos que λ^* es un valor de bifurcación; es el valor del parámetro en el cual el sistema sufre una bifurcación, es decir, un cambio cualitativo de la dinámica.

Bifurcación Silla-Nodo

La bifurcación silla-nodo se caracteriza por el hecho de que a un lado de la bifurcación existen dos equilibrios, mientras que al otro lado estos dos equilibrios han desaparecido. Podemos pensar en el momento de la bifurcación como aquel momento donde de dos equilibrios colisionan. En sistemas bidimensionales justamente uno de los equilibrios que interviene en un nodo y el otro es una silla, lo cual le da el nombre a estas bifurcaciones (silla-nodo). La bifurcación silla-nodo puede aparecer en cualquier sistema y es, de hecho, una bifurcación muy típica que sucede al mover un parámetro. Quizás debido a que esta bifurcación muy típica que sucede al mover un parámetro. Quizás debido a que esta bifurcación es tan típica, posee muchos otros nombres. La bifurcación silla-nodo también se le conoce como bifurcación fold, bifurcación tangente limit point.

Ejemplo Consideremos el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \lambda) = \lambda - x^2$$

donde $x \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que pueden existir dos equilibrios $x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Estos equilibrios solo existen (en \mathbb{R}) si $\lambda > 0$. La matriz Jacobiana es $Df(x, \lambda) = -2x$. Luego, en $x_1 = \sqrt{\lambda}$ tenemos un valor propio $-2\sqrt{\lambda} < 0$, así x_1 es un atractor; y en $x_2 = -\sqrt{\lambda}$ tenemos un valor propio $2\sqrt{\lambda} > 0$, y x_2 es un repulsor.

Hay varias maneras de visualizar esta bifurcación. Por ejemplo, podemos dibujar todos los retratos de fase topológicamente diferentes como en la Figura 2.8:

1. Una línea de fase representativa para un valor $\lambda > 0$ arbitrario. La dinámica que se obtiene consiste lo siguiente: soluciones con $x_0 > x_1$ son decrecientes y convergen al equilibrio estable x_1 para $t \rightarrow \infty$, órbitas con $x_2 < x_0 < x_1$ son crecientes y también convergen a x_1 , mientras que las soluciones con $x_0 < x_2$ son decrecientes y se alejan de x_2 .
2. Otra línea de fase para $\lambda = 0$ (un equilibrio semiestable en el origen, estable por la derecha e inestable por la izquierda);
3. Y finalmente una línea de fase representativa para un valor $\lambda < 0$ arbitrario (no hay equilibrios y flujo simplemente corre de derecha a izquierda).

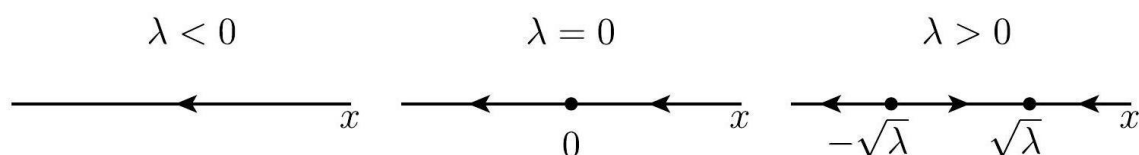


Figura 2.8: Retratos de fase no equivalentes del sistema $\dot{x} = \lambda - x^2$.

Definición Decimos que un campo de vectores particulares $y' = g(y, \mu)$ es una forma normal (topológica) del campo vectorial $x' = f(x, \lambda)$ si existe un punto (y_0, μ^*) tal que en la vecindad de algún punto (x_0, λ^*) y de (y_0, μ^*) , los diagramas de bifurcación son parámetros donde los respectivos retratos de fase son topológicamente equivalentes son las mismas, y que en cada región ambos campos vectoriales poseen retratos de fase topológicamente equivalentes.

Esta definición nos permite identificar condiciones suficientes para decidir si un sistema dado exhibe o no una cierta bifurcación. El objeto es encontrar una forma normal que venga dada de la manera más simple posible. En el caso de la bifurcación silla-nodo tenemos el siguiente teorema.

Teorema (Bifurcación Silla-nodo) Sea

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

Donde $x \in \mathbb{R}$, y $\mu \in \mathbb{R}$. Si las siguientes condiciones se satisfacen

(B1) $f(x_0, \mu^*) = 0$, "Existe un equilibrio x_0 para $\mu = \mu^*$ "

(B2) $Df(x_0, \mu^*) = 0$, "Valor propio cero en x_0 para $\mu = \mu^*$ "

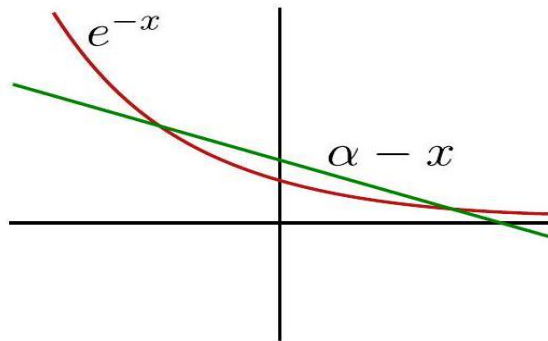
(G1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, "Término de 2do orden de f no se anula en (x_0, μ^*) ";
 (G2) $\frac{\partial}{\partial \mu} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, "Velocidad no-nula en μ ", entonces (2.32) posee la forma normal topológica

$$\dot{y} = \lambda \pm y^2$$

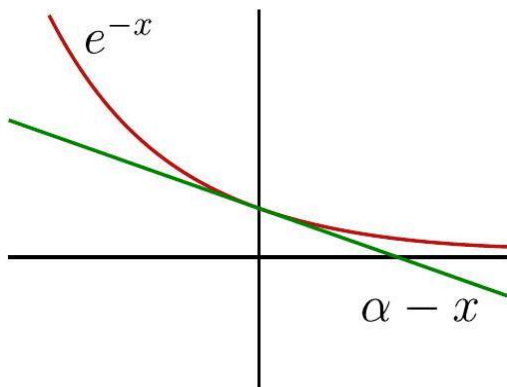
en una vecindad de (x_0, μ^*) . Por conveniencia, uno suele trasladar el equilibrio (x_0, μ^*) al origen, esto es, a $(0,0)$. (B1) y (B2) son llamadas condiciones de bifurcación; se deben satisfacer para encontrar la bifurcación. (G1) y (G2) son llamadas condiciones de genericidad; son propiedades que se satisfacen en forma "típica" (Por el contrario, si no se satisficieran, uno estaría frente a un caso "atípico", poco usual o no-genérico). Ejemplo 22 Considere el campo de vectores unidimensional

$$\dot{x} = \alpha - x - e^{-x}$$

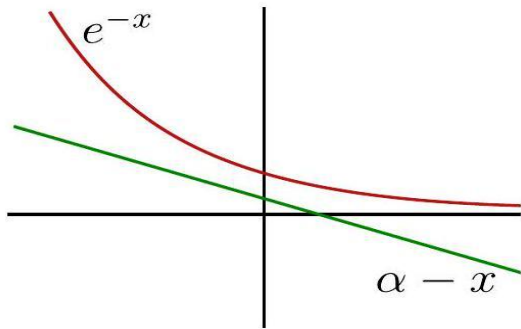
con parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. Al comparar las gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ hallamos las gráficas de la Figura 2.11.



$\alpha > 1$



$$\alpha = 1$$



$$\alpha < 1$$

Figura 2.11: Posibles gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ para distintos valores del parámetro α .

Para hallar el punto de bifurcación α^* , necesitamos que las gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ se intersecten tangencialmente. Luego, tanto las funciones como sus derivadas con respecto a x deben coincidir:

$$\begin{cases} e^{-x} = \alpha - x \\ \frac{d}{dx} e^{-x} = \frac{d}{dx} (\alpha - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x} = \alpha - x \\ -e^{-x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Luego, el punto de bifurcación es $\alpha^* = 1$, y la bifurcación ocurre en $x_0 = 0$. A continuación movemos el punto $(\alpha^*, x_0) = (1, 0)$ al origen por medio del cambio de coordenadas $\alpha = \lambda + 1$, $y = x$. El nuevo campo de vectores en términos de y y λ es

$$\dot{y} = \dot{x} = \alpha - x - e^{-x} = 1 + \lambda - y - e^{-y} =: f(y, \lambda).$$

Se verifica que (B1) $f(0,0) = 0$, (B2) $f_y(0,0) = -1 + e^{-y}|_{y=0} = 0$, (G1) $f_{yy}(0,0) = -e^{-y}|_{y=0} = -1 \neq 0$, and (G2) $f_\lambda(0,0) = 1 \neq 0$. Luego, efectivamente, se trata de una bifurcación silla-nodo.

Alternativamente, usando la expansión de Taylor para e^{-x} alrededor de $x = 0$ encontramos

$$\dot{x} = \alpha - x - e^{-x} = \alpha - x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) = (\alpha - 1) - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Éste tiene la misma forma algebraica que $\dot{y} = \lambda - y^2$, y coincide exactamente mediante apropiados rescalamientos de x y α . En general, la teoría de bifurcaciones nos dice dónde podemos cortar la expansión en serie de Taylor sin alterar topológicamente ningún retrato de fase en una vecindad de (x_0, λ^*) .

La bifurcación silla-nodo está asociada con un valor propio "pasando por" cero. Hay otras dos bifurcaciones que tienen esta misma característica. Son la bifurcación transcítica y la pitchfork. Estas bifurcaciones solo pueden ocurrir bajo circunstancias especiales.

Bifurcación Transcrítica

La bifurcación transcítica solo sucede cuando el sistema posee un equilibrio que existe para todos los valores del parámetro y nunca puede ser destruido. Cuando este equilibrio colisiona con otro, los dos equilibrios intercambian su estabilidad, pero siguen existiendo tanto antes como después de la bifurcación. Entonces, es como si los dos equilibrios "pasaran uno sobre otro".

Ejemplo 23 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{y} = f(y, \lambda) = \lambda y - y^2 = y(\lambda - y)$$

donde $y \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que siempre existen dos equilibrios $y_1 = 0$ y $y_2 = \lambda$. Estos equilibrios existen para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. La matriz Jacobiana es $Df(y, \lambda) = \lambda - 2y$. Luego, en $y_1 = 0$ tenemos un valor propio λ ; así y_1 es un atractor si $\lambda < 0$ y es repulsor si $\lambda > 0$. Por otro lado, en $y_2 = \lambda$ tenemos el valor propio $-\lambda$; luego, y_2 es un repulsor si $\lambda < 0$ y es atractor si $\lambda > 0$.

La bifurcación transcítica es típica de sistemas donde un equilibrio está presente independiente de los valores del parámetro. La figura 2.12 muestra el diagrama de bifurcación del sistema $\dot{y} = \lambda y - y^2$. Notemos que, en el plano (λ, y) , los equilibrios se ubican sobre el conjunto de nivel cero de $f(y, \lambda) = \lambda y - y^2 = y(\lambda - y) = 0$.

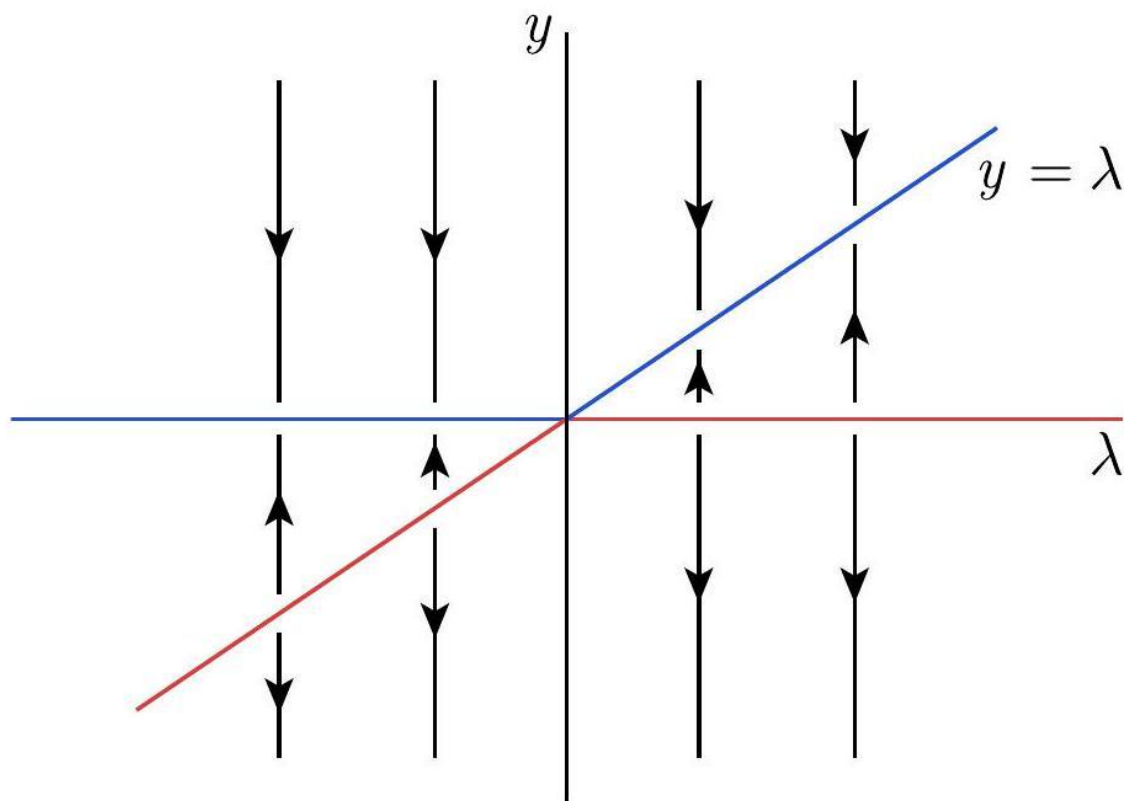


Figura 2.12: El diagrama de bifurcación para el sistema $\dot{y} = \lambda y - y^2$.

