

Высшее профессиональное образование

Учебник

Б. Б. Серапинас

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ



Естественные
науки

УДК 912(075.8)

ББК 26.17я73

C32

Рецензенты:

д-р геогр. наук, заслуж. деятель науки РФ, проф. *A. M. Берлянт*
(зав. кафедрой картографии и геоинформатики географического
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова);

д-р геогр. наук, заслуж. деятель науки РФ, проф. *Ю. Ф. Книжников*
(зав. лабораторией аэрокосмических методов кафедры картографии
и геоинформатики географического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова);
д-р геогр. наук, проф. *Г. Д. Курошев*
(зав. кафедрой картографии факультета географии и геэкологии
Санкт-Петербургского государственного университета)

Серапинас Б. Б.

C32 Математическая картография: Учебник для вузов / Балис
Балио Серапинас. — М.: Издательский центр «Академия»,
2005. — 336 с.

ISBN 5-7695-2131-7

В учебнике дана современная трактовка математической картографии с учетом новейших достижений в области компьютеризации картографической науки. Освещены все темы, касающиеся создания, анализа и применения картографических проекций. Использованы наглядные методы визуализации и анализа искажений в проекциях как локального, так и регионального уровней. Рассмотрены проекции, применяемые для создания географических карт разного пространственного охвата — от планеты до локальных территорий.

Для студентов географических и геоэкологических специальностей вузов. Может быть использован аспирантами географических, геологических и геолого-геофизических специальностей.

УДК 912(075.8)

ББК 26.17я73

Учебное издание

Серапинас Балис Балио

Математическая картография

Учебник

Редактор *Л. В. Честная*. Технический редактор *Н. И. Горбачева*.

Компьютерная верстка: *Л. А. Смирнова*.

Корректоры *В. А. Жилкина, Г. Н. Петрова*

Изд. № А-1402-1. Подписано в печать 20.04.2005. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2.

Печать офсетная. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 21,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 14726.

Издательский центр «Академия».

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.д.004796.07.04 от 20.07.2004.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 360. Тел./факс: (095) 334-8337, 330-1092.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат».

410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

*Оригинал-макет данного издания является собственностью Издательского центра
«Академия», и его воспроизведение любым способом без согласия правообладателя запрещается*

© Серапинас Б.Б., 2005

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2005

© Оформление. Издательский центр «Академия», 2005

ISBN 5-7695-2131-7

Так как географические карты сделались уже предметом повседневного обихода, то сведения о разного рода «карто-графических проекциях», придуманных для изображения сферической поверхности на плоскости, полезны каждому, а многим и необходимы.

В. Витковский. Картографія

ВВЕДЕНИЕ

Специфической особенностью географических карт является их математически определенное построение. Математическая определенность достигается путем опоры на *геодезическую основу* карт и с помощью *математической основы* карт. Благодаря этому размещение картографических образов на карте однозначно соответствует расположению отображаемых ими объектов и явлений в пространстве.

Под геодезической основой понимается совокупность геодезических данных, необходимых для создания карт. Подробно эти вопросы рассматриваются в геодезических дисциплинах. В учебнике подобные темы будут затронуты лишь по мере необходимости.

Математическую основу карт изучает картографическая дисциплина — *математическая картография*. В ней разрабатываются теория и методы создания картографических проекций, анализируются искажения и оцениваются достоинства проекции применительно к различным картам. Это важно знать при выборе проекций для общегеографических и тематических карт, а также при выполнении исследований по картам, преобразовании изображений из одной проекции в другую, решении картометрических задач и ином использовании карт.

Главной частью математической картографии является теория картографических проекций. Создание картографических проекций началось в глубокой древности. Этому способствовало представление о шарообразности Земли. Значительный вклад внесли древнегреческие ученые. Мыслитель Фалес Милетский (625—547 до н. э.) применил для карты звездного неба гномоническую проекцию. Эратосфен Киренский (276—194 до н. э.) построил карту, изобразив на ней известную тогда грекам сушу в равнопромежуточной цилиндрической проекции. Математику и астроному Аполлонию Пергскому (ок. 260—170 до н. э.) была известна ортографическая проекция. Выдающийся астроном Гиппарх (160—125 до н. э.) использовал ортографическую и стереографическую проекции, ввел географические координаты и первым указал на то, что для точных карт нужны опорные пункты с измеренными широтами и долготами. Клавдий Птолемей (ок. 90—ок. 160) построил псевдоконическую проекцию, применял другие проекции и разработал способ построения конической проекции.

В XI в. Бируни, работавший в Хорезме, создал глобулярную проекцию. В XV в. Генрих-Мореплаватель возродил квадратную цилиндрическую проекцию. В связи с поиском западного морского пути в Индию Паоло Тосканелли построил карту в псевдоцилиндрической проекции. Выдающийся картограф Г. Меркатор (Герард Кремер, 1512—1594) применил для карт мира равноугольную цилиндрическую проекцию, которая впоследствии была названа его именем.

В XVII—XVIII вв. происходит бурное развитие геодезических наук. Проводимые обширные геодезические измерения и топографические съемки способствовали развитию теории картографических проекций. Немецкий ученый И. Г. Ламберт (1728—1777) построил общую теорию равноугольных проекций. Член Петербургской академии наук Л. Эйлер (1707—1783) исследовал равновеликие проекции. Выдающийся немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855) разработал общую теорию отображения одной поверхности на другую. Французский ученый Н. А. Тиссо (1824—1897) изложил в законченном виде общую теорию искажений в картографических проекциях. В 1856 г. выдающийся российский математик П. Л. Чебышев (1821—1894) высказал весьма важную теорему о «наивыгоднейшей» проекции.

Значительный вклад в математическую картографию внесли известные российские ученые В. В. Витковский (1856—1924), Ф. Н. Красовский (1879—1948), В. В. Каврайский (1884—1954). Дальнейшее развитие математической картографии связано с именами таких ученых, как Н. А. Урмаев, Г. А. Мещеряков, Г. А. Гинзбург, Л. М. Бугаевский, Л. А. Вахрамеева и др.

Настоящий учебник написан на основе многолетнего опыта преподавания математической картографии на кафедре картографии и геоинформатики географического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. При подготовке материала учитывались особенности использования картографических проекций в современных условиях компьютеризации и применения геоинформационных технологий картографирования. В учебнике в качестве основного картографируемого тела рассматривается Земля, однако все результаты легко могут быть приложены и к другим телам космического пространства. При изложении курса основное внимание уделялось содержательной его части. Сохранены лишь те математические выкладки, без которых изложение сути математической картографии невозможно. Приведенные формулы при изучении курса можно рассматривать как вспомогательный справочный материал.

Автор искренне благодарит всех сотрудников кафедры картографии и геоинформатики географического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова и ее заведующего проф. А. М. Берлянта за участие в обсуждении рукописи и за поддержку ее публикации.

ГЛАВА 1

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

Картография заимствует из геодезии прежде всего данные о математических моделях картографируемых тел. Параметры, характеризующие форму и размеры этих тел, позволяют вычислять длины дуг параллелей, длины дуг меридианов, площади трапеций и выполнять необходимые расчеты, связанные с построением проекций и созданием карт. Используются также геодезические системы координат. Большое значение имеют пункты геодезических сетей, являющиеся хранителями координат точек местности. На основе этих пунктов выполняются топографические съемки и создаются топографические карты. В свою очередь на базе топографических карт создаются многие тематические карты.

Фигуры картографируемых тел, за исключением астероидов, ядер комет и спутников некоторых планет, обычно могут быть аппроксимированы математически правильными телами. Чаще всего ими являются шар или эллипсоид вращения. Поверхность такого тела называют *поверхностью относимости* или *референц-поверхностью*. Именно поверхность относимости в выбранной картографической проекции проектируется на плоскость.

Трехосный эллипсоид для картографирования используется редко, так как его применение сопряжено с неоправданно сложными расчетами. Обычно его применяют лишь для картографирования некоторых спутников планет, форма которых наиболее близка к трехосному эллипсоиду. Таковым, например, является спутник Марса Фобос. Что касается тел исключительно неправильной формы, например астероидов, то в настоящее время наблюдается тенденция визуализации на картах их реальных поверхностей.

Положение точки на картографируемой модели определяется географическими координатами — широтой и долготой. Широты отсчитывают от 0 на экваторе до $+90^\circ$ на Северном полюсе и до -90° на Южном полюсе. Счет долгот ведут от 0 на начальном меридиане до $+180^\circ$ в восточном направлении и до -180° в западном направлении. В дальнейшем используется именно эта система счета долгот. Долготы также иногда отсчитывают от 0 до 360° в восточном или западном направлении. Международный астрономический союз (МАС) рекомендует планетографические долготы считать в направлении, противоположном вращению небесного тела.

В случае шаровой модели используются сферические широты и долготы, а в случае эллипсоида вращения — эллипсоидальные координаты. Эллипсоидальные координаты в свою очередь делятся на геоцентрические, отнесенные к центру эллипса, и геодезические — широты и долготы, отнесенные к нормали, проведенной в данной точке эллипса. Основными являются геодезические координаты. Другие системы координат, применяемые в математической картографии, будут рассмотрены по мере необходимости в соответствующих подразделах.

§ 1. ШАРООБРАЗНАЯ МОДЕЛЬ КАРТОГРАФИРУЕМЫХ ТЕЛ

Многие картографируемые тела могут быть аппроксимированы шаром. Например, если изготовить глобус Земли с экваториальным диаметром 1 м, то его полярный диаметр будет короче всего на 3,4 мм. Размеры неровностей на поверхности многих планет обычно значительно меньше диаметров их сфер. Так, в случае Земли максимальные величины параметров рельефа картографируемой поверхности, высоты гор и глубины впадин незначительны по сравнению с размерами самой планеты. Если вновь земной диаметр уменьшить до 1 м, то получится шар с довольно гладкой поверхностью. Наибольшая царапина на нем, Марианский желоб, будет не глубже 0,9 мм, а высочайшая вершина на Земле, Эверест, образует выступ высотой менее 0,7 мм.

Форма и размеры шара определяются его радиусом. В табл. 1 приведены значения радиусов шара для планет Солнечной системы.

Таблица 1
Радиусы и полуоси планет Солнечной системы

Планета	Радиус шара R , км	Экваториальный радиус a , км	Полярный радиус b , км
Меркурий	2439,7	2439,7	2439,7
Венера	6051,8	6051,8	6051,8
Земля	6371,00	6378,14	6356,75
Марс	3390	3397	3375
Юпитер	69 911	71 492	66 854
Сатурн	58 232	60 268	54 364
Уран	25 362	25 559	24 973
Нептун	24 622	24 764	24 341
Плутон	1195	1195	1195

Диаметр шара, совмещаемый с осью вращения Земли или соответственно другого космического тела, принимается за полярную ось вращения. Плоскость, проходящая через центр шара перпендикулярно его оси вращения, образует **плоскость экватора**. Основными координатами, определяющими положение точки на шаре, являются сферические широта и долгота (рис. 1). **Сферическая широта** ϕ — угол, образованный нормалью к поверхности шара в данной точке Q и плоскостью экватора. Иначе, так как нормаль к сфере совпадает с ее радиусом, широта равна центральному углу между радиусом шара, направленным на заданную точку, и плоскостью экватора. Плоскость экватора пересекает поверхность шара по **экватору**. Система плоскостей, параллельных экватору, пересекая поверхность шара, образует на нем **параллели**. Плоскость любого **меридиана** проходит через ось вращения шара. **Сферическая долгота** λ определяется двугранным углом между плоскостями меридиана данной точки и начального (Гринвичского) меридиана. Сетка меридианов и параллелей на шаре создает **географическую сетку**.

Дуги параллелей и меридианов. На сфере параллель является дугой окружности. Ее радиус (r) зависит от широты и равен

$$r = R \cos \phi.$$

Длина дуги параллели (s) между двумя точками с географическими долготами λ_1 и λ_2 равна

$$s = r(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Разность долгот выражена в радианах.

Меридианы — также дуги окружностей, радиус которых равен радиусу шара R . Для длины дуги меридиана (S) между экватором и параллелью широты ϕ , выраженной в радианах, имеем

$$S = R\phi.$$

Площадь сферической трапеции.

В математической картографии при построении так называемых равновеликих проекций используется площадь сферической трапеции, которая на шаре ограничена экватором, параллелью заданной широты ϕ и двумя меридианами, разность долгот которых равна одному радиану. Значение этой площади (P) определяется формулой

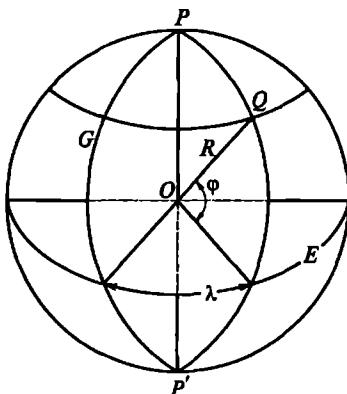


Рис. 1. Географические координаты точек шара радиусом R :

ϕ — сферическая широта; λ — сферическая долгота; P, P' — географические полюса; G — Гринвичский (начальный) меридиан; E — экватор

$$P = R^2 \sin \varphi.$$

Шаровая модель достаточно проста и имеет важное практическое значение. Эту модель применяют при мелкомасштабном картографировании Земли. Она также используется в качестве промежуточной поверхности, на которую предварительно отображают земной эллипсоид при создании картографических проекций так называемым способом «двойного проектирования». Поверхность сферы используется также в качестве исходной при картографировании тел исключительно сложной формы. В этом случае в модель такого тела вписывается сфера и от нее ведется отсчет высот картографируемой поверхности.

§ 2. СФЕРОИДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАРТОГРАФИРУЕМЫХ ТЕЛ

Более точной моделью массивного тела, вращающегося вокруг неизменной оси, является *сфериод* — фигура, которую принял бы тело, находясь только под влиянием сил взаимного тяготения его частиц и центробежной силы вращения. Простейшим из сфероидов является эллипсоид вращения с малым сжатием вдоль полярной оси.

|| Эллипсоид вращения — геометрическое тело, которое образуется при вращении эллипса вокруг его малой оси.

Если сферу определяет лишь один параметр — радиус, то эллипсоид вращения характеризуют два параметра. Основным параметром является большая экваториальная полуось эллипсоида a . В качестве второго параметра чаще всего используют либо полярное сжатие α , либо первый (e), либо второй (e') эксцентриситеты меридионального эллипса, либо малую полярную полуось b . Упомянутые величины взаимосвязаны следующим образом:

$$\alpha = (a - b)/a; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad (e')^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2};$$
$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2}; \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}; \quad e^2 = \alpha(2 - \alpha).$$

Значения параметров эллипсоидов вращения для планет Солнечной системы указаны в табл. 1, а для распространенных земных эллипсоидов — в табл. 2.

Эти земные эллипсоиды вращения хорошо известны. По эллипсоиду *Деламбра* выведена длина метра, равная одной сорокамиллионной части длины Парижского меридиана, определенного по поручению Национального собрания Франции. Эллипсоид *Вальбека* в XIX в. применялся в России. Эллипсоид *Эйри*

Таблица 2

Основные земные эллипсоиды и их параметры

Эллипсоид	Год	Большая полуось a , м	Сжатие α
Деламбра	1800	6 375 653	1/334
Вальбека	1819	6 376 896	1/303
Эйри	1830	6 377 563	1/299,3250
Эвереста	1830	6 377 276	1/300,8017
Бесселя	1841	6 377 397	1/299,15
Кларка	1866	6 378 206	1/294,98
Кларка	1880	6 378 249	1/293,46
Хейфорда	1909	6 378 388	1/297
Красовского	1940	6 378 245	1/298,3
Австралийский	1965	6 378 160	1/298,25
GRS-67	1967	6 378 160	1/298,2472
WGS-72	1972	6 378 135	1/298,26
GRS-80	1979	6 378 137	1/298,25722
WGS-84	1984	6 378 137	1/298,25722
ПЗ-90	1990	6 378 136	1/298,25782

был введен в Великобритании, а эллипсоиды **Эвереста** использовались в Индии и других странах этого региона. Эллипсоид **Бесселя** применяли во многих странах Европы и Азии, в том числе до 1946 г. в СССР. В странах Северной и Центральной Америки вводился эллипсоид **Кларка** 1866 года. В некоторых странах Азии, Африки и Центральной Америки применялся эллипсоид Кларка 1880 года. Эллипсоид американского геодезиста **Хейфорда** в 1924 г. на конгрессе в Мадриде был провозглашен в качестве международного, применялся в ряде стран Европы, Азии и Южной Америки и даже в Антарктиде. Однако его размеры определены недостаточно точно, и он в современных условиях не может использоваться в качестве международного общеземного эллипсоида.

Эллипсоид **Красовского** был утвержден в СССР для геодезических и картографических работ. Расчет эллипсоида был выполнен в 1940 г. выдающимся ученым Ф. Н. Красовским (1878—1948) и его учеником А. А. Изотовым (1907—1988). Эллипсоид Красовского используют в России и в настоящее время.

Параметры эллипсоидов **GRS-67** и **WGS-72**, рекомендованные в 60—70-х годах международными астрономо-геодезическими организациями, применялись в Австралии, прилегающих

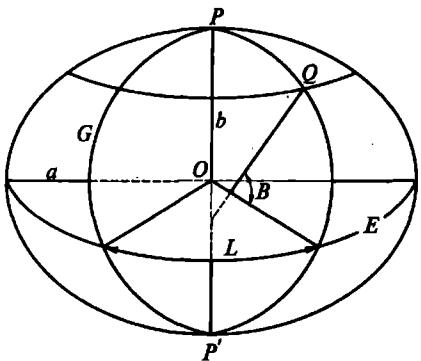


Рис. 2. Геодезические координаты точек эллипсоида вращения с полуосами a и b :

B — геодезическая широта; L — геодезическая долгота; P, P' — географические полюса; G — Гринвичский (начальный) меридиан; E — экватор

В России для решения задач, связанных с использованием космических аппаратов, применяется эллипсoid **ПЗ-90** [Параметры Земли, 1990].

Положение любой точки на эллипсоиде определяется геодезическими широтой и долготой (рис. 2). **Геодезическая широта** B — угол, образованный нормалью к поверхности земного эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора. **Геодезическая долгота** L — двугранный угол между плоскостями меридиана данной точки и начального меридиана.

Рассекая эллипсoid плоскостями, проходящими через полярную ось, получают меридианы, а плоскостями, проходящими перпендикулярно этой оси, — параллели. Экватор образуется сечением эллипсоида плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно полярной оси.

Сетка меридианов и параллелей на эллипсoidе формирует географическую сетку.

В отличие от шара эллипсoid вращения имеет несколько радиусов. Наиболее важными радиусами эллипсoidа вращения являются:

M — радиус кривизны меридиана;

N — радиус кривизны первого вертикала (радиус линии, получаемой сечением эллипсoidа плоскостью, проходящей через нормаль в данной точке и перпендикулярно плоскости меридиана);

к ней странах и в Южной Америке. Эти эллипсоиды представляют собой более ранние версии современных аналогичных вариантов.

В настоящее время параметры современной точности имеет эллипсoid системы **GRS-80** (Geodetic Reference System, 1980, — Геодезическая референцная система 1980 г.). На его основе созданы современные координатные системы Австралии, Европы, стран Северной и Центральной Америки. Эллипсoid **WGS-84** (World Geodetic System, 1984, — Мировая геодезическая система 1984 г.) получил мировое признание и распространение благодаря американской глобальной системе спутникового позиционирования GPS.

R — средний радиус кривизны линий, образованных сечениями эллипсоида всевозможными плоскостями, проходящими через нормаль в данной его точке;

r — радиус параллели.

Перечисленные радиусы вычисляются по следующим формулам:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}};$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}};$$

$$R = \sqrt{MN};$$

$$r = N \cos B.$$

Радиус меридиана применяется для вычисления длин дуг меридианов и нахождений широт по этим дугам. Радиус кривизны первого вертикала нужен для вычислений радиусов параллелей и средних радиусов. На полюсах радиусы $M = N$. На других широтах из всех радиусов наибольшим является N , а наименьшим — M . Поэтому радиусы меридиана и первого вертикала называют *главными радиусами* кривизны. Средний радиус кривизны R равен среднему геометрическому из значений главных радиусов кривизны. Средний радиус применяется в задачах, связанных с развертыванием поверхности эллипсоида на поверхность шара.

Дуги параллелей и меридианов. Параллель на эллипсоиде вращения является окружностью. Длина ее дуги (s) между двумя точками с долготами L_1 и L_2 равна произведению радиуса (r) параллели на разность долгот в радианах:

$$s = r(L_2 - L_1).$$

Меридиан представляет собой эллипс. Вычисления его длин дуг более сложны. Для дуги меридиана от экватора до параллели заданной широты B имеем

$$S = \int_0^B M dB.$$

Этот интеграл решают численными методами или разложением в ряд подынтегрального выражения.

В математической картографии вычисления длин дуг чаще всего связаны с построениями и преобразованиями картографических проекций эллипсоида Красовского. Для эллипсоида Красовского и широт, выраженных в радианах, формула принимает вид

$$S = 6367558,5 B - \sin B \cos B (32005,6 + 134,6 \sin^2 B).$$

Погрешность вычисления по этой формуле дуги S не превышает 0,2 м. Эта же формула используется и для вычисления последовательными приближениями широты B по значению дуги S . При этом в первом приближении принимается $B = \beta$, где

$$\beta = S/6367558,5.$$

Площадь сфероидической трапеции, ограниченной экватором, параллелью заданной широты B и двумя меридианами с разностью долгот в один радиан, вычисляется по одной из следующих формул:

$$P = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right);$$

$$P = b^2 \left(\sin B + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 B + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 B + \dots \right).$$

Наиболее точно фигуру Земли представляет трехосный эллипсоид. Однако в картографических работах трехосным эллипсоидом Земли пользуются сравнительно редко вследствие слабо выраженной трехосности и чрезвычайного усложнения расчетных формул.

§ 3. ЗАМЕНА ЭЛЛИПСОИДА ШАРОМ

Во всех случаях, когда точность позволяет, эллипсоид или его часть заменяют поверхностью шара. Такая замена особенно актуальна при мелкомасштабном картографировании. Кроме того, как уже отмечалось, в математической картографии применяется способ двойного проектирования, когда эллипсоид сначала проектируется на шар, а после этого шар отображается в заданной проекции на плоскость.

При проектировании эллипсоида на шар возникает задача выбора радиуса шара и способа перехода от широт B и долгот L эллипсоида к широтам ϕ и долготам λ шара. Обычно эллипсоид с шаром совмещают так, чтобы совпадали их центры, оси вращения и плоскости начальных меридианов. В этом случае плоскости экваторов и плоскости всех меридианов также совпадают, и долготы остаются неизменными:

$$\lambda = L.$$

Преобразование подлежат только широты. При этом их значения на полюсах и на экваторе остаются без изменений, и меняются тем сильнее, чем точки ближе к средним широтам. Значения сферических широт и выбор радиуса шара определяются способом отображения эллипсоида на шар. Существует несколько таких способов.

Сферическое отображение. В этом случае нормали в соответствующих точках сферы и эллипсоида полагаются взаимно параллельными. Поэтому текущие сферические и геодезические широты принимаются равными друг другу:

$$\phi = B.$$

Для небольших территорий радиус шара приравнивается среднему радиусу R в центральной точке карты. При замене всей планеты шаром ее радиус вычисляют как среднее арифметическое из следующих трех значений:

- радиуса шара, равного среднему из трех полуосей эллипсоида (двух экваториальных и одной полярной);
- радиуса шара, площадь поверхности которого равна площади поверхности эллипсоида;
- радиуса шара, объем которого равен объему эллипсоида.

Для Земли средний радиус шара $R = 6371$ км. Шар с таким радиусом по линейным размерам, площади поверхности и объему очень близок к земному эллипсоиду. На этом шаре дуга меридiana между экватором и полюсом на 5,6 км (0,05 %) длиннее, а дуга четверти экватора на 11,2 км (0,1 %) короче, чем на эллипсоиде вращения. Такие погрешности на мелкомасштабных географических картах никак не проявляются.

Равноугольное отображение. Углы с эллипсоида переносятся на шар без искажений. В способе Мольвейде (C. B. Mollweide, 1774—1825), предложенном в 1807 г., радиус шара приравнивается большой полуоси эллипсоида (a). Широты ϕ в радианах вычисляются по формуле

$$\begin{aligned}\phi &= B - \alpha \sin 2B + \beta \sin 4B; \\ \alpha &= \frac{e^2}{2} + \frac{5e^4}{24} + \frac{3e^6}{32} + \dots; \quad \beta = \frac{5e^4}{48} + \frac{7e^6}{80} + \dots\end{aligned}$$

Для эллипсоида Красовского после перевода в угловые секунды получают $\alpha = 692,234''$, $\beta = 0,963''$. Максимальное искажение длин образуется на полюсах и составляет 0,3 %. Наибольшая разность широт эллипсоида и шара имеет место на параллели 45° и составляет $11' 32,23''$. Это означает, что на шаре данная параллель по сравнению с ее положением на эллипсоиде смещается к экватору примерно на 21,4 км.

Равновеликое отображение. Площади объектов на шаре равны соответствующим площадям на эллипсоиде. Сферические широты в радианах вычисляются по формуле

$$\begin{aligned}\phi &= B - \alpha \sin 2B + \beta \sin 4B; \\ \alpha &= \frac{e^2}{2} + \frac{31e^4}{180} + \dots; \quad \beta = \frac{17e^4}{360} + \dots\end{aligned}$$

Для эллипсоида Красовского после перевода в угловые секунды получают $\alpha = 461,797''$, $\beta = 0,436''$. Радиус шара вычисляется из условия равенства площадей поверхностей шара и эллипсоида по формуле

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17e^4}{360} - \frac{201e^6}{9072} - \dots \right).$$

Для эллипса Красовского радиус такого шара составляет 6 371 116 м. Максимальные искажения длин и углов возникают в точках экватора и составляют соответственно 0,1 % и 3,8'. Наибольшие расхождения широт имеются на параллели 45° и равны 7' 43,8''. Эта параллель на шаре смещается в сторону экватора примерно на 14,3 км.

Равнопромежуточное отображение. Проектирование эллипсоида на шар может быть выполнено двояко: с сохранением длин меридианов или с сохранением длин параллелей.

Если длины меридианов на шаре остаются равными их значениям S на эллипсоиде, то сферические широты ϕ в радианах и радиус шара R вычисляются по следующим формулам:

$$\phi = S/R; \\ R = \frac{a}{1+n} \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \dots \right); \quad n = \frac{a-b}{a+b}.$$

В случае эллипса Красовского $R = 6\ 367\ 558,5$ м.

Если эллипсoid проектируется на шар так, что длины параллелей на шаре равняются длинам соответствующих параллелей на эллипсоиде, то радиус шара приравнивается большой полуоси (a) эллипса вращения, а сферические широты вычисляются по формуле

$$\operatorname{tg} \phi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B.$$

Величина смещения параллелей может служить своеобразным критерием, показывающим, при каких масштабах карт широты точек необходимо пересчитывать, а при каких это делать не следует.

Например, наибольшие смещения параллелей происходят при двух первых способах проектирования. В случае Земли, как уже отмечалось, они достигают 21,4 км. Так, на карте масштаба 1 : 20 000 000 это составляет 1,07 мм. Таким смещением линий, вероятно, можно пренебречь.

На мелкомасштабных картах, отображающих весь мир или значительные его части, искажения из-за замены эллипса шаром пренебрежимо малы по сравнению с искажениями, образующимися при переходе от сферической поверхности к плоскости. Например, на тематических картах мира для высшей школы

масштаба 1 : 15 000 000 экватор укорочен на 0,1 % по причине замены эллипсоида сферой и на 15,7 % из-за отображения сферы на плоскости.

§ 4. ОТОБРАЖЕНИЕ ШАРА НА ШАР

В некоторых случаях конструирования картографических проекций прибегают к отображению исходного шара, например земного, на другой промежуточный шар.

Примером специфического проектирования шара на шар может служить способ Гильберта (E. N. Gilbert), примененный для построения так называемой проекции «Двух миров» (рис. 3). Весь земной шар при условии равноугольности спроектирован на одно полушарие новой сферы. При этом широты и долготы вычисляются по формулам, в которых штрихом обозначены координаты для точек нового шара:

$$\lambda' = \lambda/2; \sin \phi' = \operatorname{tg} \phi/2.$$



Рис. 3. Весь земной шар отображен на одном полушарии

§ 5. ПОЛЯРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

На шаре вместо географических полюса, экватора и географической сетки меридианов и параллелей в ряде случаев удобно использовать сферические полярные координаты. Для этого на сфере выбирается точка, которая принимается за полюс полярной системы координат. Для краткости назовем его условным полюсом. Дуга большого круга на сфере, отстоящая от полюса на 90° , принимается за условный экватор. Относительно этого полюса и экватора строится новая сетка координатных линий, которые назовем условными параллелями и меридианами.

Для наглядности представим себе, что на глобус с географической сеткой натянута прозрачная сфера. На этой сфере также имеются полюс, экватор и построена географическая сетка меридианов и параллелей. Поворачивая прозрачную сферу, будем смещать ее полюс, сетку и экватор относительно географической сетки на глобусе. Теперь положение любой точки на глобусе можно определить новыми сферическими координатами: *условной широтой ϕ' и условной долготой λ'* , отсчитываемыми относительно сетки на прозрачной сфере.

Вместо условной широты используется также ее дополнение до прямого угла, называемое *зенитным расстоянием (Z)*. Если условная широта определяется углом между условным экватором и радиусом сферы, направленным на данную точку, то зенитное расстояние равно углу между этим радиусом и направлением на полюс полярной системы координат. Поэтому широта и зенитное расстояние всегда дополняют друг друга до прямого угла:

$$\phi + Z = \pi/2.$$

Каждая условная параллель соответствует постоянному значению зенитного расстояния. Ее иначе называют *альмукантаром* — линией равных зенитных расстояний. Каждый условный меридиан исходит из условного полюса под некоторым азимутом (a). Его называют *вертикалом*. Этот азимут можно интерпретировать как условную долготу или как величину, ее определяющую.

Сетку альмукантаров и вертикалов (условных параллелей и меридианов) можно рассматривать как смещенную сетку меридианов и параллелей, в которой географический полюс перемещен в положение полюса полярной сферической системы координат.

В зависимости от широты расположения условного полюса различают несколько систем координат:

- *нормальная система координат* — система полярных сферических координат, полюс которой совмещен с географическим полюсом;

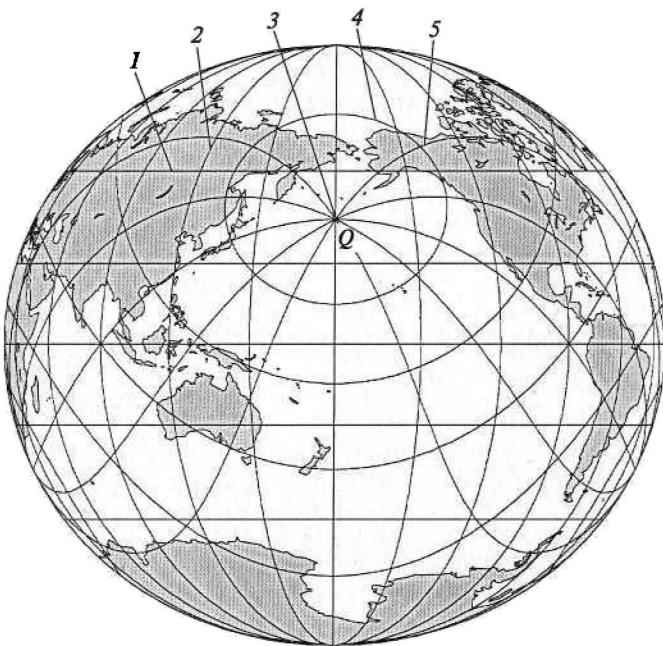


Рис. 4. Географическая сетка и вспомогательная сетка косой полярной системы координат:

1 — параллель; 2 — меридиан; 3 — полюс Q косой полярной системы координат (расположен на меридиане перемены дат и параллели широты 45°); 4 — альмукантарат; 5 — вертикаль

- **поперечная система координат** — система полярных сферических координат, полюс которой расположен на экваторе;
- **косая система координат** — система полярных сферических координат, полюс которой расположен между географическим полюсом и экватором.

Соответственно этому картографические проекции называют **нормальными, косыми или поперечными**.

Географическая сетка и сетка альмукантаратов и вертикалов (условных параллелей и меридианов) показаны на рис. 4.

Вычисления условной широты ϕ' и зенитного расстояния Z текущей точки по ее географическим широте ϕ и долготе λ , считаемой от среднего меридиана, когда широта условного полюса ϕ_0 , выполняются по формулам:

$$\sin \phi' = \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi \cos \lambda;$$

$$Z = \pi/2 - \phi'.$$

Азимут a текущего вертикала (условного меридиана) вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda}.$$

Для того чтобы правильно определить значение азимута, необходимо помнить о том, что в указанной формуле знак числителя соответствует знаку $\sin a$, а знак знаменателя — знаку $\cos a$. Поэтому при вычислении азимута следует пользоваться нижеуказанными правилами:

Знак		Азимут
числителя	знаменателя	
+	+	$\operatorname{arctg} a$
+	-	$\pi + \operatorname{arctg} a$
-	-	
-	+	$2\pi + \operatorname{arctg} a$

Иногда может возникнуть необходимость построить на карте смещенную картографическую сетку, т.е. сетку условных меридианов и параллелей.

Например, важно увидеть, как расположатся меридианы и параллели в случае, если географический полюс по тем или иным природным причинам изменит свое положение. Поэтому нужны формулы для вычисления географических широт и долгот текущих точек по заданным значениям их условных широт φ' и азимутов a . Для этого можно воспользоваться следующим.

Если на сфере географический и условный полюса поменять местами, то соответствующие сетки меридианов и параллелей также поменяются местами. Например, если на рис. 4 географический полюс поместить на место полюса полярной системы координат, то рисунок географической сетки примет такой же вид, какой имела вспомогательная сетка вертикалов и альмукантаротов. Поэтому для решения упомянутой выше задачи в приведенных формулах следует взаимно заменить широты φ и φ' , а также азимуты a и долготы λ .

В некоторых косых проекциях условный полюс располагают на продолжении среднего меридиана за географическим полюсом, т.е. на меридиане, сдвинутом на 180° .

Для вычисления $\varphi'(Z)$ и a вновь можно воспользоваться приведенными формулами, поменяв в них знаки перед членами, содержащими $\cos \lambda$, на противоположные. В этом случае азимут a определяет угол у условного полюса между направлениями на географический полюс и на текущую точку. Его можно интерпретировать как условную долготу данного условного меридиана.

Контрольные вопросы

- 1.** Что изучает математическая картография?
- 2.** Что понимается под геодезической основой карт?
- 3.** Какие геодезические элементы используются в математической картографии?
- 4.** Какие поверхности относимости используются для составления карт?
- 5.** Когда применяется шаровая модель Земли?
- 6.** Какие параметры определяют сфероидическую модель?
- 7.** Какие радиусы кривизны эллипсоида вращения используются при картографировании?
- 8.** Чем отличаются сферические долготы и широты от геодезических долгот и широт?
- 9.** Что понимается под термином «географическая сетка»?
- 10.** Как и для каких целей определяются длины дуг параллелей и меридианов на сфере и на эллипсоиде вращения?
- 11.** Для чего нужны площади сферических и сфероидических трапеций с разностью долгот в один радиан?
- 12.** С какой целью проектируется эллипсоид на шар?
- 13.** Почему при переходе с эллипсоида на шар долготы, как правило, не перевычисляются? В каких случаях и широты не перевычисляются?
- 14.** Как получена проекция Гильберта «Двух миров»?
- 15.** С какой целью выбираются условный полюс, условный экватор и строится сетка альмукантаротов и вертикалов?
- 16.** Где располагается условный полюс при нормальной, косой и поперечной системах полярных сферических координат?
- 17.** Как взаимосвязаны зенитное расстояние и условная широта?
- 18.** Какие нужны данные, чтобы для текущей точки вычислить зенитное расстояние альмукантара и азимут вертикала?

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ КАРТ

Математическую основу карт составляет совокупность *математических элементов*.

Математический элемент — это элемент, применяемый при построении или использовании карты, устанавливающий с математической определенностью пространственную или временную связь между моделью картографирования объективной реальности и картой.

К математическим элементам карты относятся ее масштабы, картографическая проекция, картографическая сетка, координатная сетка, если она строится, рамки карты, средний меридиан проекции, вдоль которого обычно ориентируется одна из осей прямоугольной системы координат. К математическим элементам карты можно также отнести *опорные точки* — объекты местности, отраженные на карте, координаты которых известны или могут быть определены как по карте, так и на местности. Опорными точками являются геодезические пункты, а также четкие, легко опознаваемые на карте объекты, например перекрестки дорог, характерные изгибы береговых линий, острова, озера и др. Совокупность опорных точек позволяет установить математически определенную связь карты с отображаемой местностью.

§ 6. МАСШТАБЫ КАРТЫ

Различают масштабы главный, частный и временной.

Главный масштаб длин — отношение, показывающее, во сколько раз уменьшены линейные размеры эллипсоида или шара при его изображении на карте.

Он определяет линейные размеры модели, т.е. размеры того глобуса, который отображается на карте. Главный масштаб подписывается на карте. Однако нет проекций, в которых главный масштаб сохранялся бы на всей карте — он остается неизменным лишь в отдельных ее точках или линиях.

Параллели, длины которых на карте изображены в главном масштабе, называют *главными параллелями*. Они имеют большое значение при построении некоторых проекций.

Главный масштаб площадей — отношение, показывающее, во сколько раз уменьшены площадные размеры поверхности эллипсоида или шара при их изображении на карте.

Главный масштаб площадей равен квадрату главного масштаба длин. На карте он не подписывается. В общем случае на карте он сохраняется также лишь в отдельных точках или линиях. Однако в частном случае существуют так называемые равновеликие проекции, главный масштаб площадей которых остается неизменным на всей карте. В этом принципиальное отличие главного масштаба площадей от главного масштаба длин.

Главный масштаб является очень важным математическим элементом. Он является функцией назначения карты и ее обеспеченности фактическим материалом. От главного масштаба зависят пространственный охват, объем содержания карты, ее детальность и геометрическая точность.

Различают карты крупно-, средне- и мелкомасштабные. Каждому территориальному уровню соответствует некоторый оптимальный диапазон главных масштабов. Мелкомасштабные карты удобны для прослеживания природной зональности, горных систем, планетарных тектонических структур. Среднемасштабные карты хороши для районирования материков и океанов, обнаружения линеаментов и крупных кольцевых структур. Крупномасштабные карты применяют для подробного изучения строения ландшафтов, элементарных почвенных ареалов, микрорельефа, микроклимата и т. п.

В разных местах карты масштабы могут быть больше или меньше главных. Их называют **частными масштабами**.

Частный масштаб длин — отношение длины бесконечно малого отрезка на карте к длине соответствующего бесконечно малого отрезка на поверхности эллипсоида или шара.

Частный масштаб площадей — отношение бесконечно малой площади на карте к соответствующей бесконечно малой площади на поверхности эллипсоида или шара.

При вычислении частных масштабов значения отрезков длин и площадей участков как на карте, так и на эллипсоиде или шаре выражают в единицах главного масштаба. В силу этого частные масштабы показывают, во сколько раз в данной точке карты масштаб отличается от главного. Например, частный масштаб длин или площадей может быть равен 0,85 или 2,25. В первом случае отрезки или площади на карте по сравнению с главным масштабом изменены в 0,85 раза, т. е. преуменьшены, а во втором случае — в 2,25 раза, т. е. преувеличены.

В современных условиях применения геоинформационных технологий часто используются электронные картографические анимации, демонстрирующие изменяющиеся во времени процессы.

Многие математические элементы электронной карты становятся *динамическими переменными*, т.е. переменными, являющимися функциями времени. Они, наряду с графическими, видео- и аудио-переменными, влияют на дизайн, наглядность и понятность электронных карт и играют важную роль при их конструировании. Изменением этих переменных достигается эффект изменения процесса во времени.

Главный масштаб является одной из таких динамических переменных. Изменением главного масштаба может быть достигнут эффект приближения к отображаемому объекту или удаления от

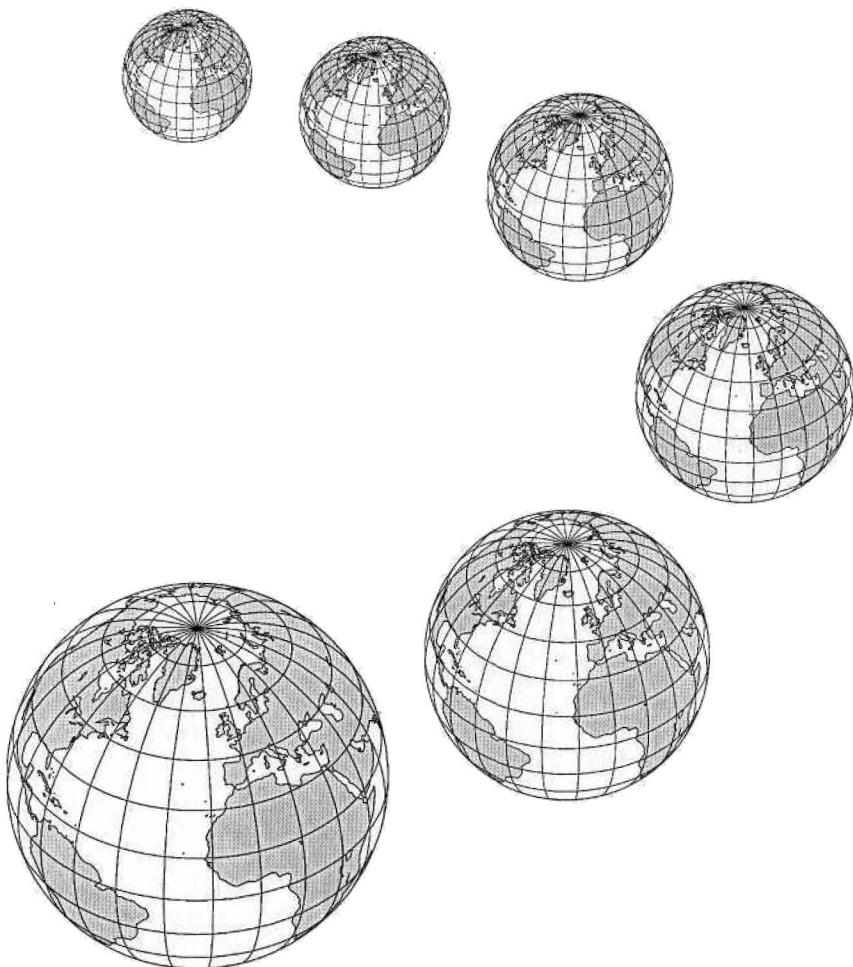


Рис. 5. Изменением главного масштаба достигается эффект приближения или удаления

него. На рис. 5 приведено несколько кадров с изображением Земли в разных главных масштабах. Демонстрацией последовательности таких кадров достигается эффект, иллюстрирующий, например, процесс приближения к Земле космического корабля.

В целях наглядности картографической демонстрации динамических процессов вводится понятие *временного масштаба*.

|| **Временной масштаб** — отношение времени демонстрации кадров карты к реальному времени процесса.

Применительно к рис. 5 временной масштаб определяется отношением продолжительности демонстрации указанных кадров к времени подлета космического корабля к Земле. Например, временной масштаб 1 : 86 000 будет означать, что одна секунда демонстрации фильма округленно соответствует одним суткам. Идентично одна секунда демонстрации кадра в масштабе 1 : 600 000 примерно соответствует продолжительности процесса в одну неделю, в масштабе 1 : 2 500 000 — одному месяцу, а в масштабе 1 : 31 500 000 — одному году.

Карты отображают процессы от нескольких часов до 200—350 лет; палеогеографические карты — за миллионы лет. Каждому временному охвату соответствует некоторый оптимальный диапазон временных масштабов. С введением временного масштаба появляется возможность различать карты, отображающие медленно-, средне- и быстромасштабные процессы.

§ 7. КАРТОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

|| **Картографическая проекция** — математически определенное отображение поверхности эллипсоида или шара на плоскости карты.

Картографической проекцией устанавливается взаимно-однозначное соответствие между прямоугольными координатами (x, y) точек на плоскости и широтами и долготами соответствующих точек на шаре (ϕ, λ) или на эллипсоиде (B, L). Математически эта взаимосвязь определяется уравнениями картографической проекции.

|| **Уравнения картографической проекции** — два уравнения, определяющие связь между координатами точек на карте и соответствующих точек на поверхности эллипсоида или шара.

Например, для шара уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$x = f_1(\phi, \lambda); \quad y = f_2(\phi, \lambda);$$

$$\phi = F_1(x, y); \quad \lambda = F_2(x, y).$$

Два первых уравнения задают прямое отображение поверхности шара на плоскость; два других — обратное отображение плоскости на шар. Записанные уравнения могут иметь довольно сложный вид. Особенно это относится к функциям обратного отображения.

В дальнейшем предполагается, что на плоскости, как это принято в геодезии и математической картографии, ось абсцисс направлена на карте вверх на север, а ось ординат — вправо на восток. Обычно ось абсцисс совмещается со средним, прямолинейным меридианом карты, или проводится параллельно ему.

К уравнениям картографических проекций предъявляются очевидные математические требования: они должны давать *однозначное* и в заданной области *непрерывное, имеющее геометрический смысл*, отображение.

Множество таких уравнений бесконечно, а разнообразие картографических проекций практически неограниченно. Их число ежегодно продолжает увеличиваться.

Важной составляющей частью уравнений картографических проекций являются их параметры. Изменением параметров можно изменить свойства проекции.

|| **Параметры картографической проекции** — постоянные величины, входящие в уравнения картографической проекции.

Например, радиус ρ альмукантаратов (параллелей) азимутальных проекций определяется уравнением с параметром k :

$$\rho = kR \sin(Z/k).$$

В зависимости от значения k меняются свойства проекций. При $k = 1$ имеет место так называемая ортографическая проекция. Если $k = 2$, то проекция становится равновеликой, в ней площади изображаются без искажений. При дальнейшем увеличении значений этого параметра проекция по своим свойствам будет приближаться к так называемым равнопромежуточным проекциям.

Две проекции одного класса, но имеющие разные параметры, могут существенно отличаться своими свойствами. Например, для отображения территории России построено около десятка равнопромежуточных конических проекций. Они отличаются друг от друга своими параметрами.

При отображении временных процессов картографическая проекция также может выступать в качестве динамической переменной. В ходе демонстрации процессов или событий, имеющих различную локализацию и территориальный охват, будут меняться не только главные масштабы, но и проекции. Например, в анимационном сценарии «Земля — континент — конкретная территория» одна проекция неизбежно последовательно сменит другую.

§ 8. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ СЕТКИ

|| **Картографическая сетка** — изображение сетки меридианов и параллелей на карте.

Картографическая сетка — это портрет проекции. По ней одна проекция отличается от другой. Любая карта всегда построена в какой-то проекции. Географическая карта вне проекции не существует. Однако на карте картографическая сетка может и отсутствовать. Многие тематические карты, особенно крупных масштабов, не имеют картографических сеток. Для представления их тематики она не нужна. Более того, она может перегружать карту и этим ухудшать ее наглядность и читаемость.

В зависимости от места расположения полюса сферической полярной системы координат различают следующие виды картографических сеток:

- **нормальная сетка картографической проекции** — картографическая сетка, получаемая в случае, когда полюс полярной сферической системы координат совмещен с географическим полюсом;
- **поперечная сетка картографической проекции** — картографическая сетка, получаемая в случае, когда полюс полярной сферической системы координат расположен на экваторе;
- **косая сетка картографической проекции** — картографическая сетка, получаемая в случае, когда полюс полярной сферической системы координат расположен между географическим полюсом и экватором.

Уравнения картографической проекции одновременно являются уравнениями меридианов и параллелей. Они определяют вид сетки. Правильно и обратное утверждение — вид меридианов и параллелей определяет вид уравнений. Меридианы и параллели изображаются разнообразными линиями: прямыми, а также дугами окружностей, синусоид, эллипсов, парабол, гипербол и других плоских кривых. Картографические проекции и их сетки в нормальной ориентировке разделяют на имеющие параллели **постоянной кривизны** и параллели **переменной кривизны**.

Среди сеток с параллелями постоянной кривизны выделяются те, в которых параллели представлены прямыми параллельными линиями, концентрическими или эксцентрическими окружностями или дугами окружностей. Это основные, имеющие наибольшее значение и распространение, проекции. Параллели переменной кривизны могут быть отображены эллипсами, параболами, гиперболами, более сложными кривыми и их дугами.

Густота и наглядность сетки определяются ее шагом — расстоянием между меридианами и параллелями. Густая сетка перегружает карту и ухудшает ее читаемость, редкая сетка осложняет картографические измерения, глазомерные оценки и понижает

Таблица 3

**Расстояния между меридианами и параллелями
картографической сетки**

Карты	Масштабы карт		
	1 : 1 500 000 — 1 : 2 500 000	1 : 5 000 000	1 : 1 000 000 — 1 : 15 000 000
Настольные	1°	2°	5°
Настенные	1°	4 — 6°	10°

их точность. В табл. 3 указаны наиболее часто используемые расстояния между линиями картографической сетки.

По изображению географических полюсов картографические сетки разделяются на те, в которых полюса показываются *точками, отрезками прямых и дугами кривых линий*.

Относительно меридиана и экватора картографические сетки могут быть как *симметричными*, так и *асимметричными*.

Важным свойством картографических сеток является их *ортогональность*. В ортогональных сетках линии меридианов и параллелей пересекаются под прямыми углами.

|| **Узловые точки картографической сетки** — точки пересечения на карте линий меридианов и параллелей.

Узловые точки имеют большое значение при построении, преобразовании и использовании проекций. В тех случаях, когда проекция неизвестна, или неизвестны ее параметры, узловые точки помогают их восстановить. Картографическая проекция может быть задана не только уравнениями, но и таблицей широт, долгот и прямоугольных координат узловых точек. В условиях геоинформационных технологий это не очень удобный способ задания картографической проекции; большей частью он встречается как наследие прошлого.

§ 9. РАМКИ КАРТЫ И КООРДИНАТНЫЕ СЕТКИ

Рамки окаймляют карту и являются декоративным элементом. Обычно на карте их несколько. В данном случае рамки рассматриваются как математические элементы карты. Важной является внутренняя рамка.

|| **Внутренняя рамка карты** — рамка, ограничивающая картографическое изображение.

Внутренняя рамка намечает внешнюю границу между тем, что отображается на карте, и тем, что остается за ее пределами. Она может иметь прямоугольную, трапециевидную, округлую, оваль-

ную или другую форму. Форма рамки в известной мере определяется формой картографируемой территории или акватории.

Внутри этой рамки могут быть граничные линии, выделяющие на карте место для *врезок* — дополнительной информации, в том числе для иных геоизображений — фотокарт, аэрокосмических снимков, блок-диаграмм и т. п., помещаемых в целях пояснения или дополнения содержания карты.

Применяются также *градусные* и *минутные* рамки, на которых показываются выходы меридианов и параллелей картографической сетки, сопровождаемые надписями значений широт и долгот.

|| **Координатная сетка карты** — сетка координатных линий используемой на карте системы координат.

На топографических планах и картах применяется координатная сетка в системе плоских прямоугольных координат. Эти карты и планы в России и многих зарубежных странах составляют в прямоугольной системе координат Гаусса — Крюгера или UTM. На топографических картах координатные линии проводят через промежутки, соответствующие определенному числу километров, а

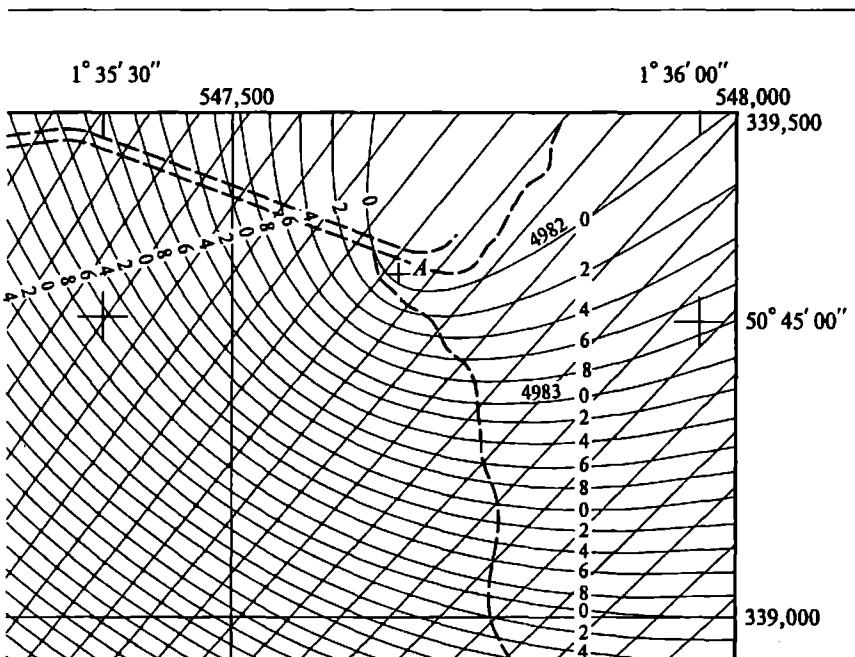


Рис. 6. Внутренняя и внешняя рамки специальной карты; показаны выходы картографической сетки с надписями широт и долгот, прямоугольная сетка и специальная сетка двух семейств гипербол

в некоторых странах — определенному числу миль. Поэтому такие сетки называют соответственно **километровыми** или **мильными**.

На специальных картах, например навигационных, строятся координатные сетки в системе тех измеряемых параметров, по которым проводится навигация. При измерениях от корабля до фиксированных базовых станций дальностей или разностей дальностей это будут сетки семейства окружностей или семейства гипербол. На рис. 6 показана карта с сеткой гипербол. Каждая гипербола соответствует разности расстояний от корабля до двух базовых станций, находящихся в фокусах этого семейства гипербол. Две измеренные разности расстояний до двух разных береговых базовых станций определяют две гиперболы. Местоположение корабля находится на пересечении этих гипербол.

§ 10. СРЕДНИЙ МЕРИДИАН ПРОЕКЦИИ

Средний меридиан проекции — меридиан, принимаемый за начало счета долгот в данной картографической проекции.

На картах мира этот меридиан, как правило, располагается в середине карты. Поэтому его и называют средним меридианом. Средний меридиан обычно изображается прямой линией. На картах средних и крупных масштабов, когда показываются территории ограниченных размеров, средний меридиан может не находиться в середине карты. Более того, он может располагаться даже за пределами карты (рис. 7).

Средний меридиан — важная динамическая переменная. С его

помощью на экране компьютера создается эффект вращения картографируемого тела вокруг своей оси. На рис. 8 показаны четыре с разными средними меридианами кадра, демонстрирующие в анимационной последовательности эффект вращения Земли вокруг полярной оси.

Со средним меридианом обычно совмещается одна из осей системы координат, используемой при расчетах и построении картографической сетки. Поэтому его еще называют **осевым меридианом**.

На топографических картах такой осью является ось абсцисс



Рис. 7. Средний меридиан долготы L_0 находится за пределами внутренних рамок карты

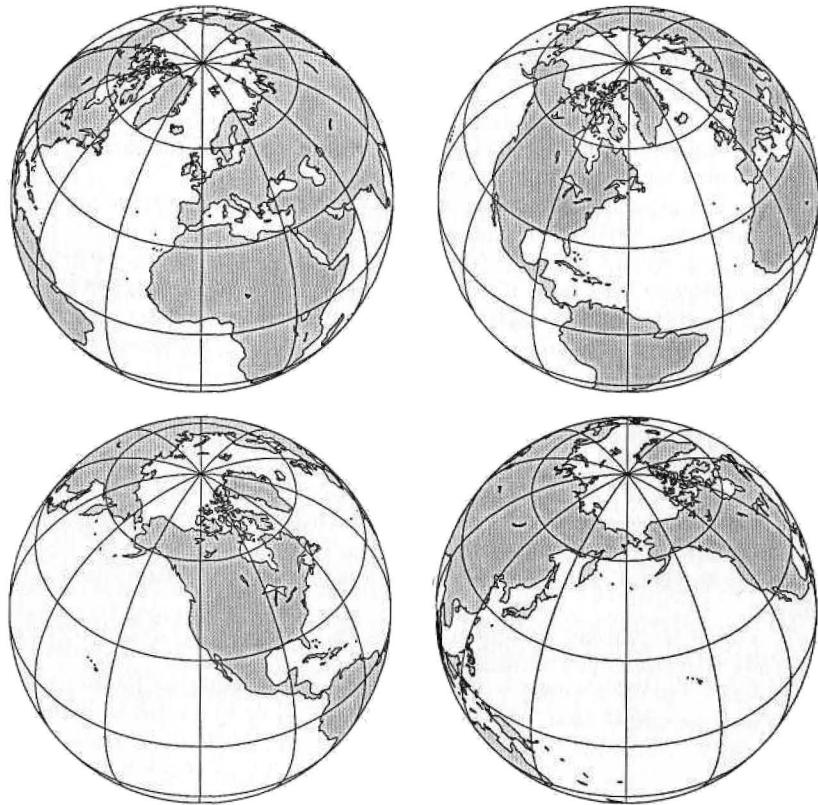


Рис. 8. Анимационная последовательность кадров с долготами средних меридианов 0° , -60° , -120° и -180° , демонстрирующая вращение Земли вокруг полярной оси

(X). Эта ось направляется вдоль среднего меридиана на север, а ось ординат (Y) — на восток. При указанной ориентации координатных осей у людей сохраняется привычка определять азимуты линий относительно направления на Северный полюс, и в то же время остаются справедливыми все математические соотношения между прямоугольной и полярной системами координат.

Как уже отмечалось, указанная ориентация осей обычно применяется и в математической картографии.

Контрольные вопросы

- Что определяет математический элемент карты? Какие используются математические элементы? Что понимается под термином «математическая основа карт»?

- 2.** Что определяют главный масштаб длин и главный масштаб площадей?
- 3.** В чем принципиальное отличие главного масштаба площадей от главного масштаба длин?
- 4.** Какие параллели называются главными?
- 5.** Чем отличаются частный масштаб длин и частный масштаб площадей от соответствующих главных масштабов?
- 6.** Что показывают частные масштабы длин и площадей, в каких единицах они выражены? Поясните на примерах.
- 7.** Что определяет временной масштаб? Какие значения временного масштаба определяют соответствие одной секунде продолжительности процесса в одни сутки, в одну неделю, в один месяц и один год?
- 8.** Что определяют уравнения картографической проекции? Какие общие требования к ним предъявляются?
- 9.** Какое значение имеют параметры уравнений картографических проекций? Поясните на примере.
- 10.** Как классифицируются картографические сетки в зависимости от положения полюса сферической полярной системы координат?
- 11.** Как подразделяют проекции в зависимости от кривизны линий, изображающих на карте параллели?
- 12.** Какие рамки карты одновременно являются математическими элементами?
- 13.** Какой меридиан на карте называется средним? Почему его еще называют осевым меридианом?
- 14.** Какие математические элементы одновременно являются динамическими переменными? Поясните на примерах.

ГЛАВА 3

ИСКАЖЕНИЯ В КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Учение об искажениях занимает центральное место в теории картографических проекций. Ни сферу, ни поверхность эллипсоида невозможно расправить в плоскость — какие-то их участки будут сжаты, другие — растянуты. В плоскости, в общем случае, длины отрезков, углы между направлениями, формы участков и их площади не будут равны таковым на исходной поверхности. Они будут в той или иной степени искажены. При этом все виды искажений на карте взаимосвязаны и изменения одних влечут за собой изменения других.

Особый характер имеет связь между искажениями углов и площадей. Они находятся как бы в противоборстве друг с другом: стремление уменьшить искажения площадей тут же влечет за собой увеличение искажений углов, и наоборот. Поэтому в проекциях, где нет искажений углов, наблюдаются очень большие искажения площадей, а в проекциях с неискаженными площадями углы искажены значительно. Можно лишь добиться равновесия влияний искажения углов и искажения площадей.

Тем не менее в проекциях могут быть точки или линии, в которых искажения отдельных или всех видов отсутствуют. Их называют *точками нулевых искажений* и *линиями нулевых искажений*.

§ 11. МЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПОВЕРХНОСТИ

Свойства картографических проекций и искажения в них изучают, сопоставляя на поверхности и соответственно на плоскости значения метрических элементов: длин отрезков, углов между ними, площадей участков. При изучении метрики поверхностей используют разработки дифференциальной геометрии.

Пусть картографическая проекция задана уравнениями:

$$x = f_1(\phi, \lambda); \quad y = f_2(\phi, \lambda).$$

Точке поверхности с широтой ϕ и долготой λ соответствует точка плоскости с координатами x и y . Смещению точки на поверхности при изменении широты и долготы на бесконечно малые величины $d\phi$ и $d\lambda$ соответствуют смещения образа этой точки на плоскости на величины dx и dy . При этом

$$dx = x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda;$$

$$dy = y_\varphi d\varphi + y_\lambda d\lambda,$$

где символами x_φ , x_λ , y_φ , y_λ обозначены частные производные. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$e = x_\varphi^2 + y_\varphi^2; \quad g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2; \quad f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda;$$

$$h = x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = \sqrt{eg - f^2}; \quad e, g, h > 0.$$

Эти величины в дифференциальной геометрии называют *коэффициентами первой квадратичной формы*; а в математической картографии — *коэффициентами Гаусса*. Зная коэффициенты Гаусса, можно производить определения длин, углов и площадей как на отображаемой поверхности, так и в плоскости проекции. Они определяют метрику поверхности.

В плоскости проекции длина элементарного отрезка dl определяется простой зависимостью:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.$$

Полагая $d\lambda = 0$, получают выражения для длины отрезка дуги меридиана dl_m , а при $d\varphi = 0$ — для длины отрезка дуги параллели dl_n .

Таблица 4

Формулы для анализа длин, углов и площадей на плоскости

Показатель	Формула для вычисления
Длина элементарного отрезка dl	$dl^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2$
Длины дуг меридиана dl_m и параллели dl_n	$dl_m = \sqrt{ed\varphi}; \quad dl_n = \sqrt{g}d\lambda$
Угол θ между положительными направлениями меридиана и параллели	$\cos \theta = \frac{f}{\sqrt{eg}}; \quad \sin \theta = \frac{h}{\sqrt{eg}};$ $\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{f}$
Азимут направления α	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h \frac{d\lambda}{d\varphi}}{e + f \frac{d\lambda}{d\varphi}}$
Площадь dF элементарного параллелограмма со сторонами dl_m , dl_n и углом θ между ними	$dF = hd\varphi d\lambda$

Угол β между направлениями двух векторов

$$\mathbf{dl}_1 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{dl}_2 = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix}$$

определяется из скалярного произведения этих векторов

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{dl}_1^T \mathbf{dl}_2}{dl_1 dl_2}.$$

Предположим, что отрезок dl_1 ориентирован по меридиану, а отрезок dl_2 — по параллели. Тогда $d\lambda_1 = 0$ и $d\phi_2 = 0$. Угол β в рассматриваемой точке карты равен углу θ между положительными направлениями меридиана и параллели. Пусть, как и ранее, отрезок dl_1 ориентирован по меридиану, а отрезок dl_2 — по произвольному направлению азимута α на карте. В таком случае этот угол $\beta = \alpha$ и определяет азимут отрезка на карте.

Площадь dF элементарного параллелограмма со сторонами dl_m , dl_n и углом θ между ними равна

$$dF = dl_m dl_n \sin \theta.$$

Раскрыв вышеприведенные выражения и подставив коэффициенты Гаусса, получим соответствующие формулы, удобные для анализа в плоскости любой заданной проекции длин, углов и площадей (табл. 4)

Идентичные формулы существуют для метрических элементов поверхности. Их также удобно представлять с помощью коэффициентов Гаусса. Для вычисления метрических элементов соответственно следует принять на шаре

$$e = R^2; \quad g = r^2; \quad f = 0; \quad h = rR$$

Таблица 5

Формулы для анализа длин, углов и площадей на эллипсоиде

Показатель	Формула для вычисления
Длина элементарного отрезка dD	$dD^2 = M^2 dB^2 + r^2 dL^2$
Длины дуг меридиана dS и параллели ds	$dS = MdB; \quad ds = rdL$
Угол θ между положительными направлениями меридиана и параллели	$\theta = \pi/2$
Азимут направления A	$\operatorname{tg} A = \frac{r}{M} \frac{dL}{dB}$
Площадь dF элементарной трапеции на эллипсоиде	$dF = rMdBdL$

и на эллипсоиде вращения

$$e = M^2; \quad g = r^2; \quad f = 0; \quad h = rM.$$

В табл. 5 приведены формулы для эллипсоида вращения. Чтобы получить из них формулы для шара, следует заменить широты B на ϕ , долготы — L на λ , радиус кривизны меридиана M — на радиус шара R , а радиус параллели r вычислять для шара.

Определив с помощью табл. 4 и 5 значения длин элементарных отрезков и площадей элементарных площадок и вычислив отношения этих величин на плоскости к соответствующим величинам на эллипсоиде или на шаре, получим частные масштабы длин и частные масштабы площадей.

§ 12. ИСКАЖЕНИЯ ДЛИН

Искажения длин на карте выражаются в том, что масштаб длин меняется с переменой места точки. Вследствие этого на карте неправильно передаются соотношения линейных размеров разных географических объектов. Об искажениях длин легко судить по частным масштабам длин. В бесконечно малой окрестности каждой точки карты различают:

m — частный масштаб длин по меридиану;

n — частный масштаб длин по параллели;

μ — частный масштаб длин по любому направлению.

По определению, частный масштаб равен отношению длины малого (строго говоря, бесконечно малого) отрезка карты к соответствующему отрезку, вычисленному для эллипсоида или шара и выраженному в главном масштабе. Взяв отношения соответствующих отрезков на плоскости и на эллипсоиде и пользуясь коэффициентами Гаусса, для частных масштабов m и n получают

$$m = \frac{\sqrt{e}}{M}; \quad n = \frac{\sqrt{g}}{r}.$$

Перечисленные масштабы взаимосвязаны следующим образом:

$$\mu^2 = m^2 \cos^2 A + mn \cos \theta \sin(2A) + n^2 \sin^2 A,$$

где A — азимут того направления, для которого определяется частный масштаб длин μ , причем азимут измеряется на эллипсоиде; θ — угол между меридианом и параллелью в данной точке карты.

Для работы с картой удобнее выражение

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin^2(\theta - \alpha)}{m^2 \sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \alpha}{n^2 \sin^2 \theta},$$

где α — азимут, измеренный на карте для того направления, для которого ищется частный масштаб μ . При $\alpha = 0 \mu = m$, а при $\alpha = \theta \mu = n$.

Формулы, как отмечалось выше, наглядно показывают, что в каждой точке карты значения частных масштабов длин зависят как от широты и долготы этой точки, так и от азимута направления.

Частные масштабы длин нетрудно определять по карте, если на ней имеется картографическая сетка. Для этого на карте следует измерить малые отрезки меридиана и параллели, вычислить, выразив в главном масштабе, их значения на эллипсоиде и найти их отношения. Таким путем будут определены масштабы m , n . Затем следует измерить угол θ между меридианом и параллелью и для направления, заданного азимутом α , по вышеуказанной формуле вычислить частный масштаб длин μ .

Длины отрезков, за исключением линий нулевых искажений, искажаются в любых проекциях. В каждой точке карты существуют два направления, по которым частные масштабы длин принимают **экстремальные** значения — по одному из них масштаб максимальен, по другому — минимальен. Значения азимутов этих направлений определяются формулой

$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{n^2 \sin(2\theta)}{m^2 + n^2 \cos(2\theta)}.$$

Поскольку период тангенса равен π , то это уравнение дает два ответа: β и $\beta + 90^\circ$. Это означает, что **направления экстремальных масштабов являются взаимно перпендикулярными**.

||| Главные направления в картографической проекции — два взаимно перпендикулярных направления в каждой точке карты, по которым частные масштабы длин имеют наибольшее и наименьшее значения.

Обратим внимание на важную особенность, которая следует из приведенной формулы. Если на карте между меридианом и параллелью прямой угол ($\theta = 90^\circ$), то главные направления всегда будут ориентированы по меридиану и параллели. Таким образом, в **ортогональных проекциях экстремальными являются частные масштабы m и n** .

Обычно экстремальные масштабы обозначаются буквами:

- a — наибольший масштаб;
- b — наименьший масштаб.

Из этого следует, что в ортогональных проекциях верны соотношения:

либо $a = m$, $b = n$;

либо $a = n$, $b = m$.

Для неортогональных проекций, используя значения частных масштабов по меридиану и по параллели m и n , а также угол

между меридианом и параллелью θ , экстремальные масштабы длин a , b и азимут β главного направления на карте вычисляют по формулам:

$$a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin \theta};$$

$$a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \theta};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}}.$$

По тангенсу определяются четыре значения угла β . Для правильного нахождения знака β необходимо помнить, что направление наибольшего частного масштаба длин на карте расположено внутри острого угла между меридианом и параллелью.

Искажения длин в проекции оценивают относительными величинами, например, по одной из формул:

$$v = \mu - 1; \quad v = \ln \mu.$$

Часто эти величины выражают в процентах. Например, $\mu = 1,37$ (137 % от главного масштаба), тогда $v = 0,37$, или 37 %.

Применяется ряд критерiev, характеризующих общую *по всем направлениям* величину относительных искажений длин в данной точке карты. Эти критерии предложены разными учеными и обычно их называют по именам авторов.

Критерий Эйри:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} [(a - 1)^2 + (b - 1)^2];$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + (ab - 1)^2 \right].$$

Критерий Эйри — Каврайского:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} [\ln^2 a + \ln^2 b].$$

Применяются и другие критерии. Следует заметить, что все они являются *локальными*, ибо характеризуют искажения лишь в данной точке карты.

§ 13. ИСКАЖЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ

Площади на картах могут иметь значительные искажения. На рис. 9, *a* показаны правильные соотношения площадей географических объектов. На рис. 9, *б* в проекции Меркатора, где нет искажений углов, Гренландия по величине сопоставима с Афри-

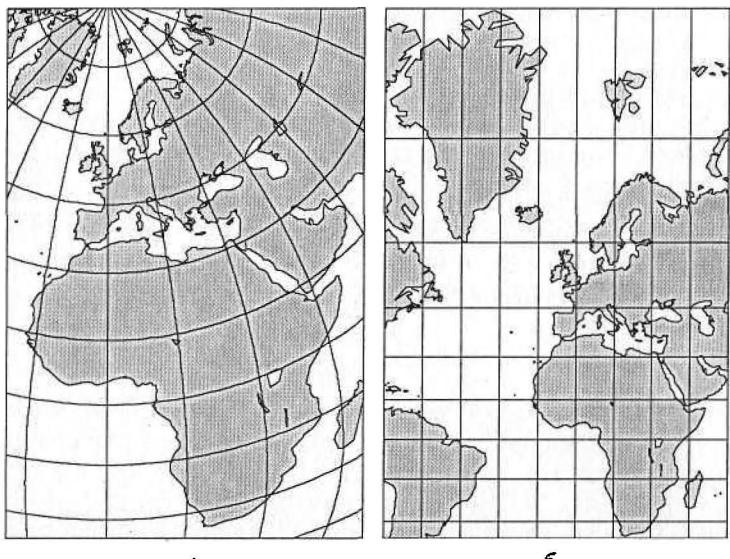


Рис. 9. Искажения:

a — площади географических объектов отображены без искажений; *б* — площади искажены значительно (сопоставьте Гренландию с Африкой)

кой, хотя Африка по площади почти в 15 раз больше Гренландии.

Частный масштаб площади может быть определен по одной из следующих формул:

$$p = \frac{h}{rM}; \quad p = mn \sin \theta; \quad p = ab.$$

Таким образом, частный масштаб площади для каждой точки карты может быть вычислен путем определения частных масштабов длин по меридиану, по параллели и измерением угла между ними.

Искажения площадей характеризуются относительными величинами, вычисляемыми по одной из двух формул:

$$\nu = p - 1; \quad \nu = \ln p.$$

Они могут быть выражены в процентах. Эти показатели являются локальными.

§ 14. ИСКАЖЕНИЯ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

Искажения азимутов. В общем случае азимут A некоторого направления на эллипсоиде не равен азимуту α того же направления на карте. Зависимость между этими значениями азимутов определяется следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n \sin \theta \operatorname{tg} A}{m + n \cos \theta \operatorname{tg} A}.$$

Из этого выражения можно сделать вывод о том, что в проекциях с ортогональной сеткой ($\theta = 90^\circ$) и с одинаковыми частными масштабами длин по меридиану и по параллели ($m = n$) значения азимутов не искажены:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} A.$$

В других случаях в данной точке карты не искажены лишь азимуты, имеющие следующие значения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n \sin \theta - m}{n \cos \theta}.$$

Искажения углов между меридианами и параллелями. На сфере и на эллипсоиде вращения меридианы пересекают параллели под прямыми углами. На картах же эти углы прямые лишь в ортогональных проекциях. В других проекциях в общем случае углы между меридианами и параллелями искажены. Величина искажения оценивается отличием угла на карте от прямого угла:

$$\epsilon = \theta - 90^\circ.$$

Этот угол можно измерить на карте или вычислить с помощью коэффициентов Гаусса по одной из формул:

$$\sin \epsilon = -\frac{f}{\sqrt{eg}}; \quad \cos \epsilon = \frac{h}{\sqrt{eg}};$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = -\frac{f}{h}.$$

Наибольшие искажения углов. Разные углы, имеющие вершину в заданной точке, искажаются по-разному. Так, углы между главными направлениями не искажаются вовсе. Поэтому оцениваются максимальные искажения (ω). Существует ряд формул для их вычисления. Приведем их:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{a + b};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p} - 2};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Наибольшие искажения углов можно вычислять по величинам m , n , p , определяемым непосредственно по карте. Формулы весьма наглядно показывают, что в проекции углы не искажаются, если экстремальные масштабы одинаковы ($a = b$). Однако если одинаковы экстремальные масштабы, то это означает, что частный масштаб длин вообще не зависит от азимута направления. Следовательно, *в проекциях, не искажающих углы, частный масштаб длин не меняется с переменой направления.*

§ 15. ИСКАЖЕНИЯ ФОРМ

Искажения длин ведут к искажению форм. Поскольку нет проекций, не искажающих длины, то и формы контуров конечных размеров искажаются в любых проекциях. А. В. Гедымин, много лет преподававший курс математической картографии на географическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, разработал способ наглядной демонстрации искажений форм в картографических проекциях. Суть мотивации идеи способа заключается в следующем. Правильные изображения географических объектов, даже таких, как материками, не принадлежат к числу предметов, наблюдаемых людьми ежечасно. Их очертания не закреплены в памяти с предельной четкостью. Поэтому даже существенные отступления на картах от правильных изображений большинство людей может просто не заметить. Более того, у многих в памяти закреплены искаженные представления о формах географических объектов. Неправильные образы сформировались в процессе изучения географии по картам, которым присущи значительные искажения.

Проведенные за рубежом исследования показали, что у многих людей представления о форме и размерах географических объектов соответствуют их изображениям в проекции Меркатора, где искажения форм и размеров громадны. Поэтому возникла

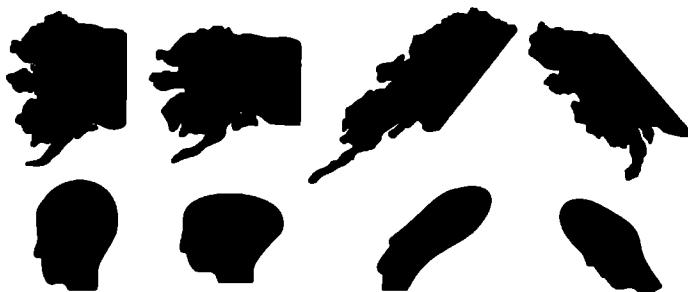


Рис. 10. В разных проекциях карт мира изображения полуострова Аляска и силуэта профиля человеческой головы (по А. В. Гедымину)

идея наложить на карту изображение предмета, хорошо знакомого любому читателю карты. При этом изображение этого предмета должно быть искажено таким же образом, как искажено на карте изображение самого географического объекта. В качестве такого предмета использован профиль человеческого лица. На рис. 10 показаны контуры полуострова Аляска на разных картах мира. Под каждой картой приведен силуэт профиля головы, построенный в той же проекции, что и карта, и показывающий, что бы с ним сделалось, если его поместить на картах в том месте, где находится Аляска.

Может возникнуть вопрос, а деформируются ли объекты в проекциях, в которых отсутствуют искажения углов? Ведь в таких проекциях частный масштаб длин не зависит от азимута направления. По этой причине такие проекции называют *конформными* (от лат. *conformis* — *подобный*).

Увы! В равноугольных проекциях формы объектов также искажаются, и тем сильнее, чем больше размеры объекта. Дело в том, что в равноугольных проекциях подобие сохраняется лишь для бесконечно малых фигур. Бесконечно малый круг с эллипсоида на карту переносится также бесконечно малым кругом. Однако этот круг в разных местах карты будет иметь разные размеры. Где-то его размеры, возможно, будут соответствовать главному масштабу, а в других местах карты его масштаб будет или больше, или меньше главного. А это ведет к искажению формы объекта конечных размеров. Предположим, что в равноугольной проекции отображается некий остров, имеющий форму круга. Каждая его элементарная часть отображается себе подобной. Но по мере движения с юга на север масштаб увеличивается, и каждая севернее расположенная частица оказывается несколько крупнее южной. В результате на карте остров круглой формы станет треугольным или грушевидным.

На рис. 11 приведены равноугольные нормальная проекция Меркатора (*а*) и поперечная азимутальная стереографическая проекция (*б*). В них углы не искажаются. Однако, как показывают наложенные по А. В. Гедымину профили человеческой головы, искажения форм значительны.

Особо необходимо остановиться на рассмотрении искажений форм в стереографической проекции сферы. В ней любая окружность, как бесконечно малая, так и конечных размеров, изображается окружностью. Поэтому может создаться впечатление, что в этой проекции нет искажений форм.

На самом деле, как в этом можно было убедиться по изображениям профилей человеческой головы, формы в стереографической проекции также искажаются. Происходит это потому, что окружность в проекции и окружность на сфере, в сущности, две разные фигуры. На карте при отображении происходит перес-

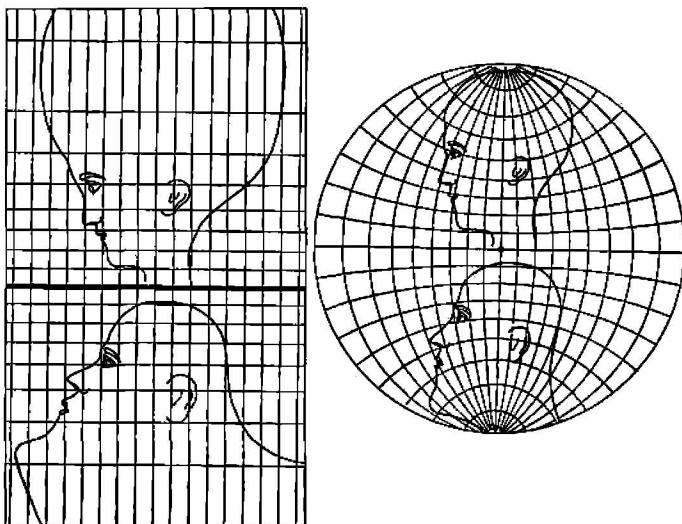


Рис. 11. Исказжения форм в проекции Меркатора (а) и в азимутальной стереографической проекции (б)



Рис. 12. Кольца, концентрические на шаре, в поперечной азимутальной стереографической проекции изобразились смещенными в направлении к экватору

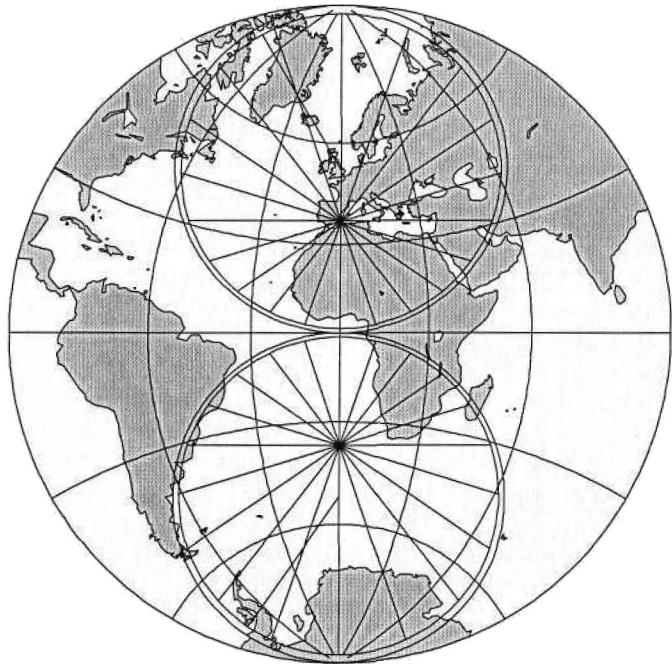


Рис. 13. Круг на сфере в поперечной азимутальной стереографической проекции также изобразился кругом. В то же время в проекции расстояния от окружности до изображения ее первоначального центра в экваториальном направлении стали короче, нежели в полярных направлениях

пределение точек окружности и смещение ее центра так, что окружность в стереографической проекции имеет новый центр, который не совпадает с изображением в этой проекции прежнего центра на сфере. В проекции одна часть радиусов подверглась сжатию, а другая — растяжению. В результате форма произвольной фигуры, например головы, исказилась.

Вышеизложенное наглядно поясняют изображения в поперечной азимутальной стереографической проекции окружностей на рис. 12 и 13. Эти окружности расположены примерно в тех же местах, что и профили человеческих голов. Как видно, окружности так и остались окружностями (форма не изменилась). На рис. 12 изображены кольца, которые на земном шаре были концентрическими. В проекции расстояния между кольцами в направлении экватора стали заметно короче, нежели в направлениях к полюсам. На рис. 13 в этой же проекции точки окружности соединены прямыми отрезками с точкой, отображающей центр этой окружности на сфере. Длины этих отрезков в экваториаль-

ном направлении значительно меньше длин отрезков полярных направлений.

Искажения форм контуров бесконечно малых размеров оценивают *коэффициентом форм*, равным отношению максимального частного масштаба длин (a) к минимальному частному масштабу длин (b), а также отклонением этого отношения от единицы (см. критерий Эйри):

$$K = \frac{a}{b}; \nu_K = \frac{a}{b} - 1.$$

Чем больше отличаются частные масштабы длин a и b , тем сильнее на карте вытянут контур в направлении a .

§ 16. ОТОБРАЖЕНИЕ НА КАРТАХ ЛОКАЛЬНЫХ ИСКАЖЕНИЙ

Применяют разные способы для демонстрации искажений на картах — профили головы человека, изоколы, эллипсы искажений и др. Эти способы должны быть наглядными и, по возможности, простыми. Распространен способ изокол.

|| Изокола — линия равных значений показателей, характеризующих искажения на карте.

Изоколы строятся для любых показателей искажений: длин, площадей, углов, форм. Изоколы характеризуют искажения отдельных видов. Они получили распространение благодаря простоте построения. На рис. 14 для примера приведен макет карты с изоколами частного масштаба r и наибольшего искажения углов ω .

Изоколы удобны тем, что по ним видно, как и в каких направлениях нарастают или убывают искажения и где на карте наибольшие или наименьшие их значения.

Более полную и наглядную характеристику искажений дает *эллипс искажений*; иначе его называют *индикаторной Тиссо* (рис. 15).

Эллипс искажений в данной точке карты изображает бесконечно малый круг на поверхности эллипсоида или шара. Половины эллипса равны экстремальным масштабам длин a и b ; они ориентированы по главным направлениям.

Радиус-вектор эллипса по любому направлению определяет частный масштаб длин и, следовательно, характеризует искажения длин.

Форма эллипса иллюстрирует искажения углов и форм — они искажены тем больше, чем больше эллипс отличается от окружности.

Площадь эллипса пропорциональна искажению площадей и тем она больше, чем больше искажены площади. Таким образом, эл-

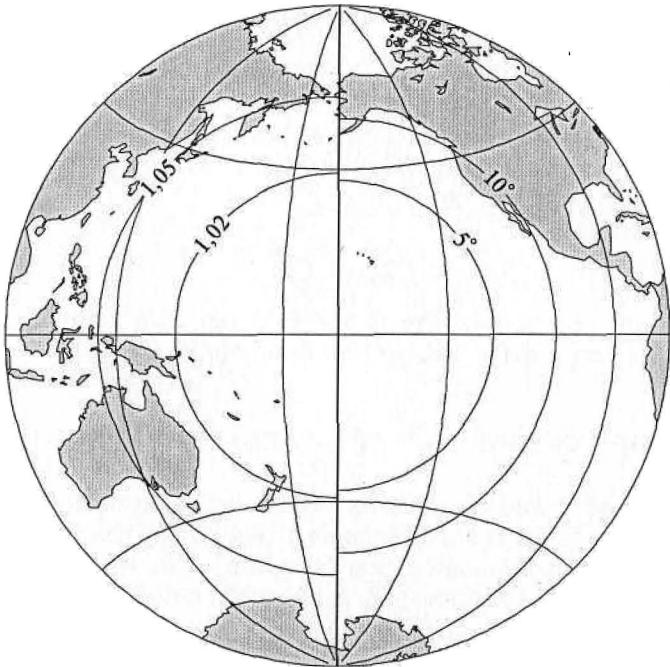


Рис. 14. Макет карты с изоколами частного масштаба площадей (слева) и наибольшего искажения углов (справа)

липс искажений является весьма наглядной *локальной комплексной* характеристикой всех видов искажений.

