MÚLTIPLES REGISTROS CON LOS AXIOMAS DE INCIDENCIA DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Resumen. Este trabajo explora el concepto de registros en geometría, entendidos como diferentes formas de representar y comunicar conceptos geométricos. Estos registros incluyen lingüísticos (uso de lenguaje verbal), gráficos (dibujos y diagramas), simbólicos (símbolos matemáticos), manipulativos (uso de materiales físicos) y computacionales (uso de software). Luego, se destaca la importancia del registro simbólico en la lógica y geometría.

El uso del registro simbólico aporta profundidad al concepto, permitiendo abstracción y generalización. También ofrece rigor y precisión mediante el lenguaje formal y las reglas lógicas. La relación con la lógica es estrecha, ya que el registro simbólico se basa en principios lógicos y fomenta la comprensión de la lógica y la geometría. La demostración de un axioma de incidencia se muestra como un ejemplo de cómo el registro simbólico facilita el razonamiento y la comprensión de los conceptos.

Además, se menciona que la lógica puede abordarse como un juego sintáctico, lo que la hace más accesible y atractiva para principiantes en matemáticas. Esta aproximación enfatiza en las reglas y estructura, se relaciona con el pensamiento abstracto y permite una exploración gradual y experimentación.

1. Introducción

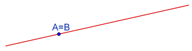
1.1. Importancia del trabajo con varios registros. Entenderemos a los registros en geometría como las diferentes formas en que se pueden representar y comunicar los conceptos y procesos geométricos. Los registros son sistemas semióticos que permiten la expresión y el intercambio de ideas geométricas entre los estudiantes, los docentes y los materiales de enseñanza. Ver [Duval, 1999]

Los registros en la geometría pueden incluir:

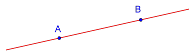
- Registros lingüísticos: El uso del lenguaje natural, incluyendo términos, definiciones, proposiciones y argumentos geométricos expresados en palabras.
- Registros gráficos: El uso de dibujos, diagramas, esquemas y representaciones visuales para ilustrar y comunicar ideas geométricas.
- Registros simbólicos: El uso de símbolos matemáticos y notación algebraica para expresar relaciones y propiedades geométricas.
- Registros manipulativos: El uso de materiales físicos, como modelos geométricos, construcciones con regla y compás, o manipulación de objetos tridimensionales, para explorar y experimentar con conceptos geométricos.
- Registros computacionales: El uso de software de geometría dinámica, como Geogebra, para visualizar y manipular objetos geométricos, realizar construcciones interactivas y realizar cálculos relacionados con la geometría.

El tratamiento de los registros en los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana es importante porque nos permite comprender y comunicar de manera efectiva los conceptos y propiedades geométricas. Aquí hay algunas razones clave por las cuales el tratamiento de los registros es relevante en este contexto:

- Claridad y comprensión: Los diferentes registros ofrecen diferentes formas de representar y comprender los axiomas de incidencia. Al utilizar registros lingüísticos, gráficos, simbólicos y manipulativos, podemos abordar los axiomas desde múltiples perspectivas, lo que facilita la comprensión de los conceptos geométricos involucrados.
- Comunicación efectiva: Los registros nos permiten comunicar los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana de manera clara y precisa. Cada registro tiene su propio lenguaje y conjunto de convenciones, lo que permite una comunicación más efectiva entre estudiantes, docentes y materiales de enseñanza.
- Representación visual: Los registros gráficos y manipulativos, como diagramas, modelos físicos y construcciones geométricas, permiten una representación visual de los axiomas. Esto ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender mejor las relaciones espaciales y las propiedades geométricas.
- Abstracción y generalización: El uso de registros simbólicos y lingüísticos, como fórmulas matemáticas y definiciones formales, permite la abstracción y generalización de los axiomas de incidencia. Estos registros nos permiten expresar los axiomas de manera concisa y formal, lo que facilita su aplicación en diferentes contextos geométricos.