Teorema (Bifurcación Transcrítica)

Sea

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \#(2.33)$$

donde $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, y f es de clase C^2 . Si las siguientes condiciones se satisfacen

1. $f(0,0) = 0$;
2. $Df(0,0) = f_x(0,0) = 0$;
3. $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$;
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$;
5. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$;

entonces (2.33) posee la forma normal topológica

$$\dot{y} = \lambda y \pm y^2$$

en una vecindad de $(x_0, \mu^*) = (0,0)$.

Recordemos que en el sistema (2.2) de especies en competencia, los equilibrios $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ siempre están presentes sin importar los valores de α y β . De hecho, si α o β pasan por

el valor 1, el equilibrio (0,1) o (1,0), respectivamente, pasa por una bifurcación transcritical. Este sistema posee dos rectas invariantes, a saber, tanto el eje x como el eje y son invariantes.

Bifurcación Pitchfork

La bifurcación pitchfork solo existe cuando hay una simetría de reflexión presente en el sistema. De hecho, en el mismo sentido que la bifurcación silla-nodo es típica para sistemas dinámicos arbitrarios, la bifurcación pitchfork es típica en sistemas dinámicos con simetría de reflexión. La forma normal es

$$\dot{y} = \lambda y \pm y^3$$

Este sistema posee simetría de reflexión en $\{y = 0\}$. Es decir, si se define $\tilde{y} = -y$, obtenemos la misma ecuación para \tilde{y} que para y .

Ejemplo 24 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{y} = f(y, \lambda) = \lambda y - y^3 = y(\lambda - y^2),$$

donde $y \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Este sistema posee simetría de reflexión en $\{y = 0\}$. Es decir, si se define $u = -y$, obtenemos la misma ecuación para \dot{u} que para \dot{y} . Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que siempre existe un equilibrio $y_1 = 0$ en el origen. Además, si $\lambda > 0$ tenemos otros dos equilibrios simétricos en $y_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}$. La matriz Jacobiana es $Df(y, \lambda) = \lambda - 3y^2$. Luego, en $y_1 = 0$ tenemos un valor propio λ ; así y_1 es un atractor si $\lambda < 0$ y es repulsor si $\lambda > 0$. Por otro lado, en $y_{2,3}$ tenemos el valor propio -2λ ; luego, $y_{2,3}$ son ambos atractores.

La figura 2.13 muestra el diagrama de bifurcación del sistema $\dot{y} = \lambda y - y^3$. Notemos que, en el plano (λ, y) , los equilibrios se ubican sobre el conjunto de nivel cero de $f(y, \lambda) = y(\lambda - y^2) = 0$. El cuadro que emerge en la figura 2.13 es como la de un tenedor o tridente (pitchfork, en inglés), lo cual le da el nombre a esta bifurcación.

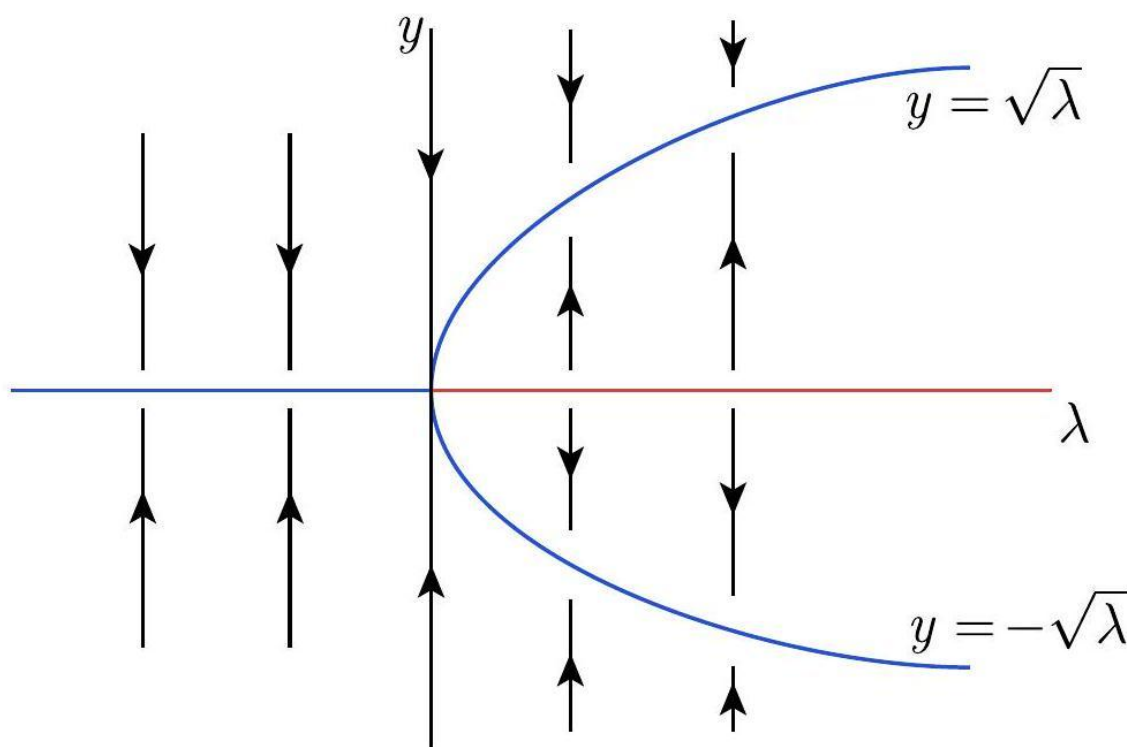


Figura 2.13: El diagrama de bifurcación para el sistema $\dot{y} = \lambda y - y^3$ (caso supercrítico).

Teorema (Bifurcación Pitchfork) Sea

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \#(2.34)$$

donde $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, y f es de clase C^3 . Si las siguientes condiciones se satisfacen

1. $f(0,0) = 0$;
2. $Df(0,0) = f_x(0,0) = 0$;
3. $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$;
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$;
5. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$;
6. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$;

entonces (2.34) posee la forma normal topológica

$$\dot{y} = \lambda y \pm y^3$$

en una vecindad de $(x_0, \lambda^*) = (0,0)$.

En el teorema anterior, el signo \pm del término cúbico queda determinado por el signo de $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \lambda^*)$. Cuando el término cúbico es $-y^3$, decimos que la bifurcación pitchfork es supercrítica; cuando el término cúbico es $+y^3$, decimos que la bifurcación pitchfork es subcrítica. Discutiremos esto en más detalle para la bifurcación de Hopf en la sección siguiente.

Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

Cuando un par de valores propios complejos conjugados se mueve atravesando el eje imaginario, típicamente ocurre una bifurcación de Hopf. (Esta bifurcación está relacionada con la bifurcación pitchfork, como veremos más adelante.) Luego, para que esta bifurcación ocurra necesitamos que la dimensión del sistema sea al menos $n = 2$.

Consideremos el sistema

$$X: \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - \omega y + l_1 x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \omega x + \lambda y + l_1 y(x^2 + y^2) \end{cases} \#(2.35)$$

o en su forma matricial equivalente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + l_1(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \#(2.36)$$

Consideremos el punto de equilibrio en $(0,0)$. La matriz jacobiana asociada es:

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda \pm i\omega \in \mathbb{C}$. Claramente, si $\lambda < 0$ el origen es un foco estable hiperbólico, mientras que si $\lambda > 0$ el origen es un foco inestable hiperbólico. Sin embargo, para $\lambda = 0$, tenemos un equilibrio no-hiperbólico: a pesar que en la linealización, el origen sea un centro (con valores propios $\pm i\omega$), no podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman y concluir que también sea un centro en el sistema no lineal (2.35) o (2.36).

Por otro lado, sea $E(x, y) = x^2 + y^2$ y consideremos $\lambda > 0$. Notemos que

$$\langle X, \nabla E \rangle|_{\{x^2+y^2=\lambda\}} = 2x(\lambda x - \omega y + l_1 \lambda x) + 2y(\omega x + \lambda y + l_1 \lambda y) = 0$$

Por lo tanto, el campo X es ortogonal al vector ∇E en cada punto de la circunferencia $\gamma = \{x^2 + y^2 = \lambda\}$. Es decir, el campo X es tangente al círculo γ , y luego, γ es un ciclo límite.

Además, reescribiendo (2.35) o (2.36) en coordenadas polares obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda + l_1 r^2) \\ \dot{\phi} = \omega \end{cases} \#(2.37)$$

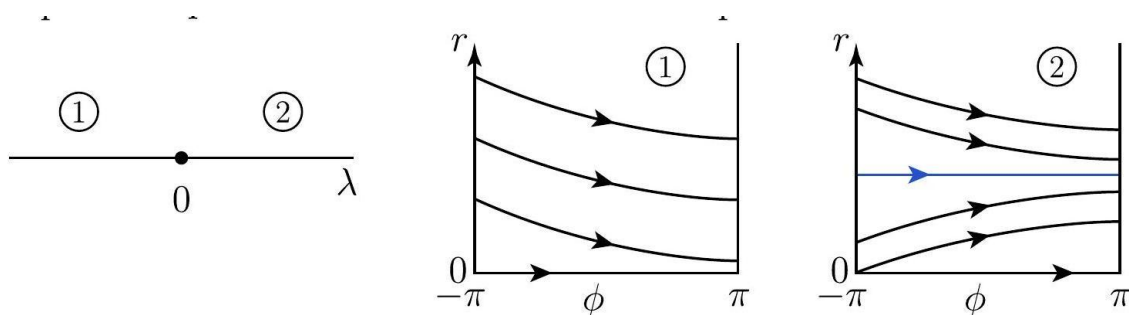
Es más fácil analizar este sistema en la forma (2.37), pues las dos ecuaciones son desacopladas. Notemos que $r \geq 0, -\pi \leq \phi \leq \pi$; al identificar $\phi = -\pi$ con $\phi = \pi$, obtenemos que las variables (r, ϕ) viven en un semicilindro. También, este sistema no posee equilibrios pues la variable ϕ varía continuamente con velocidad constante ω . Luego, todas las órbitas en el semicilindro fluyen monótonamente en la dirección de ϕ sin "detenerse". En particular, para $\lambda > 0$, el ciclo límite γ corresponde a $r = \sqrt{\lambda}$.

Consideremos el caso $l_1 = -1, \omega > 0$ constante, y variemos λ . Podemos analizar la ecuación para r separadamente y luego combinar las dos. Esto lleva al diagrama de bifurcación de la

figura 2.14. Si consideramos el sistema (2.37) en la forma (2.35) o (2.36), entonces el diagrama de bifurcación con retratos de fase en \mathbb{R}^2 es como en la figura 2.15.

Por lo tanto, la bifurcación de Hopf se caracteriza por la aparición de una órbita periódica. La amplitud de la órbita periódica es 0 al momento de la bifurcación

Espacio de parámetros



Espacio de fase

Figura 2.14: Diagrama de bifurcación de la ecuación 2.37 en el caso $l_1 = -1, \omega < 0$ constante.

Espacio de parámetros

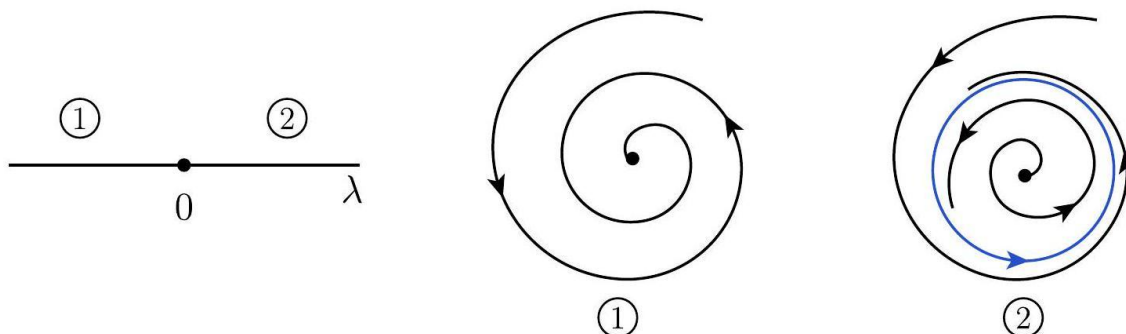


Figura 2.15: Diagrama de bifurcación de 2.36) en el caso $l_1 = -1, \omega < 0$ constante. ($\lambda = 0$) y crece como $\sqrt{\lambda}$ cuando $\lambda > 0$. La frecuencia de la órbita periódica, al comienzo de la bifurcación, es igual a ω , el valor absoluto de la parte imaginaria de los valores propios del punto de equilibrio. El equilibrio existe a ambos lados de la bifurcación, pero cambia de estabilidad cuando $\lambda = 0$. Para el sistema en la forma (2.37) podemos dibujar el diagrama de fase/parámetro en el plano (λ, r) e ignorar ϕ obteniendo la figura 2.16. Si el espacio de fase fuera $r \in \mathbb{R}$, en vez de $(r, \phi) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi)$, entonces tendría lugar una bifurcación pitchfork! (compare (2.37) con la forma normal de la bifurcación pitchfork).

