

FUNCIONES GENERATRICES: APLICACIONES EN DIFERENTES PROBLEMAS MATEMÁTICOS

RESUMEN. Las funciones generatrices son herramientas matemáticas esenciales que encapsulan secuencias de números mediante series formales, simplificando cálculos y la resolución de problemas de recurrencia, además de facilitar la identificación de patrones. Su importancia radica en su capacidad para proporcionar una visión unificada y compacta de sucesiones completas, lo que resulta crucial en diversas áreas de las matemáticas, como la combinatoria, la estadística, la teoría de números y el análisis complejo.

El desarrollo de la teoría de funciones generatrices ha avanzado significativamente en las últimas décadas, integrándose de manera más profunda en la matemática discreta y el análisis. Estos avances han permitido la resolución de problemas antes inabordables y la simplificación de teorías complejas. La investigación contemporánea continúa expandiendo sus aplicaciones, descubriendo nuevas conexiones y métodos de utilización.

A través de este taller se espera que los participantes logren fortalecer el manejo y profundizar contenidos vinculados con las sucesiones, expresiones algebraicas y el razonamiento combinatorio, desarrollando habilidades analíticas y algebraicas avanzadas. Se pretende con las actividades propuestas, destacar el trascendental aporte que las funciones generatrices realizan con relación a la comprensión de complejas estructuras matemáticas, como así también la intervención que tiene en diferentes campos de investigación.

1. INTRODUCCIÓN

Las funciones generatrices (FG) han sido una herramienta esencial en matemáticas desde el siglo XVIII, cuando Pierre-Simon Laplace introdujo las series generatrices como un medio para resolver problemas en teoría de probabilidades. A lo largo de los siglos XIX y XX, matemáticos como Leonhard Euler y George Pólya ampliaron su uso a la teoría de números y la combinatoria. Actualmente se las implementa en temas de ciencias de la computación y matemáticas discretas, desarrollos impulsados principalmente por Herbert S. Wilf. Hoy en día, las funciones generatrices son fundamentales en diversas áreas de la matemática y la ciencia, demostrando su versatilidad y potencia en la resolución de problemas complejos.

Estas funciones (FG) son herramientas matemáticas potentes que encapsulan secuencias de números en términos de series formales, facilitando los cálculos y la resolución de problemas de recurrencia como así también la identificación de patrones. Por otro lado cabe destacar las conexiones interdisciplinarias presentes entre esta herramienta y múltiples campos como la combinatoria, la estadística, la teoría de números y el análisis complejo entre otros.

En general, no nos interesa un termino particular $a_n \in \mathbb{R}$, sino toda la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si queremos aprender sobre la sucesión en sí, una posibilidad, en muchos casos la mejor posible, es aprehenderla mediante un único objeto, una función generatriz [Wilf,1994].

Desarrollar un taller abarcando los principios sobre los cuales se pensó y se extrapoló la teoría de funciones generatrices, beneficia a la comunidad educativa, estudiantes, docentes e investigadores; más aún, mostrar los alcances e implementaciones de ésta, en diferentes áreas matemática despierta y motiva nuevas expectativas y desafíos para seguir explorando y profundizando.

2. CONTENIDOS

Este taller esta diseñado para ser implementado en 4 módulos diferentes interrelacionados. Cada uno de ellos pretende involucrarse con áreas distintas de la matemática.

■ Módulo 1: Combinatoria y Funciones Generatrices

Introducción a las FG: polinomios generadores. Aplicaciones y orígenes en la combinatoria. Generación de fórmulas para problemas de partición. Tipos de funciones generatrices (FG): ordinarias y exponenciales.

■ **Módulo 2: Ecuaciones de Recurrencia y Funciones Generatrices**

Manipulación algebraica de FG, linealidad, convolución. Solución de ecuaciones de recurrencia simples. Implementación en problemas de probabilidad y matemática discreta.[Vilenkin,2010].

■ **Módulo 3: Transformaciones de Funciones Generatrices**

Métodos de Inversión.Transformaciones y operaciones con FG. Derivación de FG. Translaciones y escalamiento. Método de fracciones simples.[Wilf,1994] y [Kaufmann,1968].

■ **Módulo 4: Funciones Generatrices y Probabilidad**

Distribuciones Discretas. Uso de FG para estudiar distribuciones de probabilidad binomial, Poisson, geométrica. Número de Stirling. Aplicaciones en la factorización y series de Dirichlet, [Riordan,1978].

3. REQUISITOS PREVIOS

Este taller esta destinado a estudiantes de profesorados, licenciaturas o carreras afines, como así también a docentes que tengan conocimiento de un curso básico de análisis matemático y combinatoria.

