



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROCESAMIENTO DE SEÑALES II - 86.52
**Aplicación del Filtro de Kalman a
predicción de cotizaciones**

Quintana, Gonzalo Iñaki - 96 689

11 de mayo de 2020

Índice

1. Introducción teórica	2
1.1. Modelo lineal de segundo orden	2
1.2. Modelo no lineal o autorregresivo	3
2. Aplicación: cotización del Bitcoin en Dólares	4
2.1. Capacidad de predicción	6
2.2. Cómputo del Error Cuadrático Medio de predicción en función de las varianzas	11
3. Aplicación a otras series temporales	12
4. Conclusiones	14

Resumen

El Filtro de Kalman es una poderosa herramienta de predicción utilizada en diversas áreas de la ingeniería. En el presente trabajo se pretende aplicar este algoritmo a cotizaciones de monedas y *commodities*, lo que constituye una aplicación no muy utilizada de este algoritmo iterativo.

1. Introducción teórica

Se plantea el problema de predicción de series temporales que representan las evoluciones de cotizaciones de distintas *commodities*. Para ello, se contemplan dos modelos distintos: un modelo lineal, que plantea una evolución muy simple de las series temporales y un modelo más complejo, que representa a dichas series temporales como procesos autoregresivos de un orden N dado. A continuación, se exploran y se desarrollan las ecuaciones de dichos modelos.

1.1. Modelo lineal de segundo orden

Siguiendo lo planteado en [2], se considera que las *commodities* en cuestión tienen la siguiente dinámica:

$$\begin{cases} z^{k+1} = z^k + T \dot{z}^k + 1/2 T^2 w^k \\ \dot{z}^{k+1} = \dot{z}^k + T w^k \\ y^k = z^k + v^k \end{cases} \quad (1)$$

donde z^k es el valor de la serie temporal y \dot{z}^k su tasa de cambio en el instante k . Debido a la gran fluctuación del mercado de acciones y cotizaciones, se puede considerar a w^k , la aceleración, como ruido blanco gaussiano de media cero. y^k es la medición y v^k el ruido asociado a esa medición, que también se admite blanco gaussiano de media cero, siendo T el período de muestreo.

Definiendo el vector de estados como

$$X^k = \begin{bmatrix} x^k \\ \dot{x}^k \end{bmatrix}$$

se llega a la siguiente representación en el espacio de estados

$$\begin{cases} X^{k+1} = A X^k + B w^k \\ y^k = C X^k + D v^k \end{cases} \quad (2)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 T^2 \\ T \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad D = [1]$$

Las varianzas de los ruidos de medición y proceso son, respectivamente, R y Q .

1.2. Modelo no lineal o autorregresivo

Se considera que la serie temporal en cuestión es un proceso autorregresivo de orden N y parámetros desconocidos. La dinámica en espacio de estados es la siguiente.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_k$$

donde el vecotr W_k es ruido blanco y la cantidad de coeficientes desconocidos está dada por el número triangular

$$M \doteq \sum_{i=1}^N i = \frac{N(N+1)}{2}$$

Para estimar los coeficientes a_i se los considera variables de estado, llegándose así al siguiente sistema expandido

$$\begin{cases} x_1^{k+1} &= x_{N+1}^k x_1^k + x_{N+2}^k x_2^k + \cdots + x_{2N}^k x_N^k + w_1^k \\ &\vdots \\ x_N^{k+1} &= x_{N+M}^k x_N^k + w_N^k \\ x_{N+1}^{k+1} &= x_{N+1}^k + w_{N+1}^k \\ &\vdots \\ x_{N+M}^{k+1} &= x_{N+M}^k + w_{N+M}^k \end{cases}$$

Este es un sistema no lineal de la forma

$$\begin{cases} X^{k+1} = f_k(X^k) + B_k W^k \\ y^{k+1} = C_k X^k + D_k v^k \end{cases} \quad (3)$$

Se aplica el algoritmo de Kalman extendido para estimar todos los estados originales y los coeficientes del modelo AR-N. La matriz A_k es entonces la matriz Jacobiana de la función vectorial no lineal f_k evaluada en $\hat{X}_{k/k}$, es decir, en la estimación del vector de estados en el instante k con la información obtenida hasta ese momento.

