JORNADAS DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

JEM VI

2022

MEMORIAS DE LAS VI JORNADAS DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

ANTONIO NOÉ SÁNGARI

RAMIRO GUZMÁN GONZÁLEZ

COMPILADORES

2022

UNSa Universidad Nacional de Salta

Memorias de las VI Jornadas de Enseñanza de la Matemática (JEM)

Registro bibliográfico – ISBN (En trámite)

Compiladores

Guzmán González, Ramiro
Sángari, Antonio Noé

Revisores de talleres y comunicaciones breves

Alberto, Diego Luis
Aliendro, Estela Sonia
Arias, Jesús Eduardo
Ávila, Mario Ubaldo
Bifano, Fernando Jorge
Duarte, Betina
Etchegaray, Silvia Catalina
Ferrero, María Martha
Formeliano, Blanca Azucena
Funes, Héctor Nicolás
García, José Ignacio
Martínez, Rosa
Marrón, Beatriz Susana
Méndez, Nilda Graciela
Mercau, Beatriz Susana
Oliva, Elisa
Quintana, Pablo
Rodríguez, Mabel Alicia
Roig, María Eugenia
Rosales, Juan Carlos
Puca, Silvana Mercedes del Milagro
Saidón, Liliana
Sángari, Antonio Noé
Micelli, Mónica Lorena
Torres, Germán Ariel
Villagra, Celia Elizabeth
Villarreal Cantizana, Claudia
Viola, Fernanda Beatriz
Yazlle, Jorge Fernando

Maquetación

Martinez, Gonzalo Matias

Diseño e identidad

Díaz, Aldana Lucía

Universidad Nacional de Salta
Av. Bolivia 5150 – Salta Capital

Autoridades

Universidad Nacional de Salta

Rector
Ing. Daniel HOYOS

Vicerrector
Cr. Nicolás INNAMORATO

Secretario de Extensión
Lic. Rubén Emilio CORREA

Facultad de Ciencias Exactas

Decano
Mg. Gustavo Daniel GIL

Vicedecana
Dra. María Rita MARTEARENA

Departamento de Matemática

Directora
Lic. María Cristina AHUMADA

Secretario
Prof. Juan Pablo DIOLI

Prosecretario
Mg. Héctor Nicolás FUNES

Equipo Editorial JEM

Coordinación General

Prof. Silvia Mabel Baspiñeiro
Prof. Blanca Azucena Formeliano
Prof. lvone Anahí Patagua
Prof. Antonio Noé Sángari

Plataforma

Open Journal System (OJS)

Lic. Ramiro Guzmán González

Diseño de Identidad

Lic. Aldana Lucía Díaz

Maquetación

Gonzalo Matias Martinez

Declaraciones de Interés Educativo y Avales Institucionales

Rectorado
Universidad Nacional de Salta
RES. R. N° 937/2022

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Salta
RESD-EXA N° 379/2022

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia
y Tecnología de la Provincia de Salta
RES. N° 128/2022

Prólogo

Las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática son cuestiones de análisis de diversas investigaciones en educación matemática y tratados en comunidades científicas y por docentes de esta disciplina.

La Matemática se enseña a lo largo de toda la escolaridad obligatoria. Esto significa que durante muchos años los estudiantes están en contacto con esta disciplina, por lo que se espera que no tengan mayores dificultades al momento de iniciar los estudios superiores. La realidad muestra que no es así y que es necesaria la capacitación de los docentes y la puesta en común de las distintas problemáticas que ellos afrontan en cada nivel.

La experiencia de las primeras cinco ediciones de estas Jornadas (JEM I, II, III, IV y V) llevadas a cabo en esta Universidad, con gran participación e interés de docentes de todos los niveles educativos y de estudiantes, no solo de nuestra provincia sino de otras, motiva y justifica la enorme tarea que demandó la realización de las Sextas Jornadas de Enseñanza de la Matemática.

En las Quintas Jornadas de Enseñanza de la Matemática, se contó con la participación de aproximadamente 300 asistentes entre docentes de todos los niveles educativos y estudiantes en cada una. Ellos expresaron al momento de las conclusiones su interés por que actividades como las desarrolladas tengan continuidad en el tiempo.

- En las encuestas realizadas a los asistentes, destacaron:
- La calidad de las diferentes actividades desarrolladas.
- El nivel académico y humano de los disertantes y talleristas.
- El hecho de que las jornadas cubrieran un espacio que era requerido, deseado y sumamente necesario para los docentes de los diferentes niveles educativos.

El Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta, a través de la función de extensión al medio, propuso la realización de las VI Jornadas de Enseñanza de la Matemática, en la que docentes de los diferentes niveles participaron de talleres y de comunicaciones breves que permitieron la reflexión y el intercambio de ideas y experiencias. Ello contribuyó a superar las dificultades existentes y a proponer posibles soluciones a la problemática planteada. En esta oportunidad, las VI Jornadas de la Enseñanza de la Matemática se centraron en la temática "La enseñanza de la matemática en diferentes modalidades".

Índice

I
TALLERES

AMPLIANDO MODELOS DE GEOMETRÍA

PATRICIA ANGÉLICA RUIZ[1] AND ANTONIO NOÉ SÁNGARI

Resumen. Es claro que el dibujo no es relevante en geometría, pero es de particular importancia en la deducción, en el aprendizaje o en la enseñanza. En este sentido, si contáramos con más de un sistema de dibujo, seguramente nuestro pensamiento se dirigiría hacia las teorías y los posibles modelos. En esta propuesta trataremos el siguiente problema: Supongamos la existencia de un modelo para la geometría Euclidiana en la que las rectas se las dibuja como rayos de luz, los puntos como pequeñas manchas, etc; tratemos de validar otro modelo para la geometría absoluta que tiene dibujos para los objetos de la teoría distintos, a su vez este será también un modelo para una geometría llamada No Euclidiana.

Trataremos uno de los modelos más famosos para la geometría absoluta, el modelo del Semiplano Superior de Poincaré. En esta propuesta brindaremos conceptos elementales de este modelo, junto con herramientas de GeoGebra para hacer el dibujo correspondiente. Justificaremos cómo puede pasarse de un supuesto modelo para la geometría euclidiana a una interpretación para la geometría no euclidiana o de Lobachevski. También dedicaremos un espacio a consideraciones históricas del modelo del semiplano superior de Poincaré.

1. Contenidos

El modelo del Semiplano Superior de Poincaré. Interpretación de los axiomas de incidencia. Herramientas con GeoGebra para el dibujo de los objetos elementales del modelo. Interpretación de los axiomas de orden. Axiomas de congruencia. Interpretación y dibujo de las herramientas correspondientes. Axiomas de continuidad. Axioma de Lobachevski.

2. Requisitos Previos

Conocimiento básico de GeoGebra y un primer curso de geometría de nivel superior. Es preciso tener GeoGebra Classic en su versión actual instalado en algún dispositivo.

3. Objetivos

El objetivo principal de este taller es dotar a los cursantes de herramientas teóricas y de apoyo gráfico sobre el modelo del semiplano superior de Poincaré. En particular, realizar una verificación somera de los cuatro primeros grupos de axiomas de la geometría absoluta dentro del modelo de Poincaré (en forma teórica) y discutir luego el quinto grupo; y desarrollar herramientas gráficas dinámicas como apoyó pedagógico.

Un objetivo secundario es mostrar a los cursantes la utilidad de contar con más de una forma de interpretar los objetos (teóricos). En otras palabras, tratar de despertar el interés de los cursantes centrándonos en la ventaja de independizarse de la intuición y centrarse en la especulación teórica. Dreher y Kuntze [Dreher, 2015].

Al concluir el curso los docentes deberían haber discutido sobre las interpretaciones para un teoría, en este caso la geometría absoluta, y haber tratado sobre las interpretaciones para la teoría. Otra discusión que tiene que presentarse es sobre el valor de la representación gráfica en el sentido didáctico y en el sentido matemático y lógico.

4. Actividades

4.1. Actividades Previas. Primeramente comunicaremos a los cursantes los objetivos, los contenidos del taller y el sistema de evaluaciones mediante un escrito que adjuntaremos en el curso de la plataforma e-learning designada. También recomendaremos la lectura de: páginas del libro Efimov [Efimov, 1984], con el objetivo de repasar los postulados de la Geometría Absoluta y los dos modelos que el libro propone para ella. De apuntes sobre la construcción de herramientas con GeoGebra, videos y sitios web de terceros sobre estos temas.

Propondremos una lista de actividades, posterior a las lecturas recomendadas, que consiste principalmente en la creación de una herramienta que permita trazar una semicircunferencia con extremos en la abscisa dados dos puntos en el semiplano superior, no alineados en una recta.

Haremos un cuestionario objetivo de autocorrección en el curso que nos asignen en la plataforma e-learning a modo de autoevaluación.

Presentaremos una lista de expositores entre los cursantes, para que resuelvan algunos ejercicios derivados de los documentos y del material audiovisual adjuntado en el curso.

Los axiomas de incidencia que tomaremos son Sángari y Egüez [Sángari, 2021]:

Ax I.1 *Cualesquiera que sean los puntos A,B existe una recta no euclidiana que pasa por los puntos A,B.*

Ax I.2 *Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A,B existe a lo sumo una recta no euclidiana que pasa por los puntos A,B.*

Ax I.3 *En cada recta no euclidiana hay al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no están sobre una misma recta.*

4.2. Primeras dos horas sincrónicas. Iniciaremos el taller con las presentaciones correspondientes y la mecánica de los talleres, particularizando el presente. Todo esto en aproximadamente 15'.

Para que las personas que no hayan podido repasar el material que se adjuntó en la plataforma no sufran un defasaje muy serio, haremos una breve aclaración: indicaremos lo que dice la teoría de la Geometría Absoluta (los primeros cuatro grupos de axiomas) y la forma en que se dibuja habitualmente; y si se considera un modelo para esta, como se puede obtener otro modelo derivado del primero, como es el modelo de Poincaré. Para precisar, daremos la siguiente correspondencia:

- Plano $\rightarrow$ Semiplano abierto (Cualquiera) α de borde r.
- Rectas $\rightarrow$ Semicircunferencias en α con extremos en r y semirrectas abiertas en α perpendiculares a r .
- Puntos $\rightarrow$ Puntos en α.

Para que no vayamos a perdernos con los objetos en los modelos considerados al primero (modelo tradicional) le llamaremos euclidiano y al segundo no euclidiano por motivos que aclararemos luego. (20').

Posteriormente pasaremos a dar la palabra a los cursantes designados como expositores en la sección 4.1, permitiendo exponer la herramienta creadas en GeoGebra(45')

Luego plantearemos el caso en el que los puntos, que determinan la semicircunferencia en la herramienta que crearon, estén alineados en una recta perpendicular a la abscisa, permitiéndoles observar cambios en sus propuestas iniciales. Esto llevará a una puesta en común de lo que la herramienta debería hacer y como solucionarlo. Generaremos las condiciones necesarias para lograr a una lluvia de ideas tendientes a solucionar los problemas surgidos. Obteniendo así una herramienta que dados dos puntos no euclidianos, cualesquiera, puede trazar una recta no euclidiana que pasa por ellos. (40')

4.3. Primeras dos horas Entre Clases. Les entregaremos apuntes de creación propia sobre la definición e interpretación de la relación *estar entre*, y de la definición de *inversión* y sus propiedades. Lo primero con el fin de abordar el segundo grupo de axiomas de la Geometría Absoluta.

Los axioma de orden que tomaremos son:

Ax II.1 *Si el punto B se encuentra entre el punto A y el punto C, entonces A, B, C son puntos diferentes de una misma recta, y B se encuentra, asimismo, entre C y A.*

Ax II.2 *Cualesquiera que sean los puntos distintos A y C, existe al menos un punto B sobre la recta AC tal que C está entre A y B.*

Ax II.3 *Entre tres puntos cualesquiera de una recta, a lo sumo uno de ellos puede encontrarse entre los otros dos.*

Ax II.4 *(Axioma de Pasch) Sean A,B y C tres puntos que no pertenecen a una misma recta, y a, una recta en el plano ABC que no contiene ninguno de los puntos A, B, C. Entonces, si la recta a pasa por algún punto del segmento AB, también pasará por algún punto del segmento AC o por alguno del segmento BC.*

Lo segundo con el fin de introducir al III grupo de axiomas.

Tomamos como axiomas de congruencia:

Ax III.1 *Si A y B son dos puntos sobre la recta a, y A' es un punto de la misma recta, o bien de otra recta a', siempre podemos encontrar, a un lado prefijado de A' sobre la recta a', un punto B', y solo uno, tal que el segmento AB es congruente al $A'B'$(se denota $AB \equiv A'B'$). Para cada segmento AB exigimos la congruencia $AB \equiv BA$.*

Ax III.2 *Si los segmentos $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes al mismo segmento AB; entonces $A'B'$ es congruente al segmento $A''B''$, es decir, si $A'B' \equiv AB$ y $A''B'' \equiv AB$ entonces también $A'B' \equiv A''B''$.*

Ax III.3 *Sean AB y BC dos segmentos sobre la recta a, sin puntos interiores comunes y sean, además, $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta, o bien sobre otra a' que tampoco poseen puntos interiores comunes. Si*

$$AB \equiv A'B' \text{ y } BC \equiv B'C'$$

entonces

$$AC \equiv A'C'$$

Ax III.4 *Sean dados* $< (h, k)$ *en el plano* α*, una recta* a' *en este mismo plano, o bien en otro,* α'*, y supongamos fijado un lado determinado del plano* α' *con respecto a la recta* a'*. Sea* h' *una semirrecta de la recta* a' *con origen en el punto* O'*. Entonces en el plano* α' *existe una semirrecta* k'*, y solo una, tal que* $< (h, k)$ *es congruente con* $< (h', k')$ *y, además, todos los puntos interiores de* $< (h', k')$ *se encuentran en el lado prefijado con respecto a* a'*.*
Si $< (h, k) \equiv < (h', k')$*, entonces* $< (k; h) \equiv < (k'; h')$*.*
Cada ángulo es congruente consigo mismo, es decir: $< (h, k) \equiv < (h, k)$ *y* $< (h, k) \equiv < (k, h)$

Ax III.5 *Sean* A, B, C *tres puntos no pertenecientes a una misma recta y* A', B', C' *otros tres, tampoco pertenecientes a una misma recta. Si*

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C' y < BAC \equiv < B'A'C'$$

entonces

$$< ABC \equiv < A'B'C' y < ACB \equiv < A'C'B'$$

Se propondrán actividades para abordar los apuntes de lectura, en las que se trabajará con la demostración de los tres primeros axiomas del grupo II. Así como también la creación de las herramienta en GeoGebra de punto medio, mediatriz y bisectriz no euclidiana, basándonos en la definición de inversión.´

4.4. Segundas dos horas sincrónicas. Comenzaremos por repasar las actividades de la sección 4.3. Pediremos a los cursantes exponer obstáculos, si los hubo, en la realización de las actividades correspondientes a la sección 4.3 y con ayuda del resto de oyentes propondremos soluciones. Todo ello incentivando la interacción y participación (30').

Luego se trataremos el axioma restante de éste grupo y se pondrá en común el esquema de demostración de ellos, sin ahondar en detalles, dejando abierto al cursante esta actividad si lo desea.(20')

Después se recordará definición de inversión y sus propiedades (10'). Se pedirá a los cursantes relatar la creación de las herramientas pedidas en la sección 4.3, reproduciremos las acciones relatadas, constatando su funcionalidad, y versatilidad con respecto a la posición de los puntos.(30')

Luego enunciaremos el primer axioma del III grupo (congruencia), interpretaremos el enunciado gráficamente en GeoGebra, el cual compartiremos por la plataforma e-learning designada. Luego de dejar unos minutos libres para pensar su demostración, haremos una puesta en común de ésta (20').

Por último enunciaremos el resto de axiomas del grupo III con sus respectivas interpretaciones en GeoGebra.

4.5. Segundas dos horas Entre Clases. Se brindará a los cursantes apuntes y actividades sobre la definición de *orden de los puntos de una semirrecta* y *orden de los puntos de una recta*, con el fin de introducir al lector en el grupo IV de axiomas. Tomaremos como el cuarto grupo

Ax IV.1 (Axioma de Arquimedes) Sean AB y CD segmentos arbitrarios. Entonces sobre la recta AB existe un número finito de puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ situados de manera que A_1 esta entre A y A_2, A_2 esta entre A_1 y A_3, etc, tales que los segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ son congruentes al segmento CD y B está entre A y A_n.

Ax IV.2 (Axioma de Cantor) Supongamos que una recta arbitraria a de da una sucesión infinita de segmentos $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...$ de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos además, cualquiera sea una segmento fijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que ese segmento. Entonces existe sobre la recta a un punto X que está en el interior de todos los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...$

Para mejor desarrollo de resultados usaremos el *Principio de Dedekind*: *Si todos los puntos de la recta están distribuidos en clases de manera que:*

1. *Cada punto pertenece a una clase y solo a una, y cada clase tiene puntos.*
2. *Cada punto de la primera clase precede a cada punto de la segunda.*

   Entonces, *o bien en la primera clase existe un punto que sigue a todos los demás de ésta clase, o bien en la segunda clase existe algún punto que precede a todos los demás de dicha clase.*

Y que según el teorema siguiente

Teorema. Si a los axiomas I-III agregamos el principio de Dedekind, las proposiciones de Arquimedes IV.1 y de Cantor IV.2 pueden ser demostradas. Y recíprocamente.

También se dará una pequeña reseña histórica sobre la controversia del V postulado, presentando la geometría de Lobachevski, junto con actividades para trabajar sobre la interpretación del postulado de la paralela en ambos modelos. Se pretende que con las actividades propuestas los cursantes concluyan que, para el modelo de Euclides el postulado de las paralelas se cumple y que no así para el modelo del semiplano superior de Poincaré.

Usamos como axioma de las paralelas:

Ax V.1 Existe una recta a y un punto A que no le pertenece; tal que en el plano determinado por A y la recta a, pasan por A al menos dos rectas que no cortan a a.

4.6. Terceras dos horas sincrónicas. Se iniciará la clase haciendo un breve repaso de las actividades anteriores, luego enunciaremos los axiomas de continuidad y el principio de Dedekind, aclarando que hay un teorema que los relaciona. en una puesta en común se hablará sobre el principio de Dedekind y sobre la veracidad de éste para el modelo en el que estamos trabajando. Se extraerán ideas principales, con el objetivo de llegar a concluir que los axiomas de continuad son validos en el modelo (40').

A continuación con el aporte de lo trabajado en la sección 4.5 se pedirá a los alumnos que expresen las conclusiones a las que llegaron, resolviendo las actividades, con respecto al V postulado en el modelo. Se anotarán ideas principales con su respectivas explicaciones. Concluyendo de ésta manera que, el modelo del semiplano superior de Poincaré no es un modelo para la geometría euclidiana, pero si para la geometría absoluta, y para la geometría de Lobachevski o no euclidiana.

4.7. Evaluación final. La evaluación final será a través de un cuestionario, mediante la plataforma exa-Virtual. Se pretende que el cursante sea capaz de:

- Comprender de conceptos y principios de la geometría no euclidiana.
- Identificar lo que es un modelo, y como se prueba que lo es.
- Identificar las diferencias entre los dos modelos dados.
- Diferenciar los distintos elementos del modelo del semiplano superior de Poincaré.
- Identificar la definición de la relación estar entre y de congruencia en el modelo del semiplano superior.

5. Bibliografía

[Dreher, 2015] A. Dreher y S. Kuntze. "Teachers professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom". En: *Educational Studies in Mathematics* (2015).

[Efimov, 1984] N. Efimov. *Geometría Superior*. Mir. 1984.

[Sángari, 2021] A. Sángari y C. Egüez. *Geometría Euclidiana con GeoGebra*. EUNSa. 2021.

Email address, corresponding author: [1]`patry.26.38@gmail.com`

COMPRENSIÓN DE ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS DE TRIGONOMETRÍA ENFATIZANDO LA VISUALIZACIÓN Y USO DE REGISTROS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN

DANIELA BETSABÉ ALVAREZ[1], EDITH MARCELA CHOROLQUE, CELIA ELIZABETH VILLAGRA, AND ISABEL HORTENSIA MIGUEZ

Resumen. La trigonometría es un tópico en el que la mayoría de los estudiantes del nivel medio tienen dificultades para la comprensión del mismo. Algunas investigaciones como la de Torres, Montiel y Cuevas [Torres, 2014] y Moore [Moore, 2014] consideran que es frecuente que los docentes tiendan a aritmetizar la trigonometría descuidando el contexto geométrico que proporciona el círculo trigonométrico. En este taller se revisarán los errores y dificultades más frecuentes de los estudiantes, analizando los obstáculos epistemológicos y didácticos que podrían provocarlos. Además, teniendo en cuenta que la trigonometría vincula diferentes tipos de pensamientos matemáticos: geométrico, métrico, algebraico y variacional, se propondrá hacer uso de los distintos registros semióticos definidos por Duval [Duval, 1993] para propiciar la significación de conceptos como circunferencia trigonométrica, funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas. Se propondrán estrategias metodológicas que harán hincapié en el proceso de visualización, como fuente de razonamiento deductivo, para favorecer la generalización, buscando que el estudiante sea capaz de realizar transformaciones y conversiones de registros de representación. Se utilizará el software dinámico Geogebra, ya que es una herramienta fundamental que permitirá que el estudiante articule múltiples representaciones, explorando, relacionando y conjeturando y así favorecer el aprendizaje activo de la trigonometría.

1. Contenidos

Errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. Pensamiento matemático: geométrico, métrico, algebraico y variacional. La visualización en matemática. Teoría de las representaciones semióticas de Duval. Circunferencia trigonométrica y goniométrica. Funciones trigonométricas de un número real. Ecuaciones trigonométricas. Uso de Tic´s: Geogebra.

2. Requisitos Previos

Uso de herramientas de geometría y de funciones de Geogebra. Conocimiento de razones trigonométricas y circunferencia trigonométrica.

3. Objetivos

Reconocer y analizar errores y dificultades más frecuentes de los estudiantes cuando resuelven situaciones vinculadas a la trigonometría.

Valorar el uso de los diferentes registros semióticos de representación para promover la significación de algunos conceptos en trigonometría.

Incorporar el Geogebra como herramienta que potencia la coordinación de múltiples registros de representación posibilitando la comprensión de conceptos en trigonometría.

4. Actividades

4.1. Actividades Previas. Se proponen dos actividades consistentes en cuestionarios. Se indicará que si aún no ha enseñado trigonometría o no tiene experiencia como docente, que se apoye en su trayectoria como estudiante del nivel medio o como practicante en una escuela asociada, para responder el mismo.

A continuación se muestran las actividades previas propuestas:
Actividad 1: Teniendo en cuenta que Godino, Batanero y Font [Godino, 2003] destacan la diferenciación existente entre los términos *error* y *dificultad*. Mientras el error se refiere a si "una práctica es válida o no desde el punto de vista de la institución escolar", la dificultad se refiere al "mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio". Por ejemplo, un error frecuente cuando resuelven ecuaciones es que transponen como un término positivo a un factor negativo. Una dificultad en la resolución de ecuaciones es que los estudiantes no tienen dominio de las operaciones con números enteros o racionales. Responda:

a. ¿Cuáles son algunos errores frecuentes que cometen los estudiantes cuando resuelven actividades vinculadas a la trigonometría?
b. ¿Qué dificultades puede identificar en el aprendizaje de la trigonometría?

c. Observe el siguiente gráfico de la función seno realizado por una estudiante, identifique errores en el mismo. $f(x) = \operatorname{sen} x$

Actividad 2: Responda:

2.1. ¿Considera que la trigonometría es de difícil comprensión para los estudiantes? ¿por qué?
  Teniendo en cuenta los diseños curriculares de Matemática de su provincia, para ciclo básico y superior del nivel medio y escuelas técnicas (se anexa una tabla para la provincia de Salta).
  a. ¿Cuáles contenidos se desarrollan en su escuela?
  b. Si no se desarrollan todos los contenidos. ¿Cuál será el motivo?

