Finales del siglo XIX: A medida que la teoría de conjuntos se desarrollaba, surgieron paradojas y contradicciones. El problema más famoso fue la Paradoja de Russell, formulada por Bertrand Russell en 1901. Esta paradoja señaló una aparente contradicción en el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Estas paradojas plantearon la necesidad de establecer fundamentos lógicos más rigurosos para la teoría de conjuntos.

Primeras décadas del siglo XX: Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel fueron dos matemáticos clave en la formulación de un sistema axiomático sólido para la teoría de conjuntos. En 1908, Zermelo propuso los primeros axiomas para establecer una base coherente para los conjuntos. Luego, en la década de 1920, Fraenkel y Zermelo desarrollaron conjuntamente el sistema de axiomas Zermelo-Fraenkel (ZFC), que se convirtió en el marco estándar de la teoría de conjuntos.

Mediados del siglo XX: Durante este período, la teoría de conjuntos se convirtió en una disciplina central en las matemáticas y se utilizaron sus conceptos y técnicas para desarrollar numerosas ramas de la disciplina. Sin embargo, también surgieron problemas adicionales. Uno de los desafíos más importantes fue el llamado "problema de la cardinalidad del continuo" propuesto por Cantor, que trata de determinar si hay algún conjunto que tenga una cardinalidad estrictamente mayor que los números naturales pero menor que los números reales.

Siglo XXI: La teoría de conjuntos sigue siendo un área activa de investigación matemática. Además de los problemas clásicos, han surgido nuevos desafíos, como los estudios sobre conjuntos grandes y estructuras axiomáticas alternativas, como la teoría de conjuntos constructivista y la teoría de conjuntos no estándar.

3.2 Primeros axiomas

En nuestro traba jo suponemos que los lectores están familiarizados con la lógica matemática de primer orden pero si no es el caso tenemos un apéndice basado en el texto de Margaris [61]. El texto base es Cignoli [62]

Expresar los axiomas en lenguaje simbólico tiene varias ventajas y proporciona claridad, precisión y generalidad en el estudio de la teoría de conjuntos. A continuación, se explica la importancia de expresar los axiomas en lenguaje simbólico, su traducción al lenguaje coloquial y la ejemplificación, así como las deducciones que se pueden obtener a partir de estos primeros axiomas:

Claridad y precisión: El lenguaje simbólico utilizado en los axiomas permite una expresión precisa de las ideas matemáticas. Al utilizar símbolos y notaciones formales, se evita la ambigüedad y se logra una mayor claridad en las definiciones y enunciados matemáticos.

Traducción al lenguaje coloquial: Para facilitar la comprensión, los axiomas se pueden traducir al lenguaje coloquial, es decir, al lenguaje cotidiano utilizado en la comunicación. Esto ayuda a relacionar los conceptos matemáticos con situaciones más familiares, lo que puede facilitar su comprensión para aquellos que no están familiarizados con el lenguaje simbólico.

Ejemplificación: Para ilustrar los axiomas, se pueden proporcionar ejemplos concretos que muestren cómo se aplican los conceptos y las reglas establecidas por los axiomas. Estos ejemplos pueden ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender mejor los conceptos abstractos presentados en los axiomas.

Generalidad y aplicabilidad: Al expresar los axiomas en lenguaje simbólico, se logra una mayor generalidad y aplicabilidad. Los axiomas no están limitados a situaciones específicas, sino que establecen principios generales que se pueden aplicar en diversos contextos matemáticos. Esto permite una mayor flexibilidad y extensión del conocimiento matemático.

Deducciones: A partir de los primeros axiomas, se pueden realizar deducciones y demostraciones para obtener nuevos resultados matemáticos. Utilizando reglas lógicas y los axiomas como premisas, se pueden construir argumentos que conducen a conclusiones válidas. Estas deducciones permiten desarrollar teoremas y resultados más complejos basados en los axiomas iniciales.

Listaremos los primeros axiomas dando una explicación breve de su sentido.

Axioma de extensionalidad

$$\forall x \forall y (\forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y)$$

Este axioma es fundamental en la teoría de conjuntos, ya que garantiza que las propiedades de igualdad y equivalencia se mantengan en el contexto de conjuntos. Al afirmar que dos conjuntos son iguales