Желая показать на карте эллипсы искажений, радиусам бесконечно малых окружностей на шаре или эллипсоиде условно приписывают конечные значения, равные, например, 5 мм в масштабе карты. В этом масштабе и строятся эллипсы искажений.

Эллипсы искажений можно строить вручную. Для этого на карте по главным направлениям откладывают значения экстремальных масштабов a , b , а по меридианам и параллелям — значения m , n . Всего будет намечено

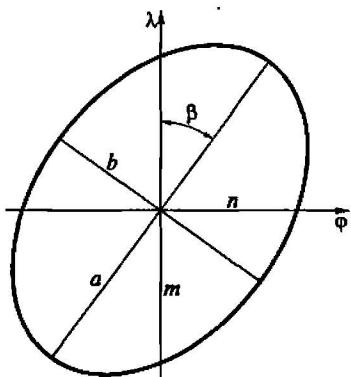


Рис. 15. Эллипс искажений (индикатриса Тиско):

a , b , m , n — частные масштабы длин, соответственно, наибольший, наименьший, по меридиану, по параллели; β — азимут на карте большой полуси эллипса

восемь точек. Через эти точки проводится плавная эллипсоподобная кривая. Это и будет эллипс искажений.

Все показываемые на карте эллипсы можно сравнивать между собой и сопоставлять с теми на карте, где нет искажений или отсутствуют искажения отдельных видов. Величины и характер искажений, которые каждый эллипс демонстрирует, следует относить к той точке карты, в которой находится центр эллипса.

Недостатком изокол и эллипсов искажений является то, что по ним трудно судить об искажениях на картах крупных объектов конечных размеров, например, таких, как материки и океаны.

§ 17. ОТОБРАЖЕНИЕ НА КАРТАХ ИСКАЖЕНИЙ РЕГИОНАЛЬНОГО МАСШТАБА

В предыдущих параграфах рассматривались локальные искажения и их показатели. Как уже указывалось, они характеризуют искажения лишь в бесконечно малой окрестности данной точки на карте. Однако часто возникает необходимость оценить и сопоставить искажения, если не в пределах всей карты, то по крайней мере в пределах некоторого региона. С этой целью применяются критерии двух типов — *минимаксного* и *вариационного*. Условно их, по аналогии с локальными, назовем *региональными*. Иногда эти критерии применяют ко всей карте и называют *глобальными*.

В случае применения минимаксного критерия в пределах заданного региона, отображенного в нескольких проекциях, или для нескольких разных регионов одной и той же карты вычисляются максимальные значения всех показателей или одного какого-либо показателя. Лучшим изображением считается то, для которого максимальный показатель принимает минимальное значение.

При использовании критериев вариационного типа вычисляется среднее квадратическое искажение выбранного показателя. С этой целью изучаемую часть карты разделяют на некоторое число малых участков, для середины каждого из которых определяют значение выбранного показателя, а затем вычисляют их среднюю квадратическую величину.

Применяют и другие способы, обычно основанные на вычислениях средних значений показателей в пределах изучаемого региона. Удобным и наглядным является способ *кругов*, или *колец*, размещаемых в заданных точках на шаре и отображаемых в плоскости заданной проекции. В проекции они изображаются деформированными фигурами. По аналогии с эллипсами искажений их можно назвать *фигурами искажений*.

Фигуры искажений строятся следующим образом. Поверхность эллипсоида в окрестности выбранной точки заменяется шаром. Радиус шара R принимается равным среднему геометрическому

из главных радиусов кривизны эллипсоида в этой точке. На земном шаре из этой точки как из центра строится круг конечных размеров. Круг ограничен заданным на сфере расстоянием D . Размеры круга могут быть различными, вплоть до величин порядка территорий государства, континента или даже полушария. На окружности этого круга намечается большое число, например 100 или 200, точек. Для центра круга и каждой i -й точки его окружности вычисляются сферические координаты — широты ϕ и долготы λ . По широтам и долготам в заданной проекции вычисляются прямоугольные координаты для центра круга и координаты x_i, y_i для текущих точек на окружности. После этого круг и его диаметры отображаются на карте. Форма и размеры изображения этого круга дают представление об искажениях в заданном регионе. Одна из фигур искажений приведена на рис. 16.

Круги искажений удобны для получения количественных показателей. Для каждого круга имеются координаты как на шаре,



Рис. 16. Фигура искажений:

O — изображение в проекции центра окружности на шаре; r_{\min}, r_{\max} — минимальное и максимальное расстояния от этой точки до изображения окружности; O' — середина наибольшего диаметра фигуры искажений; A, B — наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до изображения линии окружности

так и в проекции на плоскости. Эти данные могут быть использованы для вычисления любых показателей искажений. Поскольку показатели искажений несколько отличаются от применяемых для локальных оценок, рассмотрим их подробнее.

Оценка искажений длин. Относительные искажения длин определяются формулой

$$v_l = \frac{l}{D} - 1,$$

где l — расстояние в проекции от центра до линии, отображающей окружность; D — это же расстояние на сфере. По всем этим значениям вычисляется среднее квадратическое искажение. Так вычисленные значения искажений длин являются достаточно представительными.

Оценка искажений площадей. Относительные искажения площадей оцениваются аналогичной формулой

$$v_p = \frac{F}{P} - 1,$$

где P — площадь фигуры на шаре; F — площадь изображения этой же геометрической фигуры в проекции карты. Для площадей P и F можно записать:

$$P = \pi r^2; \quad r = 2R \sin \frac{D}{2R};$$

$$F = 0,5 \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i).$$

Оценка искажений форм. Она может быть выполнена на основе следующих соображений.

В любой проекции окружность с поверхности шара переносится на карту с искаженными радиусами. Это происходит также и в стереографической проекции. На карте эти радиусы изображаются отрезками разной длины. Поэтому можно вычислить коэффициент формы как отношение максимальной длины отрезка (r_{\max}) к минимальной (r_{\min}), а искажения форм характеризовать отклонением этого коэффициента от единицы (см. рис. 16).

Поэтому для оценки искажений формы получаем

$$K_F = r_{\max}/r_{\min}; \quad v_F = K_F - 1.$$

Возможен и другой способ оценки. По-прежнему на сфере строится окружность. В проекции карты эта окружность изображается некоторой геометрической фигурой. Находится максимальный диаметр этой фигуры. Из середины диаметра проводится радиус, определяющий минимальное расстояние от этой точки до контура фигуры. Максимальный радиус (A) является эквивалентом большой полуоси эллипса искажений, а минимальный радиус

(B) — эквивалентом малой полуоси (см. рис. 16). Отношение максимального радиуса к минимальному определяет коэффициент K_W . Условно назовем его *коэффициентом стереографичности*. Его отклонение от единицы (v_W) характеризует искажения формы круга:

$$K_W = \frac{A}{B}; \quad v_W = \frac{A}{B} - 1.$$

Особенностью коэффициента стереографичности является то, что он для стереографической проекции шара всегда равен 1, а искажение формы круга — 0. Он как бы характеризует близость свойств данной проекции к свойствам стереографической проекции. В проекциях, не искажающих углы, этот коэффициент будет тем ближе к 1, чем меньших размеров круг на сфере. Поэтому при небольших размерах кругов на сфере он, как и эллипс искажений, может быть использован для оценки искажений углов.

Приведенные показатели являются относительными величинами. Умножением на 100 % их можно выразить в процентах.

Поскольку окружность задается несколькими сотнями точек, то дополнительно к перечисленным выше показателям искажений могут быть подсчитаны и выведены на экран компьютера статистические данные, характеризующие круг на сфере и дающие представление об искажениях элементов его образа в проекции. Ниже приведены показатели искажений для изображения круга в проекции (см. рис. 16).

Искажения площадей, %	0
Искажения длин радиусов, %	9,6
Коэффициент формы	1,3
Искажение формы круга, %	12,8
Длина радиуса круга на поверхности сферы, км	8751,6
Максимальная длина этого радиуса в проекции, км ...	8771,1
Минимальная длина этого радиуса в проекции, км	6830,2
Большая полуось эллипса в проекции, км	8474,7
Малая полуось эллипса в проекции, км	7512,2
Площадь круга на сфере, км ²	2,05 E* + 08
Площадь образа круга в проекции, км ²	2,05 E + 08

Проанализируем полученные данные. На земной сфере из точки, расположенной примерно в центре Тихого океана, очерчена окружность. Расстояние на сфере от этого центра до точек окружности составляет 8752 км. Площадь круга свыше 205 млн км², что на 15 % больше площади океана. Круг охватывает практичесе-

* E + 08 = 10⁸.

ски весь Тихий океан и частично прилегающие к нему территории. Как видим, искажения площадей отсутствуют. Коэффициент формы, равный 1,3, показывает, что форма выделенного контура искажена на 30 %. Коэффициент стереографичности указывает на то, что форма круга искажилась на 12,8 %.

Контрольные вопросы

- 1. Чем обусловлены искажения в картографической проекции?**
- 2. Какой особый характер имеет связь между искажениями углов и искажениями площадей?**
- 3. Для чего используются коэффициенты Гаусса и как они определяются? Как с помощью коэффициентов Гаусса записываются условие ортогональности проекции, частные масштабы длин по меридиану и по параллели и частный масштаб площади?**
- 4. Как определить по карте частные масштабы длин по меридиану и по параллели?**
- 5. Какие направления в каждой точке карты называют главными?**
- 6. Какие линии в каждой точке карты имеют наименьший и наибольший частные масштабы длин в проекциях с ортогональной сеткой?**
- 7. Как определить в заданной точке карты частный масштаб площади?**
- 8. Какими должны быть частные масштабы длин в каждой точке ортогональной проекции, чтобы азимуты произвольных направлений отображались на карте без искажений?**
- 9. Какими показателями характеризуют локальные искажения форм и искажения углов?**
- 10. Что отображают изоколы? Какие характеристики показывают с помощью изокол? Какие достоинства и недостатки способа изокол?**
- 11. Какие вы знаете критерии, характеризующие общие по всем направлениям величины относительных искажений длин?**
- 12. Что характеризует индикаториса Тиссо? Как ее построить на карте?**
- 13. Что характеризует фигура искажений, как ее построить и какие показатели при этом могут быть использованы?**
- 14. Что характеризует коэффициент стереографичности? Как он определяется?**

ГЛАВА 4

КЛАССИФИКАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Классификация картографических проекций — наиболее узкое место в теории математической картографии. Разными учеными предложено много способов классификации, однако нет ни одного удовлетворительного и всеобъемлющего. Обычно классификация картографических проекций выполняется по внешним признакам, так как более глубокие генетические подходы уводят далеко от картографии в сторону математики. Практически приходится пользоваться некоторым набором классификаций. Ниже рассмотрены наиболее часто применяемые подходы.

§ 18. ПРИЗНАКИ КЛАССИФИКАЦИИ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Картографические проекции классифицируют по многим признакам. Объединив родственные признаки, выделим следующие их группы, на основе которых могут быть построены классификации проекций.

1. Признаки, относящиеся к математико-геодезическим основам карт — форма отображаемой поверхности, математические способы построения проекций, вид исходных дифференциальных уравнений проекций и др.

2. Признаки, описывающие саму проекцию — характер и величины искажений, вид картографической сетки, ее специфические свойства.

3. Признаки, обусловленные назначением, использованием и содержанием карты.

4. Признаки, диктуемые объектом картографирования — его форма, размеры и географическое положение.

На основе первой группы признаков могут быть выделены проекции:

- *регулярных поверхностей* тел правильной формы, таких, как шар и эллипсоид, изучением которых математическая картография обычно и занимается;

- *реальных поверхностей* — проекции астероидов, комет и некоторых других космических тел сложной формы. Теория их разработки лишь начинается.

На основе признаков первой группы в 60-х годах XX в. советский ученый Г.А. Мещеряков предложил *генетическую классификацию*. Она построена на основе вида дифференциальных уравнений, которые описывают картографические проекции. Решение этих уравнений в целях получения проекций представляет собой довольно сложную математическую задачу. Однако эта классификация, хотя и соответствует математической сущности проекций, не обладает простотой, наглядностью, не получила развития и в картографии не нашла применения.

Важны также классификации проекций по *виду общих уравнений*, по *способу построения*, а также по *ориентировке картографической сетки* в зависимости от положения полюса сферической полярной системы координат. Как уже отмечалось, в этом случае выделяют сетки в нормальной, косой и поперечной ориентировках.

Классификации на основе признаков второй группы имеют наибольшее распространение и практическое значение. К этой группе могут быть отнесены следующие классификации проекций:

- по характеру и величинам искажений;
- по виду нормальной картографической сетки;
- по составу параметров математических элементов.

Третья группа признаков ориентирует составителей и пользователей на целенаправленный и оптимальный по отношению к создаваемой карте выбор проекции.

Четвертая группа на передний план выдвигает индивидуальные географические особенности картографируемого объекта.

На основе признаков этих групп проекции классифицируются следующим образом.

Проекции карт Земли.

- *Проекции тематических и общегеографических карт:*
 - проекции мира;
 - проекции полушарий;
 - проекции океанов;
 - проекции материков и полярных областей;
 - проекции крупных частей материков;
 - проекции государств и их частей.
- *Проекции карт конкретного назначения:*
 - проекции топографических карт;
 - проекции общегеографических мировых карт масштабов $1 : 1\,000\,000$ и $1 : 2\,500\,000$;
 - проекции навигационных карт.

Проекции карт космического пространства.

- *Проекции звездного неба.*
- *Проекции планет и их спутников.*
- *Проекции комет и астероидов.*

§ 19. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРУ И ВЕЛИЧИНAM ИСКАЖЕНИЙ

По характеру искажений проекции разделяют на *произвольные, равновеликие, равноугольные и равнопромежуточные*.

Произвольная картографическая проекция — картографическая проекция, в которой имеются искажения всех видов.

Равновеликая картографическая проекция — картографическая проекция, в которой отсутствуют искажения площадей.

Равноугольная картографическая проекция — картографическая проекция, в которой отсутствуют искажения углов.

Равнопромежуточная картографическая проекция — произвольная картографическая проекция, в которой одинаковы влияния искажений углов и площадей.

Приведенная классификация является одной из основных и наиболее важных. Недостатком классификации является то, что она из огромного множества произвольных проекций выделяет, в сущности, три *частных случая*: два крайних — равноугольные и равновеликие проекции, и один случай посередине между ними — равнопромежуточные проекции.

В практических целях данная классификация часто детализируется — вводятся дополнительные ступени, количество которых может быть любым. Обычно применяется пятиступенчатая шкала.

1. Равновеликие проекции.

2. Проекции с небольшими искажениями площадей, стоящие посередине между равновеликими и равнопромежуточными проекциями.

3. Равнопромежуточные проекции.

4. Проекции с небольшими искажениями углов, стоящие посередине между равнопромежуточными и равноугольными проекциями.

5. Равноугольные проекции.

По мере движения от первой ступени к пятой искажения площадей нарастают, а искажения углов убывают.

Недостатком многоступенчатых классификаций является отсутствие количественных характеристик, четко отделяющих одну ступень от другой. В 70-х годах XX в. Г. И. Конусова в целях разделения этих ступеней предложила локальный критерий. Этот критерий является угловой величиной. Назовем его **углом классификации**. Угол классификации вычисляется следующим образом:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{\left(\frac{a}{b} - 1 \right)}{(ab - 1)} \right].$$

В формуле под знаком арктангенса стоит дробь. В числителе дроби находится величина, характеризующая локальное искажение формы, а следовательно, и локальное искажение углов, в знаменателе — локальное искажение площадей.

Рассмотрим эту формулу подробнее. В равноугольных проекциях в любой точке карты частный масштаб длин не зависит от направления, $a = b$, и поэтому $\alpha = 0$. В равновеликих проекциях частный масштаб площади $p = ab = 1$, следовательно, $\alpha = \pi/2$. В равнопромежуточных проекциях влияния искажений форм (углов) и площадей одинаковы, в формуле числитель равен знаменателю, $\alpha = \pi/4$.

Поэтому количественная оценка разделения проекций по характеру искажений на отдельные ступени на основе величины угла классификации α производится следующим образом:

$\alpha = 0$ — равноугольные проекции;

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ — равнопромежуточные проекции;

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ — равновеликие проекции;

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ — произвольные проекции.

Для отделения одной ступени от другой углу классификации должны быть предписаны конкретные граничные значения. Пример построения классификации с девятью ступенями дан в табл. 6.

Таблица 6
Классификация проекций по характеру искажений

Угол классификации α , град	Характер искажений проекции
$\alpha = 0$	Равноугольная
$0 < \alpha \leq 1$	Практически равноугольная
$1 < \alpha < 42$	Между равноугольной и равнопромежуточной
$42 \leq \alpha < 45$	Практически равнопромежуточная
$\alpha = 45$	Равнопромежуточная
$45 < \alpha \leq 48$	Практически равнопромежуточная
$48 < \alpha \leq 89$	Между равнопромежуточной и равновеликой
$89 < \alpha < 90$	Практически равновеликая
$\alpha = 90$	Равновеликая

Как и прежде, выделены главные частные случаи: равноугольные, равнопромежуточные или равновеликие проекции. Так как значение вычисленного угла α может быть отягощено погрешностями, то в этой классификации предусмотрены зоны, сопровождаемые вербальными характеристиками: «практически равновеликие», «практически равноугольные» или «практически равнопромежуточные». Остаются довольно широкие полосы, куда умещаются проекции, расположенные между равноугольными и равнопромежуточными, а также находящиеся между равнопромежуточными и равновеликими.

Разумеется, может быть принят и иной подход к выбору гравиметрических значений угла классификации.

Недостатком изложенной теории является то, что угол классификации есть локальная характеристика. В произвольных проекциях он изменяется от точки к точке. В одних местах эта проекция может быть равноугольной, в других — равновеликой и т. п.

Для определения характера искажений в пределах значительной части проекции или даже всей карты можно воспользоваться показателями вариационного типа. В 80-х годах XX в. Е. Ю. Баева предложила вычислять угол классификации, заменив локальные единичные показатели суммами их абсолютных значений, определенных в разных точках исследуемой области карты.

Очевидно, могут быть применены и другие показатели вариационного типа. Для этого изучаемую область карты разделяют на более мелкие участки. Для каждого участка вычисляются локальные показатели искажений формы (углов) и искажений площадей. Затем вычисляются их средние квадратические значения. Тангенс угла классификации находится делением среднего квадратического искажения форм на среднее квадратическое искажение площадей.

Для приближенных оценок угла классификации можно использовать статистические данные, получаемые из анализа искажений кругов небольших размеров, построенных на поверхности отображаемого шара. В формуле для вычисления угла классификации под знаком арктангенса в числитель следует подставить отклонение от единицы коэффициента стереографичности (v_s), а в знаменатель — относительное искажение площади этого круга (v_F).

Деление проекций только по углу классификации не является достаточным. Такая классификация дает представление о соотношениях искажений, но ничего не сообщает о величинах этих искажений. Предположим, что искажения площадей в два раза больше искажений форм. Тогда, как легко подсчитать, угол классификации $\alpha = 26,5^\circ$. Наоборот, если искажения форм в два раза больше искажений площадей, то $\alpha = 63,5^\circ$.

Таблица 7

**Классификация участков проекции
по величине искажений**

Искажения, %	Вербальная оценка искажений
0—1	Очень малые
1—5	Малые
5—10	Небольшие
10—50	Умеренные
50—100	Большие
>100	Очень большие

В связи с этим дополнитель-
но нужна классификация по ве-
личинам искажений. Она может
быть построена на основе ниже-
изложенных соображений.

Для решения с помощью
карт научно-технических задач
требуется максимальная точ-
ность. Искажения форм и пло-
щадей должны быть «очень ма-
лыми», менее 1 %.

На практике широко исполь-
зуются карты с искажениями
форм и площадей до 3 %. Во
многих случаях географической
практики приемлемыми оказываются искажения, характеризуе-
мые величинами, не выходящими за пределы 5 %. Поэтому иска-
жения до 5 % включительно можно квалифицировать как «малые».

Для обеспечения точности визуальных оценок необходимо,
чтобы величины искажений не превышали 10 %. Такого порядка
искажения можно назвать «небольшими».

Дальнейшая градация величин искажений уже имеет относи-
тельное значение. Чем больше искажения, тем меньше похожи
контуры на карте на свои оригиналы в природе. Однако пользу-
ватель способен распознать объекты на карте даже при очень зна-
чительной их деформации. Поэтому условно может быть приме-
нена классификация значимости величин искажений площадей,
длин и форм, указанная в табл. 7.

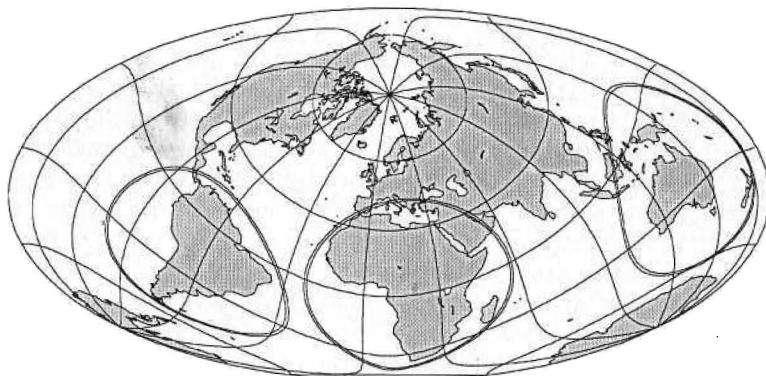


Рис. 17. Фигуры, характеризующие искажения отдельных массивов суши в равновеликой проекции

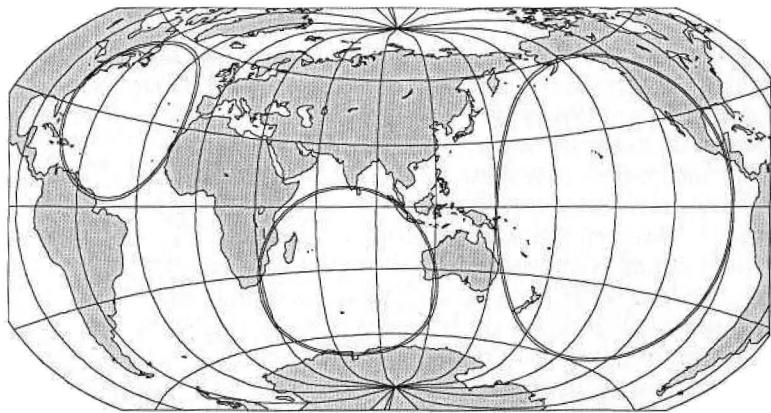


Рис. 18. Фигуры, характеризующие искажения отдельных океанов в произвольной проекции

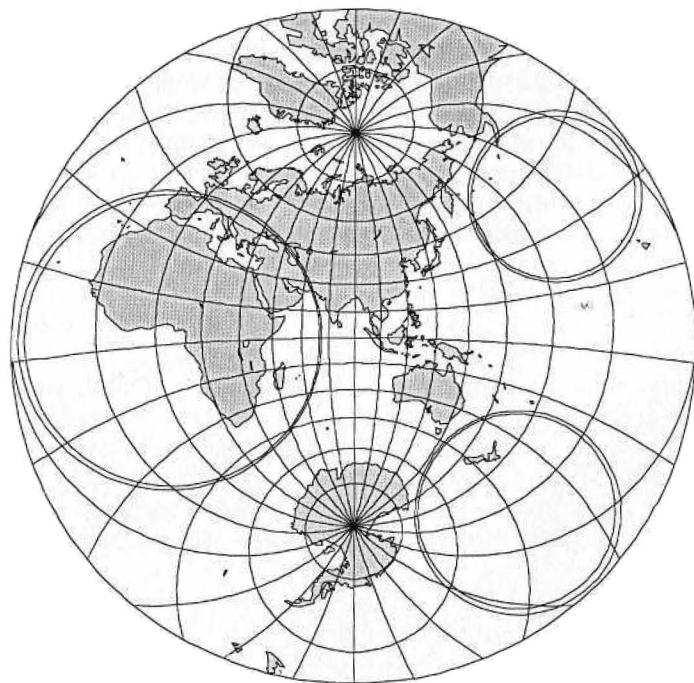


Рис. 19. Фигуры, характеризующие искажения в отдельных частях равноугольной проекции

Приведем некоторые примеры использования указанных классификаций к изображениям отдельных участков карт.

На рис. 17 в равновеликой проекции Бризмейстера (W.A. Briesemeister) построены три фигуры искажений, вмещающие соответственно Южную Америку, Африку и Австралию. В данной проекции эти регионы искажены по-разному. Для Африки характерны небольшие искажения длин (7 %) и умеренные искажения форм (29 %). Для Южной Америки и Австралии имеются умеренные искажения длин (20—23 %) и очень большие искажения форм (102—104 %).

На рис. 18 в произвольной проекции построены фигуры искажений для северной части Атлантики, а также для Индийского и Тихого океанов. Угол классификации для фигуры Индийского океана $\alpha = 28,5^\circ$. Эта часть проекции находится ближе к равнограничным проекциям. Искажения формы круга составляют 12 %, а искажения площади — 21 %. Для двух других океанов угол классификации около 60° . Эти части проекции по характеру искажений располагаются ближе к равновеликим проекциям. Для Тихого океана искажения площади составляют 40 %, искажения формы круга — 67 %, для Атлантики эти величины равны соответственно 60 и 104 %.

На рис. 19 фигуры искажений построены для равнограничной проекции. В проекции отсутствуют искажения форм кругов (коэффициент стереографичности $K_w = 1$). Однако во всех выделенных этими кругами частях проекции наблюдаются большие искажения форм (52—94 %) и очень большие искажения площадей (228—543 %).

§ 20. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ВИДУ НОРМАЛЬНОЙ КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ СЕТКИ

Ограничимся рассмотрением лишь проекций регулярных поверхностей таких тел, как шар и эллипсоид вращения. В основу этой классификации положен рисунок параллелей и меридианов при нормальной ориентировке проекции. В случае проекций шара такой же рисунок имеет картографическая сетка альмукантаратов и вертикалов (условных меридианов и параллелей). Весьма близкий к нему и рисунок сетки альмукантаратов и вертикалов эллипсоида вращения. Данная классификация ввиду своей наглядности получила широкое распространение. Существует целый ряд классов проекций, названия которых стали общепринятыми. Число классов постепенно увеличивается. Все эти проекции находят наибольшее практическое применение. Однако классификация основана на внешних признаках и не является генетической. Поэтому она не может охватить все разнообразие картограф-

фических проекций. Обнаруживается ряд проекций, для которых в этой классификации приходится отводить специальное место. Некоторые российские авторы этим проекциям присваивают название «условные». Идентично в зарубежной, например англоязычной, литературе их относят к классу «разнообразных» (*«miscellaneous»*) проекций.

Обычно выделяют следующие классы проекций: азимутальные, псевдоазимутальные, конические, псевдоконические, поликонические, цилиндрические и псевдоцилиндрические. Иногда этот список пополняется полиазимутальными и полицилиндрическими проекциями.

Профессор Л. М. Бугаевский подразделил все множество проекций на два больших подмножества. Первое из них включает проекции, параллели которых в нормальной ориентировке имеют *постоянную кривизну*. Сюда относятся проекции с параллелями в виде прямых линий, дуг окружностей или окружностей. Это подмножество охватывает подавляющее большинство практически используемых проекций.

Ко второму подмножеству отнесены проекции, параллели которых имеют *переменную кривизну*. В этом подмножестве параллели изображаются эллипсами, дугами эллипсов или любыми другими плоскими кривыми. Основу данного подмножества составляют полиазимутальные, поликонические и полицилиндрические проекции.

С математической точки зрения разнообразие и потенциальные возможности второго подмножества значительно больше, чем первого. Однако теория второго подмножества почти не разработана. Подавляющее большинство распространенных проекций принадлежит первому подмножеству, и лишь единичные практические используемые проекции можно отнести ко второму.

Как следует из названий классов, в рассмотренном множестве четко выделяются три группы проекций: А — *группа азимутальных*; К — *группа конических* и Ц — *группа цилиндрических*. Каждую группу подразделяют на четыре класса, причем три класса относятся к подмножеству с параллелями постоянной кривизны и один класс — к подмножеству с параллелями переменной кривизны. Проекции в каждой группе имеют общие черты, отличающие их от других групп, и имеется основной, базовый класс, определяющий в группе названия других классов. В группе названия других классов совпадают с названием основного класса и отличаются от него лишь приставкой «*псевдо*» или «*поли*» (табл. 8).

Проекции базовых классов (азимутальные, конические, цилиндрические) имеют ортогональную сетку. В них главные направления ориентированы по меридианам и параллелям. Изоколы в нормальной ориентировке совпадают с параллелями, а в

Классификация проекций по виду нормальной картографической сетки

Группы картографических проекций		
A	K	Ц
<i>Параллели постоянной кривизны</i>		
Азимутальные	Конические	Цилиндрические
Псевдоазимутальные	Псевдоконические	Псевдоцилиндрические (полицилиндрические)
<i>Параллели переменной кривизны</i>		
Полиазимутальные	Поликонические	Полицилиндрические

косой и поперечной — с альмукантаратами. В нормальной ориентировке одна проекция базового класса отличается от другой только промежутками между параллелями (альмукантаратами).

Такая структура классификации облегчает запоминание классов проекций и изучение их свойств. Рассмотрим проекции перечисленных групп и классов.

Группа азимутальных проекций

В этой группе проекций в нормальной ориентировке пространство около географического полюса отображается цельно, без разрывов. Во всех классах первого подмножества параллели изображаются либо окружностями, либо их дугами.

Азимутальные проекции. Отдельные азимутальные проекции были известны еще 2,5 тыс. лет тому назад. В современных условиях азимутальные проекции также имеют очень большое теоретическое и прикладное значение. Они могут иметь одну точку нулевых искажений или одну главную параллель (альмукантарат).

|| **Азимутальная картографическая проекция** — проекция, в которой параллели нормальной сетки — концентрические окружности, а меридианы — их радиусы, углы между которыми равны соответствующим разностям долгот.

Перечислим основные азимутальные проекции.

Гномоническая азимутальная проекция. В Древней Греции Фалес Милетский применял эту проекцию для карт звездного неба. Обладает важным свойством: в гномонической проекции *ортодромия* — линия кратчайшего расстояния между двумя точками на шаре — изображается прямой. Благодаря этому свойству проекция находит применение в навигации.

Стереографическая азимутальная проекция. Предложена известным астрономом Гиппархом. Главные свойства проекции изучал древнегреческий ученый Клавдий Птолемей. Проекция равногранецкая. Как уже отмечалось, она обладает замечательным свойством: любая окружность на поверхности шара в этой проекции изображается окружностью. Благодаря этому свойству, ее используют не только в картографии, но и в далеких от нее областях знания, таких, как кристаллография, электротехника и др.

Равнопромежуточная азимутальная проекция. Применялась еще в Египте для карт звездного неба. Считается, что ее предложил парижский профессор математики Г. Постель (1510—1581). В этой проекции расстояния, радиально исходящие из ее центра, изображаются без искажений. По этой причине она удобна для авиационных, сейсмических и других карт, по которым оцениваются расстояния от центра карты до текущих точек.

Равновеликая азимутальная проекция. Предложена немецким математиком И. Г. Ламбертом. Используется для составления карт полушарий, материков, океанов.

Внешняя азимутальная проекция. В проекции наблюдается Земля с околоземных космических аппаратов. В ней получают портреты



Рис. 20. Нормальная азимутальная равновеликая проекция; с удалением от полюса промежутки между параллелями убывают

Земли и других космических тел на космофотоснимках. Изучением внешних азимутальных проекций занимались очень многие ученые: Лайр (Ph. de la Hire, 1701), Кларк (A. R. Clarke, 1862), Гаммер (E. Hammer, 1890), Л. М. Бугаевский (1980) и др.

Ортографическая азимутальная проекция. В проекции наблюдатель видит Луну, планеты, кометы и другие космические тела. Карта в этой проекции создает в воображении пользователя эффект глобальности, сферичности. Проекция разработана египтянами и греками во II в. до н. э. Ее связывают также с именами греческого геометра Аполлония и астронома Гиппарха.

Азимутальные проекции применяют в нормальной, косой и поперечной ориентировках. В нормальной ориентировке проекции отличаются друг от друга только расстояниями между параллелями. Поэтому свойства разных азимутальных проекций и промежутки между параллелями на карте взаимосвязаны. Например, в равновеликой проекции эти промежутки с удалением от полюса уменьшаются (рис. 20). В равноугольной проекции наоборот — промежутки между параллелями с удалением от полюса нарастают (рис. 21). В равнопромежуточных проекциях шара они постоянны (рис. 22).

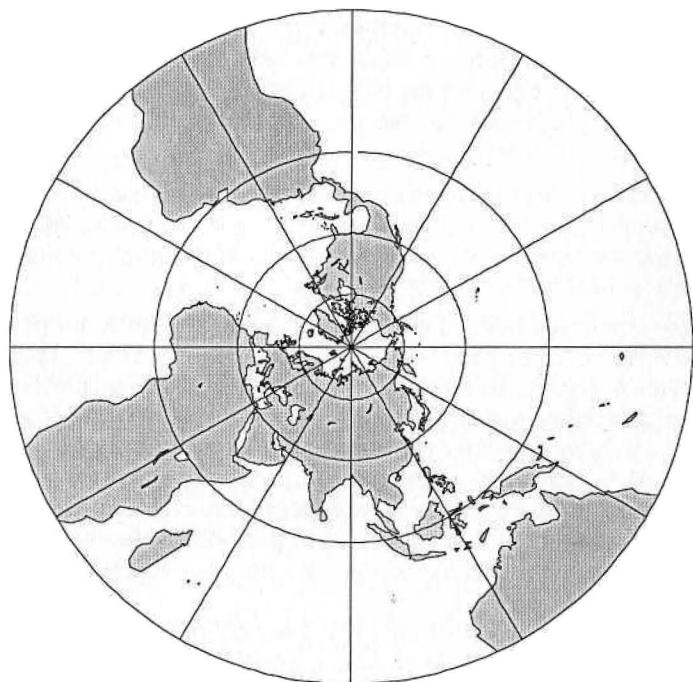


Рис. 21. Нормальная азимутальная равноугольная (стереографическая) проекция; с удалением от полюса промежутки между параллелями нарастают

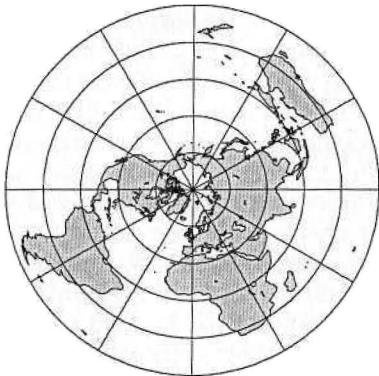


Рис. 22. Эмблема ООН (в центральной части — равнопромежуточная по меридианам азимутальная проекция)

Изоколы в нормальной ориентировке совпадают с параллелями, а в косой и поперечной — с альмукантарами. Таким образом, изоколы в любой азимутальной проекции являются окружностями.

В этой группе отдельно выделяют так называемые *обобщенные азимутальные проекции*, в которых на карте промежутки между меридианами изменяются с долготой, что приводит к сжатию или растяжению изображений на разных меридианах.

Псевдоазимутальные проекции. От азимутальных отличаются только видом сетки меридианов.

||| Псевдоазимутальная картографическая проекция — проекция, в которой параллели нормальной сетки — концентрические окружности, а меридианы — кривые линии, в частном случае — прямые, расходящиеся в центре окружностей.

Пример псевдоазимутальной проекции в нормальной ориентировке приведен на рис. 23. Эту проекцию в 1879 г. предложил Вихель (H. Wiechel). Вероятно, проекция Вихеля является одной из первых псевдоазимутальных проекций данного класса. Меридианы в проекции изображаются дугами окружностей, образуя своеобразный вихревой рисунок. Полюс, расположенный в центре проекции, показан точкой, другой, противоположный ему полюс, — окружностью. Вдоль меридианов сохраняется масштаб длин. Это равновеликая проекция, но со значительными искажениями форм.

В псевдоазимутальных проекциях отдельные меридианы могут быть показаны прямыми линиями. Псевдоазимутальные проекции обычно применяются в косой и поперечной ориентировках.

Ряд таких проекций в 50-х годах XX в. разработал Г. А. Гинзбург. Они предназначены для построения карт мира и карт океанов.

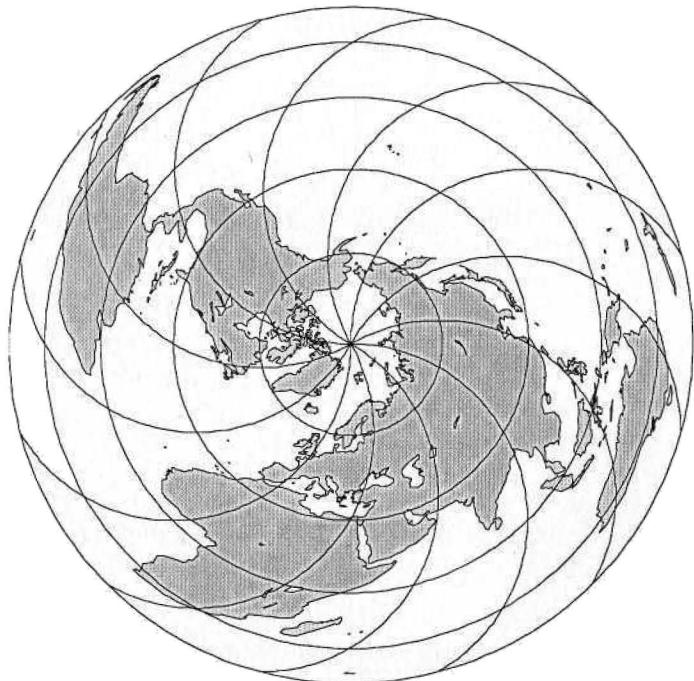


Рис. 23. Нормальная псевдоазимутальная равновеликая проекция Вихеля

Известна также равновеликая псевдоазимутальная проекция, которую в 70-х годах XX в. разработал для карт Мирового океана В. О. Муревскис.

Полиазимутальные проекции. Особенностью этих проекций является то, что центры окружностей, изображающих в нормальной ориентировке параллели, располагаются на разных удалениях от географического полюса. Один из возможных вариантов картографической сетки приведен на рис. 24.

Полиазимутальная картографическая проекция с параллелями постоянной кривизны — проекция, в которой параллели нормальной сетки — эксцентрические окружности, а меридианы — линии, сходящиеся в точке полюса, причем центры параллелей расположены на среднем меридиане.

Проекции данного класса пока недостаточно изучены. Публикации о их теории относятся к концу XX в.¹ По характеру иска-
жений полиазимутальные проекции могут быть любыми. Практи-
ческая ценность этих проекций пока не совсем ясна.

¹ Толстова Т. И. Обобщенные поликонические проекции // Докл. АН СССР, 1981. — Т. 259. — № 1. — С. 61—65.

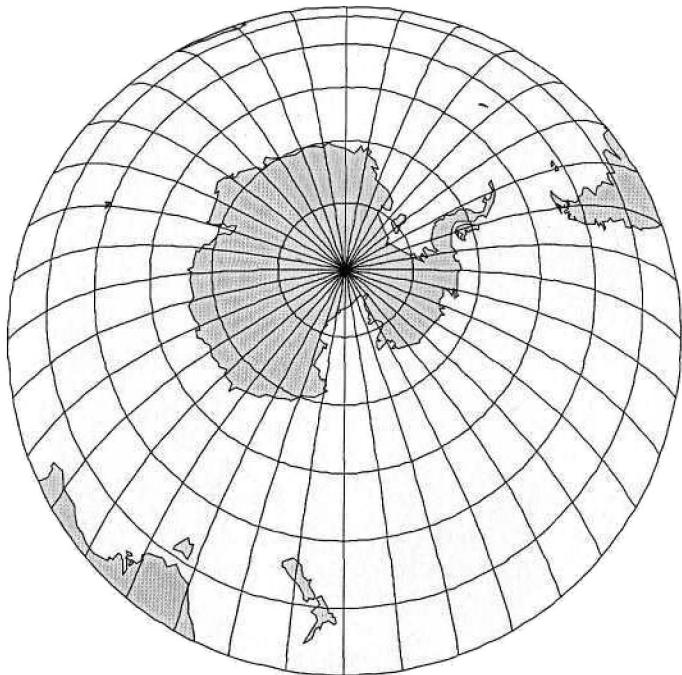


Рис. 24. Вариант произвольной нормальной полизимутальной проекции; параллели — эксцентрические окружности, меридианы — исходящие из точки полюса кривые

Полизимутальные проекции с параллелями переменной кривизны. Параллели изображаются эллипсами, овалами, другими плавными замкнутыми кривыми, а в удалении от полюсов — дугами этих кривых; меридианы — пучком прямых или кривых линий, исходящих из точки, представляющей географический полюс. Пространство вокруг полюса изображается без разрывов. Такие проекции естественны для отображения трехосного эллипсоида. В частности, проекции с эллиптическими параллелями применялись для построения карт спутника Марса Фобоса, а также для карт некоторых спутников других планет.

Группа конических проекций

Проекции, принадлежащие к группе конических, являются наиболее общими. Теоретически можно показать, что проекции азимутальной и цилиндрической групп представляют собой крайние, предельные случаи группы конических проекций. Пространство у полюсов отображается с разрывами. Во всех классах перво-

го подмножества параллели на плоскости представляют собой дуги окружностей.

Конические проекции. Эти проекции были известны еще в Древней Греции. Название обусловлено тем, что при проектировании земной поверхности на плоскость в качестве промежуточной использована поверхность конуса.

Коническая картографическая проекция — проекция, в которой параллели нормальной сетки — дуги концентрических окружностей, а меридианы — их радиусы, углы между которыми пропорциональны соответствующим разностям долгот.

В конической проекции у полюсов имеются разрывы. Это обусловлено тем, что полный круг долгот (от $-\pi$ до $+\pi$) отображается в сектор, угловая величина которого всегда меньше 2π . Поэтому на карте углы между линиями меридианов не равны соответствующей разности долгот, а лишь пропорциональны ей. Коэффициент пропорциональности α определяет степень сжатия круга в сектор и является важным параметром конических проекций. Его значения находятся в пределах.

$$0 < \alpha < 1.$$

На рис. 25—27 приведены примеры конических проекций с разными значениями этого параметра. С приближением значения

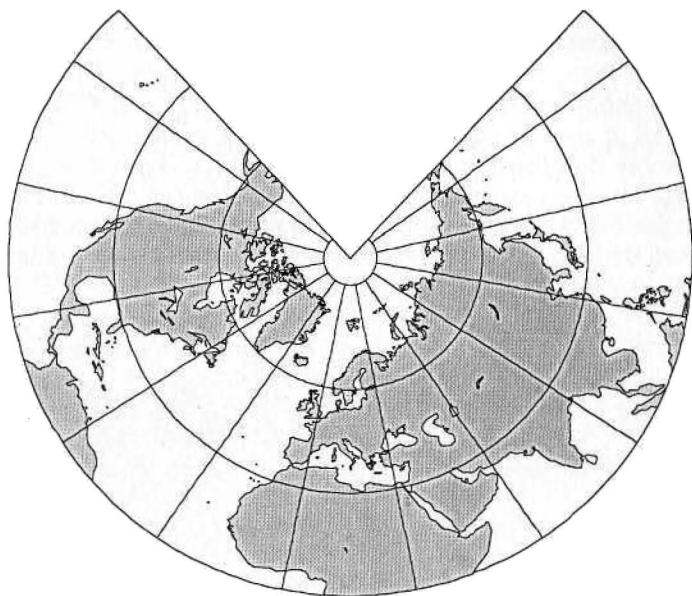


Рис. 25. Вариант произвольной нормальной конической проекции (параметр $\alpha \approx 0,8$)

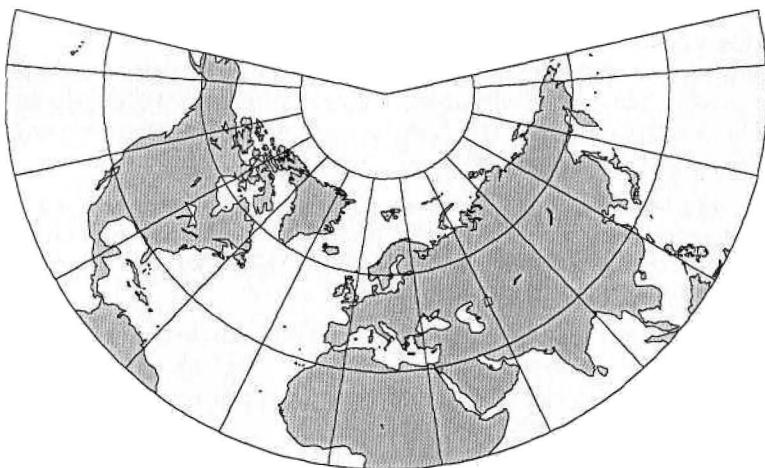


Рис. 26. Вариант произвольной нормальной конической проекции
(параметр $\alpha \approx 0,6$)

параметра α к 1 коническая проекция все больше становится похожей на азимутальную проекцию. В пределе при $\alpha = 1$ коническая проекция превращается в азимутальную проекцию. С другой стороны, по мере приближения параметра α к 0 кривизна параллелей уменьшается, параллели выпрямляются, вид проекции все больше похож на вид цилиндрической проекции. В пределе при $\alpha = 0$ коническая проекция превращается в цилиндрическую проекцию. Следовательно, азимутальные и цилиндрические проекции — суть предельные случаи конических проекций.

В каждой конической проекции имеются одна или две главные параллели, на которых сохраняется главный масштаб и, следовательно, нет искажений. Значения параметра α зависят от широт главных параллелей. Чем их широты ближе к экваториальным,

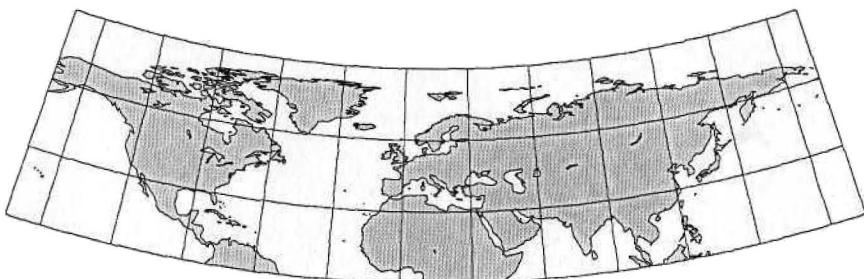


Рис. 27. Вариант произвольной нормальной конической проекции
(параметр $\alpha \approx 0,1$)

тем а ближе к 0. С другой стороны, чем широты главных параллелей ближе к полярным, тем параметр а ближе к 1.

Используются равновеликие, равноугольные и равнопромежуточные конические проекции. Вероятно, первую равнопромежуточную проекцию предложил Клавдий Птолемей. В XVI в. их совершенствовал Г. Меркатор. Начиная с XVIII в. изучением и разработкой конических проекций занимались многие ученые. Известны равновеликие конические проекции Альберса (H. C. Albers, 1773—1833) и Ламберта, равноугольные проекции Ламберта и Гаусса, равнопромежуточные Л. Эйлера. Коническим проекциям также посвящены труды Д. И. Менделесева, В. В. Витковского, В. В. Каврайского, Ф. Н. Красовского и др.

В России наибольшее распространение получили равнопромежуточные и равноугольные конические проекции, в США, Канаде и некоторых других странах применяют равновеликие, конические проекции.

Выделяют также *обобщенные конические проекции*, в которых на карте промежутки между меридианами изменяются с долготой, что приводит к сжатию или растяжению изображений на разных меридианах.

Псевдоконические проекции. Подобные проекции находят на картах древнегреческого ученого Аристотеля (384—322 до н. э.). Они были известны Птолемею. В определенной мере псевдоконические проекции обобщают конические проекции, заменяя в них прямолинейные меридианы криволинейными.

Псевдоконическая картографическая проекция — проекция, в которой параллели нормальной сетки — дуги концентрических окружностей, осевой меридиан — прямая, на которой расположен центр параллелей, остальные меридианы — кривые.

В 1752 г. Ригоберт Бонн (1727—1795), французский инженер-гидрограф, предложил псевдоконическую проекцию использовать для карт Франции. С тех пор за проекцией закрепилось название *проекции Бонна*. Ее применяли в начале XIX в. для топографических карт Франции. В ней построена российская трехверстная Военно-топографическая карта европейской части России, непрерывно издававшаяся с 1847 г. В атласах того времени в этой проекции построены карты Европы, Азии, Северной Америки. В конце XX в. ее использовали в СССР для построения Геоморфологической карты мира.

Проекция Бонна равновеликая. Главный масштаб сохраняется на среднем меридиане и на всех параллелях. Параллели под прямым углом пересекают только средний меридиан. Однако имеется одна параллель, пересекающая все меридианы под прямым углом. Ее условно назовем главной параллелью проекции Бонна. На рис. 28, где отображена проекция Бонна, широта этой параллели 30° .

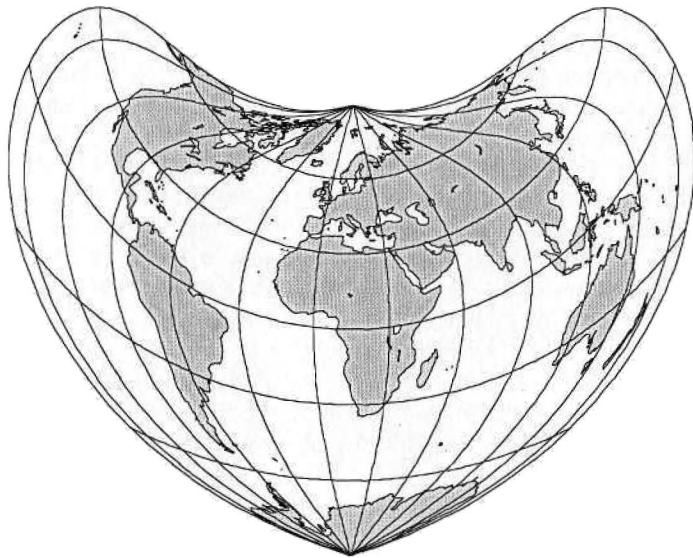


Рис. 28. Проекция Бонна, широта главной параллели 30°

От выбора широты главной параллели зависит общий вид проекции. На рис. 29 приведена проекция с широтой главной параллели 90° . Это проекция Штаба — Вернера (Stab — Werner) или просто Вернера (J. Wernter). Предложена примерно в 1500 г. Она известна также под названием «сердцевидная». В XVI — XVII вв. применялась для построения карт мира. В сущности, проекция представляет собой частный случай проекции Бонна.

От проекции Вернера до псевдоазимутальной проекции один шаг. Сделать этот шаг геометрически невозможно. Однако общие уравнения проекций этих двух классов одинаковы. Если в проекции Вернера устраниТЬ разрывы у полюса, то получим псевдоазимутальную проекцию. Это можно сделать, внеся соответствующие изменения в формулы проекции Вернера. Именно так и поступил советский картограф Г. А. Гинзбург, создавая псевдоазимутальную проекцию для карты Атлантического и Северного Ледовитого океанов.

По мере приближения главной параллели к экватору кривизна всех параллелей уменьшается, и они постепенно выпрямляются (рис. 30). Когда параллели станут прямолинейными, проекция перейдет в группу цилиндрических проекций — получится псевдоцилиндрическая проекция. Таким образом, класс псевдоконических проекций обобщает класс конических проекций; с одной стороны, его же частными случаями являются псевдоазимутальные проекции, а с другой — псевдоцилиндрические проекции.

В силу своей «сердцевидной» формы проекция Бонна вызывает определенные эмоциональные ассоциации, связанные с понятиями доброжелательности, сердечности и любви. Поэтому ее часто используют при создании разного рода эмблем, почтовых марок, оформлении обложек книг и др. (рис. 31, 32).



Рис. 29. Псевдоконическая проекция Вернера (Штаба—Вернера); частный случай проекции Бонна, когда широта главной параллели равна 90°

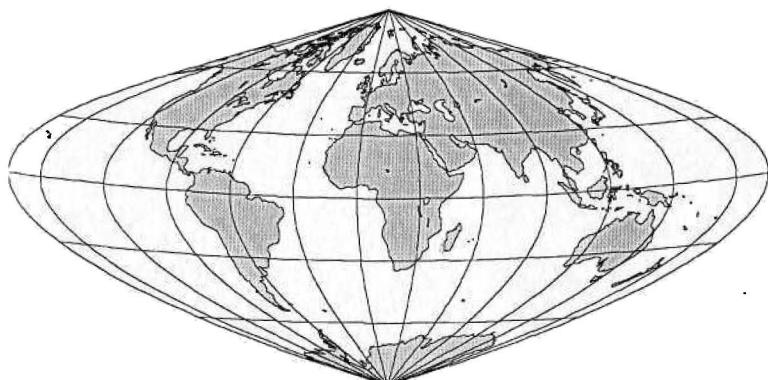


Рис. 30. Псевдоконическая проекция Бонна, широта главной параллели $2,5^{\circ}$



Рис. 31. Использование сердцевидного рисунка проекции Бонна на почтовой марке США, рисунок проекции сопровождается словом «Любовь» («Love»)

класс. Из обобщенных формул поликонических проекций следуют общие формулы проекций любого класса данного подмножества. Поэтому поликонические проекции относятся к числу важнейших проекций.

Поликоническая картографическая проекция — проекция, в которой параллели нормальной сетки — дуги эксцентрических окружностей, осевой меридиан — прямая, на которой расположены центры параллелей, остальные меридианы — кривые линии.

По характеру искажений поликонические проекции разделяют на равновеликие, произвольные и равноугольные. Наибольшее практическое значение имеют произвольные и равноугольные поликонические проекции. Известны также теоретические исследования Н. А. Урмаева, Л. М. Бугаевского и других ученых, посвященные разработке теории равновеликих проекций.

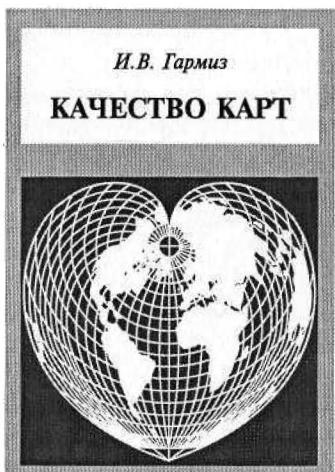


Рис. 32. Использование рисунка проекции Бонна для оформления обложки книги

Поликонические проекции. Класс поликонических проекций обобщает все подмножество проекций с параллелями постоянной кривизны. В этом подмножестве он — наиболее общий

Простая поликоническая проекция — так называют проекцию, разработанную в США. Она известна также как «американская» проекция. Предположительно ее разработал в 1820 г. директор Береговой Съемки США Хасслер (F. R. Hassler). В США для составления топографических карт ее применяли вплоть до 1950 г.

Простую поликоническую проекцию можно представить как состоящую из таких участков конических проекций, в которых каждая параллель является главной. Поэтому в простой поликонической проекции на любой параллели нет искажений длин. Однозначно определен и радиус каждой

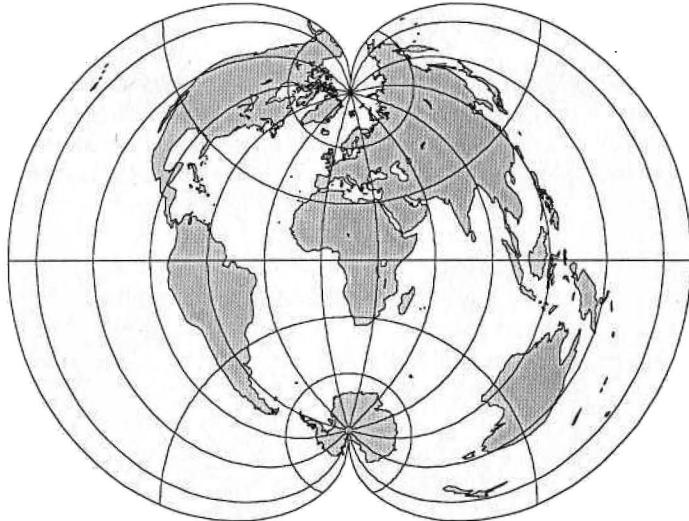


Рис. 33. Простая поликоническая проекция

параллели на карте. Искажений длин нет также на среднем прямолинейном меридиане. Центры окружностей, изображающих на карте параллели, расположены на среднем прямолинейном меридиане.

Существенным недостатком простой поликонической проекции является большая кривизна ее параллелей, особенно в высоких широтах. Другим недостатком являются значительные искажения длин, углов и площадей на тех участках, которые расположены по краям проекции в удалении от среднего меридиана (рис. 33).

Эти недостатки не позволяют применять простую поликоническую проекцию для отображения всей земной поверхности. Однако она удачно использована при построении отдельных листов многолистной Международной карты мира масштаба 1 : 1 000 000.

Трудами известных ученых ЦНИИГАиК Н. А. Урмаева, Т. Д. Салмановой и Г. А. Гинзбурга разработан ряд новых поликонических проекций, нашедших применение при создании настенных карт и карт атласов. Эти проекции обычно известны как *поликонические проекции ЦНИИГАиК*. На рис. 34 приведена одна из проекций, использовавшаяся для построения многочисленных тематических карт для высшей школы в масштабе 1 : 15 000 000.

Среди поликонических проекций особо выделяют *круговые* — проекции, в которых и меридианы, и параллели являются дугами окружностей, а экватор и средний меридиан — прямые линии. К этому типу принадлежит равноугольная *поликоническая проекция Лагранжа*, приведенная на рис. 35.

В 1772 г. немецкий ученый И. Г. Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728—1777) предложил равноугольное отображение

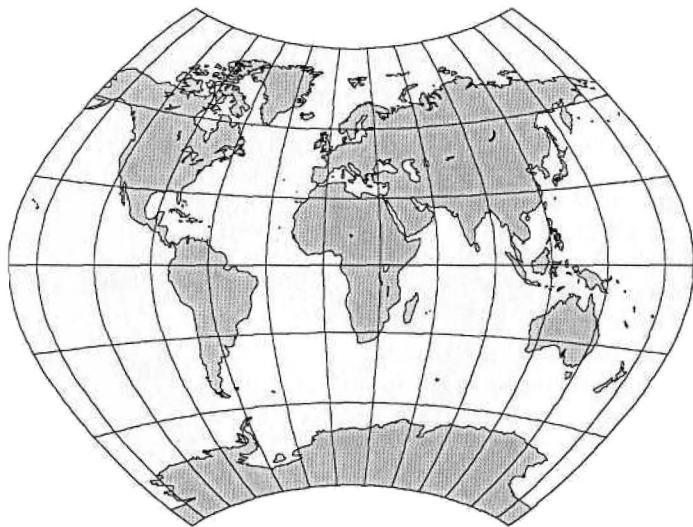


Рис. 34. Поликоническая проекция карт для высшей школы, разработанная на основе проекции ЦНИИГАиК (1954)

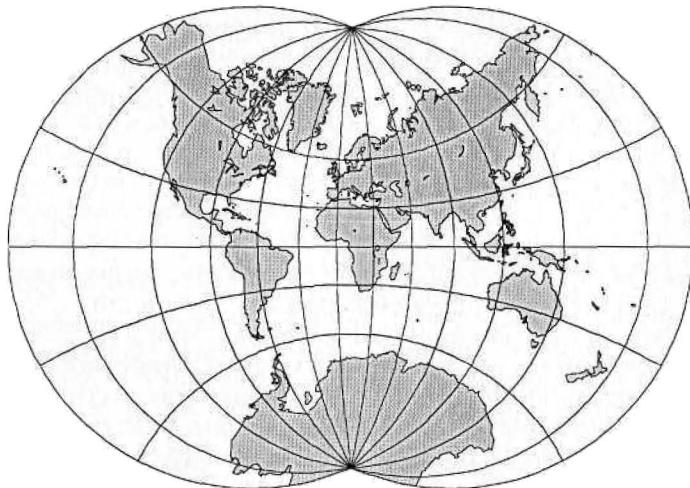


Рис. 35. Равноугольная круговая поликоническая проекция Лагранжа

мира в круге. Эту проекцию обычно называют проекцией Лагранжа. Знаменитый французский математик Ж.Л.Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813) в 1779 г. поставил и решил общую задачу — найти все равноугольные проекции с круговыми меридианами и параллелями. По существу он обобщил концепцию

Ламберта. Любые равноугольные поликонические проекции тождественны проекции Лагранжа.

Поликонические проекции с параллелями переменной кривизны. В этих проекциях параллели обычно изображаются эллипсами, реже — другими плоскими кривыми. Меридианы — прямые или кривые линии. Известны предложения подобных проекций для карт России, карт Мирового океана и др.

Группа цилиндрических проекций

Отличительной чертой группы цилиндрических проекций является то, что во всех классах первого подмножества параллели изображаются прямыми линиями. Эти прямые можно рассматривать как частный случай дуг окружностей, центры которых — в бесконечности.

Цилиндрические проекции. Название обусловлено тем, что при проектировании земной поверхности на плоскость в качестве промежуточной использована поверхность цилиндра. Картографическая сетка проекций этого класса имеет наиболее простой вид — она состоит из совокупности ортогонально пересекающихся прямых линий. Проекция может иметь либо одну, либо две главные параллели (альмукантары), на которых отсутствуют искажения.

Цилиндрическая картографическая проекция — проекция, в которой параллели нормальной сетки — параллельные прямые, а меридианы — перпендикулярные параллелям прямые, расстояния между которыми пропорциональны разностям долгот.

По характеру искажений цилиндрические проекции содержат весь спектр проекций.

Равновеликую цилиндрическую проекцию в 1772 г. разработал И. Г. Ламберт. Картографическая сетка равновеликой цилиндрической проекции показана на рис. 36.

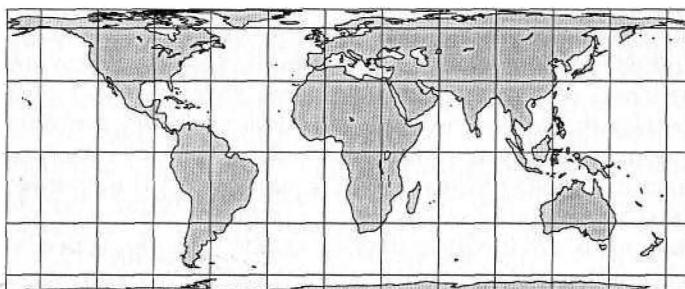


Рис. 36. Нормальная равновеликая цилиндрическая проекция

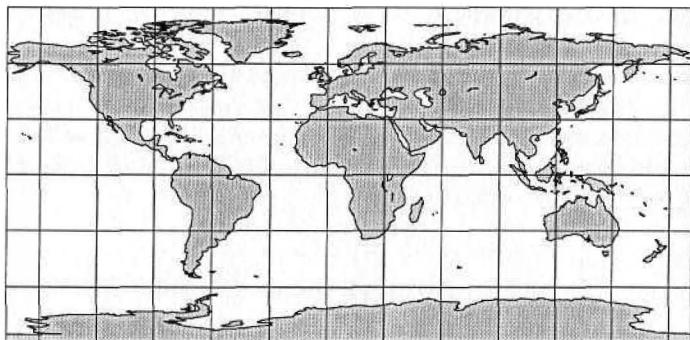


Рис. 37. Нормальная равнопромежуточная цилиндрическая проекция

Эратосфеном была составлена карта мира с сеткой меридианов и параллелей в виде взаимно перпендикулярных равноотстоящих прямых. Вероятно, это была равнопромежуточная цилиндрическая проекция. Между тем считается, что равнопромежуточную цилиндрическую проекцию предложил в 1438 г. Генрих Мореплаватель (1394—1460). Картографическая сетка равнопромежуточной цилиндрической проекции показана на рис. 37.

В 1569 г. знаменитый фламандский картограф Меркатор в равноугольной цилиндрической проекции создал первую многолистную карту мира, предназначенную для использования в навигации. Впоследствии проекция стала называться его именем и получила широкое распространение в мореплавании благодаря весьма ценному ее свойству — в проекции Меркатора линия постоянного азимута (локсодромия) изображается прямой. На такой карте очень удобно прокладывать маршруты по заранее заданным азимутам. Проекция Меркатора приведена на рис. 38.

Существует ряд и других произвольных по характеру искажений цилиндрических проекций. Также можно создать *обобщенные цилиндрические проекции*, в которых расстояния между линиями меридианов изменяются с долготой.

Псевдоцилиндрические проекции. Это весьма обширный класс проекций. Вероятно, появление псевдоцилиндрических проекций продиктовано естественным желанием сохранить простой рисунок цилиндрических проекций и устраниТЬ их основной недостаток. В цилиндрических проекциях точки полюсов изображаются отрезками такой же длины, как и экватор в этой проекции. Промежутки между меридианами на всех широтах одни и те же. В силу этого на картах возникают значительные деформации изображений полярных районов. В псевдоцилиндрических проекциях полюса могут быть показаны как точками, так и отрезками заданной длины.

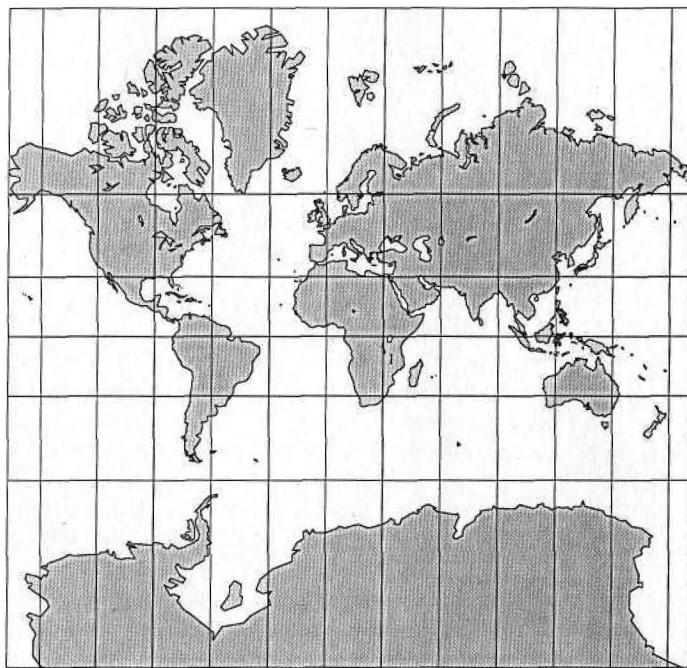


Рис. 38. Нормальная равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора

Псевдоцилиндрическая картографическая проекция — проекция, в которой параллели нормальной сетки — параллельные прямые, средний меридиан — прямая, перпендикулярная параллелям, а остальные меридианы — ломаные прямые или кривые.

Сетка меридианов и параллелей не ортогональна. Поэтому по характеру искажений псевдоцилиндрические проекции бывают либо равновеликими, либо произвольными. Равноугольные проекции в силу геометрической структуры картографической сетки невозможны.

Из-за неортогональности картографической сетки главные направления, а следовательно, и экстремальные масштабы не совпадают с направлением меридианов и параллелей. Исключением являются лишь точки пересечения среднего прямолинейного меридиана с параллелями и экватором.

Меридианы изображаются ломанными прямыми, а также дугами эллипсов, парабол, гипербол или синусоид.

Нормальные псевдоцилиндрические проекции имеют две оси симметрии — экватор и средний меридиан.

Промежутки между меридианами в равновеликих проекциях пропорциональны разности долгот. В произвольных по характеру

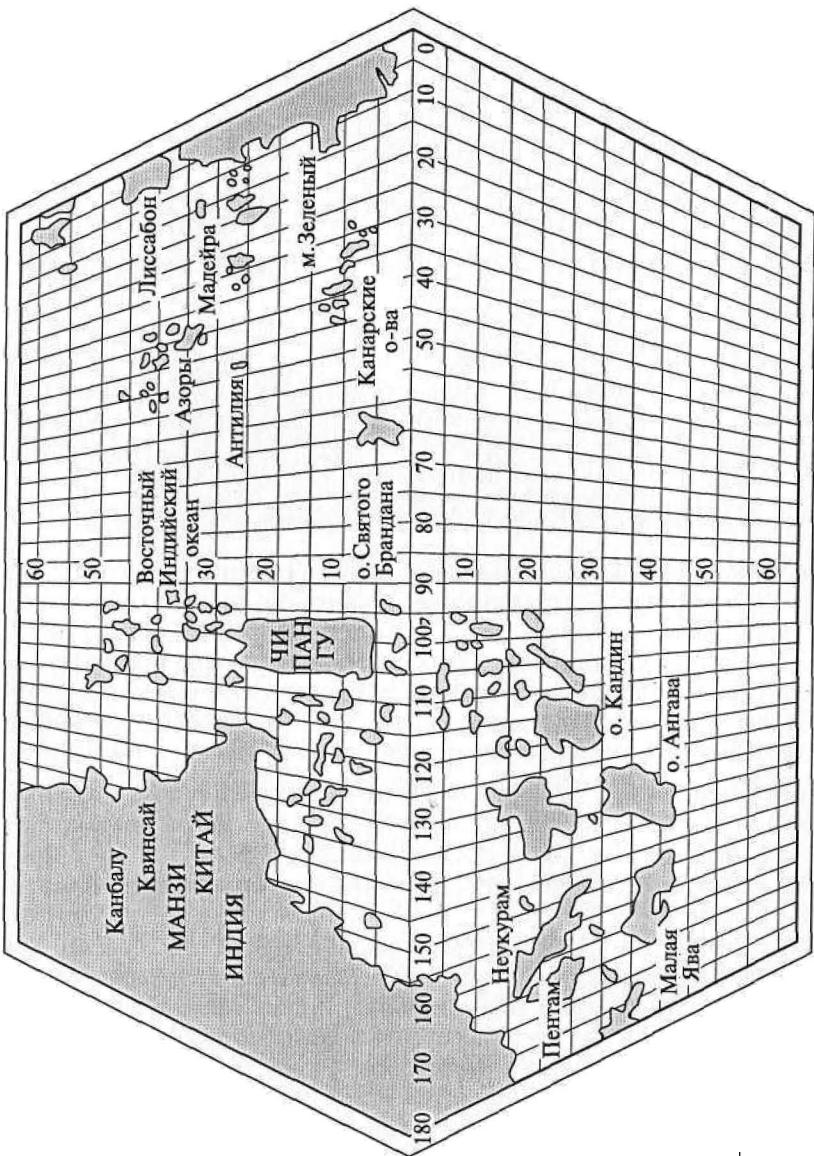


Рис. 39. Карта Атлантического океана в псевдоцилиндрической проекции Паоло Тосканелли (1474)

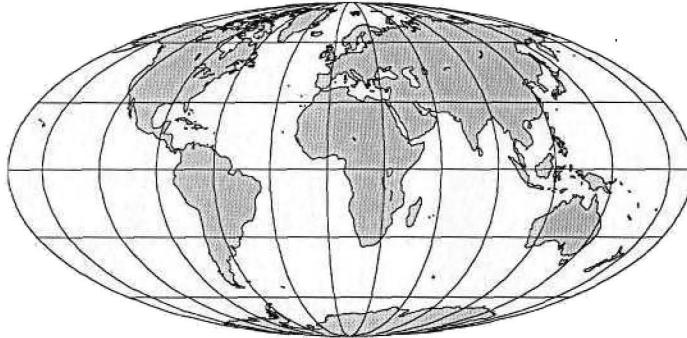


Рис. 40. Псевдоцилиндрическая равновеликая эллиптическая проекция Мольвейде. Полюса на карте изображаются точками. Прямолинейный средний меридиан равен половине длины экватора. Меридианы с долготами $\pm 90^\circ$ образуют круг, площадь которого равна площади полушария Земли. Другие меридианы — дуги эллипсов, проведенные через равные промежутки. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 40^\circ 44'$

искажений проекциях они могут убывать или, значительно реже, возрастать от среднего меридиана к востоку и западу.

Промежутки между параллелями определяются принятым законом изображения земной поверхности на плоскости.

Псевдоцилиндрические проекции в основном применяются для отображения в мелком масштабе крупных частей шарообразной планеты или всей ее поверхности. Поэтому в псевдоцилиндрических проекциях земная поверхность принимается за поверхность шара.

К настоящему времени разработан довольно обширный ряд псевдоцилиндрических проекций. В данном и последующих параграфах ознакомимся с наиболее известными проекциями этого класса.

На рис. 39 приведена в псевдоцилиндрической проекции исторически известная карта Атлантического океана Паоло Тосканелли (1474). Этой картой ее автор утверждал, что расстояние от Европы на запад до Азии составляет всего лишь третью часть окружности земного шара. Ссылаясь на эту карту, Колумб обосновывал свой проект достижения Восточной Азии при плавании от Европы в западном направлении¹.

Если меридианы изображены эллипсами, то проекцию называют эллиптической; если синусоидами — то синусоидальной. На рис. 40 показана нормальная равновеликая псевдоцилиндрическая эллиптическая проекция. Ее в 1805 г. в Германии предложил Моль-

¹ Дитмар А. Б. От Птолемея до Колумба. — М.: Мысль, 1989. — С. 211.

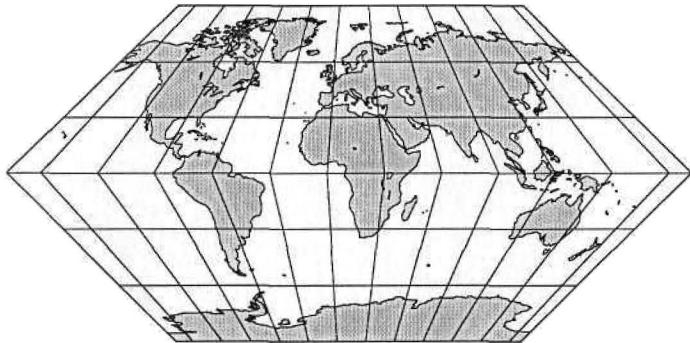


Рис. 41. Эккерта I — произвольная псевдоцилиндрическая проекция. Прямолинейные меридианы проведены через равные промежутки. Средний меридиан (на рисунке отсутствует) и линии полюсов равны половине длины экватора. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 47^{\circ} 10'$

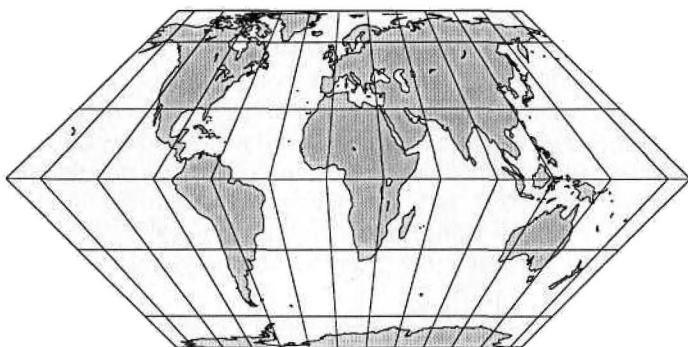


Рис. 42. Эккерта II — равновеликая псевдоцилиндрическая проекция. Прямолинейные меридианы проведены через равные промежутки. Средний меридиан (на рисунке отсутствует) и линии полюсов равны половине длины экватора. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 55^{\circ} 10'$

вейде. До настоящего времени проекция пользуется популярностью и широко применяется для построения карт мира.

Проекцию Мольвейде, как и другие псевдоцилиндрические проекции, чаще всего применяют в нормальной ориентировке. Менее известны, однако кажутся довольно перспективными, также поперечные и косые варианты проекции Мольвейде.

В 1906 г. немецкий ученый Эккерт (Max Eckert, 1868—1938) предложил шесть вариантов псевдоцилиндрических проекций. Они известны по номерам. Проекции с нечетными номерами являются произвольными по характеру искажений, а с четными — равновеликими. Они приведены на рис. 41—46.



Рис. 43. Эккертa III — произвольная эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция. Параллели и меридианы проведены через равные промежутки. Крайние меридианы — дуги окружностей. Средний меридиан и линии полюсов равны половине длины экватора. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 35^{\circ} 58'$

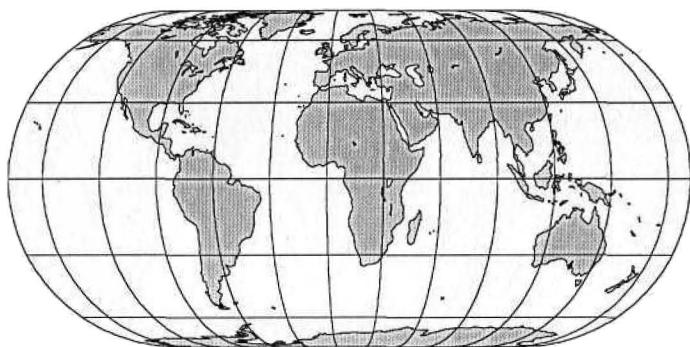


Рис. 44. Эккертa IV — равновеликая эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция. Меридианы проведены через равные промежутки. Крайние меридианы — дуги окружностей. Средний меридиан и линии полюсов равны половине длины экватора. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 40^{\circ} 30'$

На рис. 47 и 48 показаны псевдоцилиндрические проекции, меридианы которых, кроме среднего прямолинейного, в первом случае дуги гипербол, а во втором — дуги парабол. Эти проекции, по аналогии с эллиптическими, будем называть соответственно гиперболическими и параболическими проекциями.

Хорошо известна синусоидальная равновеликая проекция Сансона, предложенная в XVI в. (рис. 49). Все ее параллели и средний меридиан строятся в главном масштабе, и, следовательно, на них нет искажений длин. В свое время проекция применялась для построения карт континентов и даже карт мира. В настоящее время

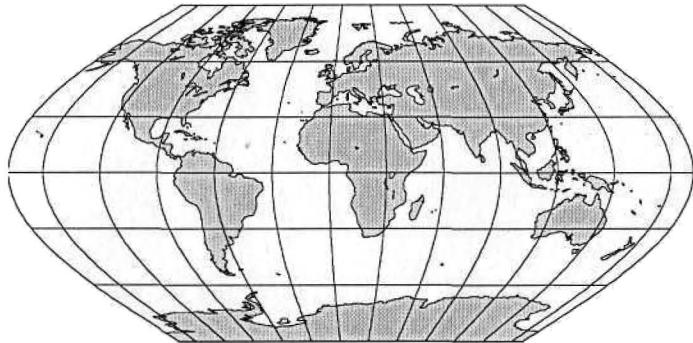


Рис. 45. Эккерта V — произвольная синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция. Параллели и меридианы проведены через равные промежутки. Средний меридиан и линии полюсов равны половине длины экватора. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 37^{\circ} 55'$

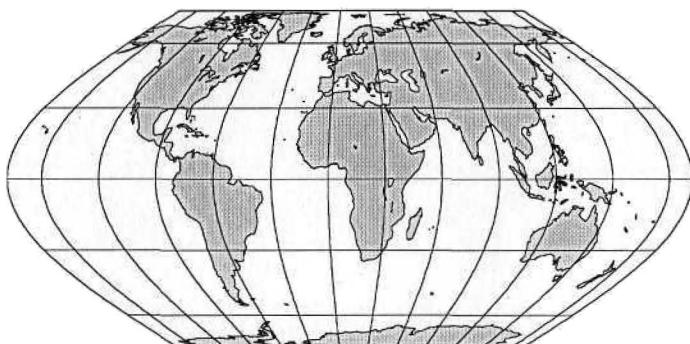


Рис. 46. Эккерта VI — равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция. Меридианы проведены через равные промежутки. Средний меридиан и линии полюсов равны половине длины экватора. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 49^{\circ} 16'$

ее используют лишь в различных теоретических работах. На рис. 50 приведена произвольная псевдоцилиндрическая проекция, полученная модифицированием проекции Сансона: на карте нарушен закон изменения промежутков между параллелями.

Упомянутые проекции дают представление о разнообразии класса псевдоцилиндрических проекций. Разумеется, этими примерами перечень псевдоцилиндрических проекций не исчерпывается. Известны и используются псевдоцилиндрические проекции Н. А. Урмаева, В. В. Каврайского, Г. А. Гинзбурга, А. Г. Робинсона и многих других ученых-картографов.

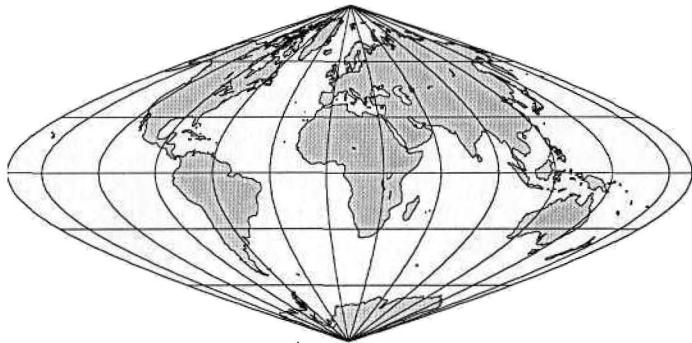


Рис. 47. Произвольная псевдоцилиндрическая гиперболическая проекция, меридианы которой, кроме среднего прямолинейного, — дуги гипербол. Средний меридиан (не показан) — прямая линия, равен половине длины экватора. Параллели и меридианы проведены через равные промежутки. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 21^{\circ} 14'$.

Проекцию предложил в 1934 г. Р. В. Путниньш (Латвия)

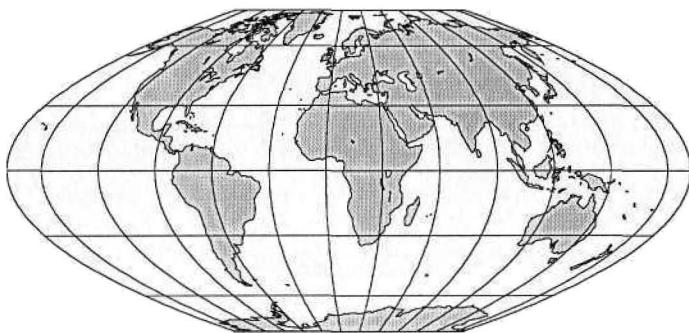


Рис. 48. Равновеликая псевдоцилиндрическая параболическая проекция МакБраде—Томаса. Средний меридиан (не показан) — прямая линия, равен 0,48 части длины экватора. Меридианы проведены через равные промежутки. Длины полярных линий составляют третью часть длины экватора. Масштаб сохраняется на параллелях с широтами $\pm 45^{\circ} 30'$. Проекцию предложили в 1949 г. Ф. В. МакБраде и П. Д. Томас (США)

Псевдоцилиндрические проекции обобщают цилиндрические проекции. Иначе, цилиндрические проекции можно рассматривать как частный случай псевдоцилиндрических проекций.

Как уже отмечалось, псевдоцилиндрические проекции можно рассматривать как частный случай псевдоконических проекций, когда их параллели в пределе из дуг окружностей превращаются в отрезки параллельных прямых линий. Аналогично из поликонических проекций выпрямлением их параллелей получим *полицилиндрические проекции*. Однако картографические сетки этих двух

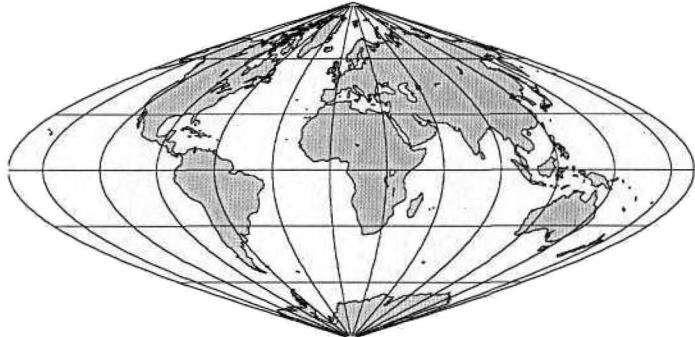


Рис. 49. Равновеликая псевдоцилиндрическая синусоидальная проекция Сансона. Средний меридиан — прямая линия, равен половине длины экватора. Меридианы и параллели проведены через равные промежутки. Масштаб длин сохраняется на всех параллелях и на среднем меридиане

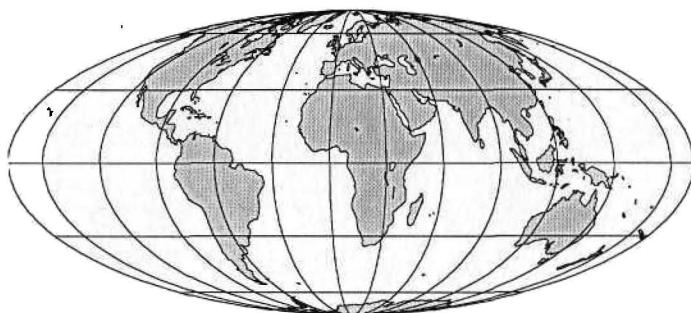


Рис. 50. Произвольная псевдоцилиндрическая проекция. В центре карты проекция практически равнопромежуточная, в середине карты в средних широтах — между равнопромежуточной и равноугольной, в остальных частях — между равнопромежуточной и равновеликой, причем чем ближе к краям, тем ближе к равновеликой

классов проекций в подмножестве, в котором параллели имеют постоянную кривизну, не будут различаться. Это обусловлено тем, что центры параллелей как псевдоцилиндрических, так и полицилиндрических проекций находятся в бесконечности. Поэтому, хотя в зарубежной специальной литературе встречаются описания полицилиндрических проекций, в российской практике полицилиндрические проекции в отдельный класс не выделяют. Все проекции этого типа классифицируются как псевдоцилиндрические.