2.2. ¿Utiliza algún software para la enseñanza de temas de trigonometría?, ¿cuál? ¿Y para qué temas de trigonometría lo utiliza?

4.2. Primeras dos horas sincrónicas.

Contenidos: Errores y dificultades en la enseñanza de la trigonometría. Pensamiento matemático. La visualización en matemática. Circunferencia trigonométrica.

1. Se recuperarán las respuestas de la actividad previa para sistematizar errores y dificultades identificados.
2. Se presentará a través de una presentación en Power Point los errores y dificultades aportados por las investigaciones en la temática. Se diferenciará el origen epistemológico o didáctico de los mismos.
3. Se presentará una actividad en el círculo trigonométrico propuesta por Salazar Méndez [Salazar Méndez, 2020], que los docentes deberán resolver en grupos. Para la misma se utilizarán grupos en la plataforma Zoom, los talleristas recorrerán los mismos para orientar y recabar información sobre la solución que proponen. Posteriormente se realiza una puesta en común con al menos dos resoluciones diferentes.
4. Un tallerista realizará el cierre de la actividad haciendo hincapié en la visualización y presentando a través de Power Point el marco teórico de pensamiento matemático y proceso de visualización.

4.3. Primeras dos horas entre clases.

Contenidos: visualización. Registros semióticos de representación de Duval. Circunferencia trigonométrica y goniométrica.

1. Se proporcionará un texto resumido sobre los registros semióticos de representación semiótica de Duval que los cursantes deben leer.
2. Se mostrará la actividad completa propuesta por Salazar Méndez [Salazar Méndez, 2020, pág. 73] . Deberán resolverla usando Geogebra e identificar registros, transformaciones y conversiones. (se transcribe parte de la actividad).

   1. Abra el archivo "*Tarea 1*". Arrastre el punto B y observe lo que sucede. A continuación (Tabla 1).

Tabla 1

Color del vector	Nombre	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV.

   a. Determine el signo de cada vector (diferenciándolos por color y nombre) en cada cuadrante del plano cartesiano:
      Puedes observar cómo cambia el ángulo central y la medida de cada vector. Explica:
   b. Cuando arrastras el punto B, ¿Qué cambios se presentan en el vector CD cada vez que cambia la medida del ángulo central?
   c. ¿Qué sucede con este vector cuando se sobrepone el punto B sobre el punto E y sobre E'? Explica. ¿Cuántos grados mide el ángulo central en cada una de estas posiciones?

   2. Encuentra la longitud de cada vector y registra los datos en la siguiente tabla, asociando los colores similares. Arrastrando el punto B, regístralos 3 veces, (Tabla 2).

Tabla 2

	Longitud del vector.			
Nombre del vector	Dato 1	Dato 2	Dato 3	Dato 4

4.4. Segundas dos horas sincrónicas.
Contenidos: Teoría de las representaciones semióticas de Duval. Circunferencia trigonométrica. Funciones trigonométricas de un número real. Uso de Geogebra.

1. Se realizarán preguntas para indagar sobre la comprensión de registros semióticos y acerca de las operaciones de transformación y conversión. Se aclararán dudas si fuera necesario.
2. Se recordarán algunas herramientas básicas para funciones en Geogebra.
3. Se resolverán una actividad grupal en Geogebra que permitirá caracterizar las funciones seno y coseno, período y amplitud. Para ello se utilizará una actividad publicada en el sitio web de Geogebra[1] y a un grupo se le solicitará estudiar la función seno, a otro la función coseno y a un tercer grupo la función tangente. Esta actividad contará con una serie de preguntas que posibilitarán la exploración e investigación.
4. Se realizará una puesta en común haciendo hincapié en los registros y la necesidad de cambio de registro para responder las preguntas.

4.5. Segundas dos horas Entre Clases.
Contenidos: Funciones trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas. Uso de Geogebra.

1. Resolución de una actividad sobre funciones trigonométricas usando Geogebra. (para ello se acompaña un pequeño tutorial recordando herramientas básicas para uso de Geogebra con funciones).
2. Se les mostrará cómo se puede resolver una ecuación trigonométrica utilizando el registro gráfico (circunferencia trigonométrica) y cómo luego verifican usando registro numérico. Se les pedirá que resuelvan cuatro ecuaciones trigonométricas utilizando la circunferencia trigonométrica.

4.6. Terceras dos horas sincrónicas.
Contenidos: Funciones trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas. Uso de Geogebra.

1. Se recupera la resolución de ecuaciones presentadas en la clase asincrónica.
2. Se resuelve en grupo una actividad donde se vincula función trigonométrica con ecuaciones trigonométricas.
3. Se realiza la puesta en común.
4. Un tallerista muestra cómo se puede vincular registro gráfico en sistemas cartesianos con el registro algebraico y numérico al resolver ecuaciones.

4.7. Evaluación final. Puede realizarse en grupos de hasta dos integrantes.
Actividad 1: Se les proporcionará una actividad de trigonometría donde deberán analizar contenidos vinculados, reconocer los registros semióticos que pueden utilizar los estudiantes , proponer la resolución de la actividad identificando transformaciones y conversiones. En la resolución debe hacer uso de Geogebra y presentar las capturas de pantallas.

Actividad 2: El docente deberá proponer una actividad de funciones trigonométricas o ecuaciones trigonométricas, donde sea necesario el uso de diferentes registros de representación semiótica.

5. Bibliografía

[Duval, 1993] R. Duval. "Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée". En: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (1993), págs. 5, 37-65. URL: `https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf`.

[Godino, 2003] J. D. Godino, C. Batanero y V. Font. *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada: Dilbert Books, 2003. ISBN: 8493251062. URL: `http://www.ugr.es/local/jgodino/`.

[Moore, 2014] K. Moore. "Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac". En: *Journal for Research in Mathematics Education* (2014), 45(1), 102-138.

[1] `https://www.geogebra.org/m/HdnfNmwA`

[Salazar Méndez, 2020] F. Salazar Méndez. "Situaciones didácticas para el aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales a partir de un enfoque geométrico". Trabajo de grado - Maestría. 2020.

[Torres, 2014] C. Torres, G. Montiel y O. Cuevas. "Un entorno geométrico para la resignificaciónn de las razones trigonométricas en estudiantes de ingeniería". En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 2014, págs. 890-898.

(1) Universidad Nacional de Salta. Sede Regional Orán

Email address, 1: danbet@hotmail.es

FUNCIONES POLINÓMICAS Y GEOGEBRA

NOEMÍ PAOLA PAZ[1], JOSEFINA LÁVAQUE FUENTES, CINTIA CELESTE SOLALIGA, AND MARIEL FADON

Resumen. La propuesta de taller que estamos presentando surgió a raíz del análisis sobre la problemática de la enseñanza de polinomios y funciones polinómicas en las aulas de la escuela secundaria. La misma retoma una secuencia puesta en aula cuya intencionalidad fue poner a los estudiantes en un rol protagonista de las clases y productores de conocimiento, permitiendo explorar a partir del uso del GeoGebra asuntos matemáticos relacionados a la temática. Además consideramos que la herramienta habilita a nuevas discusiones y modos de validación.

1. Contenidos

Las funciones como objeto matemático y como objeto de enseñanza. Registro algebraico. Lectura de una fórmula. Relación gráfico-fórmula en funciones polinómicas. El vínculo entre las funciones polinómicas y los polinomios. Una mirada sobre expresiones factorizadas de una función polinómica como un producto de otras funciones polinómicas. Nuevos aspectos del trabajo matemático en entornos informáticos. El papel del GeoGebra en la exploración, producción de conjeturas, anticipación y validación.

2. Requisitos Previos

Función lineal. Propiedades y características. Función cuadrática. Características. Uso del GeoGebra.

3. Objetivos

Reflexionar sobre el potencial didáctico de estudiar lo funcional por medio de la noción de variación y el rol del proceso de modelización en dicho estudio.

Analizar la potencia y los límites de cada registro de representación semiótica en relación al conocimiento sobre las funciones que se puede construir a partir de ellos.

Concebir nuevas significaciones y relaciones que se pueden producir a partir de la las transformaciones de un registro a otro y la coordinación entre ellos.

Profundizar la reflexión sobre el rol docente en el aula de matemática promoviendo y sosteniendo espacios de discusión y producción de conocimiento.

4. Actividades

4.1. Actividades Previas. En el espacio destinado para el taller se habilitará la siguiente consigna. Actividad del taller: Considerando los problemas 1, 2 y 3:

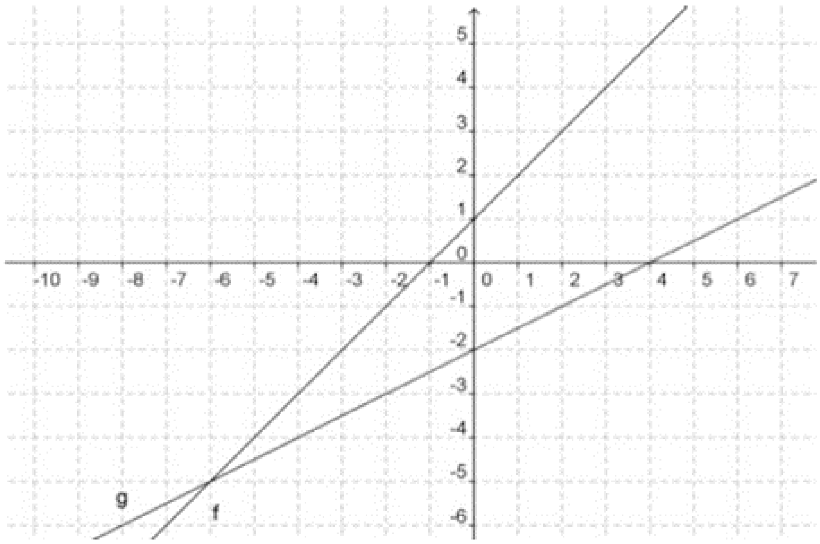
- Anticipar posibles resoluciones de los chicos y las chicas para cada ítem.
- Estudiar qué estrategias podrían estar más disponibles dependiendo de los números propuestos en cada caso. ¿Dónde puede haber dificultades en la tarea y cuáles pueden ser?
- Les pedimos que armen un escrito con la resolución de esta consigna posible de ser compartido en el sincrónico.

PROBLEMA 1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones lineales. Definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. A partir de los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$ que se dan a continuación, (figura 4.1),

a. Calculen el valor de h(x) en cada caso:

i. $h(0) =$	iii. $h(6) =$	v. $h(-2) =$	vii. $h(-8) =$
ii. $h(2) =$	iv. $h(3) =$	vi. $h(4) =$	viii. $h(4,5) =$

Figura 4.1



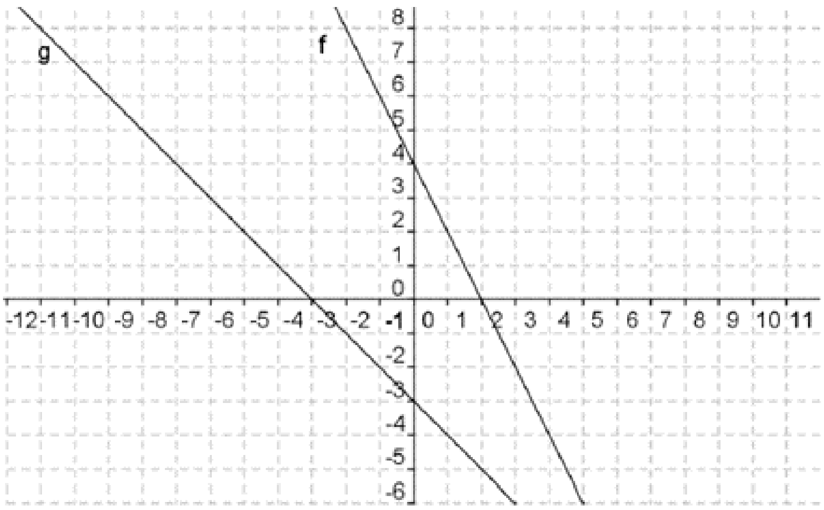
b. Decidan si h(x) es negativa, positiva o cero:

i. $h(-10)$ ii. $h(-20)$ iii. $h(-1)$ iv. $h(5)$ v. $h(-2,5)$

c. Propongan un gráfico aproximado de $h(x)$.

PROBLEMA 2. En el siguiente sistema de coordenadas se dan las gráficas de f(x) y g(x), ambas funciones lineales. (Figura 4.2)

Figura 4.2



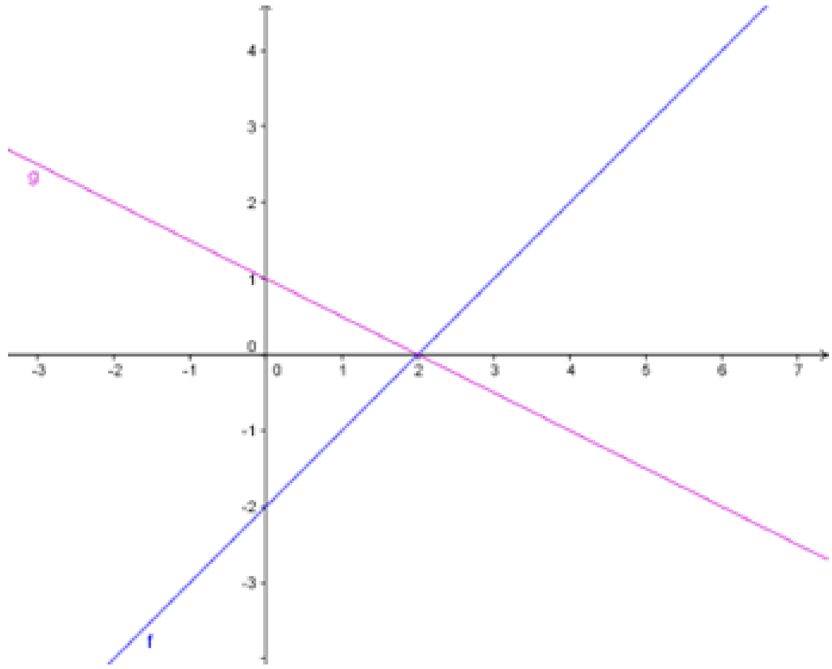
Definimos: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a. Encuentren por lo menos 3 puntos que pertenezcan al gráfico de $h(x)$. Propongan argumentos para fundamentar la respuesta.
b. Establezcan el conjunto de valores de x para los cuales la función $h(x)$ es positiva, negativa o cero.
c. Tracen un gráfico aproximado de $h(x)$.

PROBLEMA 3. En el siguiente sistema de coordenadas se da la representación gráfica de $f(x)$ y de $g(x)$, ambas funciones lineales. (Figura 4.3). Definimos $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a. Establezcan el conjunto de valores de x para los cuales la función $h(x)$ es positiva, negativa o cero.
b. Propongan un gráfico aproximado de $h(x)$.

Figura 4.3



4.2. Primeras dos horas sincrónicas. El desarrollo del encuentro pasara por tres momentos:

Momento 1: Socialización de las actividades previas (Problema 1, 2, 3)
Momento 2: Resolución de actividades (Problema 4).
Momento 3: Puesta en común del problema de la clase sincrónica. Lineamientos para las actividades asincrónicas.

PROBLEMA 4. Para trabajar con GeoGebra:

- Escriban las fórmulas que correspondan a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del problema 2.
- Usen el software para graficarlas. Introduzcan la función producto $h(x)$ como objeto dependiente. Para ello escriban en "*Entrada*": $h(x) = f(x) * g(x)$
    a. Hallen, si es posible, una recta paralela al gráfico de f, de manera tal que al "multiplicarla" por g, la parábola "producto" no atraviese al eje de las x. Expliquen sus respuestas.

4.3. Primeras dos horas entre clases. Se habilitara en el espacio de la plataforma destinado para el taller lo siguiente:
Actividad del taller: Les pedimos que armen un escrito con la resolución del problema 5 posible de ser compartido en el sincrónico.

PROBLEMA 5. a. Propongan, si es posible, dos funciones lineales cuyo producto sea una función cuadrática que tenga mínimo y otras dos para que la función cuadrática tenga máximo. Si no hay, justifiquen la respuesta.
b. Busquen pares de rectas para que el mínimo de la parábola "producto" esté en el primero, en el segundo, en el tercero y en el cuarto cuadrante. Si no hay, justifiquen la respuesta.
c. Hagan lo mismo con el máximo.

4.4. Segundas dos horas sincrónicas. Comenzaremos retomando las consignas del problema 5 para poner en discusión. Luego se presentará las siguientes consignas:
Actividad del taller: Considerando las consignas del problema 6:

- Anticipen posibles respuestas de los chicos y las chicas. ¿Qué ideas son necesarias tener disponible para poder responder cada pregunta?
- Identifiquen en qué problemas de los trabajados previamente fueron abordadas dichas ideas.

PROBLEMA 6. 1. ¿Es cierto que siempre que "multiplicamos" dos rectas obtenemos una parábola?
2. ¿Cómo obtenemos los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la parábola a partir de los gráficos de las rectas?
3. ¿Es cierto que toda parábola puede ser escrita como el "producto" de dos rectas?
4. ¿Cómo deben ser las rectas para que su "producto" sea una parábola que tenga máximo? ¿Y mínimo?

5. ¿Cómo deben ser las rectas para que su "producto" sea una parábola con un cero doble? ¿Y con dos ceros simples?

Luego se realizará en una pizarra digital las conclusiones del problema 6.

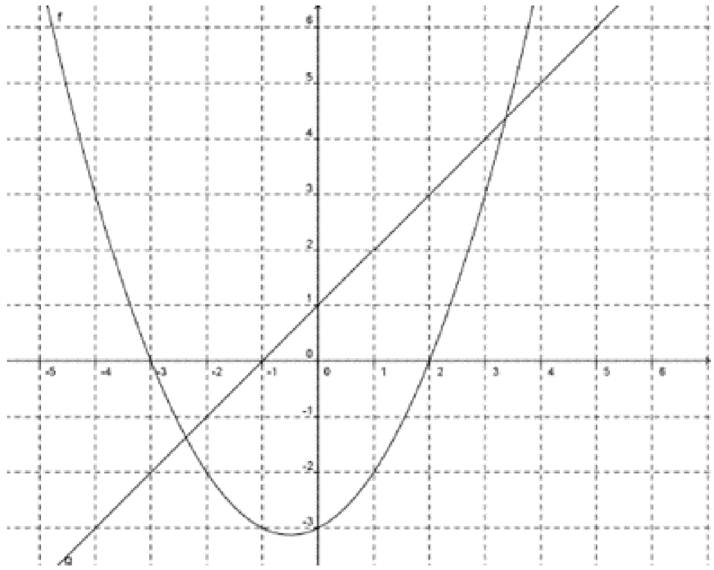
4.5. Segundas dos horas Entre Clases.

Actividad del taller: En el espacio del aula A partir del problema 7:

- Pensar en posibles resoluciones para los ítems a, b y c. ¿Qué estrategias se podrían recuperar de lo trabajado en los primeros problemas de esta secuencia?
- ¿Qué argumentos podrían esbozar los alumnos y las alumnas, antes de graficar, para descartar que el gráfico, pedido en el ítem d, no será una parábola?
- Les pedimos que armen un escrito con sus respuestas a esta actividad ya que será un potente insumo para el análisis de los siguientes problemas.

PROBLEMA 7. Para hacer con lápiz y papel sin usar la computadora:
A continuación se dan los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$. (Figura 4.4).

Figura 4.4



a. Calcular:

I. $h(1) =$	III. $h(-3) =$	V. $h(3) =$
II. $h(0) =$	IV. $h(-2) =$	VI. $h(-4) =$

b. Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso:

I. $h(6)$	III. $h(-4)$	V. $h(-2{,}5)$
II. $h(1{,}5)$	IV. $h(0)$	VI. $h(-20)$

c. Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad.
d. Graficar aproximadamente.

4.6. Terceras dos horas sincrónicas.

PROBLEMA 8. Con GeoGebra:

a. Grafiquen la recta y la parábola del problema 7 buscando la fórmula de ambas y grafiquen la función producto h. Guarden este archivo.
b. El enunciado de este ítem es para dar oralmente en la clase una vez concluida la parte a.. En un nuevo archivo vuelvan a graficar $h(x)$. ¿Pueden expresar h como producto de tres rectas? En caso de ser posible, escriban la fórmula de las tres rectas que encontraron y grafiquen la función producto en la misma ventana para ver si se superpone con el gráfico de h. En caso de no ser posible, justifiquen por qué. Guarden este archivo.
c. Abran el archivo que guardaron en a.. Dejen fija la parábola y muevan la recta paralelamente a ella misma, de tal manera que el producto h atraviese el eje x una sola vez. Guarden este archivo sin modificar el anterior (ir a "*Guardar como*").

d. Abran el archivo que guardaron en a.. Dejen la recta fija y cambien la fórmula de la parábola para lograr que h tenga un cero simple y otro doble. Guarden este archivo sin modificar el anterior.

Consigna de trabajo del encuentro:

- Para el ítem b. anticipen diferentes formas de resolver analizando qué rol cumple el trabajo con los gráficos o las fórmulas en cada estrategia que propongan.
- Para los ítems c. y d., analicen ¿Qué conocimientos o conclusiones se pueden pensar como asuntos importantes para discutir en el aula?

4.7. Evaluación final. La evaluación del taller consistirá en la presentación del último problema de la secuencia que podrá ser desarrollada de forma individual o grupal.

PROBLEMA 9. En cada caso, hallen, si existe, la fórmula de una función cúbica h que verifique lo pedido. Si les parece que no existe expliquen por qué:

a. Las raíces son -5, -2 y 4, y h toma valores negativos para x mayores que 4.
b. Las raíces son -3, 2 y 8, y el gráfico de h corta al eje de las y en 12.
c. Las raíces son solamente 2 y 7.
d. Las raíces son solamente cero y -1, y $h(1) = 10$.
e. La función que encontraron en cada caso, ¿es la única que cumple esas condiciones? Si creen que sí, justifiquen; y si creen que no, hallen al menos tres fórmulas diferentes.

Consigna del taller para el problema 9, estudien:

- ¿Qué trabajo sobre el registro algebraico y/o sobre el registro gráfico podría estar presente en las resoluciones del ítem a y del b?
- ¿Qué argumentos podrían dar los y las estudiantes en los casos donde no se puede obtener la función pedida?
- ¿Cómo imaginan una validación para cada caso, posible de realizar en el aula del secundario?

Este trabajo es para entregar en un archivo de Word, en letra Times New Roman, tamaño 12, indicando dentro del mismo el nombre del taller, junto con los y las integrantes del grupo y la consigna del trabajo. Luego, el desarrollo de la misma.

5. Bibliografía

[Andrés, 2012] M. Andrés et al. *Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Incorporación del programa Geogebra al trabajo matemático en el aula.* Unipe Editorial Universitaria, 2012.

[Llanos, 2011a] V. C. Llanos, M. R. Otero y M. P. Bilbao. "Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)". En: *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). Año 6 Nº1* (2011), pp. 102-112.

[Llanos, 2011b] V. C. Llanos, M. R. Otero y M. P. Bilbao. "Implementación de una AEI relativa al campo conceptual de las funciones polinómicas en la escuela secundaria: perspectiva didáctica y cognitiva". En: *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM).* NIECyT, F. de Cs. Exactas, UNCPBA, Tandil, nov. de 2011, pp. 486-492.

Email address, corresponding author: [1]paolapaz32@gmail.com

II
COMUNICACIONES BREVES

TRATAMIENTO DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS ILUMINADOS POR TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN MATEMÁTICA

ANA MARÍA MÁNTICA[1] AND MARCELA GÖTTE

Resumen. Las Tecnologías Digitales por si solas no generan un cambio en la educación, sino que son los actores quienes pueden transformarla aprovechando sus propiedades innovadoras a través de diseños adecuados. Se presenta una investigación cualitativa cuyo interés es estudiar la producción de conceptos del currículum de matemática cuando se emplean Tecnologías Digitales. Se diseñan y analizan propuestas para el abordaje de conceptos del currículum de matemática mediados por tecnologías y se estudian producciones de docentes en su formación inicial y continua a la luz de las tecnologías utilizadas que versan en aplicaciones, software específicos y videotutoriales, entre otros.