Desarrollando las expresiones anteriores, se llega a expresar a la matriz A_k en una matriz por bloques

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde A_{11} es una matriz de dimensiones $N \times N$, A_{12} de $N \times M$, la identidad es de $M \times M$ y la matriz nula es de $M \times N$. Los bloques A_{11} y A_{12} son

$$A_{11} = \begin{bmatrix} X_{N+1}^k & X_{N+2}^k & \cdots & \cdots & X_{2N}^k \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & X_{N+M}^k \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} & & & 0 & \\ X_1^k \dots X_N^k & & & & \\ & X_2^k \dots X_N^k & & & \\ & & X_3^k \dots X_N^k & & \\ & & & \dots & \\ & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Nuevamente, las varianzas de los ruidos de medición y proceso son R y Q .

2. Aplicación: cotización del Bitcoin en Dólares

Se aplica el algoritmo de Kalman a las dos dinámicas presentadas en la sección anterior (Kalman lineal para la dinámica lineal y Kalman extendido para la dinámica no lineal) para la serie temporal que contiene las fluctuaciones del valor del Bitcoin en dólares, desde 2013 a 2018. Los parámetros del modelo lineal se fijan en $T = 1$, $Q = 10^{-5}$ y $R = 10$; los del modelo no lineal en $N = 4$, $Q = 10^{-5}$ y $R = 50$. Estos parámetros se eligieron experimentalmente para obtener los mejores resultados.

A continuación, se muestran la serie temporal real junto con las predicciones realizadas con los dos métodos y la estimación de los coeficientes del modelo autorregresivo en función del tiempo.

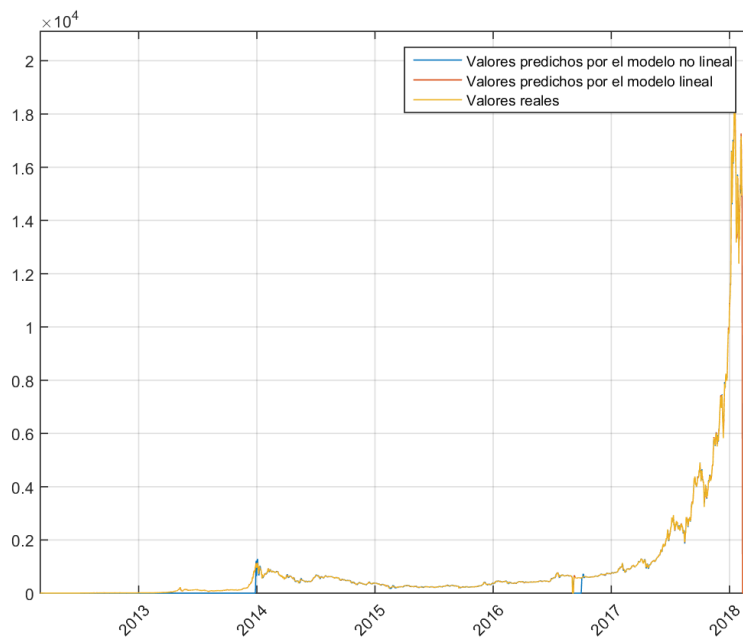


Figura 1: Serie temporal y sus predicciones en el período de tiempo contemplado.

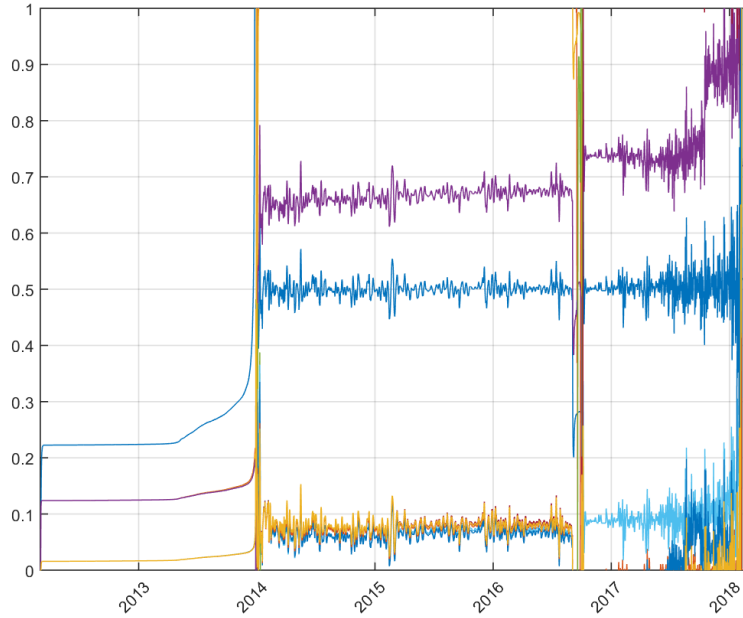


Figura 2: Estimación de los coeficientes del modelo AR. Se notan tres zonas donde el modelo es distinto.