El diagrama de bifurcación en el espacio de parámetros vs espacio de fase completo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ para el sistema en la forma (2.35) o (2.36) es un cuadro tridimensional como en la figura 2.17. De hecho, podemos ver la figura 2.16 en el plano (λ, r) como una sección transversal del

cuadro tridimensional de la figu-

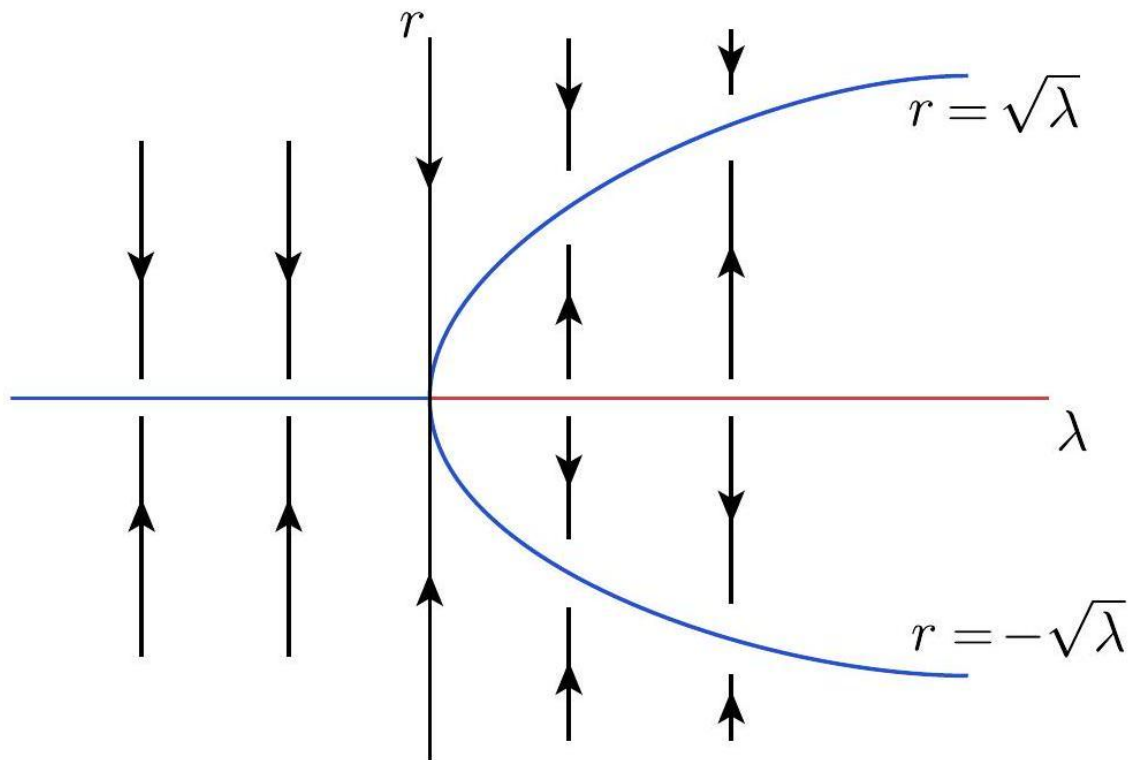


Figura 2.16: Diagrama de bifurcación de 2.37) en el espacio (λ, r) .
 ra 2.17 en el espacio (λ, x, y) cortando el plano (λ, x) o bien el plano (λ, y) . Los retratos de fase **1** y **2** en la figura 2.15 son secciones transversales cortando a través de planos $\lambda =$ constante en la figura 2.17, dependiendo del signo de λ . La órbita periódica que aparece en la bifurcación de Hopf se ubica en el paraboloides $x^2 + y^2 = \lambda$.

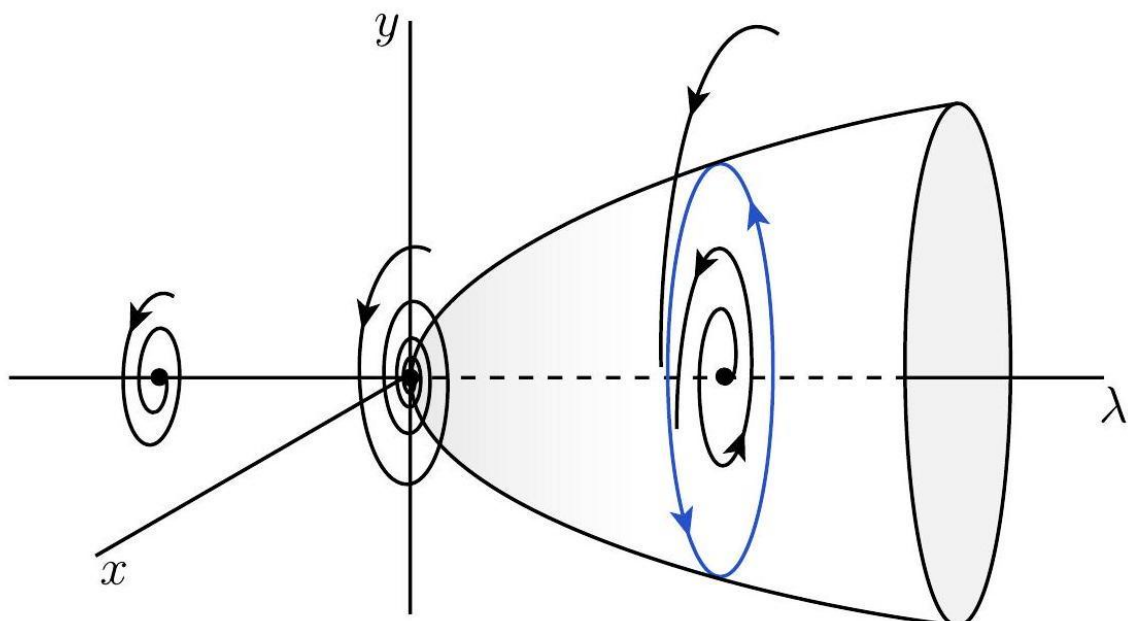


Figura 2.17: Retratos de fase de la forma normal de la bifurcación de Hopf si $l_1 < 0$.

Teorema (Bifurcación de Hopf) Considere el sistema bidimensional

$$\dot{x} = f(x; \mu) \quad (2.38)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $y, \mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que para valores de μ cerca de μ^* el sistema (2.38) posee un punto de equilibrio $x(\mu)$ cuya coordenada depende de μ ; en particular, sea $x_0 = x(\mu^*)$ y expresemos los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x(\mu), \mu)$ en la forma

$$\xi_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu).$$

Entonces (2.38) es topológicamente equivalente a la forma normal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + l_1(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

en una vecindad de (x_0, μ^*) , si las siguientes condiciones se satisfacen:

(B1) $f(x_0, \mu^*) = 0$;

(B2) $Df(x_0, \mu^*)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros $\pm i\omega$, $(\alpha(\mu^*) = 0, \beta(\mu^*) = \omega)$;

(G1) $l_1(x_0, \mu^*) \neq 0$ donde l_1 es especificado más abajo;

(G2) $\frac{\partial}{\partial \mu} \alpha(\mu^*) \neq 0$.

El coeficiente l_1 en el teorema anterior se conoce como primera cantidad de Lyapunov. Se puede computar explícitamente a partir de f en (2.38). Si para $\mu = \mu^*$ el sistema 2-dimensional toma la forma

$$\begin{cases} x' = -\omega y + P(x, y), \\ y' = \omega x + Q(x, y) \end{cases}$$

entonces la primera cantidad de Lyapunov $l_1(\mu^*)$ se puede calcular como:

$$16l_1(\mu^*) = P_{xxx} + P_{xyy} + Q_{xxy} + Q_{yyy}$$

donde todas las derivadas están evaluadas en $(0,0)$. El signo de la primera cantidad de Lyapunov determina las propiedades de estabilidad de la órbita periódica que aparece en la bifurcación obteniendo la visión general de la figura 2.18. En el caso de una bifurcación de Hopf supercrítica ($l_1 < 0$) siempre tenemos un atractor: a medida que el punto de equilibrio pierde su estabilidad en $\lambda = 0$, aparecen pequeñas oscilaciones estables. Sin embargo, para una bifurcación de Hopf subcrítica ($l_1 > 0$) no tenemos un atractor para $\lambda > 0$, mientras que el equilibrio solo atrae puntos localmente en una vecindad cuando $\lambda < 0$. Por lo tanto, en la práctica, es importante calcular el signo de $l_1(x_0, \mu^*)$!

Figura 2.18: El signo de l_1 determina las propiedades de estabilidad del ciclo que aparece en la bifurcación de Hopf.

Notemos que para $l_1 = 0$ el sistema (2.35) o (2.36) (i.e., la forma normal de la bifurcación de Hopf) se vuelve la ecuación lineal del oscilador armónico, en donde el origen es un centro rodeado de una cantidad infinita (no-numerable) de órbitas periódicas si $\lambda = 0$; mientras que el origen es un foco atractor si $\lambda < 0$ y un repulsor si $\lambda > 0$. Sin embargo, no existen órbitas periódicas para $\lambda \neq 0$. No obstante, a partir del teorema anterior, ¿No es posible decir que el sistema genérico (2.38) es equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf si $l_1 = 0$!

Bifurcaciones en sistemas n -dimensionales

A medida que nos movemos desde sistemas uno-dimensionales a dos-dimensionales, todavía podemos hallar puntos de equilibrio creándose o destruyéndose o cambiando su estabilidad a medida que variamos un parámetro. Las bifurcaciones discutidas en este capítulo tienen análogos bidimensionales (de hecho, en todas las dimensiones!). Sin embargo, genéricamente, nada nuevo sucede al añadir más dimensiones: todos los "eventos" asociados a la bifurcación están confinados a un subespacio de baja dimensión, mientras que en las dimensiones extra el flujo es, o bien, una simple atracción o repulsión hacia/desde ese subespacio.

El ejemplo prototípico de bifurcación silla-nodo en dos dimensiones es el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (2.40)$$

En la dirección de x tenemos la forma normal topológica de la bifurcación sillanodo discutida en la sección 2.5.1, mientras que en la dirección de y el movimiento es amortiguado exponencialmente.

Consideremos el retrato de fase a medida que μ varía. Para $\mu > 0$, la figura 2.19 muestra que hay dos equilibrios, un nodo estable en $(\sqrt{\mu}, 0)$ y un punto silla en $(-\sqrt{\mu}, 0)$. A medida que μ decrece, la silla y el nodo se acercan entre sí, luego colisionan cuando $\mu = 0$, y finalmente desaparecen cuando $\mu < 0$. Esto explica también el nombre más común dado a esta bifurcación: silla-nodo!. Incluso cuando los equilibrios se han aniquilado, siguen influenciando el flujo pues dejan un fantasma, un "cuello de botella" en donde las órbitas se demoran un tiempo muy grande en pasar hacia el otro lado.

La figura 2.19 es representativa de una situación más general. Consideremos

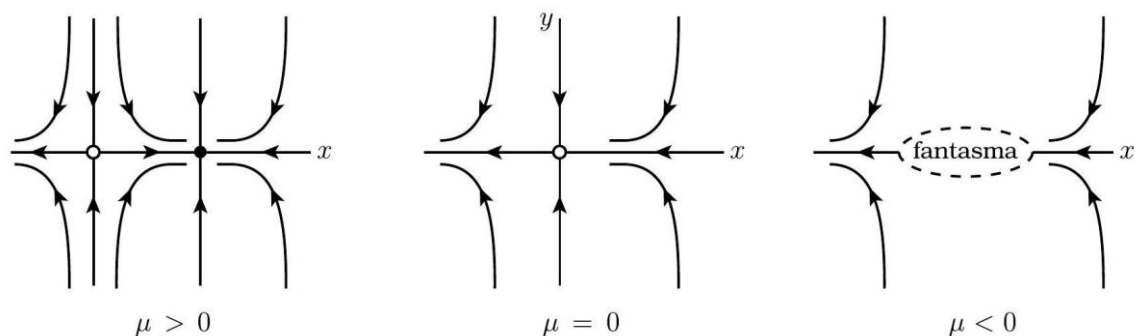


Figura 2.19: Retratos de fase de 2.40) para los distintos valores de μ . un sistema bidimensional de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y; \mu) \\ \dot{y} = g(x, y; \mu) \end{cases} \quad (2.41)$$

que depende del parámetro μ . Suponga que para algún valor de μ las nulclinas se intersectan transversalmente en dos puntos como en la figura 2.20. Cada punto de intersección corresponde a un equilibrio pues $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ simultáneamente. Luego, para ver cómo los equilibrios se mueven a medida que μ cambia, solo tenemos que examinar las intersecciones. Ahora, suponga que las nulclinas se alejan la una de la otra a medida que μ varía, volviéndose tangentes en $\mu = \mu^*$. En tal caso, los equilibrios se acercan entre sí y colisionan cuando $\mu = \mu^*$; después que las nulclinas se separan, no hay intersecciones y los equilibrios desaparecen. El punto es que todas las bifurcaciones silla-nodo poseen esta propiedad localmente.