1. Introducción

En este estudio se diseñan o rediseñan problemas potentes para la producción de conceptos que requieran de las tecnologías digitales (TD) para resolverse. Se pretende estudiar qué tipo de TD emplean docentes y futuros docentes en el aula de matemática, qué problemas se emplean en el aula para la producción de conceptos prescriptos en el currículum y cómo pueden potenciarse utilizando las TD disponibles. También se propone identificar y analizar interacciones en el aula de matemática que favorecen u obstaculizan la construcción de conceptos cuando se emplean estos medios, detallando los rasgos importantes de estos fenómenos.

Numerosas investigaciones se ocupan del lugar que asumen las tecnologías en el aula y cómo esto modifica el modo de trabajo que atraviesan las formas de producción del conocimiento y por tanto su inclusión en las prácticas de enseñanza encontrando un sentido pedagógico y didáctico potente. Esto atraviesa las maneras de conocer y aprender y genera en los docentes el compromiso de producir "propuestas didácticas que alienten a sus alumnos a aprender de modos enriquecidos y valiosos" (Maggio [Maggio, 2012, p. 14]).

Por su parte Palmas Pérez [Palmas Pérez, 2018], recuperando estudios anteriores, señala la diferencia entre los términos tecnologías digitales (TD) y tecnologías de la información y la comunicación (TIC). Considera que el término TIC refleja "que la tecnología se debería centrar en la recopilación y almacenamiento de datos más que en su aprovechamiento para el bienestar común" (p. 117). En disonancia con lo que sostiene acerca de las TIC, "surge el término TD para poner de presente que el foco de las tecnologías radica en la relación entre estas y el modo en que las personas las usan, y no en su potencial "informativo" o "comunicativo"" (p. 117). Asimismo sostiene que las TD, por si solas, no generan un cambio en la educación más allá de ciertos aspectos formales. Son los actores los que pueden transformar la educación, aprovechando las propiedades innovadoras de las dichas tecnologías, siempre y cuando existan diseños adecuados y que resuelvan sus necesidades educativas. La tecnología puede ser concebida como herramienta o como medio. Si se concibe como herramienta se incorpora como algo ajeno a lo cotidiano, como instrumentos posibles de ser usados. En cambio, como medio hace que se tengan en cuenta sus posibilidades didácticas, dando lugar, por ejemplo, a analizar cómo el alumno puede confrontar sus saberes matemáticos previos y cómo puede funcionar la acción de retroalimentación del medio hacia el estudiante.

Particularmente en la enseñanza de la matemática los entornos dinámicos han tomado un papel protagónico por las potencialidades que ofrecen y las nuevas formas que requieren en el diseño de propuestas de enseñanza. Existen muchos estudios (Arcavi [Arcavi, 2008], Laborde [Laborde, 2015], Shahmohammadi [Shahmohammadi, 2019], entre otros) en relación con sus usos en el aula y las formas de aprender y construir conocimientos.

Muchos de los investigadores mencionados refieren al papel en la resolución de problemas de los entornos dinámicos, particularmente con Software de Geometría Dinámica (SGD). Laborde [Laborde, 2015] plantea dos características importantes de estos entornos informáticos: la coexistencia de primitivas de dibujo puro y primitivas geométricas, y la manipulación directa del dibujo por parte de los estudiantes para la formulación y validación de conjeturas. Por su parte Shahmohammadi [Shahmohammadi, 2019] considera que una de las mayores fortalezas potenciales del software dinámico es que permite involucrarse en el reconocimiento de relaciones de similitud y distintas formas de representación del mismo concepto, cuestión que favorece la comprensión más profunda del concepto involucrado. Sostiene que no se debe subestimar el papel crucial que juegan las actividades bien diseñadas, así como los roles de los docentes para dirigir adecuadamente a los estudiantes en el uso del software.

2. Requisitos previos

La temática que se aborda en este trabajo es de interés para docentes en matemática e investigadores en educación matemática. Se considera que las Tecnologías Digitales por si solas no generan un cambio en la educación, sino que son los actores quienes pueden transformarla aprovechando sus propiedades innovadoras a través de diseños de propuestas adecuados. Es por eso que se pretende investigar acerca de la importancia de las TD en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en la formación inicial y continua de profesores en Matemática.

El enfoque de esta investigación es cualitativo según McMillan y Schumacher [McMillan, 2005]. Los investigadores interpretan los fenómenos según los valores que los involucrados suministran, en este caso profesores en formación y en ejercicio. El interés se centra en el estudio de las estrategias empleadas por los futuros profesores y profesores en ejercicio para construir, dar sentido y significado a sus prácticas. Las acciones se explican en el contexto dentro del cual tienen lugar. Entre los métodos de recolección de datos mencionamos la observación, entrevistas, artefactos escritos, archivos de resoluciones en software o protocolos de construcción y grabaciones en audio y en video. Entre los métodos de análisis de datos mencionamos la codificación y el análisis de contenido (McKnight et al. [McKnight, 2000]).

3. Desarrollo

Los estudios realizados hasta el momento permiten mencionar los siguientes resultados:

Respecto al tipo de TD que emplean docentes y futuros docentes de matemática se destacan particularmente videos que presentan el desarrollo de determinados conceptos, en general utilizados por los estudiantes con el objetivo de aclarar dudas.

El empleo por parte de los docentes de software específico para el tratamiento de temas determinados como también el uso de aplicaciones del teléfono celular permiten potenciar conceptos tales como la simetría plana y tridimensional.

La influencia de GeoGebra en la construcción del concepto de rombo y rectángulo permite evidenciar la potencialidad de sus herramientas para determinar propiedades.

El diseño de propuestas para el tratamiento de temas de geometría 3D, tal como la formación del concepto de poliedro regular y la obtención de la fórmula del volumen de la esfera, a través de construcciones que soportan el arrastre y requieren de un análisis de la definición del respectivo concepto permite a docentes y futuros docentes de matemática revisar el conjunto de imágenes asociadas a estos conceptos.

El diseño y análisis de propuestas para el abordaje de clasificación de cuadriláteros y congruencia de triángulos para ser implementadas por docentes de matemática con empleo de TD evidencia la importancia de estas en la construcción de concepto y en la formulación y validación de conjeturas.

Las TD, sus entornos virtuales, usos, representaciones y herramientas pueden colaborar en la reflexión de ideas matemáticas poderosas tanto a nivel macro (institucional y social) como micro (didáctico y cognitivo) (Palmas Pérez [Palmas Pérez, 2018]).

Se espera continuar con estos estudios profundizando los análisis y reformulando las propuestas como también profundizar el análisis de las TD que los docentes implementan en el aula después de la inclusión inmediata y forzada originada por la pandemia ocasionada por el Covid-19. Como sostiene Shahmohammadi [Shahmohammadi, 2019] los docentes juegan un papel importante en el establecimiento del contrato didáctico y son la principal fuente de retroalimentación para los estudiantes, para estimular su reflexión sobre el trabajo al plantear los temas claves, hacer sugerencias e impulsar el debate de toda la clase.

4. Bibliografía

[Arcavi, 2008] A. Arcavi. “Modelling with graphical representations”. En: *For the Learning of Mathematics* 28.2 (2008), págs. 2-10.

[Laborde, 2015] C. Laborde. *Matemática con Tecnología. Entrevista a Colette Laborde.* Archivo de video. Mar. de 2015. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=1vqJ1OOJMUO`.

[Maggio, 2012] M. Maggio. *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad.* Paidós. 2012.

[McKnight, 2000] C. McKnight et al. “Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician”. En: *American Mathematical Society* (2000).

[McMillan, 2005] J. McMillan y S. Schumacher. *Investigación Educativa. Una introducción conceptual*. Pearson Addison Wesley. 2005.

[Palmas Pérez, 2018] S. Palmas Pérez. “La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas”. En: *Revista Colombiana de Educación* 74 (2018), págs. 109-132.

[Shahmohammadi, 2019] S. Shahmohammadi. “Opportunities and Challenges in Using Dynamic Software in Mathematics Education”. En: *International Journal for Infonomics* 12.1 (2019), págs. 1834-1840.

[Winicki Landman, 2006] G. Winicki Landman. “Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones”. En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19 (2006), págs. 528-537.

Email address, corresponding author: [1]ana.mantica@gmail.com

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE TEMAS RELATIVOS A TEST DE HIPÓTESIS CON EL USO DE DISPOSITIVOS MÓVILES

MARÍA VALERIA CALANDRA[1], PAULA D'URZO[2], ANYELEN DI PAOLANTONIO[3], AND CECILIA DE CORTAZAR[4]

Resumen. En el marco de la búsqueda de herramientas educativas para la mejora de la enseñanza de la matemática, y en particular de probabilidades y estadística, se presenta una propuesta de trabajo orientada a buscar una alternativa para la enseñanza de temas relativos a test de hipótesis en estadística. La misma serviría para resignificar diversos temas específicos dentro de esta temática mediante la aplicación de inferencia informal con el uso de la aplicación para dispositivos móviles y web. Se realiza además una exploración bibliográfica sobre las dificultades que en la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos.

1. Introducción

Los métodos de inferencia estadísticos son de fundamental importancia en toda situación que requiera el análisis de datos para la toma de decisiones en presencia de incertidumbre y variación. Contribuye a facilitar el análisis de información que se requiera, (Vanderman [Vanderman, 2002]). Viles [Viles, 2007] comenta que la estadística es importante en la ciencia en general, se puede aplicar al diseño de nuevos productos y a su desarrollo, así como al control, a la optimización y a la mejora de la calidad de procesos de fabricación de bienes y servicios.

El objetivo de este trabajo es desarrollar dispositivos que promuevan la enseñanza funcional de esos temas específicos de test de hipótesis para los alumnos de carreras científico-tecnológicas. Según Batanero, Díaz y López-Martín [Batanero, 2017] cuando los alumnos universitarios se encuentran en un curso inicial de estadística y deben resolver un contraste de hipótesis, con frecuencia no comprenden todos los pasos, sino que los aplican en forma mecánica.

Dentro de los temas más importante de inferencia estadística para la aplicación en el campo de experimental, se encuentra el tema de test de hipótesis, pero también son abundantes los reportes sobre las dificultades sobre su enseñanza y aprendizaje. Los cálculos e interpretación de los errores de Tipo I y de Tipo II son fundamentales para entender la lógica de los test de hipótesis. Por eso es que se propone una enseñanza contextualizada, para estas temáticas con el uso de una aplicación que se puede implementar en código de programación R (R.C. [Team R. C., 2021]) en teléfonos móviles en el que los alumnos pueden simular el proceso de extracción de una muestra aleatoria de una fábrica bajo ciertas condiciones para realizar la certificación de un artículo mediante un test de hipótesis y calcular empíricamente las probabilidades de errores de Tipo I y de Tipo II. El estudiante tiene a su disposición el código del programa y lo puede modificar de modo de simular distintos escenarios de trabajo. Esta propuesta permitiría emular el trabajo científico de investigación en inferencia estadística que parte de un hecho empírico para luego generalizarlo a la población. Además, los acerca a manejar el lenguaje de programación R de fundamental importancia en el trabajo científico en el campo de la estadística. Esta propuesta permitiría que los alumnos tomen un rol activo en la construcción del conocimiento de estas temáticas ya que pueden intervenir desde la simulación de la muestra con la que se realizará el test como en la construcción de común acuerdo en el transcurso de la clase de los conceptos de error de Tipo I y de Tipo II y la resignificación de los mismos para la situación planteada.

2. Requisitos previos

Esta propuesta está dirigida a docentes de nivel superior para la enseñanza en carreras científico-tecnológicas.

3. Desarrollo

3.1. Estado y situación del tema. Una prueba de hipótesis es un método de inferencia estadístico que permite decidir acerca del valor de un parámetro poblacional por medio de los datos obtenidos a partir de una muestra. Dado el carácter aleatorio de la muestra los resultados pueden estar sujetos a variaciones aleatorias, por lo que una prueba de hipótesis permite decidir si pequeñas desviaciones observadas respecto al resultado que idealmente debería haber ocurrido según nuestra hipótesis, son atribuibles al azar o efectivamente los resultados no se corresponden con la hipótesis que se ha planteado sobre el valor del parámetro. Existen numerosos errores e interpretaciones incorrectas del contraste de hipótesis, que se han encontrado incluso en los trabajos de investigación (Batanero [Batanero, 2000]; Falk y Greenbaum [Falk, 1995]; Harradine, Batanero y Rossman [Harradine, 2011]).El establecimiento de hipótesis adecuadas a la situación es el primer paso en la resolución de un problema de contraste de hipótesis pero presenta grandes dificultades de comprensión para los estudiantes que no logran identificar cuáles serían las hipótesis adecuadas en cada caso, no comprenden el papel que juegan en el proceso o confunden las hipótesis nula y alternativa (Vallecillos Jiménez [Vallecillos Jiménez, 1997]). Liu y Thompson [Liu, 2009] encontraron una falta de comprensión de la lógica de los test de hipótesis ligada a la comprensión de los resultados. Además, Vallecillos Jiménez [Vallecillos Jiménez, 1994] realizó una amplia investigación sobre el aprendizaje del tema del contraste de hipótesis estadísticas en alumnos universitarios y detectó que algunos alumnos suponen que la suma de las probabilidades de cometer un error de Tipo I y un error de Tipo II es uno y esto no es así, los dos tipos de errores son eventos incompatibles, pero no son sucesos complementarios. Se han encontrado estudiantes que creen que el cambio del nivel de significación no afecta al riesgo de error de Tipo I en la decisión. Algunos confunden la significación estadística y con relevancia práctica, otros asocian un resultado significativo como uno que corrobora la hipótesis nula. Batanero, Díaz y López-Martín [Batanero, 2017] observó que los alumnos manifiestan una dificultad en cuanto a la comprensión, cuando calculan la probabilidad de cometer un error de Tipo I perdiendo de vista la condición (la verdad de la hipótesis nula). Muchos estudiantes asocian de forma inmediata el rechazo de la hipótesis al error de Tipo I. Vallecillos Jiménez [Vallecillos Jiménez, 1997] encontró conflictos en la lógica de la interpretación de los test de hipótesis ligadas a la suposición de que los test de hipótesis proporcionan una demostración matemática deductiva de la verdad de la hipótesis y que el nivel de significación de un test es la probabilidad de que H_0 sea cierta dado que se ha rechazado. Es decir, se interpreta incorrectamente el resultado del test por creer que el contraste demuestra la hipótesis o porque calcula su probabilidad. También en la misma publicación se identifican errores en el aprendizaje de los alumnos asociados al cálculo e interpretación del p-valor. El valor p se calcula mediante el cálculo de la probabilidad de observar el valor empírico del estadístico o un valor más extremo, dado que la hipótesis nula es verdadera y varía de una muestra a otra y muchas veces es confundido con el nivel de significación que fija el experimentador antes de realizar el test. Un concepto que se suele comprender erróneamente es el nivel de significación. Respecto a este concepto se pueden encontrar numerosos conflictos, el más frecuente consiste en intercambiar los dos términos de la probabilidad condicional, interpretándolo como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, una vez que la decisión de rechazarla se ha tomado (Krauss y Wassner [Krauss, 2002]). También se han reportado conflictos para distinguir lo que es un parámetro y lo que es un estadístico o no reconocen que un estadístico es una variable aleatoria, lo que lleva a plantear mal los test de hipótesis, por ejemplo, los alumnos confunden la media muestral con la media poblacional (Korin [Korin, 2021]; Harradine, Batanero y Rossman [Harradine, 2011]).

3.2. Marco teórico. Las nuevas teorías didácticas conciben al alumno como un verdadero protagonista de su aprendizaje, en donde el profesor proponga actividades contextualizadas dentro de su especialidad que permitan el surgimiento de un modo funcional las técnicas, elementos tecnológicos y organizaciones matemáticas que se quieren enseñar. Los docentes deben ser guías y mediadores, para que los estudiantes aprendan. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), propone la aplicación de un dispositivo didáctico que denomina Actividad de Estudio e Investigación (AEI), para enfrentar lo que ha denominado la monumentalización del saber y la pérdida del sentido de lo que se estudia en algunos ámbitos educativos (Chevallard [Chevallard, 2013]). Dicho dispositivo permite introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, tanto a nivel cognitivo como procedimental, concibiendo al alumno con un rol activo en el proceso de enseñanza/aprendizaje Para ello, las AEI se organizan en torno a una pregunta generatriz Q_0, seleccionada por el profesor, que tenga el potencial de generar el estudio por parte de los alumnos de ciertos contenidos matemáticos. Se propone una investigación y debate, en este caso, centrado en torno a la pregunta generatriz: Q_0: *¿Cómo certificar una característica de un producto o proceso?*. La búsqueda de respuesta a la pregunta también generará más preguntas derivadas, que permitirán contextualizar la propuesta, como puede ser ¿Cómo certificar la longitud del alabe de la turbina de un motor? Las respuestas a las preguntas junto con otras derivadas de una actividad específica llevarán al estudio de técnicas y de elementos tecnológicos-teóricos específicos relativos a test de hipótesis.

3.3. Propuesta. La propuesta que se presenta a continuación está dirigida, en particular, a alumnos de las carreras científico-tecnológicas que estén cursando probabilidades y estadística. La AEI servirá para complementar la enseñanza formal de estos conceptos y se resolverá mediante la aplicación de inferencia informal (Zieffler et al. [Zieffler, 2008]) con el uso de la aplicación para dispositivos móviles y web: Run R Script - Online Statistical Data Analysis - Version 1.1 ([Liila Tech, 2018]) que permite programar usando el lenguaje R versión 3.5.2 ([Team R. C., 2021]), y Python ([Python S. F., 2017]), es un entorno de desarrollo integrado (IDE) en línea, incluye una consola, un editor de código que admite la ejecución directa de código, así como herramientas, archivos de datos definidos por el usuario, almacenamiento de código en la nube. Este software genera una cuenta en la nube para cada usuario, donde se almacenan los códigos que desee el mismo, con el fin de ser compartidos con los usuarios mediante diferentes métodos (redes sociales, email, etc.), permitiendo ser ejecutados sin poseer una instalación del programa. Se propone, en este caso, compartir con los alumnos en el aula las rutinas mediante un código QR que "encripte" el link a la dirección web de la rutina en forma directa.

Para comenzar la actividad el profesor propone un debate acerca de la certificación de un producto y de los métodos estadísticos para certificar la calidad del mismo, que iniciará el estudio del saber a construir. La pregunta generatriz del debate será: Q_0: *¿Cómo certificar una característica de un producto?*, esta pregunta actuaría como eje articulador para la reconstrucción de los temas relativos a test de hipótesis. A su vez esta pregunta podría derivar en otras *¿Qué significa certificar un producto?* La certificación de un producto o proceso consiste en un gran número de actividades tendientes a validar la calidad del mismo, dichas actividades dependerán del producto a certificar. Consiste en la inspección de los procesos de fabricación, ensayos de muestras realizadas por el organismo de certificación correspondiente y la auditoría de las mismas para verificar si cumplen los estándares técnicos. *¿Qué productos se pueden certificar?* Materiales de construcción de distinta índole, partes de aeronaves, materiales eléctricos, productos electrónicos, etc. *¿Qué característica de un producto se podría certificar?*

Supongamos el caso en que se desea certificar una dimensión de un alabe de turbina de un motor a reacción de un avión (ver Figura 1).

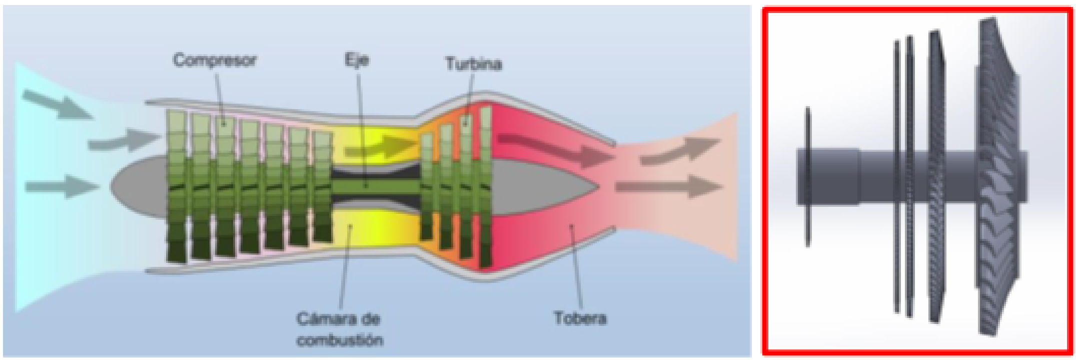


Figura 1. Esquema típico de un motor a reacción de avión, a la izquierda el rotor de la turbina de varios discos

Como se observa en la sección de la turbina existen varios discos conformados por una cierta cantidad de alabes, insertados en los mismos, estos deben poseer una longitud media específica en función del diseño del motor (Ver Figura 2).

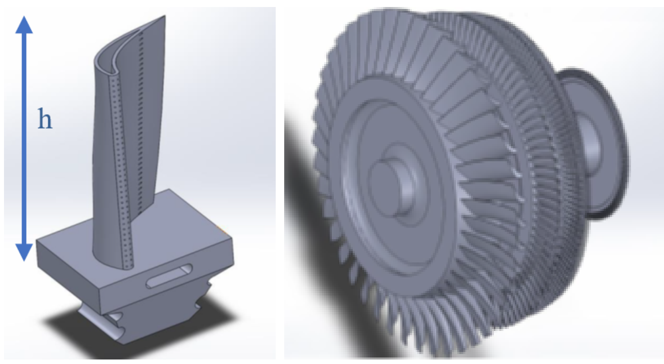


Figura 2. Imagen de un alabe y de los discos donde se insertan los mismos

En un caso particular, de un motor de una marca determinada, la longitud de un alabe para el disco de mayor diámetro se puede modelar como una variable aleatoria con distribución aproximadamente Normal con media $\mu = 269$ mm, y una desviación estándar $\sigma = 0{,}15$ mm.

Actividad 1. Una fábrica de motores a reacción está trabajando de acuerdo a los estándares de calidad. De todas formas, anualmente debe someterse a una auditoría para verificar dicha situación. La auditoría se realiza mediante un test de hipótesis realizado sobre una muestra aleatoria extraída de la producción. La característica a certificar es la longitud media del álabe para el disco de mayor diámetro

Propuesta 1. El objetivo de esta propuesta es resignificar desde un punto de vista empírico el concepto de error de Tipo I y de probabilidad de error de Tipo I para un test de hipótesis.

Para realizar la actividad se le propone a cada alumno generar con la aplicación Run R Script una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_10$ donde cada X_i tenga distribución Normal con media 269 y desviación estándar $\sigma = 0{,}15$ mm, que serviría para simular la extracción de una muestra aleatoria de la fábrica que está trabajando de acuerdo a los estándares de calidad.

Para poder realizar la certificación de la longitud media de la producción de los álabes de esa marca producidos por una fábrica, se propone a cada alumno, realizar con la muestra obtenida el siguiente test de hipótesis bilateral:

$H_0 : \mu = 269$ mm, contra la hipótesis alternativa $H_1 : \mu \neq 269$ mm

Donde rechazar H_0 significaría que la fábrica no cumple los estándares. La regla de decisión del test podría ser rechazar H_0 si $\left|\frac{\bar{X}-269}{\left(\frac{0{,}15}{\sqrt{10}}\right)}\right| > z_{0{,}05}$ siendo $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+...+X_{10}}{10}$.