Se puede observar que los dos algoritmos predicen bien los distintos valores que toma la serie temporal. En la figura 2 se puede notar que se tienen tres zonas en las que la dinámica estimada cambia notablemente, lo que se condice con cambios abruptos en el comportamiento de la serie temporal.

2.1. Capacidad de predicción

Luego, a fin de analizar la capacidad de predicción de los algoritmos cuando no se tienen mediciones, se quita la etapa de actualización de los mismos durante los primeros 15 días de los años 2015, 2016, 2017 y 2018.

Se muestran a continuación las gráficas obtenidas, en las que cabe aclarar que en el eje de abscisas se muestra el tiempo expresado como un fracción de cada año (es decir, 2015.04 indica el año 2015 y $0,04 \cdot 365$ días = 15 días); entre líneas punteadas verticales se indican los 15 días sin actualización.

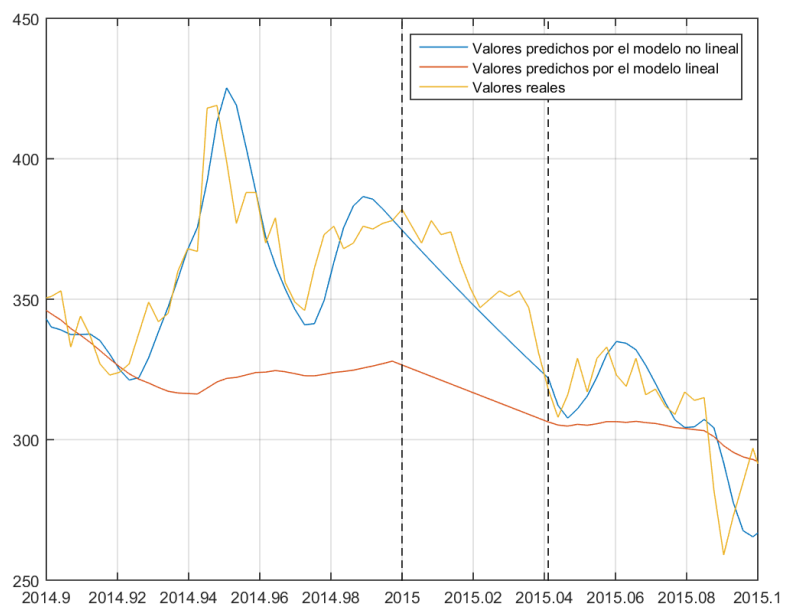


Figura 3: Serie temporal y sus predicciones, sin actualización por los primeros 15 días de 2015.

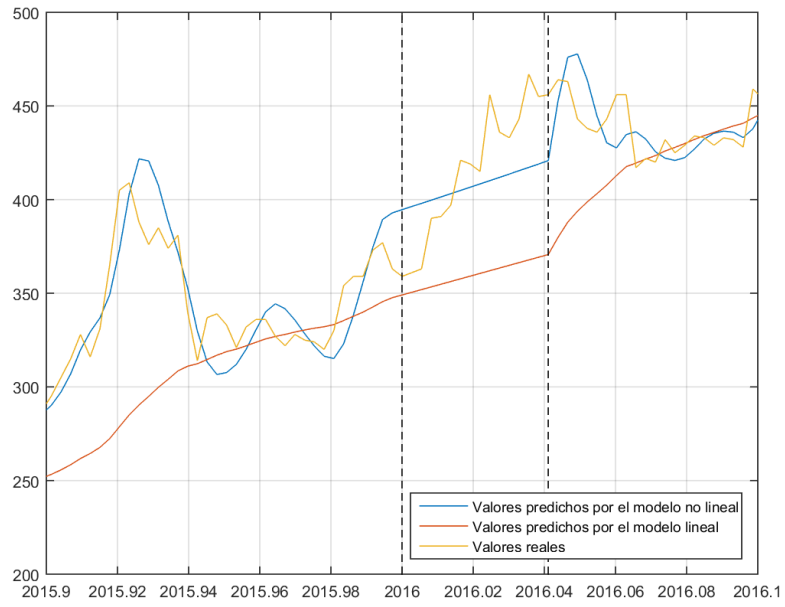


Figura 4: Serie temporal y sus predicciones, sin actualización por los primeros 15 días de 2016.