(A)



(B)

FIGURA 3.1. Axioma 1 de incidencia

- Flexibilidad y transferencia: Al trabajar con diferentes registros, los estudiantes pueden desarrollar habilidades de flexibilidad y transferencia conceptual. Pueden aprender a traducir y relacionar los conceptos geométricos entre diferentes registros, lo que les permite aplicar su conocimiento en una variedad de situaciones geométricas.

En este trabajo presentaremos breves comentarios sobre el uso de múltiples registros para la enseñanza de los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana, pero enfatizando el registro simbólico.

2. Requisitos Previos

Entendimiento básico de la lógica proposicional y el razonamiento deductivo. Conceptos básicos de Geometría Euclidiana.

3. Desarrollo

3.1. Comentarios sobre el problema teórico. El conjunto de símbolos propios de la teoría IGE de Incidencia de la Geometría Euclidiana son $\{=, \mathcal{P}\left(\right), \mathcal{R}\left(\right), \pi\left(\right), \mathcal{I}_{\mathcal{R}}\left(\right), \mathcal{I}_{\pi}\left(\right)\}$. Esto quiere decir que debo escribir esta teoría usando solamente estos símbolos y otros símbolos de la lógica. Por costumbre, a las variables se las escribe con letras mayúsculas de imprenta, si se quiere hacer alusión a puntos, con letras minúsculas de imprenta si se quiere hacer alusión a rectas, y con letras griegas minúsculas si se quiere hacer alusión a planos. $\mathcal{P}\left(A\right)$ se lee «A es un punto», $\mathcal{R}\left(s\right)$, «$s$ es una recta», $\pi\left(\nu\right)$ «ν es un plano», $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}\left(P, m\right)$ «El punto P está en incidencia con la recta m» o «m pasa por P» o «P está en m», etc; y similarmente para $\mathcal{I}_{\pi}\left(P, \alpha\right)$. Para acortar la notación, un pequeño abuso de notación permitido es $\mathcal{P}\left(A, B, C\right)$ lo entendemos por $\mathcal{P}\left(A\right) \wedge \mathcal{P}\left(B\right) \wedge \mathcal{P}\left(C\right)$ y similarmente para $\mathcal{R}\left(\right), \pi\left(\right)$. También escribimos $A, B, C \in r$ en cuenta de $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}\left(A, r\right) \wedge \mathcal{I}_{\mathcal{R}}\left(B, r\right) \wedge \mathcal{I}_{\mathcal{R}}\left(C, r\right)$ y $A, B, C \in \alpha$ en cuenta de $\mathcal{I}_{\pi}\left(A, \alpha\right) \wedge \mathcal{I}_{\pi}\left(B, \alpha\right) \wedge \mathcal{I}_{\pi}\left(C, \alpha\right)$, siempre que esto no lleve a ambigüedad. Ver [Margaris, 1990]

Observación 1. La pregunta que puede surgir es ¿Cuál es el valor agregado del uso del registros simbólico? Se puede responder de dos maneras: Primero, tiene una gramática muy simple (en comparación a los lenguajes naturales como el inglés o el español). Segundo, es un problema sintáctico, y por lo tanto, los pasos en una deducción son solamente manipulación de cadenas.

Para entender mejor el segundo punto en la observación anterior vamos a considerar lo siguiente: Si en cuenta de leer $\mathcal{P}\left(A\right)$ como «A es un punto» se lo leyera como «A es un jugador de futbol», $\mathcal{R}\left(s\right)$ como «s es una recta» se lo leyera como «s es un equipo de futbol» , $\pi\left(\nu\right)$ como «ν es un plano» se lo leyera como , $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}\left(P, m\right)$ «El punto P está en incidencia con la recta m» o «m pasa por P» o «P está en m», etc; y similarmente para $\mathcal{I}_{\pi}\left(P, \alpha\right)$.

3.2. Ejemplo ilustrativo. Consideremos el primer axioma de incidencia según la formulación de [Efimov, 1984]: «Cualesquiera que sea el punto A y cualesquiera que sea el punto B, existe una recta a que pasa por A y por B».