Luego se plantea a los estudiantes las siguientes preguntas *¿Alguno rechazó H_0 con la muestra seleccionada? ¿Es correcto haber rechazado H_0? ¿Si se realiza el test 10.000 veces con distintas muestras, cuantas veces rechazaríamos H_0? ¿Se podría representar gráficamente usando las 10.000 muestras de tamaño 5 la distribución empírica de $\bar{X}$? ¿Cómo se podría representar la región de rechazo de H_0 en dicha gráfica? ¿Cómo se podría calcular la frecuencia relativa de veces que la fábrica no satisface los estándares de calidad? ¿Cómo se podría interpretar esa proporción en términos de nuestro problema? ¿Cómo se podría calcular la frecuencia relativa de veces que la fábrica podría certificar la pieza?*

Para contestar estas preguntas los estudiantes pueden correr una rutina utilizando Run R Script con el código que se muestra a continuación que se brinda a los mismos mediante la vinculación con un código QR `https://r.varisk.xyz/r/220611/demo-Rout-1558816771-dark.html`

```
n=10
mediaMuestral=function(n)   #Esta función genera una muestra aleatoria de tamaño n
{muestra=rnorm(n,269,0.15) # Normal con media 269 y desviación estándar 0,15
   media=mean(muestra)             # calcula la media de dicha muestra
   return(media)}
mediaMuestral(5)                    # el programa muestra la media obtenida
muchasmedias=replicate(10000,mediaMuestral(5))  # se generan 10000 medias muestrales
z=qnorm(0.05,lower.tail=FALSE)             # calcula el z0.05
hx=hist(muchasmedias,breaks=50)           # se genera el histograma.
plot(hx,col=ifelse(abs(hx$breaks-269)< z*0.15/sqrt(5),0,3))  # colorea la region de rechazo
porc=1-sum(abs(muchasmedias-269)<e)/10000   # estima la probabilidad de error de tipo I
```

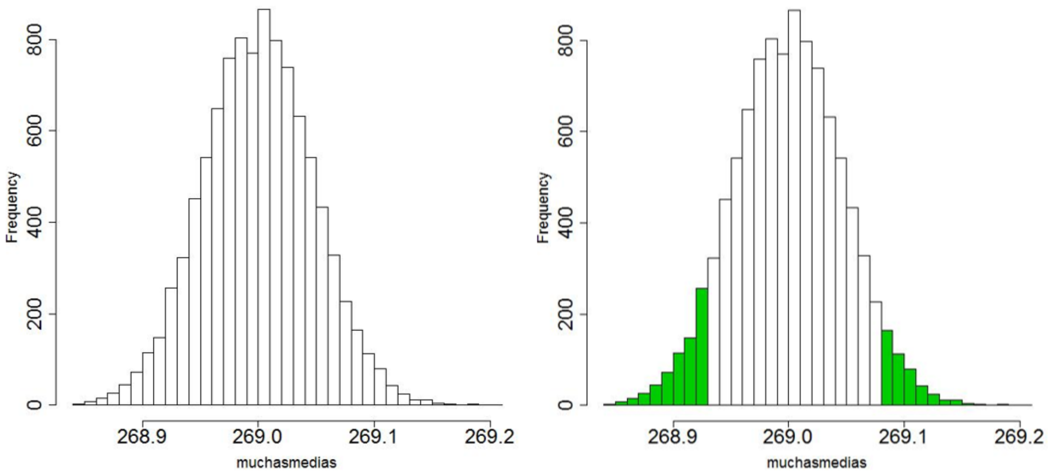


Figura 3. Histogramas de la distribución de frecuencias de las medias muestrales Propuesta 1

El saber hacer estas tareas se justifica por el hecho de cada alumno puede generar sus propias muestras e identificar gráficamente la distribución de las frecuencias absolutas de $\bar{X}$ cuando la distribución subyacente de la muestra es Normal con media 269 y desviación estándar 0,15 (Figura 3, izquierda). Esto serviría para contestar la pregunta: ¿Se podría representar gráficamente usando las 10.000 muestras de tamaño 5 la distribución empírica de $\bar{X}$? Luego pueden identificar gráficamente en color verde en el histograma (Figura 3, derecha), la frecuencia de veces que se rechazará H_0 con lo que se puede estimar la probabilidad de cometer un error de Tipo I si se la divide por 10.000:

$$P(\text{error de Tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0|\mu = 269) \cong \frac{103}{10000}$$

Esta, difiere un poco de la verdadera probabilidad que es $0,1$ por tratarse de una simulación.

Esto serviría para contestar estas preguntas: *¿Qué proporción de $\bar{X}$ caen en la zona de rechazo? ¿Cómo se podría interpretar esa proporción en términos de nuestro problema?*

En el mismo gráfico de la Figura 3 de la derecha, se puede apreciar la región complementaría, que no está pintada de verde, que serviría para estimar la potencia o sensibilidad del test.

Esta forma de trabajo les intervenir en el diseño del programa realizando distintas tareas: generar las muestras aleatorias bajo las condiciones requeridas, calcular el promedio de cada una de ellas, construir un histograma con los promedios, identificar en el histograma los promedios que caen en la zona de rechazo del test, cambiar si quisieran el tamaño de las muestras o el número de simulaciones. Por otro lado, esta propuesta permitiría que los alumnos se familiaricen con el uso del lenguaje de programación R, que es fundamental para cálculos en estadística. Esta forma de trabajo muestra cómo se llevan a cabo las investigaciones estadísticas y las principales ideas que subyacen en dichas investigaciones.

Propuesta 2. El objetivo de esta propuesta es resignificar desde un punto de vista empírico el concepto de error de Tipo II y de probabilidad de error de Tipo II para el test de hipótesis aplicado a la misma actividad.

Para realizar la actividad se le propone a cada alumno generar con la aplicación Run R Script una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_{10}$ donde cada X_i tenga distribución Normal con media 269,04 y desviación estándar $\sigma = 0{,}15$ mm, que serviría para simular la extracción de una muestra aleatoria de la fábrica que no está trabajando de acuerdo a los estándares de calidad.

Luego se plantean las preguntas *¿Algún alumno no pudo rechazar H_0 con la muestra seleccionada? ¿Si se realiza el test 10000 veces con distintas muestras, cuantas no veces rechazaríamos H_0? ¿Se podría representar gráficamente usando las 10000 muestras de tamaño 5 la distribución empírica de $\bar{X}$? ¿Para qué proporción de valores de $\bar{X}$ se rechaza H_0? ¿Qué proporción de valores de $\bar{X}$ no caen en la zona de rechazo? ¿Cómo se podría identificar esa región en el histograma? ¿Cómo se podría interpretar esta proporción en términos de nuestro problema? ¿Qué proporción de valores de $\bar{X}$ caen en la zona de rechazo de H_0? ¿Cómo se podría interpretar esta proporción en términos de nuestro problema?*

Para contestar estas preguntas los estudiantes pueden correr una rutina utilizando Run R Script con el código que se muestra a continuación que se brinda a los mismos mediante la vinculación con un código QR `https://r.varisk.xyz/r/220611/demo-Rout-1530181579-dark.html`

```
mediaMuestral=function(n)  # la función genera una muestra aleatoria de tamaño n de
{muestra=rnorm(n,269.04,0.15) # distribución Normal con media 269,04 y desviación estándar 0,15
   media=mean(muestra)  # calcula la media de dicha muestra
   return(media)}
mediaMuestral(5)  # el programa muestra la media obtenida
muchasmedias=replicate(10000,mediaMuestral(5))  # se generan 10000 medias muestrales
z=qnorm(0.05,lower.tail=FALSE)      # calcula el z0.05
hx=hist(muchasmedias,breaks=50)     # se genera el histograma.
plot(hx,col=ifelse(abs(hx$breaks-269)< z*0.15/sqrt(5),2,0)) # identifica la zona de aceptación
porc=sum(abs(muchasmedias-269)<e)/10000      # estima la probabilidad de error de tipo II
```

El alumno puede generar sus propias muestras e identificar la región de aceptación de H_0 (ver zona de color rojo en Figura 4), mediante la distribución empírica de $\bar{X}$ cuando la distribución subyacente de la muestra es Normal con media 269,04 y desviación estándar 0,15. Lo que permitiría estimar empíricamente la probabilidad de cometer un error de Tipo II, es decir:

$$P(\text{error de Tipo II}) = P(\text{Aceptar } H_0|\mu = 269{,}04) \cong \frac{8{,}431}{10000}$$

Este valor difiere un poco de la verdadera probabilidad por tratarse de una simulación. Se puede realizar nuevamente la experiencia con una muestra de tamaño $n = 20$ o más para ver que a medida que se toman muestras más grandes de la producción dicha probabilidad disminuye. También se podría generar muestras con una media más lejos de 269, por ejemplo 269,06 en lugar de 269,04 y observar también que la probabilidad de cometer error de Tipo II disminuye.

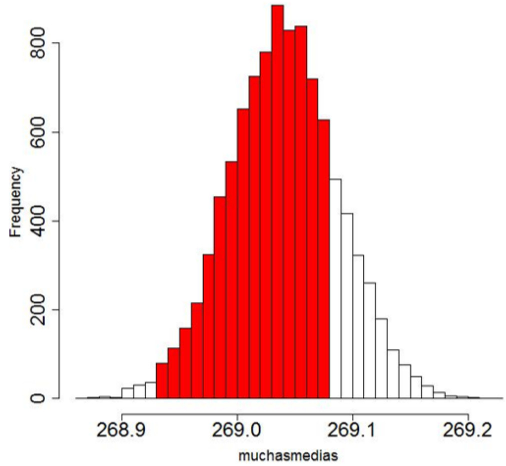


Figura 4. Histogramas de la distribución de frecuencias de las medias muestrales Propuesta 2

4. Conclusiones

En este trabajo se presentó una Actividad de Estudio y de Investigación que permitiría resignificar las probabilidades de error de Tipo I y de error de Tipo II, a partir de la simulación de la certificación de una característica de una pieza de un motor. La misma pregunta generatriz es posible presentarla en otros contextos y orientar la propuesta para distintas carreras científico-tecnológicas. El uso de la aplicación Run R Script ofrece grandes ventajas para la enseñanza dado que se puede implementar en un aula de clases, pudiéndose ejecutar en un dispositivo móvil y sin tener la aplicación instalada, esto resulta superador a otras propuestas de este tipo (Batanero y Diaz [Batanero, 2015]), ya que esta aplicación no solo tiene esta capacidad, sino que además permite programar y variar los códigos, lo cual expande el universo de posibilidad de estudios de diferentes aspectos de la temática. Además, se les facilita a los estudiantes el código del programa propuesto para la actividad, de modo que ellos simplemente lo ejecuten como está o puedan cambiar algunas variables para explorar el comportamiento de las probabilidades de los errores de Tipo I y II en distintas situaciones, como por ejemplo: ¿Qué pasa con dichas probabilidades si aumentamos el número de piezas extraída de la fábrica? El hecho de usar la simulación para los cálculos los ayudaría a comprender mejor cuál es la función del condicionante en el cálculo de las probabilidades de error de Tipo I y de Tipo II y de sus complementos. Además, permitiría emular el trabajo científico en inferencia estadística que parte de un hecho empírico para luego generalizarlo a la población. Esta propuesta de enseñanza se ha aplicado a alumnos de la facultad de ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, como trabajo futuro se evaluará su impacto en el aprendizaje.

5. Bibliografía

[Arteaga, 2004] G.R. Arteaga et al. En: *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. 2004. url: `enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html`.

[Batanero, 2000] C. Batanero. “Controversies around the role of statistical tests in experimental research”. En: *Mathematical Thinking and Learning* 2.1-2 (2000), págs. 75-98.

[Batanero, 2015] C. Batanero y C. Diaz. “Aproximación informal al contraste de hipótesis”. En: *II Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria*. M. Contreras (Ed.) Granada: SEIEM. 2015.

[Batanero, 2017] C. Batanero, C. Díaz y M.M. López-Martín. “Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos”. En: *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. 2017. url: `http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html`.

[Chevallard, 2013] Y. Chevallard. “Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente”. En: *Journal of Research in Mathematics Education* 2.2 (2013), págs. 161-182.

[Falk, 1995] R. Falk y C.W. Greenbaum. “Significance tests die hard: The amazing persistence of a probabilistic misconception”. En: *Theory & Psychology* 5.1 (1995), págs. 75-98. doi: `https://doi.org/10.1177/0959354395051004`.

[Harradine, 2011] A. Harradine, C. Batanero y A. Rossman. “Students and teachers’ knowledge of sampling and inference”. En: *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education* (2011). Springer, Netherlands, págs. 235-246. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_24.

[Korin, 2021] C. Korin. “La comprensión de los test de hipótesis estadísticos. Un estudio con alumnos universitarios”. En: *Revista De Educación Matemática* (2021). URL: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10263.

[Krauss, 2002] S. Krauss y K. Wassner. “How significance tests should be presented to avoid the typical misinterpretations”. En: *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute e International Association for Statistical Education. Cape Town, South Africa, 2002.

[Liila Tech, 2018] Liila Tech. *Run R Script - Online Statistical Data Analysis - Version 1.1 Build 226-208 - Android*. 2018.

[Liu, 2009] Y. Liu y P. W. Thompson. “Mathematics teachers’ understandings of proto-hypothesis testing”. En: *Pedagogies: An International Journal* 4.2 (2009), págs. 126-138. DOI: https://doi.org/10.1080/15544800902741564.

[Python S. F., 2017] Python Software Foundation. *Python Software Foundation*. 2017. URL: https://www.python.org/.

[Team R. C., 2021] Team R.C. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. 2021.

[Vallecillos Jiménez, 1994] A. Vallecillos Jiménez. “Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, España, 1994.

[Vallecillos Jiménez, 1997] A. Vallecillos Jiménez. “El papel de las hipótesis estadísticas en los contrastes: concepciones y dificultades de aprendizaje”. En: *Educación Matemática* 9.2 (1997), págs. 5-20.

[Vanderman, 2002] S. B. Vanderman. “Providing realçontext in statistical quality control courses for engineers”. En: *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute e International Association for Statistical Education. Cape Town, South Africa, 2002.

[Viles, 2007] E. Viles. “Análisis didáctico de la estadística y la calidad en los estudios de Ingeniería Industrial”. En: *Tecnura* 11.21 (2007), págs. 51-62. DOI: https://doi.org/10.14483/22487638.6272.

[Zieffler, 2008] A. Zieffler et al. “A framework to support research on informal inferential reasoning”. En: *Statistics Education Research Journal* 7.2 (2008), págs. 40-58.

(1,3,4) UIDET GAMEFI, Dto. Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata

(2) Dto. Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata

Email address, corresponding author: [1]mava_calandra@hotmail.com

UNA PROPUESTA DE INTEGRAR PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN MATEMÁTICA DISCRETA

ELISA OLIVA[1], MATHIAS DIAZ OGAS[2], ANA LAURA MOLINA[3], AND LAURA OLIVA[4]

Resumen. Determinar cuando los alumnos logran identificar regularidades en la asignatura Matemática Discreta, específicamente en la generalización de los estados alcanzables, que son basales en Red de Petri con árbol de alcanzabilidad infinito, es un problema que requiere de un seguimiento de las producciones de estudiantes de Informática de Licenciatura en Ciencias de la Computación y Licenciatura en Sistemas de Información.

Una Red de Petri, es un grafo de un sistema distribuido, paralelo o concurrente para eventos discretos, importa la posibilidad de ejecutar transiciones cuando el número de marcas de places no está expresado con números naturales. Las tareas (evaluaciones) de los estudiantes se han analizado bajo un paradigma cualitativo, mediante un estudio de casos. La dificultad se ha investigado desde el punto de vista semiótico como marco teórico. Los estudiantes objeto de este trabajo fueron los pertenecientes a la cohorte del año 2021, cuyo cursado fue únicamente en forma virtual. También fueron encuestados en un segundo proceso con preguntas concretas sobre análisis específico de estados que les causaron inconvenientes en obtener patrones, allí mediante el trabajo guiado en el análisis de casos particulares, pudieron mediante re-observación, arribar a realizar inferencia. La continuidad en el seguimiento en el proceso de aprendizaje permitió superar la dificultad y que el alumno alcanzara autonomía; y fue basal para un trabajo post-pandemia para el cursado presencial en el ciclo lectivo 2022, pues el alumno sigue necesitando un acompañamiento académico fuerte del equipo de cátedra.

1. Introducción

La reciente pandemia ha puesto de manifiesto la necesidad de fortalecer la confianza y la colaboración entre regiones y países como factor clave en la búsqueda de respuestas colectivas a los desafíos mundiales compartidos. La educación en un mundo post-covid, debe visualizarse como un bien común global y derecho humano universal. Por esto articula la necesidad de movilizar ideas para transformar la educación del siglo XXI, que debe transmitir un gran volumen de conocimientos teóricos y técnicos, que son las bases de las competencias del futuro; pero también se enfrenta a la tarea de proporcionar la brújula para poder navegar por él: aprovechando y utilizando durante toda la vida cada oportunidad que se presente de actualizar, profundizar y enriquecer ese primer saber y de adaptarse a un medio en permanente cambio.

La habilidad de "aprender a aprender" (Lluch Molins y Portillo Vidiella [Lluch Molins, 2018]), (Meirieu [Meirieu, 1992]), socialmente requiere la formación de personas capaces de realizar un manejo autónomo de herramientas cognitivas, logrando saberes significativos. Es una necesidad en el medio generar una educación centrada en quien aprende, que sea transversal para actuar en cualquier área del mundo laboral o para la continuidad de estudios de nivel superior; por ello una agenda educativa integral debe visualizar a los educadores como tomadores de decisiones en los sistemas educativos, que es lo que se comparte en este trabajo.

El factor de originalidad de esta propuesta, es la generalización, como fuente de aprendizaje, que puede producir conocimiento luego de un proceso de síntesis donde el participante pasa de la observación y conocimiento de casos particulares, al descubrimiento de patrones. Identificar y aplicar la regularidad es resultado de utilizar razonamiento inductivo.

El problema que se aborda, en el marco del proyecto de investigación de la UNSJ titulado: "Generalización de Patrones en Matemática, con ayuda de Nuevas Tecnologías y Método Inductivo"; es identificar regularidades en estados alcanzables, en Redes de Petri (grafo de un sistema distribuido paralelo o concurrente a eventos discretos) (Johnsonbaugh [Johnsonbaugh, 2000]), con árbol de alcanzabilidad infinito e interesa que el estudiante pueda generalizar estados alcanzables y allí decidir si es posible ejecutar transiciones cuando el número de marcas de places no está expresado con números naturales, sino que en forma simbólica.

2. Requisitos previos

Propuesta de comunicación breve que plantea una experiencia a Nivel Universitario, en la asignatura Matemática Discreta, con instancias de trabajo en generalización, búsqueda de patrones en Redes de Petri con árbol de alcanzabilidad infinito, y como el equipo docente enfocó las tareas de seguimiento a las labores de los estudiantes.

3. Desarrollo

A partir de un análisis documental se familiarizaron los investigadores con el término patrón, utilizado para caracterizar los comportamientos de procesos en las ciencias exactas, ingeniería o para fines didácticos en la enseñanza de representaciones puntuales, o comparaciones entre sucesiones, series y patrones. La investigación de regularidades es un contenido transversal a matemática y a otras disciplinas. Un caso especial de regularidades lo constituyen los patrones. El término patrón es la traducción elegida para el término inglés pattern, de importancia considerable en educación matemática. La idea básica implicada en esta noción es que toda situación repetida con regularidad y sobre características homogéneas, da lugar a un patrón. Los patrones suelen formarse a partir de un núcleo generador; en algunos casos el núcleo se repite, en otros el núcleo crece de forma regular. La importancia del estudio de los números mediante la idea de patrón, (Castro [Castro, 1994]), que procede de los griegos, ha sido enfatizada desde finales de los años 80.Un patrón es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo un regla (algoritmo), y sea repetición (en ellos distintos elementos son presentados en forma periódica) o de recurrencia(en ellos el núcleo cambia con regularidad, cada término es expresado en función de anteriores, en base a su análisis se infiere la ley de formación)

Su empleo en las Matemáticas Superiores se encuentra tanto en la matemática del continuo como en matemática discreta. Los patrones que predominan en el estudio de la asignatura Matemática Discreta de las carreras de Licenciatura en Ciencias de la Computación y Licenciatura en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de San Juan, son de tipo algebraico.

El propósito didáctico los autores, en este estudio es distinguir los patrones de esa índole a los que tienen acceso los estudiantes en el tema de Redes de Petri. En los casos en los que ya han obtenido de una manera u otra nociones sobre el cambio, el crecimiento del número de marcas en cierto/s place, al disparar siempre determinada transición, pero carecen de procedimientos para la desencapsulación a la que (Báez [Báez, 2018]), hace referencia al explicar las transformaciones que tienen lugar en el objeto matemático luego de hacer conversiones en los registros de representación semiótica. A saber, pueden trabajar sobre un registro de representación algébrica, particularizarlo a uno aritmético pero necesitan de la solicitud explícita del docente de que deban realizar el pasaje de convertir de un registro de representación aritmético a uno algebraico.

El trabajo con patrones y el descubrimiento de las leyes que los rigen y su reconstrucción cumple un papel fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y científico. Ambas actividades están vinculadas estrechamente al proceso de generalización, que forma parte del razonamiento inductivo, entendido tanto como pasar de casos particulares a una propiedad común (conjetura o hipótesis), como transferir propiedades de una situación a otra (analogía). En este sentido, (Polya [Polya, 1966]), afirma que la generalización se construye gracias a la abstracción de invariantes esenciales. Las propiedades abstraídas son más bien relaciones entre objetos que objetos mismos, y la descontextualización es el proceso principal de la generalización.

Para analizar las producciones de los estudiantes, nos ubicamos bajo un paradigma cualitativo. La metodología fue llevada a cabo a través de un estudio de casos (Stake [Stake, 1978]). Para ello, nos posicionamos en el curso de Matemática Discreta, con el objetivo de indagar en las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a la generalización de estados alcanzables en Red de Petri con árbol de alcanzabilidad infinito.

El análisis se realizó sobre las producciones de la primera evaluación de 80 estudiantes, de la unidad temática que engloba este contenido. El cursado fue en primer semestre del año 2021 en forma virtual. Se aplicó, el estudio a un ejercicio con 3 ítems: el primero correspondía a la determinación de los vectores de habilitación y cambio, el segundo a la realización del árbol de alcanzabilidad y el tercero fueron preguntas sobre si determinados estados son alcanzados ó si ciertas secuencias de transiciones son o no posibles de ser ejecutadas desde el estado inicial. En la Red (ver Figura 1) se plantean las actividades:

a) Indicar los vectores de habilitación y cambio
b) Construir el árbol de alcanzabilidad.
c) Si se alcanzase el estado $(97, 1, 97)$, ¿qué transiciones estarían habilitadas y a qué estados se llegaría?.

3.1. Resultados.

Respecto a la primera actividad, el trabajo realizado por los alumnos fue correcto, en el 100 % de los casos. En la determinación de ambos tipos de vectores hay una generalización implícita alcanzada por los estudiantes, que se presenta en la madurez del uso de la definición de construcción de ambos vectores.

En referencia a la segunda actividad distinguiremos 4 niveles de respuestas:

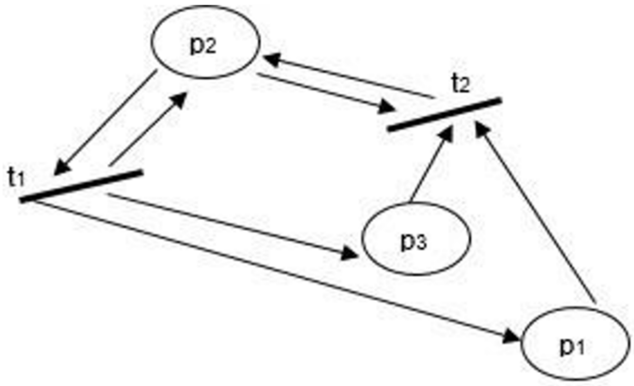


Figura 1. Red de Petri con marcación inicial $M_0 = (0, 1, 0)$

- **Nivel 1**: "No realizan la actividad", responden justificando que ninguna transición está habilitada desde la marcación inicial. Los docentes percibimos en ellos que no han comprendido cuando una transición está habilitada, y es lo primero que se les recomienda revisar y se apoya con nuevos ejercicios para avanzar en el logro de este concepto.
- **Nivel 2**: "Desarrollan sólo tres o cuatro niveles del árbol de alcanzabilidad" (ver Figura 2), sin llegar a percibir que hay un proceso de patrones de crecimiento que se podría generalizar por la estructura que poseen los estados alcanzables. Los docentes detectamos que no han iniciado la primera etapa del proceso de generalización de patrones. No han realizado observación crítica, de los resultados que están obteniendo. Sin esa primera etapa indagatoria de la información que se obtiene o posee, no se puede avanzar al descubrimiento de un patrón. Se hace junto a ellos, en sesiones de consulta la deducción de varios niveles más del árbol de alcanzabilidad y mediante preguntas se los guía al descubrimiento de la regularidad. Luego se les plantea un trabajo extra con más ejercitación sobre Redes de Petri con árbol de alcanzabilidad infinito.