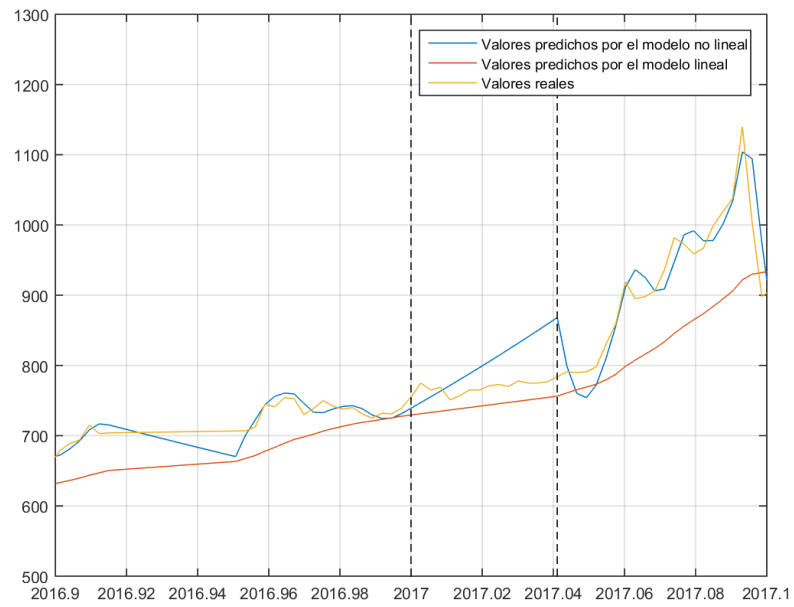


Figura 5: Serie temporal y sus predicciones, sin actualización por los primeros 15 días de 2017.

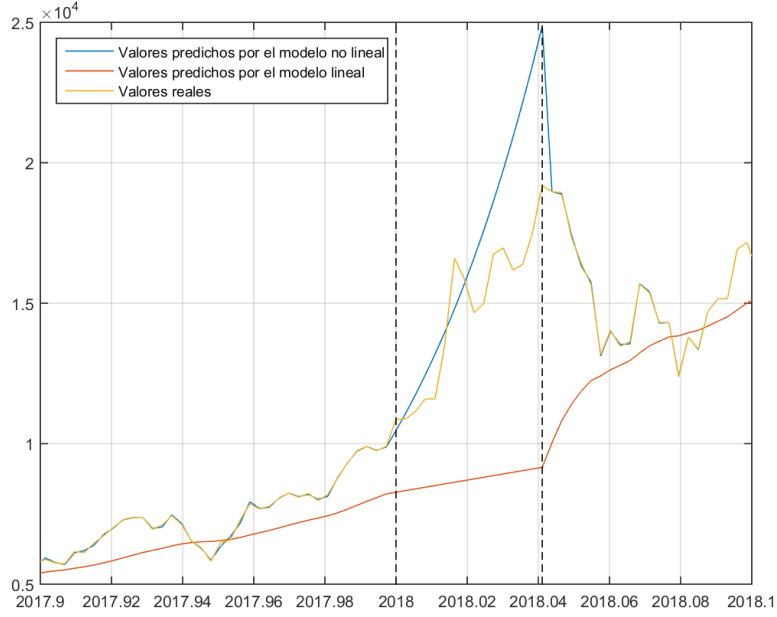


Figura 6: Serie temporal y sus predicciones, sin actualización por los primeros 15 días de 2018.

Se ve como en los años 2015, 2016 y 2018 la *performance* de la dinámica no lineal es notablemente superior a la de la dinámica lineal. Se puede ver también que las predicciones del modelo no lineal son mucho mejores para los años 2015 y 2016 que para los dos últimos años. Esto puede explicarse remitiéndose a la figura 2, en la que puede notarse que los coeficientes estimados del proceso autorregresivo son muchos mas ruidosos que en períodos anteriores.

Se nota además que en períodos en los que si se tiene actualización la *performance* del modelo AR es superior dado que se ajusta mejor a los valores reales de la serie temporal.

Se computaron los errores cuadráticos medios de las señales estimadas, que se listan a continuación.