Полицилиндрические проекции с параллелями переменной кривизны. В этих проекциях параллели изображаются эллипсами или другими кривыми; меридианы — прямыми или кривыми линиями.

§ 21. КЛАССИФИКАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ПО СОСТАВУ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Большинство карт имеют один главный масштаб, а уравнения их проекций определяются единым набором параметров. В то же время используются карты, проекции которых нельзя охарактеризовать одним набором параметров. Карта может состоять из нескольких проекций, ее отдельные части по тем или иным соображениям могут быть отображены преувеличенными или преуменьшенными, а реальное пространство представлено в анаморфизированном (деформированном) виде. По этим признакам проекции можно классифицировать следующим образом:

- проекции с единым набором параметров;
- составные проекции;
- многополосные проекции;
- многогранные проекции;
- проекции анаморфизированного пространства.

Составные проекции

Составные проекции применяют, например, для карт мира.

Составная картографическая проекция — проекция, в которой отдельные части картографической сетки построены в разных проекциях или в одной проекции, но с разными параметрами.

Составные проекции в известной мере позволяют управлять величинами искажений. Они могут быть *с разрывами* и *без разрывов*.

На рис. 51, 52 приведены карты с изоколами масштаба площадей и изоколами наибольших искажений углов в составной (без разрывов) поликонической проекции ЦНИИГАиК (1954). Ее картографическая сетка несимметрична относительно среднего прямолинейного меридiana. Визуально несимметричность сетки в этом случае практически незаметна. Только сопоставляя формы изокол в правой и левой частях проекции, можно обнаружить эту несимметричность. В западной части картографической сетки параллели являются равноразделенными, а в восточной части — неравноразделенными. В восточной части промежутки между меридианами слегка, практически незаметно, убывают по направлению от центра карты к ее восточному краю. По этой причине в западной части сетки искажения площадей больше, а искажения углов меньше, чем в восточной части. Благодаря убыванию промежутков между меридианами в восточной части, Тихий океан

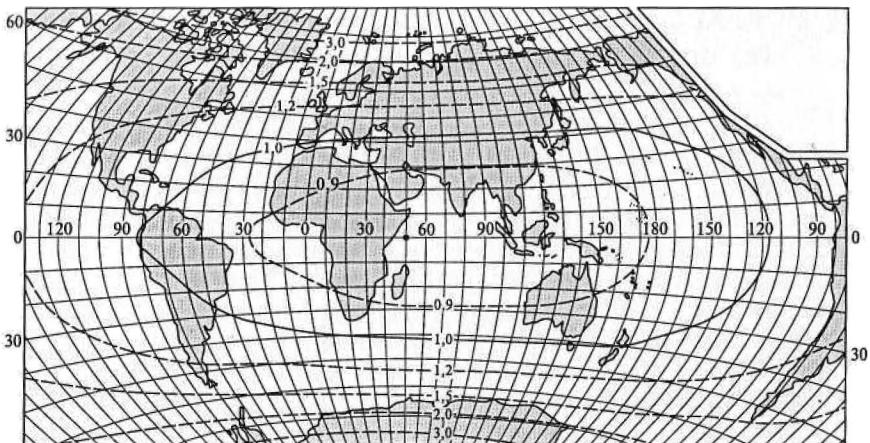


Рис. 51. Составная без разрывов поликоническая проекция ЦНИИГАиК (1954) — изоколы масштаба площадей

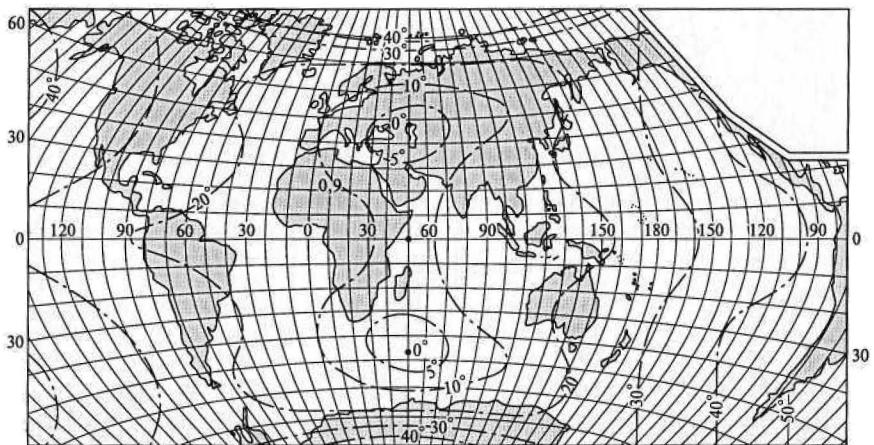


Рис. 52. Составная без разрывов поликоническая проекция ЦНИИГАиК (1954) — изоколы наибольших искажений углов

изображается не таким преувеличенным по площади, как при равноразделенных параллелях.

Для построения составных проекций с разрывами наиболее удобны псевдоцилиндрические проекции, в которых прямолинейные параллели позволяют легко совмещать разные их части. На рис. 53 приведена схема образования составной псевдоцилиндрической проекции с разрывами для отображения материков, а на рис. 54 показана эта проекция. Для каждого материка использована центральная часть псевдоцилиндрической проекции с прямыми

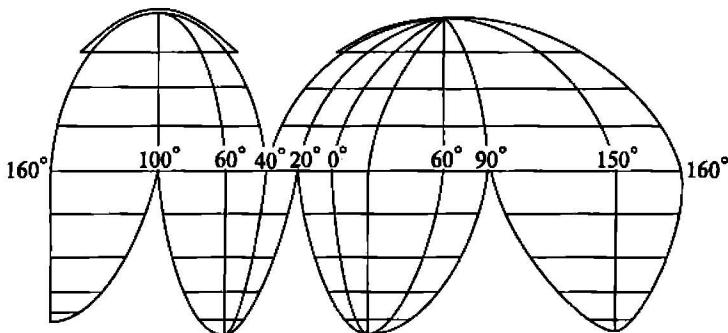


Рис. 53. Схема образования составной с разрывами проекции Мольвейде—Гуда

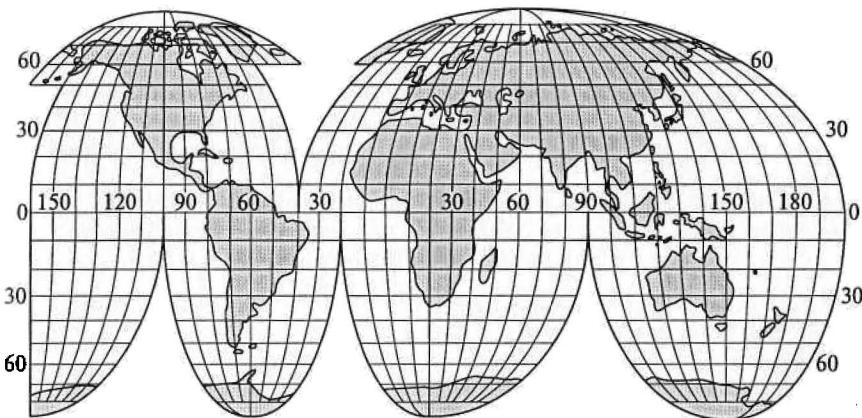


Рис. 54. Составная с разрывами псевдоцилиндрическая проекция Мольвейде—Гуда

линейным средним меридианом. Отдельные секции составной проекции объединены прямой линией экватора. В составной проекции средние меридианы выбраны так, чтобы наилучшим образом показать континенты.

Подобные проекции разработаны и для океанов (рис. 55). В этом случае разрывы идут по водоразделам материков, а средние меридианы подобраны так, чтобы океаны были отображены с возможно наименьшими искажениями.

Разработано много составных проекций как с разрывами, так и без разрывов. Например, В. В. Каврайский к цилиндрической равноугольной проекции Меркатора по параллелям $\pm 70^\circ$ приставил цилиндрические равнопромежуточные проекции. Известна

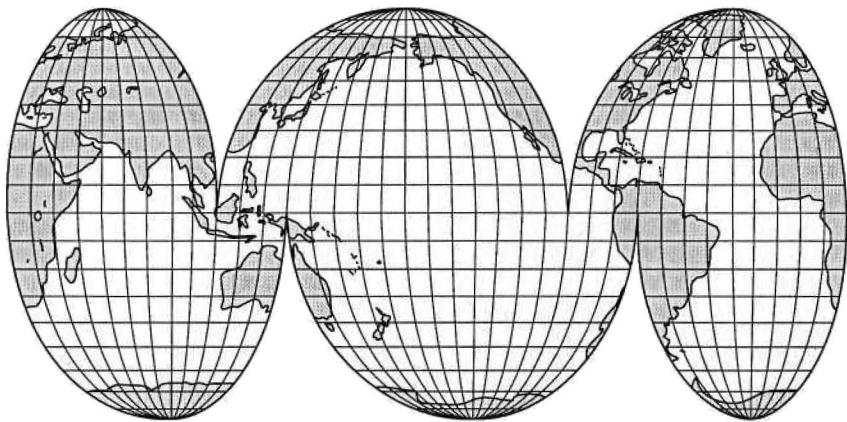


Рис. 55. Составная с разрывами по материкам псевдоцилиндрическая проекция Мольвейде

составная проекция, в которой цилиндрическая проекция Меркатора по параллелям $\pm 45^\circ$ соединена с псевдоцилиндрическими проекциями, имеющими разрыв в Северном полушарии по Атлантическому океану и разрыв в Южном полушарии по Атланти-

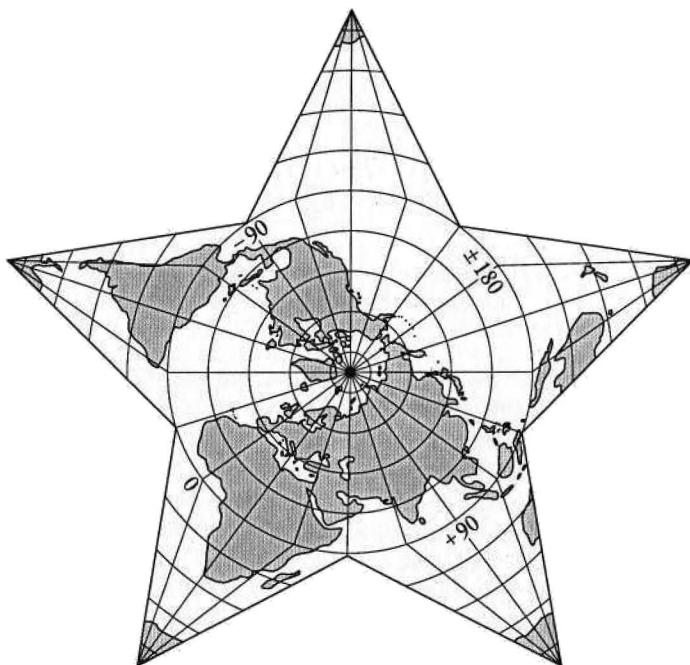


Рис. 56. Составная звездчатая проекция

ческому и Индийскому океанам. Американский картограф Миллер (O. M. Miller, 1897—1979) соединил три косые азимутальные стереографические проекции, из которых одна подобрана для Европы и Африки, другая — для Центральной Азии, а третья — для региона, в центре которого Австралия.

На рис. 56 приведена составная звездчатая проекция для эмблемного изображения мира. Центральная часть построена в равнопромежуточной по меридианам азимутальной проекции, лучевые части даны в псевдоконических равнопромежуточных по среднему меридиану проекциях.

Звездчатую проекцию предложил в 1879 г. в Германии Бергауз (H. Berghaus, 1797—1884). Известны звездчатые проекции и других авторов.

Многополосные проекции

Чтобы уменьшить искажения, поверхность шара или эллипсоида разделяют на полосы. Каждая полоса может быть построена в проекции со своими параметрами. Мир будет отображен на отдельных листах многолистной карты.

Многополосная картографическая проекция — проекция, параметры которой подобраны для каждой отдельной полосы, на которые условно разбивается поверхность эллипсоида или шара.

Полосы могут быть ограничены либо меридианами, либо параллелями. Например, меридианные полосы шириной 30° в видоизмененной простой поликонической проекции используют для построения глобусов (рис. 57). При создании топографических карт

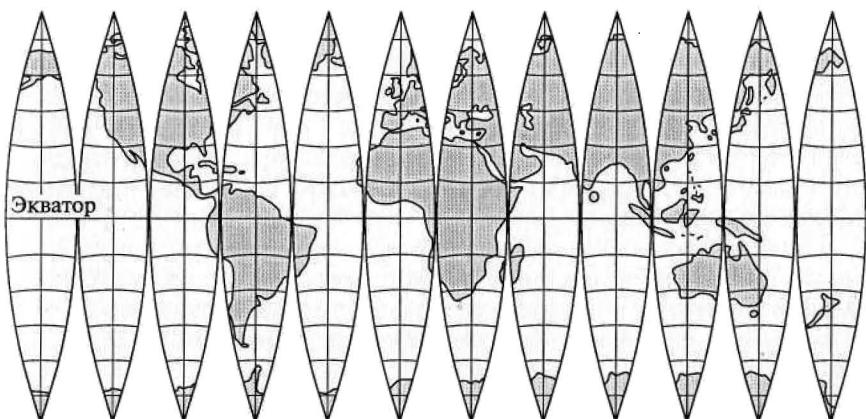


Рис. 57. Многополосные проекции — полосы ограничены меридианами

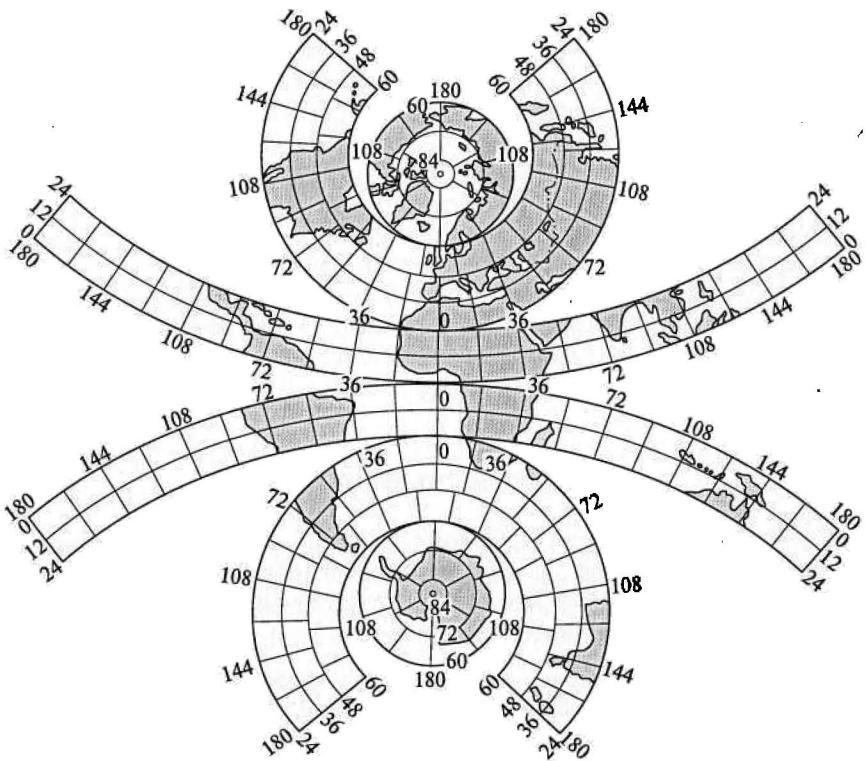


Рис. 58. Многополосные проекции; полосы ограничены параллелями

и планов полосы также ограничиваются двумя меридианами. Разность долгот этих меридианов для топографических карт составляет 6° , а для топографических планов — 3° . В случае топографических карт эти полосы называют **зонами**. Как известно, в пределах указанных зон в России топографические карты и планы строят в поперечной равноугольной цилиндрической проекции Гаусса — Крюгера, в США и ряде других стран — в поперечной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора, сокращенно обозначаемой английскими буквами **UTM** (Universal Transverse Mercator).

Способ ограничения полос параллелями (рис. 58) применен к многолистной Международной карте мира масштаба 1 : 2 500 000. Земная поверхность разделена параллелями на шесть полос — три в Северном полушарии и три в Южном полушарии. Полярные полосы отображены в нормальной равнопромежуточной по меридианам азимутальной проекции, остальные четыре — в нормальной равнопромежуточной по меридианам конической проекции.

Многогранные проекции

В целях уменьшения искажений поверхность шара или эллипсоида делится меридианами и параллелями на трапеции. Каждая трапеция проектируется на плоскость. Если листы такой карты склеить так, чтобы между ними не было разрывов, то получится многогранник. Чем меньших размеров трапеции, тем больше граней у многогранника. Мир отображается на многолистной карте. Проекция каждого листа имеет свои параметры.

|| **Многогранная картографическая проекция** — проекция, параметры которой подобраны для каждого отдельного листа или группы листов многолистной карты.

Примером является многолистная Международная карта мира масштаба 1 : 1 000 000. Каждый лист ограничен двумя меридианами и двумя параллелями. Протяженность листа по широте составляет 4° , а по долготе — 6° ; на широтах от 60° до 76° листы сдвигают, а выше 76° листы счетверяют.

Многогранные проекции обладают одним недостатком, который обусловлен тем, что на плоскости листы не складываются по рамкам без разрывов. Если на плоскости стола разложить четыре или девять листов карты и попытаться их соединить по параллелям и меридианам, то обнаружится, что эти листы нестыкуются. Между ними обязательно образуются разрывы (рис. 59). Разрывы будут тем больше, чем больше трапеции многогранника. Для миллионной карты мира эти разрывы не очень большие, так что при склейке даже девяти листов они существенного влияния не оказывают.

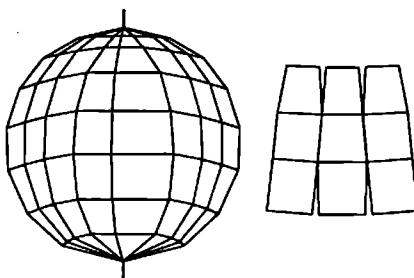


Рис. 59. Схема многогранной проекции; между плоскими листами карт образуются разрывы

Проекции анаморфизированного пространства

По разным соображениям, масштаб в разных частях карты может выбираться существенно отличающимся от ее главного масштаба. Это может быть продиктовано как стремлением выделить отдельные участки пространства, представив их, например, в более крупном масштабе, так и желанием использовать свойства проекции для более наглядного представления картографируемых характеристик. Отображение географических объектов или их ча-

стей в разных масштабах ведет к тому, что на карте реальное пространство оказывается представленным в преобразованном, анаморфизированном виде. Такие проекции отображают анаморфизированное пространство.

Проекция анаморфизированного пространства — проекция, которая отображает реальное пространство деформированным, при этом масштаб изображения трансформируется либо в зависимости от характеристик картографируемого явления, либо в силу необходимости представить отдельные части пространства преувеличенными или преуменьшенными.

Простейшим примером являются карты, на которых локализованные участки (населенные пункты, примечательные участки гидрографии, рельефа, острова и даже целые регионы) изображены в более крупном масштабе. Чаще всего для этих целей используются разные модификации наиболее распространенных проекций, например, азимутальные или цилиндрические проекции. В этих проекциях вокруг выбранных центров (фокусов) координаты точек изменяются так, чтобы дать увеличенные изображения.



Рис. 60. Масштаб изображений в выделенных кругах преувеличен в два раза по сравнению с главным масштабом карты

На рис. 60 окружностями выделены участки, изображения в которых по сравнению с окружающими объектами преувеличены в два раза. Эти изображения построены следующим образом. В намеченному на карте круге выделено внешнее кольцо и внутренний круг. Внешнее кольцо сжимается так, что масштаб внешней окружности кольца соответствует масштабу внешней части карты, а масштаб внутренней окружности — масштабу внутренней части. После этого внутренний круг увеличивается до соприкосновения с кольцом.

Локализованные преувеличенные изображения создают эффект, который Д. П. Снайдер назвал «эффектом увеличительного стекла».

Один из вариантов таких проекций состоит в том, что круглая область любых размеров показывается в заданном масштабе, а окружающие регионы также имеют постоянный масштаб, но он меньше, чем масштаб в центральной части. В результате создается впечатление, что на одной части карты установлена круглая лупа. При этом пользователь видит также области окружения вне лупы, но в меньшем масштабе. Фактически краями лупы часть карты оказывается скрытой, но возможны построения, чтобы область окружения была видна полностью.

Другой вариант предполагает сжатие окружающих регионов вместо сохранения их масштаба постоянным.

В этих преобразованиях в качестве исходной проекции обычно применяются равновеликая или равнопромежуточная азимутальные проекции.

Закон изменения масштаба при удалении на расстояние r от выделенного центра определяется видом используемой при преобразованиях функции $f(r)$. Разными учеными предложены различные виды функции $f(r)$.

Приведем несколько ее значений, где α и β — некоторые параметры, посредством которых управляют амплитудой изменений масштаба:

$$\begin{aligned}f(r) &= \alpha; \\f(r) &= \alpha(1+r)^\beta; \\f(r) &= \alpha e^{-\beta r}; \\f(r) &= \alpha \sqrt{1 - (r/\beta)^2}; \\f(r) &= \frac{\alpha}{1 + \beta r^2}.\end{aligned}$$

В зависимости от числа центров преобразования (фокусов) проекции разделяют на *монофокальные* (рис. 61) и *полифокальные* (рис. 62).



Рис. 61. Проекция с монофокальным изменением главного масштаба
(Snyder J. P. Enlarging the Heart of a Map.
[Http://www3.deasy.psu.edu/projection](http://www3.deasy.psu.edu/projection))

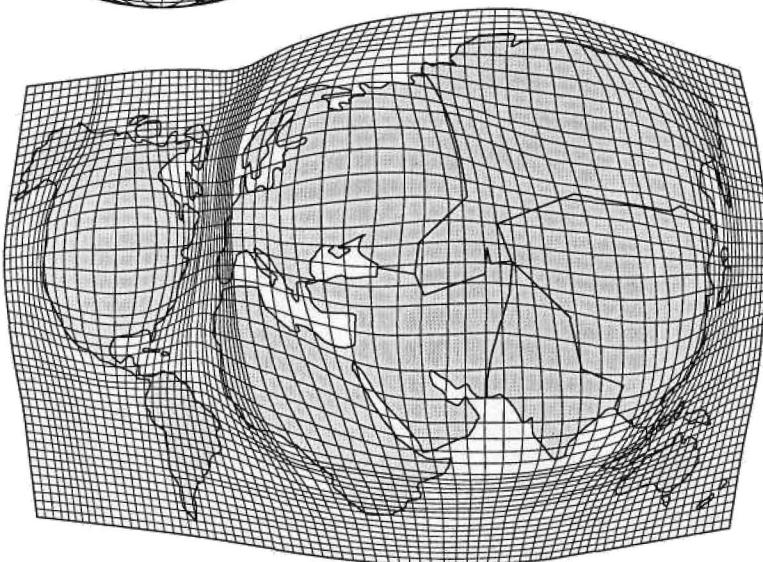


Рис. 62. Полифокальная проекция с центрами в Северной Америке и Евразии (По N. Kadmon, E. Shlomi. См.: Гусейн-Заде С.М., Тикунов В.С. Анаморфозы: что это такое? — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — С. 69)

Проекции анаморфизированного пространства тесно связаны с понятием анаморфозы. *Анаморфозы* представляют собой специфический способ картографического отображения явлений на картах. При создании анаморфозы масштаб изображения трансформируется и варьирует в зависимости от величины характеристики явления на исходной карте. Различают линейные, площадные и объемные анаморфозы.

В линейных анаморфозах отображают, например, удаленности объектов, выраженные в затратах времени, от некоторой цент-

ральной точки. Причем соблюдаются пространственные отношения. На исходной карте относительно выбранного центра строится система изохрон и система ортогональных к ним линий уклонов. Линии уклонов являются градиентными линиями для времени достижения центральной точки. Эти две системы линий на исходной карте могут иметь сложный и не обладающий наглядностью рисунок. Поэтому изохроны изменением проекции преобразуются, например, в систему концентрических окружностей, а линии уклонов — в систему равноотстоящих радиальных прямых.

В *площадных анаморфозах* площади выбранных территориальных единиц деформируются так, что они становятся пропорциональными соответствующим картографируемым величинам, например, численности проживающего на них населения, величинам его доходов, урожайности сельскохозяйственных культур, валовому национальному продукту (ВНП) и т. д.

В *объемных анаморфозах* отображаются два показателя. Например, если картографируемыми показателями являются население и ВНП, то на анаморфизированной карте мира площадь каждой страны будет пропорциональна численности ее населения, а ВНП будет характеризоваться объемами пирамид, возвышающимися над этими странами.

Естественно, при всех этих преобразованиях, деформирующих пространство, произойдут смещения на карте береговых линий и изменения картографических сеток. Иначе говоря, каждой анаморфозе соответствует определенная картографическая проекция, полученная видоизменением исходной проекции карты.

Изменения в проекции тесно связаны с картографируемыми явлениями. Масштаб проекции в разных ее точках может изменяться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. На анаморфизированную картографическую сетку с береговой линией можно накладывать соответствующие картографируемые показатели.

Карты анаморфизированного пространства могут строиться и в специально созданных проекциях. Примерно тридцать лет назад шведский географ Хагерстранд (Torsten Hägerstrand) для отображения на карте процессов миграции использовал специальное азимутальное проектирование. Проекция этого типа была названа «логарифмической азимутальной» и может использоваться для увеличения выбранной круглой почти любого размера области.

Этот метод применен при построении карты, где увеличивающей областью является Северная Америка (рис. 63).

Другой пример — картографическая сетка анаморфозы Атлантического океана, построенная на основе территориального расположения судов в океане (рис. 64).

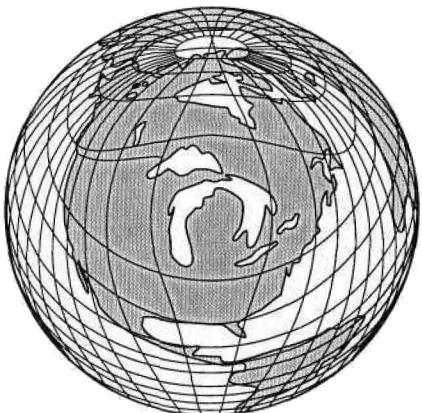


Рис. 63. Картографическая сетка, анаморфировано пространство Северной Америки; эффект напоминает фотографию «рыбий глаз» (Snyder J. P. Enlarging the Heart of a Map. [Http://www3.deasy.psu.edu/projection](http://www3.deasy.psu.edu/projection))

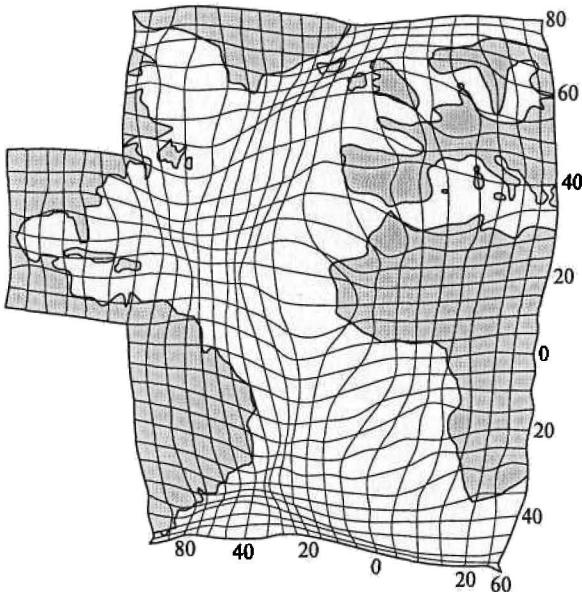


Рис. 64. Картографическая сетка анаморфозы Атлантического океана, построенной на основе территориального распределения судов (Гусейн-Заде С. М., Тикунов В. С. Анаморфозы: что это такое? — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — С. 103)

В 1985—1987 гг. Ю. Л. Бугаевский разработал основные положения теории и способов получения трех классов картографических проекций с анаморфизированной сеткой. Были рассмотрены проекции:

- переменно-масштабные, отдельные участки которых изображаются с увеличенным или уменьшенным масштабами; предназ-

начены для картографирования неравномерно распределенных в пространстве объектов и явлений;

- вариабельные, в уравнениях которых присутствует характеристика, определяемая пространственным распространением картографируемого показателя;

- с переменной метрикой пространства, когда отображение объектов осуществляется с учетом не только их географического местоположения, но и существующих между ними функциональных связей, измеряемых тоннами, рублями, временными и другими показателями.

Контрольные вопросы

1. Какие можно выделить признаки классификации картографических проекций?

2. Как можно разделить проекции по форме поверхности картографируемого тела?

3. Как классифицируются проекции по характеру искажений?

4. Как вычисляется и что определяет угол классификации?

5. Как можно классифицировать величины искажений?

6. Какие выделяются подмножества, группы и классы проекций при их классификации по виду нормальной картографической сетки?

7. Каковы общие черты и различия проекций одной группы?

8. Каков вид нормальных сеток азимутальных, псевдоазимутальных и полиазимутальных проекций?

9. Каков вид нормальных сеток конических, псевдоконических и поликонических проекций?

10. Каков вид нормальных сеток цилиндрических, псевдоцилиндрических и полицилиндрических проекций?

11. Какие проекции называют обобщенными азимутальными, коническими или цилиндрическими?

12. Как изменяется вид нормальной конической проекции с изменением ее параметра α , равного отношению угла между меридианами на карте к разности долгот этих меридианов? В каких пределах изменяется этот параметр? Что происходит с конической проекцией при крайних предельных значениях этого параметра?

13. Что общего и какое различие у псевдоконических проекций Бонна и Вернера?

14. Что объединяет псевдоконическую проекцию с псевдоазимутальной и псевдоцилиндрической проекциями?

15. Как по изображению экватора отличить псевдоконическую проекцию от поликонической?

16. Какими бывают по характеру искажений псевдоконические и поликонические проекции?

17. Какую проекцию называют простой поликонической проекцией?

18. Какие поликонические проекции называют круговыми?

19. Какими свойствами обладает поликоническая проекция Лагранжа?

- 20.** Что объединяет поликоническую и полицилиндрическую проекции?
- 21.** Какими свойствами обладают цилиндрическая проекция Меркатора и цилиндрическая проекция Ламберта?
- 22.** Как изображаются полюса и какими линиями рисуются меридианы в псевдоцилиндрических проекциях?
- 23.** Какими бывают по характеру искажений псевдоцилиндрические проекции?
- 24.** Чем знаменита карта Паоло Тосканелли, построенная в псевдоцилиндрической проекции? Как в этой проекции изображены меридианы?
- 25.** Каковы основные характеристики псевдоцилиндрических проекций Мольвейде, Сансона, Эккерта; чем от них отличаются проекции Путниыша и МакБраде—Томаса?
- 26.** Какие проекции называют составными? Почему иногда строят составные проекции с разрывами? Где располагают эти разрывы?
- 27.** С какой целью строят многополосные проекции? Какими линиями ограничивают эти полосы? Назовите известные вам многополосные проекции.
- 28.** Какие проекции называют многогранными? Какие у них достоинства и какой недостаток?
- 29.** Как и с какой целью создаются проекции с локальным увеличением масштаба? Как их разделяют по числу фокусов?
- 30.** Что собой представляют анаморфозы и проекции анаморфизированного пространства?

ГЛАВА 5

ПОЛУЧЕНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ — ПРЯМЫЕ СПОСОБЫ

Картографические проекции получают, решая *прямую* или *обратную задачу математической картографии*. В данной главе рассматриваются так называемые прямые способы. К прямым способам относятся те, которые основаны на решении прямой задачи математической картографии. В прямой задаче математической картографии вначале тем или иным путем задается проекция (а именно, способом ее построения, эскизом картографической сетки, уравнениями и др.), а затем в результате ее изучения получают различные показатели, характеризующие искажения и свойства этой проекции.

Для получения проекций чаще всего применяют:

- 1) способы графических построений;
- 2) способы перспективного проектирования шара (реже эллипсоида):
 - на плоскость;
 - на поверхность цилиндра, впоследствии развертываемую в плоскость;
 - на поверхность конуса, также впоследствии развертываемую в плоскость;
- 3) способы построения проекций обработкой их эскизов;
- 4) разные способы видоизменения и преобразования уже известных проекций, в результате чего получают так называемые *производные проекции*.

Подавляющее большинство проекций получено прямыми способами. Основное достоинство этого подхода — его простота.

§ 22. ГРАФИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Графические способы, игравшие исключительно важную роль в прошлом, в настоящее время большей частью имеют историческое и методическое значение. Тем не менее и сегодня иногда ими пользуются для создания новых проекций.

За длительную историю развития картографических проекций разработано множество графических приемов их построения.

Наиболее просто строится нормальная равнопромежуточная цилиндрическая проекция. Для этого достаточно провести через

заданные промежутки горизонтальные и перпендикулярно им вертикальные прямые (см. рис. 37). Здесь и далее предполагается, что ось абсцисс направлена вверх на север по среднему меридиану, ось ординат — направо по экватору; счет долгот ведется от среднего меридиана со знаком плюс на восток и со знаком минус на запад. При этом уравнения нормальной равнопромежуточной цилиндрической проекции шара радиусом R (широты и долготы выражены в радианах) принимают вид

$$x = R\varphi; \quad y = R\lambda.$$

Хорошо известны графические способы построения различных азимутальных проекций. Достаточно просто строится равнопромежуточная азимутальная проекция шара радиусом R . Для этого следует вычертить серию равноотстоящих концентрических окружностей и провести их радиусы. Радиус каждой окружности равен произведению RZ , где Z — зенитное расстояние текущей точки. В нормальной ориентировке окружности отображают параллели, а их радиусы — меридианы; центральные углы между меридианами равны разности их долгот. В косой и поперечной ориентировках окружности отображают альмукантары (условные параллели), а радиальные линии — вертикалы (условные меридианы), исходящие из условного полюса под азимутами a . Уравнения проекции имеют вид

$$x = RZ \cos a; \quad y = RZ \sin a.$$

В частности, подобный графический прием был положен в основу разработки и аналитического построения поперечной азимутальной группы проекции трехосного эллипсоида спутника Марса Фобоса. Для каждой текущей точки эллипсоида Фобоса, имеющей координаты φ, λ , вычисляются зенитное расстояние Z и азимут a . На взаимно перпендикулярных прямых откладываются без искажений отрезок A , равный длине дуги экватора при долготе $\lambda = Z$, и отрезок B , равный длине дуги среднего меридиана при широте $\varphi = Z$. Предполагается, что все точки, имеющие зенитное расстояние Z , отображаются на эллипсе с полусями A и B . Центры эллипсов лежат на пересечении среднего меридиана и экватора. Эти эллипсы представляют собой альмукантары с зенитными расстояниями Z . Из их центра под азимутами a проводятся прямые — вертикалы. Заданная на эллипсоиде точка отображается в проекции на пересечении соответствующих вертикала и альмукантара. Отрезок вертикала от центра до эллипса равен радиусу-вектору этого эллипса ρ . Координаты точки вычисляют по формулам:

$$x = \rho \cos a; \quad y = \rho \sin a;$$

$$\rho = 1 / \sqrt{\left(\frac{\cos a}{B}\right)^2 + \left(\frac{\sin a}{A}\right)^2}.$$

Упомянутая проекция, построенная для одного из полушарий Фобоса, приведена на рис. 65.

В средние века был разработан ряд так называемых *глобуллярных проекций*, предназначенных для построения карт полушарий.

Глобуллярная проекция Бируни. Проекцию в XI в. предложил ученый-энциклопедист Бируни (973—ок. 1050). В окружности радиусом $R\pi/2$, построенной в масштабе карты, проводят два взаимно-перпендикулярных диаметра. Один из них отображает экватор, другой — средний меридиан. За крайние меридианы принимается сама окружность. Диаметры и каждые четверти окружности, лежащие между полюсом и экватором, разделяют на равные части. Через три точки, расположенные на среднем и двух крайних меридианах, проводят окружности. Так получают параллели. Через полюса и точки на экваторе также проводят окружности и получают меридианы. В XVIII в. эту проекцию вновь предложил Николоси (Nicolosi, 1610—1670). В XVIII—XIX вв. ее применяли для карт полушарий.

Глобуллярная проекция Бэкона. Проекцию предложил в XIII в. английский ученый Р.Бэкон (Bacon, 1214—1292). Меридианы

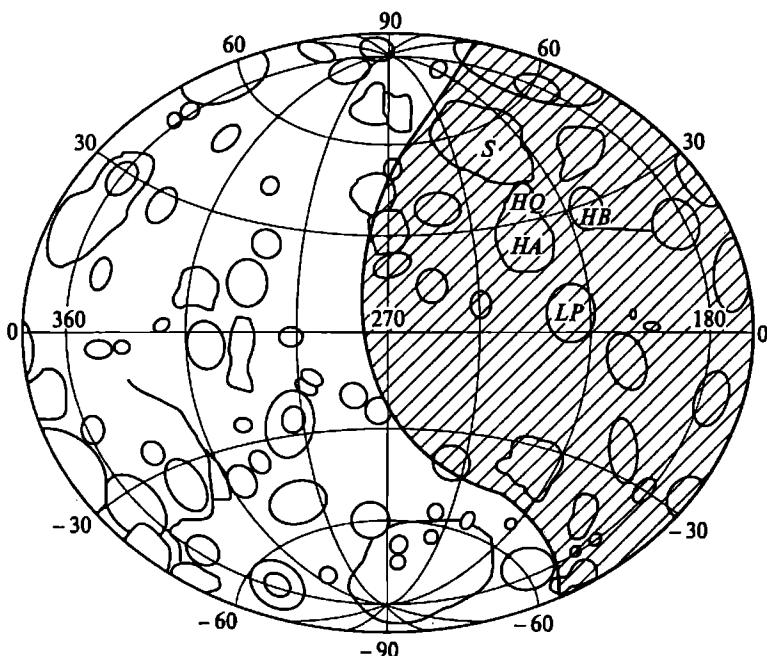


Рис. 65. Карта Западного полушария Фобоса в поперечной полиазимутальной проекции, трехосный эллипсоид (Телевизионные исследования Фобоса / Г.А. Аванесов, Б. С. Жуков, Я.Л. Зиман и др. — М.: Наука, 1994. — С. 168)



Рис. 66. Карта Восточного полушария в глобулярной проекции Апиана

строят таким же способом, как и в проекции Бируни. Крайние меридианы также разделяют на равные части. Параллели — прямые линии, проведенные через точки на двух крайних меридианах.

Глобулярная проекция Апиана. Ее предложил в Саксонии в 1524 г. Апиан (Apian, 1495—1552). Средний меридиан и экватор разделяют на равные части. Через полученные на среднем меридиане точки проводят параллели — параллельные экватору линии. Меридианы строятся как в проекции Бируни: проводятся окружности через полюса и точки на экваторе.

Проекция Апиана показана на рис. 66. Известна и другая проекция Апиана — в ней круговые меридианы заменены эллиптическими.

§ 23. ПЕРСПЕКТИВНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ШАРА НА ПЛОСКОСТЬ

Перспективным проектированием шара на плоскость получают разнообразные азимутальные проекции. Из некоторой точки, ее называют центром проектирования (точкой глаза), поверхность

шара прямymi лучами переносится на плоскость. Плоскость проектирования может касаться шара или пересекать его. На плоскости координаты точки определяются азимутом a и радиусом ρ , зависящим от зенитного расстояния Z . Сказанное иллюстрирует рис. 67, на котором для большей наглядности плоскость проектирования несколько приподнята над шаром.

На плоскости координаты точки вычисляются по известным формулам

$$x = \rho \cos a; \quad y = \rho \sin a.$$

Положение плоскости проектирования определяется зенитным расстоянием Z_k (рис. 68). При $Z_k = 0$ эта плоскость становится касательной к шару.

Все точки шара с одинаковыми зенитными расстояниями Z на плоскости отображаются на одной окружности (альмукантарата). Радиус альмукантарата ρ на плоско-

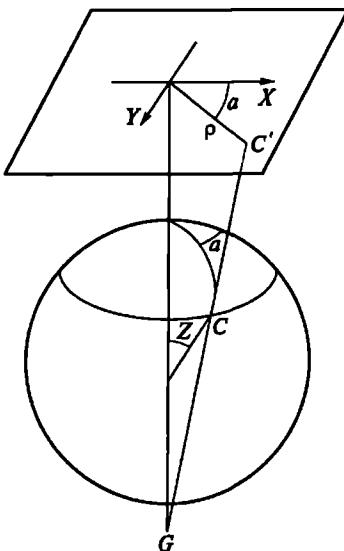


Рис. 67. Азимутальное перспективное проектирование поверхности шара на плоскость, на которой координаты точки определяются азимутом a и радиусом ρ , зависящим от зенитного расстояния Z (G — центр проектирования)

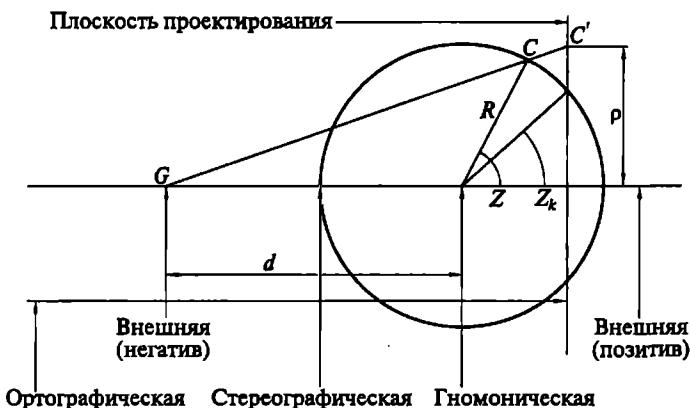


Рис. 68. Перспективное проектирование поверхности шара радиусом R на плоскость (наиболее важные случаи положения центров проектирования); d — расстояние между центром шара и центром проектирования

сти зависит от расстояния d между центром проектирования и центром шара.

Выразим расстояние d в единицах радиуса шара R . Оно будет равно некоторому числу этих радиусов и может изменяться от нуля до бесконечности. Из рис. 68 следует, что

$$\rho = \frac{d + \cos Z_k}{d + \cos Z} R \sin Z.$$

На рис. 68 представлены наиболее важные случаи положения центров проектирования, а на рис. 69 — основные перспективные азимутальные проекции. Рассмотрим их, полагая для простоты, что плоскость проектирования касается шара ($Z_k = 0$).

Если центр проектирования находится в бесконечности, то получают *ортографическую* проекцию. Из бесконечности лучи проектирования приходят параллельными. Формула для вычисления радиуса альмукантарата принимает вид

$$\rho = R \sin Z.$$

В этой проекции наблюдатель видит, например, все космические тела. Изображения Земли и других космических тел в ортографической проекции обладают эффектом пространственной объемности.

Если центр проектирования находится на конечном удалении от шара, получают *внешние* проекции. Эти проекции могут быть двух типов. Когда центр и плоскость проектирования лежат по разные стороны от центра шара, наблюдатель видит шар как бы изнутри; тогда получают внешнюю проекцию с *негативным изображением*. При расположении плоскости проектирования между центрами проектирования и центром сферы получают проекцию с *позитивным изображением*. В этом случае наблюдатель видит шар снаружи. Так Земля видна из космоса. На космических фотоснимках Земля изображена в позитивной внешней проекции. Приведенная выше формула радиуса альмукантарата дана для негативных проекций. Чтобы она стала пригодной и для позитивных изображений, в ней расстояние d следует заменить величиной $-d$.

Когда удаление $d = 1$, т.е. центр проектирования лежит на шаре и проектирование негативное, имеет место *стереографическая* проекция. Формула для вычисления радиуса альмукантарата принимает вид

$$\rho = 2R \operatorname{tg}(Z/2).$$

Как уже отмечалось, эта проекция равноугольная. Любая окружность на шаре в этой проекции также отображается окружностью. Поскольку на шаре ортодромия, меридианы и параллели являются дугами окружностей, в проекции они также изобразятся окружностями, в частных случаях — прямыми линиями.

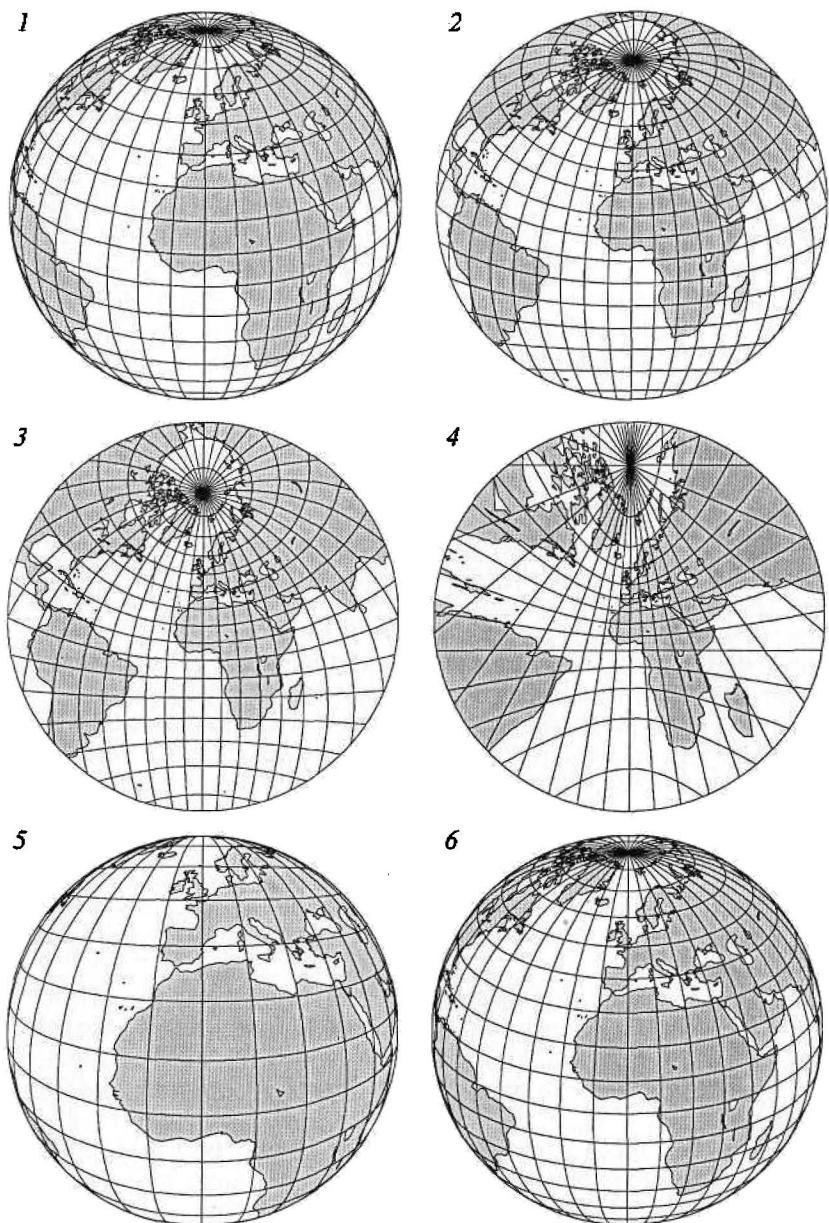


Рис. 69. Азимутальные перспективные проекции земного шара:

1 — ортографическая; 2 — внешняя с негативным изображением на расстоянии одного земного радиуса от Земли; 3 — стереографическая; 4 — гномоническая; 5 — внешняя с позитивным изображением на расстоянии одного радиуса от Земли; 6 — внешняя с позитивным изображением на расстоянии ста радиусов от Земли

Когда удаление $d = 0$ и проектирование ведется из центра шара, получают **гномоническую** проекцию. Радиус ρ определяется по формуле

$$\rho = R \operatorname{tg} Z.$$

Если поместить наблюдателя в центр окружности довольно большого радиуса, то любые ее дуги, не превышающие полуокружности, ему будут видны как отрезки прямых линий. Иными словами, в гномонической проекции все дуги большого круга, ортодромии — кратчайшие расстояния между двумя точками на шаре, всегда изображаются прямыми линиями.

В гномонической проекции при зенитном расстоянии $Z = \pi/2$ лучи проектирования идут параллельно плоскости проектирования. Поэтому альмукантарат, соответствующий такому зенитному расстоянию, а в нормальной гномонической проекции он отображает экватор, проектируется «в бесконечность». На карте его не будет. Таким образом, в гномонической проекции можно отобразить площадь размером менее полушария.

На рис. 69 проекции даны в косой ориентировке при координатах условного полюса $\phi_0 = 25^\circ$ и $\lambda_0 = 0^\circ$. Вид картографических сеток и величина кругозора для различных проекций различны. В ортографической проекции видно полушарие, $Z_{\max} = \pi/2$. Во внешних перспективных проекциях величина кругозора зависит от расстояния до Земли: на малых расстояниях отображаются ее небольшие участки, с удалением охват увеличивается до полушария. В стереографической проекции можно отобразить весь шар, за исключением точки, где расположен центр проектирования, при этом искажения по мере приближения к краям изображения интенсивно нарастают. В гномонической проекции видно менее полушария, а у краев полушария искажения просто огромные. На рис. 69 в гномонической проекции показано примерно $\frac{3}{4}$ полушария.

При перспективном проектировании земной шар предварительно может быть спроектирован на вспомогательную поверхность, например, на сферу, эллипсоид, гиперболоид или параболоид. После этого вспомогательная поверхность отображается на плоскости.

Профессор М.Д. Соловьев разработал способ многократного перспективного проектирования одной сферы на другую. Сфера радиусом R последовательно переносится на ряд вспомогательных сфер, например с радиусами $2R$, $4R$ и т.д. Последняя вспомогательная сфера проектируется на плоскость. В качестве примера рассмотрим случай, когда проектирование сферы на следующую сферу выполняется стереографически (рис. 70). Первая сфера с центром O_1 — земная, радиусом R . На ней выделена точка C_1 , определяемая зенитным расстоянием Z . На второй сфере радиу-

сом $2R$ с центром O_2 эта точка изобразится точкой C_2 . Ей соответствует зенитное расстояние $Z/2$. Последовательно продолжая проектирование, увидим, что на n -й сфере радиусом $2^{n-1}R$ зенитное расстояние изображаемой точки будет $Z/2^{n-1}$. Она проектируется на плоскость.

Для вычисления радиуса ρ альмукантарата на плоскости можно воспользоваться формулой однократного проектирования, заменив в ней соответственно значения зенитных расстояний и радиусов сфер. Например, при стереографическом промежуточном и завершающем ортографическом проектировании этот радиус будет:

$$\rho = 2^{n-1}R \sin(Z/2^{n-1}).$$

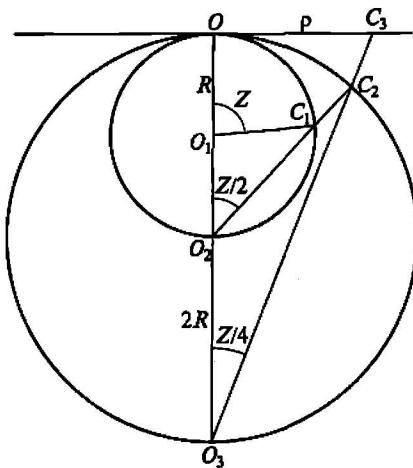


Рис. 70. Построение перспективных азимутальных проекций многократным предварительным проектированием земной сферы на вспомогательные сферы

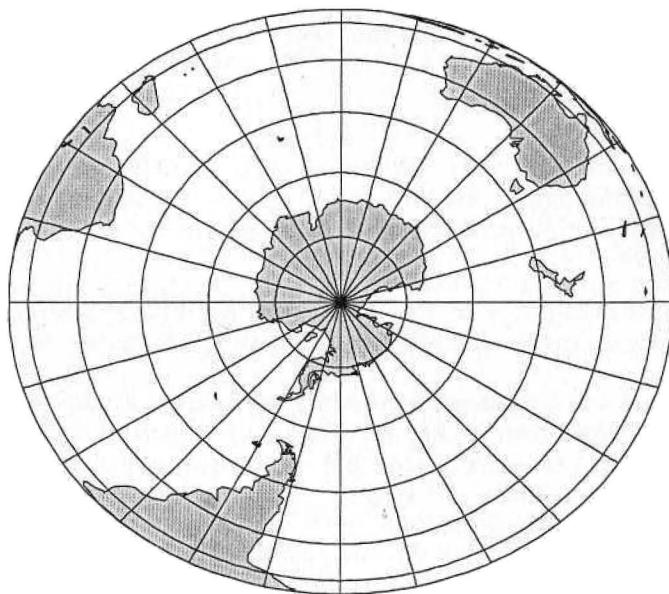


Рис. 71. Нормальная ортографическая проекция трехосного эллипсоида, на который предварительно гномонически спроектирован земной шар

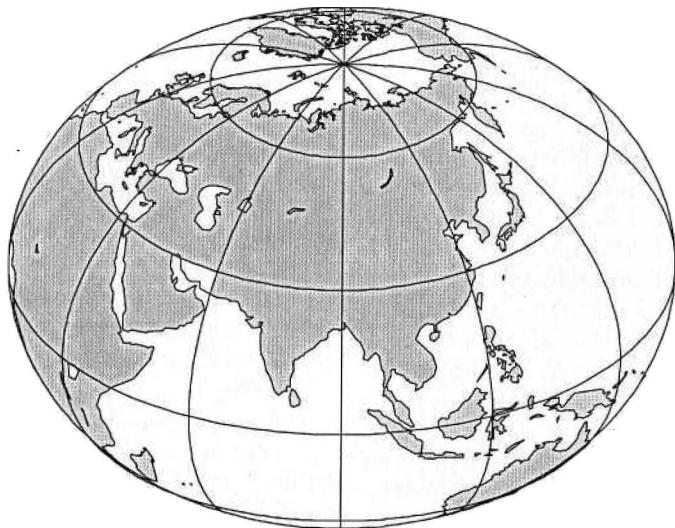


Рис. 72. Косая ортографическая проекция трехосного эллипсоида, на который предварительно гномонически спроектирован земной шар; широта условного полюса 50° , долгота 90°

Многократное перспективное проектирование позволяет получать проекции, которые не удавалось строить однократным проектированием шара на плоскость. Например, приняв $n = 2$, получаем радиус равновеликой азимутальной проекции

$$\rho = 2R \sin(Z/2).$$

Далее, полагая n достаточно большим (например, $n \geq 8$), после разложения синуса малого угла в ряд, получаем радиус равнопромежуточной по вертикалям азимутальной проекции

$$\rho = RZ.$$

Как уже подчеркивалось, получить эти проекции однократным перспективным проектированием не представляется возможным.

На рис. 71 и 72 приведены примеры перспективных проекций, полученных при предварительном проектировании земного шара на трехосный эллипсоид. Центры, полярные оси, плоскости начального меридиана и экватора шара и эллипсоида совмещены. Радиус шара равен полярной оси эллипсоида и составляет 0,75 и 0,80 части от двух его экваториальных полуосей. Максимальная полуось эллипсоида лежит на пересечении плоскостей экватора и Гринвичского меридиана. Шар на эллипсоид спроектирован гномонически (из центра), а эллипсоид на плоскость — ортографически (из бесконечности).

§ 24. ПЕРСПЕКТИВНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ШАРА НА ЦИЛИНДР

Перспективные цилиндрические проекции получают проектированием поверхности шара на боковую поверхность цилиндра. Методику их построения можно проследить по рис. 68, представив себе на нем вместо плоскости проектирования образующую цилиндра. Из центра проектирования изображение с текущего меридиана в нормальных проекциях или с вертикала в косых и поперечных проекциях переносится на эту образующую цилиндра. Последовательным перемещением центра проектирования по кругу вокруг цилиндра на цилиндр переносится вся поверхность шара. Цилиндр может быть секущим или касательным. Касается он экватора или условного экватора шара. Поэтому, чтобы приспособить рис. 68 к цилиндрическим проекциям, зенитные расстояния Z следует заменить широтами ϕ или в общем случае условными широтами ϕ' .

Заменяя в формуле для радиусов параллелей (альмукантаротов) перспективных азимутальных проекций зенитные расстояния Z на условные широты ϕ' , получаем формулу для абсцисс перспективных цилиндрических проекций. Ординаты точек равны произведению радиуса цилиндра на их долготы или условные долготы λ' . Имеем

$$x = \frac{d + \cos \phi'_k}{d + \cos \phi'} R \sin \phi';$$

$$y = R \lambda' \cos \phi'_k.$$

Широта ϕ'_k определяет положение секущего цилиндра. При $\phi'_k = 0$ цилиндр касается условного экватора (или экватора).

Проекции данной ориентировки отличаются только значениями абсцисс. Вид проекции определяется удалением d центра проектирования от центра шара. Перспективные цилиндрические проекции также бывают с негативными (d) и позитивными ($-d$) изображениями. Рассмотрим основные случаи проектирования.

Гномоническую перспективно-цилиндрическую проекцию получают проектированием на цилиндр поверхности шара из его центра (рис. 73). Абсциссы точек на касательном цилиндре равны

$$x = R \operatorname{tg} \phi.$$

При широтах $\pm \pi/2$ проектирующие лучи из центра шара идут параллельно образующим цилиндра. Поэтому в нормальной проекции географические полюса не изображаются. Соответственно в косых и поперечных проекциях не изображаются условные полюса. В гномонической проекции искажения очень велики.

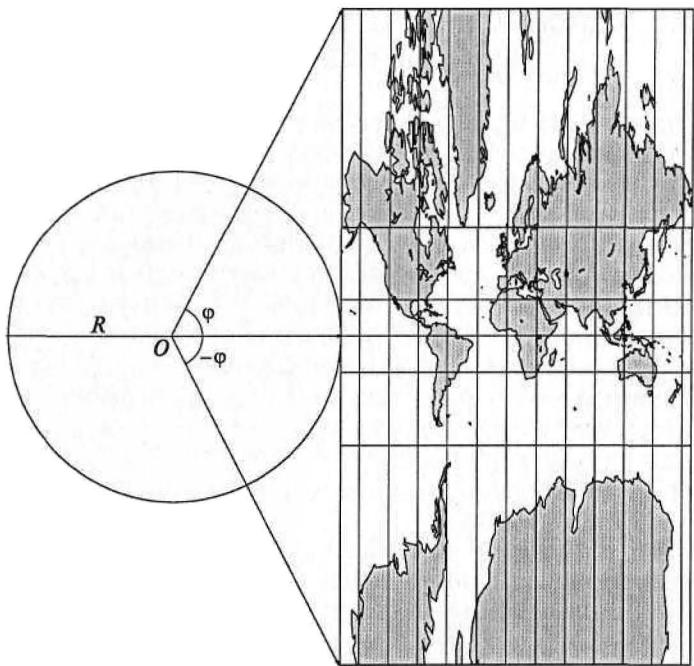


Рис. 73. Построение нормальной гномонической перспективно-цилиндрической проекции

Поперечную гномоническую проекцию называют проекцией Уэтча (J. Wetch, начало XIX в.).

Сtereографическую перспективно-цилиндрическую проекцию получают, расположив центр проектирования на шаре в точке, диаметрально противоположной той образующей цилиндра, на которую в данный момент проектируется изображение. Если проектирование нормальное и цилиндр касается экватора, то будет получена проекция Брауна (рис. 74). Она предложена в 1868 г. немецким физиком К. Брауном. По характеру искажений проекция произвольная. Абсциссы ее точек вычисляют по формуле

$$x = 2R \operatorname{tg}(\phi/2).$$

Если вместо касательного использовать секущий цилиндр, то искажения в проекции будут распределены более равномерно. Поэтому кроме проекции Брауна известны и другие проекции. Проекция Голла (J. Gall, 1855) построена на цилиндре, секущем шар по параллелям $\pm 45^\circ$. Проекция БСАМ (Большой советский атлас мира) использует цилиндр с параллелями сечения $\pm 30^\circ$.

На рис. 75 представлена косая перспективно-цилиндрическая проекция М. Д. Соловьева. Она получена перспективным проектированием земной поверхности на цилиндр, секущий шар по

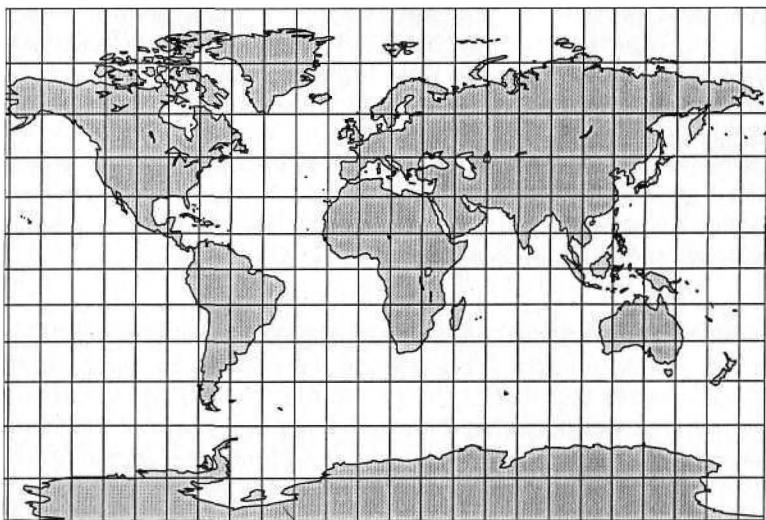


Рис. 74. Нормальная перспективная стереографическая цилиндрическая проекция Брауна

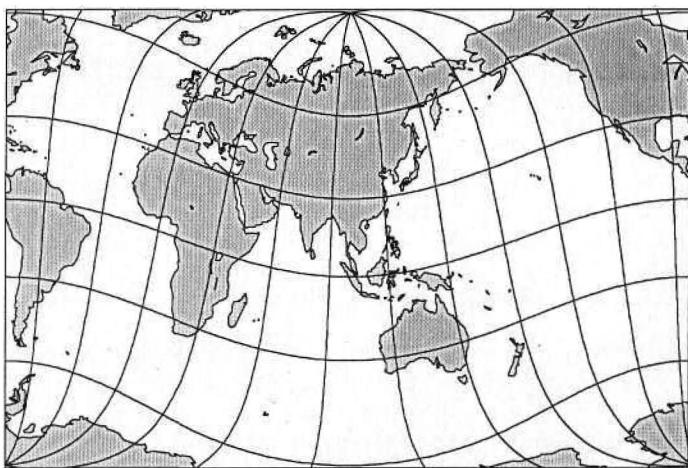


Рис. 75. Косая стереографическая перспективно-цилиндрическая проекция М.Д. Соловьева

альмукантару 45° условной широты. Средний меридиан на карте имеет долготу 100° . Координаты условного полюса $\phi_0 = 75^{\circ}$, $\lambda_0 = -80^{\circ}$. Условный полюс расположен не на среднем меридиане, как это обычно бывает, а на его продолжении за географическим полюсом, т.е. за рамкой карты. Из-за этого Южный полюс в проекции изображается не в одной, а в двух точках. Про-

екция применялась для школьных карт в СССР. Она ограничивалась с юга примерно параллелью 30° , с запада — Гринвичским меридианом, а с востока — меридианом долготы -160° . Это придавало изображению Земли куполообразный вид с расположением Северного полюса на вершине этого купола.

Ортографическую цилиндрическую проекцию получают перемещением центра проектирования в бесконечность. Проектирование идет параллельными лучами. Для касательного цилиндра абсциссы вычисляют по формуле (рис. 76):

$$x = R \sin \phi.$$

Поверхность шара на карте отображается в прямоугольнике, высота которого равна $2R$, а основание — $2\pi R$. Площадь прямоугольника составляет $4\pi R^2$, т. е. равна площади сферы. Как видим, получена равновеликая проекция. Ее называют *изоцилиндрической*. Равновеликость проекции следует из теоремы Архимеда о том, что поверхность шарового пояса равна поверхности цилиндра, имеющего ту же высоту, и основание, равное большому кругу шара. При косом и поперечном проектировании сферические координаты ϕ, λ пересчитывают в условные широты и долготы ϕ', λ' . Дальнейшее проектирование выполняется так же, как для случая нормальных проекций, за тем исключением, что вместо

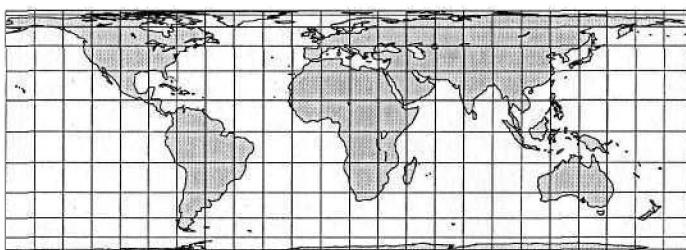


Рис. 76. Нормальная перспективная ортографическая равновеликая цилиндрическая проекция — изоцилиндрическая

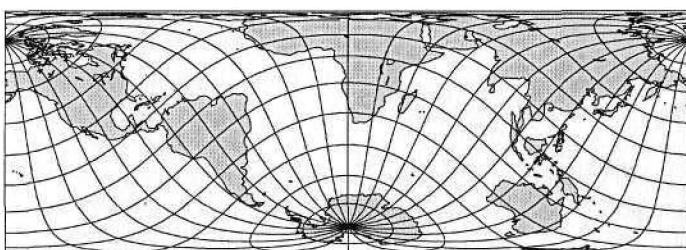


Рис. 77. Косая ($\phi_0 = 50^\circ$) перспективная ортографическая равновеликая цилиндрическая проекция

условных меридианов и параллелей рисуется картографическая сетка географических меридианов и параллелей (рис. 77).

Перспективные цилиндрические и азимутальные проекции, полученные с одинаковыми удаленными центров проектирования от центра шара, различны по характеру искажений. Так, при стереографическом проектировании цилиндрическая проекция, в отличие от азимутальной, не является равноугольной, а при ортографическом — азимутальная проекция, в отличие от цилиндрической, не является равновеликой.

§ 25. ПЕРСПЕКТИВНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ШАРА НА КОНУС

Перспективные конические проекции получают проектированием сферы на поверхность конуса. В отличие от перспективных цилиндрических и особенно перспективных азимутальных, применение перспективных конических проекций весьма ограничено. Их свойства изучены менее других. Они могут быть построены в любой ориентировке — нормальной, косой или поперечной. Центр проектирования также может располагаться как в центре шара, так и на любых расстояниях от него. Конус может касаться шара или рассекать его по двум главным параллелям (в косой и поперечной ориентировке — по условным главным параллелям). Проектирование может быть как с позитивным изображением,

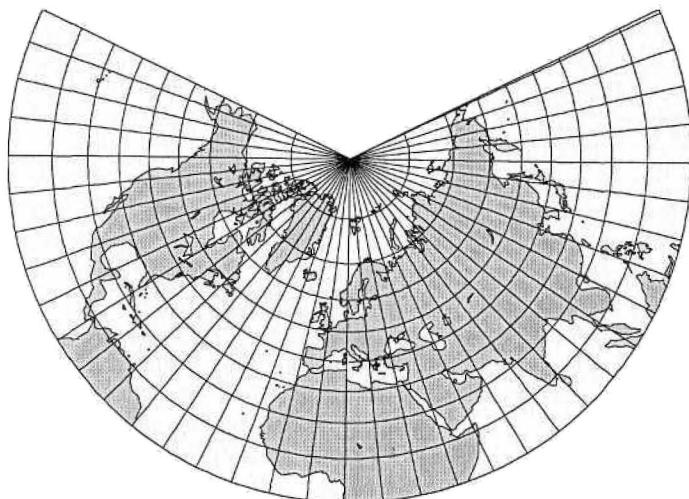


Рис. 78. Нормальная гномоническая перспективно-коническая проекция. Секущий конус. Широты главных параллелей 20 и 60°. Долгота среднего меридиана 11°

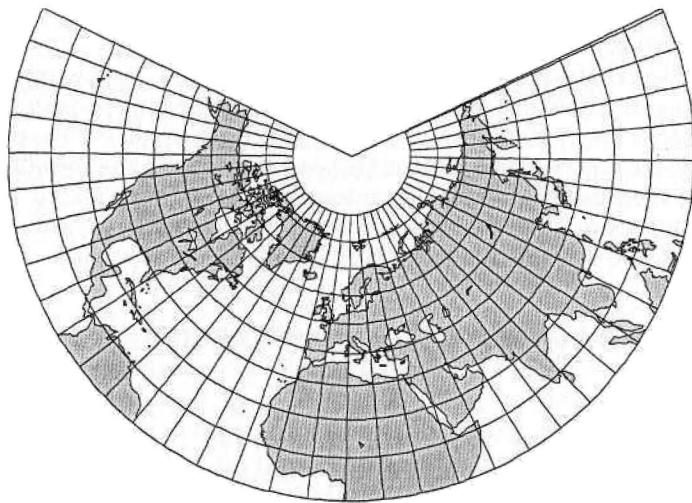


Рис. 79. Нормальная стереографическая перспективно-коническая проекция. Секущий конус. Широты главных параллелей 20° и 60° . Долгота среднего меридиана 11°

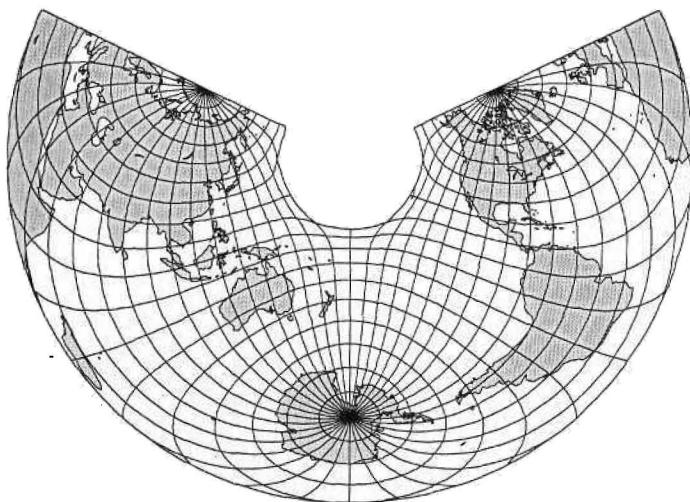


Рис. 80. Косая с негативным изображением перспективно-коническая проекция. Секущий конус. Широты главных параллелей 30° и 50° . Широта условного полюса 20° . Долгота среднего меридиана 170° . Максимальное зенитное расстояние 150° . Удаление центра проектирования от центра шара составляет десять его радиусов

так и с негативным. Свойства проекции во многом зависят от того, где находится центр проектирования, где расположен условный полюс и как выбраны главные параллели.

На рис. 78 и 79 даны примеры перспективных конических проекций в нормальной ориентировке, полученных проектированием земной поверхности на конус из центра шара и с поверхности шара. По аналогии с перспективными азимутальными и цилиндрическими проекциями назовем эти случаи соответственно гномоническим и стереографическим проектированием. На рис. 80 показан пример косой проекции при расположении центра проектирования на расстоянии десяти радиусов от центра шара. По характеру искажений проекции являются произвольными.

§ 26. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ПО ЭСКИЗАМ СЕТОК

Идея построения проекций по эскизам картографических сеток с применением методов численного анализа принадлежит Н. А. Урмаеву. В этом направлении плодотворно работали Г. А. Гинзбург, В. М. Богинский, К. Л. Ледовская, Т. Д. Салманова и др. В ЦНИИГАиК в 30—70 годах XX в. этим методом был разработан ряд картографических проекций. Широко, например, известны поликонические проекции ЦНИИГАиК для карт мира.

Разработка проекции складывается из следующих этапов:

- построение эскиза картографической сетки;
- математическая обработка эскиза.

Построение эскиза картографической сетки — основной творческий этап. Сначала должно быть определено назначение проекции и сформулированы требования к ней. Построению эскиза предшествует анализ известных картографических проекций, наиболее близких к требуемой проекции. На этом этапе устанавливается месторасположение среднего меридиана, симметричность или асимметричность сетки относительно среднего меридиана и экватора, определяется, как должны быть разделены средний меридиан и параллели, как должен изображаться полюс — точкой, дугой или отрезком, определяются соотношения длин полюса (если он представлен отрезком), среднего меридиана и экватора.

Выбрав за основу наиболее подходящую имеющуюся проекцию, в нее вносят нужные изменения и строят эскиз картографической сетки. При создании проекций для мировых карт эскизы начинали с построения среднего и крайних меридианов. Средний меридиан прямолинеен, крайние — кривые линии. Этим намечался каркас картографической сетки. Затем меридианы разделяли на части и через полученные точки проводили параллели. На построенных параллелях намечали узловые точки и проводили линии меридианов.

При рисовке параллелей следует помнить о последующем этапе построения проекции. Если параллели проекции должны иметь постоянную кривизну, то плавные рисуемые кривые должны быть близкими к дугам окружностей, в частном случае — к прямым линиям. Если кривизна параллелей будет переменной, то их надо рисовать близкими к соответствующим геометрическим линиям. Например, в случае эллиптических параллелей нарисованные кривые должны напоминать дуги эллипсов. Полезно помнить, что с увеличением кривизны параллелей уменьшаются искажения углов, но увеличиваются искажения площадей. При проведении меридианов необходимо учитывать геометрическую форму этих линий. Если строится ортогональная проекция, то углы между линиями параллелей и меридианов должны быть прямыми.

Математическая обработка эскиза может осуществляться по-разному. Если разрабатываемая проекция симметрична относительно среднего меридиана, а ее параллели — дуги окружностей, то достаточно построить только средний и крайний, например, отстоящий по долготе от среднего на 180° меридианы и определить на них прямоугольные и географические координаты узловых точек. Упомянутые координаты находят численно, интерполированием, или составляют уравнения в виде полиномов. При выборе полинома учитываются свойства сетки. Если сетка симметрична относительно экватора, то в полиноме для x должны быть только нечетные степени широты; если сетка симметрична относительно среднего меридиана, то в полиноме для y должны быть только четные степени широт (полагается, что ось X направлена на север по среднему меридиану, ось Y — на восток по экватору):

$$x = a_1\varphi + a_3\varphi^3 + a_5\varphi^5 + a_7\varphi^7;$$

$$y = b_0 + b_2\varphi^2 + b_4\varphi^4 + b_6\varphi^6 + b_8\varphi^8.$$

Полином среднего меридиана обычно имеет низкую степень. Степень полинома крайнего меридиана определяют по правилу: при n узлах на меридиане наивысшая степень равна $n - 1$ либо $n - 2$. Обычно коэффициенты полиномов находят по способу наименьших квадратов — минимизируя суммы квадратов отклонений соответствующих вычисленных и снятых с эскиза координат.

Если параллели являются дугами окружностей, то вычисления координат остальных узловых точек проекции выполняются, как это следует из чертежа рис. 81, по следующим формулам:

$$\rho = y_{180} / \sin \delta_{180}; \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{180}}{2} \right) = \frac{x_{180} - x_0}{y_{180}}; \quad \delta = \frac{\delta_{180}}{\pi} \lambda;$$

$$x = x_0 + \rho(1 - \cos \delta); \quad y = \rho \sin \delta.$$

Могут быть и другие подходы. Л. К. Затонский в 50—60 годах XX в. построил карту Мирового океана по эскизу проекции. На этом эскизе параллели изображены дугами эллипсов. Что касается меридианов, то в основной части карты — это дуги эллипсов, в непосредственной близости у полюсов — прямые линии, а между отрезками прямых и дугами эллипсов вставлены дуги окружностей.

Математическая обработка эскиза сводится к нахождению параметров соответствующих упомянутых эллипсов, окружностей и прямых линий. Координаты текущих точек определяются совместным решением уравнения параллели и уравнения соответствующего участка меридиана.

Если эскиз строится для всей картографической сетки и если для каждого узла по чертежу снимаются прямоугольные координаты и соответствующие им широты и долготы, то может обрабатываться вся совокупность этих данных. Часто для этих целей используются полиномы от двух аргументов — широт и долгот. Степени многочленов определяют дополнительными исследованиями. Чем степень выше, тем точнее уравнения описывают картографическую сетку на эскизе. Однако высокие степени усложняют обработку, и уравнения будут отражать не только особенности проекции, но и графические погрешности построения эскиза.

На многочлен накладываются ограничения, определяющие особенности картографической сетки. К ним относятся:

- симметрия сетки относительно среднего меридиана — в уравнениях для x долготы должны быть только с четными степенями, а в уравнениях для y — с нечетными;
- симметрия сетки относительно экватора — в уравнениях для x только нечетные степени широт, а в уравнениях для y — четные степени широт;
- симметрия сетки одновременно относительно среднего меридиана и экватора. В этом случае формулы для x должны содер-

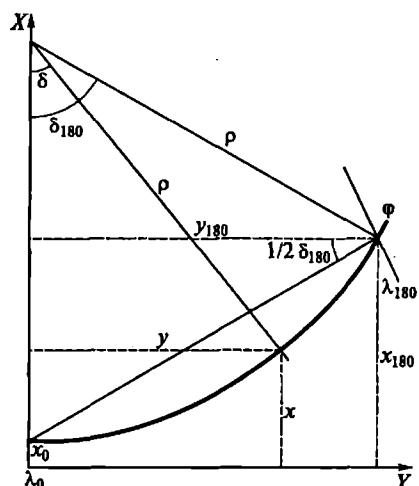


Рис. 81. Построение проекции по эскизу сетки — взаимосвязь координат (x, y) текущей точки с координатами точек $(x_0, 0)$ на среднем меридиане и координатами (x_{180}, y_{180}) на крайнем меридиане, когда все точки лежат на одной параллели широты ϕ , а параллель есть дуга окружности

жать широты с нечетными степенями, долготы с четными, формулы для y — широты с четными, долготы с нечетными степенями:

$$x = a_1\phi + a_2\phi^3 + a_3\phi\lambda^2 + \dots;$$

$$y = b_1\lambda + b_2\lambda^3 + b_3\phi^2\lambda + \dots;$$

- условие изображения полюса P точкой

$$x_P = \text{const}; \quad y_P = 0.$$

Коэффициенты полиномов определяют, минимизируя суммы квадратов отклонений измеренных по эскизу и вычисляемых по формулам координат обрабатываемых точек. Для этого удобно применять стандартные программы минимизации, обычно не прибегающие к вычислениям соответствующих производных.

Возможны и другие подходы. Когда для узлов сетки созданы таблицы с прямоугольными и географическими координатами точек, построения картографических сеток можно производить по интерполяционным формулам. Тем более, что в условиях геоинформационного картографирования широко применяются стандартные программные пакеты разнообразных интерполяционных способов.

Для примера на рис. 82 приведен макет карты с картографической сеткой с шагом 10° по широте и долготе. Макет получен следующим образом. Исходная карта в проекции Л. К. Затонского

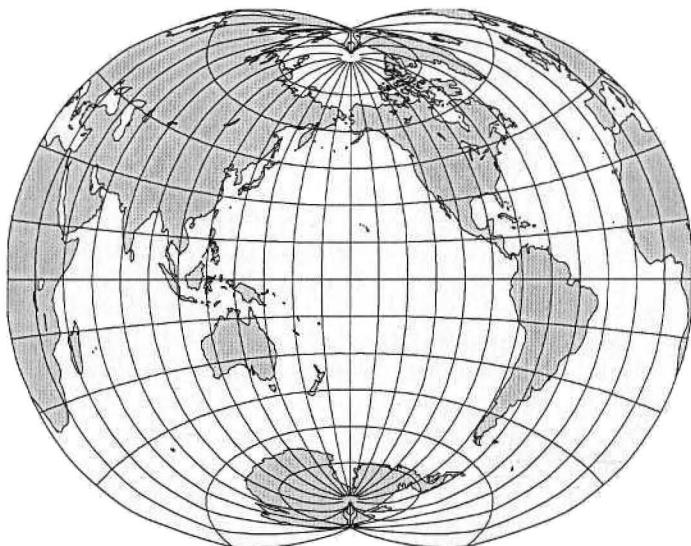


Рис. 82. Макет карты проекции Затонского, картографическая сетка построена квадратичной интерполяцией координат узловых точек

на листе формата А4 была отсканирована, и на экране компьютера определены координаты узловых точек. Так как проекция симметрична относительно среднего меридиана и экватора, оцифрована была только первая (северо-западная) четверть сетки.

Полученная таблица прямоугольных и географических координат использована для построения макета карты, содержащего сетку с береговыми линиями. Построения выполнены способом квадратичной интерполяции функции двух переменных.

§ 27. ПРОИЗВОДНЫЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Новые *производные* картографические проекции получают из ранее известных проекций. Этого добиваются путем их видоизменения, деформации в одном или нескольких направлениях, комбинирования и обобщения их уравнений, аналитического преобразования исходных уравнений и другими всевозможными способами.

Производная картографическая проекция — картографическая проекция, полученная преобразованием одной или нескольких ранее известных проекций.

Видоизменением простой поликонической проекции получена сетка Международной карты мира масштаба 1 : 1 000 000. В простой поликонической проекции средний меридиан прямолинеен и изображается без искажений, остальные меридианы — криволинейны; параллели — дуги окружностей, изображаемые без искажений. В видоизмененной проекции все меридианы спрямлены. Без искажений изображаются только два меридиана; они отстоят от среднего меридиана на $\pm 2^\circ$ на широтах до 60° , на $\pm 4^\circ$ на широтах между параллелями от 60 до 76° и на $\pm 8^\circ$ за параллелями 76° . На каждом листе карты без искажений изображаются только две параллели — северная и южная. Представление об искажениях в других частях листа карты дает рис. 83.

Деформацией исходной проекции также можно получить новые проекции. В 1889 г. Д. Аитов (D. Aitoff, 1854—1933) растянул в два раза вдоль экватора равнопромежуточную поперечную азимутальную проекцию полушария и превратил ее в проекцию карты мира (рис. 84).

В 1892 г. Е. Гаммер (H. H. E. Hammer, 1858—1925) применил этот способ к равновеликой поперечной азимутальной проекции и получил равновеликую проекцию для карты мира (рис. 85).

На рис. 86 приведена модифицированная проекция «Двух миров» Гильберта (см. § 4), растянутая по ординатам (вдоль экватора) в 1,25 раза.

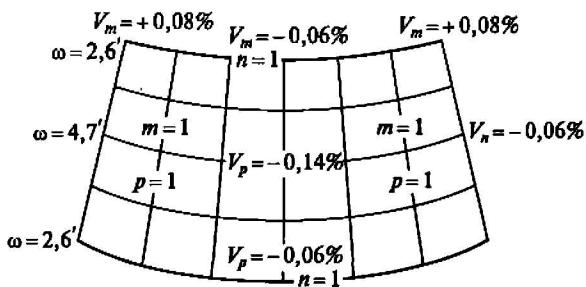


Рис. 83. Картографическая сетка с величинами искажений в проекции листа Международной карты мира масштаба 1 : 1 000 000 (ω — максимальные искажения углов; m , n , p — частные масштабы длин по меридиану (m), параллели (n) и площадей (p); V_m , V_n , V_p — соответствующие искажения)

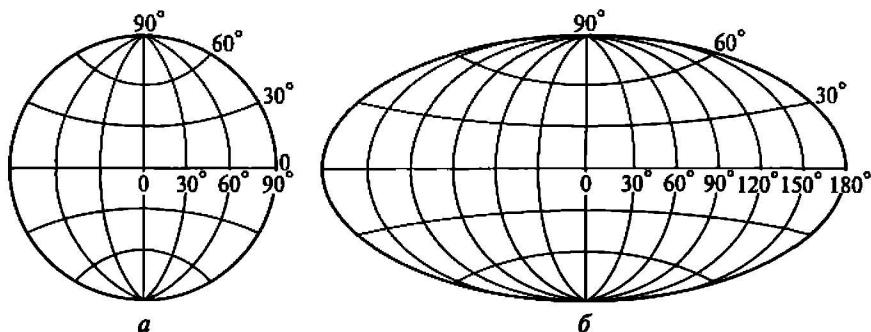


Рис. 84. Получение производных проекций способом Аитова:
а — исходная поперечная азимутальная проекция; б — производная проекция

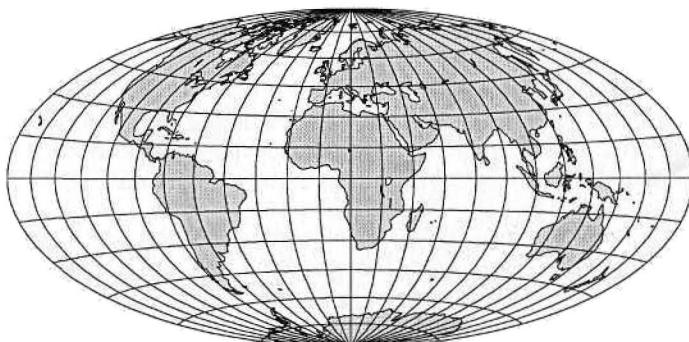


Рис. 85. Производная равновеликая проекция Аитова—Гаммера

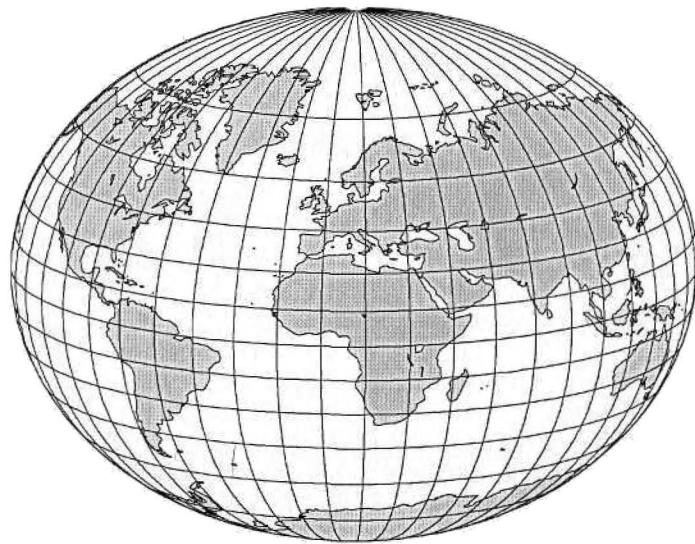


Рис. 86. Косая модифицированная проекция «Двух миров» Гильберта
(координаты условного полюса: $\phi_0 = +17^\circ$, $\lambda_0 = +11^\circ$)

В 1953 г. Бризмайстер предложил равновеликую поперечную проекцию, производную от косой равновеликой азимутальной проекции.