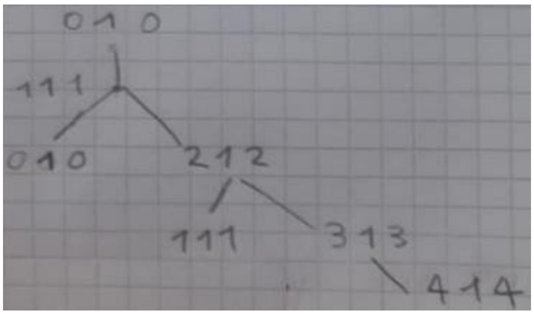


Figura 2. Respuesta del Nivel 2 de alumnos que no realizan generalización en el árbol de alcanzabilidad.

- **Nivel 3**: "Perciben el patrón pero no realizan la generalización" (ver Figura3). La madurez del proceso de pensamiento los lleva a alcanzar la segunda etapa de la determinación de patrones y luego de una observación exhaustiva de los datos obtenidos pueden responder que sí existe un patrón, pero su proceso inductivo aún es incompleto pues no logran indicar si de esos estados que ahora no están formulados en forma aritmética, habilitan ó no la ejecución de nuevas transiciones, y en caso afirmativo, que forma tendrían los nuevos estados alcanzables. Los docentes debimos volver con estos estudiantes en clases de apoyo, a indagar mediante preguntas dirigidas: a si esos vectores "estados generalizados" tienen disponibles ó no, las marcas necesarias para habilitar alguna/s de las transiciones de la Red?. Haciendo con ello volver a la reflexión de la consulta que nunca se debe olvidar en este tema: cuándo una transición está habilidad, desde un estado?.

  También en este nivel los docentes apoyaron a este grupo de alumnos, con un trabajo extra con más ejercitación sobre Redes de Petri con árbol de alcanzabilidad infinito, en los que se les cuestiona siempre sobre estados con un "muy elevado" número de marcas en los places, con el objeto que no puedan llegar en un desarrollo puntual- a mano alzada, sino que sea fruto de aplicar respuestas de un proceso de generalización.
- **Nivel 4**: "Realizan generalización del patrón por aplicación en su razonamiento de método inductivo" (Rivera y Becker [Rivera, 2011]). Su proceso de pensamiento alcanza la etapa de síntesis. Descubriendo a su vez, dentro de este grupo, dos subgrupos: uno que debe pasar en su tarea por muchos casos particulares para llegar a completar la etapa (ver Figura 4).

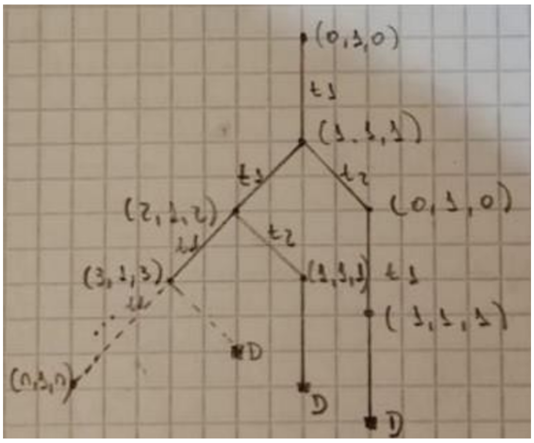


Figura 3. Respuesta del Nivel 3 de alumnos que perciben el patrón pero no realizan generalización en el árbol de alcanzabilidad.

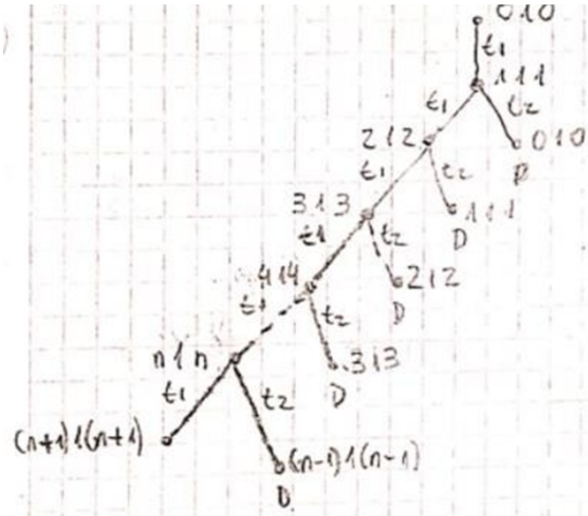


Figura 4. Respuesta del Nivel 4, primer subgrupo de alumnos que generalizan el patrón, en el árbol de alcanzabilidad.

El segundo subgrupo que con poco proceso de observación en cada ejercicio que trabaja, puede llegar a la generalización de la regularidad presente en ciertos estados del árbol de alcanzabilidad infinito de la Red de Petri, por aplicación del método inductivo (ver Figura 5).

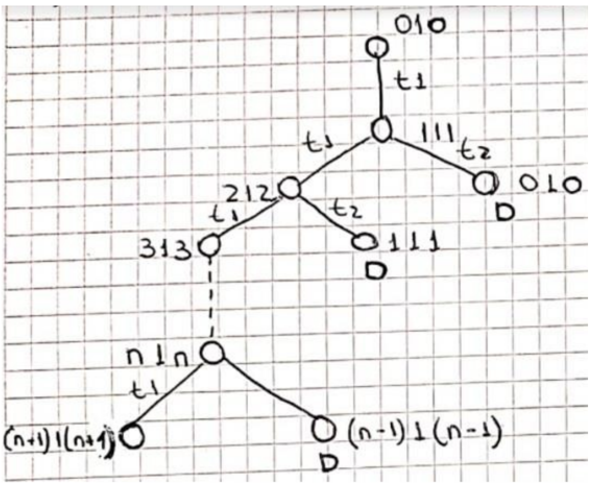


Figura 5. Respuesta del Nivel 4, segundo subgrupo de alumnos que generalizan el patrón, en el árbol de alcanzabilidad.

La información de cómo se distribuyeron por niveles, los 80 alumnos (ver Tabla 1), que son parte de este trabajo.

Nivel	Número de alumnos
Nivel 1	10
Nivel 2	34
Nivel 3	6
Nivel 4	30

Tabla 1. Resultados finales de la primera aplicación del proceso

Los 50 alumnos que no alcanzaron el Nivel 4, son los que no pudieron responder la tercera actividad. En la recuperación de esta evaluación, se les planteó nuevamente una Red de Petri con árbol de alcanzabilidad infinito, se mantuvieron las dos primeras actividades y se modificó la tercera, por una pregunta sobre a qué estado lleva una secuencia de transiciones ejecutable desde M_0, del tipo: (t1)45 t2(t1)30?. Los resultados (ver Tabla 2) presentan un avance en el logro del contenido.

Nivel	Número de alumnos
Nivel 1	2
Nivel 2	3
Nivel 3	5
Nivel 4	40

Tabla 2. Resultados finales de la segunda aplicación del proceso

4. Conclusiones

Los 30 estudiantes que en el primer proceso de evaluación lograron el Nivel 4, el 80 % de ellos no necesitó la instancia Extraordinaria para regularizar la asignatura. Los 50 estudiantes que en la primer instancia no alcanzaron el Nivel 4, sólo el 36 % de ellos no necesitó la instancia Extraordinaria para regularizar la asignatura; del resto el 28 % quedó libre y el otro 36 % regularizó con uso de la instancia extraordinaria de evaluación.

Los 50 estudiantes que en la primera instancia de evaluación fueron observados en los Niveles 1, 2 y 3, fueron encuestados en un segundo proceso con preguntas concretas sobre análisis específico de estados que les causaron inconvenientes en obtener patrones. Mediante el trabajo guiado en el análisis de casos particulares, pudieron mediante re-observación, arribar a realizar inferencia. La continuidad en el seguimiento en el proceso de aprendizaje permitió superar la dificultad y que el alumno alcanzara autonomía. De este grupo aprobó en la evaluación de recuperación, esta unidad el 80 %.

Esta forma de trabajo con profundo seguimiento de las actividades del alumno, fue adoptada para trabajar este año 2022, pues es la primera experiencia presencial del grupo que cursa la asignatura Matemática Discreta, que son alumnos que cursan su tercer semestre de las carreras Licenciatura en Ciencias de la Computación y Licenciatura en Sistemas de Información.

El método inductivo permite a los estudiantes a realizar trabajos exploratorios, a potenciar la observación, indagación, investigación, y la predicción; permitiendo pronosticar comportamientos y descubrir relaciones: pasos iniciales en la búsqueda de la formalización de patrones en el proceso de generalización.

5. Bibliografía

[Báez, 2018] A. Báez. "Estrategia didáctica para el desarrollo conceptual procedimental en el cálculo diferencial de una variable real, para las carreras de ingeniería". Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Camagüey, 2018.

[Castro, 1994] E. Castro. "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)". Tesis de doctorado. Universidad de Granada, 1994.

[Johnsonbaugh, 2000] R. Johnsonbaugh. *Matemáticas Discretas.* Prentice-Hall, México, 2000, págs. 485-499.

[Lluch Molins, 2018] L. Lluch Molins y M. Portillo Vidiella. "La competencia de aprender a aprender en el marco de la educación superior". En: *Revista Iberoamericana de Educación* 78.2 (2018), págs. 59-76.

[Meirieu, 1992] P. Meirieu. "Aprender, sí. Pero ¿Cómo?" En: *Octaedro* (1992). Madrid, págs. 30-39.

[Polya, 1966] G. Polya. *Matemáticas y Razonamiento Plausible.* Traducción de J. L. Abellán. Editorial Tecnos, Madrid, 1966, págs. 200-300.

[Rivera, 2011] F. Rivera y J. Becker. "Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-YearStudy". En: *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (2011). Berlin-Heidelberg, págs. 323-366.

[Stake, 1978] R. Stake. "The case study method". En: *Educational Researcher* 7.2 (1978), págs. 5-8.

(2,3) Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan

(4) Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Email address, corresponding author: [1]elisaoliva65@gmail.com

ANÁLISIS DEL DEBATE DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO EN MATEMÁTICA EN EL CASO DE POLIEDRO REGULAR

DULCE CARLA GOTTIG[1], ANA MARÍA MÁNTICA, AND MAGALÍ FREYRE

Resumen. Se presenta el análisis de una actividad realizada por estudiantes avanzados del profesorado en matemática. La misma tiene por objetivo reflexionar sobre la importancia de la definición en matemática tomando particularmente el concepto de poliedro regular. Para esto se conforman grupos y se toman definiciones de libros de textos escolares y páginas de internet para compararlas con la empleada en la cátedra. Se comparan ambas definiciones con el propósito de determinar si definen el mismo conjunto de figuras. Del análisis se desprende no sólo que las definiciones no son equivalentes, sino que no guardan coherencia con el conjunto de figuras que dicen considerar a partir de las condiciones exigidas. Se debate junto al grupo clase la importancia de analizar las definiciones que aparecen tanto en los libros de textos como en páginas de internet, a la que actualmente acuden mucho los estudiantes, en función de determinar si realmente se define el conjunto de figuras que se pretende definir.

1. Introducción

El interés por realizar investigación se debe a la necesidad de trabajar en la innovación de proyectos que estimulen el pensamiento crítico, favorezcan el razonamiento y la visualización, e incentiven a la indagación. Resulta necesario, para esto, realizar una profundización de contenidos y proponer un análisis acentuado en el desarrollo práctico que involucra necesariamente la apropiación de conceptos. Particularmente, se considera relevante investigar temas propios de la geometría tridimensional con el fin de ahondar en sus definiciones y aplicaciones, y explorar tanto propiedades como la razón de ser de las mismas no solo con fundamentación teórica sino también mediante la utilización de software de geometría dinámica.

En este trabajo se presenta el análisis de lo realizado por estudiantes avanzados del profesorado en matemática que realizan tareas que apuntan a una correcta construcción del concepto de poliedro regular. Se les presentan definiciones de poliedro regular y se les propone contrastarlas con la utilizada por la cátedra y determinar si la definición y familia de poliedros regulares que abarcan guardan coherencia. Se pretende delimitar la condición de arbitrariedad de las definiciones de modo que, al mencionar el concepto a tratar, en este caso poliedro regular, el conjunto de figuras sea el mismo.

Guillén Soler [Guillén Soler, 1997] sostiene que, "ha habido diferentes aproximaciones a la investigación en esta área (geometría tridimensional) y en ellas se han presentado dificultades que se derivan de definiciones inadecuadas, de habilidades espaciales y de no saber cómo examinarlas mejor" (p.60).

2. Requisitos previos

El concepto de poliedro se considera de interés particularmente para profesores de matemática de nivel primario o secundario y para estudiantes de profesorados, dado el escaso desarrollo del mismo en textos de nivel secundario y la poca presencia de la geometría en las aulas (Mántica [Mántica, 2019]). Se destaca el interés por dotar de relevancia al trabajo en geometría en el diseño curricular de la provincia de Santa Fe ([Min. de Ed. de Santa Fé, 2014]) que destaca que "se debe profundizar la producción y el análisis de construcciones geométricas y propiciar el control de estas tareas" (p.51). Se realiza este trabajo con la intención de provocar cambios en la actitud por parte de los docentes en cuanto al trabajo en geometría en la escolaridad obligatoria.

Esta es una investigación de tipo cualitativo (Mc Knight et al. [Mc Knight, 2000]). El diseño, implementación y análisis de las tareas lo encuadramos en el método investigación-acción (Elliot [Elliot, 1990]). Entre los métodos de recolección de datos se mencionan la observación, artefactos escritos y grabaciones en audio y en video (Mc Knight et al. [Mc Knight, 2000]). Las propuestas se implementan con alumnos de profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), Argentina. Las muestras son de tipo accidental.

3. Desarrollo

En la realización del trabajo participan dos grupos de estudiantes que se denominan en este escrito A y B. El A tiene dos estudiantes y el B tres. Cada grupo establece similitudes y diferencias de una definición entregada por el investigador y la utilizada por la cátedra, con el objetivo de determinar si ambas definen el mismo conjunto de figuras. Se consideran para entregar a los grupos una definición tomada de un texto utilizado por docentes de matemática en la escuela secundaria y otra tomada de internet. Las definiciones correspondientes son entregadas a cada grupo de estudiantes y se le propone a la semana siguiente un debate junto al grupo clase en el que exponen por Zoom las conclusiones, que además presentan por escrito. En esta instancia se encuentran presentes todos los estudiantes y docentes de la cátedra.

Se toman los aportes de Winicki-Landman y Leikin [Winicki-Landman, 2000] quienes afirman que si dos enunciados diferentes definen dos conceptos y sus correspondientes conjuntos de objetos ejemplo son conjuntos no disjuntos, entonces las definiciones pueden ser equivalentes, consecuentes o pueden competir. Si los conjuntos de objetos ejemplo son iguales, entonces son definiciones equivalentes de un mismo concepto. En este caso, se puede aceptar una como definición y la otra como teorema dependiendo solo de consideraciones didácticas. Si uno de los conjuntos de objetos es un subconjunto propio del otro, se dice que las definiciones son consecuentes, es decir que una proviene de la otra y los conjuntos correspondientes de las condiciones definitorias establecidas por estos enunciados también están conectados por una relación de inclusión. Si los conjuntos de objetos se intersectan y el conjunto de intersección es un subconjunto pro-pio de cada uno de ellos, entonces se dice que los enunciados son definiciones que compiten para dos conceptos matemáticos diferentes.

Teniendo en consideración la clasificación anterior, se propone un análisis de las definiciones, que permite determinar si la definición y los poliedros regulares que se presentan como existentes guardan coherencia, atendiendo a las condiciones enunciadas. Además, se propone una comparación entre las definiciones entregadas a cada grupo con la acordada por la cátedra. Es aquí donde se procede de dos maneras distintas de acuerdo a los resultados obtenidos: por un lado, en el caso en el que ambos enunciados definen conjuntos de figuras iguales (definiciones equivalentes) se justifica la correspondencia de condiciones presentes en una y otra; por otro lado, si los conjuntos de objetos no son los mismos (definiciones consecuentes o que compiten), se proponen contraejemplos que demuestran el porqué de la relación hallada.

Se les entregan a ambos grupos la definición que se utiliza en el texto de la cátedra en la cual se desarrolla la adscripción en que se enmarca la presente investigación. Esta definición es considerada como definición base y es propuesta por Mántica y Götte [Mántica, 2022]. Se exhibe a continuación:

Superficie poliédrica: Llamaremos superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras de la superficie, que cumplan con las siguientes condiciones:

1. *Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra. Ambas caras se llaman contiguas.*
2. *Dos caras contiguas están en distinto plano.*
3. *Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas.*
4. *Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice y si lo tienen deben pertenecer ambas a un mismo ángulo poliedro.* (p.21)

Posteriormente se define poliedro: *"Llamaremos poliedro al conjunto de los puntos de la superficie poliédrica y los interiores a la misma. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro"* (p.23).

Para más adelante definir poliedros regulares convexos como *"aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas"* (p.29).

Asimismo, se entregan a cada grupo las definiciones 1 y 2 distribuidas al azar.

Definición 1. *"[...] Se dice que un poliedro regular es aquel que tiene caras y ángulos iguales, por ejemplo, un cubo o hexaedro (seis caras). El cubo posee seis polígonos con lados iguales con la misma longitud, estos a su vez se unen en vértice con ángulos de 90° grados. También eran conocidos antiguamente y son conocidos aún, como sólidos platónicos. Los sólidos platónicos o sólidos de Platón son poliedros regulares y convexos. Solo existen cinco de ellos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro".* (Definición recuperada del sitio web Wikipedia. Actualizado en 2021. `https://es.wikipedia.org/wiki/Poliedro`)

Definición 2. *"Existen solo cinco poliedros regulares en los que todas sus caras son polígonos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro"* (Aristegui et al. [Aristegui, 2005]).

Se solicita a los estudiantes que comparen ambas definiciones destacando similitudes y diferencias y que una vez comparadas conforme a la clasificación establecida por Winicki-Landman y Leikin [Winicki-Landman, 2000] determinen si son equivalentes, consecuentes o compiten.

A continuación, se desarrolla lo realizado en relación al análisis y comparación de definiciones correspondientes a cada grupo y en relación al debate con el grupo clase. El grupo A analiza la definición 2 y el grupo B la definición 1.

Grupo A. En primer lugar, plantean como diferencia entre ambas definiciones que la definición 2 solamente habla de las caras de los poliedros, que tienen que ser iguales, y no establece nada sobre los vértices, ángulos poliedros. En cambio, en la de la cátedra se establece que en los vértices concurre la misma cantidad de caras. En cuanto a las similitudes se tienen en cuenta dos: que ambas definiciones imponen que los poliedros tienen que tener las caras iguales y tienen que ser polígonos regulares. En segundo lugar, manifiestan que el conjunto de poliedros de ambas definiciones son los mismos cinco cuerpos: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. En la definición 2 lo dice explícitamente y en la definición base no se explicita, aunque el corolario del Teorema de Euler expresa que solo existen cinco poliedros regulares convexos. Además, exponen que no les queda claro si las definiciones hablan de lo mismo.

Luego de un debate con el grupo clase se arriba a la conclusión que la definición 2 no hace alusión a los vértices del poliedro, por la que no la consideran una definición formal. No es coherente pues con esa definición se podrían construir más de los cinco que se mencionan.

La docente cuestiona si en la definición base existen condiciones no necesarias. Se invita a pensar en poliedros que cumplan solo las dos condiciones exigidas por la definición 2.

Se concluye que el conjunto de figuras de ambas definiciones no es el mismo. Por esta razón, las definiciones no son equivalentes. La definición dada por la cátedra es un subconjunto propio de la definición 2, esto nos permite decir que las definiciones son consecuentes, una proviene de la otra.

Grupo B. Los estudiantes expresan que la definición 1 define poliedros regulares mientras que la definición base define poliedros regulares convexos. La similitud entre ambas es que las caras del poliedro deben ser iguales y la diferencia es que la definición base añade las condiciones de que las caras deben ser polígonos regulares y que en cada vértice debe concurrir el mismo número de caras.

Después de estas comparaciones los estudiantes manifiestan que según la definición 1 un poliedro regular puede ser aquel que tenga caras iguales pero que sus caras no sean polígonos regulares, aquel que tenga caras iguales pero que en cada vértice no concurra el mismo número de caras y un poliedro que tenga caras iguales pero que en cada vértice no concurra el mismo número de caras y que sus caras no sean polígonos regulares. Afirman que según la definición base estos poliedros no son considerados como poliedros regulares convexos. Además, ejemplifican a partir de construcciones el caso de poliedro con caras iguales pero que no son polígonos regulares. Así, consideran un tetraedro que tiene caras iguales que son triángulos isósceles pero no son regulares porque los triángulos no son equiláteros. Después construyen un poliedro que tiene caras triángulos equiláteros, o sea que las caras son todas iguales y polígonos regulares, pero en cada vértice no concurre el mismo número de caras, en algunos vértices concurren tres caras y en otros cuatro (bipirámide triangular). Para el último caso en el que las caras solo son iguales y no cumple ninguna de las otras dos condiciones plantean otro poliedro que también tiene seis caras que son triángulos isósceles no equiláteros. De nuevo, puede observarse en este ejemplo que en algunos vértices concurren tres caras y en otros cuatro.

A partir de todos los ejemplos desarrollados concluyen que las definiciones no definen el mismo conjunto.

Se debate junto al grupo clase la importancia de analizar las definiciones que aparecen tanto en los libros de textos como en páginas de internet a las que suelen acudir los estudiantes, con el objetivo de determinar si realmente definen el conjunto de figuras que se pretende definir.

4. Bibliografía

[Aristegui, 2005] R. Aristegui et al. *Matemática 8*. Puerto de Palos, Buenos Aires, 2005.

[Elliot, 1990] J. Elliot. *La investigación-acción en Educación*. Morata, Madrid, 1990.

[Guillén Soler, 1997] G. Guillén Soler. *El mundo de los poliedros*. Síntesis, Madrid, 1997.

[Mántica, 2019] M. Mántica A. y Freyre. "Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular". En: *Educación Matemática* 31.1 (2019).

[Mántica, 2022] A. Mántica y M. Götte. *Geometría en 3D*. Ediciones UNL, Santa Fé, 2022.

[Mc Knight, 2000] C. Mc Knight et al. *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. American Mathematical Society, Rhode Island, 2000.

[Min. de Ed. de Santa Fé, 2014] Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fé. *Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada*. Santa Fé, 2014.

[Wikipedia, s.f.] Wikipedia. *Poliedro. Definición.* URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Poliedro.

[Winicki-Landman, 2000] G. Winicki-Landman y R. Leikin. "On Equivalent and Non-Equivalent Definitions Part I". En: 20.1 (2000), págs. 17-21.

Email address, corresponding author: [1]dulcegottig17@gmail.com

IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO PEDAGÓGICO FLIPPED CLASSROOM O METODOLOGÍA DEL AULA INVERTIDA

PEDRO ORAZZI[1]

Resumen. Los docentes de la Cátedra de Estadística y Matemática para las Decisiones, materia del tercer año de la Carrera de Contador Público y Administración de empresas, la cual se dicta de forma virtual, hemos planteado la modificación de la metodología de enseñanza, implementando el modelo pedagógico "flipped classroom" o aula invertida la cual se trata de un sistema que propone que los alumnos estudien y preparen las lecciones fuera de clase, accediendo en sus casas a los contenidos.