4. OBJETIVOS

A través de este dispositivo pedagógico se pretende:

- Desarrollar habilidades analíticas y algebraicas en el manejo e interpretación de series formales.
- Lograr integrar esta teoría a temas del análisis, probabilidades, matemática discreta y análisis complejo.
- Abordar resolución de problemas que evidencian la ventaja y eficiencia a través de la utilización de esta teoría.
- Promover una comprensión interdisciplinaria con respecto al impacto e importancia en diferentes campos científicos.
- Incentivar tanto a estudiantes como a docentes a explorar nuevas áreas de investigación y a aplicar estas técnicas en sus propios proyectos.
- Brindar a los docentes conocimientos avanzados que podrán integrar en su práctica pedagógica, enriqueciendo su enseñanza y proporcionando a sus estudiantes una formación más completa y robusta.

5. ACTIVIDADES

5.1. Actividades Previas. Primeramente informaremos a los participantes los objetivos, los contenidos del taller y la metodología de trabajo de cada encuentro. Este detalle se encontrará en formato digital como en audiovisual adjuntado en el curso de la plataforma e-learning designada. Se adjuntará un listado con la bibliografía recomendada, como así también notas con problemas sugeridos referentes a los contenidos previos en combinatoria y análisis.

Con el objeto de generar un espacio de integración, trabajo colaborativo y aprendizaje a través de resolución de problemas, se implementarán grupos de trabajos los cuales deberán resolver y enviar la solución para un problema propuesto para cada módulo. Por otro lado cada participante de manera individual deberá completar un cuestionario teórico.

Propondremos una lista de actividades sugeridas, no obligatorias que estarán directamente vinculadas con la temática planificada para cada encuentro. Esto estará disponible al comienzo del taller, de manera que cada participante disponga del tiempo suficiente para pensar y probablemente consultar alguna duda o inquietud con relación a los mismos.

Con relación a la temática abordada en esta primera instancia asincrónica, se desarrollará un repaso de los temas preliminares y se abordará los temas del módulo 1, los cuales están estrechamente vinculados con los contenidos previos. Se dispondrá de notas teóricas, material audiovisual como así también de las slice utilizadas.

Propuesta de Problemas Previos

1. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x + y + z + w = 20$ dadas por enteros positivos, es decir con $x, y, z, w \in \mathbb{Z}_{>0}$? ¿Cuántas por enteros no negativos ($x, y, z, w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)?

2. Probar que el número de soluciones en enteros no negativos es el mismo para las dos ecuaciones siguientes:

$$x_1 + x + 2 + \cdots + x_6 = 8 \quad \text{y} \quad x_1 + x + 2 + \cdots + x_9 = 5$$

3. ¿De cuántas maneras se pueden alinear 10 letras A, 6 letras B y 5 letras C en una fila de modo tal que no haya dos letras B contiguas?
4. Hallar el número de soluciones a la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ en enteros positivos tales que $x_5 > 12$ y $x_4 > 7$.
5. Hallar el número de maneras de cambiar un billete de 10.000 pesos en billetes de menor denominación, esto es, billetes de 1000, 2000, 100, 200 y 500 pesos.

5.2. Primera Hora y Media Sincrónica. Comenzaremos por presentar raudamente las actividades planteadas y el contenido propuesto en la instancia asincrónica previa. Resolveremos los ejercicios de mayor dificultad como ser el problema propuesto (2) o (4) (ecuaciones con condiciones restringidas y combinatoria). Posteriormente se trabajará sobre polinomios generadores y su origen en la combinatoria, para dar luego lugar a las funciones generatrices y al problema de partición de un entero, ver [Niven,1995]. Esto demandará 1 hs aproximadamente. El tiempo restante se abordará el contenido del módulo 2. Trabajaremos sobre las operaciones de linealidad y convolución de las FG y su utilización para resolver ecuaciones de recurrencia. Se resolverán ejercicios para facilitar su mecánica de utilización.

5.3. Primeras Tres Horas Entre Clases. En esta instancia del taller, los participantes trabajarán de manera asincrónica, colaborativa y grupal sobre diferentes problemas propuestos pero de manera enfocada en los que deberán enviar por la plataforma. Aquí también deberán realizar una encuesta virtual sobre contenidos teóricos visto en clase.

Propuesta de Problemas Primer Encuentro

1. Calcular la función generatriz $f(x)$ proveniente de la sucesión $a_n = 2^n$.
2. Encuentra el coeficiente de x^{21} en la expresión $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^8$.
3. Encuentra el coeficiente de x^2 en la expresión $x(1+x)^{43}(2-x)^5$.
4. Considere la sucesión de números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para cada $n \geq 2$. Demostrar que su función generatriz es $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
5. Resolver las siguientes recursiones usando funciones generatrices.
 - a) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n > 1$.
 - b) $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$ y $a_n = a_{n1} + a_{n2} + 2a_{n3}$, para $n > 2$.