В этой проекции координаты условного полюса имели следующие значения: $\phi = 45^\circ$ и $\lambda = -170^\circ$. Таким образом, условный полюс оказался расположенным за географическим полюсом. Вследствие этого в проекции Северный полюс изображен одной точкой, а Южный полюс — двумя. Кроме того, по сравнению с азимутальной проекцией в этой проекции ординаты (ось Y — эк-

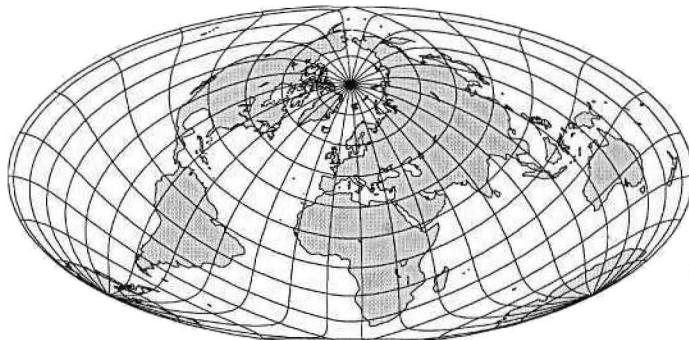


Рис. 87. Производная равновеликая проекция Бризмайстера

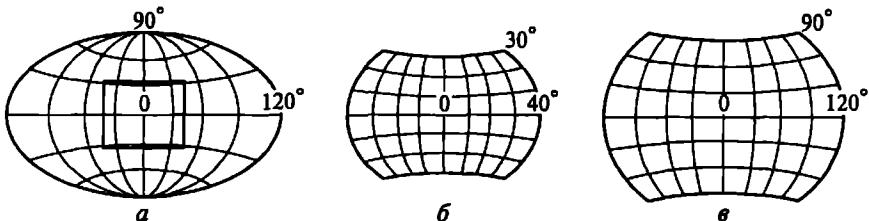


Рис. 88. Схема образования производных проекций изменением части исходной сетки:

a — выделение подходящего участка на исходной карте; *б* — сгущение сетки; *в* — переоцифровка сетки

ватор) увеличены в 1,8708 раза, а абсциссы (ось *X* — средний меридиан) — в 1,0690 раза. В результате получилась оригинальная проекция (рис. 87, см. также рис. 17).

Немецкие картографы К. Зимон (K. Siemon) и К. Вагнер (K. Wagner) предложили заимствовать не всю исходную проекцию, а лишь определенную ее часть. Обычно, как наиболее ценная, используется центральная часть, которую с разными коэффициентами растягивают в направлении экватора и среднего меридiana. Линии параллелей и меридианов на новой сетке переоцифровывают. Схема образования проекций указанным способом воспроизведена на рис. 88. Этим способом получены многие картографические проекции, находящие применение в зарубежных атласах, в частности в Германии.

Комбинированием уравнений нескольких проекций, обладающих разными свойствами, получают новые, с измененными свойствами проекции. Этот путь оказался весьма плодотворным, применялся и применяется многими авторами в целях получения новых проекций. Болгарский картограф А. Марин, объединяя уравнения с разным весом перспективно-цилиндрических проекций с позитивным и негативным изображениями, получал проекции с меньшими искажениями и более равномерным их распределением.

В зарубежной картографии часто для карт мира используют проекцию Винкеля (O. WinkeI, 1873—1953), предложенную им в Германии в 1921 г. В этой проекции уравнения получены усреднением формул абсцисс и ординат производной проекции Аитова и равнопромежуточной цилиндрической проекции, для которой широта главной параллели принята $\pm 40^\circ$ (рис. 89). Таким образом, производная проекция Аитова сама стала исходной при формировании новой проекции — проекции Винкеля.

В тех случаях, когда важно показать не только экваториальные, среднеширотные, но и полярные области, можно комбинировать цилиндрические и псевдоазимутальные проекции. В какой псевдоазимутальной проекции полярные области изобража-

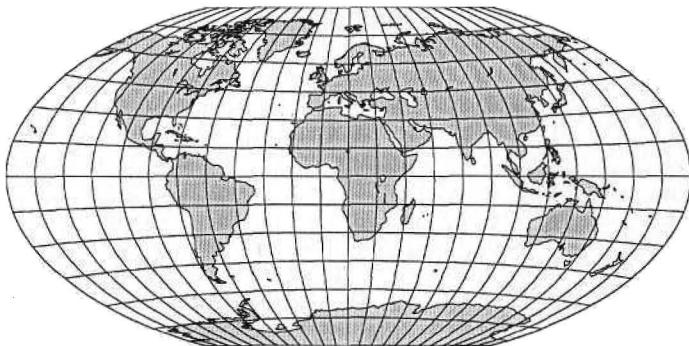


Рис. 89. Производная проекция Винкеля

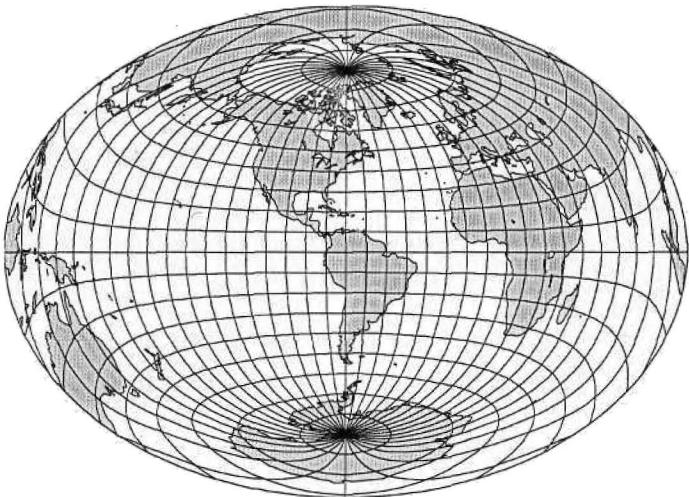


Рис. 90. Проекция, производная от нормальной цилиндрической проекции Меркатора и поперечной псевдоазимутальной проекции

ются как будто в перспективе. На рис. 90 приведена проекция, координаты точек которой равны средневзвешенным значениям из координат нормальной цилиндрической проекции Меркатора и поперечной псевдоазимутальной проекции, в которой альмукантары построены не в виде окружностей, как это обычно бывает, а в виде эллипсов. Вертикальные полуоси этих эллипсов направлены по среднему меридиану, а горизонтальные — по экватору. Вертикальные полуоси эллиптических альмукантаров соответствуют равнопромежуточной составляющей проекции, а горизонтальные — произвольной составляющей со свойствами, характерными для проекций, расположенных между равнопроме-

жуточными и равновеликими проекциями. В этих построениях при вычислениях координат очень важен надлежащий выбор весов. Они должны быть такими, чтобы около полюсов не было влияния проекции Меркатора, а на экваторе — псевдоазимутальной проекции. В промежутке между экватором и полюсом должен быть плавный переход от одной проекции к другой.

Введение дополнительных параметров в исходные уравнения проекций также позволяет изменять ее свойства. Этим, в сущности, очень простым способом в ЦНИИГАиК, например, был разработан ряд псевдоцилиндрических и псевдоконических проекций.

В 1937—1938 гг. профессор М.Д. Соловьев видоизменил псевдоконическую проекцию Бонна. Ее уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$\rho = C_0 + C_1(S_0 - S); \quad \delta = C_2 \frac{r}{\rho} \lambda; \quad x = p - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta.$$

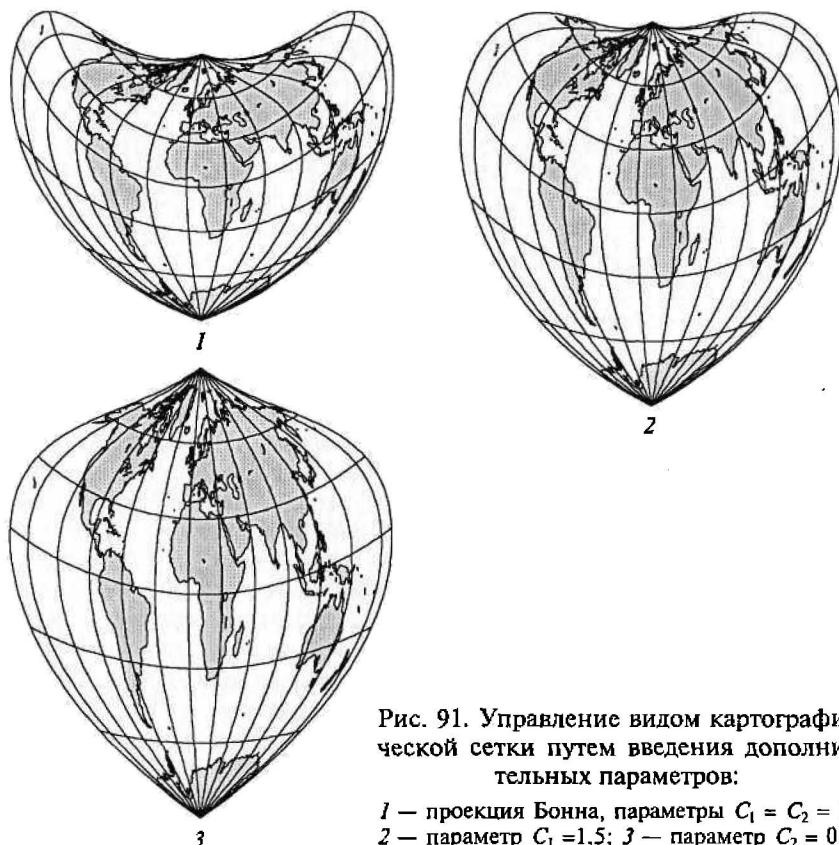


Рис. 91. Управление видом картографической сетки путем введения дополнительных параметров:

1 — проекция Бонна, параметры $C_1 = C_2 = 1$;
2 — параметр $C_1 = 1,5$; 3 — параметр $C_2 = 0,5$

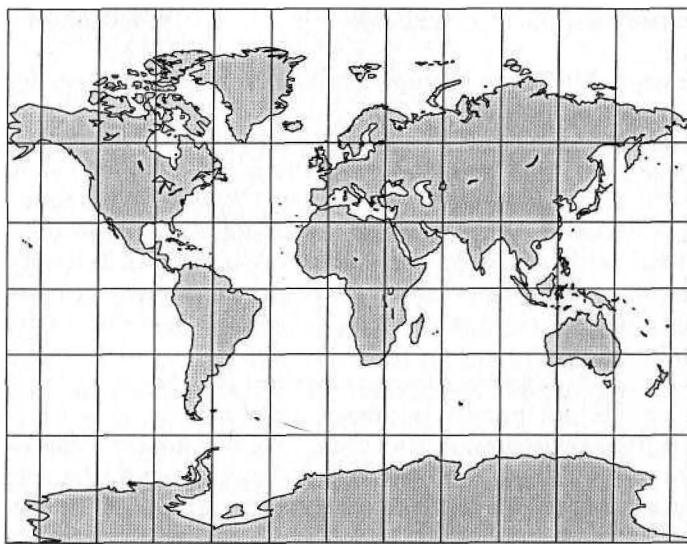


Рис. 92. Картографическая сетка производной цилиндрической проекции Миллера

Таким образом, в формулах проекции выделены три параметра — C_0 , C_1 , C_2 . В самой проекции Бонна эти параметры имеют следующие значения:

$$C_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0; \quad C_1 = C_2 = 1.$$

Было предложено эти параметры рассматривать как произвольные величины. Путем изменения введенных параметров стало возможным управлять кривизной параллелей проекции, этим придавать новый вид ее картографической сетке и изменять ее свойства. На рис. 91 показано, как изменяется вид проекции Бонна при изменении параметра C_1 , а затем и параметра C_2 .

В качестве следующего примера рассмотрим производную нормальную цилиндрическую проекцию Миллера. Ее картографическая сетка приведена на рис. 92.

В 1942 г. О. М. Миллер ввел в уравнения проекции Меркатора дополнительный параметр $d = 0,8$. Уравнения проекции приняли вид:

$$x = C \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + d \frac{\Phi}{2} \right) \right] / d; \quad y = C\lambda.$$

Картографическая сетка проекции очень похожа на сетку проекции Меркатора. Однако она лишена ряда недостатков, присущих проекции Меркатора. В проекции Миллера меньшие искажения площадей, особенно в приполярных районах, а промежутки между параллелями изменяются не столь быстро. В цент-

ральной полосе ближе к экватору обе проекции, в сущности, совпадают.

Проекция Миллера широко применяется в американских атласах для построения карт мира.

Обобщение уравнений проекций. Этот прием получил широкое распространение при построении производных азимутальных проекций. Его суть заключается в том, что берутся уравнения проекций и обобщаются конкретные значения их параметров — эти параметры записываются не в числовом, а в буквенном виде. В результате, придавая параметрам разные числовые значения, получают проекции с различными свойствами. Рассмотрим несколько примеров.

В 1936 г. Г. А. Гинзбург предложил общую формулу для вычисления в проекции радиусов альмукантаратов ρ . Она объединяет формулы для вычисления этих радиусов в равновеликой и равноугольной азимутальных проекциях. В объединенной формуле числовые значения параметров заменены буквенными:

$$\rho = R \left(L_1 \sin \frac{Z}{k_1} + L_2 \operatorname{tg} \frac{Z}{k_2} \right).$$

При $L_2 = 0$, $L_1 = k_1 = k$ получается обобщенная формула «синусной ветви»:

$$\rho = Rk \sin \frac{Z}{k}.$$

При $k = 2$ имеем равновеликую азимутальную проекцию, а при $k = 1$ — ортографическую проекцию. Для значений k , близких к 2,7—3,0, получаются проекции с небольшими искажениями площадей. Они пригодны для построения карт отдельных континентов. При значениях k , близких к 1,2—1,5, — приобретает свойства сферичности, что важно для передачи шарообразности Земли.

При $L_1 = 0$, $L_2 = k_2 = k$ получается обобщенная формула «тангенсной ветви»:

$$\rho = Rk \operatorname{tg} \frac{Z}{k}.$$

При $k = 2$ имеем равноугольную азимутальную проекцию (стереографическую), а при $k = 1$ — гномоническую проекцию.

Таким образом, обобщенная формула при определенных параметрах дает значительную часть общезвестных азимутальных проекций и различные промежуточные варианты.

Г. А. Гинзбург предложил и другого вида формулы для азимутальных проекций с небольшими искажениями площадей, которые становятся заметными лишь при больших значениях зенитных расстояний (у границ полушария):

$$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2} + aRZ^q,$$

где q — некоторый параметр.

Обобщенную формулу радиуса ρ азимутальных проекций А. К. Маловичко предложил в 1947 г. в несколько ином виде:

$$\rho = R \left(2 \sin \frac{Z}{2} \right)^k \left(2 \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \right)^{1-k}.$$

При коэффициенте $k = 1/2$ получается проекция Брейзинга (Breusing, 1818—1892), в которой радиус определяется как среднее геометрическое из равновеликой и равноугольной проекций. По характеру искажений она располагается между равнопромежуточной и равноугольной проекциями.

Наиболее общий вариант обобщения уравнений азимутальных проекций дал Л. М. Бугаевский:

$$\rho = \frac{1}{k} R \left[L_1 \left(\sin \frac{Z}{k_1} \right)^{c_1} + L_2 \left(\operatorname{tg} \frac{Z}{k_2} \right)^{c_2} + L_3 \sin Z + L_4 Z + L_5 \operatorname{tg} Z \right].$$

Возможны также обобщения формул для цилиндрических, конических и других классов проекций.

Аналитические преобразования исходных уравнений. Они могут быть выполнены по предложению Н. А. Урмаева с помощью уравнений:

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}; \quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3},$$

где x, y, x', y' — прямоугольные координаты точек в исходной и производной проекциях; a, b, c — коэффициенты преобразования, определяемые с учетом заданных условий.

§ 28. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ РЕАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В последние годы учеными-картографами начали разрабатываться проекции, важные для картографирования космических тел очень сложной формы (астероидов, комет и др.). Аппроксимация этих тел с помощью шара или эллипсоида не представляется возможной.

Проекции реальных поверхностей получают обобщением существующих проекций. В сложное картографируемое тело вписывается вспомогательная геометрически правильная поверхность. Обычно это сфера некоторым радиусом R . Любые картографические проекции этой сферы могут быть использованы для отобра-

жения сложной реальной поверхности. Изменения заключаются в том, что учитываются высоты h реальной поверхности над вспомогательной сферой. Получаются проекции *переменного радиуса*. Если при традиционном картографировании для всех точек сферы ее радиус остается постоянной величиной, то при учете высот h для текущей точки этот радиус равен величине $(R + h)$. Поэтому можно воспользоваться уравнениями проекций сферы, подставив в них вместо радиуса R значение $(R + h)$. Так, формулы равнопромежуточной по меридианам цилиндрической проекции после упомянутого видоизменения принимают следующий вид:

$$x = (R + h)\phi;$$

$$y = (R + h)\lambda.$$

Аналогично могут быть видоизменены формулы других проекций. Например, для псевдоцилиндрической эллиптической проекции Каврайского они принимают следующий вид:

$$x = (R + h)\phi;$$

$$y = \frac{3}{2\sqrt{3}}(R + h) \cos \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} \phi \right) \right) \lambda.$$

Эти проекции важны для картографирования сравнительно небольших тел со значительным перепадом высот рельефа. При достаточно густой картографической сетке все формы рельефа отображаются достаточно выпукло и наглядно.

§ 29. АНАЛИЗ СВОЙСТВ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Прямые способы получения проекций предполагают, что вначале каким-то образом будут определены уравнения картографической проекции, а затем последует анализ ее свойств. С этой целью используется весьма удобный математический аппарат — частные производные от соответствующих функций и рассмотренные выше коэффициенты Гаусса. Дадим сводку общих формул по группам проекций, необходимых для вычисления коэффициентов Гаусса и анализа величин и характера искажений. Основные свойства проекции, ее класс можно указать простым сравнением полученных формул с их общими вариантами.

Уравнения для проекций цилиндрической группы:

$$x = x(B, L); \quad y = y(B, L);$$

$$e = x_B^2 + y_B^2; \quad g = x_L^2 + y_L^2;$$

$$f = x_B x_L + y_B y_L; \quad h = x_B y_L - x_L y_B.$$

Уравнения для проекций конической и азимутальной групп:

$$x = d - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$e = d_B^2 + \rho_B^2 + \rho^2 \delta_B^2 + 2d_B(\rho \delta_B \sin \delta - \rho_B \cos \delta);$$

$$g = \rho_L^2 + \rho^2 \delta_L^2;$$

$$f = \rho_L(\rho_B - d_B \cos \delta) + \rho \delta_L(\rho \delta_B + d_B \sin \delta);$$

$$h = \rho_L(\rho \delta_B + d_B \sin \delta) - \rho \delta_L(\rho_B - d_B \cos \delta).$$

Задание проекций уравнениями параллелей и меридианов:

$$B = B(x, y); \quad L = L(x, y);$$

$$x_B = hL_y; \quad y_B = -hL_x; \quad x_L = -hB_y; \quad y_L = hB_x;$$

$$h = 1/(B_x L_y - B_y L_x).$$

Значения коэффициентов Гаусса для эллипсоида вращения и шара, а также формулы для вычисления показателей искажений приведены в гл. 3. В табл. 9 дана сводка общих уравнений картографических проекций с указанием того, какие частные производные в данном конкретном случае равны нулю. В случае использо-

Таблица 9
Сводка общих уравнений картографических проекций

Классы	Группы классов проекций		
	A	K	Ц
<i>Параллели постоянной кривизны</i>			
Базовый	$d = \text{const}; \quad \rho = \rho(B); \quad \delta = \delta(L);$ $d_B = \rho_L = \delta_B = 0$		$x = x(B);$ $y = y(L);$ $x_L = y_B = 0$
Псевдоазимутальный, псевдоконический, псевдоцилиндрический	$d = \text{const}; \quad \rho = \rho(B); \quad \delta = \delta(B, L);$ $d_B = \rho_L = 0$		$x = x(B);$ $y = y(B, L);$ $x_L = 0$
Полиазимутальный, поликонический, псевдоцилиндрический	$d = d(B); \quad \rho = \rho(B); \quad \delta = \delta(B, L);$ $\rho_L = 0$		
<i>Параллели переменной кривизны</i>			
Полиазимутальный, поликонический, полицилиндрический	$d = d(B); \quad \rho = \rho(B, L);$ $\delta = \delta(B, L)$		$x = x(B, L);$ $y = y(B, L)$

зования шара радиус кривизны меридиана M заменяется радиусом шара R ; радиусы параллелей r также вычисляются для шара. При этом в производных индексы B меняются на индексы ϕ , а индексы L — на λ . В случае перехода от сферических географических координат ϕ и λ к сферическим полярным координатам Z и a следует полагать $\varphi_Z = \lambda_a = -1$. Иначе, чтобы получить производные функций по зенитному расстоянию Z или азимуту a , нужно соответствующие производные по широте ϕ или долготе λ умножить на коэффициент -1 . Например, $p_Z = -p_\phi$.

Не следует забывать о том, что после перехода к полярным координатам (Z , a) анализируется уже не картографическая сетка меридианов и параллелей, а сетка вертикалов и альмукантаратов (условных меридианов и параллелей). Обычно частные масштабы длин по вертикалам обозначают через μ_1 , а по альмукантаратам — через μ_2 . Поэтому после перехода к полярным координатам в приведенных ранее формулах надо заменить обозначение частных масштабов m на μ_1 , а n — на μ_2 .

Проиллюстрируем применение расчетных формул несколькими простыми примерами.

Пример 1. Изучить свойства проекции, заданной уравнениями

$$x = \int_0^B M dB; \quad y = CL.$$

Проекция задана уравнениями в прямоугольной системе координат. Обратим внимание, что абсциссы являются только функцией широты, а ординаты — только функцией долготы. Кроме того, в формулах фигурирует величина M — радиус кривизны меридиана эллипсоида вращения. Поэтому из табл. 9 следует, что это нормальная цилиндрическая проекция эллипсоида вращения. Для производных, коэффициентов Гаусса и показателей искажений получаем

$$\begin{aligned} x_B &= M; \quad y_L = C; \quad e = M^2; \quad g = C^2, \quad f = 0; \\ m &= 1; \quad n = C/r; \quad p = n; \\ \epsilon &= 0; \quad \operatorname{tg}(\omega/2) = \frac{1-n}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

На основе этих формул можно заключить, что это равнопромежуточная по меридианам проекция. Искажения на параллелях будут зависеть от выбора параметра C . При $C = r_0$ (r_0 — радиус некоторой параллели) частный масштаб длин на этой параллели будет $n_0 = 1$.

Пример 2. Определить показатели искажений нормальной конической проекции эллипсоида, заданной полярными уравнениями

$$\delta = \alpha L; \quad \rho^2 = \frac{2}{\alpha} \left(C - \int_0^B Mr dB \right).$$

Получаем

$$\begin{aligned}\rho_B &= -Mr/\alpha\rho; \quad \delta_L = \alpha; \\ \sqrt{e} &= Mr/\alpha\rho; \quad \sqrt{g} = \alpha\rho; \quad f = 0; \quad h = Mr; \\ n &= \alpha\rho/r; \quad m = 1/n; \quad p = 1; \\ \epsilon &= 0; \quad \operatorname{tg}(\omega/2) = \frac{n^2 - 1}{2n}.\end{aligned}$$

Проекция равновеликая, так как частный масштаб площади $p = 1$. Искажения длин и углов зависят от выбора параметров α и C . В частности, можно принять $\alpha = r_0/\rho_0$, т.е. равным отношению радиусов на эллипсоиде и на карте той параллели, для которой $n = 1$.

Пример 3. Выявить свойства следующей косой азимутальной проекции, заданной полярными уравнениями

$$\delta = a; \quad \rho = 2R \operatorname{tg}(Z/2).$$

Учитывая, что уравнения проекции заданы в полярных координатах, получаем

$$\begin{aligned}d_Z &= \rho_a = \delta_Z = 0; \quad \delta_a = 1; \\ \rho_Z &= R/\cos^2(Z/2); \\ \sqrt{e} &= R/\cos^2(Z/2); \quad \sqrt{g} = \rho; \quad f = 0; \\ h &= 2R^2 \operatorname{tg}(Z/2)/\cos^2(Z/2); \\ \mu_1 &= \mu_2 = 1/\cos^2(Z/2); \\ p &= 1/\cos^4(Z/2); \quad \epsilon = 0; \quad \omega = 0.\end{aligned}$$

Так как отсутствуют искажения углов ($\omega = 0$), главное свойство проекции — ее равноугольность.

Приведенные выше формулы имеют большое значение и для получения проекций решением обратной задачи математической картографии.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под прямой задачей математической картографии? Какие можно указать прямые способы получения проекций?
2. Какие проекции называют глобулярными? Чем отличаются глобулярные проекции Апиана и Бэкона от проекции Бируни?
3. Где располагают центр проектирования (точку глаза) и плоскость проектирования при перспективном проектировании шара на плоскость?
4. Как изменяются свойства перспективных азимутальных проекций с изменением положения центра проектирования?
5. Какими отличительными свойствами обладают гномоническая, стереографическая и ортографическая перспективные азимутальные проекции?

6. Чем отличается внешняя перспективная азимутальная проекция с негативным изображением от внешней проекции с позитивным изображением?

7. В чем суть многократного перспективного проектирования? Какие при этом могут быть использованы поверхности на промежуточных этапах многократного проектирования?

8. Как многократным перспективным проектированием сферы на сферу получают равновеликую и равнопромежуточную азимутальные проекции?

9. В чем отличие перспективного проектирования шара на цилиндр от его перспективного проектирования на плоскость?

10. Как различаются между собой по характеру искажений ортографические и стереографические цилиндрические и азимутальные перспективные проекции?

11. Как получают перспективные конические проекции?

12. Из каких этапов складывается процедура построения проекций по эскизам сеток? Приведите примеры таких проекций.

13. Какие проекции называются производными? Назовите известные вам приемы построения производных проекций.

14. Как построена производная проекция Международной карты мира масштаба 1 : 1 000 000? Чем сетка этой производной проекции отличается от сетки исходной проекции? Какими величинами искажений характеризуется новая проекция?

15. В чем суть способа Аитова получения производных проекций для карт мира?

16. Как получена производная проекция Бризмейстера?

17. В чем суть способа Зимона и Вагнера построения производных проекций?

18. Каким способом и по каким исходным проекциям получена производная проекция Винкеля? Как применить этот способ для получения производных цилиндрических проекций и производных от цилиндрических и псевдоазимутальных проекций?

19. В чем суть способа Соловьева видоизменения псевдоконических проекций?

20. Как получена производная проекция Миллера? Чем она отличается от проекции Меркатора?

21. Какие вам известны азимутальные производные проекции, полученные способом обобщения уравнений исходных проекций? Покажите это на примерах, предложенных Г.А.Гинзбургом и А. К. Маловичко.

22. Почему возникает необходимость построения так называемых проекций реальных поверхностей?

23. Как видоизменить существующие проекции в целях их использования для построения проекций реальных поверхностей?

24. Как использовать коэффициенты Гаусса для анализа свойств картографических проекций, полученных прямыми способами?

ГЛАВА 6

ИЗЫСКАНИЕ ПРОЕКЦИЙ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

В основе способов получения картографических проекций с заданными свойствами лежит решение обратной задачи математической картографии. В *обратной задаче математической картографии* вначале задаются характеристики проекции или часть этих характеристик, затем выводятся уравнения проекции, формулы, характеризующие искажения и свойства проекции, и вычисляются координаты ее точек.

В наиболее общем случае обратная задача включает решение фундаментальных дифференциальных уравнений в частных производных. Достоинством такого подхода является то, что могут быть получены проекции, оптимальные с точки зрения поставленных критериев, а существенным недостатком — необходимость применения довольно сложного математического аппарата. Поэтому в данной главе будут введены общие понятия и рассмотрены частные, но практически наиболее важные решения.

§ 30. ПОЛУЧЕНИЕ РАВНОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Равноугольные проекции — такие проекции, в которых:

- частный масштаб длин бесконечно малого отрезка не зависит от его азимута;
- сохраняется подобие бесконечно малых фигур в плоскости и на отображаемой поверхности;
- нет искажений углов.

Все три характеристики взаимосвязаны, и каждая из них имеет следствием две другие. Чтобы пояснить сказанное, придется прибегнуть к математическим выкладкам с использованием понятий комплексного переменного.

Построение равноугольного изображения поверхности на плоскости равнозначно установлению на этой поверхности изометрических координат. Вкратце ознакомимся с ними. Начнем с эллипсоида вращения. Для элементарного отрезка на эллипсоиде вращения имеем

$$dD^2 = (MdB)^2 + (r dL)^2.$$

Радиус меридиана не равен радиусу параллели ($M \neq r$). Поэтому при равенстве дифференциалов $dB = dL$ изменения отрезков

меридиана не равны изменениям отрезков параллели ($MdB \neq r dL$). Указанное обстоятельство означает, что на эллипсоиде геодезические координаты (широта B и долгота L) не обладают *изометрией*. Такое же положение с широтами ϕ и долготами λ на сфере. Поэтому географические широты и долготы, как координаты, неудобны для построения равногольных проекций.

Положение можно исправить, если ввести такие координаты, при равенстве дифференциалов которых элементарные дуги координатных линий на эллипсоиде между собой также были бы равны. Для этого вышеприведенное выражение для элементарного отрезка на эллипсоиде перепишем следующим образом:

$$dD^2 = r^2(dq^2 + dL^2);$$

$$dq = (M/r) dB.$$

Теперь дифференциалам $dq = dL$ соответствуют отрезки одинаковой длины на координатных линиях эллипса ($rdq = r dL$). Взяв интегралы от dq и dL , получаем выражения для изометрических координат:

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB; \quad l = \int_{L_0}^L dL = L - L_0.$$

Изометрическими координатами эллипса вращения являются *изометрическая широта* q и *геодезическая долгота* l . При этом координата l отсчитывается в радианах от некоторого осевого меридиана долготы L_0 .

После интегрирования для изометрической широты получают

$$q = \ln \sqrt{\left(\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^e},$$

где e — первый эксцентриситет эллипса вращения. Геодезическая широта B вычисляется последовательными приближениями по формуле

$$B = 2 \operatorname{arctg} \left[e^q \sqrt{\left(\frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right)^e} \right] - \frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления широты B могут также использоваться формулы

$$B = \phi + k_2 \sin 2\phi + k_4 \sin 4\phi + \dots,$$

$$\phi = 2 \operatorname{arctg}(e^q) - \pi / 2;$$

$$k_2 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{5}{24} e^4 + \dots; \quad k_4 = \frac{7}{48} e^4 + \dots.$$

В уравнениях равноугольных проекций часто применяется функция U , связанная с изометрической широтой q следующим образом:

$$q = \ln U;$$

$$U = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left[\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right]^{\frac{e}{2}}.$$

Для сферы эксцентриситет $e = 0$. Поэтому для сферы, заменив эллипсоидальную широту B сферической широтой ϕ или зенитным расстоянием Z , получают

$$U = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right), \text{ или } U = 1 / \operatorname{tg} \left(\frac{Z}{2} \right).$$

Условие равноугольности в картографических проекциях обеспечивается применением аналитических функций комплексного переменного, переменными в которых являются изометрические координаты:

$$x + iy = f(q + il); \quad i = \sqrt{-1}.$$

Как обычно, ось абсцисс ориентирована на север по осевому меридиану, а ось ординат — на восток.

Покажем, что действительно эта функция комплексного переменного осуществляет равноугольное отображение. Для этого потребуется найти соответствующие частные производные и вычислить коэффициенты Гаусса. Аналитические функции комплексного переменного удовлетворяют следующим условиям дифференцируемости:

$$x_q = y_l; \quad y_q = -x_l.$$

Учитывая взаимосвязь dq и dB (см. начало § 30), получают

$$x_q = x_B \frac{r}{M}; \quad y_q = y_B \frac{r}{M}.$$

Отсюда и из условий дифференцируемости следует, что

$$x_l = -y_B \frac{r}{M}; \quad y_l = x_B \frac{r}{M}.$$

Этими выражениями устанавливается взаимосвязь между частными производными прямоугольных координат (x, y) по геодезическим координатам (B, l) . Используя эти производные для вычисления коэффициентов Гаусса, получают

$$\frac{\sqrt{e}}{M} = \frac{\sqrt{g}}{r}; \quad f = 0.$$

Из данных выражений следуют все признаки равноугольности. Первое уравнение обозначает равенство частных масштабов длин по меридиану и параллели, а второе — ортогональность картографической сетки. Как известно, при ортогональной сетке частные масштабы длин по меридиану и параллели являются экстремальными. Следовательно, наимень-

ший и наибольший масштабы равны. Иначе, величина масштаба не зависит от азимута направления. При равенстве экстремальных масштабов длины искажения форм бесконечно малых фигур и искажения углов равны нулю. Упрощается и формула частного масштаба площади p . Сказанное можно выразить следующими уравнениями:

$$\epsilon = 0; m = n = a = b;$$

$$v_k = \frac{a}{b} - 1 = 0; \sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = 0; p = n^2.$$

Используя формулы § 29, находим значения частного масштаба n . Для проекций с параллелями постоянной кривизны они указаны ниже:

$$\text{цилиндрическая } n = \frac{C}{r};$$

$$\text{азимутальная } n = \frac{\rho}{r};$$

$$\text{коническая } n = \alpha \frac{\rho}{r};$$

$$\text{поликоническая } n = \delta_L \frac{\rho}{r}.$$

Рассмотрим примеры функций комплексного переменного, определяющие уравнения известных равноугольных проекций.

Линейная функция

$$x + iy = C(q + il).$$

Левая и правая части этой функции связаны коэффициентом пропорциональности C . После разделения действительных и мнимых частей получают уравнения нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора:

$$x = Cq; y = C(L - L_0).$$

На экваторе абсцисса $x = 0$, а при максимальной разности долгот $\pm\pi$ ордината $y = \pm\pi C$. Следовательно, длина экватора в проекции составляет $2\pi C$. Отсюда ясен геометрический смысл коэффициента C — это радиус цилиндра, на который проектируется отображаемая поверхность эллипсоида, в частном случае шара. Если цилиндр касается экватора, то коэффициент C равен экваториальному радиусу эллипсоида или шара. Если цилиндр является секущим, то коэффициент C равен радиусу главной параллели.

Показательная функция

$$x + iy = Ce^{-\alpha[q-i(\pi-l)]}.$$

Разделяя действительные и мнимые части, получаем уравнения нормальной равноугольной конической проекции

$$\rho = Ce^{-\alpha q} = \frac{C}{U^\alpha}; \delta = \alpha(L - L_0);$$

$$x = -\rho \cos \delta; y = \rho \sin \delta,$$

где α и C — параметры.

Параметр α — это коэффициент пропорциональности, связывающий угол между прямолинейными меридианами на карте с их разностью долгот ($0 < \alpha < 1$). Как следует из приведенных формул, при $q = 0$ параметр C есть радиус дуги окружности, изображающей на плоскости экватор.

Приняв $\alpha = 1$, получим формулы нормальной равноугольной (стереографической) азимутальной проекции.

Степенные ряды

$$x + iy = \sum_{k=0}^N a_k (il)^k.$$

Для получения новых равноугольных проекций функцию комплексного переменного представляют в виде степенного ряда, где величины a_k зависят от широты отображаемой точки. Например, такого вида ряды используют при получении поперечных цилиндрических проекций Гаусса — Крюгера (осевой меридиан проектируется без искажений) и UTM (частный масштаб длин на осевом меридиане $m_0 = 0,9996$).

В более общем случае применяется выражение

$$x + iy = \sum_{k=0}^N (a_k + ib_k)(x' + iy')^k,$$

где x' , y' либо равны изометрическим координатам q , l , либо это координаты некоторой базовой (исходной) проекции. Базовой может быть, например, азимутальная стереографическая проекция.

Чтобы упростить вычисления, связанные с возведением в степень комплексных чисел, эту запись преобразуют. Разделив действительную и мнимую части, их выражают через так называемые гармонические полиномы P , Q :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^N (a_k P_k - b_k Q_k); \\ y &= \sum_{k=0}^N (a_k Q_k + b_k P_k). \end{aligned}$$

Величины P , Q вычисляют по удобным рекуррентным формулам:

$$P_k = P_{k-1} P_1 - Q_{k-1} Q_1;$$

$$Q_k = P_{k-1} Q_1 + Q_{k-1} P_1;$$

$$P_0 = 1; Q_0 = 0;$$

$$P_1 = x'; Q_1 = y'.$$

В некоторых задачах прямоугольные координаты предпочитают выражать через полярные координаты (дирекционный угол α и расстояние ρ). В этом случае гармонические полиномы представляют в следующей форме:

$$P_k = \rho^k \cos(k\alpha);$$

$$Q_k = \rho^k \sin(k\alpha).$$

Вид проекции зависит от степени полинома и его коэффициентов a_k и b_k .

Приведенные уравнения имеют большое значение для конструирования равноугольных картографических проекций.

§ 31. НАИЛУЧШИЕ РАВНОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Важной является теорема о равноугольных проекциях, высказанная в 1853 г. П. Л. Чебышевым (1821—1894) и доказанная в 1894 г. Д. А. Граве (1863—1939). Теорема гласит:

Найлучшая равноугольная проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину.

Построенные в соответствии с этой теоремой проекции называются *проекциями Чебышева*. В таких проекциях частный масштаб длин наименее уклоняется от 1. По контуру территории идет изокола с наибольшим значением частного масштаба длин. В центре территории частный масштаб длин имеет минимальное значение.

В равноугольных проекциях частный масштаб площади $p = m^2$, а его логарифм равен $\ln p = 2 \ln m$. Поэтому если масштаб m наименее уклоняется от единицы, то значения $\ln m$ и $\ln p$ наименее уклоняются от нуля. Это означает, что в проекциях Чебышева искажения площадей сведены к минимуму. Другими словами, среди равноугольных проекций проекции Чебышева наиболее близки к равновеликим проекциям.

Теорема П. Л. Чебышева о наилучших равноугольных проекциях имеет важное теоретическое и практическое значение. Этой теоремой руководствуются при выборе проекций. Как известно, в азимутальных проекциях изоколы являются окружностями и совпадают с параллелями, или альмукантаратами. Поэтому в соответствии с теоремой Чебышева азимутальные проекции наиболее приспособлены для отображения круглых территорий. В нормальных конических и цилиндрических проекциях изоколы также совпадают с параллелями. Поэтому они наиболее выгодны для территорий, вытянутых по параллелям (альмукантаратам).

Конструированием наилучших равноугольных проекций в соответствии с теоремой Чебышева занимались и продолжают заниматься многие российские и зарубежные ученые. Значительный вклад в практическое получение проекций Чебышева внесли картографы В. В. Каврайский, Н. А. Урмаев, Г. А. Мещеряков, Л. М. Бугаевский, Л. А. Вахрамеева и др. Работы по изысканию этих проекций продолжаются и в настоящее время.

Разработанные численные методы получения проекций Чебышева сводятся к решению двух задач:

1) нахождению показателей искажений карты по заданному значению частного масштаба длин на контуре области;

2) определению прямоугольных координат проекции по значениям частных масштабов длин.

Решения громоздки и тем труднее, чем сложнее контур территории. Однако не столь уж важно учитывать мельчайшие извилины контуров территорий. Достаточно их обобщать, заменяя плавными, например овальными, приспособленными к контуру территории, изоколами. В течение XIX—XX вв. разработан ряд способов построения равноугольных проекций с *приспособляемой* к контуру территории изоколой.

Широко известны способы голландского геодезиста Схольса (Ch.M. Schols), французского ученого Лаборда (J. Laborde), американского специалиста О. Миллера, советских картографов В. В. Каврайского, Л. А. Вахрамеевой и др. Эти способы применимы главным образом для картографирования малых и средних по размерам территорий.

К приспособляемым относится одна из основных равноугольных проекций — проекция Лагранжа. Ее можно использовать для картографирования любых по площади территорий, кроме полярных регионов. На полюсах проекция Лагранжа теряет свойства равноугольности. Для полярных регионов применяется нормальная стереографическая проекция.

Определенный вклад в создание методики построения проекций Лагранжа с приспособляемой изоколой внесли ученые П. Л. Чебышев, Н. Я. Цингер, В. В. Витковский, В. В. Каврайский.

В равноугольной круговой проекции Лагранжа вся земная поверхность изображается в круге, ограниченном двумя меридианами с долготами $\lambda = \pm 180^\circ$, отсчитываемыми от среднего прямолинейного меридиана. Уравнения проекции, по которым вычисляются координаты точек на плоскости, имеют вид

$$x = \frac{k \sin \delta}{1 + \cos \lambda' \cos \delta}; \quad y = \frac{k \sin \lambda' \cos \delta}{1 + \cos \lambda' \cos \delta};$$
$$\lambda' = \alpha \lambda; \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} \right) = \beta U^\alpha.$$

В данных формулах ось X направлена по среднему прямолинейному меридиану на север, а ось Y — по прямолинейной параллели на восток. Уравнения содержат три параметра — α , β и k . От выбора значений этих параметров зависят свойства и вид проекции. Рассмотрим алгоритм построения приспособляемых проекций Лагранжа.

На какой-нибудь карте, не слишком искажающей очертания контуров, намечается центральная точка $O(\phi_0, \lambda_0)$. Из этой точки как из центра строится эллиптическая изокола с полуосами a и b (рис. 93). Полуось a направлена по меридиану, полуось b — по параллели.

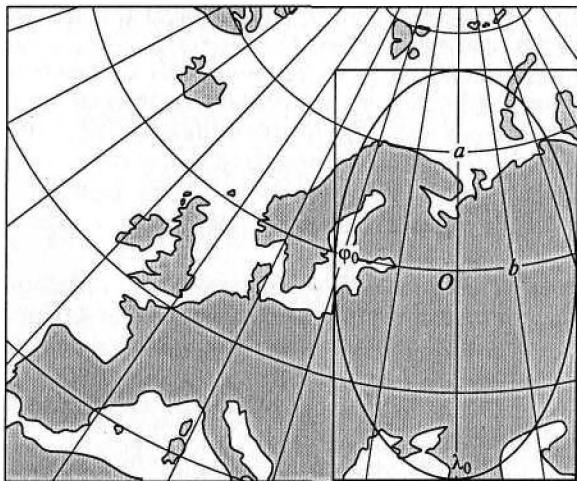


Рис. 93. Построение наилучшей по П.Л. Чебышеву равноугольной проекции Лагранжа; картографируемую территорию ограничивает эллиптическая изокола с центром в точке $O(\phi_0, \lambda_0)$ и полуосами a и b

На карте оцениваются значения полуосей в градусной мере: a — по широте; b — по долготе. Например, $a = 17^\circ$; $b = 21^\circ$.

Вычисляется параметр α :

$$\alpha^2 = 1 + \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \cos^2 \phi_0, \quad n = \frac{b}{a}.$$

Этот параметр очень важен. По мнению В. В. Витковского, он представляет «душу проекции». Параметр α определяется полуосами изоколы, ограничивающей контур. Форма изоколы зависит от значения параметра:

$\alpha > 1$ — изоколы — овалы, вытянутые вдоль меридианов;

$\alpha = 1$ — изоколы — окружности;

$\alpha < 1$ — изоколы — овалы, вытянутые вдоль параллелей;

$\alpha = 0$ — изоколы — параллельные экватору прямые.

Параметр β находится из уравнения

$$\beta = \frac{\alpha + \sin \phi_0}{\alpha - \sin \phi_0} U_0^{-\alpha}.$$

Параметр β определяет широту той единственной параллели, которая в проекции Лагранжа изобразится прямой. Остальные параллели — дуги окружностей. Для этой параллели $\delta = 0$. Ее широта ϕ_{np} может быть определена из формулы

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_{np}}{2} \right) = \sqrt[\alpha]{\beta}.$$

Если $\beta = 1$, то прямой линией будет изображен экватор.

Параметр k — радиус крайнего кругового меридиана, следовательно, он равен половине длины среднего меридиана или половине расстояния между полюсами в проекции. Он вычисляется по формулам

$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha} (1 + \sec \delta_0); \quad \operatorname{tg}(\delta_0/2) = \frac{1}{\alpha} \sin \phi_0.$$

Для вычисления параметра k надо знать m_0 — масштаб в центральной точке проекции $O(\phi_0, \lambda_0)$. Его можно принять равным 1 или вычислить по приближенной формуле, предложенной В. В. Каврайским. В этой формуле используется диаметр эллиптической граничащей изоколы, делящий пополам угол между ее осями. Выразив полуоси a и b эллипса в радианах, а упомянутый диаметр эллипса — через его радиус, получаем формулу

$$m_0 = 1 - \frac{a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)}.$$

По этой методике рассчитаны проекции рис. 94, 95. На этих картах показаны также прямоугольники, в которые вписаны граничащие эллиптические изоколы. Как видно из рис. 94, окружности, имеющие одинаковые размеры на шаре, в проекции за пределами выделенного прямоугольника изображаются значительно преувеличенными. В самом прямоугольнике они изображены с

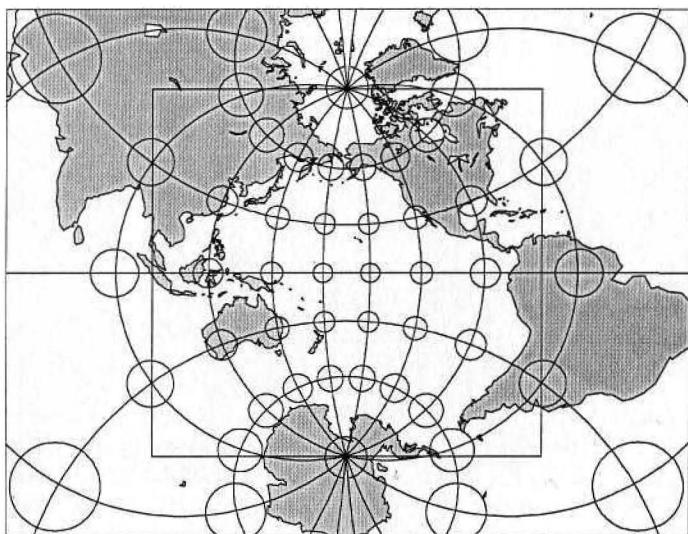


Рис. 94. Построение наилучшей по П. Л. Чебышеву равноугольной проекции Лагранжа для карты Тихого океана — наименьшие искажения в выделенном прямоугольнике, полуоси изоколы $a = 90^\circ$, $b = 95^\circ$

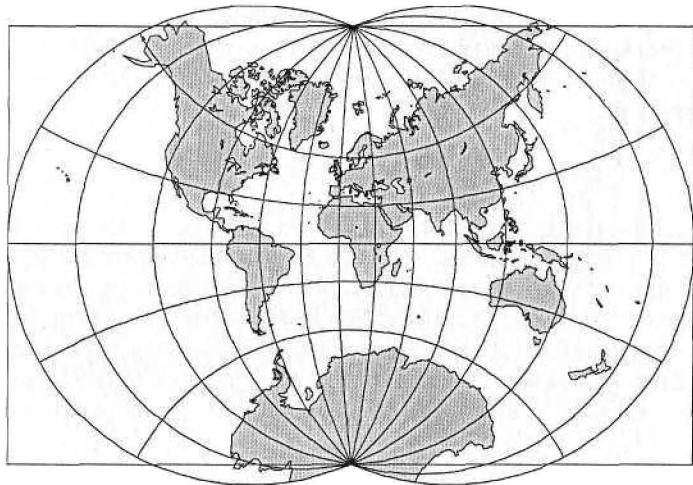


Рис. 95. Карта мира, построенная в приспособляемой равноугольной проекции Лагранжа

наименьшими искажениями. На граничащей изоколе частный масштаб длин $m = 1,350$. Минимальные искажения в центральной точке проекции, где частный масштаб $m_0 = 0,675$.

Карта мира (см. рис. 95) построена при значениях полуосей изоколы $a = 90^\circ$, $b = 180^\circ$ и параметрах проекции Лагранжа $\alpha = 0,632$, $\beta = 1$, $m_0 = 0,507$. Более строгие расчеты показывают, что частный масштаб длин в центральной точке должен был быть

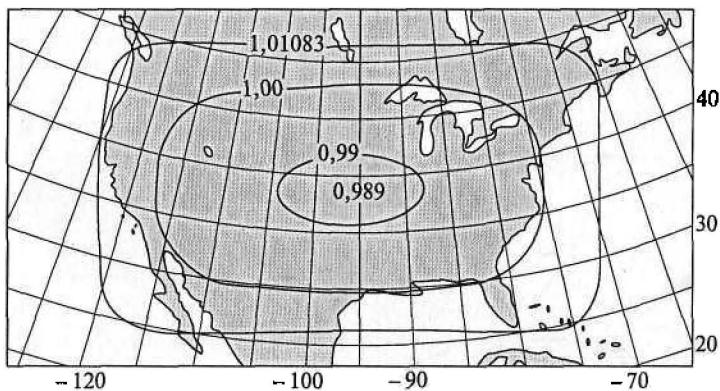


Рис. 96. Наилучшая равноугольная проекция для карты США; граничащая изокола частного масштаба длин имеет практически прямоугольную форму (Snyder J. Minimum — error map projections bounded by polygons // The Cartogr. J., 1984. — V. 21. — № 2. — P. 112—120)

больше на 10 %. Поэтому расчеты, выполняемые по описанной методике, следует рассматривать как предварительные. Окончательные построения проекции выполняются после уточнения ее параметров.

Листы карт обычно имеют правильную форму, например форму прямоугольника. Задачу построения проекций Чебышева с границами изоколами правильной полигональной формы поставил и решил в 1984 г. в США Дж. Снайдер (J. Snyder). На рис. 96 приведена такая проекция для карты США. Территорию страны ограничивает практически прямоугольная изокола с частным масштабом длин 1,01083. Внутри этой изоколы частные масштабы имеют меньшие значения. Минимальный масштаб — в центре проекции. В расчетах использованы гармонические полиномы. В качестве базовой взята азимутальная стереографическая проекция. В формулах гармонических полиномов отличны от нуля только следующие коэффициенты:

$$a_1 = 0,988\ 79; \ a_3 = -0,050\ 909 \text{ и } a_5 = 0,085\ 528.$$

§ 32. ПОЛУЧЕНИЕ РАВНОВЕЛИКИХ ПРОЕКЦИЙ

Общая теория построения равновеликих проекций была рассмотрена в трудах Ламберта, Эккерта, Мольвейде, Альберса и др.

Большой вклад в разработку равновеликих проекций внесли крупные российские ученые Л. Эйлер, Ф. И. Шуберт, Д. А. Граве, А. Н. Коркин, Н. Я. Цингер, В. В. Каврайский, Н. А. Урмаев, Г. А. Мещеряков, Л. М. Бугаевский и др.

Основное условие получения равновеликих проекций есть равенство единице частного масштаба площадей: $p = 1$. С учетом выражений для коэффициентов Гаусса это условие для эллипсоида вращения записывается в виде

$$h = H;$$

$$x_B y_L - y_B x_L = Mr.$$

Идентичное условие для шара имеет вид

$$x_\phi y_\lambda - y_\phi x_\lambda = R^2 \cos \phi.$$

Однако для однозначного определения уравнений проекции основного условия $p = 1$ недостаточно, и его следует дополнять другими.

В табл. 10 выделены основные и дополнительные условия и по ним определены уравнения для наиболее употребительных проекций эллипсоида вращения. Их упрощением нетрудно получить соответствующие формулы для шара. Приняты следующие обозначения: P — площадь поверхности эллипсоида, ограниченная

Таблица 10

Исходные условия и общие формулы равновеликих проекций

Классы	Группы картографических проекций		
	A ($\alpha = 1$)	K ($0 < \alpha < 1$)	Ц ($\alpha = 0$)
Базовый	$\epsilon = 0; \rho \rho_B = -Mr;$ $\delta = \alpha(L - L_0); \rho^2 = \frac{2}{\alpha}(C - P);$ $n = \frac{\alpha \rho}{r}; m = 1/n; p = 1;$ $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \omega}{4} \right) = a$		$\epsilon = 0; Cx_\phi = R^2 \cos \varphi;$ $x = \frac{R^2}{C} \sin \varphi; y = C(L - L_0);$ $n = \frac{C}{r}; m = 1/n; p = 1;$ $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \omega}{4} \right) = a$
Псевдоазимутальный, псевдоконический, псевдоцилиндрический	$\rho \rho_B \delta_L = -Mr; \rho \delta_L = r;$ $\delta = \frac{r}{\rho}(L - L_0); \rho = C - S;$ $n = 1; m = 1/\cos \epsilon; p = 1;$ $\operatorname{tg} \epsilon = (L - L_0)(\sin B - r/\rho);$ $\operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \epsilon$		$x_\phi y_\lambda = R^2 \cos \varphi;$ $x = \int_0^\varphi x_\phi d\varphi;$ $y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_\phi} (\lambda - \lambda_0);$ $n = \frac{y_\lambda}{r}; m = 1/(n \cos \epsilon);$ $p = 1;$ $\operatorname{tg} \epsilon = -y_\varphi/x_\varphi;$ $\operatorname{tg}(\omega/2) = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}$
Полиазимутальный, поликонический, псевдоцилиндрический	$\rho d_B \delta_L \cos \delta - \rho \rho_B \delta_L = Mr;$ $d = d(B); \rho = \rho(B);$ $\delta = -\frac{Mr(L - L_0)}{\rho \rho_B} + \frac{d_B \sin \delta}{\rho_B};$ $\operatorname{tg} \epsilon = -\frac{d_B \sin \delta + \rho \delta_B}{d_B \cos \delta - \rho_B};$ $n = \rho \delta_L / r; m = 1/n \cos \epsilon;$ $p = 1;$ $\operatorname{tg}(\omega/2) = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}$		

экватором, параллелью широты B и двумя меридианами с разностью долгот в 1 радиан; S — длина дуги меридиана от экватора до параллели широты B ; C — постоянная интегрирования (параметр проекции, определяемый из дополнительных условий). Предполагается, что координаты в азимутальных и конических группах проекций вычисляются по формулам:

$$x = d - \rho \cos \delta; y = \rho \sin \delta.$$

Ортогональные равновеликие проекции. Дополнительное условие получения равновеликих проекций есть требование ортогональности картографической сетки:

$$\epsilon = 0.$$

Значительный вклад в исследования равновеликих ортогональных проекций внес Л. Эйлер. В честь ученого такие проекции иногда называют **эйлеровскими**. К ортогональным относятся азимутальные, конические и цилиндрические проекции. Поэтому для получения их уравнений условие $p = 1$ является достаточным.

В азимутальных проекциях ($\alpha = 1$) может быть использована как касательная, так и секущая плоскости. В нормальных проекциях сечение будет происходить по некоторой параллели широты B_k . В этом случае масштаб площади хотя и постоянен, но не равен 1. Значения частных масштабов p , m и n , вычисленные по формулам табл. 8, должны быть изменены умножением на коэффициент

$$k = r_k / p_k.$$

После умножения на коэффициент k масштаб по параллели сечения станет равным главному масштабу, а частный масштаб площади будет $p = k^2$.

Псевдоазимутальные и псевдоконические проекции. Для их нахождения обычно ставят два условия, позволяющие сохранить без искажений как размеры площадей территорий, так и длины параллелей. Средний меридиан также сохраняет свою длину ($m_0 = 1$). Этими условиями являются следующие:

$$p = 1, \quad n = 1.$$

Псевдоцилиндрические проекции. Их обычно строят для шара. Для этих проекций условие равновеликости принимает вид

$$x_\phi y_\lambda = R^2 \cos \phi.$$

Уравнения проекции получают, интегрируя выражение

$$y_\lambda = \frac{R^2 \cos \phi}{x_\phi}.$$

Вид равновеликой псевдоцилиндрической проекции зависит от выбора производной абсцисс по широте. Например, пусть

$$x_\phi = R.$$

Отсюда следуют уравнения:

$$x = R\phi; \quad y = \lambda R \cos \phi;$$

$$n = 1; \quad m = 1/\cos \epsilon; \quad \operatorname{tg} \epsilon = \lambda \sin \phi.$$

Это есть уравнения и характеристики равновеликой псевдоцилиндрической синусоидальной проекции Сансона.

Полиазимутальные и поликонические проекции. Для их определения, кроме условия равновеликости ($p = 1$), задают:

1) вид уравнения $d = d(B)$ положения центра параллелей на среднем меридиане;

2) вид уравнения $\rho = \rho(B)$ радиусов параллелей на карте.

Например, Т. И. Толстова в 1981 г. для равновеликой полизимутальной проекции шара единичного радиуса приняла

$$d = \rho + \pi/2 - Z; \quad \rho^2 = 2(1 - \cos Z).$$

Л. М. Бугаевский в 1986 г. для равновеликой поликонической проекции эллипсоида принял

$$d = N \operatorname{ctg} B + S; \quad \rho = N \operatorname{ctg} B.$$

По мнению Г. А. Мещерякова, для равновеликих проекций не существует аналога теоремы Чебышева. Тем не менее на практике при выборе равновеликих проекций поступают так же, как и при выборе равноугольных проекций: стремятся к тому, чтобы изоколы повторяли очертания отображаемых территорий.

§ 33. ПОЛУЧЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Прежде всего отметим равнопромежуточные проекции — те, в которых масштаб по одному из главных направлений есть величина постоянная. Практическое значение имеют ортогональные равнопромежуточные проекции эллипсоида вращения или шара. В них главные направления ориентированы по меридианам и параллелям и экстремальными являются частные масштабы длин m и n . Важное практическое значение имеют равнопромежуточные азимутальные, конические и цилиндрические проекции.

Выводы теоремы Чебышева, доказанной для равноугольных проекций, распространены и на ортогональные равнопромежуточные вдоль меридианов проекции. При их выборе также стремятся к тому, чтобы крайняя изокола повторяла контур картографируемой области.

Равнопромежуточные по меридианам проекции. Практически эти проекции наиболее важны. Главное условие — требование $m = 1$. В табл. 11 дана сводка удовлетворяющих этому требованию формул для азимутальной, конической и цилиндрической проекций, где S — длина дуги меридиана от экватора до параллели широты B ; C — параметр проекции.

Возможны равнопромежуточные проекции с частным масштабом длин постоянным, но не равным 1. Выбор такого масштаба в азимутальных проекциях позволяет использовать секущую плоскость вместо касательной. Плоскость сечет поверхность по главной параллели широты B_k . В этом случае вычисленные по вышеуказанным формулам величины ρ , m , n при $\alpha = 1$ следует умножить на коэффициент:

$$k = r_k / \rho_k.$$

Обобщенные равнопромежуточные по меридианам проекции. Н. А. Урмаев разработал обобщенную по меридианам коническую

Общие формулы главных равнопромежуточных проекций

Азимутальные ($\alpha = 1$)	Конические ($0 < \alpha < 1$)	Цилиндрические ($\alpha = 0$)
$\rho_B = -M;$ $\rho = C - S; \delta = \alpha(L - L_0);$ $m = 1; n = \alpha\rho/r; p = n;$ $a = m; b = n \text{ либо } a = n; b = m;$ $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{a - b}{a + b}$		$x_B = M;$ $x = S; y = C(L - L_0);$ $m = 1; n = C/r; p = n;$ $a = m; b = n \text{ либо } a = n; b = m;$ $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{a - b}{a + b}$

проекцию шара. В такой проекции по сравнению с обычными коническими проекциями уменьшены искажения и улучшено их распределение. Позже эта идея в работах Л. М. Бугаевского была распространена и на эллипсоид вращения. Решение обратной задачи математической картографии при условиях $\epsilon = 0$ и $m = 1$ привело к формулам:

$$x = -(C - S) \cos \delta; \quad y = (C - S) \sin \delta;$$

$$m = 1; \quad n = \frac{\alpha(C - S)l}{r}.$$

Для симметричной относительно среднего меридиана сетки верны следующие формулы:

$$l = 1 + b_2 L^2 + b_4 L^4 + \dots;$$

$$\delta = \alpha \left(L + \frac{b_2}{3} L^3 + \frac{b_4}{5} L^5 + \dots \right).$$

Для асимметричной сетки формулы имеют вид:

$$l = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 + \dots;$$

$$\delta = \alpha \left(L + \frac{b_1}{2} L^2 + \frac{b_2}{3} L^3 + \frac{b_3}{4} L^4 + \dots \right).$$

В формулах, приведенных выше: S — длина дуги меридиана, считаемая от экватора; L — долгота, вычисляемая от среднего меридиана; C, α, b_i — параметры проекции. Значения этих параметров получают, задав величины частных масштабов на параллелях или приняв на контуре картографируемой области $n = \text{const}$.

Произвольные цилиндрические проекции с заданным распределением искажений. Такие проекции были предложены Н. А. Урмавым. Рассмотрим случай шарообразной Земли радиусом R .

В нормальных цилиндрических проекциях, симметричных относительно экватора, масштаб по меридианам есть четная функция широты и может быть представлен многочленом вида

$$m = \frac{x_\phi}{R} = \frac{dx}{Rd\phi} = a_0 + a_2\phi^2 + a_4\phi^4 + \dots$$

Неизвестные коэффициенты a_i могут быть вычислены, если на нескольких параллелях задать значения частных масштабов m . Н. А. Урмаев предложил принять эти масштабы на параллелях с широтами $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 60^\circ$, $\phi_3 = 80^\circ$, соответственно равными $m_1 = 1,0$; $m_2 = 1,5$; $m_3 = 2,0$. Отсюда три неизвестных коэффициента нетрудно найти или из решения трех линейных уравнений, или по интерполяционной формуле Ньютона с разделенными разностями. Выполнив интегрирование, получают формулу для абсцисс x ; значения ординат y вычисляют по общей для цилиндрических проекций формуле. Уравнения проекции принимают вид:

$$x = R \left(a_0\phi + \frac{a_2}{3}\phi^3 + \frac{a_4}{5}\phi^5 \right); \quad y = R(\lambda - \lambda_0).$$

§ 34. ОПТИМИЗАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Одной из самых важных проблем математической картографии является получение *наилучших* проекций. В литературе можно обнаружить высказывания о том, что проекций изобретено слишком много — более чем достаточно для удовлетворения нужд практики. Однако практика выдвигает все новые и новые задачи, поэтому появляются и новые проекции. В любой проекции имеется определенный набор достоинств и недостатков. Наилучшая проекция для одной карты может оказаться совсем непригодной для другой. Что следует понимать под наилучшей проекцией?

Наилучшая проекция — это картографическая проекция, которая оптимально удовлетворяет всей совокупности требований к ней в соответствии с конкретным назначением создаваемой карты.

Задачи поиска наилучших проекций выдвигались давно и решались многими известными учеными. Как уже отмечалось, в 1853 г. российский математик П. Л. Чебышев впервые поставил и решил такую задачу по отношению к наилучшим равноугольным проекциям. В 1861 г. британский астроном и геодезист Г. Эйри (G. B. Airy, 1801—1892) высказал концепцию о проекции с минимальными искажениями. Это проекция с наименьшими искажениями среди всех возможных проекций данного класса, удовлетворяющих одним и тем же критериям конструируемой карты.

Часто поиск наилучших проекций связан с искажениями в них. Однако не всегда, а в тематическом картографировании даже очень часто, искажения в проекции являются определяющими. Куда более важной становится, например, наглядность, способствующая выявлению специфических тематических особенностей карты. В этом отношении проекция может рассматриваться как важный элемент дизайна карты.

При поисках наилучшей проекции учитывается большая совокупность требований:

- географическое положение и размеры картографируемой области;
- специфические тематические требования, например, показ на одной карте полярных и экваториальных районов, передача сферичности, показ зональности в распределении картографируемого явления, изменения масштабов в определенных частях карты и др.;
- критерии дизайна — требования соотношений среднего меридиана и экватора, определенного расположения материков, форма показа полюсов и полярных регионов, соблюдение соотношений кривизны параллелей и меридианов и др.;
- способы использования карты — настенные, настольные, походные, электронные и др. Большое значение имеют традиции, сложившиеся в конкретной сфере пользователей и обусловившие их способность воспринимать содержание карты только в том случае, если она построена в определенных проекциях;
- требования к характеру, величинам и распределению искажений.

Большинство требований не поддается формализации. Поэтому наилучшую проекцию ищут итеративно и в интерактивном режиме.

Наиболее полно разработана та часть процедуры поиска наилучшей проекции, которая связана с искажениями. При этом выбирают определенный класс проекций, подбирают критерии искажений и ищут параметры проекции, наиболее полно удовлетворяющие выбранным критериям.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В 1977 г. В. Хойовец (V. Нојовец) предложил следующий путь оптимизации искажений проекции. Уравнения выбранного класса проекций дополняются новыми уравнениями с неизвестными параметрами, которые и предстоит найти. В частности:

$$x = x(\phi, \lambda) + \Delta x(\phi, \lambda); \quad y = y(\phi, \lambda) + \Delta y(\phi, \lambda).$$

Правая часть каждого уравнения состоит из двух слагаемых: первое — известные исходные уравнения, второе — добавка, выбором параметров которой минимизируются искажения.

В качестве примера В. Хойовец рассмотрел уравнения равновеликой псевдоцилиндрической проекции Сансона, дополнив их полиномами, обеспечивающими симметричность сетки относительно среднего мери-

диана и экватора и определив коэффициенты полинома минимизацией вариационного критерия Эйри:

$$I = \frac{1}{2} \iint_F \left[(a - 1)^2 + (b - 1)^2 \right] d\phi d\lambda.$$

Минимизация этой функции выполнена на участке, ограниченном экватором, параллелью 80° с. ш., средним меридианом и меридианом, отстоящим от среднего по долготе на 180° . Учитывая симметрию проекции Сансона, можно сказать, что минимизация искажений выполнена для карты мира в полосе между параллелями $\pm 80^\circ$. В проекции Сансона значение $I = 0,9398$. В новой проекции $I = 0,2624$, т. е. в 3,5 раза меньше. Для новой проекции сферы единичным радиусом ($R = 1$) получены следующие уравнения:

$$x = 0,839\,660\phi - 0,044\,600\phi^3 + 0,040\,118\phi\lambda^2;$$

$$y = \cos(\phi)\lambda - 0,227\,240\lambda + 0,224\,915\phi^2\lambda - 0,005\,347\lambda^3.$$

На рис. 97 приведен макет карты в этой проекции. Исследования показывают, что локальные круги на сфере, построенные в узлах сетки, в проекции изображаются почти без искажений. Они несколько деформированы только по краям карты. Круг больших размеров на сфере, охватывающий большую часть Азии и европейскую часть России, искажен значительно меньше, чем такой же круг в проекции Сансона: длины искажены в 2 раза меньше, а форма контуров — в 4 раза меньше. Однако появились и особенности, которые можно расценить, как недостатки.

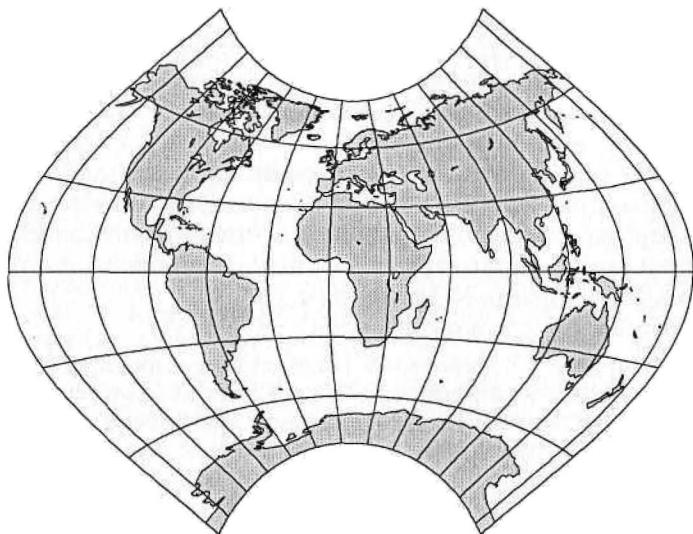


Рис. 97. Макет карты в проекции, полученной оптимизацией равновеликой псевдоцилиндрической проекции Сансона (Hojovec V. Přibližná transformace daného zobrazení podle Airyho Kritéria // Geod. A kartogr. Obz. — 23, 1977. — № 7. — Р. 159—164)

Проекция перестала быть равновеликой. В пределах упомянутого большого круга площади преуменьшены на 20 %, а полюса из точек превратились в дуги значительной длины и кривизны. Полученная новая проекция значительно отличается от ее исходного оригинала — синусоидальной псевдоцилиндрической проекции Сансона (см. рис. 98).

Пример 2. П. Ласковский (P. Laskowski) в 1997 г. оптимизацией получил проекцию, которую назвал «три-оптимальной» (Tri-Optimal). Макет карты в этой проекции приведен на рис. 98.

Использованы бисимметричные полиномы пятой степени с девятью параметрами. Значения параметров определены минимизацией функции средневзвешенных искажений (w — веса):

$$F = w_{\text{площади}} E_{\text{площади}} + w_{\text{формы}} E_{\text{формы}} + w_{\text{длин.}} E_{\text{длин.}}$$

Искажения площадей, формы и длин оценены по формулам:

$$E_{\text{площади}} = \left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N (a_i b_i - 1)^2; E_{\text{формы}} = \left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_i}{b_i} - 1 \right)^2;$$

$$E_{\text{длин.}} = \left(\frac{1}{QN} \right) \sum_{i=1}^N (d_i - D_i)^2; Q = \sqrt{\left(N^{-1} \sum_{i=1}^N d_i^2 \right) \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N D_i^2 \right)},$$

где N — число измерений; a, b — экстремальные частные масштабы длин; d — расстояния в проекции; D — соответствующие расстояния на шаре. Уравнения проекции единичного шара ($R = 1$, ось X направлена на север, ось Y — на восток) имеют вид

$$\begin{aligned} x &= 1,003\,84\varphi + 0,080\,289\,4\varphi\lambda^2 + 0,099\,890\,9\varphi^3 + \\ &+ 0,000\,199\,025\varphi\lambda^4 - 0,028\,55\varphi^3\lambda^2 - 0,049\,103\,2\varphi^5; \\ y &= 0,975\,534\lambda - 0,119\,161\varphi^2\lambda - 0,014\,305\,9\varphi^2\lambda^3 - 0,054\,700\,9\varphi^4\lambda. \end{aligned}$$

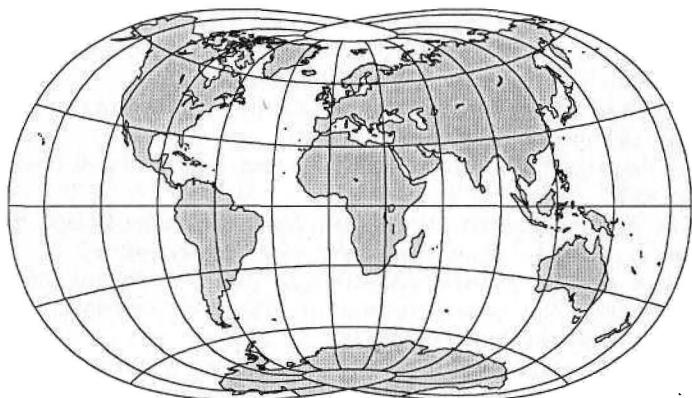


Рис. 98. Макет карты в «три-оптимальной» проекции (Laskowski P. Distortion-spectrum fundamentals. A new tool for analyzing and visualizing map distortions // Cartographica, 1997. — V. 34. — № 3. — P. 3—96)

Для вычислений проекции выбрано $N = 5000$ точек, равномерно распределенных на сфере. Расстояния между ними изменялись в угловой мере от 10 до 40°. В вычислениях пары точек выбирались случайно. Главным было требование наглядности. В проекции не должно было быть перекрытий, причудливых вывертов, превращений площадей в линии или точки. При сбалансированности искажений должен быть отображен весь мир и сохранена овальная форма Антарктиды. В «три-оптимальной» проекции мир показан в овальном непрерывном контуре. Поляса изображены кривыми линиями. Перспектива полярных регионов создает эффект сферичности. Сохранена симметрия относительно экватора и среднего меридиана. Масштаб по экватору выдержан постоянным.

В этой проекции площади и длины искажены одинаково, формы же искажены почти в 2 раза больше. В пределах большого круга, покрывающего значительную часть Азии и европейскую часть России, площади преувеличены и, по сравнению с проекцией рис. 97, искажены в 2 раза больше. Искажения же длин и форм в обеих проекциях примерно одного порядка.

Контрольные вопросы

1. В чем суть обратной задачи математической картографии? Какие при этом возникают трудности?
2. Какими свойствами характеризуются равноугольные проекции?
3. Каким важным свойством отличаются изометрические координаты от географических (геодезических) координат?
4. На каком основании комплексные функции от изометрических координат используются для построения равноугольных проекций?
5. Как вычислить геодезическую широту по изометрической широте?
6. Поясните, как, используя линейную функцию комплексного переменного, получить уравнения проекции Меркатора. Какая функция комплексного переменного определяет уравнения равноугольных конических и азимутальных проекций?
7. Какая функция комплексного переменного использована при получении уравнений проекции Гаусса—Крюгера?
8. С какой целью при получении уравнений равноугольных проекций используются гармонические полиномы?
9. Как формулируется теорема Чебышева о наилучшей равноугольной проекции?
10. Как обстоит дело с искажениями площадей в проекциях Чебышева по сравнению с другими равноугольными проекциями?
11. Какое важное теоретическое и практическое значение имеет теорема Чебышева о наилучшей проекции? Как эта теорема применяется на практике при выборе проекций?
12. Каким замечательным свойством обладает равноугольная поликоническая круговая проекция Лагранжа?
13. Каков геометрический смысл параметров уравнений проекции Лагранжа, сколько их и как они определяют ее свойства? Почему один из параметров, по характеристике В. В. Витковского, представляет «душу проекции»?

- 14.** Какова последовательность этапов алгоритма построения приспособляемой к заданной территории проекции Лагранжа?
- 15.** Чем примечательна равноугольная проекция Снайдера, разработанная для карт США?
- 16.** Какое ставится главное условие при получении равновеликих проекций? Какими условиями оно дополняется?
- 17.** Какие проекции называют в честь Л. Эйлера «эйлеровскими»?
- 18.** Как получают равновеликие проекции с ортогональной сеткой?
- 19.** Как от равновеликой азимутальной проекции, построенной на касательной плоскости, перейти к такой же проекции на секущей плоскости?
- 20.** Какие условия ставятся при получении равновеликих псевдоазимутальных и псевдоконических проекций?
- 21.** Назовите условия получения равновеликих псевдоцилиндрических проекций.
- 22.** Каковы условия получения полизимутальных и поликонических равновеликих проекций?
- 23.** Какие используются условия при получении равнопромежуточных по меридианам проекций?
- 24.** Какими свойствами обладают обобщенные равнопромежуточные по меридианам проекции Л. М. Бугаевского? Как определяют параметры этих проекций?
- 25.** Поясните суть алгоритма Н. А. Урмаева, применяемого для получения произвольных цилиндрических проекций путем задания частных масштабов длин на нескольких параллелях.
- 26.** Какую проекцию можно назвать наилучшей? Какие при этом учитываются требования?
- 27.** Назовите способы оптимизации проекций. Поясните применение этих способов на конкретных примерах.

ГЛАВА 7

ПРОЕКЦИИ КАРТ МИРА

В зависимости от тематики на картах мира показывается:

- планета в целом;
- преимущественно суши с отображением взаимосвязей с океанами;
- заселенная и активно используемая часть суши, кроме крайних северных и южных регионов; в том числе карты со значительными повторяющимися участками материков и океанов.

Основное, чему должны удовлетворять проекции карт мира, — наглядность и правдоподобное отображение земной поверхности. Этим требованиям подчинены характер и величины искажений. Разумеется, что при отображении всего мира избежать значительных искажений невозможно; с этим приходится мириться.

Чаще других для построения карт мира применяются цилиндрические, псевдоцилиндрические, поликонические и некоторые производные проекции. В нормальных цилиндрических и псевдоцилиндрических проекциях облегчается выделение широтной зональности. В поликонических и некоторых других проекциях с криволинейными параллелями основные массивы суши, за исключением северных островов и Антарктиды, удается передать с относительно умеренными искажениями.

§ 35. НОРМАЛЬНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ КАРТ МИРА

Проекция Меркатора. Данная проекция в зарубежной практике была одной из наиболее распространенных проекций для карт мира. В этой проекции Меркатор создал первую многолистную карту мира.

Уравнения проекции Меркатора для шара радиусом R имеют вид

$$x = R \cos \phi_0 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right); \quad y = R \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0).$$

В проекции Меркатора, особенно искаженной, преувеличенной, передается ситуация в высоких широтах. У неискушенных читателей она формирует гипертрофированное представление о разме-

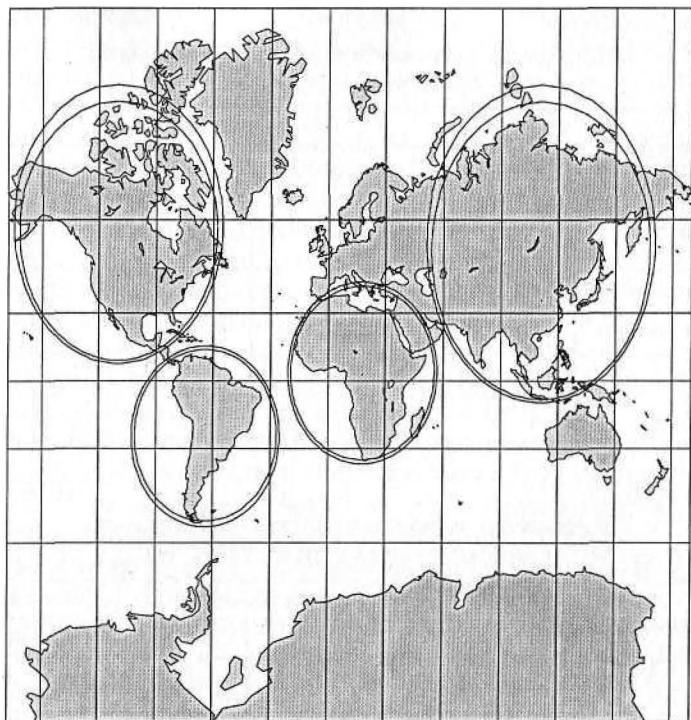


Рис. 99. Изображения в проекции Меркатора кругов, построенных на земной поверхности и отнесенных к крупнейшим массивам суши

рах отображаемых регионов. По замечанию академика А. И. Сорокина, обстановка там изображена, «как в кривом зеркале»¹. В конце XX в. в Западной Европе возникла идеологическая полемика, длившаяся более 15 лет. Ее инициатором был немецкий математик Арно Питерс (A. Peters). По его мнению, проекция Меркатора формирует «европоцентрический» взгляд на мир, преднамеренно преувеличивая значение и размеры «старого мира» по отношению к странам «третьего мира» и в ущерб им.

Искажаются не только площади и длины, но и формы. На рис. 99 приведена проекция Меркатора и показано, как в ней изображаются круги, построенные на поверхности земного шара и отнесенные к основным массивам суши. Они имеют тенденцию к значительному растяжению по направлению к полюсам.

Из уравнений проекции Меркатора следует, что распределение искажений площадей и длин зависят от выбора широты ϕ_0 главной параллели, определяющей радиус цилиндра, на который

¹ А. И. Сорокин. О проекциях морских и озерных карт в эпоху компьютеризации // Навигация и гидрография, 2001. — № 12. — С. 62—66.

Таблица 12

**Искажения регионов в проекции Меркатора
(широта главной параллели 0°)**

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	223	77	66	7
Азия	133	49	115	25
Африка	14	6	11	9
Сев. Америка	188	64	120	20
Юж. Америка	30	15	30	9
Австралия	35	17	31	6

Таблица 13

**Искажения регионов в проекции Меркатора
(широты главных параллелей ±30°)**

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	142	55	66	7
Азия	75	34	115	25
Африка	-15	10	11	9
Сев. Америка	116	46	120	20
Юж. Америка	-3	10	30	9
Австралия	2	10	31	6

Таблица 14

**Искажения регионов в проекции Меркатора
(широты главных параллелей ±45°)**

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	62	30	66	7
Азия	16	26	115	25
Африка	-43	26	11	9
Сев. Америка	44	30	120	20
Юж. Америка	-45	23	30	9
Австралия	-32	21	31	6

проектируется поверхность Земли. Широту главной параллели часто приравнивают к 0, 30, 40 или 45°. В табл. 12—14 приведены показатели искажений при разных значениях широт главных параллелей.

Если цилиндр касается экватора ($\phi_0 = 0$), то отдаленные от экватора массивы наиболее искажены. Площадь круга, в котором находится Европа, преувеличена более чем на 220 %, а радиусы этого круга в среднем искажены на 77 %. Для Северной Америки эти числа соответственно равны 188 и 64 %.

При цилиндре, секущем шар по главным параллелям широт $\pm 30^\circ$, наибольшие преувеличения площадей и длин по-прежнему приходятся на Европу и Северную Америку. В весьма благоприятных условиях оказываются регионы Австралии и Южной Америки, где искажения площадей доведены до 2—3 %.

При широтах главных параллелей $\pm 45^\circ$ искажения по всем перечисленным массивам суши более или менее выравниваются. При этом Северная Америка, Европа и Азия изображаются по площади преувеличенными, а Южная Америка, Африка и Австралия показываются по площади преуменьшенными. Искажения площадей по среднему весовому, где веса приняты пропорциональными площадям соответствующих кругов на земном шаре, составляют — 3,5 %, а искажения длин — 26 %.

Любопытно заметить, что выбор главных параллелей не влияет на искажения форм. Искажения форм в проекции Меркатора не зависят от широт главных параллелей, а определяются лишь размерами кругов. Это означает, что чем географический объект крупнее, тем больше искажена его форма вне зависимости от широты главной параллели.

В проекции Меркатора выбором главных параллелей регулируются лишь соотношения размеров изображаемых частей земной поверхности, что важно с точки зрения правдоподобного их отображения.

Проекция Меркатора обладает одним весьма ценным свойством, благодаря которому она интересна и для тематического картографирования. В этой проекции не искажаются азимуты элементарных отрезков, а линии постоянного азимута (локсодромии) изображаются прямыми. Поэтому проекцию рекомендуется использовать для обзорных карт мира, когда желательно, чтобы направления линий тех или иных потоков или перемещений передавались без искажений.

Произвольные цилиндрические проекции. Отметим производную проекцию Миллера, перспективную цилиндрическую проекцию Голла, проекцию Урмаева и равнопромежуточную проекцию шара.

Проекция Миллера является производной от проекции Меркатора (см. § 27). Параметр проекции приравнивается радиусу шара

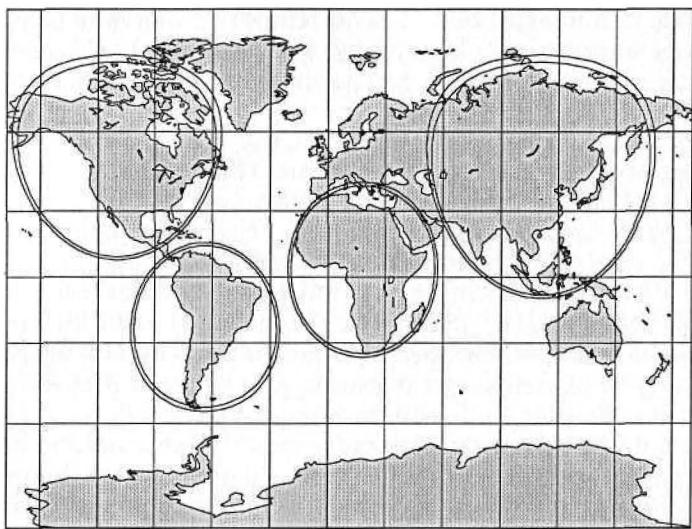


Рис. 100. Производная цилиндрическая проекция Миллера с изображением кругов, построенных на земной поверхности и отнесенных к крупнейшим массивам суши

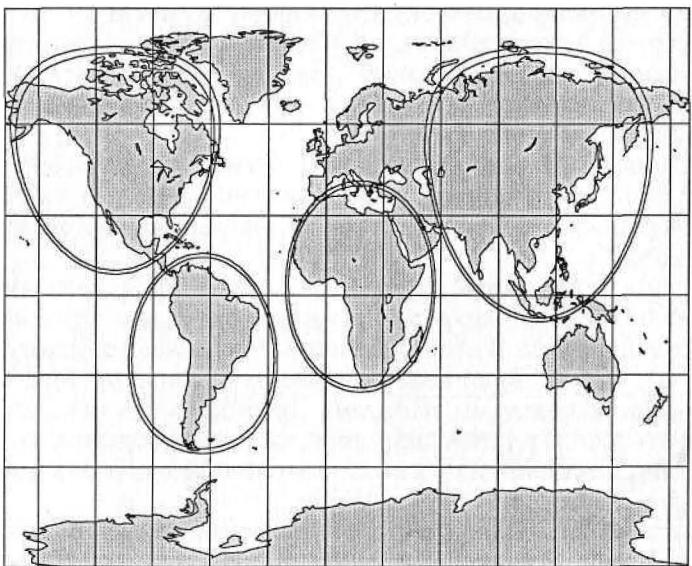


Рис. 101. Перспективная цилиндрическая проекция Голла с изображением кругов, построенных на земной поверхности и отнесенных к крупнейшим массивам суши

($C = R$) или радиусу главной параллели, например, широты $\pm 45^\circ$. Она похожа на проекцию Меркатора, хотя и не обладает ее свойствами. Площади на высоких широтах искажены меньше, чем в проекции Меркатора. В США ее часто применяют для карт мира взамен проекции Меркатора.