En donde el rol del docente es el de tutor, más que presentador de información, proporcionando retroalimentación, guiando el aprendizaje del alumno individualmente y observando la interacción entre ellos, siendo el responsable de adaptar, proveer la didáctica y los materiales utilizados de acuerdo con las necesidades de los alumnos, propicia el aprendizaje colaborativo.

Las clases en video conferencias (zoom o gloogle meet) que ofrece la cátedra son el espacio donde los alumnos interactúan, hacen las consultas y realizan las actividades de una forma participativa (analizar ideas, debates, trabajos en grupo, etc.).

La premisa de la cátedra es que el alumno aprende haciendo y no memorizando.

En esta ponencia vamos a presentar los nuevos lineamientos de trabajo de la cátedra, la implementación del modelo pedagógico "flipped classroom", su metodología, características principales, ventajas, diagramación de las clases, actividades, rol del docente, rol del alumno.

1. Introducción

1.1. Planteo de la problemática. Con el paso del tiempo y aun en la actualidad se ha demostrado que para garantizar el acceso equitativo a las oportunidades educativas y a una educación de calidad, es necesario que los esfuerzos se vean acompañados por reformas educativas, las que no podrán implementarse de forma efectiva sin que se produzca un cambio en lo que respecta al rol docente, quien debe estar capacitado para preparar a sus estudiantes a enfrentarse a una sociedad cada vez más basada en el conocimiento científico e impulsada por la tecnología. Evidenciándose una apatía en los alumnos manifestándose en el bajo rendimiento, la escasa participación y hasta el manifiesto rechazo hacia el estudio.

Habiendo hecho un análisis de los bajos resultados obtenidos por los alumnos pareciera indicar que estos están relacionados con los contenidos impartidos y la forma en que se imparten, provocando una desconexión de los alumnos con el estudio, bajo nivel cognitivo y cognoscitivo, dificultades en el aprendizaje y en la comprensión, asumiéndolo como inútil en su accionar diario y posteriormente profesional.

Entre las principales causas de la desconexión de los alumnos se ha encontrado la utilización de estrategias de enseñanza donde se utiliza el método expositivo y repetitivo, evidenciando de que muchos alumnos realicen una repetición simple de los conceptos y una resolución mecánica de los problemas, generando desmotivación, apatía y falta de interés hacia el aprendizaje, es por esto, que estamos convencidos de la implementación de actividades innovadoras teniendo en cuenta la tecnología; para esto se debe orientar las clases fomentando cualquier tipo de ambiente de aprendizaje interactivo e interesante, en los que el docente solo es un ente facilitador, guía y comprometido verdaderamente con la enseñanza y aprendizaje de sus propios alumnos; apasionado en el desarrollo de las habilidades de los educandos; en los cuales ellos puedan recurrir a la tecnología vanguardista de última generación y así mismo lograr utilizar materiales didácticos, técnicas de información y obtengan un ambiente de integración entre estudiante y docente.

1.2. Introducción al concepto modelo pedagógico flipped classroom o aula invertida. En la Cátedra de Estadística y Matemática para las Decisiones trabajamos con el método educativo Flipped Classroom conocido como aula invertida que se trata de un sistema que propone que los alumnos estudien y preparen las lecciones fuera de clase, accediendo en sus casas a los contenidos.

En las video conferencias (zoom o gloogle meet) que ofrece la cátedra es el espacio donde los alumnos interactúan, hacen las consultas y realizan las actividades de una forma más participativas (analizar ideas, debates, trabajos en grupo, etc.). La premisa de la cátedra es que el alumno aprende haciendo y no memorizando, en donde el docente actúa como guía.

A continuación, citaremos las ventajas de este sistema educativo

1.3. Ventajas del Flipped Classroom.

a.- Los alumnos son los protagonistas.
El alumnado es el protagonista de su propio aprendizaje y se implica desde el primer momento ya que les dota de responsabilidades, pasando de ser sujetos pasivos a activos. Pasan a ser actores en lugar de espectadores porque trabajan, participan, plantean dudas, colaboran en equipo, se organizan y planifican para realizar proyectos o resolver problemas.

b.- Consolida el conocimiento
Este método da más tiempo para resolver dudas y consolidar conocimientos en clase. Al haber trabajado los contenidos y conceptos en casa, el tiempo en el aula puede dedicarse a resolver dudas, solucionar dificultades de comprensión o aprendizaje y trabajar los temas de manera individual y colaborativa.

c.- Favorece la diversidad en el aula, los alumnos pueden dedicar todo el tiempo que quieran a revisar los contenidos, para llegar a su máxima comprensión.

d.- Aprendizaje más profundo y perdurable en el tiempo.

e.- Mejora el desarrollo de las competencias por el trabajo individual y colaborativo.

f.- Mayor motivación en el alumno.

2. Requisitos previos

La presente ponencia está dirigida a docentes, alumnos y profesionales vinculados con la enseñanza de la matemática y a todos los profesionales relacionados con el mundo educativo, de cualquier área de conocimiento y nivel, así como a estudiantes de la Universidad interesados en la temática del mismo y tiene los objetivos de compartir distintas experiencias relacionadas con el uso de TIC en la docencia; reflexionar sobre el uso de las TIC en la educación y su relevancia, hacer un diagnóstico para conocer el uso y opinión de las TIC de alumnado de las distintas universidades participantes en la Jornada; divulgar buenas prácticas docentes empleando las TIC; propiciar la reflexión sobre el uso de las mismas y su integración en la práctica diaria en el aula y fomentar la cooperación, el intercambio y la participación a través de redes educativas.

3. Desarrollo

3.1. Fundamentos del aula invertida. Se trata de un modelo y no una técnica con hondas raíces en las teorías de Jean Piaget (1896-1980) y Lev Vygotsky (1896-1934).

La definición de aula invertida recoge los principios del constructivismo, del cognitivismo y del aprendizaje colaborativo y cooperativo, este último derivado del concepto de zona de desarrollo próximo (ZDP) creado por Vygotsky. La ZDP es la que permite aprender por uno mismo con la ayuda de otros (docentes o pares) que comparten sus conocimientos.

También se inspira en la teoría del aprendizaje experiencial de David Kolb y Ron Fry, que predica que, para aprender algo, hay que procesar y trabajar la información aprendida mediante la inmersión completa en tareas y actividades. El constructivismo es la base del aprendizaje activo y, por ello, es vital para comprender la potencialidad del aprendizaje invertido para cada alumno y la revolución que implica.

3.2. Entornos de aprendizaje. El modelo FLIP se desarrolla sobre estos 4 pilares del aprendizaje: el entorno flexible, la cultura de aprendizaje, el contenido intencional y el educador profesional.

3.3. Entorno flexible. Entorno flexible es el ambiente propiciado por los docentes en el que los alumnos escogen cuándo y dónde aprender.

Se necesita de flexibilidad por parte del profesor para que el contenido sea asimilado al ritmo del alumno, permitiendo tiempos de aprendizaje más amplios y evaluaciones adaptadas al aula invertida y a sus actividades.

3.4. Cultura de aprendizaje. La cultura de aprendizaje es la que se centra en el modelo de instrucción enfocado en el alumno y en su participación activa en el proceso.

Durante el tiempo de clase, el profesor hace que los estudiantes profundicen y compartan con otros sus inquietudes, dudas y hallazgos.

3.5. Contenido intencional. El contenido intencional se refiere a las lecciones basadas en el modelo FLIP que los educadores preparan. Estos contenidos están adaptados a los objetivos de la materia y están orientados a la comprensión de conceptos y a mejorar el aprovechamiento del tiempo de clase.

3.6. Educador profesional. El término “educador profesional” hace referencia a la conducta que deben mantener los educadores durante todo el proceso de aula inversa.

Estos deben concentrarse en la evolución de los alumnos, en el aporte de retroalimentación y en la evaluación.

En definitiva, no puede entenderse qué es el flipped classroom y cómo aplicarlo para mejorar los resultados de los alumnos si no se aceptan estos 4 escenarios y no se está dispuesto a desarrollarlos todos por igual.

3.7. Rol de los docentes. El flipped classroom implica una estrategia de enseñanza y aprendizaje disruptiva donde los docentes deben realizar dos tipos de trabajo diferenciados: el individual con cada estudiante, atendiendo a sus necesidades y al tiempo que tarda en aprender, y las tareas en grupo en clase.

Como se invierten las formas de enseñanza, el docente pasa a dar las lecciones fuera de clase, de forma online, y traslada las tareas grupales al aula, bajo su guía y supervisión. Así se pretende conseguir que los alumnos aprendan los conceptos por descubrimiento propio y no por inducción. Esta es la base del aprendizaje significativo.

Para lograrlo, el docente debe desempeñar un rol motivador, permitiendo que el alumno sea autónomo y aprenda a desarrollar un pensamiento crítico, reflexivo y participativo. Es lo que Vygotski denominaba “andamiaje”, que no es más que las herramientas para que el estudiante siga construyendo su aprendizaje después de salir del aula.

De acuerdo con Bergmann y Sams (2012), el docente es tutor, es un coach del aprendizaje, más que presentador de información, proporciona retroalimentación, guía el aprendizaje del alumno individualmente y observa la interacción entre los estudiantes.

Es el responsable de adaptar y proveer la didáctica y los materiales utilizados de acuerdo con las necesidades de los alumnos, propicia el aprendizaje colaborativo.

3.8. Objetivos.

3.8.1. Objetivos generales. Los objetivos planteados por las Cátedra se concretaron en los siguientes:

a. Implementar la flipped classroom como metodología de enseñanza.
b. Procurar destrezas y herramientas tecnológicas para que los alumnos puedan llevar a cabo su aprendizaje.

3.8.2. Objetivos específicos.

a. Innovar en la enseñanza a través de la metodología del aula invertida.
b. Incrementar el uso del campus virtual por parte de los alumnos y los profesores.
c. Posibilitar el aprendizaje significativo de los contenidos teóricos a través de estrategias procedimentales.
d. Fomentar la planificación, el diseño y la elaboración de herramientas digitales por parte de los alumnos y de los profesores.
e. Integrar curricularmente los recursos tecnológicos.

3.9. Metodología.

3.9.1. Estructura de la materia. La estructura de la cursada de Estadística y Matemática para las Decisiones está diagramada en 8 módulos
Actividades:

1.- La materia es 100 % virtual, tienen una clase semanal por video conferencias (Zoom o Google Meet).
  En el primer día de clases
  a.- Se confeccionarán los grupos, cada grupo tendrá designado un nombre de comisión y la cantidad de alumnos será de 5 como máximo.
  b.- Se establecen las actividades que cada grupo debe realizar durante las clases, las cuales los alumnos las deben preparar con antelación a su presentación, pudiendo ser exponer sobre la teoría, la actividad práctica o el uso de los software, es a elección de los grupos.
  Las clases es el espacio donde los alumnos exponen, interactúan, hacen las consultas, analizar ideas, generan debates, realizando las actividades de una forma participativa y actuando de forma colaborativa. Por cada una de estas exposiciones los integrantes de los grupos acreditan 1 punto que se le será sumado a la nota del parcial.
  c.- La elección de la realización de un póster o monografía.

2.- Trabajos prácticos Por cada módulo los alumnos en sus casas deben realizar un trabajo practico que comprenden 3 partes, la primera consta de un cuestionario teórico, la segunda corresponde a la realización de una actividad práctica y en la tercera deben resolver ejercicios con la asistencia de software, tienen un plazo de entrega será de 7 días a partir de la clase que se imparte el tema y su aprobación obra como presente de la clase. Entre todos los trabajos prácticos entregados se elegirán a los 2 mejores y a los alumnos integrantes de esas comisiones se le acreditará 1 punto a la nota del parcial.

3.- Póster o monografía, los grupos eligen la realización de una monografía o póster, acreditando por la realización de estos trabajos puntos para el parcial. Tanto la realización del póster como la de la monografía tienen pautas preestablecidas que se deben respetar, siendo el eje temático la incorporación de los software en estadística y matemática para las decisiones.

Este trabajo incluyendo teoría, contenidos matemáticos sobre la actividad práctica, información sobre el modo de uso y aplicaciones del software, ejemplos resueltos mediante el programa asociados con la tarea profesional, imágenes ilustrativas e información que se crea relevante.

Cuenta con una preentrega en formato digital, una vez aprobada, se procederá a la entrega final.

Como soporte los alumnos disponen de videos y PDF en los cuales se explican los trabajos a realizar, las pautas y plazos de entrega.

3.9.2. Material didáctico. Los alumnos tienen a disposición los apuntes en pdf y los canales de videos teóricos, prácticos y explicación de software que se descargan de la zona interactiva/campus virtual o de YouTube, en los cuales se los orienta y se les da los lineamientos para que ellos puedan realizar las actividades sin la necesidad de una explicación teoría o practica de parte del docente, a eso hacemos referencia cuando decimos que trabajamos con el modelo pedagógico del aula invertida.

A continuación, citamos los canales de YouTube de cada unidad de la materia que tienen a disposición los alumnos (con sus correspondientes enlaces). Cabe mencionar que cada canal tiene la explicación teórica, la práctica y la del uso de software de cada módulo.

- Canal EMD (28 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBob9QG8JFv7PyKsC_p1Rgt-`
- Canal módulo 1 - Sistema de inventario - EMD (16 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBqQRc1OuNoslHiTyHaZiPVL`
- Canal módulo 2 - Método simplex - EMD (11 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBo9Ax_C9XBN3rNUeu6ID4SS`
- Canal módulo 3 - Modelo de transporte - EMD (13 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBor4KFhYdP-uXOrgEPIVoOW`
- Canal módulo 4 - Teoría de juegos - EMD (16 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBomXQKuuAU7CkWQ3KwshVOE`
- Canal modulo 5 - Métodos CPM PERT - EMD (10 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBpcStRsZEojN2lZkV7UDn8K`
- Canal módulo 6 - Distribuciones muestrales - EMD (8 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBp5qYgVTtmkosz7_O3WKzQw`
- Canal modulo 7 - Estimación paramétrica - EMD (11 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBqISZ1d4_r-bPCpLl95mr-p`
- Canal modulo 8 - Inferencia estadística - EMD (29 videos)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBrQJQjwg-KC1wSLAboRzJXE`
- Canal poster - EMD (1 video)
  `https://www.youtube.com/playlist?list=plby-tvb5skbos6cpl6dmm7simvfqt-mom`
- Canal clase de repaso - EMD (2 videos)
  - Clase de repaso módulos 1 2 3 4
    `https://youtu.be/73hYFn6QmHw`
  - Clase de repaso módulos 5 6 7 8
    `https://youtu.be/shVPeZ_0bAc`
  - Canal reglamento y cronograma de cursada - EMD (2 videos)
    `https://www.youtube.com/playlist?list=PLbY-TVB5SkBr_cqDvc5EyfWS5O9e4GhM-`

Los medios de comunicación son la zona interactiva/Campo virtual y el grupo de WhatsApp.

3.10. Conclusión. En referencia a la implementación del modelo pedagógico flipped classroom se observa una diferencia positiva y estadísticamente significativa en las calificaciones de los alumnos.

Bajo este modelo pedagógico todos los alumnos tienen la misma oportunidad de participación y de compartir sus ideas y conocimientos, fomentándose un aprendizaje mucho más social y colaborativo, la interacción de estos crece a través de las exposiciones, debates, actividades en grupo, etc.

Aprenden unos de los otros cuando se comentan dudas o reflexiones acerca de los contenidos, ayudándose mutuamente y no sólo confían en el profesor como el único difusor de conocimiento, sino que también lo hacen en sus compañeros.

El aula inversa permite inspirar, escuchar, animar, motivar y brindar una visión mucho más enriquecedora a los alumnos, estando estos mucho más atentos, la clase deja de ser expositiva por parte del docente para convertirse en interactiva.

Se desvanece la imagen del docente como un mero comunicador, cumpliendo ahora un rol de guía con la responsabilidad y obligación potenciar el aprendizaje del alumno.

Por último, mencionamos que el modelo pedagógico flipped classroom es muy atractivo y eficaz para alumnos y profesores ofreciendo una experiencia distinta en la educación poniéndonos a pensar que el implementar este modelo es una alternativa de innovación educativa viable para la enseñanza.

4. Bibliografía

[Bishop, 2013] J. Bishop y M. Verleger. "The Flipped Classroom: A Survey of the Research". En: *2013 ASEE Annual Conference* (2013). Atlanta, Georgia.

[Dussel, 2010] I. Dussel. "Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital". En: *VI Foro Latinoamericano de Educación* (2010). Buenos Aires, Santillana.

[F.L.N., 2014] Flipped Learning Network. *The Four Pillars of F-L-I-P*. 2014. URL: `http://www.flippedlearning.org/cms/lib07/VA01923112/Centricity/Domain/46/FLIP_handout_FNL_Web.pdf`.

(1) Facultad de Arquitectura y Urbanismo, Universidad Nacional de La Plata
Email address, corresponding author: [1]estructurarte2112@hotmail.com

LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN CAMPO DE IDENTIDAD PROFESIONAL EN EL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

NORMA DI FRANCO[1] AND NORA CLAUDIA FERREYRA

Resumen. La presentación tiene como sentido compartir reflexiones vinculadas al Campo de las Prácticas -así denominado en los actuales planes de estudio de los Profesorados universitarios en Matemática-, como expresión de las preocupaciones de un grupo de docentes y de estudiantes que nos desempeñamos en este ámbito en la formación de grado de la UNLPam. En el recorrido del trabajo los cuestionamientos se centran en si este espacio se va conformando como un campo de saberes y de haceres propio y, entonces, qué saberes podemos identificar que le otorgarían esa significación. Así, se incluyen cuestionamientos vinculados a las dimensiones desde las que necesitamos pensar lo propio, si se construyen definiciones independientes dentro de los planes de carrera, qué fundamentos teóricos legitimamos, si es propio porque lo expresamos como nuestro. Recuperamos documentos que vienen explicitando su importancia y gravitación curricular en el entorno nacional tanto como la producción del propio equipo en relación a cómo pensamos los aportes desde la enseñanza, la investigación o la extensión, y nos involucramos con algunos de los que reconocemos como rasgos identitarios en términos de prefigurativos, de contratransferencias y de identidad heteroglósica. Las consideraciones finales no podrían tener significados acabados, remiten a prácticas intensivas cuya potencialidad está en la posibilidad de constituirse en reflexiones, haceres y saberes de alto valor formativo.

1. Introducción

La presentación se enmarca en el Proyecto de investigación "Prácticas de formación de profesorado, configuraciones epistemológicas de identidad profesional" de la UNLPam y es la expresión de un grupo de docentes y estudiantes que nos desempeñamos en el Campo de las Prácticas en la formación del Profesorado en Matemáticas. A partir de reflexionar sobre nuestros recorridos y de analizar algunas explicitaciones en otros profesorados de nuestro contexto nacional, nos seguimos preguntando si éste se va constituyendo como un campo de saberes y de haceres propio y, para contribuir a ese interrogante, qué saberes podemos identificar y legitimar que le otorgarían ese sentido en nuestra formación de profesores. ¿Desde qué dimensiones necesitamos pensar lo propio? ¿Pensamos en un campo con definiciones independientes dentro de los planes de estudio? ¿Se trata de unos saberes que tienen un cuerpo de fundamentos teóricos que legitiman sus sentidos? ¿Logra definirse sin referencias subsidiarias de marcos de las didácticas, las pedagogías, las epistemologías? ¿Es propio porque lo expresamos como nuestro?

Como campo comienza a tener mayores reconocimientos, y junto con ellos, la necesidad de mucha reflexión e investigación. Las Jornadas de Enseñanza de la Matemática significan una oportunidad y un espacio muy propicio para la socialización de tales preocupaciones.

2. Requisitos Previos

La presentación está elaborada desde un equipo de docentes y estudiantes que nos desempeñamos en el Campo de las Prácticas de la formación del Profesorado universitario en Matemáticas, con el sentido de compartir e intercambiar reflexiones con otras/os integrantes de éstas comunidades educativas movilizados por estas inquietudes (además de estudiantes y docentes de las prácticas educativas, podrían sumar mucho al debate coformadores, equipos de gestión educativa, docentes de otros campos de la formación).

3. Desarrollo

3.1. Campo reciente, campo postergado. La importancia del campo de las prácticas ha quedado expresada en la última reformulación de los planes de estudio de profesorados universitarios de facultades de Ciencias Exactas y Naturales, en documentos como el aprobado por el Comité Ejecutivo del Consejo Interuniversitario Nacional –Res 856/13 CE CIN– que, en la propuesta acordada de estándares para la acreditación de carreras de profesorado define:

- el Campo de la Práctica Profesional como uno de los cuatro campos que organizan la carrera;
- los criterios de intensidad de la formación práctica y las actividades profesionales reservadas al título, entre los cinco elementos que la delimitan;

- las prácticas docentes en su complejidad y multidimensionalidad y el principio de posicionamiento reflexivo en las propias prácticas, en los sentidos que las orientan y en los efectos que producen, entre sus finalidades;
- el 50 % de la carga horaria total asignado al campo, destinado a espacios residenciales o equivalentes;
- y la explicitación -medular para este trabajo- de que "los campos de la formación delimitan configuraciones epistemológicas" (p. 80) que integran temas, procesos y problemas centrales para la formación de profesores.

El reconocimiento reciente de la importancia del Campo de las Prácticas ha quedado ratificado también por el Consejo Universitario de Ciencias Exactas y Naturales –CUCEN–, organismo nacional que nuclea a las distintas facultades de Ciencias Exactas y Naturales de las universidades nacionales, en la centralización de los debates en sus foros y en la publicación de los "aportes específicos de las carreras, propuestas innovadoras, reflexión sobre las prácticas, experiencias en contextos diversos, implementación y articulación de las PPD en el plan de estudios, dispositivos de formación, fortalezas, oportunidades, dificultades" ([CUCEN, 2018]).

Y comienza a instalarse como campo de socialización de reflexiones académicas en reuniones científicas nacionales de los últimos cinco años, como las desarrolladas Jornadas de Prácticas Profesionales de los Profesorados Universitarios de Matemática realizadas en la Universidad de Rosario , en las que se ha nucleado la participación de la mayoría de las universidades nacionales.

3.2. Campo definido curricular y extracurricularmente. En todo caso, el aumento en las cargas horarias, la presencia en el plan de estudios desde distintas modalidades, daría cuenta de unos saberes de la formación que, por consenso en todos los profesorados universitarios del país -manifestado en el CUCEN-, marcaron la necesidad de otra gravitación curricular. "Apropiarse de estas prácticas docentes contextuadas adquiere mayor significado si están integradas a la trama curricular de las carreras." ([Lapasta, 2018], 19). Podríamos recuperar aquél [Bernstein, 1989] de la clasificación y enmarcación del conocimiento educativo en su análisis acerca de cómo una sociedad selecciona, clasifica, distribuye, transmite y evalúa el conocimiento educativo que debe ser público en tanto reflejo de las distribuciones de poder como principio de control social (p.1). Y, como recurso que parece dar señales de necesidad, se sostiene en presencias extracurriculares también: hablamos de prácticas educativas en jornadas de puertas abiertas de la universidad hacia la comunidad, en espacios de difusión de carreras, en momentos de articulación entre la Educación Secundaria y la Educación Superior, en proyectos de prácticas comunitarias, en modalidades de desarrollo profesional continuo traducidas en talleres vinculados a la Educación Inicial o Primaria, de intervención en trabajos de ferias de ciencias, por mencionar algunos. En nuestros contextos locales hacemos referencia a la participación en la Semana de la Ciencia (toMate un recreo –juegos de estrategia–, ajedrez en los recreos largos –la guerra de los peones, el salto del caballo, desafíos del tablero roto–, taller de juegos y problemas geométricos), en las Jornadas de Puertas Abiertas de la UNLPam (los juegos y las posibilidades interactivas de matemática recreativa, los juegos y las estrategias de anticipación, los juegos para aprender), en el Programa universitario Interactuando con la Ciencia –de articulación entre los últimos años de la Educación Secundaria y la universidad, en talleres de ingresantes a la universidad –TIMs que se vienen sosteniendo por años, desarrollados en modalidades presenciales y virtuales, con participación plena de estudiantes y residentes de profesorado–, en proyectos de extensión Formarse para formar; Pensar, sentir, desear, hacer: formándonos en DDHH y ESI; Conocer(nos), Reconocer(nos) y Cuestionar(nos) en ESI y DDHH), entre muchas actividades desarrolladas.