Ejemplo Considere el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y \\ \dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - by \end{cases}$$

donde $a, b > 0$ son parámetros. Las nulclinas vienen dadas por la recta $y = ax$ la curva sigmoideal

$$y = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$$

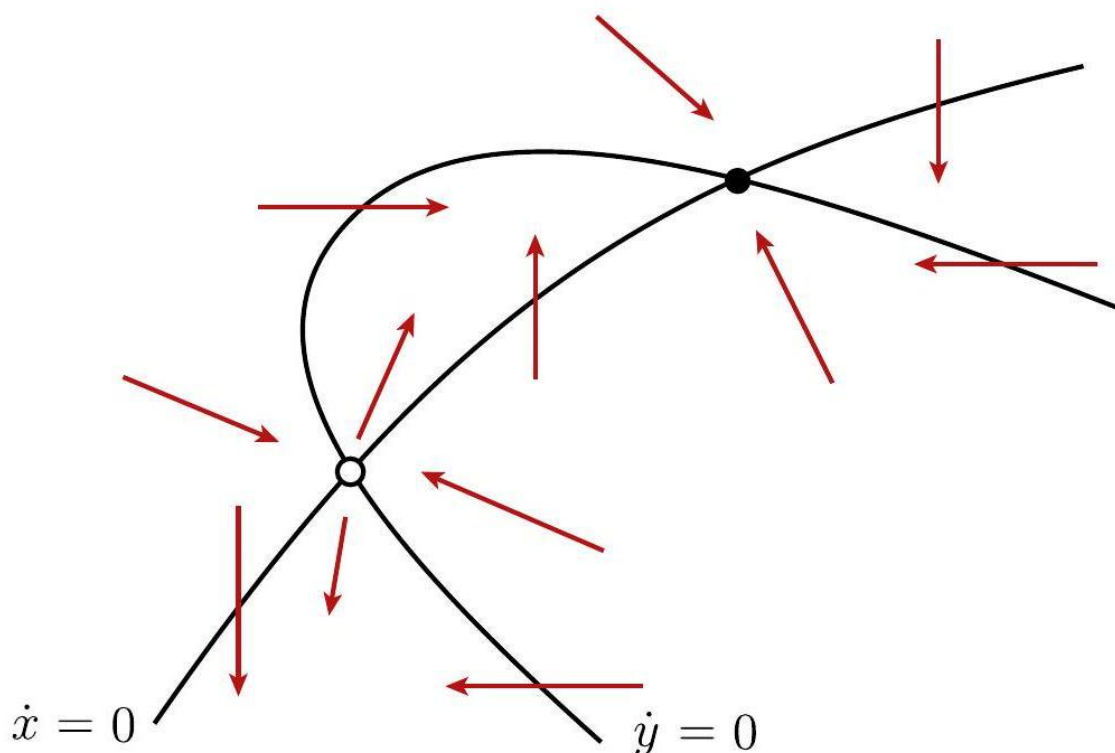


Figura 2.20: Nulclinas de 2.41. como se muestra en la figura 2.21. Supongamos que variamos a y dejamos fijo el valor de b . Para a pequeño existen tres intersecciones como en la figura 2.21. A medida que a crece, las dos intersecciones superiores se acercan entre sí y colisionan cuando la recta interseca la curva tangencialmente. Para valores más grandes de a , esos equilibrios desaparecen, dejando al origen como el único punto de equilibrio.

Las nulclinas se intersectan cuando

$$ax = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$$

Una solución es $x^* = 0$, en cuyo caso $y^* = 0$. Las otras intersecciones satisfacen la ecuación cuadrática

$$ab(1+x^2) = x$$

la cual tiene dos soluciones

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2b^2}}{2ab}$$

si $1-4a^2b^2 > 0$, i.e., $2ab < 1$. Estas soluciones colapsan cuando $2ab = 1$. Luego, el valor de bifurcación es

$$a^* = \frac{1}{2b}$$

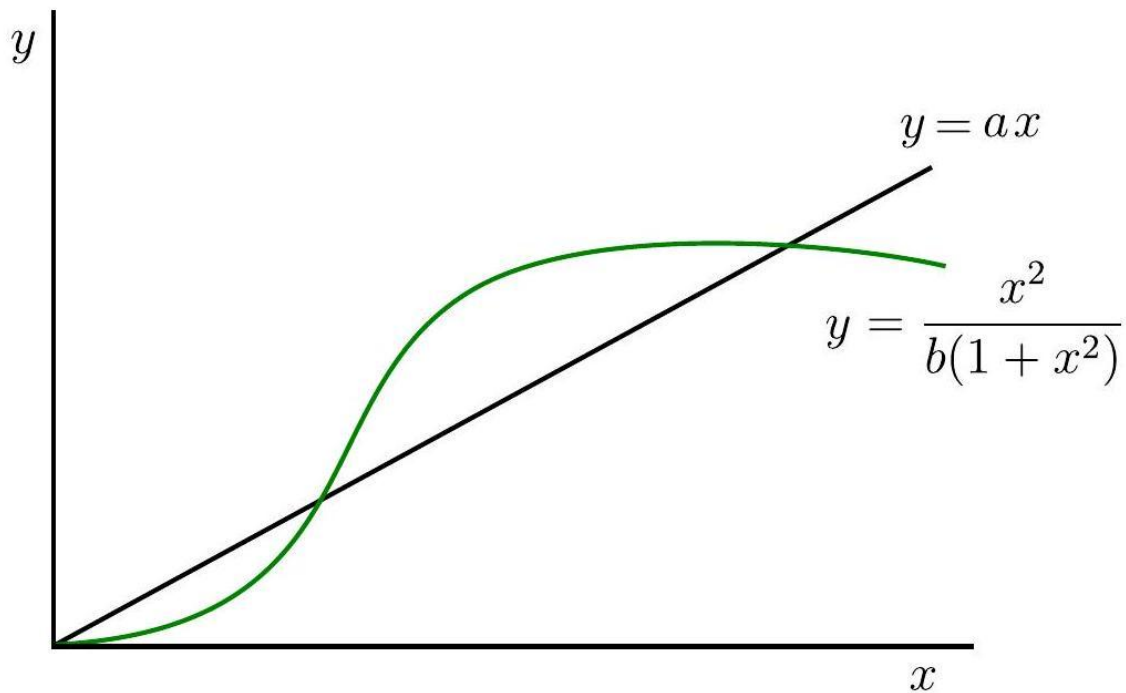


Figura 2.21: Nulclinas del sistema.

Además $x^* = 1$ en la bifurcación. La matriz jacobiana en (x, y) es

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene traza $\tau = -(a+b) < 0$, así que todos los equilibrios son atractores o sillas, dependiendo del valor del determinante Δ . En $(0,0)$, $\Delta = ab > 0$, luego el origen es siempre un equilibrio asintóticamente estable. De hecho, es un nodo estable, pues $\tau^2 - 4\Delta = (a-b)^2 > 0$ (excepto en el caso degenerado $a = b$ el cual dejamos de lado). En los otros dos puntos de equilibrio, Δ toma la forma (después de un poco de álgebra):

$$\Delta = ab - \frac{2x^*}{(1+(x^*)^2)^2} = ab \left(1 - \frac{2}{1+(x^*)^2} \right) = ab \left(\frac{(x^*)^2 - 1}{1+(x^*)^2} \right).$$

Luego, $\Delta < 0$ para el equilibrio del medio, el cual tiene $0 < x^* < 1$; este es un punto silla. El equilibrio con $x^* > 1$ es siempre un nodo estable, pues $\Delta < ab$ y por tanto $\tau^2 - 4\Delta > (a-b)^2 > 0$.

El retrato de fase aparece graficado en la figura 2.22. Aquí vemos que la variedad estable del punto silla separa el plano en dos regiones, cada una de las cuales es la cuenca de un atractor. Notemos que el flujo es cualitativamente similar a la figura idealizada 2.19. Todas las órbitas se acercan rápidamente a la variedad inestable del punto silla, la cual juega un rol completamente análogo al eje x en la figura 2.19. Luego, en muchos sentidos, la bifurcación es fundamentalmente un evento unidimensional, con los dos equilibrios acercándose entre sí a lo largo de la variedad inestable como las cuentas de un collar. Por eso es que es relevante estudiar primero bifurcaciones en la menor dimensión posible—son el esqueleto de bifurcaciones análogas en mayores dimensiones. El rol fundamental de sistemas unidimensionales (para las bifurcaciones silla-nodo, transcritical, pitchfork) y bidimensionales (para la bifurcación de Hopf) se puede justificar rigurosamente mediante la "teoría de la variedad central", la cual se estudia en el curso Teoría de Bifurcaciones.

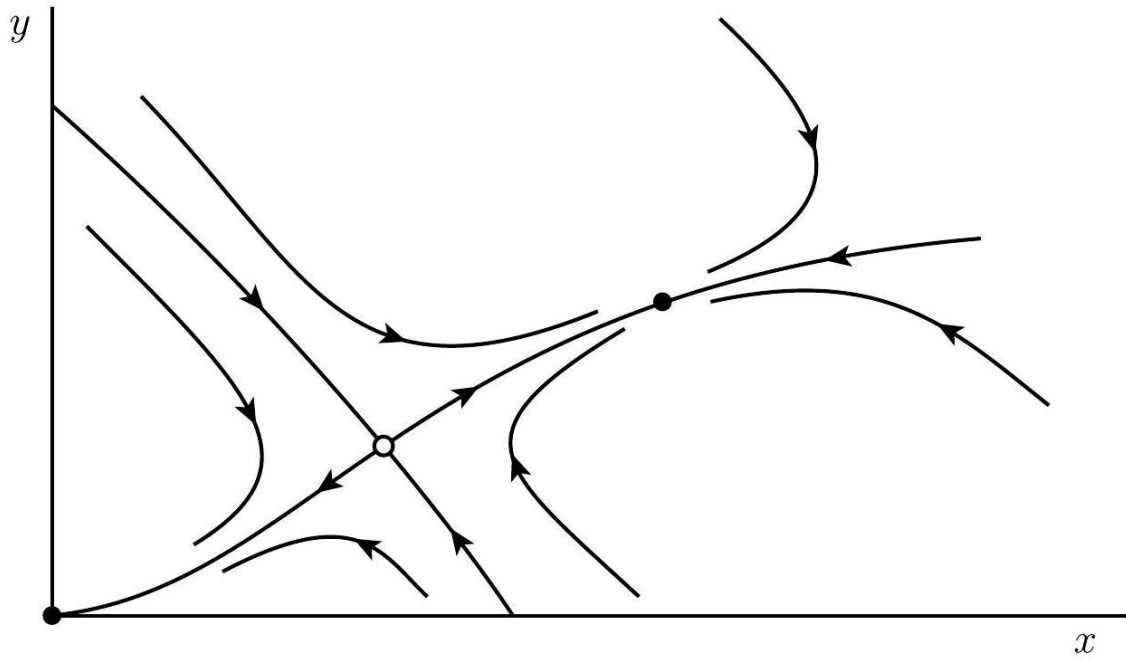


Figura 2.22: Retrato de fase.

Bifurcaciones de sistemas dinámicos a tiempo discreto

Consideremos un sistema dinámico discreto que depende de un parámetro

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es suave con respecto a x y α . Sea x_0 un punto fijo hiperbólico del sistema para $\alpha = \alpha_0$. Queremos monitorear este punto fijo y sus multiplicadores a medida que α varía. Al igual que en el caso continuo, las bifurcaciones más comunes ocurren cuando x_0 pierde hiperbolicidad. Genéricamente, hay tres formas en que esto ocurra a medida que un multiplicador se acerca al círculo unitario (ver figura 3.5):

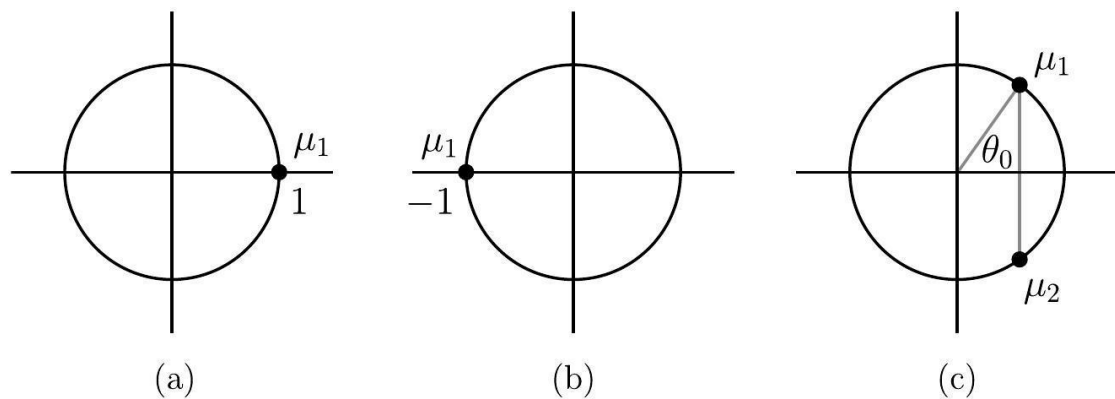


Figura 3.5: Posibles ubicaciones de los multiplicadores en el círculo unitario que dan paso a puntos fijos no hiperbólicos. (a) Existe un multiplicador $\mu_1 = 1$. Este escenario puede ocurrir en sistemas de dimensión $n \geq 1$.

- (b) Existe un multiplicador $\mu_1 = -1$. Este escenario puede ocurrir en sistemas de dimensión $n \geq 1$.
- (c) Existe un par de multiplicadores complejos conjugados $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\theta_0)$, con $0 < \theta_0 < \pi$, con magnitud 1. Este escenario puede ocurrir en sistemas de dimensión $n \geq 2$.

A continuación pasamos a revisar las bifurcaciones que dan lugar los anteriores eventos.

Bifurcación silla-nodo

Como el nombre lo sugiere, esta bifurcación se caracteriza por un fenómeno análogo al de una bifurcación silla-nodo en el caso continuo. Consideremos el siguiente sistema dinámico:

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$$

La función f es invertible para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad de $x = 0$. Para $\alpha = 0$, el origen es un punto fijo no-hiperbólico con multiplicador $\mu = f_x(0,0) = 1$. El comportamiento de las órbitas para $|\alpha|$ pequeño es como en la figura 3.6. Para $\alpha < 0$, hay dos puntos fijos en $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$; x_1 es inestable y x_2 es estable. Para $\alpha = 0$, el origen es el único punto fijo y es semiestable: atrae por la izquierda y repele por la derecha. Mientras que para $\alpha > 0$ no hay puntos fijos.

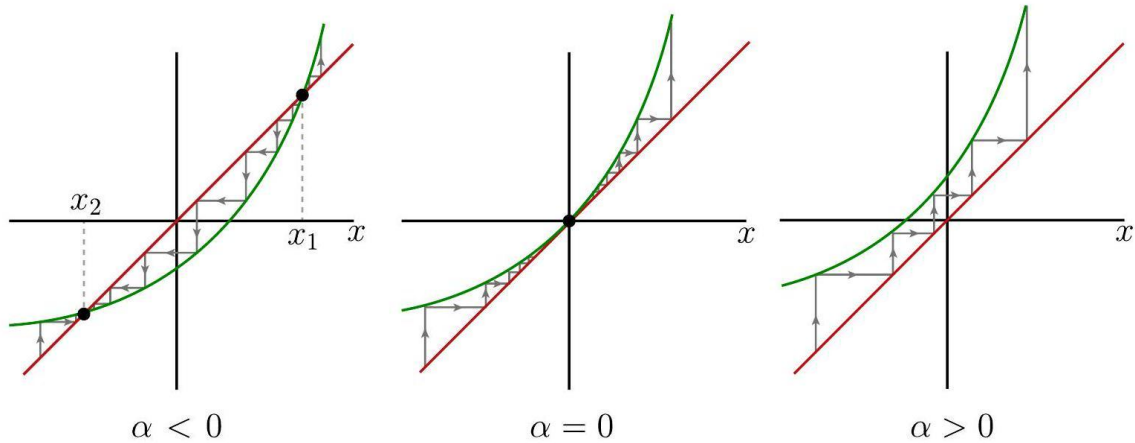


Figura 3.6: Diagramas de telaraña del mapeo $x \mapsto \alpha + x + x^2$ cerca de la bifurcación silla-nodo.