- Registro lingüístico: Podemos expresar el axioma utilizando lenguaje verbal, por ejemplo: «Cualesquiera que sea el punto A y cualesquiera que sea el punto B, existe una recta a que pasa por A y por B».
- Registro gráfico: Podemos representar el axioma mediante un diagrama que muestra dos puntos A y B y una línea que los conecta. Ver figura 3.1
- Registro simbólico: Podemos usar símbolos matemáticos para expresar el axioma, por ejemplo: $\forall A \forall B \exists r \left(\mathcal{P}\left(A, B\right) \rightarrow \mathcal{R}\left(r\right) \wedge A, B \in r\right)$
- Registro manipulativo: Podemos utilizar regla y compás para construir físicamente una línea que pase por los puntos A y B.
- Registros computacionales: Con el uso de Geogebra, se puede realizar dibujos dinámicos, es decir que en este caso pudiera cambiarse las posiciones relativas de A y de B y ver el cambio de la línea que pasa por A y por B. Para más ejemplos de este recurso puede verse [Sángari, 2021]

Es común interpretar de la representación lingüística de este axioma que los puntos A y B son distintos. En esta formulación de los axiomas de incidencia, no se especifica explícitamente que los puntos A y B deben ser distintos y, por lo tanto, permite la posibilidad de que A y B sean el mismo punto. Sin embargo, en el caso de la representación simbólica, y con un pequeño auxilio de la lógica, se despejan las dudas. Por ejemplo, revisando la siguiente demostración con el uso del registro simbólico queda claro una implicación de este axioma:

Teorema 2. *Si existe un punto, existe una recta:* $\vdash \exists A\mathcal{P}(A) \rightarrow \exists r\mathcal{R}(r)$
Demostración.

1.	$\exists A\mathcal{P}(A)$	as
2.	$\mathcal{P}(A)$	cA
3.	$\forall A\forall B\exists r(\mathcal{P}(A,B) \rightarrow \mathcal{R}(r) \wedge A, B \in r)$	ax1
4.	$\exists r(\mathcal{P}(A,A) \rightarrow \mathcal{R}(r) \wedge A, A \in r)$	spec
5.	$\mathcal{P}(A,A) \rightarrow \mathcal{R}(r) \wedge A, A \in r$	cr
6.	$\mathcal{R}(r)$	SC 2,5
7.	$\exists r\mathcal{R}(r)$	$\exists$
8.	$\exists r\mathcal{R}(r)$	c5
9.	$\exists r\mathcal{R}(r)$	c2
10.	$\exists A\mathcal{P}(A) \rightarrow \exists r\mathcal{R}(r)$	DT 1-9

□

En esta demostración solamente usamos el axioma propio 1, además de metateoremas del cálculo de predicados con la igualdad. Una explicación puede ser la siguiente:

1. Se supone la existencia de un punto A ($\exists A$) y se afirma que es un punto ($\mathcal{P}(A)$.
2. Se introduce la notación "cA" para denotar el uso de la regla C
3. Se utiliza el primer axioma de incidencia.
4. Se realiza una instancia de cuantificador universal, reemplazando B por A en el axioma, es decir especializando el axioma.
5. Se utiliza nuevamente la regla C pero esta vez en r
6. Se utiliza un silogismo o un teorema del calculo de proposiciones (SC) para concluir que r es una recta.
7. Se utiliza la introducción del cuantificador existencial para afirmar que existe una recta r
8. Se descarga la regla C aplicada a r.
9. Se descarga la regla C aplicada a A.
10. Se aplica el teorema de la deducción y se concluye.