Seguramente todas/os las/os docentes de universidades nacionales podemos reconocernos en alguna/s de estas propuestas. Entonces, ¿es sólo una necesidad de describir lo que ya hacemos? Nos interpretan mejor las Epistemologías del Sur en la expresión de [Sousa Santos, 2006] cuando nos ayuda a pensar cómo las racionalidades dominantes han impactado en nuestras maneras de actuar, de pensar, en nuestras ciencias; unas racionalidades indolentes, perezosas, que se consideran únicas, exclusivas, y que no se ejercitan lo suficiente como para poder mirar la riqueza inagotable del mundo.

3.3. Campo de saberes propios. A partir de las reflexiones en relación a las diferentes articulaciones, resulta importante a este equipo seguir trabajando por el análisis de configuraciones epistemológicas, avanzar en su identificación y en las definiciones que se independizan, desde sentidos/significados/saberes propios, que demandan poder explicitar autonomía y valoran profundas relaciones con otros campos de saber.

Una síntesis de elementos presentes desde diferentes perspectivas consideradas y reintegrados como expresión de este equipo de estudio, queda expresada por:

El saber profesional del/la profesor/a se caracteriza como un conocimiento práctico (estudiado a partir de las prácticas, se respalda en la experiencia –que somete a análisis– y se transforma en principios más generales a partir de la reflexión teórica); relacional y complejo (funciona articulando, en conexiones, integrando, constituyendo un sistema); dinámico (atendiendo lo imprevisible, en cambio continuo), situado (contextualizado), especializado (específico), identitario (representativo de una actividad profesional), personal pero referente de una comunidad (si bien toda práctica es particular, es referencia de la comunidad de las/os profesores identificadas/os por sus prácticas) y descripto desde dimensiones objetivas (convertido en cuerpo de saberes de la profesión) tanto como instrumentales (herramienta de análisis de las propias prácticas) ([Di Franco, 2018]) y políticas (entretejido en intereses y relaciones de poder). ([Di Franco, 2020a])

En esos marcos como generadores de nuevas reflexiones nos resultan importantes las conceptualizaciones de prácticas y praxis; equipamientos praxeológicos de las/os profesores y archivos legitimados en la formación; epistemologías implícitas en las prácticas de profesorado; concepciones de Buenas Prácticas, criterios, métodos y recursos; formación para la comprensión, para la intervención y para la reflexión; conocimiento en la acción, reflexión en la acción y reflexión sobre la acción; producciones conjuntas y colaborativas, creación de significados en entornos de diálogo, identidad heteroglósica; contextualizaciones y concepciones aterrizadas; prácticas por la ampliación de derechos que discutan patriarcado, colonialismo, racismo y toda forma de exclusión; la investigación para la identificación colectiva y local de problemas, complejidades y cuestiones cruciales de la profesión; entre tantos debates profundos que permitan proyectar prácticas educativas más inclusivas, menos extractivistas, violentas o discriminadoras.

Como estado de situación en la actualidad, se puede leer de diferentes presentaciones en nuestros ámbitos nacionales (en los que claramente nos incluímos y participamos de lógicas análogas desde la universidad en la que nos desempeñamos), una necesidad reclamada de mucha investigación en el campo. A la vez, advertimos que todo bolsillo categorial que se diseña viene a colocarse en el abrigo de las disciplinas legitimadas como tales y un difuso/invisibilizado/negado status académico o científico de los saberes de las prácticas reforzando una diferenciación traducida en jerarquías en que las prácticas quedan subalternizadas y únicamente subsidiadas por otros campos.

Recurrentemente, ante el planteo de la necesidad de vinculación o diálogo entre la formación disciplinar matemática y la práctica profesional, nos y los posicionamos como campos separados y que tienen necesidad de articularse, pero luego en la descripción de la experiencia, aparece la fuerza de aplicar lo teórico de la formación disciplinar al mundo práctico de la experiencia educativa antes que de integrar diferentes campos teórico-prácticos. En este sentido, desde lugares muy pequeños, venimos haciendo esfuerzos por sostener una producción en nuestras investigaciones que nos ayuda en el crecimiento como campo propio. Así, los trabajos de posgrados que hemos desarrollado, los estudios en los equipos de investigación en los que trabajamos, o las propuestas de nuestras/os becarias/os estudiantes y graduadas/os dan cuenta de algunos recorridos. Ejemplificamos con producciones de estudiantes que abonan esta posibilidad.

- Beca Estímulo a las Vocaciones Científicas EVC-CIN Convocatoria 2019 de la SPU. Becario Maximiliano Laborda Caffarone. Prácticas Educativas en Matemática mediadas por la tecnología: entre las herramientas conceptuales y las actualizaciones pedagógicas. FCEyN. UNLPam. Res 1518/20 CE CIN.

  Las estrategias analizadas a partir de mediaciones tecnológicas permiten reflexionar cómo el conocimiento se configura también por los medios que lo producen, qué implican manejos más dinámicos de los sistemas de representación, la importancia de las actividades de intercambio, las oportunidades que se brindan para la construcción conceptual, las posibilidades desde intersticios curriculares, las erosiones del saber escolar o las resistencias a la utilización de la tecnología.
- Beca Estímulo a las Vocaciones Científicas EVC-CIN Convocatoria 2018-2019 SPU. Res P. Nº 403/18. Becaria Dalma Cañada. El juego como analizador de relaciones con el saber en las prácticas de profesorado. FCEyN. UNLPam.

  Se pudo analizar que, en la mayoría de los juegos se partió de la problematización que generaba la actividad en sí misma para llegar a construir una definición formal o un procedimiento validado; esto es, el juego no fue utilizado como un motivador o instrumento para hacer más divertida la tarea, sino con fines matemáticos, como herramienta para el aprendizaje de los conceptos matemáticos. También que, en muchos casos y con frecuencias detalladas, las relaciones que promueve el/la residente para las/os alumnas/os refleja las propias relaciones con el saber identificadas desde el diseño del juego; en otros, como en las mediaciones innovadoras, aparecen en la relación de residente con el material que propone, pero no en la demanda al alumno como jugador. No se identifican vinculaciones particulares asociadas a nociones específicas de la matemática, antes bien al tipo de procesos relacionales de construcción o de reproducción, de seguimiento de pistas bajo control externo o de permitir los argumentos, las conjeturas, las validaciones y las contradicciones como posibilidad de aproximaciones significativas y de defensa de lo que se produce.

- Beca de Perfeccionamiento en la Investigación (CEBPI) Convocatoria 2020 Res 294/19 CS UNLPam. Becaria Déborah Caren Mendoza Virgili. Los sentidos de los juegos en las Prácticas Educativas en Matemática: entre las herramientas, las prácticas de inercia y las innovaciones declarativas.

  El análisis realizado permitió reflexionar sobre mediaciones que: permiten al/la docente disponer de estrategias que amplían espacios decisionales de las/os estudiantes y orientan hacia la producción (definición de comodines), colaboran con las posibilidades de hacer pensar a las/os alumnas/os en un conocimiento a partir de necesidades antes que de imposiciones, permiten insistir en que las relaciones con el saber necesitan poder evidenciarse como parte de las intencionalidades docentes, no se pueden dejar dependiendo de supuestos logros naturales o espontaneísmos, los saberes que circulan y se validan entre compañeros, jugada a jugada, van generando independencia de la aceptación autorizada del/la docente y van apoyándose en estrategias de control sobre lo que se produce, en relaciones en aparente contradicción, como las de reproducción e interioridad, prácticas en apariencia mecánicas y repetitivas en que las/os estudiantes pueden apropiarse más de los saberes en algunas iteraciones, conviven y generan posibilidades educativas igualmente trascendentes.
- Elaboración de propuestas por la ampliación de derechos decoloniales, antirracistas, antimarginación; que trabajen por unas escuelas más democráticas, por una mayor justicia de saberes. La identificación de su influencia en nuestras prácticas educativas se vuelve imprescindible para intentar un desarrollo más autónomo en la formación de profesorado, "tendríamos que enseñar democracia desde la perspectiva de los esclavos y de los trabajadores precarizados; tendríamos que enseñar ciudadanía desde la perspectiva de los no ciudadanos." (Santos, 2018: 317). Desde el rol de docentes nos identificamos en el trabajo en el Campo de las Prácticas en la formación de profesorado, con la intencionalidad de promover y desarrollar experiencias educativas desde perspectivas surepistemológicas, con estudiantes que anticipen un ejercicio profesional insurgente ante la restricción o la violación de derechos.
- Identificación de problemáticas locales como las de las superficies como unidades económicas familiares y la disputa a puesteros de las tierras del oeste pampeano; los índices de mortalidad adolescente en situaciones de marginación social aumentados por casos de adicción; los concursos locales de las reinas estudiantiles de la primavera y los estereotipos de belleza atizados por el mercado a partir del estudio de las medidas y la proporcionalidad; los abusos sacerdotales en un pueblo pampeano integrando las estadísticas ocultas por encubrimientos eclesiásticos; el análisis de escalas, volúmenes y capacidades desde las crónicas de un río robado; los significados de los números en expresiones fraccionarias, decimales y porcentuales para desnaturalizar la violencia de género; las argumentaciones en las disciplinas y los argumentos en relación a la interrupción voluntaria del embarazo; embarazos adolescentes, deserción escolar y cifras que permiten rastrear una transmisión intergeneracional de las pobrezas; todos casos de profunda significatividad en nuestros contextos y en situaciones en que las conceptualizaciones de la matemática permitieran una mayor comprensión de las problemáticas.

3.4. Campo prefigurativo, campo de contratransferencias. En esos recorridos que este equipo viene zigzagueando expresábamos una de las primeras fuerzas que depositamos en el campo de las prácticas y es la de sus sentidos prefigurativos.

Los diferentes procesos y complejidades que se componen en el campo están orientados por "una concepción dialéctica, tanto del vínculo enseñanza-aprendizaje como de la construcción y socialización del conocimiento, que podemos denominar prefigurativa en la medida en que, además de impugnar las prácticas escolares propias del orden social dominante, intenta anticipar en los diferentes espacios que configuran a la vida cotidiana, los embriones o gérmenes de la educación futura ([Ouviña, 2011], 143). Y una praxis prefigurativa en tanto que: se desarrolla durante la formación, desde momentos tempranos en la carrera; anticipa prácticas desempeñadas como profesionales docentes; no espera que estén las condiciones para que se comiencen a ejercer; es, por definición, política, se sostiene en la confianza en las posibilidades de cambio; discute/interpela la tradiciones en la formación, no las puede considerar como naturales; reflexiona y construye conocimiento siempre provisional aunque no discursivo, anclado en las posibilidades situadas de los haceres docentes; se da siempre con otros, entre los sujetos que participan y le dan sentido. ([Di Franco, 2011])

El estudio de muchas decisiones que toman las/os residentes en el rol de estudiantes de la formación y en el rol de docentes en sus residencias, en un tiempo sincrónico, desarrollado en la investigación de una maestría, comienza a aportarnos muchos lugares por donde investigar.

La propuesta del trabajo de tesis se inicia con unos objetivos definidos por describir las prácticas en las residencias, en particular, las relaciones de las/os residentes con el saber, como caracterizadoras de rasgos identitarios de prácticas profesionales docentes, y configurar un esquema categorial que pueda integrarse al entramado de saberes de la formación de profesorado. [. . .] Las/os residentes, en el rol de estudiantes, desarrollan procesos de construcción, identifican intencionalidades docentes vinculadas a establecer relaciones, a involucrar a los/as alumnos/as con las conceptualizaciones y a explicitar consideraciones sobre tales procesos. Establecen disquisiciones y las marcan: cómo se construye en términos de aproximaciones a una definición, cómo se va relacionando quien construye con su definición, cómo inciden las interpretaciones de otros, cómo se tienen en cuenta conceptualizaciones que están siempre relacionadas aun cuando nadie las haya propuesto explícitamente, qué casos elegir, cuáles resultan más significativos. Valoran positivamente esas experiencias, y al analizarlas, se van configurando las claves para poder llevar adelante esos procesos. Proponen a las innovaciones como producciones para resignificar necesidades detectadas, estrategias para resolver problemas de la práctica, valoran su carácter colectivo y de transformación. Al asumir el rol de productores/as de propuestas de enseñanza, resulta muy tenue la fuerza de las posibilidades tanto de inventar conceptos (proponer alguno que no esté reconocido desde la disciplina) como la de recuperar otros conceptos que la preparación universitaria tiene incluidos en el currículum de formación. En las propuestas que ofrecen como significativas están presentes ataduras a un orden, una formalidad, precisión y rigor, que se transforman en condicionamientos y, en sus ejemplos, no garantizan comprensión. Propuestas de aplicación de fórmulas, aceptación de clasificaciones sin discusión, actividades de baja necesidad reflexiva, no hay salidas particulares a problemas prácticos y todas vienen de la mano de tener conocimientos ya sabidos. (p. 253) [. . .] El estudio permite advertir diferencias sustanciales entre las vinculaciones con el saber como estudiantes y como futuros docentes. Como alumnos/as en formación, resuelven problemas abiertos, reconocen la importancia de los aportes particulares, describen con fuerza las virtualidades de la construcción conceptual. En las prácticas de aula mayoritariamente no lo proponen. En el rol de profesoras/es resuelven necesidades de enseñanza y aprendizaje con evaluaciones de pruebas objetivas, encapsulamientos curriculares, aplicación de fórmulas sin sentido, mecánicas de pistas y pasos, aceptación de clasificaciones sin discusión. Cuando elaboran ensayos de propuestas de aula resultan complejas y encriptadas y, cuando se recuperan propuestas ya implementadas, además de ser obvias e infecundas, promueven muy bajos niveles de reflexión. ([Di Franco, 2018], pp.261-262).

Entonces, en este estudio, las lógicas identificadas como prefigurativas construyéndose desde el rol de estudiantes no se imponen a los/as alumnos/as cuando actúan bajo el rol de profesor, o, nunca llegaron a constituirse como relaciones propias o apropiadas.

Mas adelante, y en otro intento por seguir comprendiendo, nos ayudamos de las investigaciones de [Blanchard Laville, 2004] en sus trabajos en el campo del análisis clínico, en que focaliza en la relación del enseñante con el saber que enseña para comprender la dinámica transferencial de la clase: los núcleos duros que se evidencian en la persistencia en el no entendimiento, el investimento que hacen los alumnos del profesor como poseedor del saber, el deseo de enseñar, el deseo de aprender, la manipulación de los fenómenos de autoridad. En sus elaboraciones señala que la relación con el conocimiento de un sujeto es un proceso de producción de saber para pensar y para actuar. Para la comprensión de tales procesos es necesario que el sujeto actualice las relaciones que establece en situaciones concretas de desempeño profesional. Tales procesos, de contratransferencia, no se los considera de persona a persona sino, como un médico y su paciente, en una situación profesional. Blanchard Laville propone hacer análisis contratransferenciales a partir de lo enunciado por el docente, del discurso pronunciado, de sus producciones, para poder reflexionar acerca de los modos en que el docente se ubica con respecto a esos enunciados de saber y en qué lugar pone a los alumnos.

De regreso al estudio descripto más arriba, no se pudo dejar de advertir la fuerza con que cada residente termina significando un referente de particulares relaciones con el saber, que se registran con recurrencia en las diferentes actuaciones de la primera y segunda residencia. En las referencias de la investigadora y el análisis de los procesos de contratransferencia, la hipótesis indica que “en el vínculo que el docente establecerá con los alumnos para relacionarlos con el saber revelará su propia relación con el saber que enseña” ([Blanchard Laville, 2004], p. 81), a la vez que se fragua una especie de firma profesional “que es precisamente la manera en la que él se relaciona con el saber y el lugar, o los lugares en los que pone al alumno, y esta organización topológica singular pertenece sólo al docente” (p. 62). De ese modo, nuestras conclusiones provisionales a partir del análisis de casos tomados de los dispositivos residenciales, en que las lógicas con el saber como estudiantes no son las relaciones que se proponen cuando actúan bajo el rol de profesores, vienen a reforzar que son marcas del juego de mediaciones que promueve el docente de la formación en esa cátedra. Luego, lo que las/os residentes proponen para el aula, diferente, revelaría sus propias relaciones, Por otra parte, del estudio a partir de casos grupales, las lógicas identificadas desarrolladas por un mismo residente en el rol de profesor, permiten describir esas firmas profesionales singulares que se sostienen en diferentes prácticas y señalarían rasgos de sus particulares relaciones con el saber. Entonces, en un análisis como en el otro, en el trabajo realizado por el docente y en el lugar que pone a las/os alumnos en esa tarea, se puede analizar su propia relación con el saber, la puesta en escena de sus propias mediaciones. Esto tiene muchas implicaciones en la formación de profesorado, en el juego de anticipaciones y en las actuaciones mismas de las prácticas profesionales, a la hora de analizar esas atmósferas transferenciales que se generan. Como expresa [Planas, 2011], las distancias entre lo que se piensa que se hace y lo que se piensa que se debería hacer; y agregaríamos, entre lo que se piensa que se debería enseñar, lo que se piensa que se enseña y lo que se enseña y se aprende, siguen aportándonos señales que resulta indispensable seguir analizando.

3.5. Reflexiones provisionales. En este recorrido desde algunas reflexiones que resultan medulares a este equipo, recuperamos documentos que vienen explicitando la importancia y gravitación curricular del Campo de las Prácticas en el entorno nacional. El cuestionamiento acerca de qué es lo propio permite caracterizaciones desde las últimas formulaciones de los planes de estudio como uno de los cuatro campos que organizan la carrera de profesorado, bajo unos criterios de intensidad de la formación práctica entre los cinco elementos que la delimitan, las prácticas docentes en su complejidad y multidimensionalidad entre sus finalidades, y la explicitación de que los campos de la formación delimitan configuraciones epistemológicas particulares. Los archivos de experiencias curriculares y extracurriculares contribuyen en la configuración de sentidos propios. Desde los trabajos de las/os estudiantes recuperamos la importancia en la confirmación misma de las alternativas educativas que las mediaciones docentes habilitan, en las vinculaciones directas con los saberes de la matemática, en la identificación de cuáles y qué tan restringidos son los espacios decisionales que quedan para las/os alumnas/os o qué tipo de intervenciones se promueven (de producción, de reproducción, de innovación, de intercambio, de validación). Del estudio acerca de las prácticas de estudiantes en el rol de alumnos de la formación y en el rol de profesoras/es en aulas de secundaria en un tiempo sincrónico, construimos análisis en tanto campo prefigurativo y de contratranferencias. Y muchos nuevos interrogantes se generan a medida que trabajamos en el campo.

Desde estos caminos y posicionamientos depositamos la confianza y la convicción en unas consideraciones finales que no podrían tener significados acabados, refieren a estudios basados en prácticas intensivas –en tanto el/la practicante se responsabiliza de las actividades que implican profesionalmente que otras/os aprendan- cuya potencialidad está en la posibilidad de constituirse en reflexiones, haceres y saberes de alto valor formativo.

4. Bibliografía

[Bernstein, 1989] B Bernstein. *Clases, código y control.* Morata, 1989.

[Blanchard Laville, 2004] C. Blanchard Laville. *Saber y relación pedagógica.* UBA y Ediciones Novedades Educativas, 2004.

[C.E. del C.I.N., 2013] Comité Ejecutivo del Consejo Interuniversitario Nacional. *CE 856-13 Asuntos Académicos. Profesorados Universitarios.* Resolución. Mayo de 2013.

[Cañada, 2019] D. Cañada. "Las posibilidades relacionales con el conocimiento en prácticas educativas mediadas por juegos". En: *XXIV Jornadas de Investigación de la Facultad de Ciencias Humanas.* Universidad Nacional de La Pampa. Oct. de 2019.

[CUCEN, 2018] CUCEN. "Taller sobre Formación Disciplinar Específica y PPD en los Profesorados Universitarios de Ciencias Exactas y Naturales". En: *Libro de resúmenes.* Universidad Nacional de San Luis. 2018.

[Di Franco, 2011] M.G. Di Franco, S. Siderac y N. B. Di Franco. "El Campo de las Prácticas Docentes como una experiencia de praxis prefigurativa". En: *II Jornadas Internacionales: Fronteras, Ciudadanía y Conformación de Espacios en el Cono Sur* (2011). Universidad Nacional de Río Cuarto.

[Di Franco, 2018] N. Di Franco. *Relaciones con el saber en las prácticas de formación del Profesorado de Matemática.* EdUNLPam, 2018. isbn: 978-950-863-346-0.

[Di Franco, 2020a] M.G. Di Franco, S. Siderac y N. B. Di Franco. "El currículum universitario como proyecto político para una mayor justicia entre saberes". En: *Anuario de la Facultad de Ciencias Humanas UNLPam, Vol. 16, Núm. 16 (2019)* (2020), págs. 1-19. issn: 2314-3983.

[Di Franco, 2020b] N. Di Franco, N. Ferreyra y W. Uribe. "Prácticas de Saber, una configuración topológica singular de contratransferencia". En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, ALME 33* (2020). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., México, D.F., págs. 653-662. ISSN: 2448-6469.

[Gallardo, 2021] E. C. Gallardo y R. M. Landeros. "La identidad heteroglósica como herramienta verbal-ideológica de análisis del discurso dialógico". En: *Dialogía: revista de lingüística, literatura y cultura* 15 (2021), págs. 33-18.

[Laborda Caffarone, 2020] M. Laborda Caffarone. "La tecnología en las relaciones con el saber matemático en las prácticas educativas del profesorado". En: *VII Jornadas del Campo de las Prácticas de los Profesorados de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam* (2020). UNLPam.

[Laborda Caffarone, 2021] M. Laborda Caffarone. "El impacto de la tecnología en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática". En: *II Simposio de Educación Matemática Virtual –II SEM V–* (2021). Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Luján.

[Lapasta, 2018] L. Lapasta. "Experiencias Curriculares y extracurriculares para la construcción de la Práctica Profesional Docente en la formación de profesores universitarios de Ciencias Exactas y Naturales". En: *Taller sobre Formación Disciplinar Específica y PPD en los Profesorados Universitarios de Ciencias Exactas y Naturales* (2018). CUCEN. Universidad Nacional de San Luis.

[Mendoza Virgili, 2020a] D. C. Mendoza Virgili. "Los juegos en entornos virtuales en las Prácticas Educativas de Matemática". En: Amerindia, 2020. Cap. Los sentidos de las mediaciones lúdicas, tecnológicas y experimentales en las Prácticas Educativas en Matemática: entre las herramientas, las prácticas de inercia y las innovaciones declarativas, págs. 232-253. ISBN: 978-987-1082-93-3.

[Mendoza Virgili, 2020b] D. C. Mendoza Virgili. "Los sentidos de las prácticas educativas en contextos de enseñanza remota (a veces virtual) en matemática". En: *XLIII Reunión de Educación Matemática de la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina -virtUMA 2020-* (2020).

[Ouviña, 2011] H. Ouviña. "La pedagogía prefigurativa en el joven Gramsci. Una aproximación a la teoría y práctica de la educación futura". En: *Gramsci y la educación: pedagogía de la praxis y políticas culturales en América Latina* (2011). Noveduc.

[Planas, 2011] N. Planas. "Buenas Prácticas en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria y bachillerato". En: *J. M. Goñi (Coord.). Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas* (2011). Graó, págs. 57-157.

[Sousa Santos, 2006] B. Sousa Santos. *Renovar la teoría crítica y reinventar la emancipación social.* CLACSO. 2006.

[Sousa Santos, 2018] B. Sousa Santos. "Introducción a las Epistemologías del Sur". En: *Menesses, M.P. Bidaseca, K.(coords.) Epistemologías del Sur* (2018). CLACSO/Coímbra: CES.