Como es de esperar, graficando esta misma información en un solo gráfico en el espacio de estados \times espacio de parámetros obtenemos un diagrama análogo de bifurcación de una bifurcación silla-nodo del caso continuo en la figura 3.7. En el plano (α, x) los puntos fijos se ubican sobre la parábola $-\alpha = x^2$ abierta hacia la izquierda; la rama superior corresponde al punto inestable, mientras que la rama inferior corresponde al punto fijo estable.

El mapeo anterior es, de hecho, una forma normal para la bifurcación silla-nodo discreta (El caso $x \mapsto \alpha + x - x^2$ es similar al anterior. La única diferencia es que el

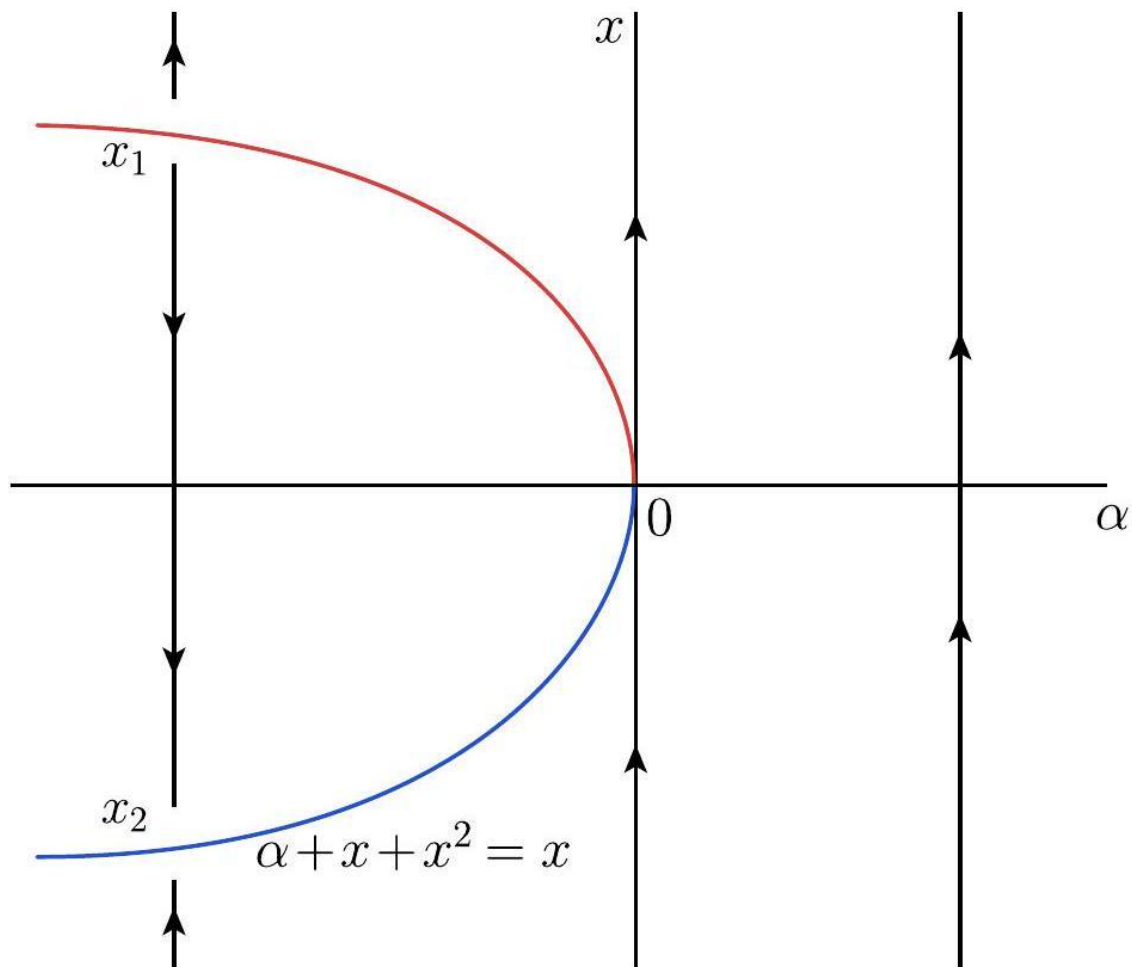


Figura 3.7: Diagrama de bifurcación del mapeo $x \mapsto \alpha + x + x^2$. (par de puntos fijos existe para $\alpha > 0$). Al igual que en el caso continuo, podemos listar las condiciones de genericidad que un sistema arbitrario debe satisfacer para que exhiba una bifurcación de este tipo.

Teorema (Bifurcación Silla-Nodo) Consideremos el sistema dinámico unidimensional

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R},$$

con f suave. Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

- (B1) $f(x_0, \mu^*) = x_0$, "Existe un punto fijo x_0 para $\mu = \mu^*$ ";
- (B2) $Df(x_0, \mu^*) = f_x(x_0, \mu^*) = 1$, "Valor propio uno en x_0 para $\mu = \mu^*$ ";
- (G1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, "Término de 2do orden de f no se anula en (x_0, μ^*) ";
- (GQ) $\frac{\partial}{\partial \mu} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, "Velocidad no-nula en μ ".

Entonces, el sistema posee la forma normal topológica

$$y \mapsto \alpha + y \pm y^2$$

en una vecindad de (x_0, μ^*) .

Bifurcación flip

La bifurcación flip es también conocida como bifurcación de "duplicación de período" (period-doubling bifurcation). La razón se debe al hecho de que, al pasar por la bifurcación, un punto fijo cambia su estabilidad y aparece una órbita periódica estable del doble de período que el punto fijo original, la cual sustituye al punto fijo (ahora inestable) como el objeto atractor del espacio de fase. De esta forma, el objeto atractor original (el punto fijo) "duplica" su período al aparecer el 2-ciclo estable.

Consideremos el siguiente sistema dinámico:

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$$

La función f es invertible para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad de $x = 0$. Notemos que $x_0 = 0$ siempre es un punto fijo con multiplicador $\mu = -(1 + \alpha)$. Luego, para $\alpha < 0$ pequeño, x_0 es estable; si $\alpha = 0$, x_0 es no-hiperbólico con $\mu = -1$; finalmente, si $\alpha > 0$ pequeño, x_0 es inestable. Notemos también que el origen no es el único punto fijo cerca de $x_0 = 0$ para $|\alpha|$ pequeño.

Consideremos ahora $f^2(x, \alpha)$, la segunda iteración de f . Si llamamos $y = f(x, \alpha)$, entonces:

$$\begin{aligned} f^2(x, \alpha) &= f(y, \alpha) = -(1 + \alpha)y + y^3 \\ &= -(1 + \alpha)[-(1 + \alpha)x + x^3] + [-(1 + \alpha)x + x^3]^3 \\ &= (1 + \alpha)^2 x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 + O(x^5) \end{aligned}$$

Claramente, x_0 también es un punto fijo de f^2 . Pero también hay otros dos puntos fijos no-triviales para $\alpha > 0$ pequeño cerca del origen:

$$x_{1,2} = f^2(x_{1,2}, \alpha),$$

donde $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$. Esto puede verificarse al observar las gráficas de f y truncar la expresión para $f^2(x, \alpha)$ hasta términos de orden 3 como en la figura 3.8.

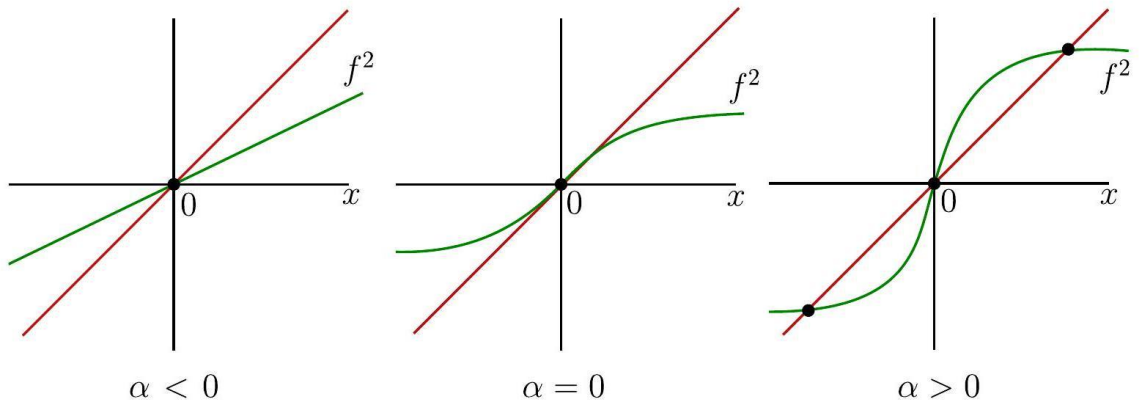


Figura 3.8: Forma cualitativa de f^2 en cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Los puntos fijos $x_{1,2}$ son estables y forman un ciclo de período 2 de $f(x, \alpha)$, es decir,

$$x_2 = f(x_1, \alpha), x_1 = f(x_2, \alpha), x_1 \neq x_2$$

Así, se obtiene el diagrama de bifurcación de la figura 3.9 para $f^2(x, \alpha)$, la segunda iteración de f , en el cual el eje horizontal representa el punto fijo en $x_0 = 0$. La parábola corresponde al ciclo estable de período 2 para $\alpha > 0$. El diagrama de bifurcación que emerge es análogo al de una bifurcación pitchfork supercrítica para $f^2(x, \alpha)$. Continuando con la analogía, dado que el 2-ciclo es estable, uno habla de una bifurcación flip supercrítica.

El caso $x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3 \equiv f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ se puede tratar de la misma manera. Uno obtiene un siguiente diagrama en que los puntos de período 2 son inestables y existen para $\alpha < 0$. En tal caso, uno habla de una bifurcación flip subcrítica.

Teorema (Bifurcación Flip) Consideremos el sistema dinámico unidimensional

$$x \mapsto f(x, \mu), x \in \mathbb{R}, \mu \in I \subset \mathbb{R}$$

con f suave, donde I es un intervalo abierto que contiene al valor μ^* . Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $f(x_0, \mu) = x_0$, para todo $\mu \in I$;

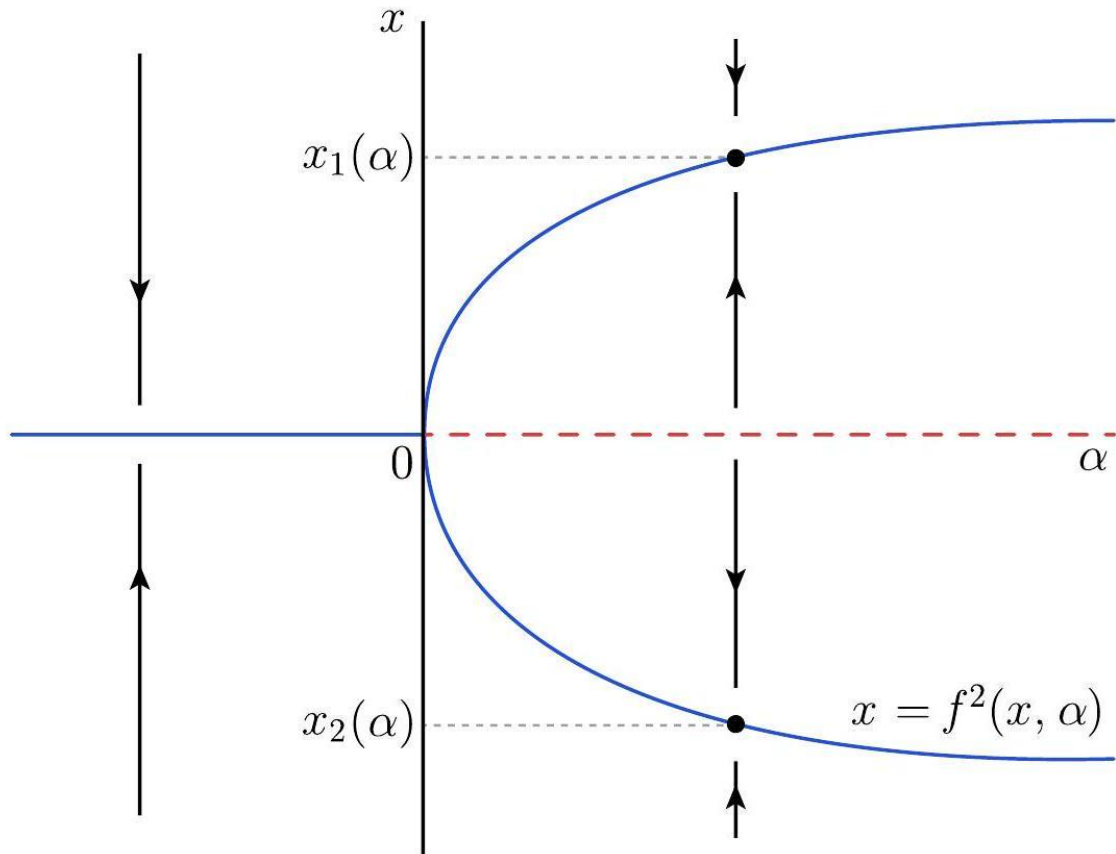


Figura 3.9: Diagrama de bifurcación $x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3$ cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

(B2) $Df(x_0, \mu^*) = f_x(x_0, \mu^*) = -1$;

$$(G1) \ a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, \mu^*) \right)^2 + \frac{1}{3} f_{xxx}(x_0, \mu^*) \neq 0;$$

$$(GQ) \ \frac{\partial}{\partial \mu} f_x(x_0, \mu^*) \neq 0.$$

Entonces, el sistema posee la forma normal topológica

$$y \mapsto -(1 + \alpha)y \pm y^3$$

en una vecindad de (x_0, μ^*) .