5.4. Segundas Hora y Media Sincrónicas. En este segundo encuentro se pretende profundizar sobre el manejo algebraico de las FG como así también de las transformaciones que ellas involucran. Retomaremos sobre las operaciones del módulo 2 (linealidad y convolución) para profundizar con los temas del módulo 3.

La implementación de funciones generatrices en problemas matemáticos implica varios pasos metodológicos que son fundamentales para su correcta aplicación y comprensión, estos son:

1. Definición y Formulación: Es necesario entender cómo definir una función generatriz para una secuencia dada y formularla correctamente.
2. Manipulación Algebraica: Aprender técnicas para manipular y simplificar las funciones generatrices, como operaciones con series formales.
3. Identificación de Patrones: Utilizar funciones generatrices para identificar patrones y relaciones en secuencias y series. Utilización de relaciones combinatorias.
4. Resolución de Problemas: Aplicar las funciones generatrices para resolver problemas específicos, como ecuaciones de recurrencia y problemas de enumeración.

5.5. Segundas Tres Horas Entre Clases. En esta instancia, de manera similar a la planteada en 5.3, los participantes trabajarán de manera asincrónica, colaborativa y grupal sobre diferentes problemas propuestos para el segundo encuentro.

Propuesta de Problemas Segundo Encuentro

1. Usar una función generatriz para encontrar el número de formas de escribir 15 como la suma de 5 números naturales.
2. Queremos encontrar las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que verifican

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

3. Utilizando transformaciones sobre funciones generatrices comprobar que

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \quad \text{y que} \quad \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) x^n$$

5.6. Terceras Hora y Media Sincrónicas. En este último encuentro se profundizará sobre las aplicaciones de las funciones generatrices en diferentes problemas, como son probabilidades y combinatoria sobre grafos (particiones de conjuntos no vacíos). Se resolverán ejercicios de mayor dificultad como los propuestos a continuación donde se involucran propiedades relacionadas a los números de Stirling, distribución binomial, números de Bell, entre otros.

Propuesta de Problemas Tercer Encuentro-Integradores

1. Calcular cuántas formas hay de dividir 7 elementos en 4 subconjuntos no vacíos utilizando los números de Stirling de segunda especie.
2. Usar los números de Bell para encontrar el número de particiones de un conjunto de 6 elementos.
3. Si $a_n(x)$ esta definida por

$$a_n(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k$$

usando la notación $D = \frac{d}{dx}$, mostrar que

$$a_n(x) = n x a_{n-1}(x) + x(1-x) D a_{n-1}(x)$$

y verifica los valores

$$a_0 = 1$$

$$a_2(x) = x + x^2$$

$$a_1 = x$$

$$a_3(x) = x + 4x^2 + x^3$$

5.7. Evaluación Final. Para comprometer de manera activa a los participantes, la evaluación será de manera continua a lo largo del taller, para ello se implementarán cuestionarios virtuales individuales referentes a contenidos esenciales teóricos al finalizar cada encuentro. Por otro lado también se dejará un listado de problemas para abordar durante el trabajo asincrónico de manera grupal, que deberá ser cargado a la plataforma. El último encuentro evaluativo tendrá dos ejercicios que deberán realizar de manera grupal. También aquí tendrán la posibilidad de completar las actividades anteriores pendientes en la plataforma.

BIBLIOGRAFÍA

- [Betancourt,2010] SIXTO R. BETANCOURT. *Estructuras Combinatorias y Análisis Asintótico*. Trabajo Especial de Grado de Licenciado en Matemática - Universidad Central de Venezuela, 2010.
- [Kaufmann,1968] A. KAUFMANN. *Introduction a la combinatoire en vue des applications*. Editorial DUNOD - Paris, 1968.
- [Niven,1995] I. NIVEN. *Matemática de las opciones o cómo contar sin contar*. Red Olímpica. Argentina,1995.
- [Riordan,1978] JHON RIORDAN. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Princeton University Press. Princeton, New York,1978.
- [Stanley,2012] RICHARD P. STANLEY. *Enumerative Combinatorics, Volume I*. (Second edition). Cambridge Studies in Advanced Mathematics. New York,2012.

- [Vilenkin,2010] NAÚM YÁKOVLEVICH VILENKIN. *¿De cuántas formas? Combinatoria*. Editorial MIR- Moscú, 1972.
- [Wilf,1994] HERBERT S. WILF. *Generatingfunctionology* (Second Edition) (1994) Academic Press.