(1,2) Universidad Nacional de La Pampa
Email address, corresponding author: [1]difranconb@gmail.com

IDENTIFICACIÓN DE HERRAMIENTAS DE GEOGEBRA EMPLEADAS EN CONSTRUCCIONES DE RECTÁNGULO

MAGALI FREYRE[1], MARCELA GÖTTE, AND ANA MARÍA MÁNTICA

Resumen. Se presentan avances de una investigación que tiene como objetivo estudiar la vinculación entre construcciones de una figura geométrica con GeoGebra, propiedades empleadas en las mismas y su definición. Se propone a estudiantes avanzados de profesorado en matemática construir un rectángulo con GeoGebra de tres maneras distintas, explicitar las propiedades empleadas en cada construcción y la definición de rectángulo considerada. En una segunda etapa, se realiza una entrevista semiestructurada por medio de la plataforma Zoom en la que se presentan las tres construcciones de rectángulo realizadas por otro grupo para ser analizadas. En este trabajo se presenta el análisis de lo producido durante la entrevista a un grupo de dos estudiantes en relación con la identificación de herramientas empleadas. Se trata de una investigación cualitativa interactiva. Se cuenta con el video de la entrevista generado por la plataforma de videoconferencias. Las estudiantes observan las denominaciones de los objetos e interrogan a las construcciones a partir de las funciones disponibles de GeoGebra. Recurren a construir nuevos objetos que posibiliten, acudiendo a propiedades geométricas, determinar características de la figura construida. Se refieren a la función protocolo de construcción luego de las intervenciones de la entrevistadora. Resulta interesante que se propongan tareas que no solo impliquen que se extraiga información de construcciones, acudiendo a distintas funciones de GeoGebra, sino que se reflexione acerca de las potencialidades del protocolo de construcción, sus características y la necesidad de su enseñanza.

1. Introducción

Se presentan avances de una investigación que tiene como objetivo estudiar la vinculación entre construcciones de una figura geométrica con GeoGebra, propiedades empleadas en las mismas y su definición.

Horzum y Ünlü [Horzum, 2017] sostienen que en los programas de profesorado de matemática los contenidos deben estructurarse en torno a los objetivos de adquirir conocimiento y habilidades que permitan entender y tomar ventajas de las oportunidades que ofrece la tecnología para la enseñanza. El aprendizaje de conceptos relacionados a figuras geométricas con software de geometría dinámica (SGD) es considerablemente distinto a lo que se puede hacer sin computadoras. Por esto resulta relevante que futuros profesores de matemática diseñen propuestas mediadas por GeoGebra y lo usen para resolver actividades en sus clases.

Se propone a estudiantes avanzados de profesorado en matemática que construyan un rectángulo con GeoGebra de tres maneras distintas y que expliciten las propiedades empleadas en cada construcción y la definición de rectángulo considerada. En una segunda etapa, se realiza una entrevista semiestructurada por medio de la plataforma Zoom en la que se presentan las tres construcciones de rectángulo realizadas por otro grupo y se solicita en primera instancia a los estudiantes entrevistados que determinen las herramientas empleadas en cada construcción. Se presenta el análisis de lo realizado por las estudiantes en la entrevista en relación con la identificación de herramientas empleadas.

Como afirman Sánchez y Prieto [Sánchez, 2019], la explicación de las técnicas de construcción posibilita que se comprendan las mismas, proceso que es favorecido a través del diálogo acerca de las acciones con el software que materializan la técnica. De esta manera, la identificación de los pasos de construcción y las interacciones en torno a los mismos se considera fundamental para la identificación de propiedades geométricas empleadas.

2. Requisitos previos

Las potencialidades del trabajo con SGD resultan de especial interés para estudiantes de profesorados y profesores de matemática. Novembre, Nicodemo y Coll [Novembre, 2015] sostienen que la incorporación de tecnología debe provocar rupturas en el quehacer matemático de la escuela ya que .[es] posible abordar nuevos problemas matemáticos, con sus consecuentes nuevos conocimientos y saberes, y sus nuevas –y muchas veces, desconocidas– prácticas y tareas"(p.23). Los docentes pueden utilizar tecnologías digitales, en este caso GeoGebra, que enriquezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos. Itzcovich [Itzcovich, 2020] resalta que GeoGebra permite representar a los objetos geométricos de manera diferente a la tradicional con lápiz y papel, obteniendo aportes distintos. Así, no cambian las propiedades de los objetos geométricos, lo que cambia es el modo de acceder a las relaciones que los caracterizan.

La presente es una investigación cualitativa interactiva (McMillan y Schumacher [McMillan, 2005]). Los sujetos de estudio son estudiantes avanzadas de profesorado en matemática, quienes tienen aprobadas tres asignaturas referidas a geometría en las que se trabaja especialmente con GeoGebra en distintas vistas y haciendo uso del arrastre de objetos libres como característica relacionada al dinamismo en el software, en la formulación y validación de conjeturas.

Las estrategias para la recogida de datos son observaciones, entrevistas y artefactos para el análisis (archivos digitales y grabaciones de audio y video de las producciones de las estudiantes). Particularmente, para el análisis que se presenta se cuenta con el video de la entrevista generado por la plataforma de videoconferencias.

3. Desarrollo

Al comienzo de la entrevista, la entrevistadora expone en la pantalla las construcciones de rectángulo a analizar, con las vistas gráfica y algebraica habilitadas. Los elementos en la vista algebraica se presentan según el orden de construcción. Se aclara a las estudiantes que pueden solicitar que se realice cualquier acción sobre el archivo. Sin embargo, en un primer momento solo perciben las construcciones a través de la observación de los dibujos en la pantalla y de las denominaciones de los elementos en las distintas vistas activas. No sugieren la realización de ninguna acción. Analizan las denominaciones de los objetos construidos y manifiestan que el símbolo ' en algunos puntos puede denotar que son generados a partir de una simetría.

En una de las construcciones dudan acerca de la construcción de un punto G. Para determinar si dicho punto representa un objeto libre o dependiente, acuden a la vista algebraica del software y analizan sus coordenadas. Una de las estudiantes afirma que el hecho de que el punto no posee coordenadas enteras puede denotar que se trata de un objeto libre, aunque esto no es correcto. En la construcción pueden encontrarse también los puntos E y F que son vértices del rectángulo. Las estudiantes se cuestionan si el triángulo EFG es isósceles, por lo que deciden utilizar herramientas disponibles en GeoGebra para interrogar a la construcción. Trazan el triángulo con la herramienta Polígono, determinan el punto medio de EF con la herramienta Medio o centro y luego emplean la herramienta Recta perpendicular para trazar una recta perpendicular al segmento EF por el punto medio. Las estudiantes observan que esta recta no pasa por el punto G, por lo que concluyen que el triángulo EFG no es isósceles. Esto ilustra el empleo de propiedades geométricas que subyacen en la utilización de las herramientas seleccionadas, cuestión que es resaltada en el estudio de Sánchez y Prieto [Sánchez, 2019].

Cabe destacar que el hecho de solo observar las construcciones y las denominaciones de los objetos en las distintas vistas no les permite identificar con claridad los pasos de construcción y evidencian dudas sobre algunos de ellos, aunque nombran algunas herramientas empleadas.

El protocolo de construcción de GeoGebra es una función que permite revisar los pasos llevados a cabo en la realización de una construcción.

Las intervenciones de la entrevistadora promueven que las estudiantes soliciten que se abra el protocolo de construcción de GeoGebra. Las estudiantes refieren a la existencia de dicho protocolo, aunque afirman no recordar cómo se denomina dicha función del SGD.

Tal como afirma Itzcovich [Itzcovich, 2020], la información que devuelve GeoGebra, a partir de una actividad intencional que fomente la discusión entre las decisiones que se toman y lo que ocurre con el software, permite que se continúe pensando en dichas relaciones.

Las estudiantes realizan primero observación en las tres construcciones y luego analizan sus respectivos protocolos de construcción. De la revisión del protocolo de cada construcción logran identificar las herramientas utilizadas y compararlas con las nombradas previamente a partir de la mera observación, identificando que en algunos casos no coinciden. Esto da relevancia al protocolo de construcción que ofrece el SGD y a las distintas vistas que permiten observar diferentes representaciones de los objetos construidos.

Itzcovich y Murúa [Itzcovich, 2016] se cuestionan al respecto de las construcciones con GeoGebra si las herramientas de este SGD, al ser portadoras de conocimiento geométrico favorecen "...el paso del control de las propiedades a través de la percepción y los instrumentos a un control por medio de las definiciones, propiedades y deducciones"(p.75). Asumen que la actividad de construir en SGD posibilita bajo ciertas condiciones un estudio de las figuras en cuanto al conjunto de las relaciones que las caracterizan. Por esta razón resulta importante hacer énfasis en las relaciones que caracterizan cada dibujo-GeoGebra, más allá de los procedimientos utilizados. Itzcovich [Itzcovich, 2020] sostiene que son los conocimientos disponibles los que comandan la identificación e interpretación de la información que puede extraerse de las figuras construidas. De esta manera, se puede interrogar a las figuras construidas posibilitando que se identifiquen ciertas relaciones presentes.

Los sujetos de estudio en este caso analizan las figuras construidas con el objetivo de identificar las herramientas empleadas. Observan las denominaciones de los objetos e interrogan a las construcciones a partir de las funciones disponibles. Si bien en primer lugar solo realizan observación, esto no alcanza para asegurar con certeza qué herramientas se emplean. Acuden a construir nuevos objetos que posibiliten, acudiendo a propiedades geométricas, determinar características de la figura construida. No se refieren en primera instancia a la función protocolo de construcción, lo que podría haber permitido la identificación de herramientas empleadas con mayor facilidad. Interrogan a la construcción a partir del protocolo de construcción a partir de intervenciones de la entrevistadora. Resulta interesante por esto la propuesta de tareas a estudiantes de profesorado que no solo impliquen que se extraiga información de construcciones, acudiendo a distintas funciones de GeoGebra, sino que se reflexione acerca de las potencialidades del protocolo de construcción, sus características y la necesidad de su enseñanza.

4. Bibliografía

[Horzum, 2017] T. Horzum y M. Ünlü. "Pre-service mathematics teachers' views about GeoGebra and its use". En: *Acta Didáctica Napocensia* 10.3 (2017), págs. 77-89.

[Itzcovich, 2016] H. Itzcovich y R. Murúa. "GeoGebra: nuevas preguntas sobre viejas tareas". En: *Yupana* 10 (2016), págs. 71-85.

[Itzcovich, 2020] H. Itzcovich. *Taller Esp. Horacio Itzcovich.* Archivo de video. Departamento de Matemática - UNS, oct. de 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=5a1Y4Aj7fdM.

[McMillan, 2005] J. McMillan y S. Schumacher. *Investigación educativa. 5° edición.* Pearson. Addison Wesley, Madrid., 2005.

[Novembre, 2015] A. Novembre, M. Nicodemo y P. Coll. *Matemática y TIC - Orientaciones para la enseñanza.* ANSES, Buenos Aires, 2015.

[Sánchez, 2019] I. Sánchez y J. Prieto. "Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra". En: *PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática* 14.1 (2019), págs. 55-83.

(1) Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral

Email address, corresponding author: [1]magali.freyre@gmail.com

PROBLEMAS CON LOS PROBLEMAS

ESTELA SONIA ALIENDRO[1], ABEL CARMOONA[2], AND CEFERINA SÁNCHEZ ARROYO

Resumen. La presentación que realizamos en esta ocasión es una reflexión de la que derivamos –a modo de ejemplo– una pequeña propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la escuela primaria. Dicha reflexión se origina en reiteradas experiencias de consultoría que nos vinculan directamente con las prácticas docentes usadas en muchas de las instituciones responsables de la primera enseñanza.

Hemos podido advertir que, a pesar de la bibliografía didáctica actualizada para docentes, las recomendaciones metodológicas emanadas de las autoridades educativas y las capacitaciones para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática por medio de la resolución de problemas, no se ha logrado modificar –en la mayoría de las aulas– la práctica docente tradicional. Las causas son diversas porque el modelo tradicional es el que el docente ha experimentado en su época de aprendiz y trata de imitar a sus propios enseñantes y porque la resolución de problemas (como disparadores de la construcción del conocimiento matemático) toma mucho tiempo. También se confunde a menudo, el término problema con una formulación que no es otra cosa que un ejercicio con enunciado.

1. Introducción

Desde que la humanidad descubrió su potencialidad para coadyuvar al desarrollo científico y tecnológico de la civilización, la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la educación sistematizada ha estado presente en la historia de la educación. Y ello no es algo de los últimos siglos sino que ya en la vieja Babilonia esta presencia ha quedado registrada en algunas tablillas que muestran series de ejercicios destinados a los aprendices de escribas. A partir de allí, los diferentes registros históricos evidencian a la ejercitación en las distintas ramas de la disciplina como medio de aprendizaje. Y en los manuales y textos actuales también la encontramos.

En contraposición observamos que como ciencia, la Matemática -–al igual que cualquier otra disciplina– ha seguido desde sus inicios, una evolución nunca detenida. Los diferentes documentos históricos así lo demuestran.

¿Es que la didáctica de la matemática no ha evolucionado? Por supuesto que sí y muchas disciplinas en relación con las teorías de aprendizaje, del desarrollo de la psiquis humana y la historia de la educación, han permitido significativos avances en la didáctica de la matemática,especialmente en las últimas décadas. Incluso esta evolución ha generado una importante influencia en las didácticas de otras disciplinas. El constructivismo y el cognitivismo han impulsado la resolución de problemas como metodología adecuada para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. No se trata sólo de una propuesta de los didactas sino que los lineamientos de la bibliografía destinada a docentes y estudiantes y las recomendaciones que aparecen en las bases curriculares ministeriales, la recomiendan específicamente. También la encontramos en los proyectos áulicos que elaboran los docentes.

Pero la situación de la enseñanza y el aprendizaje en nuestro medio no parece haber evolucionado sino más bien percibimos una manifiesta involución. Nuestra reflexión, en esta oportunidad, nos ha llevado a considerar que existen problemas con los problemas.

2. Requisitos previos

La comunicación está dirigida a todos los asistentes que tengan interés en el tema.

3. Desarrollo

En primer lugar recurrimos al Diccionario de la Real Academia Española para leer el significado de la palabra *problema*. Y hemos encontrado distintas acepciones, entre ellas la que nos dice que se trata del "planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos" que se aproxima adecuadamente al contexto en que trabajamos. Esto es, la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas.

La palabra *problema* como tantas otras de la lengua (que se considera viva) ha evolucionado. Lo ha hecho en la sociedad y particularmente, para el tema de nuestro interés, lo generaron los grandes teóricos de la didáctica de la matemática. Con sólo, considerar la definición de Regine Douady, sabemos que en la clase de matemática un problema se caracteriza por reunir varias condiciones:

a) El enunciado *tiene sentido* en el campo de conocimientos del alumno.
b) El alumno debe *poder considerar lo que puede ser una respuesta* al problema.

c) Teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede emprender un procedimiento. Pero *la respuesta no es evidente*.
d) *El problema es rico*. Lo que significa que la red de los conceptos implicados es bastante importante, pero no demasiado para que el alumno pueda administrar su complejidad.
e) *El problema está abierto* por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantear o por la variedad de estrategias que puede poner en marcha y por la incertidumbre que se desprende con respecto al alumno.

Las condiciones c), d), e), *eliminan un recorte del problema en preguntas demasiado pequeñas*.

f) *El problema puede formularse, por lo menos, en dos marcos diferentes*.
g) El conocimiento buscado por el aprendizaje es el medio científico de responder eficazmente al problema. *Es un instrumento adaptado*.

Nuestros docentes han asistido a numerosas capacitaciones en las que los conceptos involucrados en la caracterización precedente han sido trabajados. Y la pregunta es si al interior de la clase de matemática la noción de problema ha manifestado la evolución según la teoría didáctica de la matemática. Estamos convencidos de que -en general- no ha sido así. ¿Cómo lo sabemos? Simple y sencillamente por las numerosas consultas que recibimos de los estudiantes y sus progenitores o tutores. Y también por nuestra experiencia como formadores de profesores para la enseñanza primaria en particular. Como bien sabemos, los futuros profesores deben hacer una residencia en la cual deben dar clases y muchos de los profesores a cargo de las aulas han resistido la aplicación de metodologías innovadoras, en particular la de construcción de conocimientos matemáticos por medio la resolución de problemas. Se aferran a los métodos tradicionales.

Además percibimos que en las aulas la expresión *problema* tiene el mismo significado que hemos vivenciado en nuestras épocas escolares. En nuestro tránsito escolar nos enseñaban conceptos y sus propiedades, los que eran enunciados y ejemplificados por nuestros enseñantes. Luego nos proponían ejercicios y problemas de aplicación de esos conceptos y propiedades, para fijar los procedimientos adecuados. Dichos problemas no involucraban las características antes descriptas sino sólo pedían utilizar adecuadamente los datos numéricos para usar los algoritmos y lograr un resultado que era la solución del problema. O sea que no era un problema sino un ejercicio más solamente que con un enunciado.

En las teorías didácticas actuales se supone que la solución al problema (que el aprendiz encuentra por su propia búsqueda de estrategias adecuadas) es el conocimiento que se pretende enseñar.

¿Por qué nuestros enseñantes no aplican la estrategia didáctica de construcción del conocimiento por medio de la resolución de problemas? Hay muchas respuestas. Pero destacamos las siguientes.

- En primer lugar, porque no han experimentado el aprendizaje de la matemática de manera constructivista.
- En segundo lugar, porque repiten las prácticas áulicas de sus propios docentes.
- En tercer lugar, porque lleva demasiado tiempo en la clase. Y esto nos recuerda que socialmente se reconoce como estudiante destacado de matemática al que es capaz de calcular con rapidez. La habilidad de calcular con eficiencia no es, actualmente, una habilidad matemática importante porque la evolución tecnológica nos ha liberado de la responsabilidad de convertirnos en calculadores eficientes. La sociedad requiere en nuestros tiempos, resolvedores eficientes de problemas.

¿Cómo lograr que las situaciones problemáticas lleguen a las aulas para superar la mera ejercitación? Tal vez lo mejor sea reemplazar la palabra problema por la expresión desafío, de modo que el estudiante encuentre una respuesta sin tener una "receta previa".

A continuación proponemos ejemplos, con contenidos de aritmética y de geometría.

3.1. Ejemplo de desafío en aritmética: factores y múltiplos. Para poder distinguirlo de la enseñanza tradicional, recordemos que en ella el docente define y ejemplifica los conceptos de factor (o divisor) y de múltiplo de un número. Los problemas que se proponen son al estilo de los siguientes:

a) ¿Cuáles son los factores de 72?
b) Mi hermano dice que 8 es un divisor común de 24 y 36? ¿Es verdad?
c) ¿Entre cuantas personas se pueden repartir 84 caramelos?

Desafío. No se cita ningún tema que ponga en evidencia que el enseñante se propone dar una clase de matemática. Sólo se requiere que los estudiantes sepan sumar, restar, multiplicar y dividir. El material adecuado podría ser una bolsa que contiene bolillas numeradas (como las de la lotería) o simplemente papelitos con los números del 1 al 90.

Cada aprendiz extrae de la bolsa una bolilla numerada. El número indica la cantidad de piedritas o porotos o maíces con los cuales debe armar grupos que tengan la misma cantidad de elementos. Habrá dos tipos de ganadores: uno, el que pueda generar la mayor cantidad de diferentes agrupaciones; el otro, el que solamente pueda generar dos agrupaciones.

De hecho, después de experimentar y realizar cálculos (algunos que sirvan y otros que no) cada estudiante obtendrá respuestas diferentes. Todas serán discutibles y defendibles. Cada uno de los resultados logrados son los divisores o factores del número extraído de la bolsa y que recién el enseñante nombrará como tales. Y también podrá decir que el número extraído de la bolsa es múltiplo de los factores correspondientes. Respecto de los otros posibles ganadores (los que solamente pudieron encontrar dos tipos de agrupaciones) los resultados obtenidos corresponden a los números primos, los que serán definidos recién en este momento.

3.2. Ejemplo de desafío geométrico.

Geometría con cuadriláteros. Tradicionalmente este tema comienza con la definición de cuadrilátero (siempre convexo) y sus elementos. Luego se trabaja con la clasificación (paralelogramos y no paralelogramos, con sus distintos tipos) y las correspondientes propiedades de los elementos de cada tipo. Todo esto para ser memorizado. La ejercitación se vincula generalmente con las construcciones. Y los ejercicios propuestos son del estilo:

a) ¿Cuáles son las propiedades del rectángulo, del rombo, del cuadrado, ... ?

b) Construir un cuadrado con útiles de geometría a partir del lado o de una diagonal.

Desafío. Supuesto que los estudiantes conozcan la clasificación y elementos de los cuadriláteros, se puede pensar en el siguiente desafío para descubrir propiedades de las diagonales. No conocen las propiedades de ángulos interiores ni de diagonales.

Dividir la clase en grupos y entregar a cada grupo dos varillas o tiras que corresponderán a las diagonales de un cuadrilátero. Para algunos grupos esas varillas o tiras tendrán diferentes medidas y para los restantes, la medida será la misma. El desafío será preguntar sobre cómo se deben acomodar dichas varillas para que correspondan a las diagonales de cada tipo de cuadrilátero. Descubrirán que con diagonales del mismo tamaño no es posible generar, por ejemplo romboides. Sí será posible obtener rectángulos o trapecios, entre otros. Y enunciarán las condiciones necesarias para cada caso. Lo mismo ocurrirá con varillas de distinto tamaño: habrá soluciones posibles para algunos cuadriláteros, como el rombo pero no para el cuadrado. También lograrán describir las condiciones para obtener cada figura. Esta descripción permitirá al docente formalizar las propiedades de cada tipo de cuadrilátero

Se puede ir más allá: preguntar si existe algún tipo de cuadrilátero en el cual las diagonales no se corten mutuamente y cómo sería una representación del mismo.

3.3. Ejemplo de desafío con fracciones. En la enseñanza tradicional, un cuadrado se divide, ya sea por sus bases medias o por sus diagonales en partes iguales. Ellas generan subdivisiones cuyas cantidades corresponden a fracciones cuyos denominadores son las potencias de dos.

Desafío. Encontrar subdivisiones de un cuadrado que también sean cuadrados (o cuadrados y rectángulos, o cuadrados, rectángulos y triángulos, pero que no todos iguales). También las fracciones correspondientes a cada subdivisión tienen como denominador una potencia de dos pero puede haber varias diferentes. Ello permite dar un primer paso para la comparación de fracciones y sus equivalencias.

4. Conclusiones

Según hemos podido observar, a pesar de la bibliografía didáctica para docentes, las recomendaciones metodológicas y las capacitaciones, la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática por medio de la resolución de problemas no se ha logrado implementar en la mayoría de las aulas. Sus causas son diversas porque se sigue aplicando el modelo tradicional que es el que el docente ha experimentado en su época de aprendiz, porque se copia ese modelo que usaron los enseñantes de los actuales profesores y porque se confunde a menudo, el término problema con la expresión ejercicio con enunciado. Por ello proponemos favorecer al cambio de las prácticas docentes por un modelo que centre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la propuesta de desafíos que convoquen al estudiante a desentrañarlos.

5. Bibliografía

[Brousseau, 1993] G. Brousseau. *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática.* Editado por I. Dotti y J. Vargas. Universidad Nacional de Córdoba, 1993.

[Chevallard, 1997] Y. Chevallard, M. Bosch y J. Gascón. *Estudiar Matemática, El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* ICE - Horsori, 1997.

[Itzcovich, 2005] H. Itzcovich. *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría, de las construcciones a las demostraciones.* Libros del Zorzal, 2005.

[Mathiaud, 1996] M. Mathiaud. *Enseñar a Partir de Actividades, Enseñanza de la Matemática, Relación entre Saberes, Programas y Prácticas.* Ed. E. Barbin y R. Douady. Point-a-Mouson, 1996.

[Prov. de Salta, 2010] Provincia de Salta. *Diseño curricular para la educación primaria.* Diseño curricular. 2010.

[Villella, 1999] J. Villella. "Sugerencias para la clase de matemática". Buenos Aires. Aique. 1999.

(2) Universidad Nacional de Salta
Email address, corresponding author: [1]estelasoniaaliendro@gmail.com

UNSa Universidad Nacional de Salta

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Salta