El signo \pm en la forma normal coincide con el signo del coeficiente α de la condición (G1). Además, el signo de α determina la estabilidad del punto fijo x_0 para $\mu = \mu^*$ y la estabilidad y ubicación de la órbita 2 -periódica en el diagrama de bifurcación. Si $\alpha > 0$, la bifurcación es supercrítica: la órbita periódica es estable y existe para $\alpha > 0$. Por otro lado, si $\alpha < 0$, tenemos el caso subcrítico: la órbita periódica es inestable y existe para $\alpha < 0$.

Bifurcación Neimarck-Sacker

Esta bifurcación se caracteriza por la aparición de un círculo invariante rodeando un punto fijo, el cual cambia su estabilidad al momento de la bifurcación. Por este motivo, también se le conoce como bifurcación de Hopf discreta.

Considere el siguiente sistema dinámico discreto bidimensional

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \#(3.3)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el parámetro; $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ y $d = d(\alpha)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$, $d(0) \neq 0$. El sistema (3.3) tiene un punto fijo $(x_1, x_2) = (0, 0)$ para todo α , con matriz Jacobiana

$$A = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y valores propios $\mu_{1,2} = (1 + \alpha)\exp(\pm i\theta)$. Luego, el mapeo (3.3) es invertible cerca del origen para todo $|\alpha|$ pequeño. Más aún, cuando $\alpha = 0$, se tiene $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$, con $|\mu_{1,2}| = 1$; luego, el origen es un punto fijo no-hiperbólico.

Introduciendo una variable compleja $z = x_1 + ix_2$, y reescribiendo (3.3) en notación polar $z = \rho \exp(i\varphi)$, luego de un poco de operatoria obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho(1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2) + R_\alpha(\rho), \#(3.4) \\ \varphi \mapsto \varphi + \theta(\alpha) + Q_\alpha(\rho), \#(3.4) \end{cases}$$

donde $R_\alpha(\rho) = O(\rho^4)$ y $Q_\alpha(\rho) = O(\rho^2)$ son funciones suaves de (ρ, α) . Notemos que el mapeo para ρ es independiente de φ y define un sistema dinámico con un punto fijo en $\rho = 0$ para todo α . Este punto fijo es estable si $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. En la transición, cuando $\alpha = 0$, la estabilidad del origen depende del signo del coeficiente $d(0)$. En lo que sigue, supongamos que $d(0) < 0$; en tal caso, el origen es un punto fijo estable no-hiperbólico

si $\alpha = 0$. Además, si $\alpha > 0$, en una vecindad del origen, el mapeo para ρ posee otro punto fijo dado por

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} + O(\alpha) \quad (3.5)$$

Por continuidad, tenemos que $d(\alpha) < 0$ y ρ_0 es estable para todo $|\alpha|$ pequeño.

Por otro lado, el mapeo para φ describe una rotación por un ángulo que depende de φ y θ ; y es aproximadamente igual a $\theta(\alpha)$. Luego, al superponer los dos mapeos en ρ y φ , obtenemos el diagrama de bifurcación de la figura 3.10 para (3.3): Para $\alpha < 0$, el origen es un punto fijo atractor; las órbitas espiralean hacia $(0,0)$. Para $\alpha > 0$ aparece un círculo invariante aislado de radio $\rho(\alpha)$ dado en (3.5). Esta curva invariante es única y atrayente. Decimos que el sistema pasa por una bifurcación Neimarck-Sacker supercrítica.

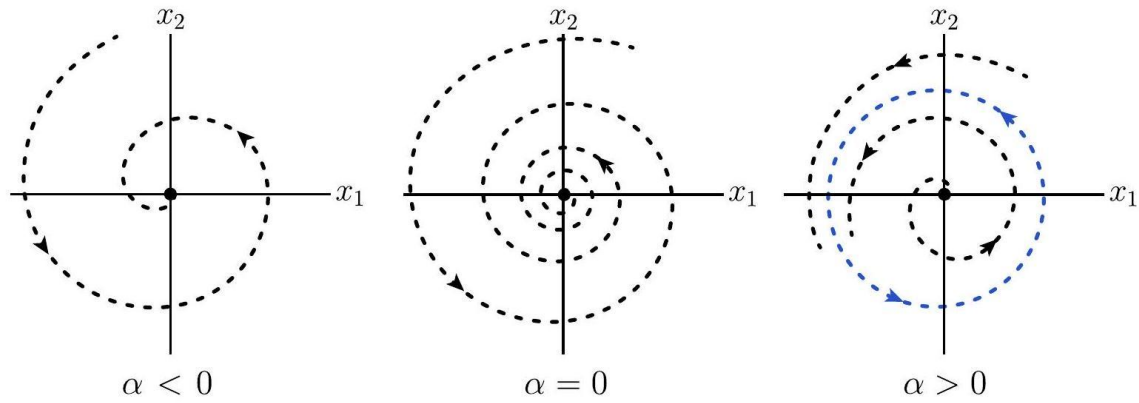


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación Neimarck-Sacker supercrítica ($d(0) < 0$).

El caso $d(0) > 0$ se puede analizar de la misma forma: Existe una curva invariante cerrada inestable que desaparece cuando α cruza el cero desde los valores negativos a los positivos como en la figura 3.11. En tal caso, uno habla de una bifurcación Neimarck-Sacker subcrítica.

Podemos pensar que (3.3) es una versión truncada de un mapeo que contiene términos de orden superior ($\|x\|^4$), los cuales dependen suavemente de α . En tal caso, sobre la curva invariante que se bifurca podrían haber puntos fijos y puntos periódicos. La existencia y estabilidad de estos puntos (i.e., el retrato de fase concreto del sistema restringido a la curva invariante) depende de estos términos de orden superior que no están presentes en (3.3). Por lo tanto, dos sistemas distintos exhibiendo una misma bifurcación Neimarck-Sacker podrían no ser topológicamente equivalentes. Este hecho impide obtener una forma normal para esta bifurcación. Sin embargo, de todas maneras podemos enunciar el siguiente teorema que nos asegura que estos términos ($\|x\|^4$) no afectan la bifurcación de la

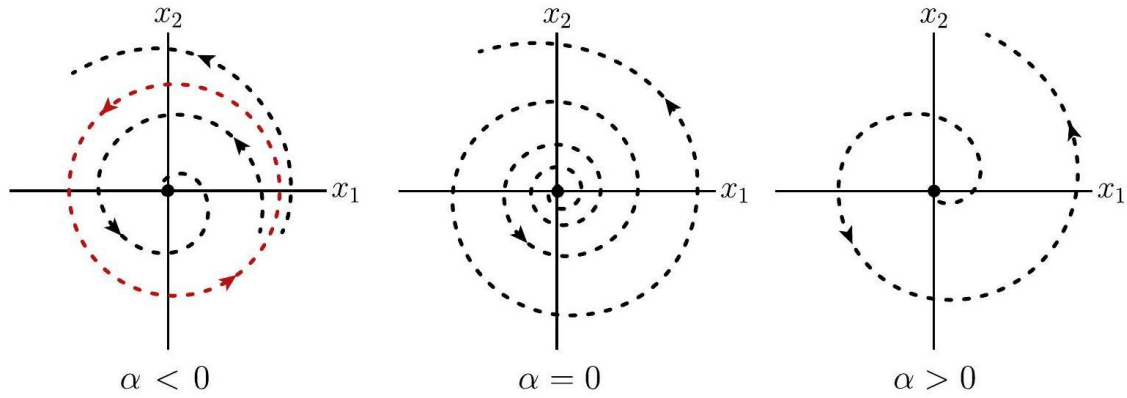


Figura 3.11: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker subcrítica ($d(0) > 0$). curva cerrada invariante en (3.3). Es decir, una curva invariante localmente única siempre se bifurca del origen en la misma dirección y con la misma estabilidad que en (3.3).

Teorema (Bifurcación Neimark-Sacker) Consideremos un sistema dinámico bidimensional

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}$$

con f suave. Supongamos que para valores de μ cerca de μ^* el sistema posee un punto fijo $x(\mu)$ cuya coordenada depende de μ ; en particular, sea $x_0 = x(\mu^*)$ y expresemos los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x(\mu), \mu)$ en la forma

$$\mu_{1,2}(\mu) = r(\mu)\exp(\pm i\varphi(\mu))$$

Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $f(x_0, \mu^*) = x_0$;

(B2) $Df(x_0, \mu^*)$ tiene un par de multiplicadores complejos conjugados sobre el círculo unitario $\mu_{1,2}(\mu^*) = \exp(\pm i\theta_0)$, $(r(\mu^*) = 1, \varphi(\mu^*) = \theta_0)$;

(G1) $\frac{d}{d\mu}r(\mu^*) \neq 0$;

(GQ) $\exp(ik\theta_0) \neq 1$, para $k = 1, 2, 3, 4$.

Entonces, existe un cambio de coordenadas suave e invertible (difeomorfismo) y un cambio de parámetros suave e invertible que transforman el sistema, en una vecindad de (x_0, μ^*) , en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$, donde $\theta = \theta(\mu)$, $b = b(\mu)$ y $d = d(\mu)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$. Más aún, $\theta(\mu^*) = \theta_0$ y $d(\mu^*) = \text{Re}(\exp(-i\theta_0)c_1(\mu^*))$ (donde $c_1(\mu^*)$ posee una fórmula que puede buscarse en textos sobre bifurcaciones!)

Si además, $d(\mu^*) \neq 0$ (i.e., $c_1(\mu^*) \neq 0$), entonces, existe una vecindad de x_0 en la cual se bifurca una única curva cerrada invariante desde x_0 a medida que μ pasa por μ^* .

Ejemplo El mapeo de Hénon se define como el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}$$

Busquemos valores de parámetros (α, β) tales que ocurra alguna de las bifurcaciones estudiadas en esta sección (Omitiremos por ahora la verificación de las condiciones de genericidad, pero se sugiere su completación como tarea).

Los puntos fijos satisfacen $x = y, y = \alpha - \beta x - y^2$. Luego, todos los puntos fijos están sobre la recta $y = x$. Además, la coordenada y de un punto fijo satisface $y^2 + (1 + \beta)y - \alpha = 0$. Por lo tanto, el sistema posee a lo más dos puntos fijos.

La matriz Jacobiana del sistema viene dada por

$$A(x, y; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -2y \end{pmatrix}$$

Para que ocurra una bifurcación silla-nodo se debe satisfacer $\det(A - I) = 0$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 . Así, A tendrá un valor propio 1. Esto nos lleva a la ecuación $1 + \beta + 2y = 0$. Luego, el sistema algebraico

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0 \\ 1 + \beta + 2y &= 0 \end{aligned}$$

en las incógnitas (α, β) nos da el conjunto de valores de (α, β) para los cuales hay una bifurcación silla-nodo. Al resolver obtenemos

$$T = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4} \right\}$$

la cual representa una curva en el plano (β, α) a lo largo de la cual existe un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = 1$.

Similarmente, la condición para la bifurcación flip se puede escribir como $\det(A + I) = 0$, la cual lleva a $1 + \beta - 2y = 0$. Luego, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0 \\ 1 + \beta - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando y , obtenemos que el mapeo tiene un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = -1$ cuando los parámetros están en la curva

$$f = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4} \right\}$$

Finalmente, para analizar la ocurrencia de una bifurcación Neimarck-Sacker, notemos que el producto de los multiplicadores de la forma $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm i\theta_0)$ es $\mu_1\mu_2 = 1 = \det(A)$, que es equivalente a la ecuación $1 - \beta = 0$. El diagrama de bifurcación resultante en el plano (β, α) muestra las tres curvas de bifurcación obtenidas.

Sin embargo, notemos que la curva de bifurcación Neimarck-Sacker está acotada por las curvas f y T , esto es,

$$NS = \{(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 1, -1 < \alpha < 3\}.$$

La razón es que una bifurcación Neimarck-Sacker solo puede considerarse cuando exista un punto fijo. Luego, esto ocurre para valores de (β, α) arriba de la curva T , i.e., para $\alpha > -1$ si $\beta = 1$. Además, notemos que la condición $\mu_1\mu_2 = 1$ también es válida para multiplicadores reales de la forma $\mu_1 = v, \mu_2 = \frac{1}{v}, |v| > 1, v \in \mathbb{R}$. En ese caso, el punto fijo sería de tipo silla y no podría pasar por una bifurcación Neimarck-Sacker. Esto impone la condición extra $\alpha < 3$ si $\beta = 1$.