Уравнения проекции Голла имеют вид

$$x = R(1 + 1/\sqrt{2}) \operatorname{tg}(\phi/2); \quad y = R(\lambda - \lambda_0)/\sqrt{2}.$$

Проекция получена стереографическим проектированием шара на цилиндр. Цилиндр сечет шар по параллелям широт $\pm 45^\circ$.

Проекции Миллера и Голла обладают схожими свойствами; это хорошо видно из сопоставления рис. 100, 101 и табл. 15, 16.

Площади Северной Америки и Европы менее искажены в проекции Миллера, а их формы — в проекции Голла. В остальных случаях картина противоположная: в проекции Миллера с мень-

Таблица 15

**Искажения регионов в проекции Миллера
(широты главных параллелей $\pm 45^\circ$)**

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	23	17	50	41
Азия	-9	19	56	14
Африка	-45	27	7	5
Сев. Америка	7	18	63	47
Юж. Америка	-39	24	17	7
Австралия	-37	23	18	3

Таблица 16

**Искажения регионов в проекции Голла
(широты главных параллелей $\pm 45^\circ$)**

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	34	18	33	36
Азия	1	15	48	40
Африка	-34	21	27	26
Сев. Америка	17	15	46	26
Юж. Америка	-28	18	30	21
Австралия	-25	16	27	18

шими искажениями передаются формы, а в проекции Голла — площади.

Проекцию Голла используют, например, для построения карт поясного времени.

Для построения карт поясного времени применяется также проекция Урмаева. Она может быть построена по заранее заданным значениям искажений (см. § 33).

Равнопромежуточная цилиндрическая проекция шара. Эта проекция имеет очень простую картографическую сетку, состоящую из квадратов. Страница «в клеточку» из школьной тетрадки — заготовка для построения этой проекции. Возможно, поэтому ее называют *простой*, или *квадратной*, цилиндрической проекцией. Уравнения проекции имеют вид

$$x = R\phi; \quad y = R(\lambda - \lambda_0).$$

В XV—XVI вв. проекция широко использовалась для построения карт мира. В настоящее время ввиду простоты построения картографической сетки ее часто применяют в качестве математической основы разнообразных тематических карт мира, помещаемых в книгах. Она также очень удобна для хранения в базах данных ГИС и представления на экране компьютера информации, когда координаты хранимых точек выражены в широтах и долготах. В этом случае используется шар с произвольным или даже единичным радиусом.

Поскольку проекция создается на касательном к шару цилиндре, в ней наименее искажена экваториальная полоса. Представление об искажениях основных массивов суши дают рис. 102 и табл. 17. Наиболее правильно показаны форма и размеры Африки.

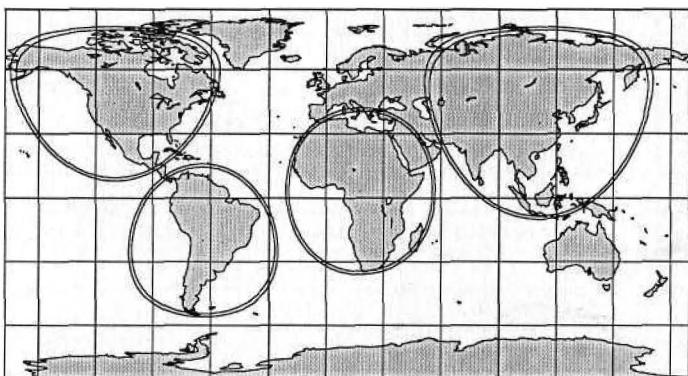


Рис. 102. Равнопромежуточная (квадратная) цилиндрическая проекция с изображением кругов, построенных на земной поверхности и отнесенных к крупнейшим массивам суши

Таблица 17

Искажения регионов в квадратной проекции

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	74	46	76	134
Азия	40	23	44	124
Африка	6	2	3	4
Сев. Америка	56	34	60	153
Юж. Америка	13	6	12	23
Австралия	15	8	15	31

Равновеликие цилиндрические проекции. Такие проекции применяют, когда необходимо передать без искажений площади земной поверхности.

Уравнения нормальных цилиндрических проекций шара имеют вид

$$x = R \sin \phi / \cos \phi_0; \quad y = R(\lambda - \lambda_0) \cos \phi_0.$$

Распределение искажений в равновеликих цилиндрических проекциях также зависит от широты (ϕ_0) главных параллелей. Однако, исходя только из искажений, трудно дать увереные рекомендации, какими должны быть эти параллели. Изменением их широт улучшаются искажения в одних частях карты, но ухудшаются — в других. Показатели искажений для основных регионов мира даны в табл. 18—20. При широтах главных параллелей 0 и 30° очень большие искажения форм для регионов Европы, Азии и Северной Америки.

Таблица 18

Искажения в равновеликой цилиндрической проекции
(широта главной параллели 0°)

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	0	45	285	467
Азия	0	21	161	470
Африка	0	4	12	12
Сев. Америка	0	32	235	617
Юж. Америка	0	8	42	63
Австралия	0	9	50	72

Таблица 19

**Искажения в равновеликой цилиндрической проекции
(широты главных параллелей $\pm 30^\circ$)**

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	0	31	190	325
Азия	0	13	101	328
Африка	0	7	25	23
Сев. Америка	0	20	155	438
Юж. Америка	0	7	27	37
Австралия	0	6	29	34

Таблица 20

**Искажения в равновеликой цилиндрической проекции
(широты главных параллелей $\pm 45^\circ$)**

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	0	15	96	183
Азия	0	17	82	140
Африка	0	22	88	84
Сев. Америка	0	14	91	258
Юж. Америка	0	20	85	69
Австралия	0	19	77	62

Возможно некоторое преимущество при использовании главных параллелей, имеющих широты $\pm 45^\circ$ (рис. 103). В этом случае показатели искажений для всех регионов более-менее выравниваются. В то же время материками Южной Америки и Африки кажутся неестественно вытянутыми вдоль меридианов.

Вероятно, в данном случае главные параллели следует выбирать, исходя из требований наглядности, правдоподобного соотношения форм конкретных объектов земной поверхности, а также размеров вертикальной и соотношения горизонтальной рамок карты.

Соотношение длин вертикальной (a) и горизонтальной (b) сторон рамки карты определяется широтой (ϕ_0) главных параллелей и равно

$$a/b = 1/\pi \cos^2 \phi_0 .$$

При разных значениях широт главных параллелей размеры прямоугольных листов карт также будут различными. В то же время площадь прямоугольника карты остается неизменной.

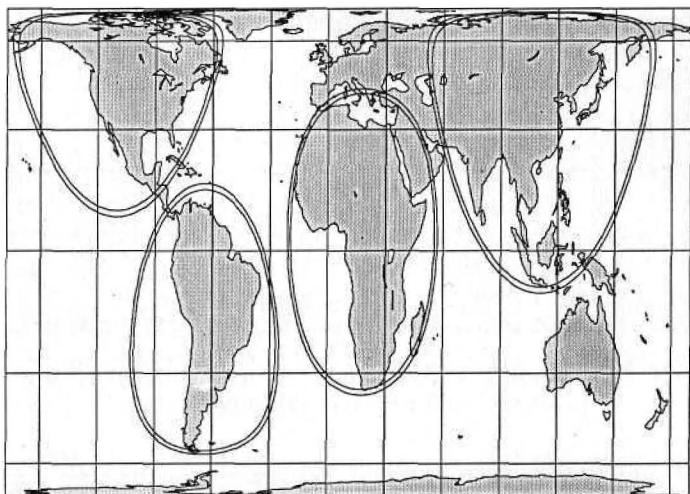


Рис. 103. Равновеликая цилиндрическая проекция с изображением кругов, отнесенных на земной поверхности к основным массивам суши (широты главных параллелей $\pm 45^{\circ}$)

Обратим внимание на то, что параллелями $\pm 30^{\circ}$ на карте выделяется полоса, площадь которой соответствует площади полуширария. Выше (севернее) и ниже (южнее) этих параллелей площади карты в сумме отображают остальную часть поверхности шара — второе полушарие. Это следует из уравнений проекции.

На рис. 104—106 приведены макеты карт в равновеликих цилиндрических проекциях, построенных при основных значениях широт главных параллелей. Кратко рассмотрим их.

На рис. 104 проекция построена при широте главной параллели $\phi_0 = 0^{\circ}$. Поверхность шара спроектирована на касательный цилиндр. Проекцию предложил И. Ламберт в 1772 г. Ее обычно называют равновеликой цилиндрической проекцией Ламберта.

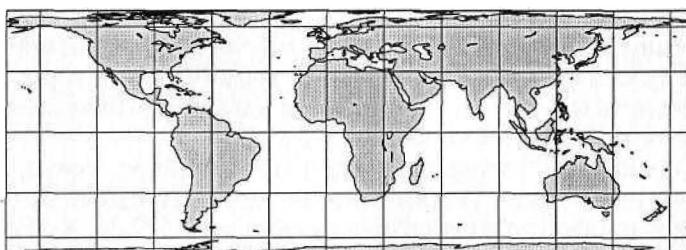


Рис. 104. Равновеликая цилиндрическая проекция; широта главной параллели 0° (касательный цилиндр)

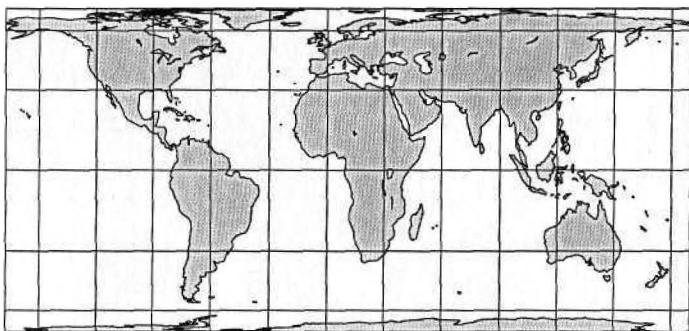


Рис. 105. Равновеликая цилиндрическая проекция; широты главных параллелей $\pm 30^\circ$ (секущий цилиндр)

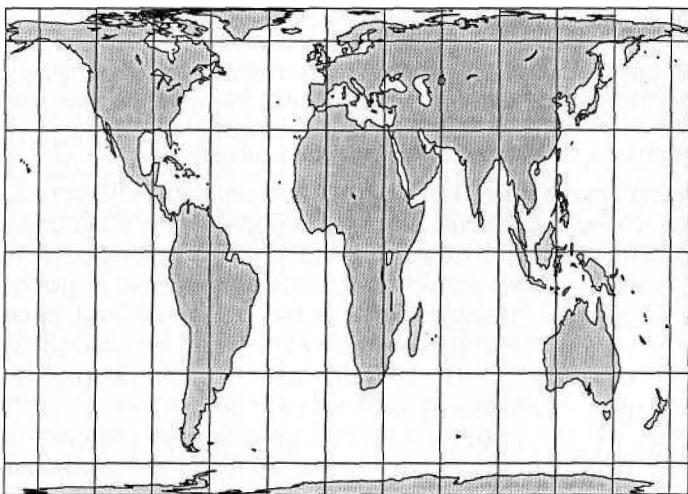


Рис. 106. Равновеликая цилиндрическая проекция; широты главных параллелей $\pm 45^\circ$ (секущий цилиндр)

В проекции приполярные регионы изображены чрезвычайно сжатыми. Рамка карты имеет вид узкого, вытянутого по горизонтальной оси, прямоугольника. Отношение длины вертикальной рамки к длине горизонтальной составляет 1/3,14.

Следующая проекция построена на цилиндре, секущем земной шар по $\pm 30^\circ$ параллелям (см. рис. 105). Соотношение вертикальной и горизонтальной сторон рамки равно 1/2,36. Кстати, строгое соотношение 1/2 имело бы место при широтах главных параллелей $\phi_0 = \pm 37^\circ 07'$. Проекцию предложил в 1910 г. в Берлине В. Берман (W. Behrmann, 1882—1955).

Третья равновеликая цилиндрическая проекция построена при главных параллелях $\pm 45^\circ$ (см. рис. 106). Соотношение сторон рамок будет $1/1,57$. В этом случае прямоугольник карты значительно ближе к квадрату. Правда, в проекции материки, особенно это заметно по отношению к Южной Америке, Африке и югу Азии, оказались неестественно вытянутыми в меридиональном направлении. Проекцию предложил в 1885 г. Дж. Голл как результат ортографического проектирования шара на секущий цилиндр. Позже, в 1974 г., ее повторно предложил немецкий математик А. Питерс в качестве идеологического противовеса проекции Меркатора. Продолжительная идеологическая полемика и обилие изданных карт сделали проекцию Питерса одной из наиболее известных.

§ 36. ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ КАРТ МИРА

Псевдоцилиндрических проекций предложено значительно больше, чем это необходимо для нужд картографии. Практическое распространение получили лишь немногие из них.

Равновеликая псевдоцилиндрическая проекция Мольвейде. Применяется для построения разнообразных тематических карт. Особенно распространена за рубежом. В последние годы она все чаще обнаруживается и на российских картах. Обычно на картах мира проекция используется в нормальной ориентировке. Об искажениях форм основных массивов суши можно судить по изображениям в этой проекции фигур искажений (рис. 107). Европа изображается практически правильно. Африка несколько вытянута в направлении север — юг. Слабо деформирована Южная Америка.

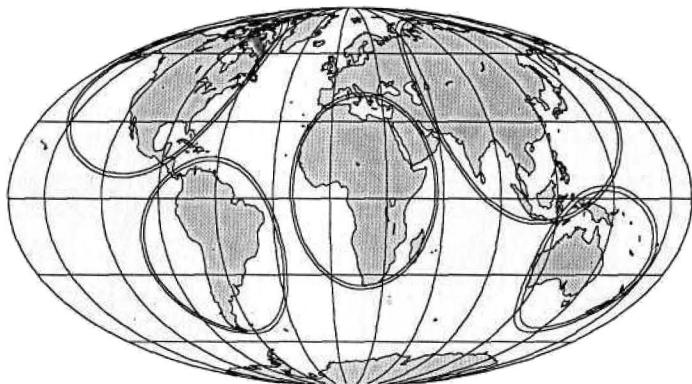


Рис. 107. Равновеликая псевдоцилиндрическая проекция Мольвейде с изображением фигур искажений

Таблица 21

Искажения в нормальной равновеликой проекции Мольвейде

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	0	8	35	28
Азия	0	23	152	133
Африка	0	6	20	23
Сев. Америка	0	36	246	192
Юж. Америка	0	11	55	43
Австралия	0	23	128	99

Фигуры искажений для Азии, Австралии и Северной Америки по форме каплеобразны и вытянуты по направлению к ближайшему полюсу. Значительно деформированы Азия и Северная Америка. Европа и Африка расположены в центральной части проекции. Они менее всего искажены. Показатели искажений приведены в табл. 21.

Уравнения проекции Мольвейде имеют вид (ось X — на север, ось Y — на восток):

$$x = \sqrt{2}R \sin \theta; \quad y = 2\sqrt{2}R(\lambda - \lambda_0) \cos \theta / \pi;$$

$$2\theta + \sin(2\theta) = \pi \sin \varphi;$$

$$2\theta_{p+1} = 2\theta_p - (2\theta_p + \sin(2\theta_p) - \pi \sin \varphi) / (1 + \cos(2\theta_p)),$$

где θ — переменная, вычисляется по широте φ способом Ньютона последовательными приближениями; p — номер приближе-

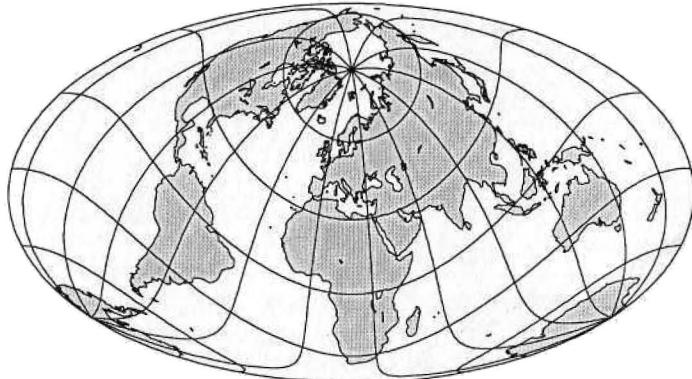


Рис. 108. Равновеликая косая псевдоцилиндрическая проекция Мольвейде (широта условного полюса 50° , долгота среднего меридиана 20°)

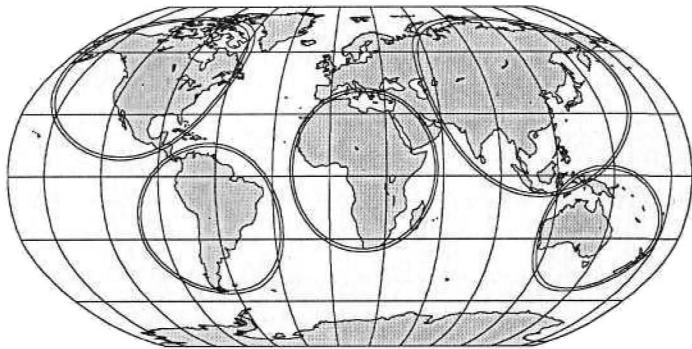


Рис. 109. Произвольная псевдоцилиндрическая проекция Робинсона с изображением фигур искажений

ния (при $p = 0$, $\theta_0 = \phi$). На экваторе и на полюсах угол θ принимает значения широт. Приближения прекращаются, когда расхождение двух последовательных значений угла θ меньше установленного допуска точности его вычисления.

Определенный интерес для карт мира может представить проекция Мольвейде в косой ориентировке (рис. 108).

Произвольная псевдоцилиндрическая проекция Робинсона (рис. 109). Предложена А. Робинсоном (A. H. Robinson) в США в 1963 г. Эта одна из наиболее известных и распространенных псевдоцилиндрических проекций. Она имеется в основных картографических программных пакетах, применяемых в геоинформационном картографировании. По этой причине проекция Робинсона получает распространение и в России.

В проекции малы искажения в полосе между параллелями широт $\pm 45^\circ$. Самые большие искажения у полюсов. Полюса изображаются отрезками прямых. Масштаб постоянен на каждой парал-

Таблица 22
Искажения в псевдоцилиндрической проекции Робинсона

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	11	13	43	60
Азия	-3	14	76	67
Африка	-15	10	13	15
Сев. Америка	3	21	112	104
Юж. Америка	-12	9	28	25
Австралия	-11	13	61	46

Таблица для вычислений координат проекции Робинсона

ϕ°	X	Y	ϕ°	X	Y
0	0,0000	1,0000	50	0,6176	0,8679
5	0,0620	0,9986	55	0,6769	0,835
10	0,1240	0,9954	60	0,7346	0,7986
15	0,1860	0,9900	65	0,7903	0,7597
20	0,2480	0,9822	70	0,8435	0,7186
25	0,3100	0,9730	75	0,8936	0,6732
30	0,3720	0,9600	80	0,9394	0,6213
35	0,4340	0,9427	85	0,9761	0,5722
40	0,4958	0,9216	90	1,0000	0,5322
45	0,5571	0,8962			

лели, но меняется с широтой. Главный масштаб сохраняется на параллелях $\pm 38^\circ$. По сравнению с проекциями Меркатора или Мольвейде, в проекции Робинсона лучший баланс искажений размеров и формы стран, расположенных в высоких широтах. Более правильно отображается территории России, Канады и Гренландии, хотя Гренландия несколько сжата в меридиональном направлении. Показатели искажений даны в табл. 22.

Уравнения проекции Робинсона (ось абсцисс направлена на север, ось ординат — на восток):

$$x = 1,3523RX; \quad y = 0,8487RY(\lambda - \lambda_0).$$

Величины X и Y интерполируют по таблице Робинсона (табл. 23).

Синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Урмаева. Масштаб длин на экваторе 0,877 383. Длины не искажены на широтах $\pm 42,3^\circ$. Искажения площадей изменяются от 0 (на экваторе) до

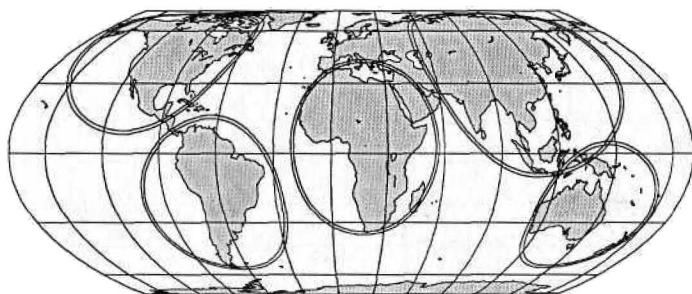


Рис. 110. Произвольная синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Урмаева с изображением фигур искажений

Искажения в синусоидальной псевдоцилиндрической проекции Урмаева

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	-19	16	110	122
Азия	-10	18	114	82
Африка	-3	7	23	24
Сев. Америка	-14	25	169	120
Юж. Америка	-5	11	46	47
Австралия	-6	19	104	78

30 % (на параллелях примерно $\pm 70^\circ$). Значения ω соответственно изменяются от $14,9$ до 50° и равны нулю на среднем меридиане в точках $\varphi = \pm 51^\circ$. Региональные фигуры искажений приведены на рис. 110, а их показатели — в табл. 24.

Значения углов классификации находятся в пределах $81^\circ \leq \alpha \leq 86^\circ$. По характеру искажений проекция близка к равновеликим. Проекция Урмаева вычисляется по формулам:

$$x = 1,424\,69R(\psi - 0,138175\psi^3);$$

$$y = 0,877\,383R(\lambda - \lambda_0) \cos \psi;$$

$$\sin \psi = 0,8 \sin \varphi.$$

Синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Каврайского. Проекция равновеликая. Масштаб длин на экваторе 0,877 383. Нет искажений длин на широтах $\pm 46,5^\circ$. Значения ω изменяются от $14,5^\circ$ (на экваторе) до 80° (примерно на широте $\pm 80^\circ$). Региональ-

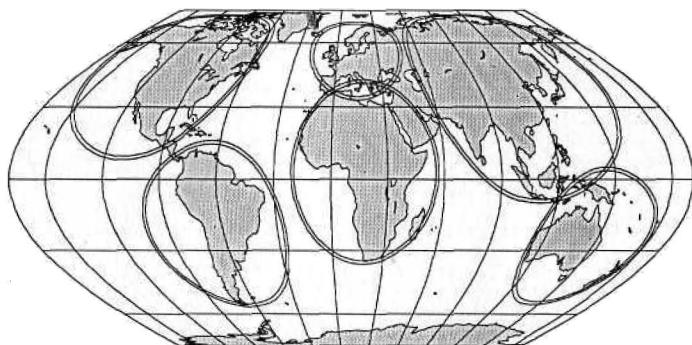


Рис. 111. Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Каврайского с фигурами искажений для основных массивов суши

Искажения в синусоидальной псевдоцилиндрической проекции Каврайского

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	0	7	33	31
Азия	0	20	108	82
Африка	0	8	28	31
Сев. Америка	0	29	148	125
Юж. Америка	0	13	59	61
Австралия	0	24	129	101

ные фигуры искажений и их показатели приведены на рис. 111 и в табл. 25. Формулы проекции:

$$x = 1,316\,07R\psi;$$

$$y = 0,877\,383R(\lambda - \lambda_0)\cos\psi;$$

$$\sin\psi = 0,866\,025\sin\varphi.$$

Эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция Каврайского. Масштаб длин на экваторе составляет 0,866 025. Искажения площадей изменяются от -13,4 (на экваторе) до +218 % (на параллелях $\pm 80^\circ$). Соответственно значения ω изменяются от 8,2 до 70° и равны нулю на среднем меридиане в точках $\varphi = \pm 35,5^\circ$. Региональные фигуры искажений и их показатели приведены на рис. 112 и в табл. 26.

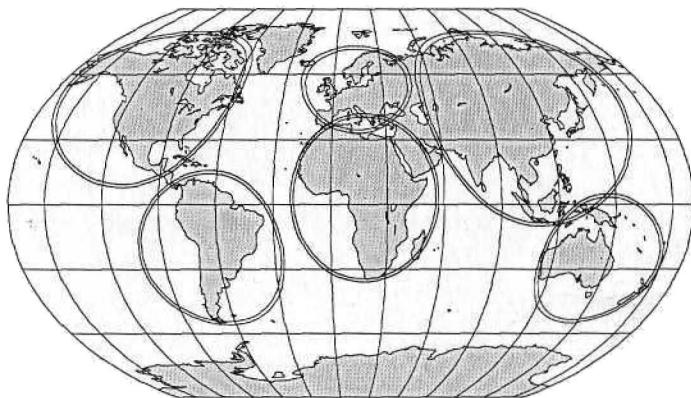


Рис. 112. Произвольная эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция Каврайского с фигурами искажений для основных массивов суши

Искажения в эллиптической псевдоцилиндрической проекции Каврайского

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	27	16	27	40
Азия	9	14	62	51
Африка	-10	8	15	17
Сев. Америка	17	22	90	79
Юж. Америка	-6	8	26	29
Австралия	-5	12	53	43

Формулы проекции имеют вид:

$$x = R\phi; \quad y = 0,866\,025R(\lambda - \lambda_0) \cos \psi;$$

$$\sin \psi = 0,551\,329\phi.$$

В местах расположения основных материков и стран света эллиптическая проекция Каврайского по характеру искажений находится между равновеликими и равнопромежуточными проекциями. При этом угол классификации для Европы и Африки около 60° , а для остальных массивов суши — около 80° .

Псевдоцилиндрическая проекция Гинзбурга (известна как проекция ЦНИИГАиК 1944 г.). Проекция показана на рис. 113.

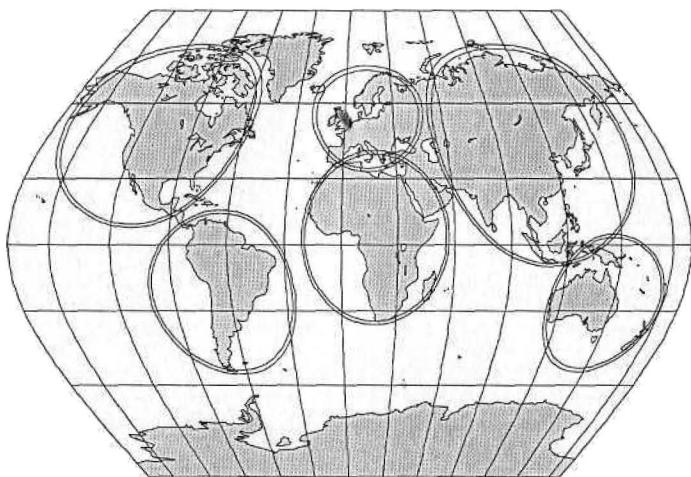


Рис. 113. Произвольная псевдоцилиндрическая проекция Гинзбурга с фигурами искажений для основных массивов суши

Искажения в псевдоцилиндрической проекции Гинзбурга

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	58	25	18	7
Азия	22	17	69	54
Африка	-7	8	20	21
Сев. Америка	47	28	86	55
Юж. Америка	1	8	34	35
Австралия	-4	14	64	52

Уравнения проекции имеют вид (счет долгот λ от среднего меридиана):

$$x = R(\phi + \phi^3/12);$$

$$y = R(1 - \phi^2/6,16)(0,87\lambda - \lambda^4/1049,95).$$

Искажения в пределах кругов, построенных на земном шаре и охватывающих основные массивы суши, приведены в табл. 27.

В этой проекции малые искажения площадей для Южной Америки и Австралии и небольшие для Африки. Африка и Австралия по площади несколько преуменьшены. Площадь Европы преувеличена, но ее формы переданы с наименьшими искажениями. Качество изображения форм соответствует эллиптической проекции Каврайского.

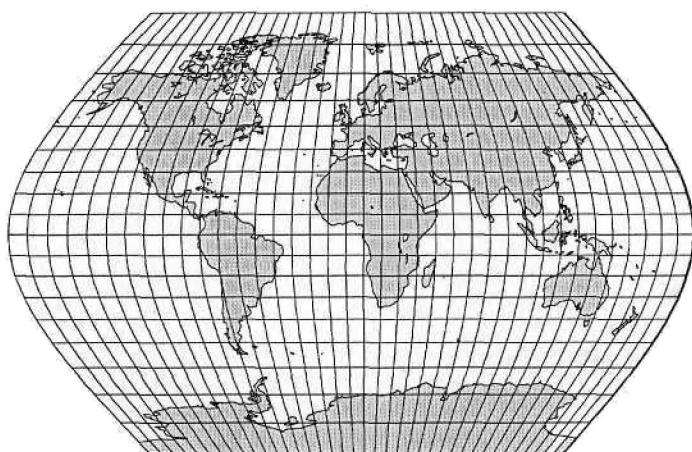


Рис. 114. Произвольная псевдоцилиндрическая проекция Гинзбурга с повторяющимися участками океанов в направлении запад—восток

Отличительным свойством проекции Гинзбурга является то, что отрезки каждой параллели между меридианами убывают с удалением от среднего меридиана, а промежутки между параллелями несколько возрастают к полюсам. Благодаря этому материки, расположенные в окраинных частях карты, получаются менее искаженными по форме, чем в проекциях Урмаева или Каврайского. Проекция наглядно отображает связь суши с океанами.

Проекция Гинзбурга разрабатывалась для карт мира с повторяющимися участками по краям в направлении запад — восток. На рис. 114 она изображена с включением повторяющихся участков Тихого океана.

§ 37. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ КАРТ МИРА

Поликонические проекции для карт мира имеют наибольшее значение. Рассмотрим основные из них.

Равноугольная проекция Лагранжа (см. рис. 95). Напомним, что эта проекция создавалась с требованием минимальных искажений в пределах карты мира. Изображения в проекции фигур искажений, охватывающих на земном шаре основные континенты и страны света, показывают, как искажены основные массивы суши (рис. 115). Результаты количественных оценок этих искажений приведены в табл. 28.

По абсолютному значению искажения площадей умеренные, а для Африки и Северной Америки — большие. Однако для кар-

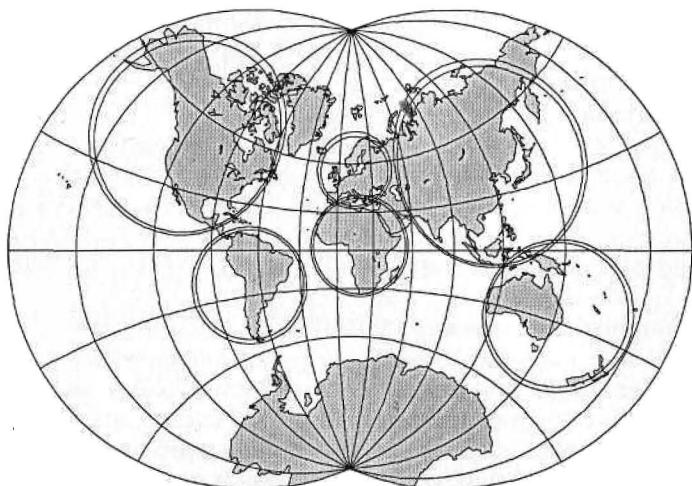


Рис. 115. Поликоническая равноугольная проекция Лагранжа с фигурами искажений для основных массивов суши

Таблица 28

Искажения в поликонической проекции Лагранжа

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	-24	19	44	5
Азия	11	20	81	19
Африка	-64	41	8	7
Сев. Америка	68	32	80	15
Юж. Америка	-43	28	32	5
Австралия	40	21	44	4

ты мира они приемлемы. Европа, Южная Америка и особенно Африка по площади преуменьшены, а Азия, Северная Америка и Австралии — преувеличены. В результате создается впечатление повышенного контраста в размерах этих объектов.

Формы объектов искажены по-разному: у Африки небольшие искажения; умеренные искажения у Европы, Южной Америки и Австралии, большие — у Северной Америки и Азии. Это является следствием того, что радиусы кругов, обращенные к полюсам, изобразились значительно длиннее радиусов, направленных в сторону экватора.

Вместе с этим проекция обладает довольно высокой степенью стереографичности: величины показателей искажений формы кругов колеблются в пределах от малых до умеренных значений.

Проекцию Лагранжа следует использовать для карт мира в тех случаях, когда необходимо, чтобы текущие углы между линиями и направления линий тех или иных потоков передавались без искажений.

В России для карт мира наибольшее значение имеют поликонические проекции ЦНИИГАиК. Координаты узловых точек этих проекций и макеты карт с изоколами частных масштабов площадей и максимальных искажений углов даны в Атласе для выбора картографических проекций (1957). Кратко рассмотрим эти проекции.

Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (1939—1949) (Г.А. Гинзбурга) показана на рис. 116. Долгота среднего меридиана $+10^\circ$. Все параллели равноразделенные. Масштаб длин вдоль экватора равен 0,9, а вдоль среднего меридиана — 1. Искажения площадей и углов одного порядка. Наибольшие искажения углов не превышают 50° . Масштабы площадей изменяются от 0,9 (в центральной части) до 1,8 (на крайних выступах северного побережья) и до 2 и более (в полярных районах). Нет искажений всех видов на среднем меридиане в двух точках с широтами $\pm 52^\circ$.

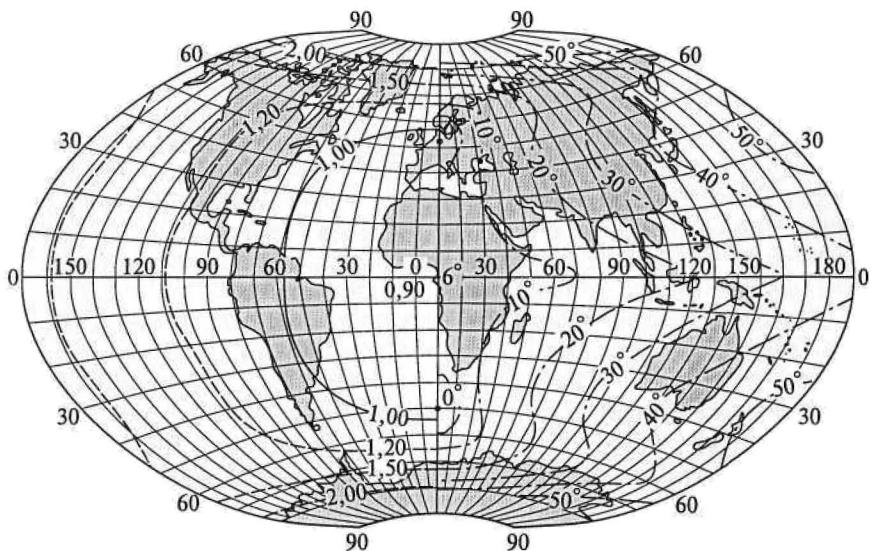


Рис. 116. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (1939—1949) с изоколами частного масштаба площадей и максимальных искажений углов

Проекция использовалась для построения климатических и других физико-географических карт.

Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (1950) показана на рис. 117. Долгота среднего меридиана $+30^\circ$. Все параллели равноразделенные. Параллели изображаются дугами окружностей мень-

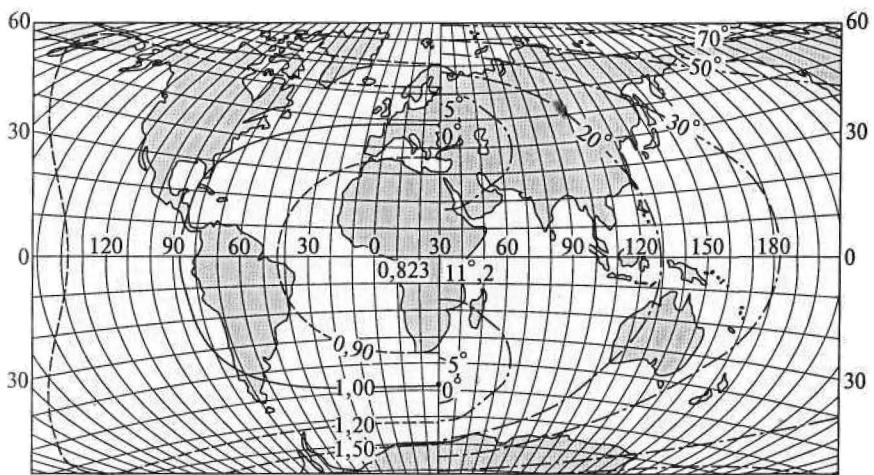


Рис. 117. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (1950) с изоколами частного масштаба площадей и максимальных искажений углов

шей кривизны, чем в предыдущем варианте. Главный масштаб длин сохраняется по среднему меридиану и по параллели $\pm 48^\circ$. Площади искажены несколько меньше, чем углы. Наименьшее искажение площадей в центре карты, где частный масштаб площади равен $p = 0,823$. На северных окраинах материков $p = 1,5 - 2$, в полярных районах p немного превышает 2. Наибольшие искажения углов в приполярных областях у верхней и нижней рамок карты, где максимальные искажения углов ϕ превышают 70° . Масштаб длин вдоль экватора равен 0,823. Отсутствуют искажения на среднем меридиане в двух точках с широтами $\pm 48^\circ$.

В этой проекции были построены Политическая карта мира, карты народов мира и плотности населения, а также многие карты мира в школьных атласах.

Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (вариант БСЭ) (рис. 118) разработана для карт мира Большой Советской Энциклопедии. Искажения углов и площадей примерно одного порядка, но по характеру искажений она все же больше тяготеет к равноугольным проекциям. При отображении Европы, Африки, значительных частей Азии, Южной и Северной Америки, Австралии и даже части Антарктиды искажения углов не превышают 20° . Наибольшие искажения в углах рамки карты (более 50°). Масштаб площадей изменяется от 0,833 (в центре проекции) до 2 (на северных окраинах материков) и до 3 и более (в полярных районах). Масштаб длин вдоль экватора равен 0,833. Нет искажений длин вдоль параллелей широты $\pm 45^\circ$. Отсутствуют угловые искажения на сред-

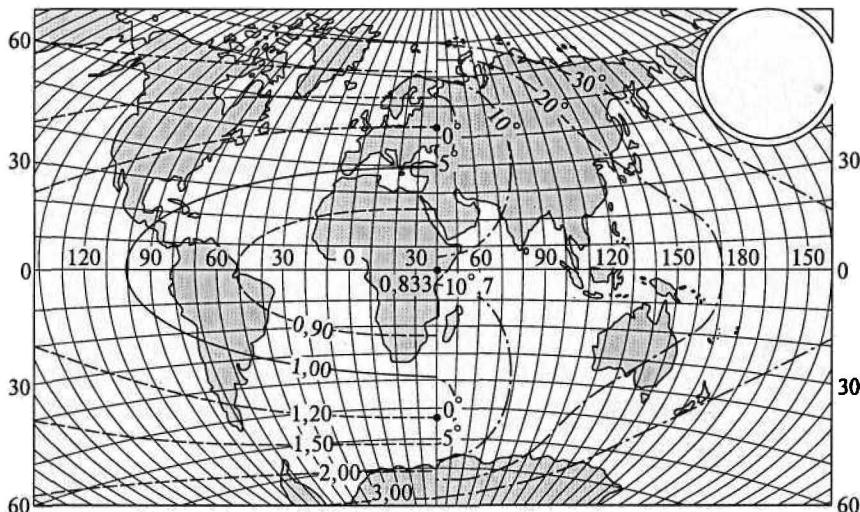


Рис. 118. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (вариант БСЭ) с изо-
колами частного масштаба площадей и максимальных искажений углов

нем меридиане в двух точках с широтами $\pm 52,7^\circ$. Средний меридиан неравноразделен, параллели имеют кривизну, несколько большую, чем в предыдущей проекции.

Проекция использовалась для многих учебных, справочных настенных и настольных карт мира.

Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (вариант № 100) разработана для карт мира без включения южной полярной области. Все параллели, в том числе и экватор, являются криволинейными и выпуклостью обращены к югу (рис. 119). За счет некоторого изгиба экватора улучшены изображения крупных массивов суши в Северном полушарии. Сетка симметрична относительно среднего прямолинейного меридиана. Параллели и меридианы неравноразделенные. Северный полюс изображается линией.

Проекция получена аппроксимированием эскиза картографической сетки полиномами от широт ϕ и долгот λ , когда их суммарная степень не более 8 — для абсцисс и 9 — для ординат (ось X направлена на север, ось Y — на восток, счет λ ведется от среднего меридиана):

$$x = k \sum_{i=0}^{i=8} \sum_{j=0}^{j=8} a_{ij} \phi^i \lambda^j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 8; \quad j = 0, 2, 4, 6, 8; \quad i + j \leq 8;$$

$$y = k \sum_{i=0}^{i=9} \sum_{j=1}^{j=9} b_{ij} \phi^i \lambda^j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 9; \quad j = 1, 3, 5, 7, 9; \quad i + j \leq 9.$$

Масштабный коэффициент $k = 57\ 330\ 315\ M_{\text{карты}}$, где $M_{\text{карты}}$ — масштаб карты. Широты и долготы должны быть выражены в радианах, прямоугольные координаты получаются в сантиметрах в масштабе карты. Таблицы с координатами узловых точек и коэф-

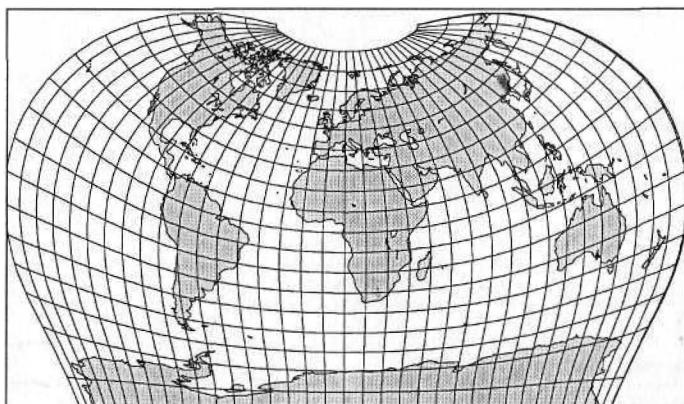


Рис. 119. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (вариант № 100)

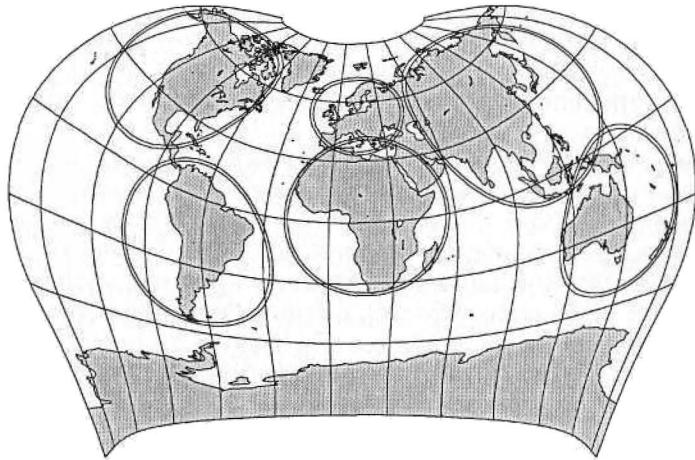


Рис. 120. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (вариант № 100)
с фигурами искажений для основных массивов суши

фициентами полиномов приведены в Дополнении к атласу для выбора картографических проекций (1975).

По локальным дифференциальным оценкам, преобладающая часть суши изображается с искажениями длин не более +50 и -20 % и искажениями площадей не более +50 %. Наибольшие искажения углов в этих случаях не превышают 30°. Искажения сильно возрастают на пространстве северных островов. По характеру искажений проекция обладает промежуточными свойствами.

Об искажениях в проекции территорий регионального масштаба можно судить по рис. 120 и данным табл. 29.

Площади кругов большинства массивов суши имеют очень малые или малые искажения. Небольшие искажения площадей у

Таблица 29

Искажения в поликонической проекции ЦНИИГАиК (вариант № 100)

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	4	6	21	27
Азия	0	10	38	50
Африка	-1	3	3	4
Сев. Америка	1	13	50	60
Юж. Америка	9	11	39	49
Австралия	23	25	72	120

Южной Америки. Искажения площадей около 23 % лишь для Австралии с Океанией. Искажения длины радиусов кругов колеблются в пределах 3—25 %. Несколько хуже обстоит дело с искажениями форм. Меньше всего деформирована Африка. Деформации для Северной Америки доходят до 50 %, а для Австралии с Океанией — даже до 72 %. В целом величины искажений для карты мира вполне приемлемы.

Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (1954) предназначена для настенных карт. Проекция составная. Макеты картографической сетки с изоколами частного масштаба площадей и наибольших искажений углов имеются на рис. 51, 52. Таблицы с координатами узловых точек приведены в Атласе для выбора картографических проекций (1957).

На практике применяется видоизмененный вариант проекции (рис. 121).

В видоизмененном варианте средний меридиан с долготой $+5^{\circ}$ (вместо $+50^{\circ}$) на карте не приводится. Гринвичский меридиан зрительно воспринимается прямолинейным. Проекция перестала быть составной, так как использована только западная часть исходной проекции. Теперь картографическая сетка симметрична как относительно среднего меридиана, так и относительно экватора. Проекция большей частью обладает умеренными искажениями углов и площадей.

По локальным оценкам, на суше искажения углов, исключая ее повторяющиеся части на карте, не превышают 30° . Масштаб площадей для значительной части суши изменяется от 0,83 до 1,5. В полярных районах $p = 3,0$ и более. Поэтому для Арктического

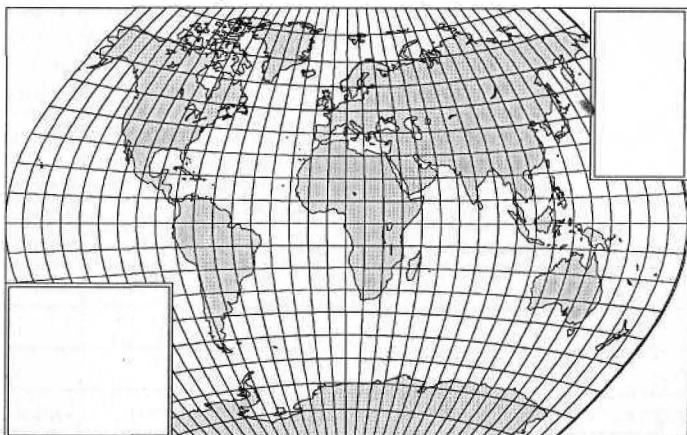


Рис. 121. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК карт мира для высшей школы (видоизмененный вариант 1954 г.)

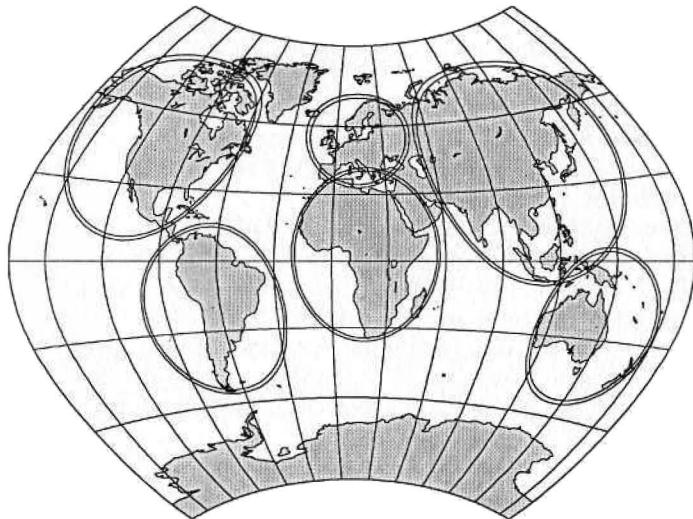


Рис. 122. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК карт мира для высших учебных заведений с фигурами искажений для основных массивов суши

бассейна и Антарктиды дают врезки в нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции.

На рис. 122 проекция изображена с фигурами искажений. Показатели региональных искажений приведены в табл. 30.

По характеру искажений проекция находится между равнопромежуточными и равновеликими (угол классификации около 80°). Исключением является Европа; в этой части проекция больше тяготеет к равноугольным проекциям (угол классификации 29°).

Таблица 30
Искажения в проекции ЦНИИГАиК для карт мира
(для высших учебных заведений)

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	25	12	15	14
Азия	18	15	61	60
Африка	-12	10	19	22
Сев. Америка	33	23	76	82
Юж. Америка	-4	9	35	44
Австралия	10	18	63	81

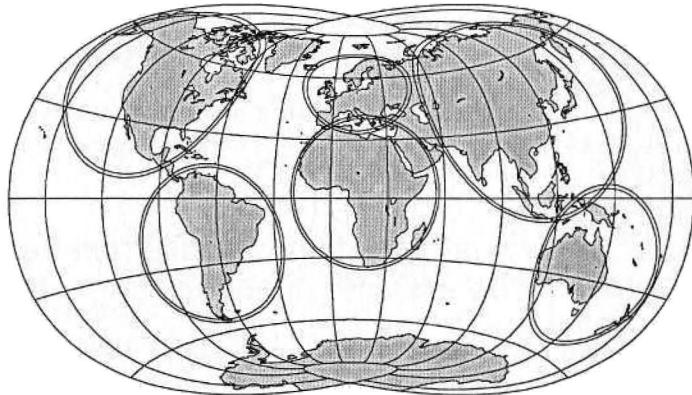


Рис. 123. «Три-оптимальная» проекция Ласковского с фигурами искажений для основных массивов суши

Проекция получена графоаналитическим способом и задана таблицей координат узловых точек сетки в масштабе 1 : 10 000 000 [Атлас для выбора картографических проекций, 1957]. Позже западная часть проекции аппроксимирована полиномами от сферических широт ϕ и долгот λ .

Эта проекция применена для Международной тектонической карты мира, для геологической карты континентов мира и для всех тематических карт масштаба 1 : 15 000 000, предназначенных для высших учебных заведений.

«Три-оптимальная» проекция Ласковского. Эта проекция кратко описана в § 34 и приведена на рис. 98. На рис. 123 в этой проекции показаны фигуры искажений для основных массивов суши. Показатели искажений данных фигур имеются в табл. 31.

Таблица 31
Искажения в «три-оптимальной» проекции

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	48	26	42	62
Азия	43	24	52	64
Африка	6	3	7	8
Сев. Америка	60	38	85	95
Юж. Америка	23	11	22	27
Австралия	51	32	58	86

В данной ориентировке (долгота среднего меридиана 11°) наилучшие показатели для Африки. Остальные части суши изображены примерно с одинаковым качеством.

По характеру искажений проекция находится между равновеликими и равнопромежуточными, но расположена ближе к последним (угол классификации $56 - 59^{\circ}$).

§ 38. АЗИМУТАЛЬНЫЕ, ПСЕВДОАЗИМУТАЛЬНЫЕ И ПОЛИЦИЛINDERЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ КАРТ МИРА

Азимутальные равнопромежуточные проекции. Для карт мира их применяют с тем, чтобы показать удаления географических объектов от некоторого центра — административного, культурного, религиозного и др. На карте в такой проекции сохраняются длины радиусов, исходящих из условного полюса, который обычно помещается в середине карты. Остальные показатели искажений в данном случае малоинтересны. Между тем, чем ближе к краям карты, тем сильнее искажены площади и формы объектов. При зенитных расстояниях Z около 180° формы материков искажаются до неузнаваемости. На рис. 124 показана такая проекция, в центре которой — город Москва. Координаты ее узловых точек имеются в Дополнении к атласу для выбора картографических проекций (1975).

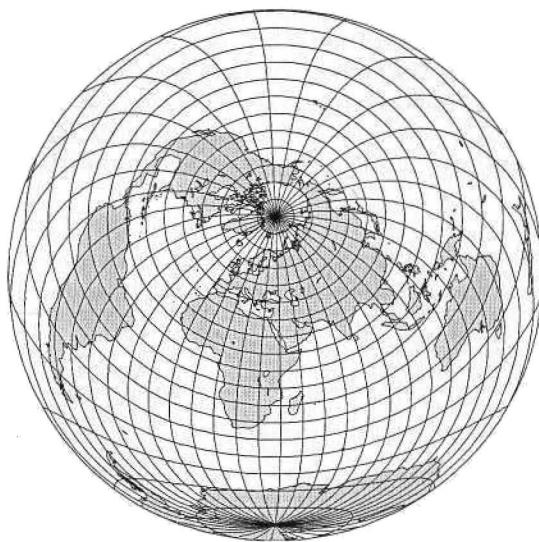


Рис. 124. Косая азимутальная равнопромежуточная проекция для карты мира кратчайших расстояний от Москвы, максимальное зенитное расстояние $Z = 155^{\circ}$

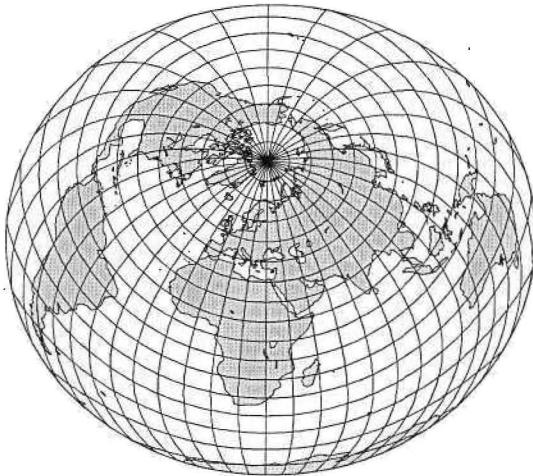


Рис. 125. Псевдоазимутальная проекция Гинзбурга (ЦНИИГАиК) для карт мира

Формулы для вычисления координат проекции имеют вид:

$$x = RZ \cos a; \quad y = RZ \sin a,$$

где a — азимут; Z — зенитное расстояние текущих точек.

Псевдоазимутальная проекция Гинзбурга. Проекция разработана для карты мира и вычисляется по формулам

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 3R \sin(Z/3); \quad \delta = a - C(Z/Z_{\max})^q \sin[k(a + \pi/2)].$$

Параметры проекции имеют значения: $q = 2$, $k = 2$, $C = 0,15$, $Z_{\max} = 120 - 150^\circ$. В проекции центральное размещение материков (рис. 125).

На карте нет искажений в центральной точке с координатами $\phi_0 = 55^\circ$ и $\lambda_0 = 30^\circ$. Искажения углов и площадей примерно одного порядка. Искажения площадей изменяются от 0 (в центральной точке) до 50 % (по схематизированному контуру материков, исключая Антарктиду). Максимальные искажения углов соответственно изменяются от 0 до 60° . Таблицы координат узлов сетки и макеты карт с изоколами частных масштабов площадей и максимальных искажений углов даны в Атласе для выбора картографических проекций (1957). Изоколы имеют овальную форму.

Представление об искажениях дает рис. 126, где приведена эта же проекция с изображениями фигур искажений. В табл. 32 представлены соответствующие показатели искажений.

Европа отображена почти идеально. Немногим ей уступает по качеству отображения Азия. В целом в проекции умеренные искажения.

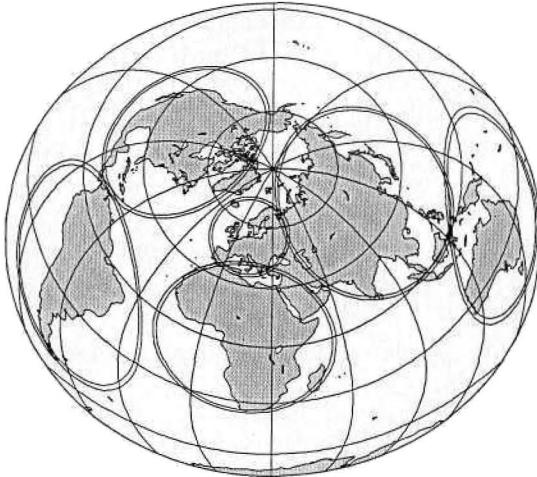


Рис. 126. Псевдоазимутальная проекция Гинзбурга (ЦНИИГАиК) для карт мира с фигурами искажений для основных массивов суши

жения площадей. Очень большие искажения форм для фигур Южной Америки и Австралии с частью Океании.

Проекция Райза (Ег. J. Raisz, 1893—1968). Предназначена для карт мира. Косая ортографическая проекция земного шара на поверхность тора (рис. 127). Условно она здесь классифицирована как *полицилиндрическая с параллелями переменной кривизны*. Средний меридиан прямолинеен. Другие меридианы — эллиптические дуги. Параллели — дуги эллипсов с одинаковыми эксцентриситетами. Северный полюс — полуэллипс. Проекция симметрична относительно среднего меридиана. Регион Антарктики не отображается. Предполагается, что в этой проекции наибольшее соотношение «суша/море».

Таблица 32

Искажения в псевдоазимутальной проекции ЦНИИГАиК

Массив суши	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Европа	1	0	1	3
Азия	9	6	24	20
Африка	14	10	30	25
Сев. Америка	19	16	48	41
Юж. Америка	35	39	126	156
Австралия	47	56	174	252

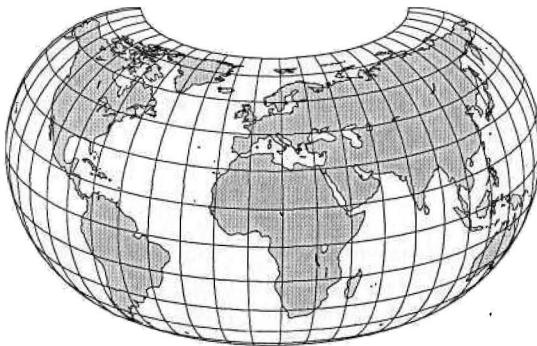


Рис. 127. Карта мира в проекции Райза

Уравнения проекции (ось X направлена на север по среднему меридиану, ось Y — на восток, пересекает средний меридиан на параллели широты $28,1^\circ$, южная граница карты определяется широтой φ_s):

$$x = R \left(0,201\,164 + 0,939\,693 \sin \varphi - 0,342\,02 [(1 + \cos \varphi) \cos(\lambda/2)] \right);$$

$$y = R(1 + \cos \varphi) \sin(\lambda/2);$$

$$\varphi \geq \varphi_s = -\operatorname{arctg} [\cos(\lambda/2)/0,363\,97].$$

Счет долгот λ ведется от среднего меридиана проекции.

На рис. 128 приведена проекция с изображениями в узлах сетки кругов, построенных на шаре, где они одинакового размера. В проекции эти круги изобразились практически без искажений; эллиптичность они приобретают лишь на краях карты. Плохо передана Австралия и нет Новой Зеландии. Ее приходится давать врезкой.

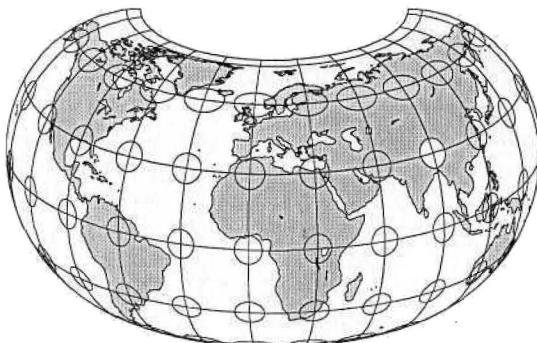


Рис. 128. Фигуры искажений в узлах сетки на карте мира в проекции Райза

Братья В. С. и Е. С. Войтинских удачно использовали проекцию для построения карты межконтинентальной миграции с начала XX в. При этом проекция расширена у Австралии и дополнена изображением Новой Зеландии. Ими же эта проекция использована для построения анаморфоз.

Контрольные вопросы

- 1.** Что отображается на картах мира и какие при этом используются проекции?
- 2.** Дайте характеристику проекции Меркатора с точки зрения ее пригодности для построения карт мира.
- 3.** Как влияет выбор широт главных параллелей на искажения в проекции Меркатора?
- 4.** Какие преимущества и недостатки проекции Миллера в сравнении с проекцией Меркатора?
- 5.** Укажите на сходство и различия проекции Миллера и Голла применительно к их использованию для карт мира.
- 6.** В каких случаях применяется нормальная равнопромежуточная цилиндрическая проекция?
- 7.** Как влияет на свойства равновеликой цилиндрической проекции выбор широт ее главных параллелей? Как при этом изменяются размеры карты и вид материков на карте?
- 8.** Какие псевдоцилиндрические проекции могут использоваться для построения карт мира? Сопоставьте эти проекции по величинам искажений в них основных массивов суши.
- 9.** Чем примечательна псевдоцилиндрическая проекция Гинзбурга?
- 10.** Какие используются поликонические проекции для карт мира? Сопоставьте между собой характеристики различных поликонических проекций ЦНИИГАиК для карт мира.
- 11.** Для каких карт мира применяется равнопромежуточная азимутальная проекция?
- 12.** Как размещены материки в псевдоазимутальной проекции Гинзбурга? Сопоставьте эту проекцию с поликоническими и цилиндрическими проекциями для карт мира.
- 13.** Чем примечательна проекция Райза, какие у нее недостатки и для построения каких карт мира она использовалась?

ГЛАВА 8

ПРОЕКЦИИ КАРТ ПОЛУШАРИЙ

Существуют карты Западного, Восточного, Северного, Южного, материкового и океанического полушарий. На первых пяти из них основное значение имеет отображение суши, а на последнем — показ океанических вод. В тех случаях, когда полушария отображают планеты или Землю как планету, важно подчеркнуть их шарообразность.

Сама форма полушарий как округлых объектов предопределяет преимущественное использование проекций одного класса — азимутальных. Находят применение азимутальные проекции с любым видом искажений — равновеликие, равнопромежуточные и равноугольные. Для передачи на картах полушарий сферичности Земли или других космических тел часто применяют ортографическую азимутальную проекцию.

Формулы для вычисления координат азимутальных проекций рассматривались в § 23.

В азимутальных проекциях изоколами являются концентрические окружности. Центр этих окружностей расположен в середине карты. Иными словами, изоколы в нормальных азимутальных проекциях совпадают с параллелями, а в косых и поперечных — с альмукантаратами (условными параллелями).

Обычно используется касательная плоскость. В этом случае в центре карты искажений нет, но с увеличением зенитных расстояний, т. е. к краям карты, они постепенно нарастают.

Таблица 33
Искажения в азимутальных проекциях для карт полушарий

Зенитное рассто- яние Z , град	Проекция					
	равно- угольная	равнопромежуточная	равно- великая	ортографическая		
				p	p	ω
0	1	1	0°	0°	1	0°
30	1,149	1,047	$2^\circ 39'$	$3^\circ 58'$	0,866	$8^\circ 14'$
60	1,778	1,209	$10^\circ 52'$	$16^\circ 26'$	0,500	$38^\circ 57'$
90	4,000	1,571	$25^\circ 40'$	$38^\circ 57'$	0	180°

Для перечисленных выше азимутальных проекций в табл. 33 указаны частные масштабы площадей r и максимальные искажения углов ω в зависимости от значений зенитных расстояний Z . Эта таблица дает представление о распределении искажений на картах полушарий, построенных в азимутальных проекциях.

§ 39. ПРОЕКЦИИ ЗАПАДНОГО И ВОСТОЧНОГО ПОЛУШАРИЙ

До XVII в. карты Западного и Восточного полушарий строились в глобуллярных проекциях. В § 22 был рассмотрен ряд предназначенных для этих целей глобуллярных проекций. В XVII и XVIII вв. стали применять равноугольную (стереографическую) поперечную азимутальную проекцию. Однако в стереографической проекции слишком большие для полушарий искажения площадей — на краях карты, площади преувеличены в 4 раза (см. табл. 33).

В настоящее время, как правило, карты Западного и Восточного полушарий составляются в равновеликой поперечной азимутальной проекции (рис. 129, 130). Это диктуется многими причинами. Во-первых, именно в равновеликой азимутальной проекции составлено преобладающее большинство ранее изданных карт полушарий. Сформировалась своеобразная традиция использовать для Западного и Восточного полушарий именно равновеликие



Рис. 129. Западное полушарие Земли в поперечной равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = -110^\circ$)



Рис. 130. Восточное полушарие Земли в поперечной равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = 70^\circ$)

проекции. Кроме того, в настоящее время переход к другой проекции затруднил бы сопоставление этих изданных и широко распространенных карт.

Во-вторых, в ряде географических атласов карты Восточного и Западного полушарий являются единственными, на которых удобно сопоставлять площади материков и крупных их частей друг с другом и сравнивать их с размерами океанов. Это очень важно для настенных карт, предназначенных для учебных целей.

Наконец, в-третьих, для многих карт (геологических, почвенных, морского дна, экономических и др.) важно избегать искажения площадей, в то время как качество передачи очертаний и форм имеет второстепенное значение.

В равновеликих проекциях полушарий с удалением от центра к краям карты частный масштаб длин убывает (по вертикалям) от 1 до 0,707, а по альмукантарам — возрастает до 1,414. Поэтому на краях карты коэффициент искажения форм равен 2, а максимальное искажение углов приближается к 39° . В то же время на многих картах (общегеографических, рельефа земной поверхности, геоморфологических, тектонических, климатических и метеорологических, административных и политических, коммуникаций и связи и др.) желательно иметь умеренные искажения не только площадей, но и форм. Поэтому для этих карт наиболее подходящими являются азимутальные равнопромежуточные и близкие к ним произвольные по характеру искажений проекции (рис. 131, 132).



Рис. 131. Западное полушарие Земли в поперечной равнопромежуточной азимутальной проекции (координаты центральной точки $\varphi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = -110^\circ$)

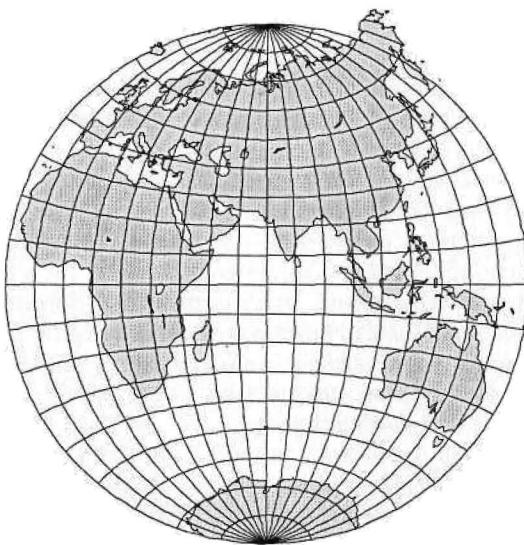


Рис. 132. Восточное полушарие Земли в поперечной равнопромежуточной азимутальной проекции (координаты центральной точки $\varphi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = 70^\circ$)

В азимутальной равнопромежуточной проекции составлены также карты полушарий Луны, Марса, Меркурия.

Западное и Восточное полушария разделены практически произвольно. Естественно думать, что полушария должны быть ограничены нулевым меридианом и меридианом линии перемены дат. Именно эти меридианы отделяют части земли, помеченные восточной и западной долготами. Практически же обычно полушария ограничиваются приблизительно меридианами долгот -20° и $+160^\circ$. Этими меридианами отделяются Северная и Южная Америка от Европы, Африки, Азии и Австралии, Старый Мир от Нового Мира. При этом полярные области и такие важные географические объекты, как Тихий и Атлантический океаны, передаются разорванными на части. Кроме того, чтобы полностью передать Африку, Австралию и Евразию, приходится восточные окраины России приводить в виде небольшой вставки, выходящей за рамки полушария (см. рис. 130 и 132).

Разумно изображать пространство несколько большее, чем полушарие. Увеличив зенитное расстояние от 90 до 100° , получим в каждом полушарии изображения полярных областей. В Западном полушарии появится Северный Ледовитый океан. Достаточно наглядно отобразятся пространства соединения Азии с Северной Америкой, а последней — с Гренландией и Европой. На юге полушария будет показана значительная часть Южного океана и Антарктиды (рис. 133).



Рис. 133. Западное полушарие Земли в поперечной равновеликой азимутальной проекции с отображением полосы за полюсами (координаты центральной точки $\phi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = -100^\circ$, $Z_{\max} = 100^\circ$)

Скан
страницы
отсутствует

Скан
страницы
отсутствует

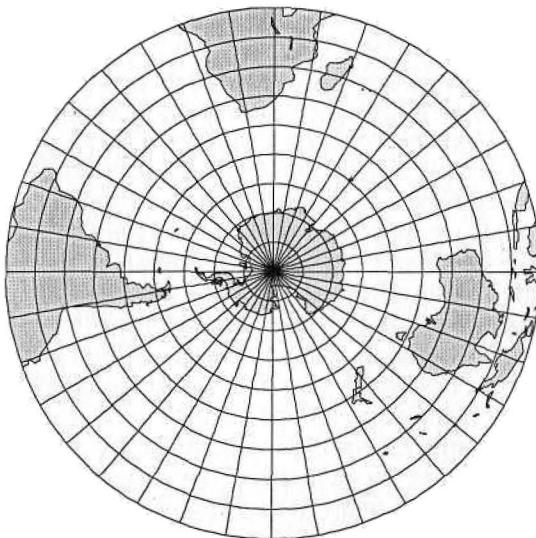


Рис. 136. Южное полушарие Земли в нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции

Эта же проекция может применяться для карт северного и южного звездных полушарий, а также для построения карт соответствующих полушарий других планет и их спутников.

В нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции нет искажений на полюсах. Частный масштаб длин по меридианам равен 1. Частный масштаб длин по параллелям изменяется от 1 (на полюсах) до 1,571 (на экваторе). Полушария ограничены экватором. Максимальные искажения углов имеют место на экваторе и приближаются к 26° .

§ 41. ПРОЕКЦИИ МАТЕРИКОВОГО И ОКЕАНИЧЕСКОГО ПОЛУШАРИЙ

Эти карты обычно строят в косой равновеликой азимутальной проекции.

Центр материкового полушария расположен на юго-западе Франции. В пределах этого полушария суши развита наиболее широко и занимает 47 % его площади. В то же время в него не попадает Австралия, южная часть Южной Америки, Антарктида, но входят Северный Ледовитый океан и значительные части Атлантического и Индийского океанов (рис. 137).

Центр океанического полушария расположен вблизи Новой Зеландии. В пределах полушария на долю суши приходится всего лишь 9 %. Туда входит Антарктида, Австралия и часть Южной Аме-



Рис. 137. Материковое полушарие в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 0^\circ$)

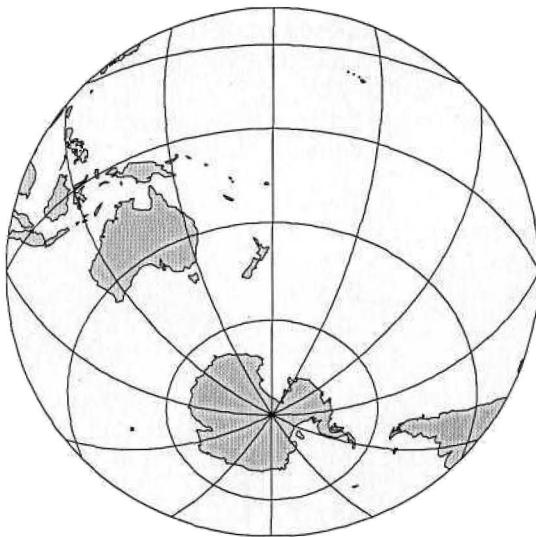


Рис. 138. Океаническое полушарие в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = -45^\circ$, $\lambda_0 = 180^\circ$)

рики. Остальная поверхность занята водами Южного океана, значительной частью Тихого и Индийского океанов и лишь небольшой частью Атлантического океана (рис. 138).

§ 42. ПРОЕКЦИИ, ПЕРЕДАЮЩИЕ СФЕРИЧНОСТЬ ПОЛУШАРИЙ

Для придания полуширьям эффекта сферичности чаще других применяют азимутальную ортографическую проекцию. Ее строят в поперечной или в косой ориентировке. При этом на карте полуширья планет получаются такими, какими наблюдатель видит их в действительности с очень больших расстояний. В ортографической проекции по материалам телескопических наблюдений были построены некоторые карты Луны и планет.

В зависимости от компоновки карты могут выбираться различные значения координат центральной точки. Варианты этих проекций в поперечной и косой ориентировках для Земли представлены на рис. 139 и 140.

Существенным недостатком азимутальной ортографической проекции является то, что ей присущи очень большие искажения всех видов. Например, даже в центральной части карты искажения углов около 10° , а искажения площадей — около 10 %. При зенитном расстоянии 40° площади искажены более чем на 20 %. При зенитном расстоянии 60° изображение практически не читается. На карте полуширий в ортографической проекции искажения площадей изменяются от 0 (в центре карты) до -100 % (на краях полуширия). Искажения углов соответственно изменяются от 0 до 180° (см. табл. 31).

Развитие космической фотосъемки побудило к использованию перспективных внешних азимутальных проекций, которые гео-

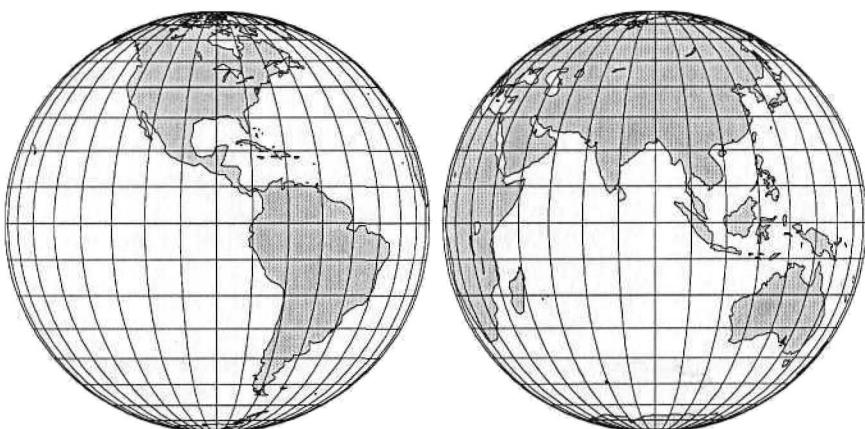


Рис. 139. Поперечные ортографические азимутальные проекции Западного и Восточного полушарий Земли (координаты центральной точки $\phi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = \pm 90^\circ$)

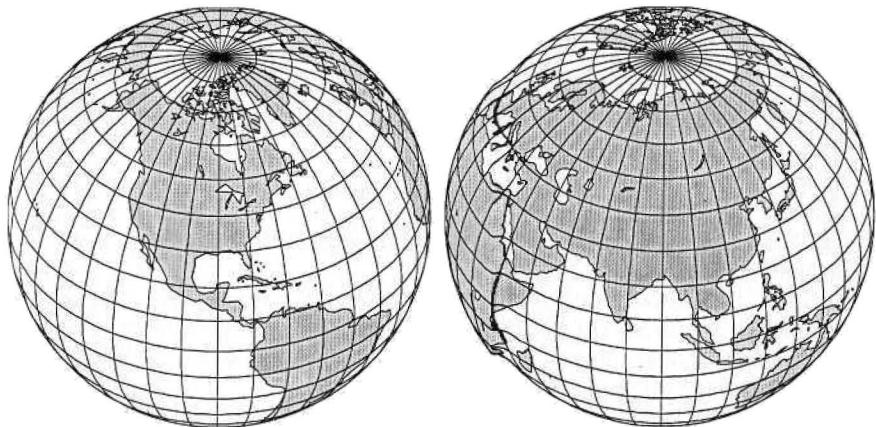


Рис. 140. Косые ортографические азимутальные проекции Западного и Восточного полушарий Земли (координаты центральной точки $\phi_0 = 40^\circ$, $\lambda_0 = \pm 90^\circ$)

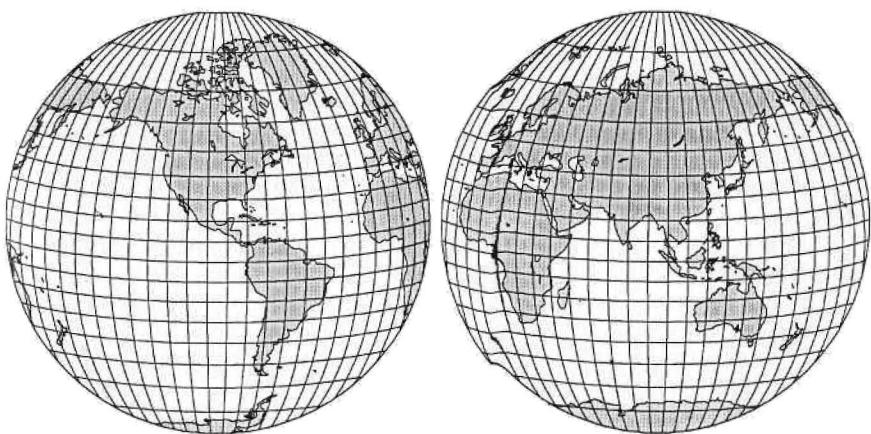


Рис. 141. Косые ортографические двойного проектирования проекции Гильберта для Западного и Восточного полушарий Земли (координаты центральной точки $\phi_0 = 10^\circ$, $\lambda_0 = \pm 95^\circ$, максимальное зенитное расстояние $Z = 65^\circ$)

метрически строятся по тем же правилам, что и космфотоснимки. Например, в косой внешней перспективной проекции составлена карта видимого полушария Луны масштаба 1 : 5 000 000. Однако чем с больших расстояний выполнена фотосъемка, тем ближе перспективная внешняя азимутальная проекция к ортографической. По показателям искажений она также очень близка к ортографической проекции и имеет те же недостатки.

Сферичностью обладает также ортографическая двойного проектирования проекция Гильберта (рис. 141). Земной шар спроектирован при условии равноугольности на полусферу, которая затем ортографически была отображена на плоскости (см. § 4).

Контрольные вопросы

- 1.** Какие полушария отображаются на картах и какие при этом используются проекции?
- 2.** Как в азимутальных проекциях, применяемых для построения карт полушарий, изменяются искажения с увеличением зенитного расстояния (с удалением от центра карты к ее краям)? Какую форму имеют при этом изоколы?
- 3.** Во сколько раз искажены площади на краю полушария в равноугольной азимутальной проекции?
- 4.** На сколько искажены углы на краю полушария в равновеликой азимутальной проекции?
- 5.** Какие искажения площадей и углов на краю полушария в равно-промежуточной азимутальной проекции?
- 6.** Какие искажения площадей и углов на краю полушария в азимутальной ортографической проекции? Почему, несмотря на очень большие искажения, ее все же применяют для карт полушарий?
- 7.** Какие проекции используются для карт Западного и Восточного полушарий? Как определены границы этих полушарий?
- 8.** Какие преимущества отображения на картах Восточного и Западного полушарий пространства, выходящего за границы полушария? В чем недостаток такой тенденции отображения полушарий?
- 9.** Какие азимутальные проекции используют для карт Северного и Южного полушарий? Что отображается на этих картах?
- 10.** Что отображается на картах материкового и океанического полушарий? Где расположены центральные точки этих проекций?
- 11.** Какие возможности применения для карт полушарий внешних перспективных азимутальных проекций?
- 12.** Какие могут использоваться проекции для передачи эффекта сферичности полушария?

ГЛАВА 9

ПРОЕКЦИИ КАРТ ОКЕАНОВ

На природу и устойчивость развития территорий всей Земли огромное влияние оказывают глобальные природные процессы, протекающие в океанах, системы океанических и воздушных течений, закономерности в распределении гидрологических, физико-химических и других свойств. Внимание исследователей привлечено к выяснению океанических процессов и их влияний на земной шар, изучению картины распределения фауны и флоры океанов, их биологической структуры и продуктивности. Актуальным является тематическое картографирование океанов и использование наиболее подходящих для этого картографических проекций.

В условиях применения глобальных систем позиционирования для сбора и привязки данных, компьютеризации картографических работ, использования геоинформационных технологий и широкого внедрения электронных карт происходит переосмысление требований, предъявляемых к картографическим проекциям океанов.

Многие требования в новых условиях получают переоценку. Исчезла проблема одновременного составления карт в нескольких проекциях. При использовании карт можно привлекать разные проекции, наиболее подходящие для решения конкретных задач. Поэтому даже влияние искажений в картографических проекциях на точность картометрических работ может быть сведено к минимуму соответствующим выбором проекций или решением этих задач аналитическим путем на земном шаре, эллипсоиде или в трехмерном пространстве.

Теряют смысл требования, обусловленные трудностями графических построений, сложностью нанесения по координатам объектов или снятия их координат с карты. Акцент переносится на наглядность электронных геоизображений и их твердых копий, удобство их зрительного восприятия и визуального анализа. В процессе применения геоинформационных технологий картографирования визуальный анализ предваряет более совершенные и сложные методы анализа карт.

В этой главе рассматриваются картографические проекции, которые могут оказаться полезными при тематическом картографировании океанов.

§ 43. ПРОЕКЦИИ КАРТ МИРОВОГО ОКЕАНА

Мировой океан имеет планетарное значение и характеризуется глобальными размерами. Этот географический объект охватывает огромное пространство, включающее водные массы пяти океанов — Южного, Тихого, Атлантического, Индийского и Северного Ледовитого. Океан — наименее изученная часть географической оболочки. Его картографирование развито слабее, чем, например, картографирование литосферы. Одной из важных картографических задач является выбор надлежащих проекций, дающих цельное и по возможности мало искаженное его изображение. Сформулируем требования, которым должны удовлетворять картографические проекции при тематическом картографировании Мирового океана.

1. Наглядность изображения карты — возможность правильно-го зрительного восприятия пространственных форм, размеров, размещения, распределения, структуры, отношений и взаимосвязей отображенных на карте объектов реальности. Общая конфигурация, форма и соотношения в проекции площадей географических объектов должны дать возможность пользователю карты легко их узнавать на экране компьютера, визуально обнаруживать и выделять соответствующие закономерности.

2. Необходимость отображения полюсов и полярных областей наряду со среднеширотными и экваториальными частями. На карте Мирового океана должны быть показаны все океаны, в том числе Северный Ледовитый и Южный океаны. Полюса должны быть изображены точками, а полярные регионы показаны в перспективе.

3. Чтобы подчеркнуть единство и многообразие Мирового океана, его влияние на различные регионы суши земного шара и передать его глобальные закономерности, необходимо всеобъемлющее, цельное, желательно без разрывов изображение водной поверхности, береговых линий и областей водообмена.

4. Передача особенностей симметрии океанов. В биологической структуре океана существуют экваториальная и меридиональные плоскости симметрии. Экваториальная плоскость является плоскостью широтной симметрии. Симметрично по обе стороны от экватора располагаются зоны специфического температурного режима и биологических особенностей: одна экваториальная зона биологического минимума, две зоны умеренных широт биологического максимума и две полярные зоны биологического минимума. Меридиональная симметрия выражается в закономерном изменении биологических явлений от середин океанов к шельфу. Эта симметрия выражается также в сходстве биологических явлений в разных океанах по обе стороны от меридиональной плоскости, проходящей через середины материков.

5. Жизнь в океанах концентрируется преимущественно вблизи границ с континентами — на шельфе, в районах архипелагов, вблизи границ экваториального и океанического фронтов. Отчетливо прослеживается циркумокеаническая и циркумконтинентальная зональности. Картографическая проекция должна способствовать правильности передачи очертаний циркуляционных систем, формы систем круговоротов и возможности районирования Мирового океана по этим системам.

6. Для передачи целостной картины главных океанов и водобмена между ними проекция должна обладать возможностью дублирования положений соответствующих континентов.

7. В исследованиях Мирового океана нередко прибегают к картометрическим определениям длин береговых и других линий, площадей акваторий, объемов отдельных водоемов. На их основе выполняются анализ экологической обстановки в океане, анализ распределения типов донных осадков по площади, расчеты, например биомассы зоопланктона как для верхнего слоя, так и для всей толщи океана, и др. Для выполнения картометрических исследований необходимо, чтобы проекция обладала малыми искажениями.

Перечисленные требования противоречивы и даже взаимоисключающи. Глобальный охват полярных, среднеширотных и экваториальных зон, отображение океана без разрывов, с одной стороны, и малые искажения — с другой, — требования, неосуществимые в одной проекции. Поэтому для изучения Мирового океана полезны и необходимы *разные* проекции. Современные геоинформационные технологии допускают построение и использование комплекса проекций, в котором каждая способна решить свою задачу.

Для отображения Мирового океана применяют цилиндрические проекции (см. § 35). Эти проекции хорошо передают свойства экваториальной и меридиональной симметрии океанов. В них легко строятся повторяющиеся изображения, например продублированные изображения Северной и Южной Америки. Разные по характеру и величинам искажений цилиндрические проекции можно использовать для картометрических целей. Например, равновеликие проекции пригодны для измерения площадей. Наибольшее распространение получила проекция Меркатора. Однако в проекции Меркатора искажения всех видов очень быстро нарастают по мере приближения к полюсам. При касательном цилиндре уже на параллелях $\pm 60^\circ$ длины преувеличены в 2 раза, а площади — в 4 раза. Полюса на карте вовсе не изображаются.