Año	Modelo lineal	Modelo no lineal
2015	$107 \cdot 10^{-3}$	$27 \cdot 10^{-3}$
2016	$123 \cdot 10^{-3}$	$57 \cdot 10^{-3}$
2017	$49 \cdot 10^{-3}$	$32 \cdot 10^{-3}$
2018	$365 \cdot 10^{-3}$	$137 \cdot 10^{-3}$

Se puede apreciar que la utilización del modelo no lineal implica una mejora en el ECM en todos los casos, aunque esa mejora toma menor envergadura en los dos últimos años.

2.2. C  puto del Error Cuadrático Medio de predicción en función de las varianzas

Finalmente, se realiza un barrido de las varianzas del ruido de proceso y de medición para las predicciones sin actualización para principios del año 2015 y se computa el error cuadrático medio en los períodos sin actualización (al igual que en la subsección anterior).

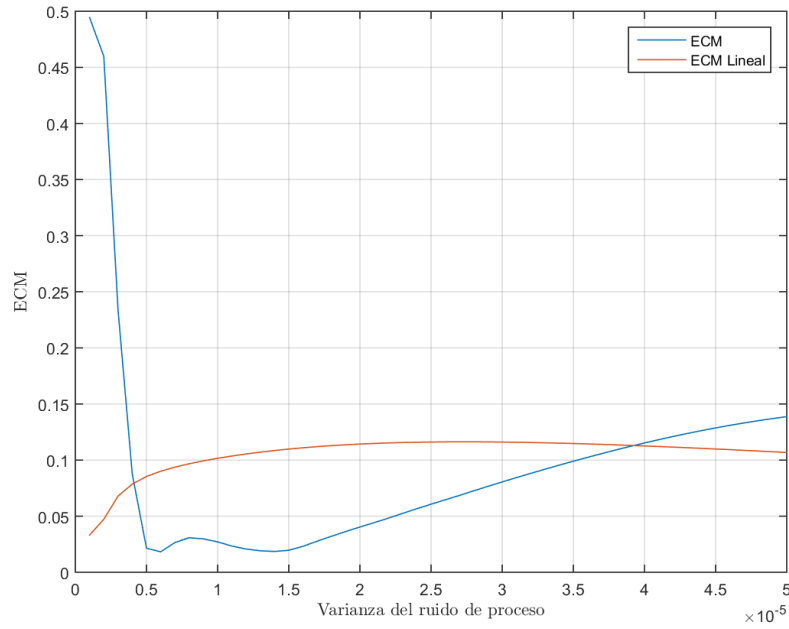


Figura 7: Error Cuadrático Medio en función de la varianza del ruido de proceso para la estimación en 2015.

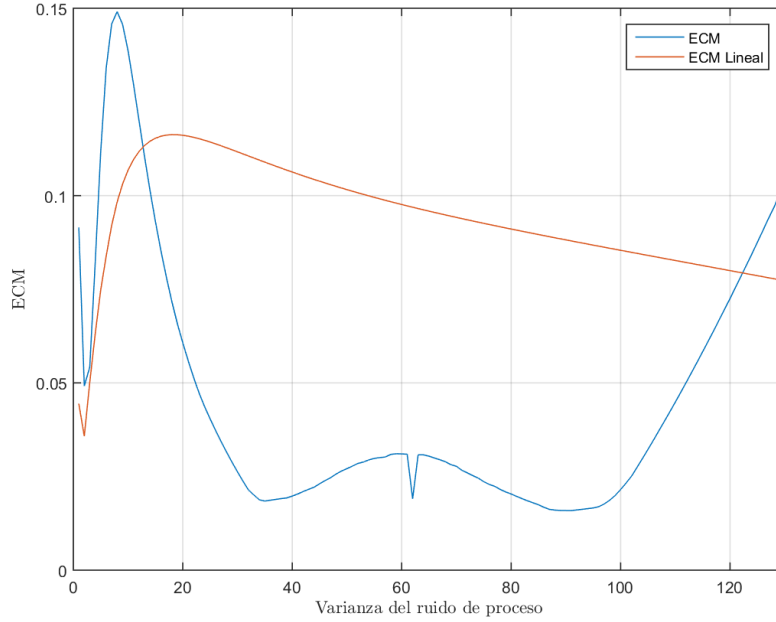


Figura 8: Error Cuadrático Medio en función de la varianza del ruido de medición para la estimación en 2015.

Se puede notar que para un cierto rango de valores de las varianzas el ECM del modelo no lineal está por debajo del producido por el modelo lineal, lo que da una idea de robustez. Se nota también que los valores elegidos experimentalmente para las varianzas ($Q = 10^{-5}$ y $R = 10$ para el modelo lineal y $Q = 10^{-5}$ y $R = 50$ para el modelo no lineal) están próximos.