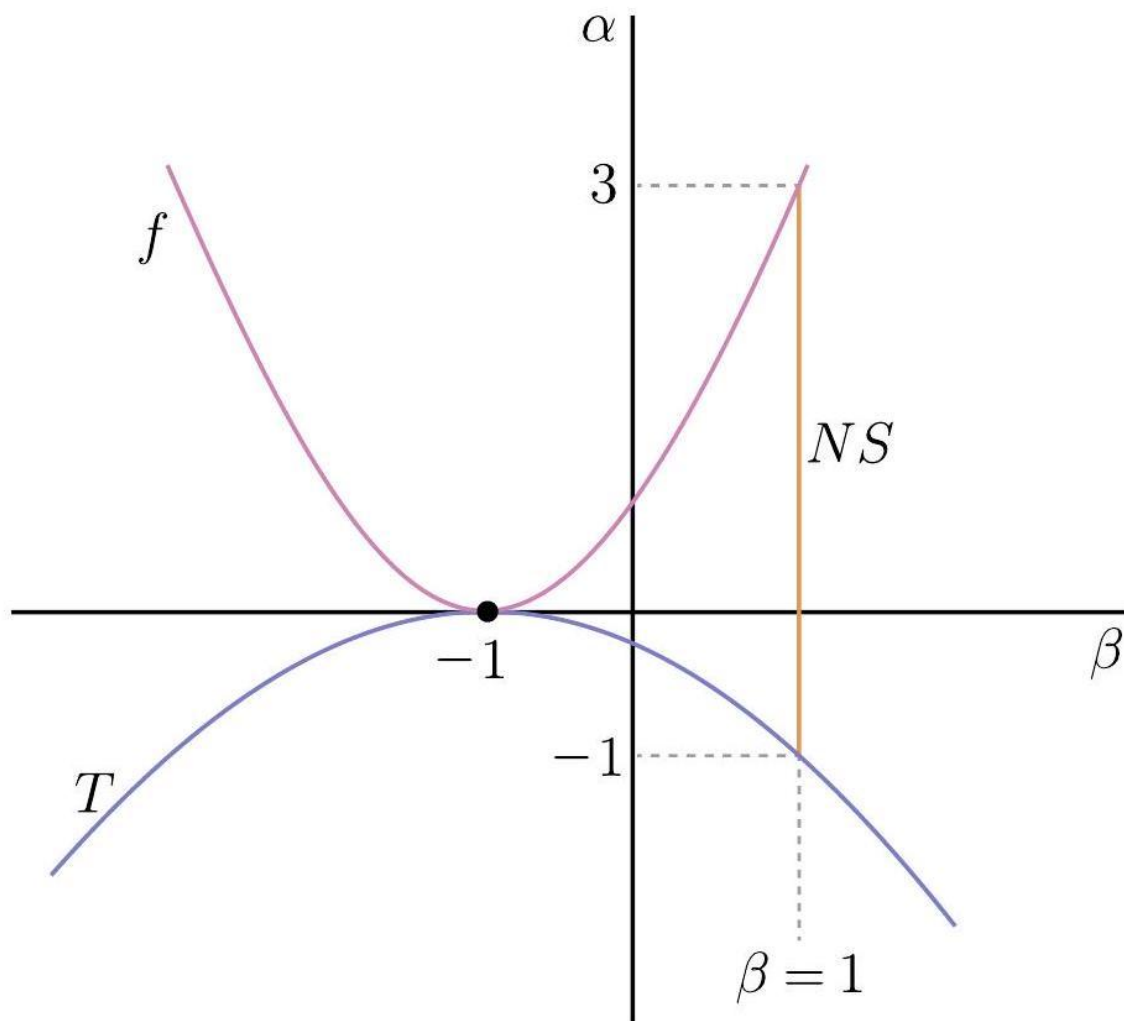


Figura 3.12: Diagrama de bifurcación dl mapeo de Hénon.

Capítulo 3

Dinámica de infección por geohelminintos

Apéndice A: Dinámica de Transmisión de Macroparásitos

Introducción

Los modelos matemáticos desempeñan un papel importante en la comprensión de la transmisión y el impacto de las medidas de control de enfermedades causadas por macroparásitos (Anderson y May, 1992; Anderson et al., 2014; Truscott et al., 2016). Los primeros trabajos sobre la teoría de la infección por helmintos fueron publicados en la década de 1960 por Tallis y Leyton, quienes desarrollaron modelos estocásticos de transmisión de parásitos nematodos en ovejas y ganado (Leyton, 1968; Tallis y Leyton, 1966, 1969). Simultáneamente, Macdonald demostró que una consecuencia de la reproducción sexual de parásitos distribuidos dentro de huéspedes individuales era la incapacidad de generar material infeccioso fértil cuando la prevalencia era baja (Macdonald et al., 1965). Anderson y May introdujeron descripciones mucho más generales de la dinámica de las poblaciones de helmintos basadas en la edad del hospedador, la distribución del número de parásitos por hospedador, la dependencia de la densidad de la producción de huevos y las funciones de apareamiento sexual que dependen de la distribución del parásito y los hábitos reproductivos (Anderson y May, 1982, 1985, 1992). En este artículo desarrollamos un marco analítico para describir la dinámica de transmisión de la mayoría de las infecciones por macroparásitos. Mostramos cómo los modelos deterministas clásicos se derivan de consideraciones probabilísticas sobre la distribución del parásito en los hospedadores, la producción de huevos y la probabilidad de apareamiento. Primero describimos la dinámica de la transmisión de la infección por macroparásitos. Luego presentamos dos modelos deterministas para la dinámica de transmisión. El primer modelo modela el caso más simple de una comunidad hospedadora homogénea, mientras que el segundo modelo modela el caso más complejo de una comunidad hospedadora heterogénea. En ambos modelos, se consideran las características reproductivas del parásito, como la producción de huevos y la probabilidad de apareamiento, ambas modeladas por la fecundidad dependiente de la densidad del parásito.

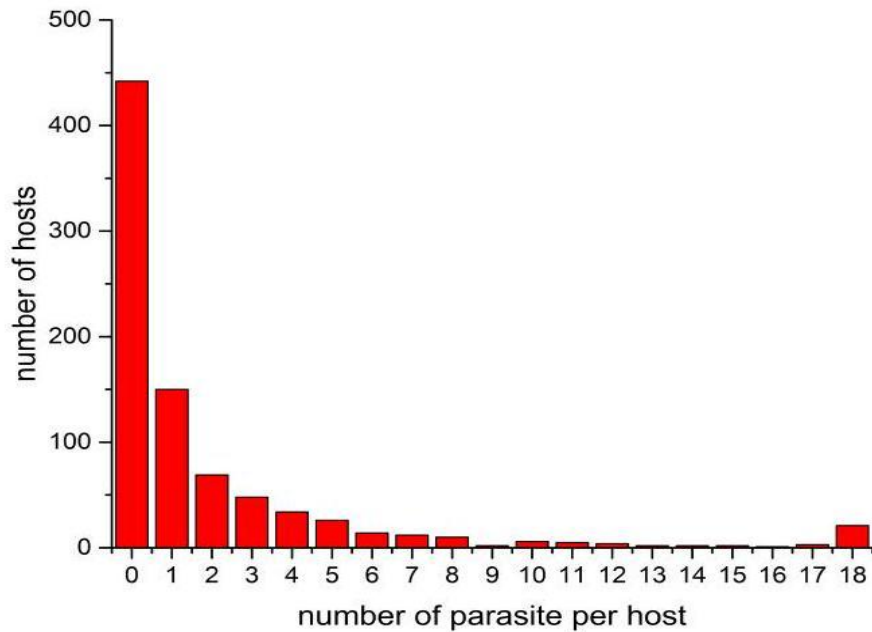


Figura 1: Distribución de la cantidad de parásitos de *Ascaris lumbricoides* por huésped en un estudio en poblaciones rurales de Corea (Seo et al., 1979). La mayoría de los huéspedes no están infectados o están infectados con una carga baja de parásitos, mientras que pocos están infectados por una gran cantidad de parásitos.

parásito y la distribución de parásitos por huésped, que suponemos que es binomial negativa.

Para ambos modelos, calculamos el equilibrio endémico y el número básico de reproducción R_0 , definido como el número promedio de nuevas crías de parásitos producidas por un parásito hembra típico, de una generación a la siguiente. Finalmente, demostramos que el modelo homogéneo sufre una bifurcación en forma de silla de montar.

MARCO GENERAL

Las enfermedades causadas por microparásitos se modelan habitualmente mediante modelos compartimentados. Tras la infección, la población de microparásitos puede crecer rápidamente en el huésped. Esta dinámica parasitaria intrahuésped determina el nivel de infecciosidad del individuo. En un modelo compartimentado simple como el modelo SIR, todos los individuos susceptibles se agrupan en una clase de tamaño S , todos los individuos infectados e infecciosos en una clase de tamaño I y todos los individuos recuperados en una clase de tamaño R . Son posibles muchos refinamientos, pero la evolución de la población parasitaria dentro del huésped no se tiene en cuenta o se simplifica mucho (para modelos que incluyen dinámicas de población intrahuésped, véase, por ejemplo, Gandolfi et al. (2015)). El refinamiento más común consiste en dividir a los individuos infectados en dos clases, expuestos (aquellos infectados pero aún no infecciosos) e infecciosos, lo que conduce a los conocidos modelos de tipo SEIR.

Para la mayoría de los macroparásitos, la situación es completamente diferente, ya que estos tipos de parásitos no se reproducen dentro del huésped. La mayoría de los individuos infectados tienen pocos macroparásitos con una distribución no acampanada (ver Figura 1) donde pocos individuos concentran la mayoría de los parásitos en la población hospedadora (Seo et al., 1979; López y Aparicio, 2023). Las distribuciones binomiales negativas suelen

proporcionar una buena descripción de los datos. Por otro lado, no hay transmisión de macroparásitos de hospedador a hospedador a medida que el ciclo de vida se completa en el medio ambiente (desde donde el hospedador se infecta).

Por lo tanto, el número de hospedadores infectados no es una variable representativa de la carga parasitaria. Los modelos simples para macroparásitos consideran la evolución de la carga media de parásitos dentro de la población, así como el reservorio ambiental de parásitos (que está compuesto por huevos y/o larvas). A partir de la carga media, la población total de parásitos se estima fácilmente.

Un modelo básico

Estructura del modelo

El modelo presentado en este artículo se basa en un modelo desarrollado por Anderson y May (Anderson y May, 1992). El marco conceptual de la dinámica de transmisión de parásitos se conceptualiza como una población de parásitos maduros dentro de huéspedes humanos y una población de etapas infecciosas (huevos y/o larvas) que se encuentran en el medio ambiente (reservorio). Los huéspedes pueden infectarse por contacto con las etapas infecciosas de los parásitos y pueden contaminar el medio ambiente al liberar los huevos de los parásitos al medio ambiente (ver Figura 2).

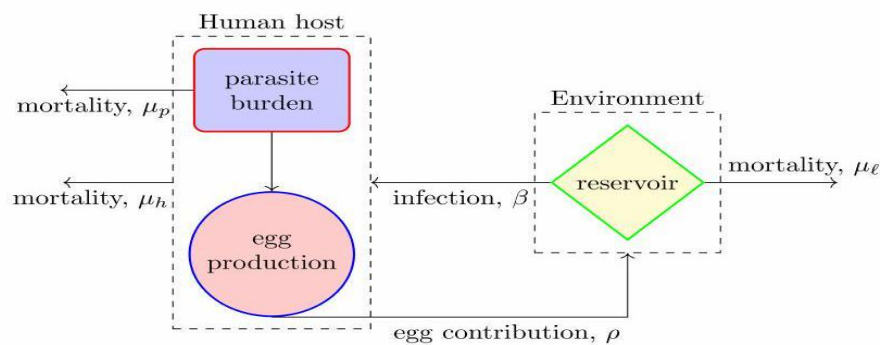


Figura 2: Marco conceptual de la dinámica de transmisión de parásitos.

En un modelo simple para la dinámica de transmisión de parásitos, las variables dinámicas son la carga parasitaria media en la población hospedadora, m ; y la población de estadios infecciosos (reservorio) en el ambiente, formada por huevos y/o larvas, I .

A continuación, esbozaremos el procedimiento para encontrar parámetros relacionados con los parásitos a partir de un modelo estadístico-probabilístico para la población de parásitos.

El reservorio ambiental de parásitos, compuesto por huevos o larvas, aumenta debido a la contribución de parásitos adultos dentro de los hospedadores. Como la mayoría de los hospedadores albergan solo unos pocos parásitos, solo los hospedadores con al menos un parásito hembra y uno macho contribuirán con huevos fertilizados al reservorio. Consideraremos que la variable aleatoria W , el número de parásitos en un hospedador, sigue una distribución binomial negativa. Por lo tanto, la probabilidad de observar n parásitos en un hospedador es

$$P(W = n) = \frac{\Gamma(k + n)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(k)} p^n (1 - p)^k \#(1)$$

Donde Γ es la función gamma y $p = \frac{m}{m+k}$ con m el valor medio (la carga parasitaria media de la población) y k el parámetro de forma. La varianza puede expresarse en términos de m y k como $\sigma^2 = m + m^2/k$. El término p es la probabilidad del hospedador de adquirir un parásito y $1 - p$ es la probabilidad de no adquirir un parásito, en cada uno de los $k + n$ experimentos de Bernoulli.

La producción media de huevos depende de la cantidad de parásitos dentro del hospedador y es un proceso dependiente de la densidad. Un modelo simple para la fecundidad femenina media de un parásito hembra en competencia con $n - 1$ parásitos viene dado por:

$$\lambda(n) = \lambda_0 z^{n-1} \#(2)$$

donde λ_0 es la tasa de producción de huevos por hembra independiente de la densidad de parásitos en el hospedador y $z = e^{-\gamma}$ con γ un parámetro que cuantifica la intensidad de la competencia. Hall y Holland (2000) presentan un estudio de la fecundidad de *Ascaris lumbricoides*.