Уменьшить искажения в высоких широтах можно путем использования составных проекций. Известен ряд вариантов, где в высоких широтах к проекции Меркатора пристроены другие цилиндрические или иные проекции (см. § 21). Однако составные

проекции в компьютерном картографировании неудобны тем, что на стыках разных проекций нарушается аналитическая непрерывность.

Другой путь — использование производных проекций. Можно рекомендовать проекцию Миллера — производную от проекции Меркатора (см. § 35). В высоких широтах в ней искажения меньше, чем в проекции Меркатора. Поляс, как и в любых цилиндрических проекциях, изображается прямой, по длине равной экватору. Чем ближе к экватору, тем больше проекция Миллера похожа на проекцию Меркатора.

Цилиндрические проекции удобны для картографирования среднеширотных и экваториальных регионов. Полярные регионы можно показать в псевдоазимутальных проекциях. Комбинируя уравнения цилиндрических и псевдоазимутальных проекций, можно создать новую, пригодную для карт Мирового океана, проекцию (см. § 27).

Для отображения Мирового океана могут использоваться и псевдоцилиндрические проекции. В этих проекциях сохраняется широтная симметрия относительно экватора, однако симметрия относительно меридиональных плоскостей передается хуже, чем в цилиндрических проекциях. В них также легко строятся повторяющиеся изображения континентов. Они удобны для отображения главных океанов — Атлантического, Тихого и Индийского. Южный и особенно Северный Ледовитый океаны передаются значительно хуже. Равновеликие псевдоцилиндрические проекции, например проекцию Мольвейде, можно использовать для определения площадей. Из произвольных проекций, наиболее подходящих для карт Мирового океана, отметим псевдоцилиндрические проекции Гинзбурга, Каврайского и Робинсона (см. § 36).

Равноугольная проекция Спилгауза приведена на рис. 142. В 1942 г. А. Спилгауз (A. Spilhaus) предложил ее для карт Мирового океана. В проекции все океаны выстроены по вертикали. Внизу расположен Тихий океан. В центре карты — Антарктида и Южный океан. Над ними Индийский и Атлантический океаны. В самом верху карты находится Северный Ледовитый океан. Проекция удобна для отображения циркуляционных систем. Она использовалась для построения карт океанических течений. Однако в этой проекции не сохраняются свойства экваториальной и меридиональной симметрии.

Для карт Мирового океана используются также поликонические проекции ЦНИИГАиК, предназначенные для карт мира. Однако в них ущербно отображаются Южный и особенно Северный Ледовитый океаны. Поэтому такие карты сопровождаются врезками с изображением Арктики в нормальной азимутальной проекции.

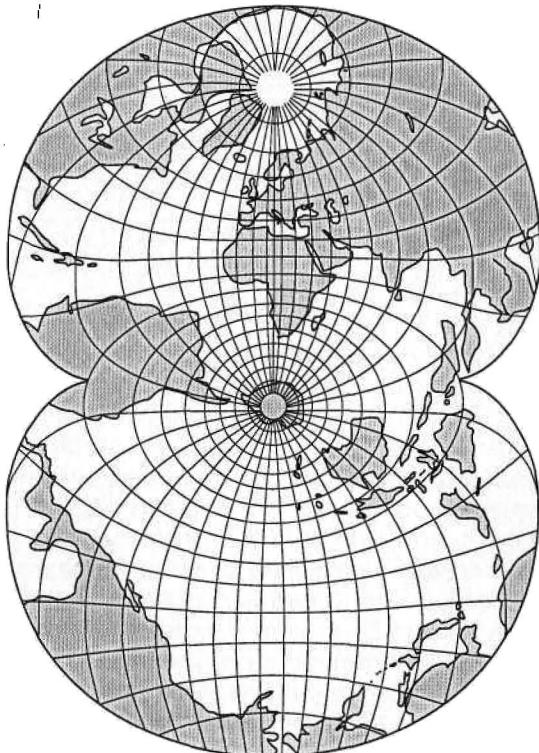


Рис. 142. Равноугольная проекция для карт Мирового океана (August's Conformal Projection of the Sphere on a Two-Cusped Epicycloid. <http://www.hypermaths.org/quadrabloc/maps/mapint.htm>)

Наиболее полно первым шести требованиям удовлетворяет произвольная эллиптическая проекция Л. К. Затонского (рис. 143)¹. В этой проекции в конце XX в. в масштабе 1 : 160 000 000 были составлены карта распределения в Мировом океане живого вещества, карта распределения продукции фитомассы и карта донных отложений Мирового океана. Эти карты систематизировали сведения о Мировом океане как единой и целостной материальной системе, как части географической оболочки Земли — биосфера. Благодаря этим картам проекция сыграла важную роль в изучении общих законов распределения жизни в океанах и функционирования экологических систем.

¹ Затонский Л. К. Картографическая сетка в произвольной проекции для карты мира // Тр. Ин-та океанологии АН СССР, 1958. — Спецвыпуск 1. — С. 38—41.

Затонский Л. К. Произвольная составная эллиптическая проекция для карт мира // Тр. Ин-та океанологии АН СССР, 1962. — Т. LV. — С. 173—184.

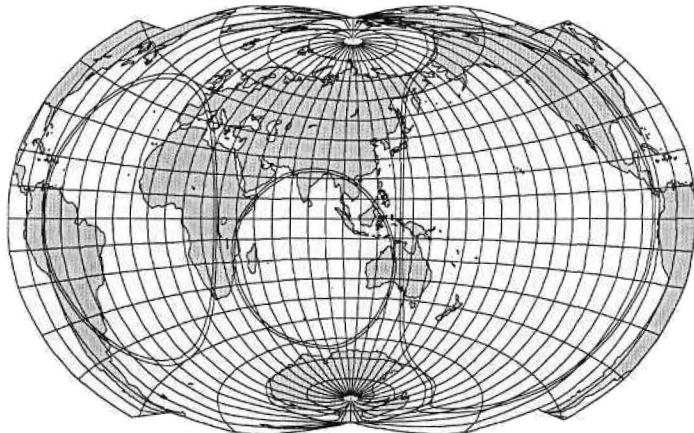


Рис. 143. Проекция Затонского с фигурами искажений основных океанов (долгота среднего меридиана $\lambda_0 = 105^\circ$)

Проекция Затонского построена для земного шара. Она составлена по эскизу картографической сетки. Средний меридиан и экватор — взаимно перпендикулярные линии. Точка их пересечения — центральная точка проекции, начало координат. Проекция симметрична относительно среднего меридиана и экватора. Частный масштаб длин по среднему меридиану равен 1,135. Экватор развертывается без искажений.

Параллели изображаются эллипсами. Центры этих эллипсов располагаются на продолжении осевого меридиана на различных расстояниях от начала координат так, чтобы создавалось впечатление перспективности в изображении полярных районов. Соотношения между полуосами эллипсов параллелей были определены эмпирически по эскизу.

В отношении меридианов каждая четверть проекции разбита на четыре области. Первая область содержит меридианы в диапазоне долгот от 0 до 90° . Все меридианы этого диапазона являются дугами эллипсов, проходящих через географический полюс и соответствующую их долготе точку на экваторе, который, как отмечалось, изображается без искажений. Горизонтальная полуось меридианного эллипса долготы 90° равна четверти дуги экватора. Вершина этого эллипса находится в географическом полюсе, а его центр — в центральной точке проекции. Горизонтальные полуоси всех меридианных эллипсов этого диапазона одинаковы.

Вторая область содержит все меридианы с долготами выше 90° , включая перекрытия на карте. Эти меридианы также изображаются дугами эллипсов. Меридианы пересекают экватор в точках, соответствующих их долготе. Размеры полуосей эллипсов и их ориентировка изменяются с изменением долготы. Линии сетки тре-

тьей и четвертой областей строятся с таким расчетом, чтобы обеспечить сопряжение соответствующих меридиановых линий и представить перспективное изображение полярных районов. Изображения на карте полярных регионов хорошо согласуются с географическим представлением о них, что позволяет избежать разрывов или растянутости изображений. Непосредственная связь частей земной поверхности разных широт позволяет наглядно отобразить на карте географическое распространение любых явлений планетарного характера.

Координаты текущих точек проекции получают из совместного решения соответствующих уравнений параллели и меридiana. По этой причине у проекции довольно неудобный алгоритм расчета картографической сетки. Поэтому сетка на рис. 143 строилась способом квадратичной интерполяции функции двух переменных. Интерполяция велась по координатам узловых точек, расположенных через 10° по широте и 10° по долготе.

Проекция Затонского для целостного отображения Мирового океана с включением Северного Ледовитого и Южного океанов и с повторяющимися частями континентов является одной из лучших. В компоновке, когда Индийский океан расположен в центральной части карты, хорошо видны моря Индонезии, очень важные для глобального водообмена. Недостаток проекции — в ней несколько нарушена западно-восточная меридиональная симметрия океанов.

По характеру искажений проекция Затонского произвольная, она расположена между равновеликими и равнопромежуточными проекциями (угол классификации около 60°). Представление о величинах искажений в проекции Затонского можно получить из анализа показателей фигур искажений, отнесенных к регионам Тихого, Атлантического и Индийского океанов (табл. 34). Площади этих фигур на шаре практически соответствуют разме-

Таблица 34
Показатели искажений в проекции Затонского

Океан ($\lambda_0 = 105^{\circ}$)	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Тихий	80	36	78	277
Атлантический	82	46	81	191
Индийский	25	11	16	18

Океан ($\lambda_0 = -52,5^{\circ}$)	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Тихий	76	36	70	258
Атлантический	23	10	17	24
Индийский	87	51	105	142

рам площадей упомянутых океанов. Величины искажений отдельных океанов зависят от выбора долготы среднего меридиана карты. Этим определяется месторасположение океанов в проекции. В центральной части проекции искажения умеренные. В боковых (западной и восточной) частях искажения большие и очень большие искажения форм кругов. Поэтому с картометрической точки зрения проекцию можно использовать лишь для выполнения приближенных оценочных работ.

Проекции с разрывами. В целом на картах Мирового океана искажения площадей, длин и форм большие. Их можно умень-

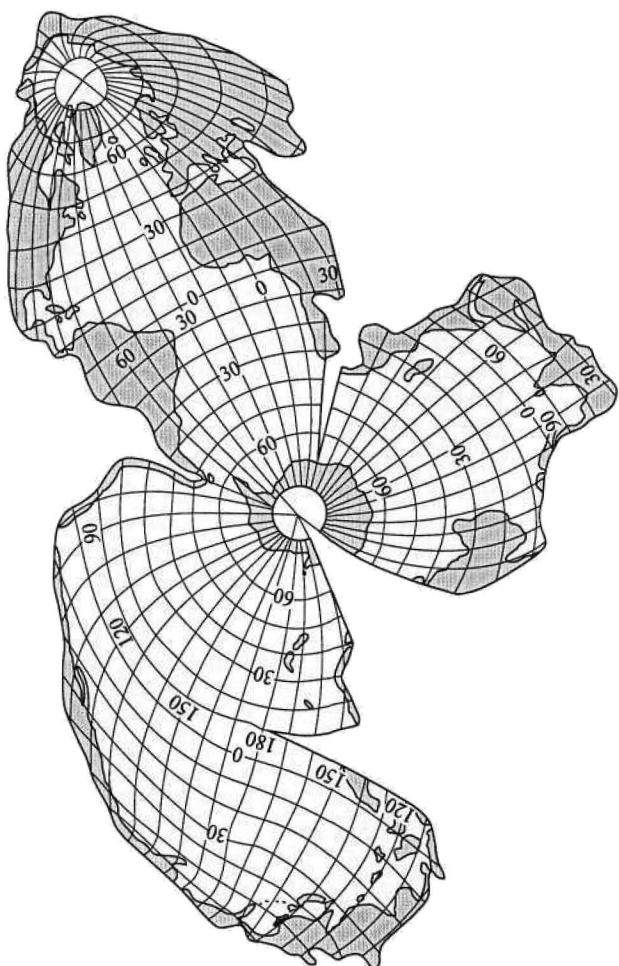


Рис. 144. Проекция Муревского с разрывами по водоразделам материков, предназначенная для карт Мирового океана

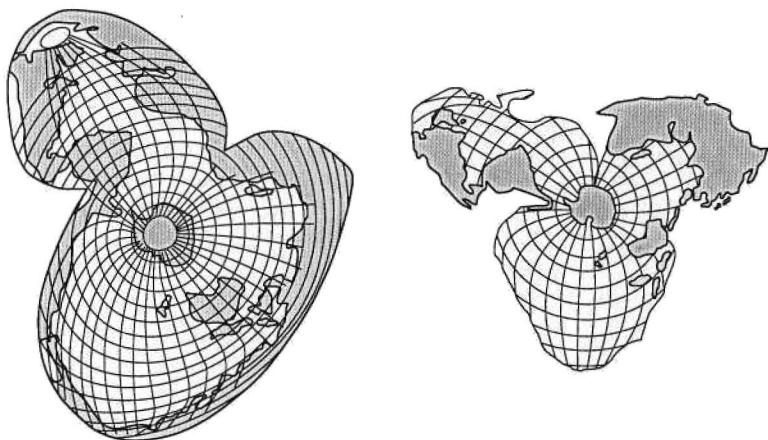


Рис. 145. Проекции с разрывами для карт Мирового океана (August's Conformal Projection of the Sphere on a Two-Cusped Epicycloid. <http://www.hypermaths.org/quadrilob/maps/mapint.htm>)

шить, применив проекции с разрывами по водоразделам на материках.

В § 21 упоминалась составная с разрывами по материкам псевдоцилиндрическая проекция *Мольвейде* (см. рис. 55).

На рис. 144 представлена специально разработанная для карт Мирового океана *проекция Муревского*¹. В центре проекции находится Антарктида. Ее окружает Южный океан. От Южного океана ответвляются Тихий, Индийский и Атлантический океаны. Северный Ледовитый океан составляет одно целое с Атлантическим океаном. Разрывы на карте проведены по материковым водоразделам. Проекция может быть использована для решения задач морской геоморфологии, геологии, океанографии. Она пригодна и для картометрических целей.

На рис. 145 с идентичными разрывами приведены проекции для карт Мирового океана, представленные в сети Интернет.

§ 44. ПРОЕКЦИИ КАРТ ТРЕХ ОКЕАНОВ — ТИХОГО, АТЛАНТИЧЕСКОГО И ИНДИЙСКОГО

В ряде случаев требуются карты, когда наиболее важными являются только три основных океана: Тихий, Атлантический и Индийский. В Атласе для выбора картографических проекций

¹ Муревский В. О. О новой равновеликой проекции для карт Мирового океана: В кн.: Колебания уровня Мирового океана и вопросы морской геоморфологии. — М.: Наука, 1975.

(1957) для этого случая предусмотрены две проекции — цилиндрическая Меркатора и псевдоцилиндрическая эллиптическая Каврайского. Увеличим этот список.

Из нормальных цилиндрических кроме проекции Меркатора рассмотрим и проекцию Миллера. Искажения в этих проекциях зависят от широт главных параллелей, размеров и широтного положения географических объектов. Как известно, в нормальных цилиндрических проекциях изоколы совпадают с параллелями. В случае цилиндра, касательного к экватору, искажения нарастают по направлениям от экватора к полюсам. В случае секущего цилиндра часть изображения шара или эллипсоида, находящаяся между главными параллелями, преуменьшена, а части вне главных параллелей — преувеличены и тем более, чем они ближе к полюсам.

Эти выводы относятся к локальным искажениям, а также к сравнительно малым территориям. Построим на земном шаре круги с зенитным расстоянием 10° . Радиус этого круга на земном шаре составляет 1112 км. Территория сравнительно небольшая.

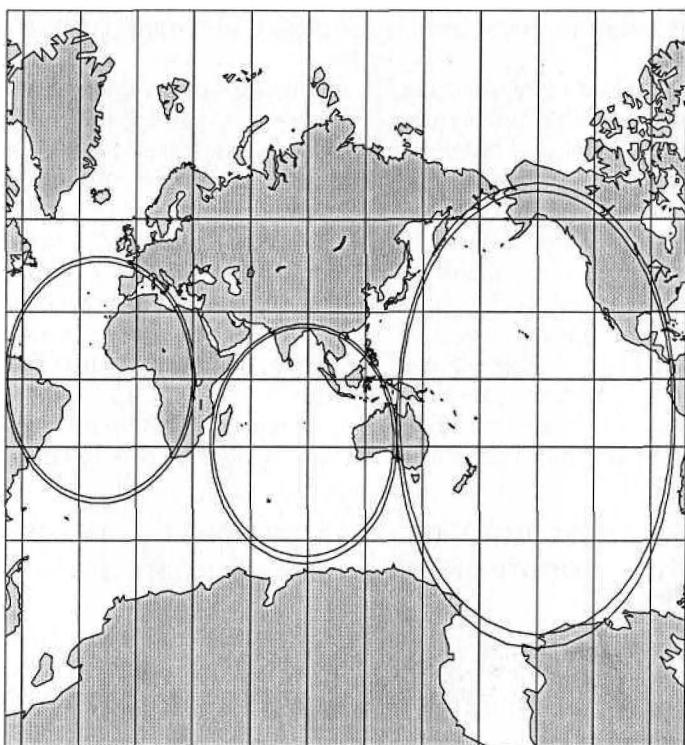


Рис. 146. Проекция Меркатора с фигурами искажений для карт Атлантического, Индийского и Тихого океанов

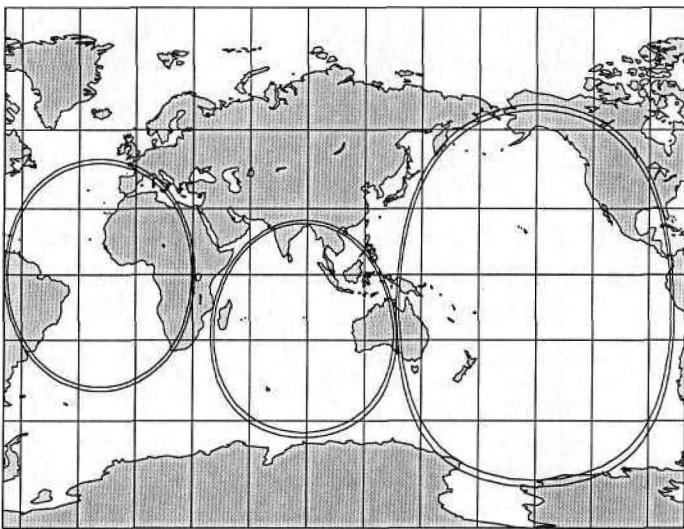


Рис. 147. Проекция Миллера с фигурами искажений для карт Атлантического, Индийского и Тихого океанов

Отобразим эти круги в проекциях Миллера и Меркатора так, чтобы их центральные точки располагались на широтах 0, 60 и 70°, и сопоставим искажения в этих двух проекциях. Оказалось, что при широте центра круга 0 искажения длин и площадей в обеих проекциях одинаковы, а форм — практически одинаковы. При широтах центров 60 и 70° искажения площадей в проекции Меркатора в 2 с лишним раза, а длин в 1,5 с лишним раза больше, чем в проекции Миллера. Что касается искажения форм, то картина противоположная — в проекции Миллера искажения в 20 раз больше, чем в проекции Меркатора.

С увеличением размеров территорий и в зависимости от широт главных параллелей картина искажений несколько меняется в пользу то одной, то другой проекции. На рис. 146 приведена карта в проекции Меркатора, а на рис. 147 — в проекции Миллера. В них отображены фигуры искажений для Атлантического, Индийского и Тихого океанов. В табл. 35 приведены показатели их искажений для двух случаев, когда широты главных параллелей равны 0 и $\pm 45^\circ$. При касательном цилиндре проекция Миллера по всем показателям искажений имеет явные преимущества перед проекцией Меркатора. При секущем цилиндре картина несколько иная: у проекции Меркатора небольшое преимущество по искажениям площадей и длин, но в проекции Миллера почти в два раза меньше искажения форм.

Псевдоцилиндрические проекции целесообразно применять для цельного изображения на картах Тихого, Атлантического и Ин-

Показатели искажений в проекциях Меркатора и Миллера

Океан ($\phi_0 = 0^\circ$)	Искажения, %, Меркатор/Миллер			
	площадей	длин	формы	формы круга
Тихий	77/52	25/15	68/31	50/27
Атлантический	24/13	9/6	16/9	16/9
Индийский	42/31	19/13	44/24	15/13

Океан ($\phi_0 = \pm 45^\circ$)	Искажения, %, Меркатор/Миллер			
	площадей	длин	формы	формы круга
Тихий	-11/-24	21/22	68/31	50/27
Атлантический	-38/-41	25/26	16/9	16/9
Индийский	-29/-34	22/23	44/24	15/13

дийского океанов в том случае, когда требуется, чтобы экватор и параллели изображались прямыми линиями, но с меньшими искажениями их длин, чем в цилиндрических проекциях. Ограничимся псевдоцилиндрическими проекциями, в которых полюса показываются полярными линиями. Для отображения упомянутых океанов могут быть использованы проекции Гинзбурга, синусоидальная с малыми искажениями площадей Урмаева, эллиптические Каврайского и Робинсона. Эти проекции уже были рассмотрены в § 36 применительно к мировым картам. Применительно к упомянутым океанам эти проекции с соответствующими фигурами искажений приведены на рис. 148—151. На всех кар-

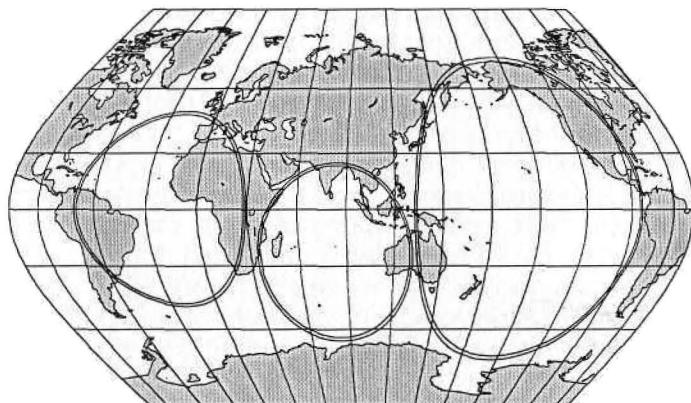


Рис. 148. Проекция Гинзбурга с фигурами искажений для карт Атлантического, Индийского и Тихого океанов



Рис. 149. Эллиптическая проекция Каврайского с фигурами искажений для карт Атлантического, Индийского и Тихого океанов

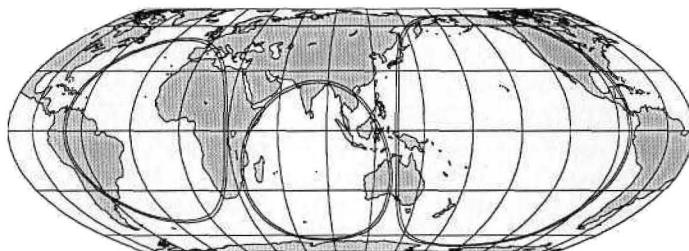


Рис. 150. Синусоидальная с малыми искажениями площадей псевдоцилиндрическая проекция Урмадея с фигурами искажений для карт Атлантического, Индийского и Тихого океанов

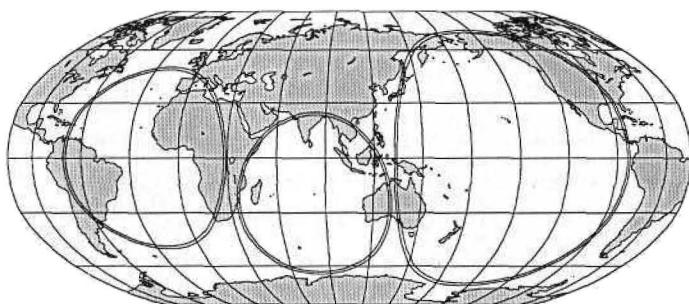


Рис. 151. Эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция Робинсона с фигурами искажений для карт Атлантического, Индийского и Тихого океанов

тах долгота среднего меридиана 105° . Показатели искажений указаны в табл. 36—38.

Наименьшие искажения в отношении Атлантического океана в проекции Гинзбурга, Индийского океана — в проекции Кав-

Таблица 36

**Показатели искажений Атлантического океана
в псевдоцилиндрических проекциях**

Проекция	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Гинзбурга	3	9	28	72
Каврайского	-7	10	27	68
Урмаева	-5	13	46	145
Робинсона	-13	12	26	69

Таблица 37

**Показатели искажений Индийского океана
в псевдоцилиндрических проекциях**

Проекция	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Гинзбурга	4	8	29	24
Каврайского	-4	6	15	22
Урмаева	-6	10	34	33
Робинсона	-10	8	13	18

Таблица 38

**Показатели искажений Тихого океана
в псевдоцилиндрических проекциях**

Проекция	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Гинзбурга	8	14	49	105
Каврайского	1	11	33	90
Урмаева	-8	14	45	61
Робинсона	-7	13	33	31

райского, а Тихого океана — в проекциях Робинсона и Каврайского.

Рассмотренные нормальные цилиндрические и псевдоцилиндрические проекции позволяют без снижения качества расширять компоновку карты на запад и восток.

Иногда основные карты в проекции Меркатора дополняют врезками карт Северного Ледовитого и Южного океанов, составленных в азимутальной стереографической проекции, что дает определенное представление о Мировом океане в целом.

§ 45. ПРОЕКЦИИ КАРТ ТИХОГО ОКЕАНА

Карты Тихого океана большей частью строят в равновеликих азимутальных, псевдоазимутальных и в равновеликих или близких к ним по характеру искажений псевдоцилиндрических проекциях. Ниже рассмотрены эти проекции.

Для характеристики искажений проекций на земном шаре построен круг. Во всех случаях использован круг одного радиуса, площадь которого составляет 178,3 млн км², что практически соответствует площади Тихого океана (площадь океана равна 178,7 млн км²). Радиус круга по зенитному расстоянию 72,5°, координаты центральной точки $\phi_0 = -10^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$.

Показатели региональных искажений рассмотренных проекций сведены в табл. 39.

Азимутальная равновеликая проекция. Эта проекция является основной для карт Тихого океана. На рис. 152 в косой равновеликой азимутальной проекции изображен Тихий океан вместе с фигурой искажений.

Псевдоазимутальные проекции. Используя псевдоазимутальные проекции, можно показать на одной карте вместе с Тихим океаном и Северный Ледовитый океан (рис. 153). Проекция на акваторию океана по характеру искажений практически является равнопромежуточной (угол классификации $\alpha = 48^\circ$).

Таблица 39

Показатели искажений в проекциях для карт Тихого океана

Проекция	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Азимутальная равновеликая	0	6,6	2,9	0,3
Псевдоазимутальная (с Арктикой)	10,6	4,5	14,2	11,8
Псевдоазимутальная (с Арктикой и Антарктикой)	8,0	3,1	3,1	0,9
Псевдоцилиндрическая Урмаева		10,3	28,6	12,3
Псевдоцилиндрическая Мольвейде	0	7,5	14,0	9,0
Псевдоцилиндрическая Робинсона	-6,1	10,2	10,7	17,6
Равноугольная Лагранжа	-8,4	10,5	2,7	2,5

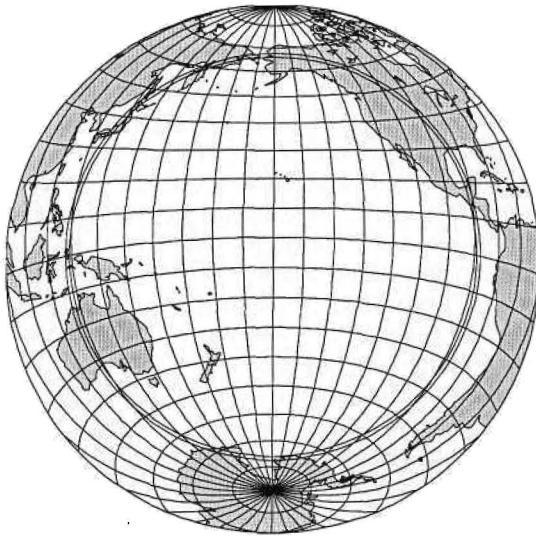


Рис. 152. Тихий океан с фигурой искажений в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = -10^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$)

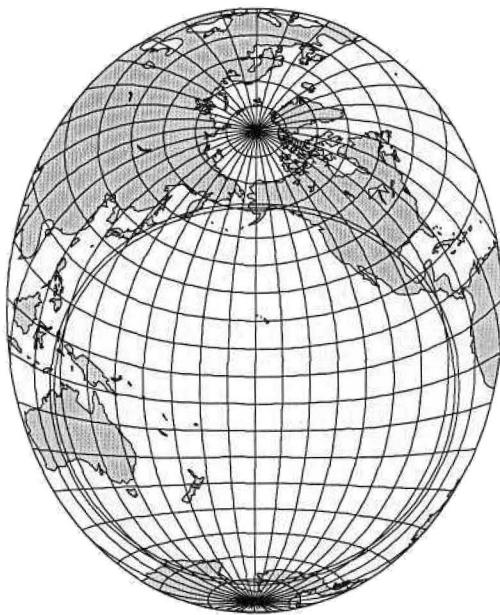


Рис. 153. Тихий и Северный Ледовитый океаны в псевдоазимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 25^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$; $Z_{\max} = 120^\circ$)

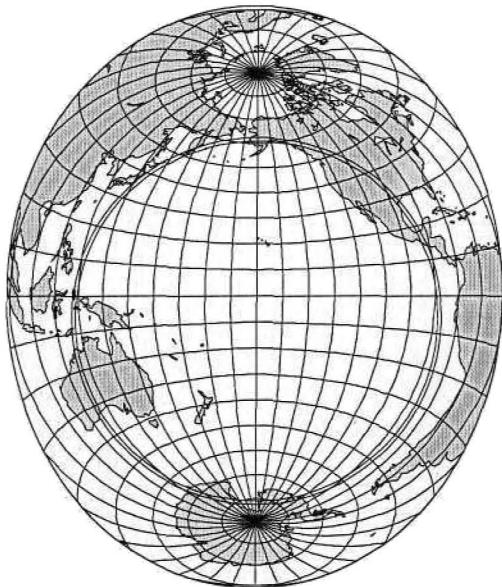


Рис. 154. Тихий океан с Северным Ледовитым океаном, Антарктидой и Южным океаном в псевдоазимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$)

Уравнения проекции имеют вид:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\delta = \alpha - 0,1 \left(\frac{Z}{Z_{\max}} \right) \sin(2\alpha); \quad \rho = 3R \sin(Z/3).$$

На рис. 154 представлен макет карты, где к изображениям Тихого и Северного Ледовитого океанов добавлены Антарктида и часть Южного океана. Теперь на карте видны оба полюса — Северный и Южный. По характеру искажений проекция находится между равнопромежуточными и равноугольными.

Псевдоцилиндрические проекции. Карты Тихого океана строят также в псевдоцилиндрических проекциях. В Атласе для выбора картографических проекций (1957) рекомендуется использовать псевдоцилиндрические проекции Урмаева: синусоидальную равновеликую и синусоидальную с небольшими искажениями площадей.

На рис. 155 приведена карта на акваторию океана в псевдоцилиндрической синусоидальной с небольшими искажениями площадей проекции Урмаева. Средний меридиан имеет долготу -160° . В пределах океана локальные искажения площадей изменяются от 0 на экваторе до примерно 30 % (на приполярных окраинах), а максимальные искажения углов — от 14,9 (на экваторе) до 50° (на юге и севере океана).

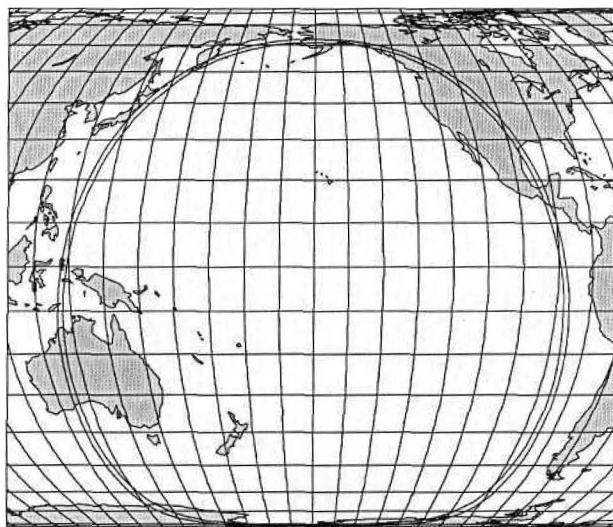


Рис. 155. Тихий океан в псевдоцилиндрической синусоидальной с небольшими искажениями площадей проекции Урмадева (координаты центральной точки $\phi_0 = -10^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$)

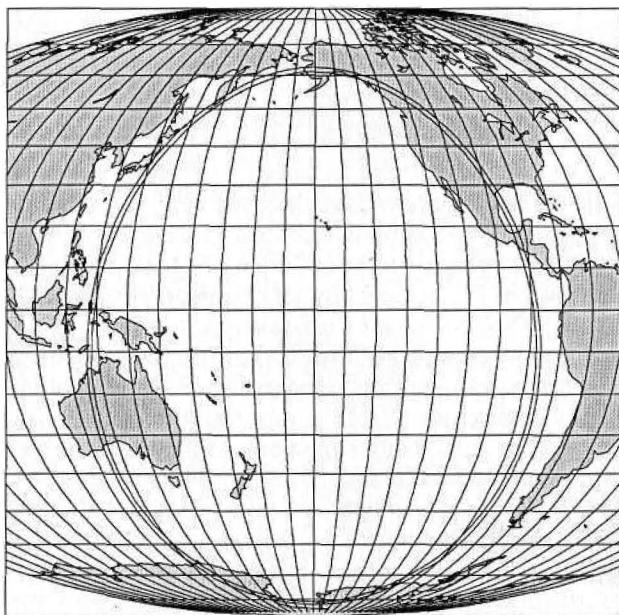


Рис. 156. Тихий океан в равновеликой псевдоцилиндрической эллиптической проекции Мольвейде (координаты центральной точки $\phi_0 = -10^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$)

В связи с использованием в геоинформационном картографировании иностранных программных пакетов в России получили распространение псевдоцилиндрические проекции Мольвейде и Робинсона. Изображения Тихого океана в этих проекциях даны на рис. 156, 157.

Рассмотренные псевдоцилиндрические проекции можно распространить и на карты совместного отображения Тихого и Индийского океанов. Для этого долготу среднего меридиана следует принять $+160^\circ$.

Для отображения океанических течений целесообразно использовать равноугольные проекции. На рис. 158 приведена проекция Лагранжа с управляемой изоколой. Центральная точка овальной изоколы имеет координаты $\phi_0 = -10^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$. Ее полуоси соответственно по меридиану и перпендикулярно к нему равны 75 и 80° . Частные масштабы длин и площадей в центральной точке составляют $m_0 = 0,772$; $p_0 = 0,596$. На самой изоколе эти величины имеют значения $m = 1,276$; $p = 1,627$. Поэтому локальные искажения длин изменяются от $-22,8$ (в центре карты) до $+27,6\%$ (на граничащей изоколе). Искажения площадей соответственно изменяются от $-40,4$ до $+62,7\%$.

Как следует из региональных показателей (см. табл. 39), наименьшие искажения в классической равновеликой азимутальной проекции. В этом отношении она является наиболее благоприят-

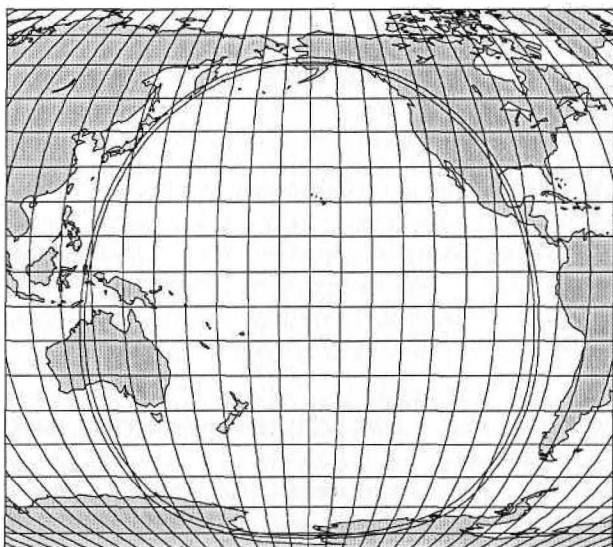


Рис. 157. Тихий океан в произвольной псевдоцилиндрической эллиптической проекции Робинсона (координаты центральной точки $\phi_0 = -10^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$)

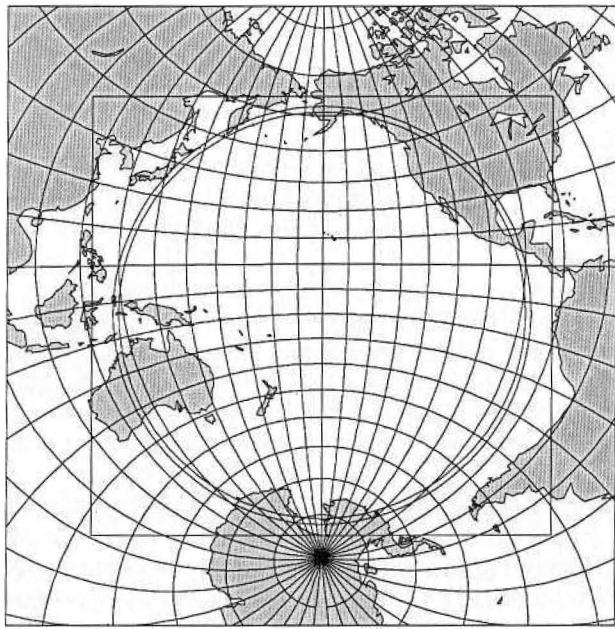


Рис. 158. Тихий океан в равноугольной поликонической проекции Лагранжа с прямоугольником, ограничивающим овальную изоколу, и изображением фигуры искажений (координаты центральной точки $\phi_0 = -10^\circ$, $\lambda_0 = -160^\circ$)

ной. Однако выбор проекции делается не только на основании показателей искажений. Принимается во внимание и множество других требований, учитывающих конкретные обстоятельства решаемых по карте задач. В псевдоазимутальных проекциях искажения несколько больше, но в них помимо Тихого океана отображаются регионы Арктики и Антарктики. В псевдоцилиндрических проекциях параллели изображаются прямыми линиями. В равноугольной проекции Лагранжа правильно передаются азимуты элементарных отрезков линий. Поэтому помимо равновеликой азимутальной следует иметь в виду и другие проекции.

§ 46. ПРОЕКЦИИ КАРТ АТЛАНТИЧЕСКОГО ОКЕАНА

Для карт Атлантического океана применяются в основном те же проекции, что и для карт Тихого океана: равновеликая азимутальная, псевдоазимутальные, псевдоцилиндрические и некоторые другие.

Для оценки и визуализации региональных искажений вновь воспользуемся фигурами искажений. Почти все крупнейшие моря

Таблица 40

Искажения в проекциях для карт Атлантического океана

Проекция	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
Азимутальная равновеликая, поперечная	0	4,7	4,8	2,0
То же, косая	0	4,7	4,8	2,0
Псевдоазимутальная (с Арктикой)	5,5	2,4	4,2	1,5
То же (с Арктикой и Антарктикой)	5,4	2,2	2,7	1,9
Псевдоцилиндрическая равновеликая Урмаева	0	6,1	16,6	10,9
Равноугольная с управляемой изоколой Лагранжа	-7,9	9,1	11,0	7,1

Атлантического океана (Балтийское, Северное, Средиземное, Черное, Карибское и др.) и крупные заливы (Бискайский, Гвинейский) находятся в Северном полушарии. Поэтому фигуры искажений главной частью переместим в Северное полушарие, взяв радиус круга по зенитному расстоянию 60° и приняв координаты его центральной точки $\phi_0 = 10^\circ$, $\lambda_0 = -30^\circ$. Значения показателей региональных искажений сведены в табл. 40. Для визуализации искажений в узлах картографической сетки построены небольших размеров фигуры искажений. На шаре они все правильные одного размера круги. Поэтому, визуально сравнивая между собой формы и размеры их изображений в проекции, можно составить себе представление о распределении искажений по всему полулу карты.

Поперечная равновеликая азимутальная проекция (рис. 159) — одна из важнейших. Максимальные искажения углов при зенитных расстояниях 60° на восточных и западных окраинах океана достигают 16° . При зенитных расстояниях 90° на севере и юге карты в районе полюсов приближаются к 39° .

Косая равновеликая азимутальная проекция используется в некоторых атласах. В этом случае к Атлантическому океану добавляют регион Арктики с изображением Северного Ледовитого океана. На рис. 160 приведен макет такой карты с координатами центральной точки проекции $\phi_0 = 20^\circ$, $\lambda_0 = -30^\circ$.

Косая псевдоазимутальная проекция. На рис. 161 дан макет карты Атлантического океана с Северным Ледовитым океаном в такой проекции. Координаты центральной точки проекции $\phi_0 = 25^\circ$, $\lambda_0 = -30^\circ$. Параметры проекции: $q = 1$; $k = 2$; $C = 0,1$. Радиус альму-

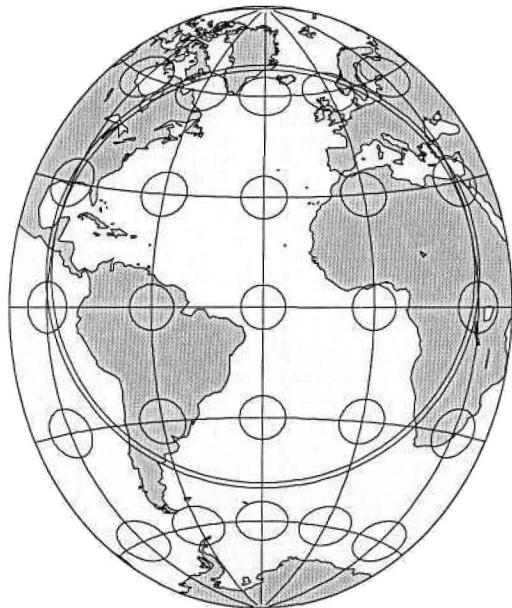


Рис. 159. Атлантический океан с фигурами искажений в равновеликой по-перечной азимутальной проекции (координаты центральной точки $\varphi_0 = 10^\circ$, $\lambda_0 = -30^\circ$)

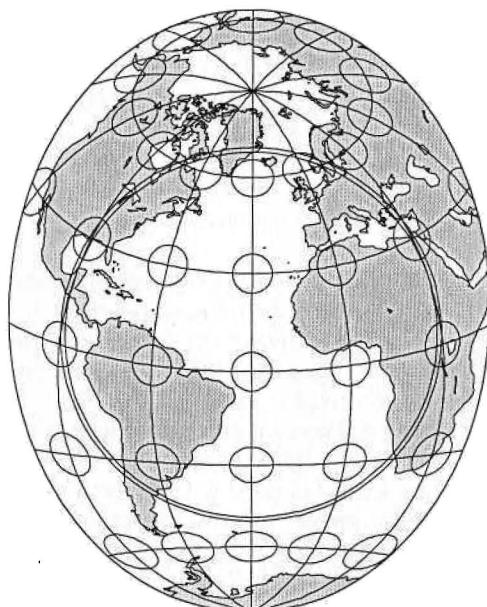


Рис. 160. Атлантический океан совместно с Северным Ледовитым океаном и фигурами искажений в косой равновеликой азимутальной проекции

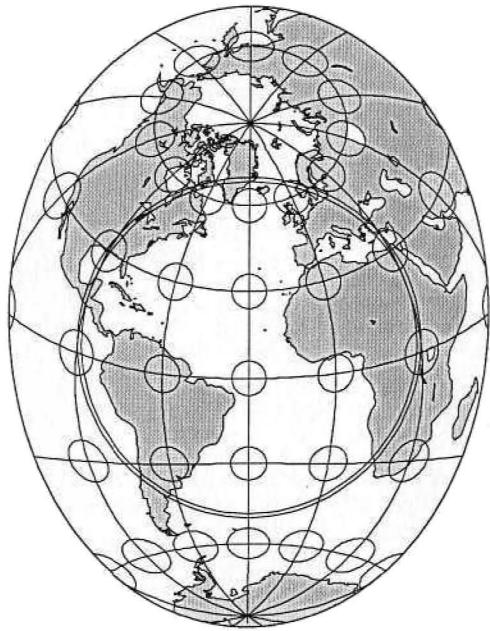


Рис. 161. Атлантический и Северный Ледовитый океаны с фигурами искажений в косой псевдоазимутальной проекции

кантараторов $\rho = 3R \sin(z/3)$. В пределах изображаемой области локальные искажения площадей изменяются от -3% в двух точках на среднем меридиане до $+23\%$ в западной части Мексиканского залива. Значения максимальных искажений углов доходят до 18° . В некоторых атласах карты Атлантического океана построены в указанной проекции.

Поперечная псевдоазимутальная проекция с теми же параметрами приведена на рис. 162. Она расширена в направлениях север — юг, и на карте Атлантический океан дополнен изображениями Арктики и Антарктики. В сущности, на карте одновременно показаны три океана — Атлантический, Северный Ледовитый и в значительной части Южный.

Псевдоцилиндрическая равновеликая синусоидальная проекция Урмаева (рис. 163) также рекомендуется для карт Атлантического океана в Атласе для выбора картографических проекций (1957). В пределах изображения Атлантического океана максимальные искажения углов изменяются от $9,6$ (на экваторе) до примерно 45° (в полярных регионах). Проекция вычисляется по формулам:

$$x = 1,207729R\psi; \quad y = 0,92R\lambda \cos \psi; \quad \sin \psi = 0,9 \sin \phi.$$

В распространенных псевдоцилиндрических проекциях Мольвейде и Робинсона показатели, в частности, региональных искажений

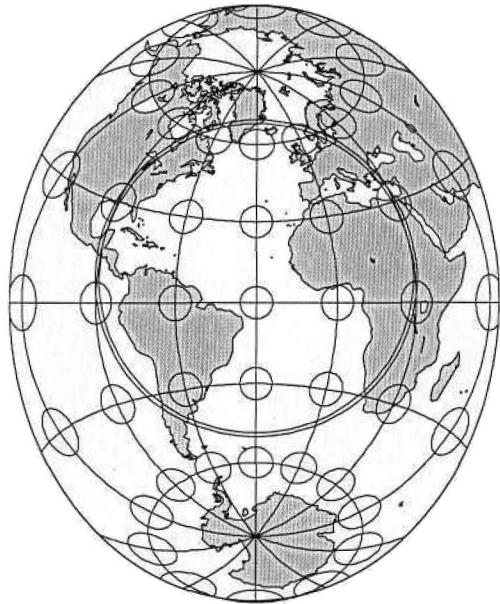


Рис. 162. Атлантический океан с Арктикой и Антарктикой и фигурами искажений в поперечной псевдоазимутальной проекции

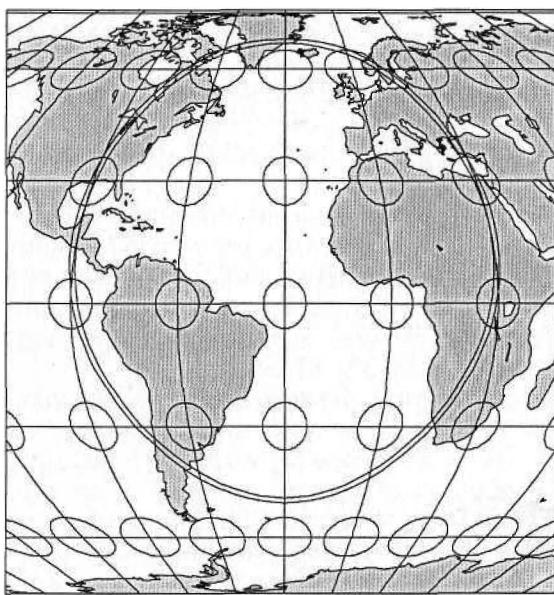


Рис. 163. Атлантический океан с фигурами искажений в равновеликой синусоидальной псевдоцилиндрической проекции Урмадева

жений несколько хуже, чем в рассмотренной проекции Урмаева. Поэтому эти проекции и их характеристики в данном случае не приводятся.

Для всех перечисленных проекций показатели региональных искажений надо признать просто замечательными.

В Атлантическом океане поверхностные течения образуют в субтропических широтах антициклональные круговороты, а в северных умеренных и южных высоких широтах — циклональные круговороты. Северный субтропический круговорот складывается из теплых Северного Пассатного и Гольфстрима течений и холодного Канарского течения. Южный круговорот состоит из теплых Южного Пассатного и Бразильского течений, а также холодных Западных Ветров и Бенгальского течений. На Севере продолжением Гольфстрима является теплое Североатлантическое течение. Из Северного Ледовитого океана к Югу вдоль берегов Северной Америки направляется холодное Лабрадорское течение. В силу этого для отображения течений Атлантического океана важны и равноугольные проекции.

Равноугольная с управляемыми изоколами проекция Лагранжа показана на рис. 164. Центр граничащей изоколы данной проекции помещен в точку с координатами $\phi_0 = 0^\circ$, $\lambda_0 = -30^\circ$. Полуоси овальной изоколы выбраны так, чтобы наиболее правильно ото-

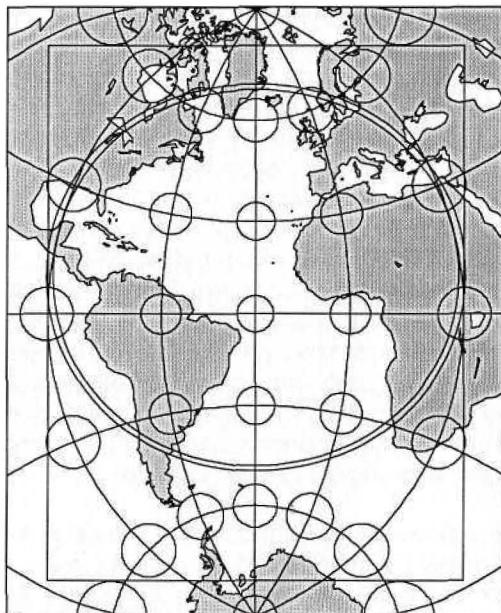


Рис. 164. Атлантический океан в равноугольной проекции Лагранжа

бразить океан и окружающее его пространство. Получось a , направленная по меридиану долготы -30° , равна 80° , а полуось b , перпендикулярная этому меридиану, равна 60° . Параметры проекции: $k = 9286,34$ км; $\alpha = 1,131\,371$; $\beta = 1$. Показатели локальных искажений: частный масштаб длин и частный масштаб площади в центре карты $m_0 = 0,825$ и $p_0 = 0,680$, на граничащей изоколе $m = 1,067$ и $p = 1,138$. Показатели региональных искажений в проекции Лагранжа, как это следует из данных табл. 40, несколько хуже, чем в других рассмотренных проекциях для карт Атлантического океана.

§ 47. ПРОЕКЦИИ КАРТ ИНДИЙСКОГО ОКЕАНА

Контур Индийского океана приблизительно может быть аппроксимирован окружностью. Это означает, что для данного объекта наибольшее значение имеют азимутальные проекции.

В ряде случаев тематического картографирования океан и прилегающие к нему территории рассматриваются как единая система. Изучению подвергаются берега, рельеф дна океана, земная кора под океаном и т. п. Одними из основных факторов являются размеры поверхности океана и поверхности его дна, посредством которых океан связан с атмосферой, берегами, литосферой. Эти размеры имеют большое значение для процессов обмена энергии и вещества в океане. С этой точки зрения, для карт Индийского океана нужны *равновеликие проекции*.

С другой стороны, важными являются системы морских течений, определяющие структуры вод и трансформации вещества и энергии в водах океана. В Индийском океане имеются три или четыре, в зависимости от сезона, крупномасштабных круговорота. Круговороты простираются от берега до берега и занимают целую широтную зону. В северной части Индийского океана, окруженно-го со всех сторон сушей, наблюдается так называемая циркумконтинентальная зональность, влияющая на распределение продукции океана. Здесь развита муссонная циркуляция вод. Смена северо-восточного зимнего муссона на летний юго-западный муссон приводит к существенной перестройке систем циркуляции. Все это свидетельствует о том, что для карт Индийского океана определенный интерес могут представлять и *равноугольные проекции*.

Важны также *равнопромежуточные азимутальные проекции* как сохраняющие баланс между влияниями искажений площадей и углов.

Координаты для центральной точки карты в азимутальной проекции можно принять равными $\phi_0 = -20^\circ$, $\lambda_0 = 80^\circ$. С этой точкой можно совместить и центр фигуры искажений. Угловой радиус круга фигуры искажений по зенитному расстоянию следует принять равным 48° .



Рис. 165. Индийский океан с фигурами искажений в равновеликой косой азимутальной проекции

Соответственно этим параметрам на рис. 165 показана карта в *косой равновеликой азимутальной проекции*. Выделенный на карте круг покрывает на земной поверхности площадь, превышающую на 10 % площадь океана. Поскольку проекция азимутальная, в данном случае нет искажений формы круга. Поэтому отсутствуют как искажения площадей, так и искажения форм контуров океана. Одновременно контур фигуры искажений совпадает с изоколой максимального искажения углов 10° . Таким образом, в пределах выделенного круга максимальные искажения углов изменяются от 0 (в центральной точке) до 10° (на выделенной окружности). При визуальном анализе такие искажения могут рассматриваться как допустимые. Локальные искажения длин изменяются от 0 (в центральной точке) до примерно 10 % (на упомянутой изоколе). При этом на изоколе по направлению к центральной точке искажения длин составляют $-8,5\%$, а вдоль изоколы — $+9,8\%$. В среднем длины радиусов выделенного на карте круга искажены на $2,9\%$.

В *азимутальной стереографической проекции*, построенной с идентичными параметрами, нет искажений углов, но искажение площади выделенной фигуры искажений составляет приблизительно 45 %.

В *равнопромежуточной* с идентичными параметрами азимутальной проекции искажения углов достигают $6 - 7^\circ$, а локальные искажения площадей изменяются от 0 до $\approx 15\%$. По-видимому, для карт Индийского океана косую равновеликую азимутальную проекцию следует рассматривать в качестве основной.

§ 48. ПРОЕКЦИИ КАРТ ЮЖНОГО ОКЕАНА

Южным океаном называют прилегающие к Антарктиде южные части Атлантического, Индийского и Тихого океанов. В действительности эти воды образуют единую область Мирового океана с самостоятельными системами океанических и воздушных течений, с общими закономерностями в распределении физико-химических свойств и другими признаками, присущими отдельным океанам. Поэтому эту область иногда выделяют в самостоятельный, Южный океан. Площадь Южного океана примерно равна площади Индийского океана.

Вопрос о выделении Южного океана и его границы имеет сложную историю. На протяжении многолетней истории его изучения, определение географических границ основывалось на различных принципах. Разделение Мирового океана на отдельные океаны было принято еще Географическим обществом в Лондоне (1845). Лондонская классификация предполагала существование пяти океанов. Граница Южного океана условно проводилась по полярному кругу. Во второй четверти прошлого столетия океанологи и геологи предприняли попытки найти естественную границу Южного океана. Границу проводили от параллели 35° ю. ш. по признаку циркуляций воды и атмосферы и до 60° ю. ш. по рельефу дна. Наибольшее внимание океанологов привлекали две возможные границы — по линиям антарктической и субтропической конвергенций. В 1928 и 1939 гг. Международным гидрографическим бюро была опубликована классификация, признающая существование пяти океанов, а в 1953 г. — только четырех, без Южного океана. Причина расхождений во взглядах на число океанов и их границы связана с тем, что общепринятой научной концепции относительно отдельного океана и закономерностей его внутреннего строения не существовало.

Исследования Антарктики в период Международного геофизического года в 1957—1958 гг. и Международного геофизического сотрудничества в 1959—1963 гг. изменили взгляды на динамику, режим и особенности антарктических вод и позволили обосновать выделение Южного океана.

Название *Южный океан* было принято в 1966 г. в советском Атласе Антарктики. В первом издании Атласа Антарктики выделение Южного океана проведено на основании обособленности и самостоятельности физико-географических процессов, протекающих в области Южного полушария. Северная кромка Антарктического циркумполярного течения (течения западных ветров) стала фактической границей Южного океана. Но, учитывая большую сезонную и многолетнюю изменчивость течения и не вполне четкое проявление его северной границы, для обозначения границы Южного океана на картах были принятые локсадромии,

соединяющие характерные острова и мысы материков. Новые границы Южного океана были предложены редколлегией Арктического и Антарктического института нового издания Атласа Антарктики. За северную границу Южного океана принята линия среднего многолетнего положения субтропического фронта (рис. 166). Океаническая Антарктика по новым представлениям есть часть Южного океана, находящаяся между краем Антарктического материка и Антарктического полярного фронта.

В силу географического положения и очертаний Южного океана основными проекциями для его карт являются *нормальные азимутальные проекции*.

В нормальной стереографической проекции искажения площадей на изоколе, совпадающей с южной параллелью -40° и фактически ограничивающей океан, достигают 45 %, а искажения длин превышают 20 %. Искажения всей площади пространства, ограниченного этой параллелью, составляют 22 %.

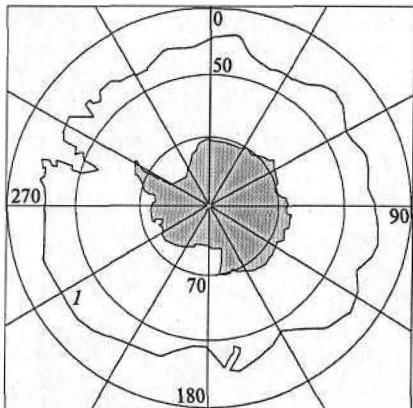


Рис. 166. Южный океан:
I — северная граница океана



Рис. 167. Южный океан с фигурами искажений в косой равновеликой азимутальной проекции ($\phi_0 = -55^{\circ}$, $\lambda_0 = 70^{\circ}$)

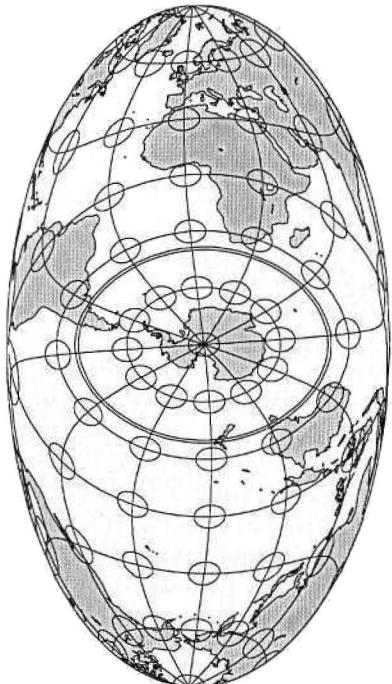


Рис. 168. Южный океан с фигурами искажений в косой равновеликой псевдоцилиндрической проекции Мольвейде ($\phi_0 = 2,5^\circ$, $\lambda_0 = -85^\circ$)

В нормальной равнопромежуточной по меридианам азимутальной проекции на упомянутой изоколе искажения площадей и длин по параллелям составляют примерно по 14 %, а максимальное искажение углов — около 7—8°. Вся площадь внутри этой параллели искажена на 6,5 %.

В нормальной равновеликой проекции на широте -40° искажения длин по меридианам около -10% , по параллели — около $+10\%$, а искажения углов — более 10° .

Таким образом, по величинам искажений наиболее подходящими будут нормальные равновели-

кая и равнопромежуточная азимутальные проекции.

На рис. 167 приведен вариант карты в *косой равновеликой азимутальной* проекции, наглядно показывающий Южный океан в окружении других океанов и материков. В узловых точках картографической сетки проекции построены небольшие фигуры искажений. Отображена также фигура искажений, фактически охватывающая весь Южный океан. Ее центр расположен в Южном полюсе. Радиус по зенитному расстоянию равен 50° . Длины ее радиусов искажены на 6 %, а форма — на 10 %.

Для отображения взаимосвязей Южного океана с другими океанами могут использоваться не только азимутальные проекции. С этой целью на рис. 168 приведен макет обзорной карты в косой равновеликой псевдоцилиндрической проекции Мольвейде. Выделена фигура искажений с центром в Южном полюсе и зенитным расстоянием 50° ; ее радиусы искажены на 6 %, форма — на 18 %, а форма круга — на 17 %.

§ 49. ПРОЕКЦИИ КАРТ СЕВЕРНОГО ЛЕДОВИТОГО ОКЕАНА

В силу географического положения и очертаний Северного Ледовитого океана основными проекциями для его карт также являются *нормальные азимутальные проекции*.

В нормальной стереографической проекции искажения площадей на изоколе, совпадающей с северной параллелью 60° , ограничивающей океан и часть прилегающей к нему суши, достигают 15 %, а искажения длин немногим превышают 7 %. Искажения всей площади пространства, ограниченного этой параллелью, составляют 7 %.

В равнопромежуточной по меридианам азимутальной проекции на упомянутой изоколе искажения площадей и длин по параллелям составляют примерно по 5 %, а максимальное искажение углов — менее 3° . Вся площадь внутри этой параллели искажена на 2,2 %.

В равновеликой проекции на широте 60° искажения длин по меридианам около -3,5 %, по параллели — около +3,5 %, а искажения углов — около 4° .

Таким образом, для Северного Ледовитого океана, с точки зрения величин искажений, наиболее подходящими являются *нормальные равновеликая и равнопромежуточная азимутальные проекции*. Для карт, отображающих разнообразные маршруты, океанические и атмосферные течения, может использоваться нормальная стереографическая проекция (рис. 169). Ее применяют также для серий карт Арктики, входящих в атлас и составляемых в равноугольных проекциях.

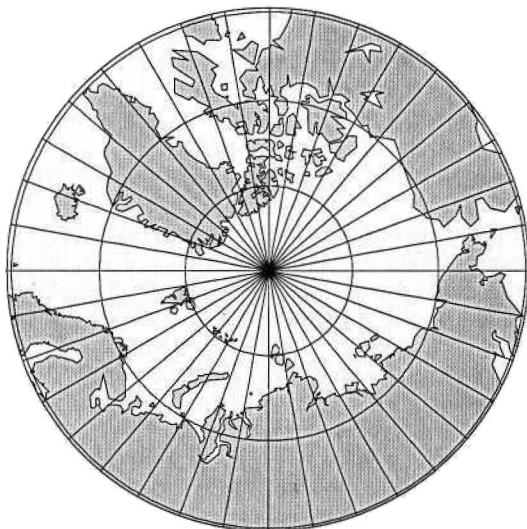


Рис. 169. Северный Ледовитый океан и окружающая суша в нормальной равноугольной азимутальной (стереографической) проекции (долгота среднего меридиана $\lambda_0 = 90^{\circ}$)

Контрольные вопросы

- 1.** Какие возникают трудности с разработкой проекций для карт Мирового океана?
- 2.** Какие предъявляются требования к проекциям карт Мирового океана и как они могут быть реализованы?
- 3.** Почему на карте Мирового океана наряду со среднеширотными и экваториальными частями должны быть показаны полюса и полярные области?
- 4.** Почему на картах Мирового океана важна передача особенностей симметрии океанов? Какие при этом выделяются плоскости симметрии?
- 5.** Какие существуют циркуляционные системы в океанах и в каких проекциях они могут быть правильно переданы?
- 6.** Каковы достоинства и недостатки цилиндрических проекций, используемых для карт Мирового океана?
- 7.** Сопоставьте проекции Меркатора и Миллера с точки зрения возможности их использования для карт Мирового океана.
- 8.** Каковы достоинства и недостатки псевдоцилиндрических проекций, используемых для карт Мирового океана?
- 9.** Для каких карт Мирового океана может быть применена равнотугольная проекция Спилгауз?
- 10.** Для каких карт Мирового океана применялась произвольная эллиптическая проекция Затонского?
- 11.** Как получена и что представляет собой картографическая сетка проекции Затонского?
- 12.** С какими искажениями отображаются в проекции Затонского Атлантический, Индийский и Тихий океаны при разных значениях среднего меридиана на карте?
- 13.** Почему при важности цельного отображения Мирового океана строят его карты в проекциях с разрывами?
- 14.** Назовите известные вам проекции с разрывами для карт океанов, перечислите их достоинства и недостатки.
- 15.** Какие производные проекции могли бы использоваться для карт Мирового океана?
- 16.** Каких классов проекции могут быть использованы для карт совместного отображения Тихого, Атлантического и Индийского океанов?
- 17.** С какими искажениями отображаются Тихий, Атлантический и Индийский океаны в цилиндрических проекциях Меркатора и Миллера?
- 18.** С какими искажениями передаются на картах Тихий, Атлантический и Индийский океаны в псевдоцилиндрических проекциях Гинзбурга, Урмаева, Каврайского и Робинсона?
- 19.** Какие проекции используются для карт Тихого океана?
- 20.** В каких проекциях карты Тихого океана могут быть дополнены также изображениями Арктики и Антарктики?
- 21.** В какой проекции и с какой целью на картах океанов могут быть правильно переданы азимуты элементарных отрезков линий?
- 22.** Каких классов проекции могут быть использованы для карт Атлантического океана?

- 23.** Проекции какого класса имеют наибольшее значение для построения карт Индийского океана?
- 24.** Как выделены границы Южного океана и какие проекции можно использовать для его карт?
- 25.** Какие проекции пригодны для карт Северного Ледовитого океана?
- 26.** Какие азимутальные проекции, с точки зрения величин искажений, являются наиболее подходящими для карт Северного Ледовитого океана?
- 27.** Для каких карт Северного Ледовитого океана применяют нормальную азимутальную стереографическую проекцию?

ГЛАВА 10

ПРОЕКЦИИ КАРТ ЧАСТЕЙ СВЕТА, МАТЕРИКОВ И ИХ ЧАСТЕЙ

Карты материков и частей света чаще всего строят в классических азимутальных проекциях. Реже применяют конические, цилиндрические и некоторые другие проекции.

Обычно при выборе проекций следят за тем, чтобы крайние изоколы приближенно соответствовали схематизированным очертаниям картографируемых территорий. В связи с этим напомним, что изоколы в азимутальных проекциях представляют собой концентрические окружности с центром в середине карты, в нормальных конических проекциях — они дуги концентрических окружностей, совпадающие с параллелями, в цилиндрических проекциях — прямые линии, параллельные экватору или условному экватору.

§ 50. КАРТЫ МАТЕРИКОВ И ЧАСТЕЙ СВЕТА В АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

У материков и стран света сложные очертания береговых линий. Однако, учитывая прилегающие акватории и схематизируя контуры территорий, их конфигурацию можно приблизить к округлым формам. Поэтому полагают, что для карт материков и частей света хорошо подходят азимутальные проекции.

По картам материков и частей света можно изучать многие явления более подробно, чем по картам мира и полушарий. Поэтому в проекциях этих карт искажения должны быть небольшими или умеренными, не оказывающими существенного влияния на правильность визуального анализа или даже картометрических определений. Для большинства карт материков проекции должны позволять оценивать размеры площадей физико-географических объектов — площадей континентов, отдельных регионов, ареалов распространения различных явлений и т. п.

Поэтому в большей степени предпочитают использовать равновеликие и в меньшей — равнопромежуточные азимутальные проекции.

Сопоставим равнопромежуточные и равновеликие азимутальные проекции на примере отображения наиболее крупного географического объекта — континента Евразии.

На рис. 170 приведен макет карты Евразии в *косой равнопромежуточной азимутальной проекции*. На ней построена крайняя изокола, охватывающая практически всю Евразию. Эта изокола определяется зенитным расстоянием 60° .

Обычно для Евразии широта центральной точки проекции принимается $+40^\circ$, а долгота — $85-90^\circ$. Чтобы уменьшить зенитное расстояние крайней изоколы до 60° , пришлось изменить координаты центральной точки, увеличив ее широту до $+45^\circ$ и уменьшив долготу до $+75^\circ$.

Как известно, в азимутальных проекциях минимальные искажения в центре карты. В данном случае проекция построена в касательной плоскости и поэтому в центре карты искажения отсутствуют. Они нарастают к краям карты.

На той же карте в узлах сетки изображены фигуры, которые на земном шаре являются кругами одинакового размера. В пределах изоколы эти фигуры визуально воспринимаются именно как круги, при этом примерно одинакового размера. Только на самой изоколе они приобретают некоторую эллиптичность. За пределами изоколы фигуры превращаются в эллипсы. Это свидетельствует о том, что величины искажений вышли за допускаемые при визуальном анализе пределы.

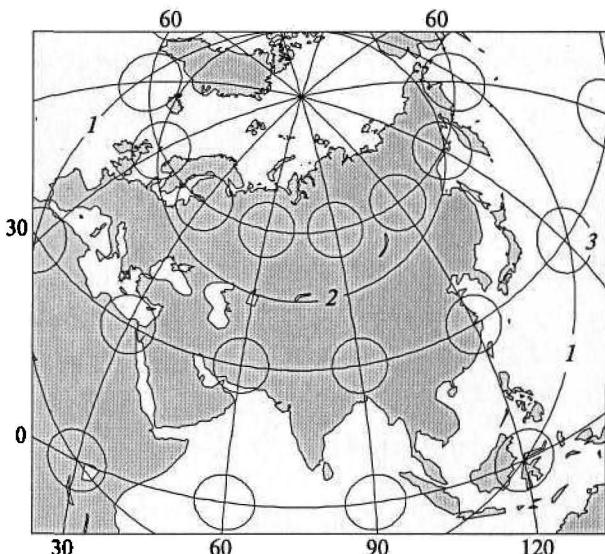


Рис. 170. Евразия в косой равнопромежуточной азимутальной проекции ($\varphi_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 75^\circ$):

1 — крайняя изокола с зенитным расстоянием $Z = 60^\circ$; 2 — изображение в проекции круга с половинным зенитным расстоянием $Z = 30^\circ$; 3 — фигуры искажений в узлах, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

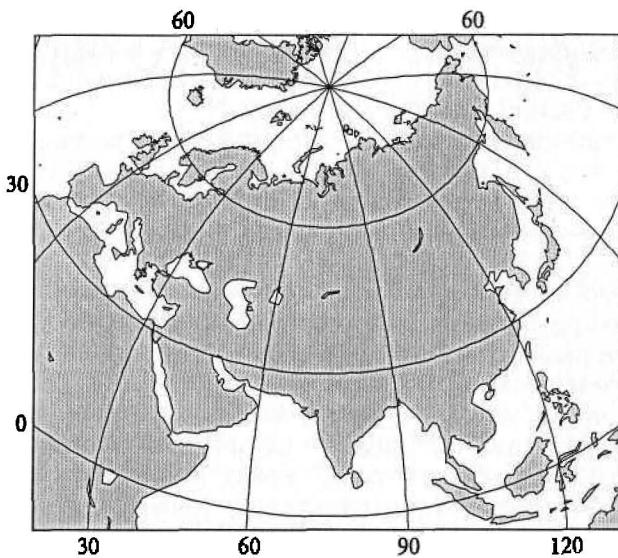


Рис. 171. Евразия в косой равновеликой азимутальной проекции
(координаты центральной точки $\phi_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 75^\circ$)

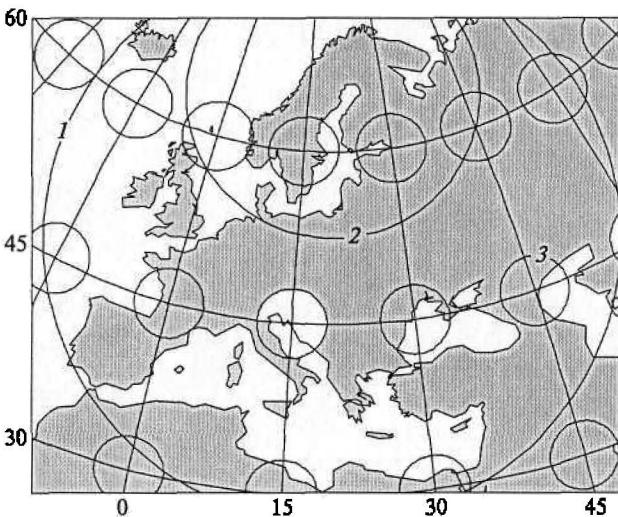


Рис. 172. Европа в косой равновеликой азимутальной проекции
(координаты центральной точки $\phi_0 = 52,5^\circ$, $\lambda_0 = 20^\circ$):

1 — крайняя изокола с зенитным расстоянием $Z = 25^\circ$; 2 — изображение круга $Z = 12,5^\circ$; 3 — фигуры искажений в узлах сетки, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

В равнопромежуточной проекции отсутствуют искажения длин по направлениям от изоколы к центру карты. В данном случае на изоколе длины искажены примерно на 21 %, углы — на 10,9°, площади — на 21 %.

В целом же вся площадь, ограниченная крайней изоколой, искажена на 9,6 %. Это небольшое искажение, и оно находится в допустимых для визуального анализа пределах.

На карте изображен еще один круг, построенный на земном шаре с половинным зенитным расстоянием $Z = 30^\circ$. Он одной стороной касается крайней изоколы, а другой — ее центра. Визуально эта фигура также воспринимается как круг. Этот круг на рисунке расположен в северной части карты, но мог бы находиться на юге, западе или востоке карты, поскольку в азимутальных проекциях пространство симметрично относительно центральной точки.

На рис. 171 приведен макет карты Евразии в косой равновеликой азимутальной проекции. Изображения фигур в узлах сетки (на карте они не приведены) в этой проекции визуально также воспринимаются как круги примерно одинакового размера, и только на изоколе $Z = 60^\circ$ они приобретают эллиптичность. На изоколе по направлению к центру длины искажены на 13 %, вдоль изоколы — на +16 %, а углы — на 16,4°. Поскольку проекция равновеликая, площади не искажены. Фигура искажений с половинным зенитным расстоянием $Z = 30^\circ$ визуально также вос-

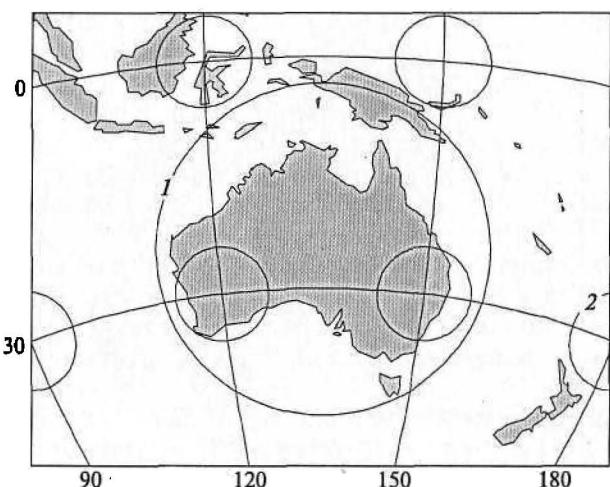


Рис. 173. Австралия в косой равновеликой азимутальной проекции
(координаты центральной точки $\varphi_0 = -25^\circ$, $\lambda_0 = 135^\circ$):

1 — крайняя изокола с зенитным расстоянием $Z = 21,5^\circ$; 2 — фигуры искажений в узлах сетки, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

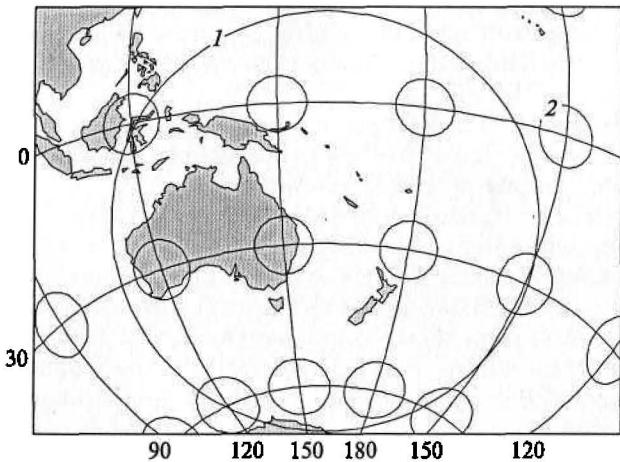


Рис. 174. Австралия и Океания в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = -25^\circ$, $\lambda_0 = 160^\circ$):

1 — крайняя изокола с $Z = 45^\circ$; 2 — фигуры искажений в узлах сетки, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

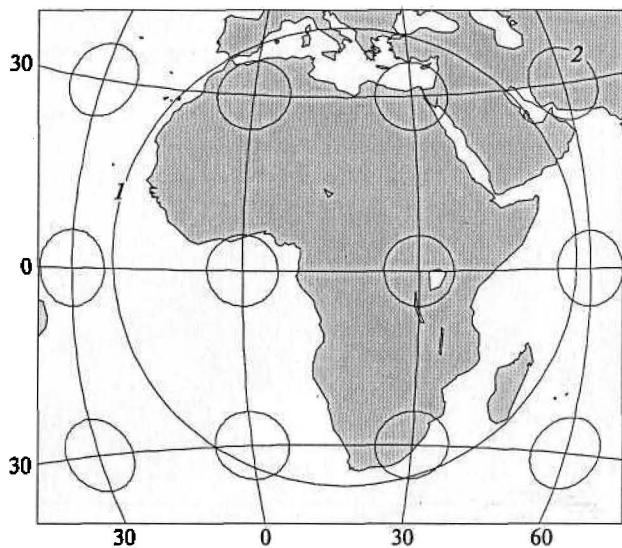


Рис. 175. Африка в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 2,5^\circ$, $\lambda_0 = 17,5^\circ$):

1 — крайняя изокола $Z = 40^\circ$; 2 — фигуры искажений в узлах сетки, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

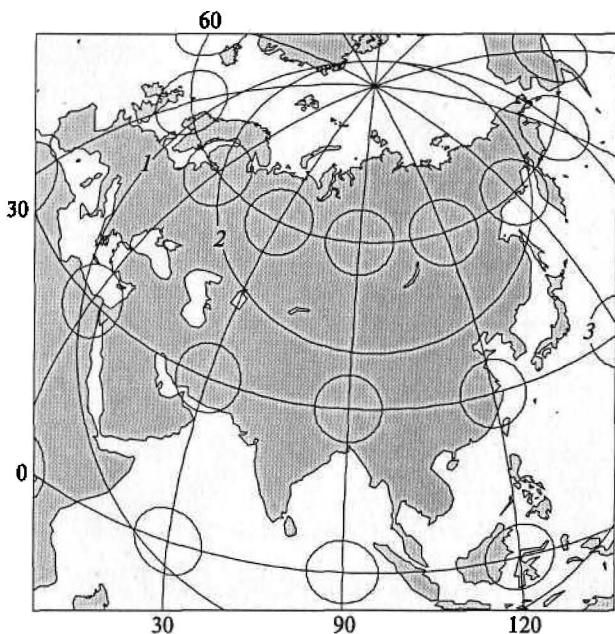


Рис. 176. Азия в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 40^\circ$, $\lambda_0 = 95^\circ$):

1 — крайняя изокола с $Z = 55^\circ$; 2 — изображение круга $Z = 27,5^\circ$; 3 — фигуры искажений в узлах сетки, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

принимается как круг, хотя ее форма изменена примерно на 10 %.

Можно сделать вывод о том, что в целом искажения на картах Евразии, построенных в равновеликой проекции (см. рис. 171), более благоприятны, чем искажения на картах в равнопромежуточной проекции (см. рис. 170).

Этот вывод можно распространить и на проекции карт других материков. Поэтому понятно, почему в большинстве случаев в российских и зарубежных изданиях карты материков и стран света составляли и продолжают составлять в *равновеликой азимутальной проекции*.

На рис. 172—178 в равновеликих азимутальных проекциях приведены макеты карт других материков и стран света. Все проекции даны в косой ориентировке. На картах построены крайние изоколы. Зенитные расстояния крайних изокол подобраны так, чтобы они практически охватывали всю площадь отображаемого географического объекта. На многих картах изображены также круги, соответствующие половинному зенитному расстоянию. В узлах сетки показаны фигуры искажений, являющиеся на земном

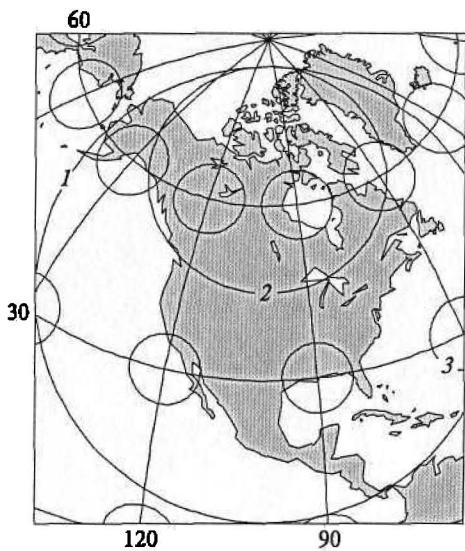


Рис. 177. Северная Америка в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = -100^\circ$):

1 — крайняя изокола $Z = 40^\circ$; 2 — изображение круга $Z = 20^\circ$; 3 — фигуры искажений в узлах сетки, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

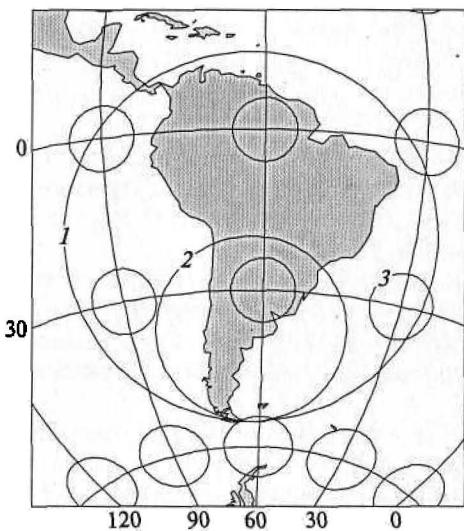


Рис. 178. Южная Америка в косой равновеликой азимутальной проекции (координаты центральной точки $\phi_0 = -20^\circ$, $\lambda_0 = -62,5^\circ$):

1 — крайняя изокола $Z = 35^\circ$; 2 — изображение круга $Z = 17,5^\circ$; 3 — фигуры искажений в узлах сетки, имеющие одинаковые размеры на земном шаре

**Искажения в равновеликой азимутальной проекции
для карт материков и стран света**

Объект, зенитное расстояние крайней изоколы	Искажения на изоколе		
	длин к центру, %	длин по изоколе, %	углов, град
Европа, $Z = 25^\circ$	-2,4	+2,4	2,8
Австралия, $Z = 21,5^\circ$	-1,8	+1,8	2,0
Австралия и Океания, $Z = 45^\circ$	-7,6	+8,2	9,1
Антарктида, $Z = 30^\circ$	-3,4	+3,5	4,0
Юж. Америка, $Z = 35^\circ$	-4,6	+4,9	5,4
Сев. Америка, $Z = 40^\circ$	-6,0	+6,4	7,1
Африка, $Z = 40^\circ$	-6,0	+6,4	7,1
Азия, $Z = 55^\circ$	-11,3	+12,7	13,7
Евразия, $Z = 60^\circ$	-13,4	+15,5	16,4

шаре кругами одинакового размера. Зенитные расстояния изокол и искажения на них указаны в табл. 41.

§ 51. КАРТЫ МАТЕРИКОВ И ЧАСТЕЙ СВЕТА В КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Для изображения Европы и Австралии, наряду с азимутальными, находят применение нормальные конические проекции. Для этих карт в Атласе по выбору картографических проекций (1957) рекомендовано использовать *нормальные равноугольные конические проекции* Каврайского (1934).

Параметры конической проекции определяют форму конуса, на который проектируется земная поверхность. Для территорий, расположенных ближе к полюсам, конусы приплюснутые. На самом полюсе конус превращается в плоскость. По мере движения к экватору он становится все более вытянутым и приближающимся к цилинду. На экваторе конус переходит в цилиндр.

Для конкретной территории конус может быть выбран так, чтобы он касался параллели, проходящей по середине карты. Параллель касания является главной параллелью. Она одновременно принадлежит и конусу, и земному шару или эллипсоиду. На этой параллели искажений нет. Искажения нарастают по мере удаления к северу и югу от главной параллели. Поэтому в конической проекции территории на южных и северных окраинах карты будут изображены в несколько более крупном масштабе, чем в ее середине.

Конус можно углубить в земной шар или эллипсоид так, чтобы он пересекался с ними по двум параллелям, расположенным

севернее и южнее середины карты. В этом случае будут две главные параллели. На них нет искажений. Искажения по модулю будут увеличиваться по мере удаления от главных параллелей. В сторону середины карты они нарастают со знаком минус, а в сторону северных и южных параллелей — со знаком плюс. В середине карты изображения будут преуменьшены, а на северных и южных окраинах карты — преувеличены.

С точки зрения картометрических определений, две главные параллели обладают некоторым преимуществом, так как локальные искажения на карте имеют более равномерное распределение. С точки зрения визуального анализа, эти преимущества теряются, так как перепад искажений и при одной главной параллели, и при двух главных параллелях остается примерно одинаковым, а изображения на северных и южных частях карты будут крупнее, чем в ее середине.

Обычно главные параллели выбирают так, чтобы в пределах листа карты на параллелях минимизировать величины искажений. С этой целью разработаны разные способы выбора параметров конических проекций, которые будут рассмотрены подробнее при выборе конических проекций для карт Российской Федерации. В простейшем случае главные параллели проводят так, чтобы они разделяли на три части диапазон широт между крайними параллелями карты и проходили от крайних параллелей примерно на $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{6}$ части этого диапазона.