3. Aplicación a otras series temporales

Se aplica también el algoritmo de Kalman a las dos dinámicas descritas anteriormente para otras series temporales, que describen también cotizaciones de alguna moneda o *commodity* en función del tiempo.

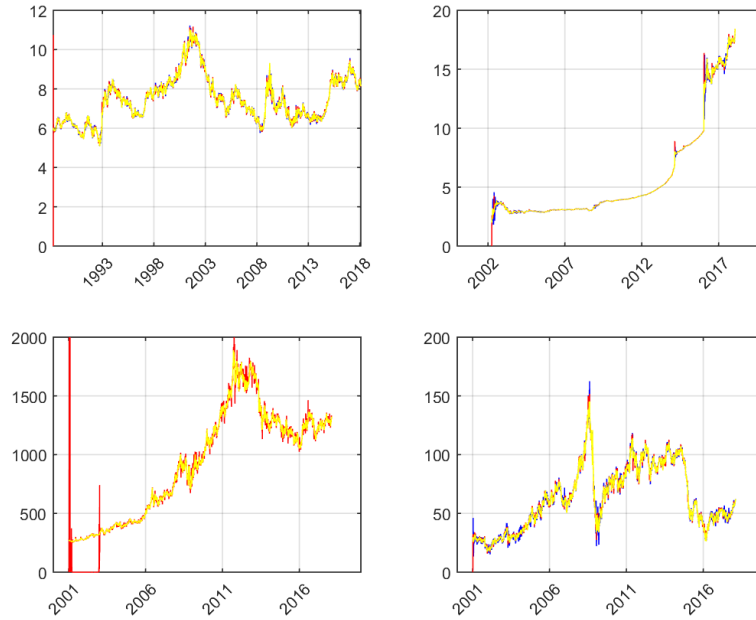


Figura 9: Series temporales para las que se aplican los algoritmos vistos. Arriba a la izquierda: cotización del Dólar en Coronas Suecas, arriba a la derecha: cotización del Dólar en Pesos Argentinos, abajo a la izquierda: cotización de la onza de oro en Dólares, abajo a la derecha: cotización del barril de petróleo en Dólares.

Se comprueba el correcto funcionamiento de los dos métodos de predicción para todas las series. Sin embargo, se observa que el modelo autorregresivo provee mejores resultados que el modelo simple lineal de segundo orden solo en el caso de la cotización del Dólar en Pesos Argentinos. En las demás series, los resultados con los dos modelos son muy similares y no hay ninguno que pueda calificarse como "mejor".

Esto podría explicarse si se advierte que las otras series tienen una dinámica más simple, la cual podría ser descrita satisfactoriamente por un modelo de segundo orden. En estas series, los términos de mayor orden del modelo autorregresivo aportarían redundancias e incluso podrían entorpecer el rendimiento del algoritmo de Kalman, al aumentar la inercia del mismo y disminuir así su capacidad de adaptación.

En contraste, la cotización del Dólar en Pesos Argentinos tiene una dinámica muy compleja que, de la misma manera que la cotización del Bitcoin en Dólares analizada previamente, requiere de un modelo de mayor orden para su completa descripción. Es en estos casos donde se justifica utilizar el modelo autorregresivo planteado.

4. Conclusiones

Como primer conclusión se destaca la comprobación de los resultados de [2] en varias series temporales de dinámica variable. El hecho de que series de cotizaciones tan complejas y distintas puedan representarse con un modelo tan simple no deja de ser sorprendente.

Por otro lado, se planteó un modelo alternativo más complejo para la predicción y el seguimiento de series temporales. La utilización de este modelo se justifica cuando se tienen series con dinámica mas compleja, en las que se logran resultados notablemente mejores a los obtenidos con el modelo lineal de segundo orden.

Queda planteada la necesidad de aplicar estos métodos de predicción a una mayor cantidad de series temporales, a fin de poder realizar un análisis estadístico y concluir si la hipótesis planteada de que el modelo autorregresivo obtiene mejores resultados que el modelo de segundo orden para dinámicas complejas puede ser aceptada con cierta evidencia estadística.

Referencias

- [1] Yan Xu, Guosheng Zhang. *Application of Kalman Filter in the Prediction of stock price*. Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing, 102600, China.
- [2] Gurnain Kaur Pasricha. *Kalman Filter and its Economic applications*. University of California, Santa Cruz. 15 October, 2006