Utilizando la distribución de parásitos en hospedadores (1) podemos calcular la producción media de huevos por hospedador como (López y Aparicio, 2022) $\lambda_0 \alpha m \psi(m, k, z)$ donde α es la fracción de parásitos hembras en un hospedador y ψ , la contribución efectiva media por parásito hembra al reservorio de parásitos (véase Churcher et al. (2006); López y Aparicio (2022)), está dada por

$$\psi(m, k, z) = \left[1 + (1 - z) \frac{m}{k} \right]^{-(k+1)} \#(3)$$

Sin embargo, sólo los hospedadores con al menos un parásito hembra y un parásito macho contribuirán de manera efectiva al reservorio de parásitos mediante la producción de huevos fertilizados (o infectivos). Por lo tanto, la producción media de huevos fertilizados por hospedador es

$$\lambda_0 \alpha m \psi(m, k, z) \phi(m, k, z) \#(4)$$

donde $\phi(m, k, z)$ es la probabilidad de apareamiento para la distribución binomial negativa (López y Aparicio (2022))

$$\phi(m, k, z) = 1 - \left[\frac{1 + (1 - \alpha z) \frac{m}{k}}{1 + (1 - z) \frac{m}{k}} \right]^{-(k+1)} \#(5)$$

Por lo tanto, la contribución media de los huevos fertilizados al reservorio ambiental por huésped y por unidad de tiempo es $\rho \lambda_0 \alpha m \psi(m, k, z) \phi(m, k, z)$, donde ρ es la tasa de contribución de huevos por huésped y, por lo tanto, la contribución total de huevos al reservorio por unidad de tiempo de una población huésped de tamaño N es $\rho \lambda_0 \alpha m \psi(m, k, z) \phi(m, k, z) N$.

La población de huevos y/o larvas en el ambiente (ℓ) también disminuye debido a la mortalidad de huevos/larvas (a una tasa μ_ℓ) y debido a la infección del hospedador a una tasa $\beta\ell$ por hospedador, sin embargo, consideramos que este último término es despreciable en relación al tamaño de ℓ . Por lo tanto, la dinámica del reservorio está dada por

$$\frac{d\ell}{dt} = \rho\lambda_0\alpha m\psi(m, k, z)\phi(m, k, z)N - \mu_\ell\ell \quad (6)$$

Finalmente, la dinámica de la carga parasitaria media m se obtiene de la siguiente manera. Los parásitos se extraen del entorno a una tasa $\beta N\ell$ y, por lo tanto, la carga parasitaria media aumenta a una tasa $\beta N\ell/N = \beta\ell$. Los parásitos dentro del huésped mueren a una tasa μ_p y los huéspedes a una tasa μ_h (matando a todos sus parásitos). Por lo tanto, la dinámica de m está dada por

$$\frac{dm}{dt} = \beta\ell - (\mu_h + \mu_p)m \quad (7)$$

Debido a que un huésped promedio tiene contacto con una pequeña parte del reservorio ℓ (por infección y contribución), cambiamos el nombre de la variable, reservorio relativo a un huésped, ℓ/N a ℓ . Entonces, la dinámica de la nueva variable ℓ está dada por

$$\frac{d\ell}{dt} = \rho\lambda_0\alpha m\psi(m, k, z)\phi(m, k, z) - \mu_\ell\ell \quad (8)$$

Por lo tanto, el marco conceptual de la dinámica de transmisión de parásitos se conceptualiza como se muestra en la Figura 2. Un modelo básico de la dinámica de transmisión de la infección por macroparásitos en una población hospedadora homogénea está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

$$\frac{dm}{dt} = \beta\ell - (\mu_h + \mu_p)m$$

A.1. Bifurcación nodo silla

Vamos a demostrar que el modelo clásico desarrollado en la sección ?? Presenta una bifurcación nodo silla. Para ello consideremos la ecuación (??)

$$\frac{dM}{dt} = (\mu_H + \mu_M) [R_0\psi(M)\phi(M) - 1]M$$

que vamos a denotar de manera compacta por $\frac{dM}{dt} = f(M, R_0)$. Por la condición necesaria para la existencia de una bifurcación nodo silla en (m^b, R_0^b)

$$f(m^b, R_0^b) = 0$$

donde la primera de estas condiciones es la condición de equilibrio (15) del sistema

$$\psi(m^b; k, z)\phi(m^b; k, z) = 1/R_0^b,$$

, y así obtenemos la siguiente condición para el equilibrio

$$\frac{\partial}{\partial m} \psi(m^b; k, z) \phi(m^b; k, z) = 0 \quad (16)$$

El valor de m^b correspondiente con esta última condición es

$$m^b = \frac{k \left(\frac{1 - \alpha z}{1 - z} \right)^{\frac{1}{k+2}} - k}{-(1 - z) \left(\frac{1 - \alpha z}{1 - z} \right)^{\frac{1}{k+2}} + (1 - \alpha z)} \quad (17)$$

y el número reproductivo básico correspondiente es

$$R_0^b = [\psi(m^b; z, k) \phi(m^b; z, k)]^{-1} \quad (18)$$

Para una condición suficiente para la existencia de una bifurcación nodo silla en (m^b, R_0^b) y se puede mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial R_0}(m^b, R_0^b) \neq 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2}(m^b, R_0^b) \neq 0 \quad (19)$$

Realizando un desarrollo en serie de Taylor de la función f en un entorno de (m^b, R_0^b) en la ecuación (12) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} = & f(m^b, R_0^b) + (m - m^b) \left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_{(m^b, R_0^b)} \\ & + (R_0 - R_0^b) \left. \frac{\partial f}{\partial R_0} \right|_{(m^b, R_0^b)} \end{aligned}$$

Por lo tanto localmente en el punto (m^b, R_0^b) la ecuación es de la forma

$$\frac{dm}{dt} = A(R_0 - R_0^b) + B(m - m^b)^2 \quad (21)$$

donde los valores de A y B

$$\begin{aligned} A &= (\mu_h + \mu_p) \frac{m^b}{R_0^b}, \\ B &= (\mu_h + \mu_p) R_0^b m^b \frac{\partial^2 F}{\partial m^2}(m^b), \quad (22) \end{aligned}$$

con $F(m) = \psi(m, z, k) \phi(m, z, k)$, obteniendo así la forma normal de una bifurcación nodo silla. A.2. Discretización del modelo heterogéneo

Ahora vamos a presentar una Discretización del modelo (??) en función de la edad del hospedador. Al considerar una Discretización con clases de edades anuales obtenemos el siguiente sistema:

$$\frac{dM_1}{dt} = \beta_1 L - (\mu_1 H + \mu_M) M_1 - M_1 \Delta_1, \#(1)$$

$$\frac{dM_j}{dt} = \beta_j L - (\mu_j H + \mu_M) M_j - M_j \Delta_j + M_{j-1} \Delta_{j-1}, \#(2)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sigma \lambda^2 X H_j H_T \rho_j M_j \psi(M_j) \phi(M_j) \Delta_j - \mu_L L, \#(3)$$

El parámetro Δ_j es el ancho de la j -ésima clase de edad. Usamos clases de edades anuales, por lo que $\Delta_j = 1$ y $N = 70$. Los valores de los parámetros β y ρ se discretiza en N valores, uno para cada clase de edad. De manera similar, la expresión para R_0 se aproxima mediante sumas en lugar de integrales.

$$R_0 = \sigma \lambda^2 \mu_L X \sum_{j=1}^N \beta_j (\mu_j H + \mu_M) \sum_{i=j}^N \rho_i H_i H_T (\mu_i H + \mu_M) \Delta_i \Delta_j$$

(A.9)

Discusión y conclusión general

Las infecciones por geohelminthos afectan a más de mil millones de personas en todo el mundo. El control y la eliminación de estas enfermedades tropicales desatendidas se han convertido recientemente en el foco de mayor interés y financiación de organismos internacionales. Cada vez hay más recursos disponibles para el tratamiento de las geohelmintiasis a través de estrategias de desparasitación. Sin embargo, se han realizado pocas investigaciones para evaluar el impacto de los tratamientos de estas infecciones que podrían usarse para guiar el diseño de programas de eliminación de estas infecciones. Lo realizado en este trabajo pretende ser una ayuda tanto para el estudio como para la toma de decisiones en el desarrollo de estrategias de control y eliminación de esta infección. A continuación discutimos alguno de los resultados obtenidos en este trabajo. En el capítulo 2 mostramos alternativas simples al modelo binomial negativo, que modela la distribución de parásitos por hospedador. Para la distribución geométrica inflada (desinflada) generalizada o la distribución Hurdle generalizada, presentamos formulas simples para la estimación de parámetros por máxima verosimilitud. Para un mayor número de observaciones particulares alcanzados por estas distribuciones, las estimaciones de los parámetros se deben encontrar numéricamente pero, a diferencia de la distribución binomial negativa, se pueden utilizar métodos simples como el método de Newton. En los ejemplos analizados en este trabajo, la distribución geométrica inflada en cero o la distribución Hurdle presentan en la mayoría de los casos un ajuste similar a los datos que la distribución binomial negativa. En algunos casos estas distribuciones mejoran significativamente el ajuste. Por otro lado, los resultados de los criterios AIC muestran que los modelos son similares. Pero en los pocos casos en los que el ajuste no es lo suficientemente bueno, sumar el inflado (desinflado) de conteo de unos o la distribución Hurdle correspondiente mejoran significativamente el ajuste. Sin embargo, la principal ventaja de estas distribuciones no es una pequeña mejora en el ajuste de los datos, sino el hecho de que se proporciona una formula simple para las estimaciones de los parámetros de máxima verosimilitud. 11 Para todos los modelos considerados no se observa un buen ajuste de la cola de la distribución. Sin embargo, este hecho no indica necesariamente la necesidad de considerar otras distribuciones. Debido a que las muestras son pequeñas, los eventos raros en la cola, cuando se observan actúan como valores atípicos que se les da demasiado peso a esta rara observación. En el capítulo 3 encontramos que suponiendo un modelo arbitrario para la

distribución de los parásitos por hospedador, modelamos la distribución de hembras y machos. A partir de esto calculamos diferentes variables reproductivas de los parásitos como el número medio de hembras fértiles, la producción media de huevos, la probabilidad de apareamiento, la producción media de huevos fértiles. Mostramos que estas variables dependen de la naturaleza de la independencia de las distribuciones de parásitos macho y hembra. También mostramos que estos aspectos son afectados por los efectos de la fecundidad denso-dependiente propia de cada parásito. Las expresiones obtenidas en este trabajo de los aspectos reproductivos coinciden con las obtenidas por los trabajos [?] [?] [?]. Sin embargo en estos trabajos no se considera los efectos que tiene la fecundidad denso-dependiente sobre el comportamiento reproductivo de los parásitos. Las expresiones obtenidas aquí son una generalización a las obtenidas en los trabajos [?] [?] [?]. Una de las principales limitaciones en este capítulo es que si bien las expresiones obtenidas son generales, solamente se considera el comportamiento reproductivo de los parásitos polígamos y no consideramos los parásitos monográficos y hermafroditas. En el capítulo 4 desarrollamos modelos matemáticos deterministas y estocásticos para la dinámica de transmisión de las geohelmintiasis en poblaciones heterogéneas. Estos modelos nos permiten evaluar el impacto de las intervenciones WASH y PDM sobre la carga media de parásitos y poder determinar el periodo de eliminación de la infección. Los modelos analizados muestran que la reducción de la carga media de parásitos y el periodo de eliminación de la infección dependen fuertemente de los parámetros: proporción de la población con WASH (p), efectividad de WASH (e) y el número de rondas de los tratamientos. Los parámetros p y e representan las características propias de las intervenciones WASH. Mientras que el número de rondas de los tratamientos es una característica de los PDM. Los parámetros: proporción de la población con tratamiento (g), eficacia del tratamiento (h) propios de los PDM también impactan en la reducción de la carga media de parásitos y el periodo de eliminación de la infección como se muestra en los trabajos [?] [?], sin embargo aquí los valores de estos parámetros se encuentran fijos. Para una población donde la tasa de contacto y aporte al reservorio de niños (entre 2 y 14 años) es el doble de los adultos (mayores de 15 años), este análisis determina que las intervenciones WASH permiten la erradicación de la infección para la modalidad higiene + saneamiento a los 13 años de la implementación, para los valores $(p, e) = (0.7, 0.7)$. Para las otras modalidades (higiene, saneamiento) no se consigue la eliminación. Para el caso de las intervenciones conjuntas WASH y PDM, con tratamientos anuales ($\tau = 1$). La erradicación de la infección se consigue a los 13 y 8 años de la implementación, para los valores $(p, e) = (0.5, 0.5)$ y $(p, e) = (0.5, 0.7)$ respectivamente. Para el modelo basado en individuos con intervenciones conjuntas WASH y PDM, y tratamientos anuales ($\tau = 1$). La erradicación de la infección se consigue a los 20 años de la implementación con una probabilidad superior al 60 %, para los valores $(p, e) = (0.5, 0.7)$. Mientras que para los 10 años de rondas de tratamientos la erradicación se consigue con una probabilidad menor al 10 %. La principal limitación de este capítulo es no contar con datos de campo que respalden los valores de los parámetros p y e asumidos en este trabajo. Esto se debe a la escasez de trabajos que puedan medir bien el impacto de las intervenciones WASH sobre poblaciones con geohelmintiasis. Como conclusión en base en lo analizado en este trabajo se puede concluir que además de los programas de desparasitación masiva con antihelmínticos que se aplican en la actualidad como estrategia de control de las geohelmintiasis debemos sumar a esta estrategia, mejorar el acceso al agua, saneamiento e higiene que denotamos a lo largo del trabajo por WASH. Mostramos que esta nueva estrategia

depende fuertemente del porcentaje de la población a la que aplicamos WASH y de la efectividad de cómo se aplica estas intervenciones WASH. Otros de los aportes de este trabajo al modelado de la dinámica de transmisión de la infección por geohelminths, es permitir un mejor modelado del reservorio del sistema el cual depende en gran medida de como están distribuidos los parásitos en la comunidad de los hospedadores y de las características reproductivas propias de los de parásitos. Frecuentemente la mayoría de los modelos eran abordados asumiendo un modelo binomial negativa para la distribución de los parásitos, lo cual tiene la desventaja de este modelo no ajuste bien al conteo de ceros. En este trabajo presentamos una solución proponiendo un modelo geométrico inflado en cero para los parásitos. Además también modelamos los aspectos reproductivos de los parásitos para este modelo y para cualquier otro modelo estadístico arbitrario lo cual sin duda es un aporte significativo para el modelado de la dinámica de transmisión de los geohelminths.