Для карты Европы в нормальной равноугольной конической проекции Каврайского определены две главные параллели с широтами +40,5 и +65,6°. В качестве крайних приняты параллели с широтами +35 и +70°. Для сравнительного анализа при этих главных параллелях были построены макеты карт Европы в трех нормальных конических проекциях: равновеликой, равнопромежуточной и равноугольной.

По внешнему виду визуально эти карты практически не различаются. Макет карты в равнопромежуточной проекции приведен на рис. 179, где для визуализации искажений дано изображение круга, построенного на земном шаре так, чтобы он касался выбранных крайних параллелей. Для оценки искажений расположение круга по долготе в конической проекции значения не имеет. Его между двумя заданными параллелями можно встраивать на любых долготах.

Упомянутый круг на шаре во всех трех проекциях визуально воспринимается кругом. В равноугольной проекции его площадь (в сущности, это площадь всей Европы) искажена только на -2,5 %, а форма круга — на +1,8 %. В равновеликой проекции форма этого круга искажена на +3,4 %. В равнопромежуточной проекции искажения его площади и формы соответственно составляют -1,3 и +2,4 %. Это были искажения регионального масштаба.

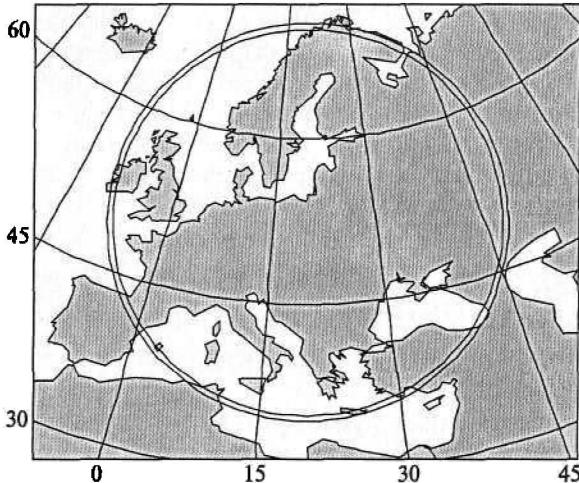


Рис. 179. Европа в нормальной равнопромежуточной конической проекции с изображением фигуры искажений

На рис. 180, 181 приведены графики частных масштабов площадей p и максимальных искажений углов ω для равновеликой, равнопромежуточной и равноугольной конических проекций, построенных в зависимости от широты параллелей. Как видно, в равноугольной проекции перепад искажений площадей около 10 %, а в равновеликой проекции перепад искажений углов около 7°. Наибольшие искажения длин в пределах крайних параллелей колеблются от -2,4 до +2,5 % в равноугольной проекции и от -2,3 до +3,5 % в равновеликой проекции.

Эти расчеты показывают, что для карт Европы подходят любые по характеру искажений нормальные конические проекции



Рис. 180. Частные масштабы площадей в нормальных конических проекциях карт Европы

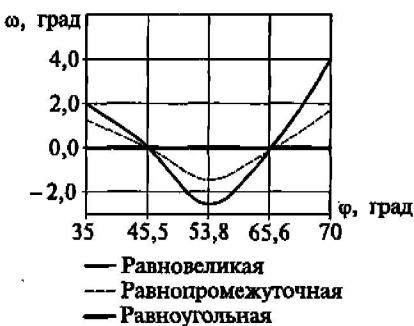


Рис. 181. Максимальные искажения углов в нормальных конических проекциях карт Европы

с соответствующим образом подобранными параметрами. И все же предпочтение может быть отдано уравновешенным по величинам искажений **равнопромежуточным проекциям**.

Перепад широт между крайними параллелями карты Европы составляет 35° , а Австралии — только 24° . Поэтому сделанные относительно проекций карт Европы выводы можно распространить и на карты Австралии.

§ 52. КАРТЫ МАТЕРИКОВ И ЧАСТЕЙ СВЕТА В ПСЕВДОАЗИМУТАЛЬНЫХ И ПОЛИКОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Псевдоазимутальные проекции, ввиду того что их изоколы имеют овальную форму, могут применяться для построения карты Северной и Южной Америки. В этом случае оконтуривающая изокола будет иметь форму овала, вытянутого вдоль меридианов.

На рис. 182 показана Северная и Южная Америка в псевдоазимутальной проекции Гинзбурга. Параметры этой проекции приняты такими же, как и для карт Атлантического океана. А именно: $C = 0,1$; $q = 1$; $k = 2$; $Z_{\max} = 120^\circ$. Использован вариант косой проекции с полюсом полярной системы координат в точке $\phi_0 = 15^\circ$, $\lambda_0 = -80^\circ$. Координаты точек в проекции вычисляются

по тем же формулам, что и для псевдоазимутальной проекции Тихого или Атлантического океана.

Искажения в проекции характеризуют построения, приведенные на рис. 183. На них даны изображения кругов, спроектированных с поверхности земного шара. Эти круги имеют разные размеры, но все они в проекции изобразились фигурами, которые по форме визуально воспринимаются весьма близкими к плоским кругам. Проекция обладает малыми искажениями площадей и форм. Вычисленные показатели

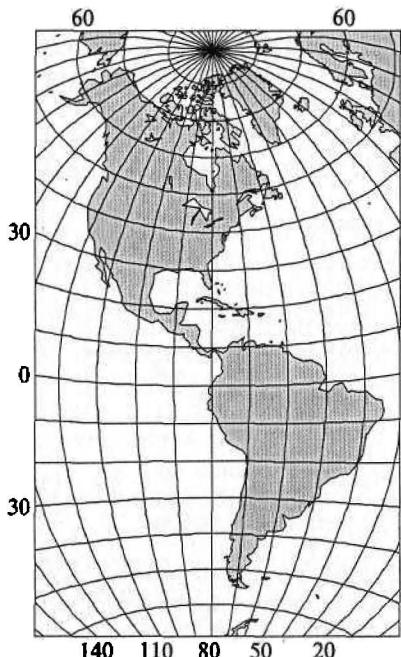


Рис. 182. Карта Северной и Южной Америки в псевдоазимутальной проекции

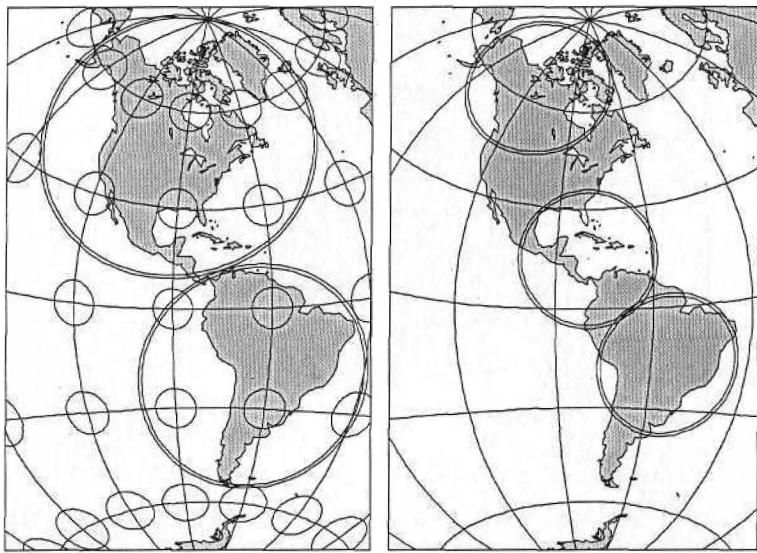


Рис. 183. Северная и Южная Америка в косой псевдоазимутальной проекции с фигурами искажений

искажений даны в табл. 42, где счет долгот λ дан от среднего меридиана.

Карты рассматриваемых объектов могут строиться и в поликонических проекциях. На рис. 184 приведен макет карты Евразии в произвольной поликонической проекции ЦНИИГАиК. В Дополнении к атласу для выбора картографических проекций (1975) она обозначена № 100. Проекция разработана для карт мира без включения южной полярной области. При долготе среднего меридиана 90° изокола частного масштаба площадей $p = 1$ окон-

Таблица 42

**Искажения в псевдоазимутальной проекции
для карт Северной и Южной Америки**

Фигуры искажений, их зенитные расстояния и координаты центров	Искажения, %			
	площадей	длин	формы	формы круга
$\phi = 50^\circ, \lambda = -13^\circ, Z = 40^\circ$	3,1	3,1	12	7
$\phi = -21^\circ, \lambda = 15^\circ, Z = 33^\circ$	2,7	3,4	13	8
$\phi = 15^\circ, \lambda = 0^\circ, Z = 20^\circ$	0,5	0,2	0	0
$\phi = -17^\circ, \lambda = 25^\circ, Z = 20^\circ$	4,0	4,3	15	13
$\phi = 65^\circ, \lambda = -35^\circ, Z = 20^\circ$	2,3	4,9	18	15

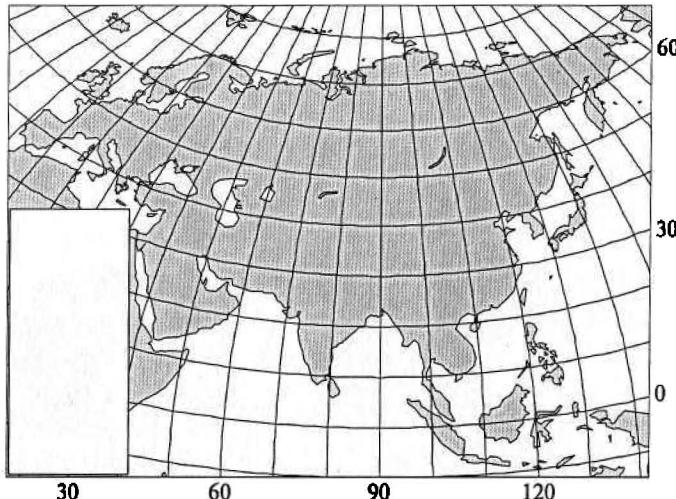


Рис. 184. Евразия в произвольной поликонической проекции ЦНИИГАиК
(вариант № 100)

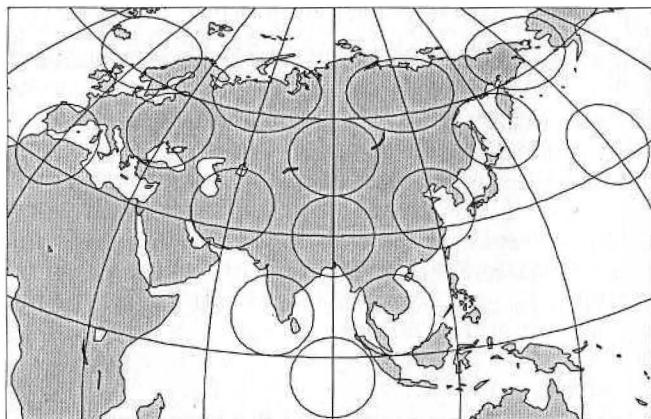


Рис. 185. Евразия в произвольной поликонической проекции ЦНИИГАиК
(вариант № 100) с фигурами искажений

туриивает значительную часть Евразии. Южные регионы Евразии изображаются практически без искажений. Только северный край несколько преувеличен.

На рис. 185 показаны изображения в этой же проекции кругов одинакового размера, но построенных в разных точках континента. Фигуры изобразились с небольшими искажениями площадей. По форме они практически не искажены в южной части объекта и несколько деформированы на севере.

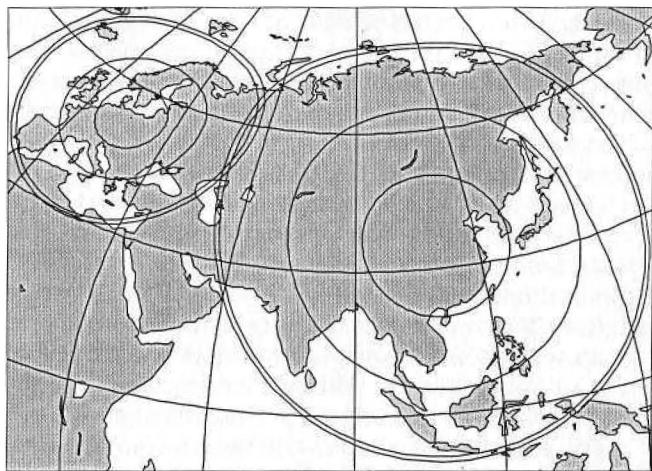


Рис. 186. Евразия в произвольной поликонической проекции ЦНИИГАиК (вариант № 100) с изображением концентрических кругов, построенных на земном шаре для Европы и Азии

На рис. 186 отображены такие же круги, но построенные так, что один из них практически охватывают почти всю Европу, а другой — почти всю Азию. Показатели искажений указанных фигур приведены в табл. 43.

В ЦНИИГАиК по эскизам сеток разработан ряд проекций, которые предназначены для карт Америки и Евразии. Данные о

Таблица 43

Искажения в поликонической проекции для карт Евразии

Фигуры искажений, их зенитные расстояния и координаты центров	Искажения кругов, %			
	площади	длины	формы	формы круга
$\phi = 65^\circ, \lambda = \pm 90^\circ, Z = 10^\circ$	4,4	11,7	42	37
$\phi = 65^\circ, \lambda = \pm 30^\circ, Z = 10^\circ$	15,6	16,7	47	56
$\phi = 50^\circ, \lambda = \pm 60^\circ, Z = 10^\circ$	-6,5	6,7	22	22
$\phi = 50^\circ, \lambda = 0^\circ, Z = 10^\circ$	0,4	4,6	16	16
$\phi = 30^\circ, \lambda = 0^\circ, Z = 10^\circ$	-3,9	2,1	1	1
$\phi = 35^\circ, \lambda = \pm 90^\circ, Z = 10^\circ$	-6,3	8,4	29	30
$\phi = 35^\circ, \lambda = \pm 30^\circ, Z = 10^\circ$	-5,3	3,8	10	10
$\phi = 10^\circ, \lambda = \pm 15^\circ, Z = 10^\circ$	-4,4	2,3	2	2
$\phi = -5^\circ, \lambda = 0^\circ, Z = 10^\circ$	-1,9	2,1	6	6
$\phi = 35^\circ, \lambda = 20^\circ, Z = 45^\circ$	-0,9	4,0	11	10
$\phi = 53^\circ, \lambda = -75^\circ, Z = 22,5^\circ$	-2,7	7,9	30	33

них имеются в Дополнении к атласу для выбора картографических проекций (1975). Проекции аппроксимированы полиномами. По виду сетки их можно классифицировать как поликонические с постоянной или переменной кривизной параллелей. Ниже даны их краткие характеристики.

Произвольная проекция ЦНИИГАиК (вариант № 91). Проекция предназначена для карт Евразии. Имеет пологие параллели. Долгота среднего меридиана 80° . Сетка асимметрична относительно среднего меридиана. Параллели и меридианы неравноразделенные. Северный полюс изображается точкой. На значительной части территории материка искажения площадей не превышают $+10$ и -5% , искажения длин соответственно не более $+20$ и -10% , искажения углов не более 15° . На крайних северо-западных и северо-восточных участках искажения углов достигают $25—35^{\circ}$. Проекция предназначается для учебных и массовых карт Евразии.

Произвольная проекция ЦНИИГАиК (вариант № 92). Предназначается для карт Евразии. Долгота среднего меридиана 85° . Сетка асимметрична относительно среднего меридиана. Параллели и меридианы неравноразделенные. Северный полюс изображается точкой. В пределах всего материка искажения длин и площадей не превышают 10% , а наибольшие искажения углов — 10° . Преобладающая часть материка изображается с искажениями длин и площадей не более $\pm 5\%$, а углов — не более 5° . Проекция предназначается для научно-справочных карт Евразии.

Произвольная проекция ЦНИИГАиК (вариант № 93). Проекция предназначается для совместного изображения обоих материков Америки, без включения в состав карт сколько-нибудь значительных участков океанов. Нет одного общего прямолинейного среднего меридиана. Экватор изображается кривой линией. Сетка не симметрична относительно экватора. Параллели и меридианы неравноразделенные. Северный полюс изображается точкой. Преобладающая часть обоих материков изображается с искажениями длин и площадей около $\pm 5\%$ с наибольшими искажениями углов около 5° . Лишь на отдельных участках восточного побережья материков искажения возрастают соответственно до $7—10\%$ и $7—10^{\circ}$. Такие искажения зрителю практически незаметны. Взаимное положение материков примерно такое же, как и на глобусе. Проекция может использоваться для учебных и справочных карт.

§ 53. ПРОЕКЦИИ КАРТ КРУПНЫХ ЧАСТЕЙ МАТЕРИКОВ

Чем меньше территория, тем легче подобрать ей подходящую проекцию. Для крупных частей материков чаще других используются азимутальные, конические и цилиндрические проекции. Рассмотрим их примеры.

Для карт Юго-Восточной Азии могут быть применены *косые равнопромежуточные азимутальные проекции*. При использовании касательной плоскости в центральной точке карты искажения отсутствуют. На изоколе с зенитным расстоянием $Z = 20^\circ$ максимальные искажения углов составляют $1,2^\circ$, а искажения площадей — 2% . Вся площадь, ограниченная этой изоколой, искажена на 1% . Эти же показатели для изоколы с зенитным расстоянием $Z = 36,25^\circ$ соответственно равны 4° , 7 и $3,4\%$.

Искажения можно перераспределить, умножив радиусы альмукантаров на коэффициент $k = 0,99$. Это соответствует построению проекции на плоскости, секущей земной шар по альмукантару $Z = 20^\circ$. Использование такой секущей плоскости не меняет величин искажений углов, но приводит к изменениям частных масштабов площадей примерно на 2% . Искажения в центральной точке и на упомянутых изоколах примут значения, указанные на рис. 187.

На рис. 188 в качестве примера приведен макет карты Мексики и стран Центральной Америки в *нормальной равнугольной конической проекции* Каврайского. На параллелях подписаны значения частных масштабов площадей. Главными являются парал-

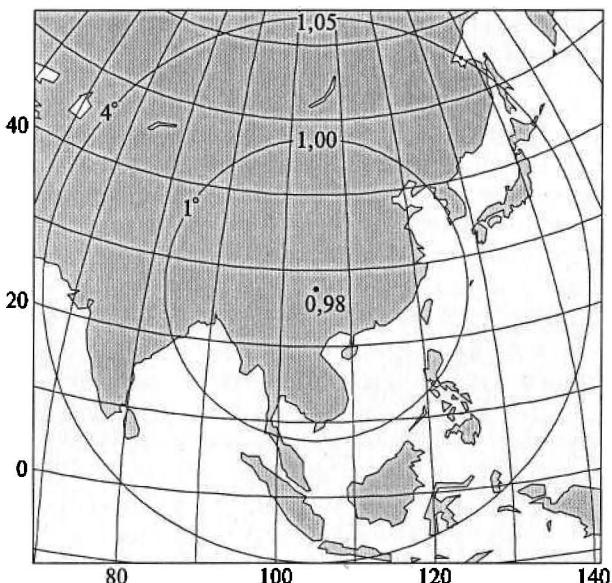


Рис. 187. Юго-Восточная Азия в косой равнопромежуточной азимутальной проекции с изоколами максимальных искажений углов и частных масштабов площадей (координаты центральной точки $\phi_0 = 27,5^\circ$, $\lambda_0 = 105^\circ$; использован секущий конус)

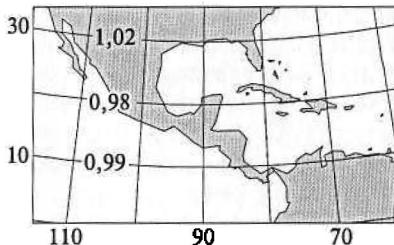


Рис. 188. Мексика и страны Центральной Америки в нормальной равноугольной конической проекции; на параллелях подписаны значения частных масштабов площадей

ней параллели и параллели с наименьшим масштабом (на рис. 188 он не показан), искажена на $-0,8\%$. Длины радиусов этого круга искажены на $0,7\%$, а его форма — примерно на 1% .

На рис. 189 приведен пример использования равноугольной цилиндрической проекции Меркатора. В этой проекции отображена экваториальная зона Земли. Для узкой, симметричной относительно экватора, полосы широты главных параллелей могут быть вычислены по приближенной формуле

$$\phi_0 = \pm 0,58\varphi_{\text{крайняя}}.$$

Если широты крайних параллелей не выходят за пределы $\pm 15^\circ$, то искажения на этой полосе при таком образом определенных главных параллелях примерно соответствуют значениям, минимизированным по критерию Эйри. В полосе с широтами крайних

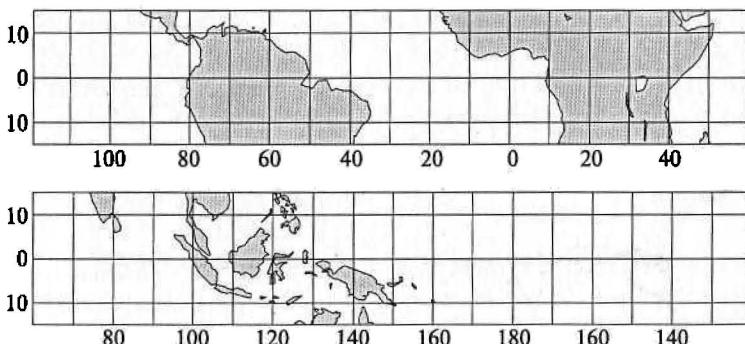


Рис. 189. Экваториальная зона Земли в нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора

лели с широтами $8,5$ и $27,5^\circ$. При расчете параметров в качестве крайних приняты параллели с широтами 4 и 32° . На этих параллелях искажения длин одинаковы и по абсолютному значению равны искажениям длин на параллели с наименьшим масштабом. Широта параллели с наименьшим масштабом равна $18,2^\circ$. На карте искажения площадей изменяются от $-2,7$ (на параллели с наименьшим масштабом) до $+2,7\%$ (на крайних параллелях). Площадь круга, построенного на земном шаре так, что он касается край-

Рис. 190. Кордильеры Северной и Центральной Америки в косой равноугольной цилиндрической проекции Меркатора с изоколами частного масштаба площадей

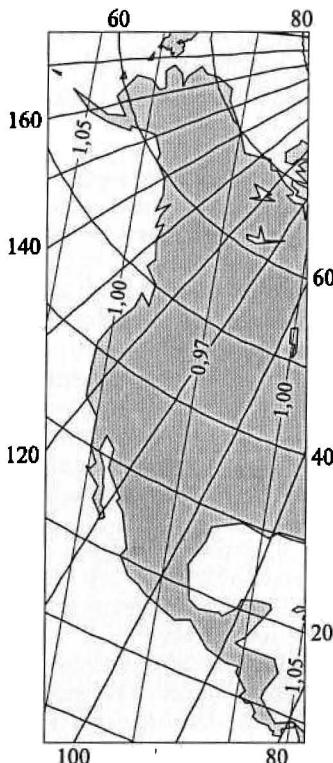
параллелей $\pm 10^\circ$ площадь круга, построенного на земном шаре так, что он касается крайней параллели и экватора, искажена на $-0,1\%$. Длины радиусов этого круга искажены на $0,3\%$, а его форма — примерно на $0,5\%$. Практически такие искажения для круга с центром на экваторе и касающегося крайних параллелей соответственно составляют $-0,3; 0,3$ и $0,5\%$.

В такой проекции может быть построена, например, карта экваториального пояса Земли. Экваториальный пояс представляет собой географический пояс Земли, расположенный по обе стороны экватора от параллелей северной широты $5 - 8^\circ$ до параллелей южной широты $4 - 11^\circ$. Этот пояс характеризуется постоянно высокими температурами (на равнинах $24 - 28^\circ\text{C}$), обильными в течение всего года осадками ($1500 - 3000 \text{ mm}$, в некоторых местах до $10\,000 \text{ mm}$), густыми многоярусными лесами с исключительным разнообразием флоры и фауны.

На рис. 190 приведен вариант карты горных участков Северной и Центральной Америки в *косой равноугольной цилиндрической проекции Меркатора*. Координаты полюса косой системы $\varphi_0 = -15^\circ$, $\lambda_0 = -5^\circ$, широты главных условных параллелей $\pm 10^\circ$. Круг, построенный на земном шаре и ограниченный зенитным расстоянием $Z = 15^\circ$, координаты центра которого $\varphi_0 = 40^\circ$, $\lambda_0 = -110^\circ$, характеризуется искажениями площади на $-0,5\%$, длины радиусов — на $1,1\%$, формы — приблизительно на 2% .

Примерно такие же искажения будут и для севернее расположенного круга с зенитным расстоянием $Z = 20^\circ$.

Искажения могут быть перераспределены более равномерно, если частный масштаб условного экватора принять равным $0,985$. В этом случае в пределах изображаемой области отклонения частного масштаба площади от единицы изменяются от -3 (на линии условного экватора косой системы) до 5% (на крайних изоколах).



Контрольные вопросы

- 1.** Почему карты материков и частей света чаще всего строят в классических азимутальных проекциях? Какие при этом применяют азимутальные проекции?
- 2.** Почему часто при создании карт материков и частей света отдается предпочтение равновеликой азимутальной проекции?
- 3.** В каких случаях для построения карт материков и частей света находят применение нормальные конические проекции?
- 4.** Как распределены искажения в конических проекциях с одной и с двумя главными параллелями?
- 5.** Как выбираются широты главных параллелей на картах в конических проекциях?
- 6.** Каким коническим проекциям для карт Европы может быть отдано предпочтение с точки зрения величин и характера искажений?
- 7.** Какую форму имеют изоколы в псевдоазимутальной проекции? Почему псевдоазимутальные проекции могут применяться для построения карты с одновременным изображением Северной и Южной Америки?
- 8.** Какие известны проекции ЦНИИГАиК, разработанные для карт Америки и Евразии?
- 9.** Какие проекции чаще других используются для карт крупных частей материков?
- 10.** Как для перераспределения искажений длин и площадей в азимутальных проекциях перейти от касательной плоскости к секущей земной шар по некоторому альмукантару плоскости? Изменятся ли при этом величины искажений углов?
- 11.** Как следует выбрать широты главных параллелей при отображении узкой, симметричной относительно экватора, полосы в равноугольной цилиндрической проекции Меркатора?
- 12.** В какой проекции и с какими параметрами могут быть построены карты горных участков Северной и Центральной Америки?

ПРОЕКЦИИ КАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Карты Российской Федерации, а также территорий отдельных ее регионов преимущественно строят в нормальных конических проекциях. Наибольшее применение в недавнем прошлом имели исключительно нормальные равнопромежуточные конические проекции. Реже использовались нормальные равноугольные конические проекции. Равноугольные проекции большей частью применялись для карт отдельных регионов, областей и республик страны. В последние годы стали появляться, особенно в электронных вариантах карт, и нормальные конические равновеликие проекции. Другие проекции встречаются сравнительно редко.

Карты России используются в самых различных целях, в том числе и для решения картометрических задач. Искажения в проекциях в соответствии с ранее принятой классификацией должны быть малыми. В связи с этим при создании карт России и карт ее отдельных регионов большое внимание уделяется выбору широт главных параллелей. Этот выбор делается так, чтобы минимизировать искажения в проекции. Поэтому в данной главе кроме проекций рассматриваются также способы выбора главных параллелей и связанные с этим расчеты параметров проекций.

§ 54. КАРТЫ РОССИИ В НОРМАЛЬНЫХ РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫХ КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

В нормальных равнопромежуточных по меридианам конических проекциях составлены карты СССР, Российской Федерации, частей ее территории, а также карты России с сопредельными странами. Уравнения проекций имеют вид:

$$x = x_0 - \rho \cos \delta; \quad y = y_0 + \rho \sin \delta;$$

$$\delta = \alpha(L - L_0); \quad \rho = C - mS,$$

где x_0 , y_0 — произвольные величины, определяющие положение центра параллелей в данной системе плоских прямоугольных координат, никакого влияния на вид и свойства проекции они не оказывают; S — длина дуги меридиана от экватора до параллели заданной широты; m — частный масштаб длин по меридиану,

для большинства проекций принят равным единице; α , C — параметры равнопромежуточной конической проекции, их геометрический смысл рассматривался в предыдущих параграфах (см. § 20).

Значения параметров зависят от выбора главных параллелей. Их рассчитывали многие авторы. Основные их значения для карт России приведены в табл. 44. В табл. 45, 46 для этих проекций при разных значениях широт вычислены искажения площадей ($p - 1$), %, где p — частный масштаб площади, и максимальные искажения углов ω , град. Полужирным шрифтом выделены значения, превышающие соответственно 2,5 % и 2° . Независимо от того, как получена проекция — для эллипсоида или шара, все оценки искажений определены только по отношению к эллипсоиду.

Во всех случаях использован секущий конус. Значения параметров α и C зависят от широт главных параллелей. Главные параллели, по которым поверхность конуса пересекается с поверхностью шара или эллипсоида, выбираются так, чтобы искажения длин на всех параллелях были наименьшими и, следовательно, масштаб карты в разных ее частях минимально отличался от главного масштаба.

Напомним, что на двух главных параллелях частные масштабы длин $n = 1$, между главными параллелями $n < 1$, за их пределами $n > 1$ (по мере приближения к крайним параллелям на карте n постепенно увеличивается).

Обозначим параллель с минимальным значением частного масштаба n_0 .

Определим также среднюю параллель с частным масштабом $n_{ср}$, широта которой равна среднему из широт крайних параллелей. Если значения n на крайних параллелях одинаковы, то па-

Таблица 44
Параметры нормальных равнопромежуточных
конических проекций карт России

№	Проекция	Параметры		
		m	α	$C, м$
1	В. В. Витковского	1	0,823 951	10 470 480
2	Ф. Н. Красовского	0,997 03	0,851 568	10 345 040
3	В. В. Каврайского	1	0,811 824	10 575 200
4	А. А. Михайлова	1	0,823 500	10 458 600
5	ПКО Картографии	1	0,850 966	10 321 080
6	Роскартографии	1	0,841 319	10 428 465

Таблица 45

Искажения ($p - 1$), %, в конических проекциях карт РФ

ϕ	1	2	3	4	5	6
35	3,9	5,2	4,0	3,7	4,9	5,4
40	1,7	2,7	2,0	1,5	2,5	3,2
45	0,0	0,7	0,5	-0,2	0,5	1,4
50	-1,1	-0,8	-0,5	-1,4	-1,0	0,1
55	-1,7	-1,8	-0,9	-2,0	-2,0	-0,6
60	-1,6	-2,1	-0,4	-2,0	-2,4	-0,7
65	-0,7	-1,7	1,0	-1,1	-2,1	0,1
70	1,7	-0,0	4,1	1,2	-0,7	2,3
75	6,6	3,7	10,2	6,0	2,5	6,8
80	17,5	12,3	23,5	16,6	10,0	16,8

Таблица 46

Искажения углов ω , град, в конических проекциях карт РФ

ϕ	1	2	3	4	5	6
35	2,2	3,0	2,2	2,1	2,7	3,0
40	1,0	1,7	1,1	0,8	1,4	1,8
45	0,0	0,7	0,3	0,1	0,3	0,8
50	0,6	0,1	0,3	0,8	0,6	0,1
55	1,0	0,5	0,5	1,2	1,1	0,4
60	1,0	0,7	0,3	1,2	1,4	0,4
65	0,4	0,3	0,6	0,6	1,2	0,1
70	1,0	0,7	2,3	0,7	0,4	1,3
75	3,7	2,9	5,6	3,3	1,4	3,7
80	9,3	7,5	12,1	8,8	5,4	8,9

параллель с минимальным масштабом n_0 , как показал В. В. Каврайский, всегда лежит между средней параллелью и ближайшим к ней полюсом.

Рассмотрим основные способы выбора главных параллелей для равнопромежуточных конических проекций.

Способ Витковского. В. В. Витковский предложил главные параллели выбирать исходя из следующих требований.

На крайних для карты северной и южной параллелях частные масштабы длин n_N и n_S должны быть одинаковы и на столько больше

единицы, на сколько масштаб n_{cp} на средней параллели меньше единицы:

$$n_N - 1 = n_S - 1 = 1 - n_{cp}.$$

В. В. Витковский для России в качестве крайних принял параллели с широтами 40 и 70° . На этих параллелях искажения длин, а в данном случае и площадей, составляют $1,7\%$, а на средней параллели широты 55° равны $-1,7\%$. В этой же полосе искажения углов не превышают 1° . Таким образом, в полосе с разностью широт 30° искажения длин и площадей не превышают по модулю $1,7\%$, а углов — 1° . Замечательный результат.

Проекция Витковского в 1900 г. была представлена на заседании Императорского русского географического общества. Широты ее главных параллелей после округления их значений стали равными соответственно 45 и 67° .

Когда широты главных параллелей определены, нетрудно вычислить параметры проекции. Из условия равенства единице частных масштабов длин на главных параллелях ($n_1 = n_2 = 1$) следуют формулы:

$$\alpha = \frac{r_1 - r_2}{S_2 - S_1}; \quad C = \frac{r_1}{\alpha} + S_1 = \frac{r_2}{\alpha} + S_2,$$

где r_1 и r_2 — радиусы главных параллелей; S_1 и S_2 — длины дуг меридианов от экватора соответственно до первой и второй главных параллелей.

Способ Красовского. Если частный масштаб длин по меридианам $m = 1$, то на главных параллелях отсутствуют любые искажения. Картина меняется, когда $m \neq 1$, например $m < 1$. Тогда на главных параллелях отсутствуют только искажения длин, поскольку $n = 1$. Искажения же углов будут отсутствовать на параллелях, где $m = n$, а искажения площадей — на параллелях, где $n = 1/m$. При $m < 1$ каждая из двух параллелей с неискаженными углами лежит между главной и средней параллелями, а каждая из двух параллелей с неискаженными площадями — между главной и крайней параллелями. В этом случае определению подлежат три параметра: m , α и C . Примером такого способа расчета параметров является проекция, разработанная Ф. Н. Красовским.

Проекция Ф. Н. Красовского была вычислена для шара. Параметры проекции определены минимизацией линейных искажений на параллелях при дополнительном условии сохранения площади шарового пояса между крайними параллелями. Сохранение площади этого пояса достигается ценой искажения длин вдоль меридианов, т. е. изменением частного масштаба m . Проекция разработана в 1921 г. Широты крайних параллелей $39,5$ и $73,5^\circ$. На этих параллелях одинаковы частные масштабы длин n . Между этими параллелями сохраняется площадь шарового пояса. Главными

являются параллели с широтами 49,4 и 67,8°. На них нет искажений длин. Искажения углов отсутствуют на параллелях с широтами 50,6 и 66,8°. Площади не искажены на широтах 48,2 и 68,4°. Частный масштаб длин $m = 0,99\ 703$. Проекцию применяют, когда с наименьшими искажениями надо показать как материковую часть, так и район полярного бассейна. Недостатком проекции является то, что ее параллели имеют значительную кривизну. Это обстоятельство препятствует ее применению для школьных и некоторых тематических карт.

Способ Ф. Н. Красовского использовался при расчете проекции карты СССР масштаба 1 : 2 500 000. Однако в этих расчетах вследствие допущенных ошибок идея способа была искажена.

Способ Каврайского. В. В. Каврайский выдвинул следующие требования выбора главных параллелей.

На крайних для карты северной и южной параллелях частные масштабы длин n_N и n_S должны быть одинаковы и во столько больше единицы, во сколько раз наименьший масштаб n_0 меньше единицы:

$$n_N = n_S; n_N n_0 = 1.$$

Проекция В. В. Каврайского была разработана в 1931 г. Широты главных параллелей равны 47 и 62°. Проекция наиболее подходит для карт территорий страны к югу от Полярного круга. В ней с наименьшими искажениями изображается материковая часть России.

Способ В. В. Каврайского был использован при разработке в ПКО Картографии проекции для обзорных карт средних и мелких масштабов на территорию СССР. Расчеты выполнила в 1984 г. Е. А. Нефедова. В ее проекции в широкой полосе от 40 до 75° параллелей искажения площадей по модулю не превышают 2,5 %, а искажения углов — 1,4°.

Условия В. В. Витковского и В. В. Каврайского практически равносочлены. Действительно, если $n_N = (1 + \delta)$, а $n_0 = (1 - \varepsilon)$, то, разложив в ряд правую часть выражения, получаем, что в обоих случаях отклонения частных масштабов длин от единицы δ и ε по модулю примерно равны:

$$1 + \delta = \frac{1}{1 - \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon, \quad \delta \approx \varepsilon.$$

Чем меньше полоса широт между крайними параллелями, тем ближе эти два способа. В. В. Каврайский применил свой способ к расчету проекции В. В. Витковского и пришел к выводу, что разница в результатах даже при ширине пояса по широте в 30° «настолько мала, что практически они равносочлены»¹.

¹ Каврайский В. В. Математическая картография. — Л.-М.: 1934. — С. 127.

Способы Витковского или Каврайского удобно применять для расчета параметров равнопромежуточных конических проекций, предназначенных для карт отдельных частей территории России. Как показали исследования Е. А. Нефедовой, величины искажений длин, площадей и углов для территорий с разностью широт $\Delta\phi = 5^\circ$ практически равны нулю, для территорий с $\Delta\phi = 10^\circ$ равны 0,15% и $0,1^\circ$, а для территорий с $\Delta\phi = 25^\circ$ — немногим превосходят 0,5% и $0,3^\circ$.

Способ, основанный на методе наименьших квадратов. Наиболее строгий способ расчета параметров равнопромежуточных конических проекций основан на минимизации взвешенной суммы квадратов искажений ($n - 1$) длин на параллелях. С учетом выражения для n для минимизируемой целевой функции имеем

$$\sum \left(\frac{kg}{\sum kg} \right) \left(\frac{\alpha(C - mS)}{r} - 1 \right)^2 = \min,$$

где m , α и C — искомые параметры (в частном случае $m = 1$); r — радиус текущей параллели; g — геометрический вес отображаемой территории; k — так называемые *экономические весовые коэффициенты*. Минимизацию целевой функции удобно проводить по стандартным программам, не требующим приведения к линейному виду минимизируемых функций. Нормировать веса (делить на $\sum kg$) вовсе необязательно.

Наиболее значимым территориям с точки зрения решаемых по картам задач присваиваются наибольшие веса. Геометрические веса g — произвольные числа, учитывающие размеры той или иной территории. Они выбираются пропорционально площадям поясов шириной по широте $1 - 5^\circ$. Длины поясов определяются разностью долгот территории. Н. Я. Цингер (1842—1920), а затем Ф. Н. Красовский и В. В. Каврайский использовали весовые показатели, учитывающие различия отдельных территорий (в данном случае введением экономических весовых коэффициентов k). Аналогично можно учитывать не только экономическую значимость отдельных районов, но и важность для картографируемых территорий других факторов.

В 1983 г. А. А. Михайлов определил параметры проекции с учетом только геометрических весов¹. Широты главных параллелей равны 44 и 68° . Проекция получилась весьма близкой к проекции, разработанной В. В. Витковским: по наибольшим искажениям она несколько хуже, но по среднему квадратическому критерию искажений лучше ее в 1,5 раза.

В 1992 г. по заданию Роскартографии Е. А. Нефедова определила новые параметры равнопромежуточной конической проекции,

¹ Михайлов А. А. О равнопромежуточных проекциях карт // Геодезия и картография, 1983. — № 7. — С. 42—44.

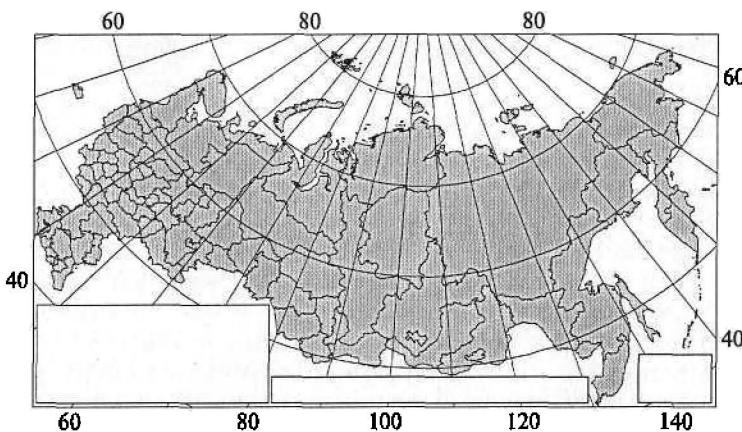


Рис. 191. Макет карты Российской Федерации в нормальной равнопромежуточной конической проекции; широты главных параллелей $50,5$ и $64,5^{\circ}$; долгота среднего меридиана 105° , частный масштаб длин по меридианам $m = 1$ (проекция Роскартографии, Е. А. Нефедова, 1992)

при этом учитывались не только площади территорий, но и заселенность континентальной части России. Значения геометрических весов определялись площадью зон в 1° по широте. Всего таких зон было 30. В эти веса введены экономические коэффициенты, учитывающие количество жителей. В среднем на одну зону приходится около 5 млн жителей. Если в зоне живет 5 млн чел., то коэффициент принимался равным 1; если меньше или боль-

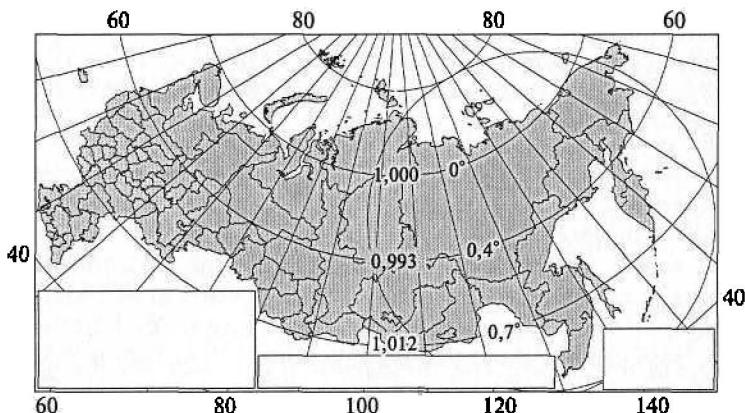


Рис. 192. Макет карты Российской Федерации в нормальной равнопромежуточной конической проекции с фигурой искажений; на параллелях подписаны максимальные искажения углов и частные масштабы длин; широты главных параллелей 55 и 70°

ше 5 млн чел., то он соответственно был меньше или больше 1. При количестве жителей l коэффициент вычислялся по формуле

$$k = 0,5 + l/10.$$

Значения главных параллелей в этой проекции получились равными 50,5 и 64,5°. Проекция приведена на рис. 191.

На рис. 192 дана проекция, параметры которой определены при условии минимума искажений на сущее в пределах границ Российской Федерации. При вычислении параметров использовались только геометрические веса. Широты главных параллелей получились равными соответственно 55 и 70°. В ней, по сравнению с рассмотренными проекциями, наименьший средний квадратический показатель искажений. Круг, касающийся на сфере 40 и 80° параллелей и покрывающий площадь свыше 15,4 млн км², искажен незначительно. Вся его площадь искажена на 0,8 %, длины радиусов — на 0,4 %, а форма — на 1 %. Существенным недостатком этой проекции является большая кривизна параллелей на карте. Поэтому проекция может использоваться только для выполнения картометрических определений.

§ 55. КАРТЫ РОССИИ В НОРМАЛЬНЫХ РАВНОУГОЛЬНЫХ КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Нормальные равноугольные конические проекции обычно применяются для построения в сравнительно крупных масштабах карт частей Российской Федерации. В атласах в этой проекции даются карты, например, регионов европейской части России, Урала, Поволжья, Западной Сибири, Восточной Сибири, Дальнего Востока. Координаты точек в проекции вычисляются по таким же формулам, как и для нормальной равнопромежуточной конической проекции, за исключением радиусов параллелей, которые определяются по формуле

$$\rho = Ce^{-\alpha q} = CU^{-\alpha},$$

где q — изометрическая широта; U — функция, связанная с изометрической широтой (см. § 30).

Чаще всего применяется секущий конус и способы Витковского или Каврайского для нахождения широт двух главных параллелей и вычисления параметров проекции α , C . Если широты главных параллелей определены, то параметры вычисляются по формулам:

$$\alpha = \frac{\ln r_1 - \ln r_2}{\ln U_2 - \ln U_1}; \quad C = r_1 U_1^\alpha / \alpha = r_2 U_2^\alpha / \alpha.$$

Наиболее строгий способ расчета параметров, как и для равнопромежуточных проекций, основан на минимизации взвешен-

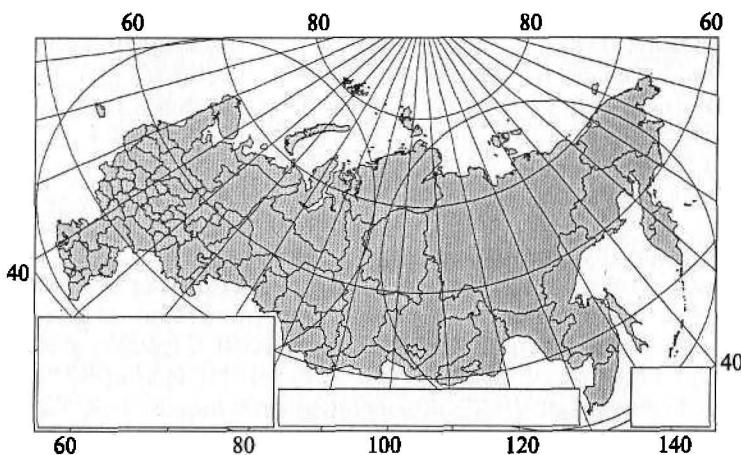


Рис. 193. Макет карты Российской Федерации в нормальной равноугольной конической проекции с двумя фигурами искажений; широты главных параллелей 50° и 70°

ной суммы квадратов искажений ($n - 1$) частных масштабов длин на параллелях. С учетом выражения для частного масштаба длины n в равноугольной проекции минимизируемая функция принимает следующий вид:

$$\sum \left(\frac{kg}{\sum kg} \right) \left(\frac{\alpha C}{rU^\alpha} - 1 \right)^2 = \min,$$

где α и C — искомые параметры проекции; r — радиус текущей параллели; g — геометрический вес; k — экономический весовой коэффициент (в частном случае принимается $k = 1$).

На рис. 193 приведен макет карты России в равноугольной проекции с главными параллелями 50 и 70° [Атлас для выбора картографических проекций (1957)]. Частные масштабы длины m , n и площадей p , характеризующие искажения на разных широтах, приведены в табл. 47. На параллелях широт $45,5$, 60 и $73,4^{\circ}$ искажения длин и площадей по величине около $1,5$ и $3,0\%$ соответственно.

Таблица 47
Частные масштабы длины и площадей в равноугольной конической проекции карт РФ

φ , град	40	45,5	50	60	70	73,4	77
$m = n$	4,1	1,5	1	-1,5	1	1,5	4,0
p	8,4	3,1	1	-3,0	1	3,0	8,1

На этой карте также изображены два круга, построенные на земной сфере. Их радиусы на сфере соответствуют расстояниям в 2113 км. Каждый из кругов покрывает площадь 13,9 млн км². В проекции площадь каждого круга преуменьшена на 0,3 %, длины радиусов в среднем искажены на 0,9 %, а форма — на 2 %. Все это свидетельствует о высоком качестве проекции.

Данная проекция вполне подходит для карт Российской Федерации, на которых требуется передать без искажений направления и углы и улучшить изображения очертаний картографируемых объектов практически без потерь в передаче величин площадей. Карта может быть скомпонована вплоть до полюса, который в этой проекции изображается точкой. Правда, у полюсов искажения будут уже заметными. Так, на параллели 80° искажения длин достигают 7 %, а искажения площадей — 14,5 %.

§ 56. КАРТЫ РОССИИ В НОРМАЛЬНЫХ РАВНОВЕЛИКИХ КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Нормальные равновеликие конические проекции вычисляются по формулам, идентичным тем, которые используются для равнопромежуточных проекций. При этом для радиуса параллелей на карте имеем

$$r^2 = 2(C - P)/\alpha,$$

где P — площадь сфериической трапеции, ограниченной экватором, текущей параллелью и двумя меридианами с разностью долгот в 1 радиан.

Известны равновеликие конические проекции Альберса, который в Германии в 1805 г. предложил главные параллели выбирать по середине между средней и каждой крайней параллелями на карте. Иначе, главные параллели располагаются от каждой крайней на $\frac{1}{4}$ части разности широт между ними. В других случаях главные параллели располагают от каждой крайней на $\frac{1}{6}$ части диапазона разности широт между крайними параллелями.

Обоснованный способ определения параметров равновеликих конических проекций для карт России предложил В. В. Витковский. Он потребовал выполнения следующего условия:

Уклонения частных масштабов длин от единицы на крайних и средней параллелях страны должны быть одинаковыми.

В полученной им проекции в диапазоне широт параллелей от 40 до 70° искажения длин по меридианам и параллелям не превышали 1,8 %, а искажения углов были менее 2°. Широты главных параллелей равнялись 45°46' и 67°08'. Широта параллели с минимальным масштабом равнялась 58°. В. В. Витковский отметил

преимущество предложенного им способа выбора параметров от способа Альберса, ибо искажения в проекции стали меньше «на целую треть».

Для расчета параметров равновеликой конической проекции удобно применять условия и формулы французского ученого Н.А. Тиссо, который сформулировал следующие условия (1881):

Частные масштабы длин на крайних параллелях должны быть одинаковыми и во столько же раз больше единицы, во сколько раз наименьший масштаб по параллели меньше единицы.

Способ Тиссо удобен для вычисления пределов возможных искажений при заданных широтах крайних параллелей. Значения всех параметров проекции вычисляются по достаточно простым формулам.

Так, в случае шара экстремальные значения масштабов по параллелям и меридианам, максимальные искажения углов ω и широты параллели с наименьшим масштабом определяются из следующих соотношений:

$$n_{\min} = \sqrt{\cos[(\phi_2 - \phi_1)/2]}; n_{\max} = 1/n_{\min}; m = 1/n;$$
$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left[(\phi_2 - \phi_1)/4\right]; \sin\phi_{\min,n} = \frac{\sin[(\phi_2 + \phi_1)/2]}{\cos[(\phi_2 - \phi_1)/2]},$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — широты крайних параллелей.

Расчеты по этим формулам показывают, что для карт России можно построить равновеликую коническую проекцию, на которой в полосе широт от 42 до 76° искажения длин на меридианах и параллелях не превысят $2,3\%$, а максимальные искажения углов — $2,6^\circ$. При этом в случае шара широты главных параллелей будут равны $49,2$ и $73,3^\circ$, а широта параллели с наименьшим масштабом равна $63,7^\circ$.

Заметим, что условия В. В. Каврайского для расчета равноугольных конических проекций, как это он сам отмечал, тождественны условиям Н.А. Тиссо для вычисления равновеликих конических проекций.

Если известны широты двух главных параллелей, то параметры равновеликой конической проекции легко вычислить по формулам:

$$\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(P_2 - P_1)}; C = \frac{r_1^2}{2\alpha} + P_1 = \frac{r_2^2}{2\alpha} + P_2.$$

Как и в предыдущих случаях, эти формулы следуют из условий равенства единице частных масштабов длин на главных параллелях.

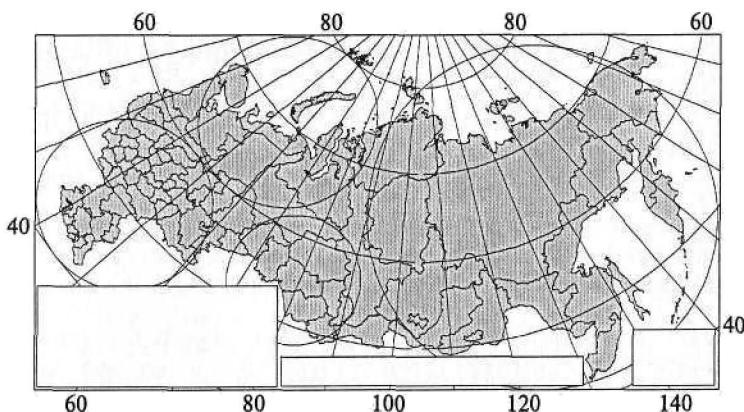


Рис. 194. Макет карты Российской Федерации в нормальной равновеликой конической проекции с фигурами искажений; широты главных параллелей $52,5$ и $78,2^{\circ}$

На рис. 194 приведена проекция, параметры которой определены минимизацией функции следующего вида:

$$\sum g \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 = \min,$$

где n — частный масштаб длин в равновеликой конической проекции. Веса g пропорциональны площадям сферических поясов с разностью широт 5° ; длина поясов определяется протяженностью территории России по долготе.

Расчеты выполнены для земного шара. Минимизация данной функции произведена стандартным методом квадратичной интерполяции — экстраполяции. Широты главных параллелей получились равными $52,5$ и $78,2^{\circ}$. Искажения длин и углов указаны в табл. 48. В весьма широкой полосе широт от параллели 45° до параллели 80° искажения длин не превышают $2,5\%$, а максимальные искажения углов — $2,9\%$.

В проекции отображены четыре круга, характеризующие искажения. Они покрывают площади на земном шаре величиной от

Таблица 48

Искажения в равновеликой конической проекции для карт РФ

ϕ , град	45	50	52,5	55	60	65	70	75	78,2	80
m	-2,3	-0,7	1	0,6	1,7	2,4	2,5	1,7	1	-1,8
n	2	0,7	1	-0,6	-1,7	-2,3	-2,5	-1,7	1	1,9
ω , град	2,6	0,8	0	0,7	1,9	2,7	2,9	1,9	0	2,1

Искажения в равновеликой конической проекции карт РФ

ϕ , град	30	40	45	50	60	70	75	80
m	-7,0	-3,0	-1,3	1	1,5	1	-3,7	-13,2
n	7,5	3,1	1,4	1	-1,5	1	3,8	15,2
ω , град	8,2	3,5	1,5	0	1,7	0	4,3	16,2

2,2 до 15,4 млн км². Искажения длин радиусов кругов в среднем равны 0,6—1,1 %, а искажения формы составляют 2—4 %.

Рассмотренная проекция ориентирована на современную территорию России. Для отображения РФ совместно с сопредельными странами, особенно с южнее расположенными государствами, удобна равновеликая коническая проекция с главными параллелями 50 и 70°. Эта проекция была описана в Атласе для выбора картографических проекций (1949). Показатели искажений этой проекции даны в табл. 49.

Равновеликие конические проекции, имея малые искажения длин и углов, удобны для использования в картометрических работах, особенно при измерениях площадей.

§ 57. КАРТЫ РОССИИ В ДРУГИХ ПРОЕКЦИЯХ

Кроме вышерассмотренных нормальных конических проекций, для карт России предлагались и некоторые из них использовались и другие проекции, среди которых — косые конические, косые цилиндрические и проекция Лагранжа. Эти проекции имеются в неоднократно упоминавшихся Атласах для выбора картографических проекций 1949 и 1957 гг.

Для настенных карт была разработана видоизмененная поликоническая проекция ЦНИИГАиК. Она приведена под № 16 в Атласе для выбора картографических проекций (1957). Параллели в этой проекции имеют меньшую кривизну, чем в нормальных конических проекциях. Если ориентироваться по рамке карты, это дает более близкое к действительности взаимное расположение географических объектов. Отрезки между параллелями слегка убывают с удалением от среднего меридиана восточной долготы 90°. Промежутки между параллелями на среднем меридиане также убывают в обе стороны от параллели 40°. Искажения площадей изменяются от -2 (у южных границ) до 35 % (в районе Чукотки). На севере изокола $\omega = 10^\circ$ охватывает контур суши страны так, что большей частью максимальные искажения углов менее 10°.

Визуально хорошо воспринимаются карты в видоизмененной поликонической проекции ЦНИИГАиК в компоновке, приведен-

ной в Атласе СССР (1955), где на карте добавлены акватории Северного Ледовитого океана за Северным полюсом.

Проекции ЦНИИГАиК, полученные численными методами, использовались также для построения школьных карт. В них при умеренных искажениях длин и углов сохраняются свойства, напоминающие о шарообразности Земли [Дополнение к атласу для выбора картографических проекций, 1975; Справочник по картографии, 1988].

Известна равноугольная проекция Л. М. Бугаевского, удовлетворяющая условиям П. Л. Чебышева. В этой проекции параллели близки к дугам окружностей, а меридианы в средней части сетки — к прямолинейным. Сетка асимметрична — западная и восточная ее части неодинаковы. Изокола частных масштабов длин и площадей $m = n = p = 1$ повторяет схематизированный контур СССР. Наибольшие искажения в центре государства: длин $-3,2\%$, площадей $-6,5\%$. С положительными искажениями изображаются лишь небольшие участки, в том числе Чукотка [Дополнение к атласу для выбора картографических проекций, 1975].

Предложены также обобщенные конические равнопромежуточные по меридианам проекции. В конических проекциях угол между меридианами пропорционален разности их долгот. Как указывалось ранее, в обобщенных конических проекциях угол между меридианами является более сложной функцией долготы. Отрезки параллели между двумя меридианами в разных частях карты имеют разную величину. В обобщенных конических проекциях по сравнению с коническими проекциями искажения меньше и имеет место лучшее их распределение.

Эти проекции можно получить, решая прямую или обратную задачи математической картографии. Н. А. Урмаев в 1947 г. получил такую проекцию для шара. Позже его идеи были обобщены и приложены и к эллипсоиду вращения¹.

В обобщенной конической проекции частный масштаб длин по меридианам принят $m = 1$. Радиус параллели ρ на карте вычисляется, как и в нормальной равнопромежуточной конической проекции — по длине дуги меридиана S и параметру проекции C :

$$\rho = C - S.$$

Таким образом, параллелями являются дуги окружностей. Угол δ между меридианами определяется по формуле

$$\delta = \alpha \left(1 + \frac{b_1}{2} l + \frac{b_2}{3} l^2 + \dots \right) l,$$

¹ Бугаевский Л. М., Слободянник И. В. Обобщенная равнопромежуточная вдоль меридианов коническая проекция Н. А. Урмава // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1985. — № 5. — С. 69—72.

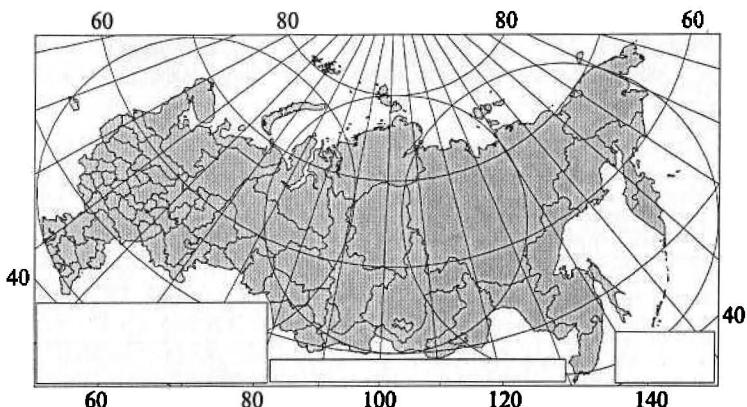


Рис. 195. Макет карты Российской Федерации в нормальной обобщенной равнопромежуточной симметричной относительно среднего меридиана конической проекции с изображением фигур искажений

где l — долготы, считаемые от среднего меридиана; b_i — постоянные коэффициенты (являются параметрами проекции). Частный масштаб длин по параллелям n зависит как от широты, так и от долготы. Изоколы имеют форму овалов. Этим обеспечивается некоторое уменьшение величин искажений и лучшее их распределение.

Параметры проекции можно определить, минимизируя в пределах карты уклонения от единицы частных масштавов длин на параллелях ($n = l$), или задав $n = \text{const}$ на контуре картографируемой территории.

Проекция является симметричной относительно среднего меридиана, если в приведенной выше формуле отсутствуют коэффициенты b с нечетными индексами. На рис. 195 показана симметричная проекция, построенная при следующих значениях параметров: $C = 10\,451,3$ км; $\alpha = 0,825\,527$; $b_2 = 0,018\,351\,8$ (остальные коэффициенты $b = 0$). Значения искажений в этой проекции даны в табл. 50 [М. Л. Бугаевский, 1998].

На карте рис. 195 изображены также построенные на земном шаре круги, визуализирующие искажения в данной симметричной обобщенной равнопромежуточной проекции. Визуально эти фигуры воспринимаются именно как круги. Их площади преувеличены на 1 %, длины их радиусов в среднем изменились на 0,7—0,9 %, форма кругов искажена менее чем на 2,8 %. Радиусы этих кругов на земной сфере составляют 1668 и 2002 км, а их площади — 8,7 и 12,5 млн км² соответственно.

На рис. 196 построена проекция, в уравнения которой к трем ранее перечисленным параметрам добавлен четвертый, а именно

Таблица 50

Величины $(n - I) = (\rho - I)$, %, и ω , град, в равнопромежуточной обобщенной конической проекции карты России

ϕ , град		I					
		0	20	40	60	80	100
40	$n - 1$	1,6	1,8	2,5	3,6	5,2	7,3
	ω	0,9	1,0	1,4	2,0	2,9	4,0
50	$n - 1$	-1,3	-1,1	-0,4	0,7	2,2	4,2
	ω	0,1	0,6	0,5	0,4	1,2	2,4
60	$n - 1$	-2,0	-1,7	-1,1	0,0	1,6	3,5
	ω	1,1	1,0	0,6	0,0	0,9	2,0
70	$n - 1$	1,2	1,4	2,1	3,2	4,8	6,9
	ω	0,7	0,8	1,2	1,8	2,7	3,8
80	$n - 1$	16,3	16,6	17,4	18,7	20,5	22,8
	ω	8,6	8,8	9,2	9,8	10,7	11,8

коэффициент с нечетным индексом $b_1 = -0,2$. Долгота среднего меридиана принята равной $102,5^\circ$.

Появление коэффициента с нечетным индексом привело к асимметрии картографической сетки. Западная и восточная части карты изобразились несколько по-разному. Это наглядно иллюст-

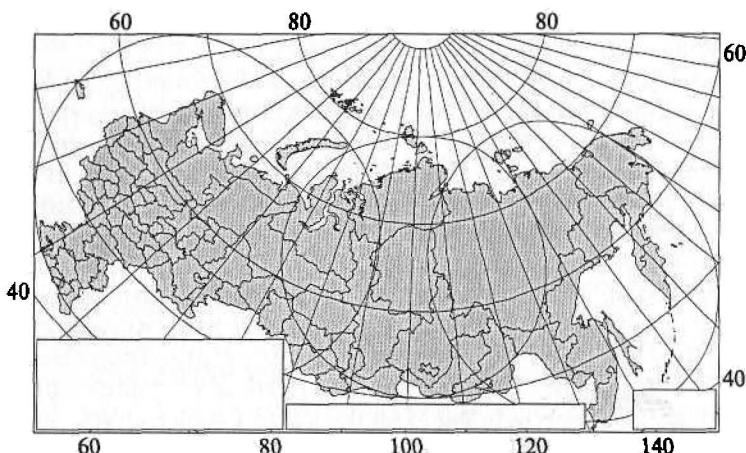


Рис. 196. Макет карты Российской Федерации в нормальной обобщенной равнопромежуточной асимметричной относительно среднего меридиана конической проекции с изображением фигур искажений

тируется с помощью изображений кругов, построенных на земном шаре. Западный круг заметно растянут вдоль средней для него параллели. Восточный круг несколько вытянут в меридиональном направлении.

Искажения в асимметричной проекции стали заметно больше, чем в случае симметричной. Площадь западного круга преувеличена на 15 %, его радиусы в среднем искажены примерно на 10 %, а форма круга — на 15—20 %. Площадь восточного круга преуменьшена на 13 %, длины искажены примерно на 9 %, а форма — на 24 %. Круг в середине карты искажен менее всего: площадь — на 1 %, радиусы — на 3,6 %, форма — менее 15 %.

Асимметричные проекции можно использовать как для регулирования искажений в разных частях карты, так и для создания масштабопеременных проекций.

Контрольные вопросы

1. В каких проекциях преимущественно строят карты Российской Федерации, а также карты территорий отдельных ее регионов?
2. Какие вам известны нормальные равнопромежуточные по меридианам конические проекции, в которых строились карты России?
3. Назовите равноугольные конические проекции, применяемые для карт территорий России.
4. Какая равновеликая коническая проекция удобна для отображения Российской Федерации совместно с сопредельными странами, особенно с южнее расположеннымми государствами?
5. Почему при создании карт России и карт ее отдельных регионов большое внимание уделяется выбору широт главных параллелей конических проекций?
6. Какие требования предъявляются при выборе в конических проекциях главных параллелей способом Витковского?
7. В чем суть способа Красовского? Почему при этом главный масштаб карты сохраняется на одних параллелях, площадей — на других, а искажения углов отсутствуют на третьих?
8. Какие выдвигаются требования к выбору главных параллелей конических проекций способом Каврайского?
9. В чем суть способа выбора главных параллелей конических проекций, основанного на методе наименьших квадратов?
10. Как выбираются веса при выборе главных параллелей конических проекций с помощью метода наименьших квадратов? Как определяются геометрические веса? Что и как учитывается с помощью экономических весов?
11. Назовите равноугольную проекцию на территорию России, удовлетворяющую условиям теоремы Чебышева.
12. Какими свойствами обладает обобщенная коническая проекция Бугаевского? Как определить ее параметры?

ПРОЕКЦИИ КАРТ КОНКРЕТНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

В данной главе кратко рассмотрены проекции карт, которые предназначены для решения совокупности конкретных задач. К таковым относятся проекции топографических карт, навигационных и аэронавигационных карт, а также проекции Международных карт мира масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 2 500 000. За этими картами официальными документами или международными договоренностями закреплены совершенно определенные проекции. Эти карты являются многолистными, а их проекции — многогранными или многополосными. Математическая сторона проекций освещена во многих учебных пособиях, справочниках и других публикациях. Поэтому внимание главным образом будет сосредоточено на качественной стороне вопроса.

§ 58. ПРОЕКЦИИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ

Топографические карты — это карты многоцелевого назначения и массового применения. Топографические карты являются основными картами государства. Они составляются на основе геодезических измерений и топографических съемок.

Топографические съемки опираются на систему геодезических пунктов, плоские прямоугольные координаты которых даны в той же проекции, что и составляемые топографические карты. То обстоятельство, что координаты опорных пунктов даются в плоскости некоторой проекции, позволяет материалы топографических съемок укладывать непосредственно в рамки геодезической сети без введения каких-либо поправок — снимаемая местность уже в процессе съемки оказывается изображенной в заданной картографической проекции.

Поэтому выбор проекции для топографических карт очень важен с точки зрения введения на местности плоской прямоугольной системы координат. Проекции, с помощью которых вводят плоские координаты в пределах отдельных регионов, государств или даже мира в целом, называются *геодезическими проекциями*.

Рассмотрим, какие требования предъявляются к геодезическим проекциям, а следовательно, и к проекциям топографических карт.

В любой проекции длины неизбежно искажены, вследствие чего масштаб в разных местах карты различен. В общем случае в окрестности каждой точки масштаб различен даже по разным направлениям. Естественно, что для массовых карт, применяемых в изыскательских работах, в сельском хозяйстве, строительстве, военном деле и множестве других сфер, недопустимо использовать карты, на которых масштаб по разным направлениям различен. Простота учета искажений длин и углов выдвигает следующее главное требование.

|| В каждой точке топографической карты масштаб по всем направлениям должен быть постоянным.

Этому требованию соответствуют только равноугольные проекции.

Кроме того, необходимо, чтобы искажения длин по крайней мере в рамках листа топографической карты были в границах графической точности. Важно, чтобы искажения даже в пределах значительных территорий можно было легко и просто учитывать.

Небольшая величина искажений и простота их учета приводят к необходимости отображать земную поверхность по частям — по отдельным зонам ограниченных размеров. Поэтому желательно, чтобы число зон было минимальным, а их размеры — максимальными. Для массовых работ очень важно, чтобы все зоны были единообразными.

В условиях интенсивного обмена геоинформацией и взаимосвязанности геодезических и картографических данных важно, чтобы плоскую систему координат легко можно было распространить на значительные территории, в идеале — на мир в целом.

Итак, основные требования, которым должны соответствовать геодезические проекции, следующие:

- равноугольность;
- малые искажения в пределах листа карты;
- простота учета искажений в границах зон значительных размеров;
- минимальное количество зон;
- единство зон;
- глобальность.

Число проекций, отвечающих этим требованиям, невелико. Это равноугольные азимутальная проекция *Руссия*, коническая проекция *Ламберта* и поперечно-цилиндрические проекции *Гаусса—Крюгера* и *UTM (Universal Transverse Mercator)*.

Перечисленные проекции имеют общие черты: все они равноугольные; на плоскости отображают ограниченных размеров области земного эллипсоида; искажения минимальные и распределены симметрично относительно линий или точек постоянных

искажений; осевой меридиан изображается прямой, принимающей за ось абсцисс.

Математическая сторона геодезических проекций тщательно отработана. Их формулы очень детальные и обеспечивают высокую точность вычисления координат — до 0,001 м. Для них имеются формулы вычисления поправок в длины линий и углы. Введением этих поправок измеренные величины переносятся в плоскость проекции. Прямоугольные координаты на плоскости, а также изометрические широты, а по ним и геодезические широты вычисляются по громоздким, но легко программируемым формулам¹.

Число зон в азимутальных и конических проекциях сравнительно велико, и они не обладают единообразием. Наиболее полно перечисленным требованиям удовлетворяют получившие глобальное распространение проекции Гаусса — Крюгера и UTM. Они объединяют все положительные качества: небольшое число зон; каждая зона охватывает значительную территорию, ограниченную двумя меридианами с разностью долгот в 3° или 6°; умеренное и легко учитываемое изменение масштабов в пределах зон; единообразие всех зон; универсальность и глобальность координатных систем.

Основными для топографических карт являются поперечноцилиндрические проекции Гаусса — Крюгера и UTM. В России и некоторых других странах применяется проекция Гаусса — Крюгера. В США и ряде других стран мира используется проекция UTM.

Система координат в равноугольной проекции, которую теперь называют проекцией Гаусса — Крюгера, была введена выдающимся немецким ученым Карлом Фридрихом Гауссом для обработки ганноверской триангуляции (1821—1825). В 1912 и 1919 гг. ее развил немецкий геодезист Л. Крюгер. С тех пор она стала называться проекцией Гаусса — Крюгера.

Проекция Гаусса — Крюгера не имеет геометрической интерпретации. Она получена аналитически путем разложения комплексной функции от изометрических координат в степенной ряд. Проекция Гаусса — Крюгера определяется тремя условиями: она равноугольная, сохраняет длины на среднем меридиане и симметрична относительно среднего меридиана и экватора. По существу она является поперечной цилиндрической проекцией. Цилиндр касается среднего меридиана зоны, и на этот цилиндр проектируется вся зона при соблюдении перечисленных выше трех условий.

¹ Подшивалов В.П. Координатная среда для геоинформационных систем // Геодезия и картография, 1997. — № 6. — С. 51—55.

Williams R. T. Lambert and Mercator map projections in geology and geophysics // Computers & Geosciences, 1995. Vol. 21. — N. 3. — P. 353—364.

В проекции Гаусса — Крюгера поверхность земного эллипсоида делится на трех- или шестиградусные зоны, ограниченные меридианами от полюса до полюса. Всего 60 шестиградусных зон.

В 1919 г. Г. Баумгарт внес некоторые предложения, которые были приняты многими государствами и учитываются в настоящее время. Эти предложения следующие:

- в качестве осевых (средних) меридианов использовать меридианы с долготами $0, 3, 6, 9, 12^\circ, \dots$ восточной долготы;
- номера зон указывать перед ординатами;
- чтобы все ординаты были положительными, прибавлять к ним по 500 000 м.

Зоны нумеруются с запада на восток, начиная с нулевого меридиана, так, что к меридиану Гринвича с запада примыкает 60-я зона, а с востока — 1-я зона. В каждой зоне строится своя прямоугольная система координат. Ось абсцисс X ориентирована на север по среднему (осевому) меридиану. Ось ординат Y направлена перпендикулярно осевому меридиану и является изображением экватора. К значению ординаты прибавляется 500 000 м. Перед ординатой пишется номер зоны.

Ранее уже отмечалось, что такой выбор координатных осей позволяет, во-первых, наряду с прямоугольной системой координат использовать полярную систему координат, сохраняя в силе весь математический аппарат, где обычно ось X ориентирована направо (на восток), а ось Y — вверх (на север), и, во-вторых, сохранять у людей привычку ориентироваться относительно направления на север.

Первым государством, принявшим координаты Гаусса — Крюгера, была Австрия. Это произошло в 1917 г. В 1928 г. эта проекция введена в СССР. Вначале ее применяли только для топографических карт масштабов крупнее 1 : 500 000. С 1939 г. ее стали применять и для карт масштаба 1 : 500 000. В 80-х годах она была распространена на весь масштабный ряд топографических планов и топографических карт, включая карты миллионного масштаба.

В России для топографических карт применяют шестиградусные зоны с осевыми меридианами $3, 9, 15^\circ$ и т. д. Неудобства возникают на стыке двух соседних зон. На топографических картах западной зоны одна система координат, а на соседних листах карт восточной зоны — другая. Поэтому на стыках зон предусмотрены перекрытия: западная зона расширена на восток, а восточная — на запад. Этим предоставляется возможность на стыке зон пользоваться картами в системе координат только одной зоны. Переходы смежных зон до широты 28° охватывают полосу шириной по долготе на 1° , на широтах от 28° до 76° — на 2° и на широтах более 76° — на 3° .

Таблица 51

Частные масштабы длин и площадей в проекции Гаусса — Крюгера

Удаления от осевого меридиана по долготе	Частные масштабы	
	длин	площадей
0°00'	1,000 00	1,000 00
0°30'	1,000 02	1,000 04
1°00'	1,000 10	1,000 20
1°30'	1,000 23	1,000 46
2°00'	1,000 39	1,000 78
2°30'	1,000 63	1,001 26
3°00'	1,000 90	1,001 80

Максимальные искажения длин будут на краю зоны. В табл. 51 приведены значения частных масштабов длин m и площадей p , вычисленные для южных широт России на разных удалениях от осевого меридиана зоны.

Можно составить себе представление о том, как изменяются искажения в пределах листов топографических карт. Например, на листах карты масштаба 1 : 100 000 наибольшие различия в масштабах длин составляют 0,027 %, а площадей — 0,054 %. На листе карты масштаба 1 : 1 000 000 эти различия соответственно равны 0,09 и 0,18 %.

Чтобы яснее представить, большие ли это искажения, выполним следующий незамысловатый расчет. Предположим, что на карте имеется квадрат с длиной стороны 100 мм. Попытаемся измерить его стороны и вычислить площадь. Предельная графическая точность карты оценивается величиной 0,2 мм, а предельная точность измерений — 0,1 мм. Пусть погрешность измерения на карте стороны квадрата равна 0,1 мм. Нетрудно подсчитать, что это соответствует относительным погрешностям определения длин 0,1 % и площади квадрата 0,2 %. Эти погрешности превышают вышеупомянутые величины искажений.

Таким образом можно сделать вывод о том, что при выполнении картометрических работ на топографических картах всех масштабов в пределах одной шестиградусной зоны искажениями длин и площадей можно пренебрегать.

В Российской Федерации проекция Гаусса — Крюгера используется как для построения топографических карт суши, так и топографических карт шельфа и карт внутренних водоемов.

Для топографических планов применяются *трехградусные зоны*, осевые меридианы которых совпадают с осевыми и граничными меридианами шестиградусных зон.

При съемках городов и территорий под строительство крупных инженерных сооружений могут быть использованы *частные зоны с осевым меридианом посередине* объекта.

Формулы проекции Гаусса — Крюгера в настоящее время указаны даже в государственном стандарте (ГОСТ Р 51794—2001).

В поперечно-цилиндрической проекции Гаусса — Крюгера масштаб на осевом меридиане $m_0 = 1$.

Наибольшие искажения на краях зоны. Л. Крюгер предложил умножить координаты x , y на некоторый множитель $m_0 < 1$ для того, чтобы искажения длин на краях зоны уменьшить в два раза. Это реализовано в проекции UTM, в которой на осевом меридиане частный масштаб длин $m_0 = 0,9996$.

Проекция UTM разработана в 1936 г. Международным союзом геодезии и геофизики. В 1947 г. принята в Вооруженных силах США. Используется в НАТО. Принята многими национальными и международными картографическими организациями. В этой проекции применяются шестиградусные зоны.

В отличие от проекции Гаусса — Крюгера зоны простираются не от полюса до полюса, а лишь в полосе от параллели 80° ю. ш. до параллели 80° с. ш. Для картографирования околовершинных пространств используется равноугольная азимутальная (стереографическая) проекция.

В координатах UTM зоны нумеруются, начиная с меридиана перемены дат. Поэтому 1-я зона ограничена меридианами с долготами 180° и -174° , а 60-я зона — меридианами $+174^\circ$ и $+180^\circ$. В проекции UTM абсциссе x координат Гаусса — Крюгера соответствует *северное положение* y , а ординате y — *восточное положение* x . Средний меридиан зоны имеет восточное положение 500 000 м. Перед восточным положением пишется номер зоны. Северное положение точки на экваторе для Северного полушария равно 0, а для Южного полушария — 10 000 000 м.

В результате того, что частный масштаб длин на среднем меридиане $m_0 = 0,9996$, в проекции образуются две параллельные ему линии нулевых искажений, расположенные на расстоянии около 180 км по обе стороны от него. На границе зон в южных широтах частный масштаб длин приблизительно равен 1,0003.

Значения координат зависят от используемого земного эллипсоида. Так, координаты UTM, отнесенные к эллипсоиду Кларка 1866 г. и к эллипсоиду WGS-84, могут различаться на десятки и даже сотни метров.

Координаты UTM по модулю меньше координат Гаусса — Крюгера. Предполагается, что и те и другие координаты основаны на одном и том же эллипсоиде. Их различия на каждую сотню километров составляют 40 м. В южных широтах на краю зоны восточные положения UTM будут по модулю меньше ординат Гаусса — Крюгера примерно на 120 м. По модулю в средних широтах северные положения будут меньше абсцисс приблизительно на 2 км, а в высоких широтах — на 3—4 км.

Проекции Гаусса — Крюгера и UTM и их координатные системы широко используются для топографического и тематического картографирования, привязки снимков с космических аппаратов, а также в качестве математической основы наиболее распространенных баз пространственных данных.

§ 59. ПРОЕКЦИИ НАВИГАЦИОННЫХ КАРТ

Различают морские навигационные карты и аэронавигационные карты.

Особенностью морских навигационных карт является использование проекции Меркатора, которая удобна для навигатора тем, что путь корабля, идущего постоянным курсом (по определенному азимуту), изображается на ней прямой линией.

Наряду с сеткой меридианов и параллелей на навигационные карты дополнительно наносят специальные координатные сетки для определения положения корабля радионавигационными средствами. Выделяются также объекты, дающие отражение на экранах локаторов.

В проекции Меркатора с удалением от главной параллели искажения очень быстро нарастают. Чтобы в пределах выделенного пространства искажения были как можно меньше, для морских навигационных карт, создаваемых в проекции Меркатора, для разных акваторий используются разные официально установленные главные параллели. Широты главных параллелей некоторых крупных водоемов указаны в табл. 52 [Л. М. Бугаевский, 1998].

В полярных районах проекция Меркатора совершенно неприменима. Как известно, в этой проекции полюса на карте вообще не отображаются. Поэтому в полярных районах ее заменяет равногольная азимутальная стереографическая проекция.

Для решения специальных навигационных задач применялись и другие картографические проекции: гномоническая, двуазимутальная, двуэквидистантная, Литтрова.

Азимутальная *гномоническая проекция* применяется благодаря ее замечательному для навигации свойству: как уже отмечалось, в ней ортодромия изображаются прямой линией. Если в проекции Меркатора прямой линией изображается локсадромия и проекция удобна для того, чтобы вести корабли по заданному постоянному курсу, то с помощью азимутальной гномонической проекции навигацию можно осуществлять по кратчайшему расстоянию между заданными пунктами.

В *двуазимутальной проекции* ортодромии также изображаются прямыми линиями. Кроме того, не искажаются углы с двух центральных точек на любые другие точки карты. В этих центральных точках устанавливаются радиопеленгаторы. Проекция служит для местоопределения корабля в море.

Двуазимутальная проекция может быть получена аффинным преобразованием гномонической проекции путем сжатия ее в направлении, параллельном линии, соединяющей упомянутые две центральные точки. При совмещении двух центральных точек в одну проекция превращается в гномоническую. Проекцию неза-

Таблица 52

Главные параллели проекции Меркатора для морских карт

Морской объект	Широта, град		
	от	до	главной параллели
Восточно-Китайское море	22	35	30
Средиземное море	30	46	40
Японское море	30	45	40
Каспийское море	36	47	42
Черное и Азовское моря	41	47	44
Татарский пролив	45	52	52
Охотское море	42	63	52
Берингово море	53	66	59
Северное море	51	62	60
Балтийское море	54	66	60
Белое море	64	69	66
Берег Норвегии Норвежского моря	58	65	60
Берег Норвегии Норвежского моря	65	71	69
Мурманский берег Баренцева моря	68	70	69
Обь-Енисейский район Карского моря	67	74	70
Северный Ледовитый океан	70	82	75

висимо предложили дважды: в Германии в 1914 г. (Н. Маугег, 1868—1945) и в Англии в 1922 г. (Ch. F. Close, 1865—1952).

В *двуэклидистантной проекции* сохраняются ортодромические расстояния по прямым линиям от любой точки до двух центральных точек на карте. Проекция используется для определения местоположения корабля по измеренным расстояниям от корабля до двух заданных центральных точек. В этих точках устанавливаются радиостанции дальномерной радионавигационной системы. Двуэклидистантную проекцию независимо предложили авторы двуазимутальной проекции — в Германии (1919) и в Англии (1921).

Проекция Литтрова (J.J. Littrow) разработана в Австрии в 1833 г. В этой проекции центральный меридиан и отстоящий от него на 90° меридиан изображаются прямыми линиями, остальные меридианы — гиперболы. Параллели — эллипсы, кроме экватора, который прямolineен и является большой осью эллипсов. Таким образом, картографическая сетка представляет собой систему софокусных эллипсов и гипербол. Весь земной шар в этой проек-

ции отобразить невозможно. Особенностью проекции является то, что в ней сохраняются углы между прямой линией, параллельной центральному меридиану, и направлением на точку на этом центральном меридиане. В XIX в. проекция использовалась Британским флотом для определения направлений с текущих точек в море на центральный пункт.

В настоящее время благодаря внедрению Глобальных навигационных спутниковых систем и сопутствующих электронных навигационных комплексов, обеспечивающих высокоточное определение местоположения корабля и вождение судна по кратчайшему расстоянию или иному произвольной траектории маршруту, все эти проекции теряют практическое значение и постепенно становятся достоянием истории.

Аэронавигационные карты в зависимости от их назначения и географических особенностей территорий могут быть разделены на *площадные, маршрутные и аэродромные*.

Для построения площадных карт используются:

- проекция Меркатора;
- проекция Гаусса — Крюгера;
- равноугольная коническая проекция;
- равноугольная азимутальная проекция;
- азимутальная гномоническая проекция;
- видоизмененная простая поликоническая проекция;
- равнопромежуточная по вертикалям азимутальная проекция;
- равновеликая азимутальная проекция.

Для построения маршрутных карт используются:

- проекция Меркатора;
- равноугольная коническая проекция.

Для аэродромных карт часто применяются проекции топографических карт.

§ 60. ПРОЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНЫХ КАРТ МИРА МАСШТАБОВ 1 : 1 000 000 И 1 : 2 500 000

В 1891 г. на Пятом Международном конгрессе в Берне профессор А. Пенк предложил создать Международную миллионную карту мира в едином масштабе, единой проекции и с единообразным подбором и отображением содержания. Карта строится как многогранная в видоизмененной простой поликонической проекции (см. § 27). Каждый лист карты ограничен меридианами и параллелями и имеет размеры по широте 4° , по долготе 6° . Листы выше параллели 60° сдваивают, выше параллели 76° — счетверяют. Каждый лист миллионной карты создается самостоятельно. Такой прием освобождает от ощущимых искажений в пределах листа карты. В пределах листа карты искажения длин не превы-

шают 0,10 %, площадей — 0,15 %, углов — 5' (см. рис. 83). Однако при многогранном отображении теряется непрерывность изображения и возникают трудности в соединении смежных листов. Угловые разрывы при соединении четырех листов карты в один блок в южных широтах достигают 25,15'. Проекция применяется для отображения суши (978 листов) и не распространяется на Мировой океан.

В 1956 г. в ООН было внесено предложение о создании Международной карты мира масштаба 1 : 2 500 000. Эта идея не получила необходимой поддержки, и выполнение карты взяли на себя картографо-геодезические службы стран Восточной Европы и СССР. Разработка карты первого издания была завершена в 1975 г.

Для построения этой карты использована многополосная проекция (см. рис. 58). Земная поверхность разделена параллелями 0, ± 24 , ± 60 и $\pm 90^\circ$ на 6 зон: по три к северу и к югу от экватора. Каждая зонадается в целостном изображении. Четыре зоны построены в равнопромежуточной конической проекции и две зоны на полярные области — в равнопромежуточной азимутальной проекции. В азимутальных проекциях широта главных параллелей $\pm 76^\circ$. Широты главных параллелей в конических проекциях равны соответственно: в зонах, прилегающих к экватору, ± 4 и $\pm 21^\circ$, а в среднеширотных зонах — ± 32 и $\pm 64^\circ$.