3.3. Conclusiones. El ejemplo anterior nos permitió ilustrar que el uso del registro simbólico en la demostración aporta profundidad al concepto y acerca el estudio de la lógica a la geometría de varias maneras:

- Abstracción y generalización: El registro simbólico permite expresar las ideas y conceptos de manera abstracta utilizando símbolos matemáticos y lógicos. En el caso de la demostración, se utilizan símbolos como $\exists$, $\forall$, $\rightarrow$, $\wedge$ para representar los cuantificadores existenciales y universales, la implicación lógica y la conjunción, respectivamente. Esta abstracción nos permite generalizar los razonamientos y aplicarlos a diferentes situaciones geométricas.
- Rigor y precisión: El registro simbólico proporciona un lenguaje formal y preciso para expresar las ideas geométricas. Los símbolos y las reglas de inferencia utilizadas en la lógica matemática nos permiten establecer argumentos de manera rigurosa y evitar ambigüedades. En la demostración, el uso de símbolos como $\mathcal{P}()$ $\mathcal{R}()$ A, B, r nos permite representar claramente los conceptos de punto, recta y pertenencia, y establecer las condiciones necesarias para demostrar la existencia de una recta que pasa por un punto.
- Relación con la lógica: El registro simbólico utilizado en la demostración está estrechamente relacionado con los principios y reglas de la lógica matemática. La expresión de los axiomas y las inferencias lógicas utilizadas se basan en la estructura formal de la lógica de predicados. Esto permite una conexión directa entre la lógica y la geometría, facilitando el estudio de ambos campos y fomentando la comprensión de sus fundamentos y métodos de razonamiento.

Queda un problema que pudiera parecer inalcanzable desde el punto de vista didáctico y es el de la lógica. Sin embargo, puede explicarse la lógica como lo que es: **Un juego sintáctico.**

Explicar la lógica como un juego sintáctico es una forma accesible y atractiva de abordar esta disciplina sin requerir conocimientos previos de matemáticas. Aquí hay algunas razones por las cuales esta aproximación es efectiva:

- Enfoque en las reglas y la estructura: Al tratar la lógica como un juego sintáctico, nos centramos en las reglas y la estructura del lenguaje formal utilizado en la lógica, en lugar de enfocarnos en el contenido específico o el significado de las proposiciones. Esto hace que el enfoque inicial sea más accesible y menos intimidante para quienes no tienen experiencia en matemáticas.
- Relación con el pensamiento abstracto: El juego sintáctico en la lógica implica manipular símbolos y aplicar reglas para generar nuevas cadenas de símbolos. Esta forma de pensamiento

abstracto es más cercana a cómo pensamos y razonamos naturalmente, lo que facilita la comprensión de la lógica sin la necesidad de conocimientos matemáticos previos.

- Exploración gradual: La aproximación del juego sintáctico permite una exploración gradual de la lógica, comenzando con conceptos y reglas básicas y avanzando hacia conceptos más complejos a medida que se adquiere confianza y habilidades. Esta progresión gradual es ideal para quienes se están iniciando en el estudio de la lógica sin una base matemática sólida.
- Experimentación e interacción: Los juegos sintácticos en la lógica a menudo involucran resolver problemas y proponer soluciones, lo que fomenta la experimentación y la interacción activa con el material. Esto puede hacer que el proceso de aprendizaje sea más interesante y entretenido.
- Enfoque en el proceso más que en los resultados: Al abordar la lógica como un juego sintáctico, se enfatiza el proceso de razonamiento y manipulación de símbolos, en lugar de centrarse en la obtención de resultados específicos. Esto alienta a los estudiantes a centrarse en el proceso de pensamiento y en la comprensión de las reglas lógicas, lo que puede llevar a un aprendizaje más profundo y significativo.

En conclusión, si se usan los registros en combinación, en especial el simbólico obtendremos resultados más efectivos y profundos en la enseñanza de las matemáticas en general y en particular a la geometría.

Referencias

[Duval, 1999] Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Exploration: Serie recherches en sciences de l''ducation. Universidad del Valle.

[Efimov, 1984] Efimov, N. (1984). *Geometría superior*. Mir.

[Margaris, 1990] Margaris, A. (1990). *First Order Mathematical Logic*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications.

[Sángari, 2021] Sángari, A. y Egüez, C. (2021). *Geometría Euclidiana con GeoGebra*. eUNSa.