На картах полярных сегментов длины сохраняются на главных параллелях широт $\pm 76^\circ$. Частный масштаб длин по меридианам равен 0,99. Искажений площадей нет на параллелях $\pm 70^\circ$. На граничных параллелях $\pm 60^\circ$ искажения площадей составляют 2,7 %, длин вдоль параллелей — 3,7 %, углов — 2,6 %.

В конических проекциях частный масштаб длин по меридианам равен 1. На граничных параллелях $\pm 60^\circ$ искажения длин и искажения площадей равны $-2,1\%$, углов — $1,2^\circ$. На граничных параллелях $\pm 24^\circ$ эти искажения соответственно равны 4 % и 2,3 %.

В конических проекциях околоэкваториального пояса искажения длин и площадей не превышают соответственно 1,2 % и 1 %.

Размер листа карты по широте 12° . Размеры листов по долготе зависят от широты. На широтах от 0 до 48° размер листа по долготе 18° , на широтах от 48 до 60° — 24° , от 60 до 72° — 36° , от 72 до 84° — 60° .

Карта мира включает 224 листа плюс 38 перекрывающих листов для целостного изображения стран, лежащих по обе стороны зон граничных параллелей.

По содержанию и оформлению карта относится к общегеографическим картам с гипсометрическим изображением рельефа. Карта дает сопоставимое изображение континентов и Мирового океана. Ее варианты удобны для использования в качестве географической основы тематических карт того же масштаба.

Контрольные вопросы

- 1.** Какие проекции называют геодезическими? Для чего они предназначены?
- 2.** Почему для топографических карт пригодны только равноугольные проекции?
- 3.** Какие еще требования предъявляются к проекциям топографических карт?
- 4.** Какие равноугольные проекции топографических карт получили наибольшее распространение? Почему это произошло?
- 5.** При каких трех условиях получена проекция Гаусса — Крюгера?
- 6.** В каких случаях применения проекции Гаусса — Крюгера используются трехградусные зоны, а в каких — шестиградусные зоны? Как выбираются осевые меридианы трехградусных зон?
- 7.** Какая проекция используется в России для построения топографических карт шельфа и внутренних водоемов?
- 8.** Каковы частные масштабы длин осевых меридианов в проекциях Гаусса — Крюгера и UTM? Как ведется счет зон в этих проекциях?
- 9.** Какая прямоугольная система координат используется в проекции Гаусса — Крюгера и какая в проекции UTM?
- 10.** Какие проекции применяются для навигационных и аэронавигационных карт?
- 11.** Чем примечательны проекции Литтрова, двуазимутальная и двуэклидистантная?
- 12.** Как выбираются широты главных параллелей на картах в проекции Меркатора, предназначенных для навигации?
- 13.** Как построена проекция Международной карты мира масштаба 1 : 1 000 000? Каковы максимальные искажения в этой проекции?
- 14.** Какие проекции образуют проекцию Международной карты мира масштаба 1 : 2 500 000? Как выбраны главные параллели и каковы максимальные искажения в этих проекциях?

ГЛАВА 13

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Преобразования, или трансформирование, изображений производятся, когда новая карта создается по картографическим источникам, составленным в других, нежели составляемая карта, проекциях. Преобразования, т. е. перенос изображений из одной проекции в другую, могут осуществляться и для иных целей, например, для картометрических работ, повышения наглядности или информативности изображений и т. п.

При геоинформационном картографировании упомянутые преобразования выполняются аналитическим путем, а именно пересчетом координат всех точек карты из одной проекции в координаты другой проекции. Существуют два варианта таких преобразований: 1) вычисления выполняются по известным уравнениям и параметрам преобразуемых проекций; 2) используется некий набор математических моделей, аппроксимирующих уравнения взаимосвязи проекций.

§ 61. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ИЗВЕСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ПАРАМЕТРАМ

Этот путь является наиболее строгим и точным. Для его выполнения должны быть известны уравнения и параметры как проекций картографических источников, так и проекции создаваемой карты. Процесс трансформирования складывается из нескольких этапов.

1. Перевод исходных источников из аналоговой формы (карты, снимка) в цифровую, например цифрованием карты с помощью цифрователей или сканированием изображений сканерами.

2. Пересчет координат точек картографического материала из координатной системы цифрового изображения в координатную систему картографической проекции.

3. Вычисление по прямоугольным координатам, известным уравнениям и параметрам проекции широт и долгот всех точек преобразуемого изображения.

4. Вычисление по широтам и долготам прямоугольных координат в проекции составляемой карты и воспроизведение преобразованного картографического изображения.

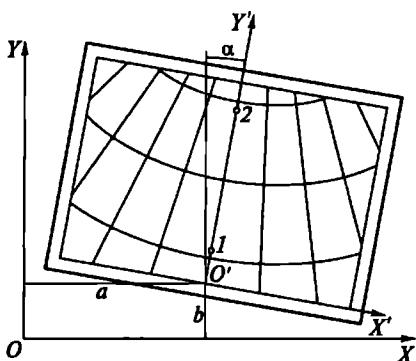


Рис. 197. Взаимное расположение координатных осей цифрового изображения и картографической проекции

ориентацией координатных осей — ось абсцисс направлена направо, ось ординат — вверх.

Для пересчета координат необходимо определить смещения на карте a и b начала координат и определить угол α поворота осей. Для этого должны быть выбраны, по крайней мере, две точки, координаты которых известны в обеих системах. Можно эти точки выбирать на среднем меридиане карты, например точки 1 и 2 на рис. 197. Тогда искомые величины вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= (x_2 - x_1) / (y_2 - y_1); \\ a &= x - x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ b &= y + x' \sin \alpha - y' \cos \alpha.\end{aligned}$$

Вычисления координат точек проекции x' , y' по оцифрованным координатам x , y выполняются по формулам

$$\begin{aligned}x' &= (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha, \\ y' &= (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha.\end{aligned}$$

От вычисленных координат следует перейти к значениям, соответствующим координатной системе, применяемой в математической картографии. Для этого достаточно x' переименовать в y , а y' — в x .

Вычисление прямоугольных координат в проекции составляемой карты и визуализация по координатам преобразованного картографического изображения проблемой не являются. Оценка качества трансформированного изображения производится визуально. Обнаруженные ошибки устраняются.

5. Корректура и оценка качества трансформированных изображений.

Цифровой материал может быть представлен как в растровом формате, так и в векторном. В дальнейшем главным образом предполагается векторное представление материала.

Координатные оси X , Y цифрового изображения и оси X' , Y' картографической проекции, как правило, не совпадают. В общем случае эти две координатные системы будут смещены и несколько повернуты относительно друг друга. В данном случае пользуемся математической

Подробнее рассмотрим лишь вычисления по прямоугольным координатам широт и долгот точек. При этом уравнения и параметры проекции исходной карты полагаются известными. Рассмотрим характерные примеры, связанные с использованием в вычислениях трех геодезических функций: q — изометрической широты; S — длины дуги меридиана протяженностью от экватора до заданной параллели и P — площади сфероидической трапеции, ограниченной экватором, заданной параллелью и двумя меридианами с разностью долгот в 1 радиан. Во всех примерах используются параметры эллипсоида Красовского. В случае применения других эллипсоидов числовые параметры в формулах должны быть перевычислены. Соответствующие такой задаче формулы имеются в курсах сфероидической геодезии [В. П. Морозов, 1979].

Пример 1. Исходная карта составлена в нормальной равнобокой цилиндрической проекции Меркатора. Масштаб карты 1 : 10 000 000. Долгота среднего меридиана $L_0 = 100^\circ$. Параметр проекции (радиус цилиндра, на который спроектирована земная поверхность) $C = 4892,7$ км. Нужно по прямоугольным координатам точек вычислить их широты и долготы.

Решим задачу на примере точки с координатами в масштабе карты $x = 49,199$ см и $y = 34,158$ см. В проекции Меркатора прямоугольные координаты вычисляются по уравнениям:

$$x = Cq; \quad y = C(L - L_0),$$

где L — восточная долгота точки, считаемая от меридиана Гринвича; q — изометрическая широта.

Учитывая масштаб карты, координаты точки выразим в километрах: $x = 4919,9$ км, $y = 3415,8$ км. Находим долготу

$$L = L_0 + \frac{y}{C} \frac{180^\circ}{\pi} = 100 + 40,0006 = 140,0006^\circ.$$

Особенность задачи заключается в вычислении геодезической широты по изометрической широте. Для этого можно использовать формулы, данные в § 30, и применить следующий алгоритм:

находим изометрическую широту

$$q = x / C = 1,005\,559\,3;$$

вычисляем вспомогательную величину

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg}(e^q) - \pi / 2;$$

находим геодезическую широту (эллипсоид Красовского):

$$B = \varphi + [33\,560,7 \sin(2\varphi) + 65,7 \sin(4\varphi)] 10^{-7} \text{ рад.}$$

В градусной мере получаем $\varphi = 49,810\,92^\circ$, $B = 50,0004^\circ$.

Пример 2. Исходной является карта СССР в нормальной равнопромежуточной конической проекции Каврайского. Масштаб карты 1 : 10 000 000. Долгота среднего меридиана $L_0 = 100^\circ$. Параметры проекции $\alpha = 0,811\,823\,8$, $C = 10\,575,2$ км. Центр параллелей лежит на среднем меридиане и определяется координатой $x_0 = 8000$ км, $y_0 = 0$. Вычислить долготу и широту точки,

заданной прямоугольными координатами $x = 37,529$ см и $y = 27,029$ см.
Учитывая масштаб карты, получаем $x = 3752,9$ км и $y = 2702,9$ км.

Для координат нормальной равнопромежуточной конической проекции имеем

$$x = x_0 - \rho \cos \delta; \quad y = y_0 + \rho \sin \delta;$$

$$\delta = \alpha(L - L_0); \quad \rho = C - S.$$

Вычисляем долготу

$$L = L_0 + \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_0}{x_0 - x} \right) = 100 + 40,0002 = 140,0002^\circ.$$

Находим длину дуги меридиана

$$S = C - \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y - y_0)^2} = 5540,965 \text{ км.}$$

Вычисляем вспомогательную величину

$$\beta = S_{\text{км}} / 6367,5585 = 0,87018674 \text{ рад.}$$

Находим геодезическую широту

$$B = \beta + [25184,5 \sin(2\beta) + 37,0 \sin(4\beta)] 10^{-7} \text{ рад.}$$

В градусной мере широта $B = 50,0002^\circ$.

Пример 3. Исходной является карта территории США в нормальной равновеликой конической проекции. Долгота среднего меридиана $L_0 = -95^\circ$. Параметры проекции $\alpha = 0,619883$, $C = 44\,554\,529$ км². Центр параллелей лежит на среднем меридиане и определяется координатой $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ км. Вычислить долготу и широту точки, заданной прямоугольными координатами $x = -7630,85$ км и $y = 1249,36$ км.

В нормальной равновеликой конической проекции координаты вычисляются по формулам

$$x = x_0 - \rho \cos \delta; \quad y = y_0 + \rho \sin \delta;$$

$$\delta = \alpha(L - L_0); \quad \rho = \sqrt{\frac{2}{\alpha}(C - P)}.$$

Вычисляем долготу

$$L = L_0 + \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_0}{x_0 - x} \right) = -95 + 15,0000 = -80,0000^\circ.$$

Находим радиус параллели ρ в проекции

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 7732,45 \text{ км.}$$

Определяем площадь P

$$P = C - \frac{\alpha}{2} \rho^2 = 44\,554\,529 - \frac{0,619883}{2} (7732,45)^2 = 26\,022\,887 \text{ км}^2.$$

Последовательными приближениями вычисляем

$$\sin B = \frac{P}{b^2} - [44\,622,81 \sin^3 B + 268,81 \sin^5 B + 1,71 \sin^7 B] 10^{-7}.$$

В результате двух приближений находим $\sin B = 0,642\,788$, $B = 40,0000^\circ$.

Пример 4. Исходной является карта Азии масштаба 1 : 10 000 000 в которой равновеликой азимутальной проекции. Радиус земного шара $R = 6374,492$ км. Координаты центральной точки проекции $\phi_0 = 40^\circ$, $\lambda_0 = 90^\circ$, $x_0 = 7000$ км, $y_0 = 0$. Необходимо вычислить широту и долготу точки с прямоугольными координатами $x = 94,314$ см, $y = 13,807$ см. С учетом масштаба получаем $x = 9431,4$ км, $y = 1380,7$ км.

Координаты точек в данной проекции вычисляются по формулам

$$x = x_0 - \rho \cos \delta; \quad y = y_0 + \rho \sin \delta;$$

$$\delta = \pi - a; \quad \rho = 2R \sin\left(\frac{Z}{2}\right).$$

Находим азимут a вертикала на исходную точку, радиус альмукантера ρ , и соответствующее ей зенитное расстояние Z :

$$a = \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) = 29,5906^\circ;$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 2796,08 \text{ км};$$

$$Z = 2 \arcsin\left(\frac{\rho}{2R}\right) = 25,3379^\circ.$$

Определяем широту и долготу исходной точки

$$\phi = \arcsin(\sin \phi_0 \cos Z + \cos \phi_0 \sin Z \cos a) = 60,0002^\circ;$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin(\sin Z \sin a / \cos \phi) = 90 + 25,0064 = 115,0064^\circ.$$

В некоторых случаях преобразования выполняются в рамках проекций одного и того же класса, например, для более удобного и точного проведения картометрических работ. При этом параметры проекций остаются без изменений.

Например, для более точного определения площадей равнопромежуточные или равноугольные азимутальные, конические или цилиндрические проекции можно преобразовать соответственно в азимутальные, конические или цилиндрические равновеликие проекции.

В нормальных цилиндрических проекциях перевычисляются только зависящие от широты абсциссы, а ординаты, как функции долготы, остаются без изменений.

В нормальных конических проекциях углы между меридианами не изменяются. Точки же на карте после трансформирования смещаются только вдоль меридианов. Поэтому достаточно перевычислить лишь радиусы параллелей и изменить координаты точек пропорционально изменившимся радиусам.

В нормальных азимутальных проекциях смещения точек происходят точно так же, как и в нормальных конических проекциях: углы между меридианами сохраняются, а координаты ис-

правляются пропорционально изменениям радиусов параллелей.

Пример 5. Рассмотрим пересчет координат x , y нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции шара в координаты x' , y' того же класса равновеликой проекции. Для этого вычисляется расстояние ρ от текущей точки (x, y) до центра параллелей проекции (x_0, y_0) :

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

По радиусу определяется зенитное расстояние точки Z

$$Z = \frac{\rho}{mR},$$

где m — частный масштаб длин по меридианам (в частности $m = 1$); R — радиус земного шара.

Находится расстояние ρ' и координаты точек в равновеликой проекции:

$$\begin{aligned}\rho' &= 2R \sin(Z/2); \\ x' &= x_0 + (x - x_0) \rho'/\rho, \quad y' = y_0 + (y - y_0) \rho'/\rho.\end{aligned}$$

При отсутствии или сложности формул обращения прямоугольных координат в широты и долготы используются различные способы численного решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Могут быть применены способы Ньютона, итераций и др.

М. Э. Флейс предложила унифицированный способ обращения прямоугольных координат в широты ϕ и долготы λ .

Пример 6. Пусть заданы прямоугольные координаты x , y и уравнения проекции $f_1(\phi, \lambda)$ и $f_2(\phi, \lambda)$. Необходимо найти широты и долготы, удовлетворяющие уравнениям

$$x = f_1(\phi, \lambda); \quad y = f_2(\phi, \lambda).$$

Задача решается минимизацией остатка, получаемого после подстановки в уравнения текущих значений ϕ и λ :

$$\varepsilon = \sqrt{[x - f_1(\phi, \lambda)]^2 + [y - f_2(\phi, \lambda)]^2}.$$

Минимум ε ищется последовательным покоординатным приближением. Скорость итерационного процесса зависит от вида линий меридианов, параллелей и отличия углов между ними от 90° . Для нормальных азимутальных, конических и цилиндрических проекций процесс заканчивается за 2—3 итерации¹.

¹ Флейс М. Э. Метод пересчета координат точек из прямоугольных в географические для любой аналитически заданной проекции // Геодезия и картография, 1989. — № 9. — С. 34—36.

§ 62. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ ПРОЕКЦИИ

Для трансформирования проекций рассматриваемыми способами необходимо знать параметры их уравнений. Во многих случаях выходные данные по математической основе на картах отсутствуют. Их приходится восстанавливать измерением координат узловых точек картографических сеток. Рассмотрим определения параметров на примерах нормальных азимутальной и конической проекций.

Нормальная равнопромежуточная азимутальная проекция. Для мелкомасштабных карт обычно используются проекции земного шара. Для радиуса ρ параллели на карте в равнопромежуточной азимутальной проекции можно составить следующее уравнение поправок (v):

$$v = mRZ - \rho,$$

где m — частный масштаб длин по меридиану; R — радиус земного шара; Z — зенитное расстояние данной параллели. Радиусы параллелей вычисляются по снятым с карты координатам полюса (x'_0, y'_0) и координатам узлов картографической сетки (x', y') :

$$\rho' = \sqrt{(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2}.$$

Решение по методу наименьших квадратов позволяет вычислить произведение параметров mR :

$$mR = \frac{[Z\rho']}{[ZZ]}.$$

Квадратными скобками, в соответствии с символикой Гаусса, обозначены суммы заключенных в них величин.

Метод был применен к батиметрической карте Антарктики масштаба 1 : 15 000 000. В результате получено $mR = 6241,546$ км, или в масштабе карты 416,103 мм. Для земного радиуса было принято $R = 6371,1$ км. Шар таким радиусом по размерам, площади поверхности и объему весьма близок к референц-эллипсоиду Красовского. Для параметра данной азимутальной проекции было получено $m = 0,979\,665$.

Нормальная коническая проекция. Для карт России, начиная с масштабов 1 : 1 000 000 и мельче, применяются нормальные равнопромежуточные или равноугольные конические проекции. Для этих проекций верны формулы

$$x = x_0 - mp(L - L_0) \cos \alpha; \quad y = y_0 + mp(L - L_0) \sin \alpha,$$

где x_0, y_0 — координаты центра окружностей радиусов ρ , отображающих параллели на карте; L — текущая долгота; L_0 — долгота среднего меридиана; α — параметр, равный отношению угла между линиями меридианов на карте к разности долгот этих меридиан-

нов, при этом $0 < \alpha < 1$; m — масштабный коэффициент, учитывающий деформацию бумажной основы карты и частный масштаб длин вдоль меридианов. Если бумажная основа карты не подверглась деформированию, то большей частью $m = 1$, а для проекции Красовского и проекций карт ГУГК СССР (1958—1993) $m < 1$. Радиусы параллелей равнопромежуточных и равноугольных проекций вычисляются соответственно по формулам

$$\rho = C - S; \quad \rho = Ce^{-\alpha q},$$

где C — параметр проекции, равный радиусу окружности, отображающей на карте экватор; S — длина дуги меридиана от экватора до заданной параллели; e — основание натуральных логарифмов; q — изометрическая широта.

Итак, картографические сетки нормальных конических проекций имеют по шесть неизвестных параметров — $x_0, y_0, L_0, \alpha, C, m$. Они вычисляются сопоставлением координат x, y , определяемых по формулам, со значениями координат x', y' , снятым с карты. Задача решается по методу наименьших квадратов минимизацией целевой функции:

$$F(x) = \sum (x - x')^2 + \sum (y - y')^2.$$

Для минимизации функции $F(x)$ можно использовать стандартные программы, например, алгоритм квадратичной интерполяции — экстраполяции. Минимизируемая функция $F(x)$ вычисляется в трех точках: $(x - H); x; (x + H)$, где x — текущее приближение данного искомого параметра (не путать с абсциссами точек); H — шаг интерполяции.

После этого она заменяется параболой, проходящей через эти три точки. Искомое значение параметра x соответствует минимуму параболы. Обозначим через $W = F(x - H); V = F(x); U = F(x + H)$ значения функции, вычисленные в трех указанных точках. Искомый параметр x , соответствующий минимуму параболы, определяется по простой формуле¹:

$$x = [W(2x + H) - 4Vx + U(2x - H)] / [2(W - 2V + U)].$$

Задача решается последовательными приближениями попеременно по каждому параметру до тех пор, пока абсолютная разность двух последовательных значений x будет не более установленного допуска ϵ .

Точность вычисленных параметров зависит от точности определения по карте координат, числа узлов, в которых эти координаты определяются, и равномерности их расположения на карте. Используемые в расчетах узлы должны быть распределены по всему полю карты.

¹ Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

Вычисленные и фактические параметры конических проекций

Параметры	Проекция			
	Равнопромежуточная		Равноугольная	
	Вычисления	Фактически	Вычисления	Фактически
x_0 , см	0	0	0	0
y_0 , см	80,00	80,00	70,40	70,40
L_0	100° 00' 02"	100°	99° 59' 55"	100°
C , км	10 357,4	10 357,2	11 324,4	11 324,0
α	0,850 838	0,850 836	0,870 702	0,870 619
m	0,999 969	1	1	1

Для иллюстрации определены параметры нормальных равно-промежуточной и равноугольной конических проекций, предназначенных для карт РСФСР и СССР. Для них параметры вычислены соответственно по 23 и 19 узлам. Результаты определений приведены в табл. 53.

Иногда искомые параметры проекции удобнее определять по отдельным группам. Особенно это важно для многолистных карт, когда карта цифруется по отдельным листам. Способ раздельного определения параметров позволяет избежать трудностей, связанных со сведением результатов цифрования в единую систему координат.

Пример (равнопромежуточная коническая проекция).

Вначале определим долготу L_0 среднего меридиана карты. Это сделать нетрудно: меридиан расположен примерно посередине карты, и его линия параллельна боковым рамкам.

Затем приступим к определению параметров C , α , m . На карте следует выбрать $N > 2$ параллелей с широтами B_1 , B_2 , ..., B_N , выбрать через равные промежутки 3 меридиана с долготами L_1 , L_2 , L_3 и оцифровать узлы пересечений этих меридианов и параллелей. Далее необходимо вычислить отношения длин на карте к соответствующим длинам на эллипсоиде. Частные масштабы длин m по меридианам и частные масштабы длин n по параллелям определяются по формулам

$$m = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta S_m / M}; \quad n = \frac{S_p}{(L_3 - L_1)r / M},$$

где Δx , Δy — приращения координат узлов, лежащих на одном меридиане; ΔS_m — отрезок меридиана на эллипсоиде, соответствующий вычисленным приращениям координат на плоскости; S_p — дуга параллели на карте между крайними меридианами; r — радиус параллели на эллип-

Параметры равнопромежуточной конической проекции

Параметры	C , км	α	m
Вычисленные	10 575,2	0,811 833	0,999 991
Фактические	10 575,2	0,811 824	1

соиде; M — знаменатель главного масштаба карты. Дуги параллелей S_p можно измерить непосредственно на карте или найти по длинам хорд между узлами на крайних меридианах и стрел прогиба на среднем меридиане. Затем из всех найденных значений вычисляется среднее значение параметра m .

Параметры C и α находим по значениям m и n . В частности, для равнопромежуточных конических проекций

$$n = \alpha m(C - S_m) / r.$$

Применив метод наименьших квадратов, находим

$$\alpha = [(BW - DV)/(AD - BB)] / m;$$

$$C = (AW - BV)/(BW - DV);$$

$$A = \sum S_m^2 / r^2; \quad B = \sum S_m / r^2; \quad D = \sum 1 / r^2;$$

$$V = \sum (nS_m) / r; \quad W = \sum n / r.$$

Теперь определим координаты x_0 , y_0 центра параллелей. Для этого выбираем K узловых точек на среднем меридиане и определяем их прямоугольные координаты. Ордината y_0 равна среднему из значений ординат. Используя найденные выше параметры, для выбранных узлов вычисляем радиусы параллелей ρ_i , а затем и значения абсциссы

$$x_0 = \frac{\sum (x_i + m\rho_i)}{K}.$$

В табл. 54 приведены результаты применения этого способа для определения параметров нормальной конической равнопромежуточной проекции карты европейской части СССР масштаба 1 : 1 000 000. Выбрано 18 узлов на пересечении шести параллелей с широтами от 40° до 70° (с шагом через 6°) с тремя меридианами с долготами 40, 50 и 60° .

Хорошая сходимость вычисленных и фактических значений параметров объясняется в значительной мере тем, что в примерах использованы фактически безошибочные значения координат. В действительности координаты, определенные по карте, будут отягощены погрешностями измерений и деформациями бумажной основы карты. Результаты наверняка окажутся менее качественными. Для получения более точных значений параметров потребуются тщательные измерения координат всех узловых точек проекции карты.

§ 63. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ АППРОКСИМИРУЮЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Трансформирование выполняется с помощью некоторой математической модели с неопределенными параметрами a, b, c, \dots . Она позволяет установить функциональную взаимосвязь между координатами точек x, y на исходной карте и координатами тех же точек x', y' на составляемой карте

$$x' = f_1(x, y, a, b, c, \dots); \quad y' = f_2(x, y, a, b, c, \dots).$$

Координаты можно будет перевычислить из одной проекции в другую, если определить параметры выбранной математической модели. Для этого на каждой из карт, исходной и составляемой, опознаются соответственные *опорные точки* и тем или иным способом определяются их прямоугольные координаты x, y на од-

Таблица 55
Модели преобразования картографических проекций

Название модели	Уравнения модели	Число определяемых параметров	Минимальное число опорных точек
Аффинная	$x' = a_0 + a_1x + a_2y$ $y' = b_0 + b_1x + b_2y$	6	3
Проективная	$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + 1}$ $y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + 1}$	8	4
Полиномиальная	$x' = \sum_{s=0}^n \sum_{k=0}^{n-s} a_{sk} x^s y^k$ $y' = \sum_{s=0}^n \sum_{k=0}^{n-s} b_{sk} x^s y^k$	$(n+1)(n+2)$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Гармонически полиномиальная	$x' = \sum_{k=0}^N (a_k P_k - b_k Q_k)$ $y' = \sum_{k=0}^N (a_k Q_k + b_k P_k)$ $P_0 = 1, Q_0 = 0$ $P_1 = x, Q_1 = y$ $P_k = P_{k-1}P_1 - Q_{k-1}Q_1$ $Q_k = P_{k-1}Q_1 + Q_{k-1}P_1$	$2(n+1)$	$(n+1)$

ной карте и x' , y' — на другой. Опорными точками могут служить изображения на картах населенных пунктов, слияний рек, пересечений дорог и т. п. Удобно использовать координаты узловых точек картографической сетки. Каждая опорная точка представляется двумя записанными выше уравнениями. Отсюда легко сообразить, сколько потребуется опорных точек, чтобы определить все параметры выбранной математической модели. Как правило, набирается избыточное число опорных точек, и задача решается по методу наименьших квадратов. Параметры модели отыскиваются минимизацией суммы квадратов уклонений вычисляемых координат от их измеренных значений:

$$\sum \left\{ [x' - f_1(x, y, a, b, c, \dots)]^2 + [y' - f_2(x, y, a, b, c, \dots)]^2 \right\} = \min.$$

Часть опорных точек в обработку не включается. Эти точки служат для контроля и оценки качества преобразований. Контроль и оценка качества производятся сопоставлением вычисленных координат контрольных опорных точек с заданными их значениями.

В табл. 55 указаны основные наиболее часто применяемые модели преобразований. Параметры моделей обозначены латинскими буквами a , b , c , Там же для каждой модели указано количество определяемых параметров и минимально необходимое для их определения число опорных точек.

Аффинное преобразование сдвигает, поворачивает, равномерно сжимает или растягивает изображение по одному или двум направлениям (рис. 198). Поэтому прямые параллельные линии до трансформирования остаются прямыми параллельными линиями и после преобразования.

Возможности этой модели в случае ее применения ко всей карте весьма ограничены. Однако допустимы локальные аффинные преобразования для реализации которых исходная карта разбивается на треугольники с вершинами в опорных точках. Для нахождения параметров достаточно иметь три опорные точки. Поэтому параметры определяются для каждого треугольника. Изображение трансформируется с проекции исходной карты в проекцию составляемой карты по треугольникам, при этом в каждом из них используются только соответствующие ему параметры. Так как два смежных треугольника имеют общую для них сторону, которая соединяет одни и те же опорные точки, на границах треугольников непрерывность изображения не нарушается. Это очень важное свойство.

Проективное преобразование позволяет изображение с одной плоскости пучком прямых перенести на другую плоскость (рис. 199), изменяя масштаб, нарушая параллельность линий, однако по-прежнему прямые линии вновь преобразуются только в прямые линии.

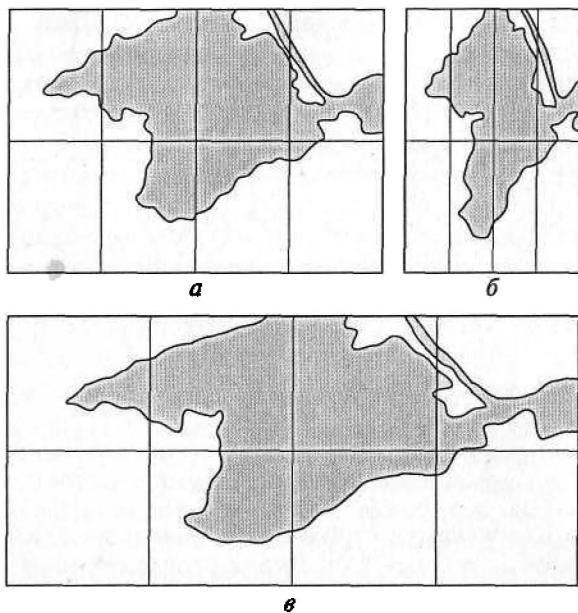


Рис. 198. Аффинное преобразование:

а — исходный рисунок; *б* — равномерное сжатие вдоль параллели; *в* — растяжение вдоль параллели

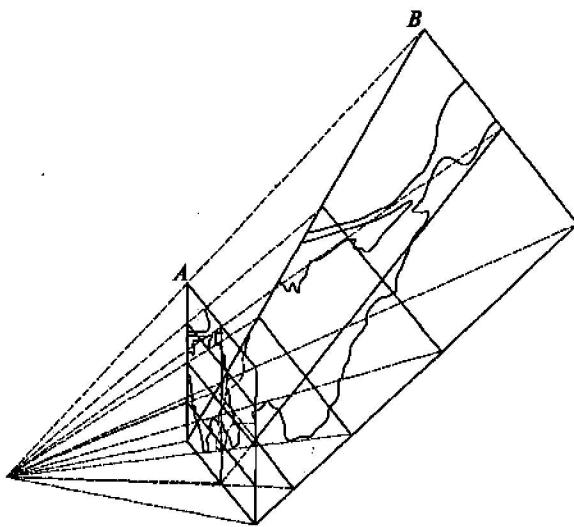


Рис. 199. Проективное преобразование плоскости *A* на плоскость *B*

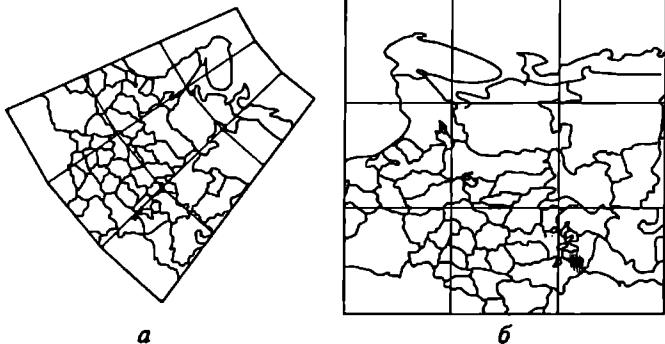


Рис. 200. Кусочно-проективное преобразование:

а — исходное изображение в конической проекции; *б* — преобразованное изображение в цилиндрической проекции (Свентэк Ю. В. Теоретические и прикладные аспекты современной картографии. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 80 с.)

В данном случае также строятся локальные кусочно-проективные преобразования (рис. 200). Для определения параметров проективного преобразования необходимы четыре опорные точки. Ими, например, могут быть четыре узловые точки трапеций между двумя смежными параллелями и меридианами на карте. Непрерывность изображений на стыках трапеций также сохраняется. Смежные трапеции имеют общую сторону, и хотя каждая из трапеций имеет свои параметры преобразования, точка на общей стороне, как для одной, так и для другой трапеции получит одинаковые значения. Поэтому, если линия, например река, пересекает несколько трапеций, то она сохранит непрерывность изображения.

Выбор опорных точек и разбиение плоскости карты на треугольники при аффинном преобразовании, или на четырехугольники при проективном преобразовании осуществляется программными средствами.

Возможность собирать фрагменты в единое целое с сохранением непрерывности изображений — большое достоинство аффинных и проективных преобразований. Другие модели этим свойством не обладают.

Существенный недостаток аффинных и проективных преобразований — потеря точности при переводе кривых линий в прямые, или наоборот — прямых в кривые.

Полиномиальные преобразования являются более сложными, чем выше рассмотренные. С их помощью можно изменять кривизну линий и, следовательно, прямые линии преобразовывать в кривые, и наоборот.

Если вообразить, что преобразуемая проекция построена на эластичном листе, то полиномиальный способ трансформирова-

ния можно интерпретировать как способ совмещения опорных точек эластичного листа путем его деформаций с соответствующими опорными точками в проекции создаваемой карты. По этой причине данный способ называют способом «резинового листа». Это не совсем адекватное название, так как лист «не натягивается», а деформируется — в одних местах он растягивается, а в других — сжимается.

Чем выше степень полинома, тем с большей детальностью и точностью может быть выполнено трансформирование проекций. Однако полиномы высокой степени существенно увеличивают трудоемкость вычислений. Компромисс между качеством и трудоемкостью достигается преобразованием карт по частям. На стыках фрагментов изображений непрерывность в данном случае не сохраняется. Поэтому приходится выделять фрагменты с перекрытиями и использовать специальные программные процедуры для «сшивания» отдельных фрагментов.

Гармонические полиномы используются для преобразований в равноугольные проекции. Это более сложные полиномиальные модели, построенные разложением аналитической функции комплексного переменного в степенной ряд. Частный случай применения этой модели — преобразования, например, координат равноугольных проекций УTM и Гаусса—Крюгера¹.

Известны и другие преобразования.

Сплайн-аппроксимации используются для построения изолинейных карт². В этом случае в опорных точках с координатами x , y на исходной карте задаются не аппликаты z , по которым рисуются изолинии, а значения координат x' и y' в проекции составляемой карты. Задача становится как бы в два раза объемнее, чем при рисовке изолиний. Для реализации на компьютере модели сплайн-аппроксимации число опорных точек не должно быть очень большим, так как с увеличением их числа увеличивается потребный объем оперативной памяти и снижается точность преобразований. Оптимальным можно считать $n < 150$. Поэтому трансформирование ведется разбиением всей плоскости проекции на взаимно перекрывающиеся на 20—25 % участки.

Статистический метод трансформирования основан на использовании метода **кригинга**, при котором по данным в опорных точках строится выборочная (экспериментальная) вариограмма для проведения дальнейших вычислений³.

¹ Серапинас Б. Б. Трансформирование плоских прямоугольных координат гармоническими полиномами // Геодезия и картография, 1999. — № 12. — С. 6—9.

² Сербенюк С. Н., Мусин О. Р. Автоматическое построение изолинейных карт и производных от них изображений // Геодезия и картография, 1986. — № 7. — С. 42—45.

³ Аляутдинов А. Н., Кошель С. М. Геометрическая трансформация картографических проекций // Геодезия и картография, 2000. — № 4. — С. 36—39.

Точность преобразований с помощью аппроксимирующих математических моделей всегда будет ниже, чем при использовании соответствующих строгих формул, и существенно зависит от количества опорных точек и их взаимного расположения на картах.

Контрольные вопросы

- 1.** В каких случаях приходится трансформировать проекции?
- 2.** Какие существуют варианты преобразования проекций? Какие из них обеспечивают наибольшую точность?
- 3.** Как выполняется переход от системы координат цифрового изображения к системе координат проекций?
- 4.** Как выполнить пересчет изометрических широт в географические широты?
- 5.** Как по координатам точек равнопромежуточных по меридианам проекций вычислить географическую широту?
- 6.** Как вычислить географическую широту по координатам точек равновеликих проекций?
- 7.** Поясните суть унифицированного способа пересчета прямоугольных координат в широты и долготы точек.
- 8.** Как определить параметры проекции по координатам узловых точек? Почему приходится определять эти параметры?
- 9.** Какие применяются математические модели для преобразования изображений из одной проекции в другую?
- 10.** Какие могут быть выполнены изменения в изображениях с помощью аффинного преобразования?
- 11.** Чем отличается проективное преобразование от аффинного? Сколько нужно иметь опорных точек для выполнения этих преобразований?
- 12.** В чем суть локальных аффинных и локальных проективных преобразований?
- 13.** Перечислите достоинства и недостатки полиномиальных преобразований. Для каких преобразований используются гармонические полиномы?
- 14.** Как осуществляется контроль качества преобразования изображений из проекции в проекцию с помощью аппроксимирующих математических моделей?
- 15.** Почему по точности способы преобразования по математическим моделям уступают способам преобразования по уравнениям проекций?

ГЛАВА 14

КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ И КАРТОМЕТРИЯ

Методы картометрии позволяют измерять по картам длины отрезков между двумя точками, а также длины ломаных и извилистых кривых линий. На основе этих измерений по картам определяют прямоугольные и географические координаты, расстояния между пунктами, протяженность дорог, рек, берегов водоемов, границ территорий и т. п.

Измеряют также площади участков суши и акваторий, ограниченные замкнутым контуром, азимуты направлений и углы между направлениями. Если на карте отображены, например, способом изолиний, высоты или глубины физических или иных поверхностей, то могут быть вычислены объемы водных, горных и иных массивов, определены вертикальные углы и решен ряд других задач.

На основе картометрических определений рассчитываются морфометрические характеристики формы и структуры объектов физического рельефа земной поверхности, или рельефов разнообразных картографируемых тематических поверхностей.

Все эти измерения выполняются в плоскости картографической проекции, поэтому результаты измерений подвержены искажениям, вносимым проекциями. На них накладываются возможные деформации бумажной или иной основы карты и другие искажения.

Подробное рассмотрение картометрии как метода исследований и ее точности выходит за рамки курса. Ограничимся лишь общими принципами современной картометрии и вопросами, связанными с применением в этих целях картографических проекций. Современные технические возможности геоинформационного картографирования допускают гибкий подход к выбору и применению картографических проекций в целях выполнения измерений по картам.

§ 64. ПРИНЦИПЫ СОВРЕМЕННОЙ КАРТОМЕТРИИ

Еще в Древнем Египте, античной Греции и рабовладельческом Риме применялись простейшие способы определения по картам расстояний и площадей. Позже многое было забыто и утра-

чено. В средние века строгость картографических проекций и точность определений не считались обязательными. Средневековый картограф «объявил бы глупцом всякого, кто бы попытался по его карте определить расстояние от Иерусалима до Англии или от устья Ганга до устья Нила»¹.

Подлинные изменения в картометрии произошли в XIII в., когда моряки Средиземноморья начали составлять точные чертежи берегов. Постепенно вновь стали разрабатываться забытые приемы картометрии и оценки качества ее результатов. Своим рождением картометрия обязана также Г. Меркатору, который в 1569 г. опубликовал карту мира в нормальной равноугольной цилиндрической проекции, названной впоследствии его именем, и поместил на ней врезку с названием «Методы измерения расстояний на местности».

Картометрические работы существенно шагнули вперед в течение последних столетий. В России эти работы связаны с именами многих ученых, занимавшихся исчислением площади государства: В. Л. Крафт, Ф. И. Шуберт, Н. Е. Зернов, Г. Швейцер, И. А. Стрельбицкий, А. А. Тилло, Ю. М. Шокальский².

Картометрией занималась целая плеяда советских ученых. Многие приемы измерений по картам обобщены в фундаментальной работе того времени Н. М. Волкова «Принципы и методы картометрии»³.

В современных условиях картометрические работы продолжают оставаться важными и применяются при исследованиях береговых линий, эрозионных сетей, структур ландшафтов, дна океанов, в расчетах водных и снежно-ледовых ресурсов, объемов добываемых полезных ископаемых и многих других случаях.

Развивается так называемая *динамическая картометрия*: измерение координат, длин, площадей, объемов и других параметров на заданные моменты времени с целью изучения изменений объектов во времени и их перемещений в пространстве⁴.

Современная картометрия основывается на цифровых данных, цифровых моделях местности (ЦММ) и компьютерных технологиях. Существенное место среди компьютерных карт занимают электронные карты на экранах компьютеров. Современную картометрию можно назвать *компьютерной картометрией*. Трудно себе представить, что при наличии геоинформационных тех-

¹ Райт Дж. К. Географические представления в эпоху крестовых походов. — М.: Наука, 1988. — 478 с.

² Берлянт А. М. Образ пространства: карта и информация. — М.: Мысль, 1986. — 240 с.

³ Волков Н. М. Принципы и методы картометрии. — М-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. — 328 с.

⁴ Берлянт А. М., Ушакова Л. А. Картографические анимации. — М.: Научный мир, 2000. — 108 с.

нологий в массовых работах кто-то по карте будет измерять углы транспортиром, длины отрезков — циркулем-измерителем, а площади — палетками или полярным планиметром. Все эти задачи решаются с помощью программных средств на компьютере по координатам, определяющим положение географических объектов в пространстве и хранящимся в соответствующей базе данных.

Принципы компьютерной картометрии вытекают из общих принципов обеспечения качества измерений и основываются на понимании того, что любые измерения неизбежно сопровождаются погрешностями. С применением геоинформационных технологий картометрические определения выполняются настолько легко и просто, что воспринимаются как само собой разумеющиеся технические решения. Между тем геоинформационные технологии не избавили от прежних погрешностей. Подготовленные по картам, снимкам и другим материалам цифровые данные содержат ошибки, которые имели место и в традиционной картометрии. Часто используются разнородные по полноте, достоверности и точности материалы. Более того, появились новые источники погрешностей, обусловленные переходом от непрерывной аналоговой картины на картах и снимках к дискретным, квантованным цифровым изображениям и цифровым моделям местности и рельефа.

На точность картометрических определений влияют следующие погрешности.

1. Погрешности, зависящие от применяемых приборов и методик для снятия данных с карты и перевода их из аналоговой формы в цифровую. Эти погрешности являются не только техническими, т. е. зависящими от совершенства использованных сканеров, цифрователей, алгоритмов и программ. Оказывает влияние и человеческий фактор, обусловленный неправильным выбором технических устройств, методик их применения и качеством выполнения работ.

2. Графическая точность картографических материалов, содержание которых переводится в цифровую форму и хранится в соответствующих базах данных.

3. Картографическая генерализация, проявляющаяся как на исходных картах, так и в базах данных в обобщениях контуров, преувеличениях и преуменьшениях длин и площадей, в смещениях точек, в исключении ряда контурных деталей объектов и самих объектов.

4. Несовершенство цифровых моделей, подвергаемых картометрии.

5. Деформация бумаги или иного материала, на которых отпечатаны карты, по которым формировались цифровые пространственные данные.

6. Свойства картографических проекций используемых карт — характера и величин искажения длин, площадей и углов.

Поэтому анализ исходных материалов и получаемых результатов приобретает даже большую актуальность, чем в традиционной картометрии. По-прежнему важно выяснить:

- *полноту материалов;*
- *их актуальность;*
- *происхождение исходных данных;*
- *достоверность данных;*
- *степень влияния генерализации;*
- *геометрическую точность;*
- *искажения из-за перевода аналоговых данных в дискретные цифровые форматы;*
- *деформацию бумаги;*
- *величины и характер искажений проекций.*

В данной главе основное внимание будет сосредоточено на влиянии картографических проекций на качество картометрических работ.

В компьютерной картометрии важной становится концепция *рационального комплексирования проекций*. Компьютерная картометрия позволяет проводить работы в наиболее подходящих проекциях. Карта создается, цифруется и хранится в одной проекции, называемой базовой. Задачи же, в зависимости от целевых требований и качества цифровых пространственных данных, решаются как в этой, так и в других проекциях. Проекции, в которых карта выводится на экран, в первую очередь должны обеспечить наглядность территорий, быть удобными для визуального анализа, удовлетворять определенным содержательным и эстетическим требованиям. Картометрические задачи следует решать в проекциях, основное требование к которым — отсутствие искажений или малые и небольшие величины искажений и простота их учета.

Если же используется проекция, искажениями в которой пренебречь недопустимо, то выполненные измерения должны исправляться с помощью так называемых *поправочных коэффициентов*. Например, в проекции определена длина отрезка d' или площадь контура F' . Чтобы получить неискаженные значения длины d и площади F , следует воспользоваться поправочными коэффициентами K , на которые нужно умножить измеренное значение длины или площади:

$$d = Kd';$$

$$F = KF'.$$

В случае невозможности подобрать подходящую проекцию, картометрическую задачу следует решать аналитически непосредственно на земном шаре, эллипсоиде или в трехмерном пространстве.

§ 65. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИН ЛИНИЙ

В традиционной картометрии длины кривых линий измеряют циркулем-измерителем с малым, 1—2 мм, раствором. Раствор циркуля последовательно откладывают вдоль извилистой линии. Кривая линия заменяется ломаной, состоящей из отрезков, длина которых равна раствору циркуля. Техническая погрешность измерения длины линии циркулем с постоянным раствором составляет около 0,5 %.

В компьютерной картометрии циркуль-измеритель не используется. Длины отрезков определяют по координатам точек (узлам цифрования), размещенным на линии. Каждой такой точке линии соответствуют две пары координат: широта и долгота и прямоугольные координаты x, y в проекции карты. Расстояние d' между смежными точками i и k вычисляется в плоскости проекции по формуле

$$d' = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}.$$

Длина D плоской кривой определена множеством точек на ней и равна сумме длин отрезков между ними:

$$D = \sum d'.$$

Точки на линии располагают с таким расчетом, чтобы вычисленная длина ломаной как можно точнее соответствовала длине плавной кривой. Кроме того, компьютерные технологии позволяют заменять длины ломаной длиной плавной кривой, проходящей через эти же точки.

Вписываемые плавные кривые могут подбираться многими способами. Прост способ, в котором каждый отрезок ломаной заменяется квадратичной параболой. Парабола подбирается так, чтобы касательная к ней в узле цифрования была параллельна прямой, соединяющей предшествующий и последующий узлы. Этим парабола тесно прижимается к отрезкам ломаной линии. Способ очень прост с вычислительной точки зрения, однако на стыках парабол нарушается непрерывность первых производных.

Разрывов первых производных можно избежать применением сплайн-функций третьей степени. Для упрощения вычислений и в этом случае целесообразно дополнительно поставить прежнее условие. В каждой точке излома касательная к кривой должна быть параллельна прямой линии, соединяющей предшествующий и последующий узлы.

Сплайн-функция удобна для аппроксимации плавных, без резких изгибов, с большим числом узлов цифрования линий. В остальных случаях способ парабол предпочтительнее.

Рассмотренные определения правомерны, если искажения в проекции не оказывают влияния на результаты. Так, например, можно поступать при измерениях на топографических картах.

В общем случае длины линий искажаются в любых проекциях. Если искажениями пренебречь нельзя, то следует вычислять поправочные коэффициенты. Для отрезка небольшой длины поправочный коэффициент обратно пропорционален частному масштабу длин μ :

$$K = 1/\mu.$$

Длины элементарного отрезка и произвольной кривой линии будут соответственно равны

$$d = Kd';$$

$$D = \sum Kd'.$$

В общем случае, при выполнении измерений в произвольных по характеру искажений проекциях, задача существенно усложняется, так как потребуется вычислять частные масштабы длин, ориентированные вдоль линий. В этом отношении сохраняется преимущество за равноугольными проекциями. В равноугольных проекциях частный масштаб длин независим от азимута отрезка.

В нормальных равноугольных азимутальных, конических и цилиндрических проекциях значения частного масштаба длин изменяются только с широтой. Эта особенность позволяет при измерениях длин сравнительно легко учитывать искажения, вносимые проекцией. Учитывая значения частных масштабов длин, для поправочного коэффициента K равноугольных цилиндрической, конической и азимутальной ($\alpha = 1$) проекций можно записать

$$K = \frac{r}{C}; K = \frac{rU^\alpha}{\alpha C}.$$

На картах, построенных в нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора, частный масштаб длин учитывается путем определения длин с помощью градусных и минутных делений на вертикальной рамке карты. Шкалы вертикальной рамки не имеют постоянной длины. Их длины изменяются вместе с изменением частного масштаба длин по мере удаления в ту или иную сторону от главных параллелей. При использовании в проекции секущего цилиндра частный масштаб длин убывает при движении от главной параллели в направлении экватора и нарастает при движении по направлению к полюсу.

В традиционной картометрии длина отрезка, измеряемого в меркаторской проекции, циркулем-измерителем переносится на вертикальную рамку примерно против его середины. По шкале рамки определяется число минут, содержащихся в растворе циркуля. Число минут дуги меридиана равно числу морских миль. 1 морская миля принимается равной 1852 м. При этом допускается погрешность вследствие того, что для эллипсоида вращения

длина дуги меридиана в $1'$ на разных широтах различна. Однако эта погрешность не превосходит 0,52 %, и ею чаще всего пренебрегают.

В компьютерной картометрии описанный метод реализуется программным путем с учетом действительной длины дуги меридиана в $1'$.

Для получения расстояний непосредственно в линейной мере, например в километрах, иногда используют так называемый *переменный меридианный масштаб*. С этой целью на полях карты нормальной равноугольной цилиндрической проекции строят шкалу, деления на которой оцифрованы круглыми значениями километров. Число этих километров соответствует расстоянию вдоль меридиана от экватора до данной метки шкалы. Как видно, при таком способе определения длин выбор параметра C для меркаторской проекции особой роли не играет. Поэтому для упомянутого расстояния от экватора до заданной точки, как следует из уравнений проекции при касательном по экватору цилиндре, можно записать (см. § 30):

$$D = aq = a \ln U.$$

Величину D называют меридиональной частью.

Меридиональная часть — расстояние по меридиану от экватора до текущей параллели в равноугольной нормальной цилиндрической проекции.

На мелкомасштабных картах в равноугольных конической или цилиндрической проекциях для определения расстояний с учетом изменяемости масштаба иногда строят *графический масштаб*. Это некая шкала линейных масштабов. На параллельных линиях, проведенных, например, через 5° по широте, строятся графические масштабы. Каждый из них соответствует частному масштабу длин параллели с данной широтой.

В компьютерной картометрии в случаях, когда линейные искажения в проекции карты превышают допустимые величины погрешностей и невозможно воспользоваться удобными приемами учета искажений, определения длин следует выполнять не в плоскости карты, а на земном шаре, на эллипсоиде или даже в трехмерном пространстве.

Критерием для определения длины линий в данной проекции может служить относительная точность цифрования короткого линейного отрезка длиной 2—3 мм в масштабе карты. Если искажения в проекции превышают погрешности в длине этого отрезка и неудобен учет этих искажений, то в данной проекции определять длины не следует.

Легко показать, что если на карте длина l отрезка определена по координатам его концов, причем каждая координата, как аб-

сцисса так и ордината, в среднем найдены с погрешностью σ , и максимальные искажения длин в проекции равны V_{\max} , то этот принцип может быть представлен следующей простой формулой:

$$V_{\max} < \frac{\sqrt{2}\sigma}{l}.$$

При $l = 3$ мм, $\sigma = 0,1$ мм, допустимые искажения равны $V_{\max} = 0,047$ (4,7 %). Таким образом, частные масштабы длин должны быть в пределах 0,953—1,047. Если учесть, что для многих географических задач точность в длинах, равная 5 %, зачастую бывает достаточной, то переходить на эллипсоид следует лишь тогда, когда частные масштабы длин выходят за пределы значений 0,95—1,05.

Данный расчет показывает, что определения длин можно проводить, например, по топографическим картам, составленным в проекции Гаусса—Крюгера, UTM, по картам территории России в конических равнопромежуточных проекциях и др.

Если искажения в проекции превышают погрешности в длинах отрезков, то в этом случае для всех точек линии плоские прямоугольные координаты x, y следует трансформировать в геодезические широты B и долготы L .

Для вычислений длин на эллипсоиде используются способы решения обратных геодезических задач. Учитывая мелкомасштабность тематических карт, а также то, что отрезки между смежными оцифрованными точками по длине в масштабе карты не превышают нескольких миллиметров, сложные геодезические формулы допустимо упростить.

Для длины линии D , состоящей из суммы отрезков d , получим выражение

$$D = \sum d = \frac{a^2}{b} \sum_i \frac{\sqrt{\Delta B^2 + \Delta L^2 \cos^2 B_m}}{1 + (e')^2 \cos^2 B_m},$$

где $\Delta B, \Delta L$ — разности широт и долгот смежных точек на линии (в радианах); B_m — средняя широта текущего отрезка; a, b, e' — большая и малая полуоси и второй эксцентриситет земного эллипсоида.

Более точно длины отрезков D можно найти решением обратных геодезических задач на эллипсоиде по так называемым формулам со средними аргументами (см. § 67). Однако исследования показывают, что если расстояния на карте между точками цифрования не более 10—12 мм, то различия результатов между приведенной и более точными формулами не превысят графических возможностей бумажных карт и будут менее 0,03 мм в масштабе карты.

Длины ортодромий следует вычислять по широтам и долготам ее конечных точек 1 и 2. Сначала вычисляется в угловой мере длина ортодромии σ на шаре:

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Угловое расстояние, выраженное в радианах и умноженное на радиус шара R , определяет длину ортодромии D в линейной мере

$$D = R\sigma.$$

Пример. По приближенным географическим координатам Стокгольма $\varphi_1 = 59^{\circ} 20'$, $\lambda_1 = 18^{\circ} 04'$ и Бомбэя $\varphi_2 = 18^{\circ} 58'$, $\lambda_2 = 72^{\circ} 50'$ найти длину ортодромии между этими городами. Радиус земного шара, соответствующий средней широте этих городов, равен $R = 6373,9$ км. После вычислений для кратчайшего на земном шаре расстояния между этими городами получаем $D \approx 6240$ км.

Погрешность в расстоянии D может исчисляться километрами. Для получения более точных результатов задачи должны решаться по значительно более сложным формулам на эллипсоиде вращения.

§ 66. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

В традиционной картометрии измерение площадей по картам производят геометрическим способом, с помощью палеток, планиметром или сочетанием этих способов.

Геометрический способ заключается в разбивке измеряемой площади на геометрические фигуры и вычислении их площадей по соответствующим формулам.

Палетки — прозрачные пластинки с нанесенной на них сеткой геометрических фигур. Чаще других применялись сетки квадратов, прямоугольников и шестиугольников. На карту накладывается палетка и в пределах замкнутого контура подсчитывается число полных ячеек сетки и их долей по границе. Площадь участка вычисляется умножением площади одной ячейки на их число.

Измерение площади планиметром заключается в обводе контура измеряемой фигуры обводным рычагом, в отсчетах по счетчику до и после обвода и в умножении разности этих отсчетов на цену одного деления счетчика. Приближенно можно принять техническую погрешность измерения средних по размеру площадей ($200 - 1000 \text{ см}^2$) порядка 0,1 %. В недавнем прошлом планиметр весьма успешно использовался для измерения площадей по картам разных масштабов.

В компьютерной картометрии площади определяют, в основном, двумя способами:

1) способом сеток (решеток) путем подсчета числа ячеек заданного размера в пределах измеряемого участка карты;

2) геометрическим способом по координатам точек на контуре измеряемого участка.

Первый способ напоминает палетки в традиционной картометрии. Ячейки решеток создаются программным путем или в качестве таковых используются элементарные экранные ячейки. Каждой такой ячейке соответствует поправочный коэффициент K , обратно пропорциональный частному масштабу площади p

$$K = 1/p.$$

Площади одной ячейки в проекции карты ΔF соответствует площадь на эллипсоиде

$$\Delta P = K \Delta F.$$

Площадь, ограниченная замкнутым контуром, равна сумме площадей ячеек

$$P = \sum K \Delta F.$$

Задача очень трудоемкая, так как поправочные коэффициенты K нужно вычислять для каждой элементарной ячейки.

Практически задачу упрощают. Вычисляют лишь один коэффициент для данного участка проекции карты. Для этого выбирается трапеция, ограниченная меридианами и параллелями. Она должна включать измеряемый участок. Площадь трапеции F_{tr} на карте определяется методом сеток. Кроме того, аналитически вычисляется значение этой площади на эллипсоиде. На эллипсоиде площадь трапеции P_{tr} , ограниченная двумя меридианами с долготами L_1 и L_2 и двумя параллелями, равна

$$P_{tr} = (L_2 - L_1)(P_2 - P_1),$$

где P_1 и P_2 — площади трапеций в 1 радиан по долготе, по широте они простираются от экватора до соответствующих двух параллелей. Далее предполагается, что искажения площадей, а также деформация бумаги сказываются одинаково по отношению к измеряемой площади и площади контрольной трапеции. Исходная площадь P участка находится из пропорции

$$\frac{P}{P_{tr}} = \frac{\sum \Delta F}{F_{tr}}.$$

Отсюда

$$P = K \sum \Delta F, \quad K = \frac{P_{tr}}{F_{tr}}.$$

Предполагается, что коэффициент K учитывает как искажения проекции, так и деформации бумаги карты. В такой записи этот коэффициент по смыслу соответствует цене одной ячейки решетки.

Тот же прием используется и при определениях площадей геометрическим способом по координатам точек на контуре. Пло-

щадь замкнутого многоугольника в математической системе координат равна

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i).$$

Полигон обязательно должен быть замкнутым, и его 1-я точка должна совпадать с $(n + 1)$ -й точкой. Знак площади зависит от направления цифрования контура. Если полигон оцифрован против часовой стрелки, то его площадь, вычисленная по приведенной формуле, будет иметь отрицательное значение.

В случае применения геометрического способа по плоским координатам контура в проекции карты определяется площадь участка F , затем площадь трапеции в проекции F_{tr} , после чего вычисляется площадь трапеции на эллипсоиде P_{tr} . Искомая площадь участка равна

$$P = KF, \quad K = \frac{P_{tr}}{F_{tr}}.$$

Результаты измерений будут тем точнее, чем медленнее изменяются в пределах измеряемого участка частные масштабы площади.

Как часто следует определять коэффициент K ?

Это зависит от используемых картографических основ и требуемой точности измерений. При выполнении картометрических работ на топографических картах всех масштабов в пределах одной шестиградусной зоны искажения площадей будут меньше или того же порядка, что и графические погрешности определения координат. Поэтому при измерениях по тематическим картам, составленным на математической основе топографических карт, этот коэффициент достаточно определить один раз на лист плана или карты.

При работе с математическими основами средних и мелких масштабов влияния проекции могут быть более значительными. Если частный масштаб площади в пределах измеряемого участка меняется довольно быстро и значительно, то искажения проекции могут внести недопустимые погрешности в результаты измерений. Оценить влияния таких искажений не всегда легко. В компьютерной картометрии для этих целей можно использовать фигуру искажений — изображение в проекции круга, построенного на сфере. Если искажения площади круга недопустимы, цифровые значения координат из текущей проекции следует перевычислить в координаты соответствующей равновеликой проекции.

Для большой группы карт при измерениях не придется учитывать искажения площадей, возникающие в проекциях. Сюда относятся карты, составленные в равновеликих проекциях, в которых в большинстве случаев изображаются материки и полуо-

рия. Кроме того, на листах топографических карт и картах миллионного масштаба искажения площадей так незначительны, что обусловленные ими погрешности часто меньше неизбежных ошибок в размерах площадей, возникающих при составлении и издании карты, а также при измерениях площадей по карте. Практически несущественными часто оказываются искажения площадей и на картах небольших районов и государств.

§ 67. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ

В каждой точке карты, составленной в равноугольной проекции, сохраняются направления стрелок ветров и морских течений, а также направления ортодромий и других линий. Поэтому их направления, например дирекционные углы, могут быть вычислены в плоскости проекции по прямоугольным координатам концов этих стрелок. Для вычисления их азимутов можно использовать следующие формулы обратной геодезической задачи, использующие средние значения аргументов (все угловые величины выражены в радианах):

$$b = B_2 - B_1; \quad l = L_2 - L_1; \quad B_m = (B_1 + B_2)/2;$$

$$Q = b M_m \left[1 - \frac{2l^2 + (l \sin B_m)^2}{24} \right];$$

$$P = l N_m \cos B_m \left[1 + \frac{b^2 - (l \sin B_m)^2}{24} \right];$$

$$a = l \sin B_m \left[1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2(l \sin B_m)^2}{24} \right];$$

$$\operatorname{tg} A_m = P/Q;$$

$$D = \sqrt{Q^2 + P^2};$$

$$A_1 = A_m - a/2;$$

$$A_2 = A_m + a/2 \pm 180^\circ.$$

При длинах отрезков менее 1000 км погрешности в азимутах будут меньше графических ошибок карты. Например, при длине линии 800 км погрешность в азимуте всего лишь 2".

Сложнее обстоит дело с определением азимутов длинных линий. Например, если на карте соединить два удаленных пункта отрезком прямой, то она может сильно отклониться от ортодромии не только по положению, но и по направлению. Поэтому азимуты ортодромий необходимо вычислять аналитически.

На шире азимут a_1 ортодромии в начальной точке 1 и азимут a_2 в конечной ее точке 2 вычисляются по широтам и долготам этих точек по следующим формулам:

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{\cos \varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)};$$

$$\operatorname{tg} a_2 = \frac{\cos \varphi_1 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$

Так, в рассмотренном примере (см. § 65) с ортодромией для азимута направления Стокгольм — Бомбей получаем $a_1 = 111^\circ 27,0'$, а для обратного азимута Бомбей — Стокгольм — $a_2 = 329^\circ 52,2'$.

Азимут локсадромии вычисляется по изометрическим координатам L, q конечных ее точек, или, что в сущности одно и то же, по плоским прямоугольным координатам x, y в нормальной равновысотной цилиндрической проекции Меркатора

$$\operatorname{tg} A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{L_2 - L_1}{q_2 - q_1}.$$

§ 68. УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ ОСНОВЫ КАРТЫ

Одним из источников погрешностей картометрических определений является деформация основы карты. Учет деформаций на географических картах возможен использованием уравнений проекций.

На деформации бумажной основы карты накладываются также искажения картографических изображений вследствие преобразования данных из аналоговой формы в цифровые форматы.

Деформация бумажных основ картографических материалов может быть довольно существенной. В географии для изучения динамики объектов часто прибегают к сопоставлению современных карт с материалами прошедших десятилетий и даже столетий. Приходится учитывать возможные деформации как новейших, так и старинных карт. Приведем несколько примеров, показывающих существенность влияний таких деформаций.

Исследования 1870—1976 гг. динамики береговых линий лиманов между реками Днепр и Дунай обнаружили на картах деформации в 0,2—1,4 мм, а на отдельных листах — даже в 1,3—2,9 мм¹.

¹ Телятник А.А. Об определении динамики береговой линии // Геодезия и картография, 1983. — № 8. — С. 56—58.

Исследования квадратов километровой сетки топографических основ и их копий показали, что их деформация составляла 0,40—0,46 мм¹.

На старых картах деформация чертежно-рисованной бумаги могла достигать 1,5 %².

Деформации современных носителей графической информации на фототехнической пленке составляют 0,05—0,08 %, а на чертежной бумаге — 1 %.

Другая причина деформаций — перевод непрерывных аналоговых данных в дискретную цифровую форму. Часто изображения сканируют, а затем векторизуют. Причины погрешностей сканирования такие³:

- дискретизация — погрешность зависит от разрешения сканера и достигает 0,5—1 пикселя;
- квантование — ошибка резко проявляется при бинарном преобразовании, когда каждый пиксель должен быть идентифицирован либо как черный, либо как белый;
- погрешности сканера;
- неплотное прилегание карты к стеклу сканера — может превысить все остальные погрешности, ибо отклонение точки от плоскости на 1 мм приводит к искажению более 0,3 мм;
- ошибки сшивания отдельных фрагментов в единый лист, когда карта сканируется по частям.

Сканирование картографических материалов осуществляется с точностью 0,2—0,3 мм, а при использовании рулонных или барабанных сканеров — до 1 мм, что выходит за рамки графической точности 0,1—0,2 мм.

Как определяют и учитывают эти деформации?

Деформация топографических карт оценивается по измерениям известной длины сторон квадратов координатной (километровой) сетки.

Деформации средне- и мелкомасштабных географических карт возможно оценить, сопоставив *снятые с карты координаты* (x_k, y_k) узлов картографической сетки с их *вычисленными по уравнениям проекции* значениями (x, y). Искажения в узлах сетки равны

$$\Delta x = x_k - x; \quad \Delta y = y_k - y.$$

Таким образом на карте будут получены величины искажений для всех вершин трапеций. Затем по известным искажени-

¹ Дорожкин В. Р. Исследование деформации копий с материалов топографических съемок // Геодезия и картография, 1978. — № 6. — С. 54—56.

² Волков Н. М. Принципы и методы картометрии. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. — 328 с.

³ Кравченко Ю. А. О технологии получения растровых копий с использованием сканеров малого формата // Информационный бюллетень, ГИС-Ассоциация. — 1999. — № 4(21). — С. 22—23; № 5 (22). — С. 47—49.

ям в узлах сетки интерполяцией вычисляются поправки для текущих точек карты.

Для интерполяционных вычислений могут быть использованы стандартные интерполяционные алгоритмы, нашедшие широкое распространение в картографических геоинформационных технологиях, например такие, как способ Гаусса, способ скользящих средних, сплайн-интерполяция, кусочно-полиномиальная интерполяция, способ кригинга и др.

Контрольные вопросы

- 1. Какие задачи решаются методами картометрии?**
- 2. Что понимают под термином «динамическая картометрия»?**
- 3. На чем основаны процедуры компьютерной картометрии?**
- 4. Какие погрешности влияют на точность картометрических определений?**
- 5. Что предполагает в компьютерной картометрии принцип рационального комплексирования картографических проекций?**
- 6. Какому анализу должны подвергаться материалы, предназначенные для картометрических определений?**
- 7. Что учитывают поправочные коэффициенты при измерениях по картам длин линий и площадей участков?**
- 8. Как учитывают частные масштабы длин при измерениях по картам, составленным в нормальных равноугольных азимутальной, конической и цилиндрической проекциях?**
- 9. Что собой представляют и как используются меридианный и переменный графический масштабы?**
- 10. При каких условиях следует отказаться от измерения длин по картам и перейти к их определению вне проекции?**
- 11. Как учитываются искажения в проекции при компьютерном определении площадей методом решеток и геометрическим методом?**
- 12. Как в компьютерной картометрии определяются азимуты коротких отрезков, а также азимуты ортодромий и локсодромий.**
- 13. Как в компьютерной картометрии можно использовать формулы решения обратной геодезической задачи по средним аргументам?**
- 14. Как определяется деформация бумажных основ топографических карт?**
- 15. Как можно определить деформацию бумажной основы средне- и мелкомасштабных географических карт?**

ГЛАВА 15

РАСПОЗНАВАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Пользователю карты важно знать проекцию, чтобы иметь представление о свойствах и возможностях использования интересующей его карты. Составителям еще в большей степени необходимы сведения о проекции карты, чтобы судить о возможности ее применения в качестве исходного картографического материала при создании новой карты.

Определить или распознать картографическую проекцию — в современных условиях означает выяснить элементы и параметры ее математической и геодезической основ. Для геоинформационного картографирования недостаточно установить название проекции, мало знать ее принадлежность к некой группе или классу. Для качественного перевода изображения карты в цифровую форму и для осуществления обработки и преобразования данных важно также располагать уравнениями проекции, параметрами этих уравнений, а также параметрами использованной геодезической основы.

§ 69. ИНФОРМАЦИЯ О ПРОЕКЦИИ НА КАРТЕ

Самый верный путь распознать проекцию — это прочитать данные о ней на полях карты или в прилагаемой к ней документации. Часто на полях карты указываются такие сведения о проекции, как название, класс, характер искажений. Для нормальных конических и цилиндрических проекций указываются широты главных параллелей, для нормальных азимутальных проекций — широта главной параллели, для косых азимутальных и цилиндрических проекций — координаты полюса сферической полярной системы координат. Во введениях многих географических атласов дается справка об использованных проекциях. В некоторых случаях эта справка очень подробная и содержит макеты карт с изоколами на них частных масштабов площадей и максимальных искажений углов. Приводятся также сведения об использованных эллипсоидах и их параметрах.

Однако на изданных картах далеко не всегда приводится даже название проекции. Часто, особенно это относится к тематическим географическим картам, информация о математической ос-

нове, и тем более о геодезической основе, либо недостаточная, либо отсутствует полностью.

Иногда на картах приводятся названия проекций. В некоторых случаях это определяет проекцию. К таким относятся, например, нормальные конические проекции Красовского и Каврайского для карт СССР, псевдоцилиндрические проекции Эккерта, производная Винкеля и некоторые другие. Зачастую это добавляет мало информации.

На протяжении многовековой истории развития картографии способы построения даже ранее известных проекций менялись и совершенствовались. Нередко забытые проекции заново возрождались. В некоторых случаях за проекцией закреплялись фамилии не ее создателей, а лиц, прилагавших большие усилия к ее внедрению. Это породило неоднозначность в названиях проекций. В разных странах одна и та же проекция может существовать под разными названиями. Некоторые примеры и пояснения приводятся ниже.

Под проекцией Альберса обычно понимают коническую равновеликую проекцию. При этом неизвестно, какая это проекция — с одной или с двумя главными параллелями, и каковы широты этих параллелей.

Краткая надпись «проекция Бонна» добавляет не очень много информации. От выбора широты главной параллели зависит общий вид проекции и распределение ее свойств. При широте главной параллели 90° она переходит в проекцию Вернера. Проекция Р.Бонна разработана им в 1752 г. Почти на два столетия раньше ее предложил К. Вопель. Сходная проекция использовалась еще К. Птолемеем и другими учеными.

Сердцевидная проекция И. Вернера, описанная им в 1514 г., может рассматриваться как частный случай проекции Бонна. Г. Штаб ее применил в 1511 г. Поэтому иногда эту проекцию называют его именем. В некоторых случаях она фигурирует под двойным названием — проекция Штаба — Вернера.

Псевдоцилиндрическая равновеликая проекция Н. Сансона (1690), по-видимому, была известна еще Г. Меркатору. Позже ее применил для звездных карт Д. Флемстид. За рубежом ее часто называют проекцией Сансона — Флемстида.

Псевдоцилиндрическая проекция Мольвейде предложена в 1805 г. Она хорошо известна за рубежом. Применяется и в России. Однако иногда ее называют проекцией Ж. Бабине, который применил ее в 1857 г.

Фамилия И. Ламберта часто приписывается азимутальным равновеликим проекциям. Поперечную равновеликую азимутальную проекцию Ламберта (1772), используемую для карт полушарий, иногда также называют проекцией А. Лорнья, применявшего ее позже.

Если упоминается нормальная коническая проекция Ламберта с изображением полюса в виде точки, то это либо равновеликая с одной главной параллелью, либо равноугольная с одной или двумя главными параллелями проекция. При этом неизвестно, каковы широты этих главных параллелей.

Нормальную азимутальную равнопромежуточную проекцию часто называют проекцией Постеля. Г. Постель ее предложил в 1581 г. Но эта проекция была известна Ж. Веспуччи (1524), а также Г. Меркатору (1569). Родственную проекцию получил А. Бируни еще в XI в.

Равноугольная поперечно-цилиндрическая проекция Гаусса в России применяется для построения топографических карт и существует с двумя названиями. Одни ее называют проекцией Гаусса. К. Гаусс ее предложил в начале XIX в. Однако в начале XX в. Л. Крюгер развил ее теорию и содействовал изданию трудов Гаусса. В честь этого проекцию большей частью называют проекцией Гаусса — Крюгера.

Для большинства проекций ее название ничего не говорит о ее параметрах. Так, если известно, что для карты применена косая равновеликая азимутальная проекция Ламберта, то можно лишь предполагать, где находится ее центральная точка, а следовательно, и центр изокол, которые в этой проекции изображаются концентрическими окружностями. Но даже если измерениями установить ее положение, то останется неясным, где сохраняется главный масштаб карты — в центральной точке или на некотором альмукантаре. Такие же затруднения возникают и в отношении конических проекций. Чтобы получить представление о широтах их главных параллелей, придется выполнить кропотливые измерения.

Фамилию создателя проекции можно указывать лишь вместе с полной информацией о проекции.

Недостаточно поместить на карте надписи типа «Равнопромежуточная коническая проекция», «Произвольная цилиндрическая проекция», «Произвольная псевдоцилиндрическая проекция ЦНИИГАиК», «Видоизмененная поликоническая проекция ЦНИИГАиК». Чтобы выяснить параметры проекций с такими обозначениями, пользователю придется затратить не меньше времени и труда, чем затратили авторы этих проекций при их создании.

В эпоху геоинформационных технологий отсутствие информации о геодезической и математической основах карт ведет к потере части информации и всегда — к потере качества карты. Поэтому в условиях современных геоинформационных технологий эта информация должна входить в состав метаданных или включаться в *паспорт* карты, представляющий собой отдельную структурную единицу информации о созданной и предложенной пользователю карте.

§ 70. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПО КАРТЕ ВИДА ПРОЕКЦИИ И ДАННЫХ О НЕЙ

Для выяснения некоторых характеристик проекции используют очевидные особенности ее картографической сетки:

- вид меридианов и параллелей;
- величины углов, под которыми пересекаются меридианы с параллелями, или под которыми расходятся меридианы с удалением от полюсов;
- изменения длин дуг меридианов с широтой и изменения длин дуг параллелей с долготой.

Распознавание проекций возможно лишь для карт большого территориального охвата. Картографические сетки на картах небольших территорий в разных проекциях похожи друг на друга и, следовательно, слабо различимы.

Картографические сетки нормальных проекций некоторых классов легко распознаются по их виду. Так, если меридианы на карте изображаются равноотстоящими параллельными прямыми, а параллели — прямыми, перпендикулярными к меридианам, то карта составлена в нормальной цилиндрической проекции. У нормальной равнопромежуточной цилиндрической проекции шара параллели равноотстоящие. В равновеликой проекции промежутки между параллелями уменьшаются к полюсам. Если промежутки между параллелями к полюсам увеличиваются очень значительно и на карте отсутствует полярная линия, проекция, скорее всего, является равноугольной.

Если параллели — прямые, параллельные друг другу, средний меридиан — прямая, перпендикулярная к параллелям, а остальные меридианы — наклонные в сторону среднего меридиана прямые, или кривые, выпуклые от среднего меридиана, то карта построена в нормальной псевдоцилиндрической проекции.

Если меридианы — расходящиеся от полюса прямые, а параллели — перпендикулярные к ним концентрические окружности, то карта составлена в нормальной конической проекции. При этом если параллели равноотстоящие, проекция, вероятнее всего, равнопромежуточная. Если с удалением от полюса расстояния между параллелями убывают, то коническая проекция равновеликая, а если, наоборот, увеличиваются, то проекция вероятнее всего равноугольная.

В нормальных азимутальных проекциях параллели — концентрические окружности, а меридианы — радиусы этих окружностей. Если при этом расстояния между параллелями одинаковые, то проекция равнопромежуточная. При уменьшении расстояний между параллелями от полюса к экватору проекция, возможно, равновеликая. При очень значительном уменьшении этих рассто-

Таблица 56

Карты мира (фрагмент определителя картографических проекций)

Вид меридианов	Вид параллелей	Характер изменения длины дуги среднего (прямолинейного) меридиана между экватором и параллелью 20° (30°) меньшее такой же дуги меридиана, отстоящего от среднего по долготе на 180°	Число градусов долготы 80° параллели, содержащиеся в 60-градусной дуге экватора, считая от среднего меридиана	Дополнительные признаки	Название проекции
Прямые	Прямые	Между параллелями 60 и 80° примерно в 3 раза больше, чем между экватором и параллелью 20°	Дуги равны	Сетка и рамка — прямоугольники. Полосы не изображаются	Нормальная равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора
Кривые	Дуги экваториальных окружностей	Не изменяется	Примерно в 1,8 раза	Ок. 160°	Рамка карты — прямоугольник. Полосы в рамке карты не изображаются
					Произвольная поликоническая проекция ЦНИИГАИК (1939—1949)

То же	То же	Примерно в 1,5 раза	Ок. 117°	То же	Произвольная поликоническая проекция ЦНИИГАИК (1950)
		Между параллелями 60 и 80° почти в 1,4 раза	Ок. 121°	»	Произвольная поликоническая проекция ЦНИИГАИК (БСЭ)
	»	»	»		

яний проекция может быть ортографической. В равноугольной проекции промежутки между параллелями значительно увеличиваются от полюса к экватору.

Иногда можно установить, что проекция не относится к равновеликим или равноугольным. Если, например, трапеции, образуемые двумя соседними параллелями и рядом пересекающих их меридианов, не равны по площади, то проекция карты не является равновеликой. Если меридианы и параллели хотя бы в некоторых местах карты пересекаются не под прямыми углами, то карта построена не в равноугольной проекции. Однако, если меридианы и параллели даже по всей карте пересекаются под прямыми углами, это еще не означает, что проекция карты является равноугольной.

В псевдоконических проекциях экватор — всегда дуга окружности.

В поликонических проекциях экватор часто является прямой линией, сетка, как правило, симметричная относительно экватора.

Больше информации можно получить, если по карте произвести простейшие построения и измерения. Прямолинейность линий легко установить визуально или по линейке. Чтобы определить, являются ли параллели окружностями и притом концентрическими, можно поступить так. Наложить на карту лист прозрачной бумаги и отметить на ней три точки на одной параллели и одну точку на соседней параллели. Затем передвигать этот лист вдоль параллели. Если три точки, намеченные на одной кривой, удерживаются на ней, то кривая является окружностью, а если при этом и четвертая точка удерживается на своей кривой, то обе окружности имеют общий центр.

Чтобы на карте выяснить, как изменяются промежутки между соседними параллелями, следует измерить расстояния на среднем и крайнем меридианах. Чтобы выяснить, как изменяются длины дуги параллели между соседними меридианами, следует произвести замеры на параллелях, расположенных в средней части карты.

Определения по карте частных масштабов длин и измерения углов между линиями меридианов и параллелей помогут установить характер искажений в проекции и вычислить частные масштабы площади.

В равноугольных проекциях масштабы по меридианам и параллелям (вертикальным и альмукантарам) равны друг другу и увеличиваются по мере удаления от параллели с наименьшим масштабом (в конических и цилиндрических) или от точки с наименьшим масштабом (в азимутальных). Кроме того, обязательным признаком является ортогональность сетки.

В равнопромежуточных проекциях масштаб длин по одному из главных направлений (в большинстве случаев — по меридиану) постоянен и во многих случаях равен 1.

В равновеликих проекциях масштабы длин по меридианам и параллелям (вертикалям и альмукантарам) в проекциях с ортогональными сетками обратно пропорциональны друг другу. Так как масштаб длин по параллелям увеличивается с удалением от параллели (точки) с наименьшим масштабом, масштаб по среднему меридиану будет уменьшаться с удалением к северу и югу от этой параллели (точки). В конических проекциях параллель с наименьшим масштабом находится недалеко от средней параллели.

Прямолинейный средний меридиан не всегда проходит точно по середине карты. Обычно он располагается в ее средней части, но, например, на картах Австралии с Океанией он смешен к западу.

Для ряда часто употребляемых проекций составлены таблицы — определители проекций¹, в которых указан вид меридианов и параллелей, изменения расстояний между меридианами и параллелями, а также дополнительные особые признаки. Такие таблицы удобны в основном для применения в учебно-методических целях (табл. 56).

Информацию о проекциях можно получить из литературных источников — учебников и учебных пособий, научных статей, монографий, атласов для выбора картографических проекций.

§ 71. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСКАЖЕНИЙ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Всякие искажения изображения, обусловленные влиянием проекции, ведут к изменению его масштабов длин, площадей и углов между отрезками. Воспользуемся указанными ранее формулами для определения частных масштабов длин по меридиану m , параллели n , частного масштаба площади p , искажения угла между меридианом и параллелью ϵ и максимального искажения угла ω .

В формулах для вычислений этих величин присутствуют коэффициенты Гаусса e, g, f, h , которые вычисляются по частным производным уравнений картографической проекции по широте и долготе — x_B, x_L, y_B, y_L .

Если уравнения и параметры проекции неизвестны, то возникают трудности с вычислением этих частных производных и с оценкой искажений. Для цифровых изображений частные производные могут быть определены по координатам узловых точек. Для узловых точек должны быть известны широты и долготы, а также прямоугольные координаты в плоскости исследуемой проек-

¹ Справочник по картографии / Под ред. Е. И. Халтурина. — М.: Недра, 1988. — 428 с.

ции. Используется достаточно удобный алгоритм, основанный на интерполяционной схеме Лагранжа¹. Суть алгоритма состоит в том, что отрезки меридианов и параллелей заменяются параболами второго порядка и вычисляются их производные.

Координаты x, y на меридиане изменяются с широтой B , а координаты x, y на параллели — с долготой L . В общем случае может быть рассмотрена некая общая функция $y = f(x)$.

В этой функции y будет обозначать прямоугольные координаты — либо x , либо y , а аргумент x — либо широту B , либо долготу L .

Производная указанной функции вычисляется по числовым значениям координат, определенных в точках 1, 2, 3 и 4 на данной кривой путем проведения одной параболы через точки 1, 2, 3 и второй параболы через точки 2, 3, 4. После этого вычисляются средние значения соответствующих коэффициентов. По параболе со средними коэффициентами определяется соответствующая производная в точке 2.

Для вычисления производных по широте узловые точки 1, 2, 3, 4 выбираются на меридиане, а для вычисления производных по долготе — на параллели. Точка 2 располагается на пересечении параллели и меридиана. Коэффициенты парабол a_k, b_k, c_k ($k = 1; 2$) находят с помощью уравнений Лагранжа. Ниже указаны формулы описанных вычислений.

Уравнения парабол

$$a_1x^2 + b_1x + c_1; \quad a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Средние значения коэффициентов

$$a = (a_1 + a_2)/2; \quad b = (b_1 + b_2)/2; \quad c = (c_1 + c_2)/2.$$

Производная в точке 2

$$y_x = 2ax_2 + b.$$

Вычисление коэффициентов парабол

$$\begin{aligned} t_j &= y_j \Bigg/ \prod_{i=1, i \neq j}^3 (x_j - x_i); \\ a_k &= \sum_{i=1}^3 t_i; \quad b_k = -\sum_{i=1}^3 t_i \sum_{j=1, j \neq i}^3 x_j; \\ c_k &= \sum_{i=1}^3 t_i \prod_{j=1, j \neq i}^3 x_j. \end{aligned}$$

¹ Агеев М. И., Амек В. П., Марков Ю. И. Библиотека алгоритмов 51 б—100 б: Справочное пособие. Вып. 2. — М.: Сов. Радио, 1976. — 136 с.

Процедура применялась, например, для анализа искажений в поперечной проекции трехосного эллипсоида Фобоса, принадлежащей группе азимутальных проекций (см. рис. 65)¹.

Контрольные вопросы

1. Какие сведения о проекции указываются на полях карты?
2. Почему возникает проблема распознавания проекций?
3. Какие используются очевидные особенности картографической сетки для выяснения некоторых характеристик проекции?
4. Что собой представляют таблицы — определители проекций? Как они составлены?
5. Какие в современных условиях ставятся требования к распознаванию картографической проекции? Что следовало бы указывать в документации карты?
6. Как определить коэффициенты Гаусса, когда изображение представлено только в цифровом виде? Как при этом построен алгоритм определения соответствующих частных производных?

¹ Серапинас Б.Б. Основы теории картографических проекций. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 142 с.

ВЫБОР КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Выбор проекции является составным звеном в процессе создания новой карты. Составителю карты в обязательном порядке придется воспользоваться той или иной картографической проекцией. Естественно следует стремиться к тому, чтобы выбранная проекция обеспечивала оптимальное решение задач по вновь созданной карте.

В распоряжении пользователя всегда имеется некоторый набор проекций. В современных условиях применения геоинформационных технологий используются специализированные коммерческие картографические программные пакеты. Они содержат около сотни картографических проекций, ориентированных, главным образом, на зарубежного пользователя. Поэтому задача выбора картографической проекции уже облегчена тем, что составитель должен выбрать одну из ограниченного списка и применить ее для построения новой карты.

§ 72. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ВЫБОРА ПРОЕКЦИЙ

Факторы, которые определяют выбор картографической проекции, можно разделить на три группы.

К первой группе относятся факторы, характеризующие *объект картографирования*:

- категория объекта (планета, спутник планеты, комета, астероид);
- объект (материк Евразии на планете Земля);
- особенности объекта (географическое положение, размеры, важность отображения сопредельных территорий и прилегающих акваторий, общая конфигурация и направление преимущественной ориентации территории).

Ко второй группе относятся факторы, характеризующие *создаваемую карту*:

- содержание карты (общегеографическая, тематическая, специальная);
- тематика и специализация карты (геофизическая, гравитационного поля);

- особенности (область применения, круг пользователей, способ использования, специфические свойства, масштаб и др.).

К третьей группе относятся факторы, характеризующие *проекцию* создаваемой карты:

- искажения в проекции (характер и величины искажений, распределение локальных и региональных искажений);
- специфика изображения характерных географических объектов (полюсов, экватора, среднего меридиана и др.);
- особенности (вид картографической сетки, условия ее симметрии и ортогональности, специфические свойства и др.).

Выбор проекции делается на основе учета всех факторов. В случае их противоречивости принимается взвешенное компромиссное решение. Разные факторы имеют разную значимость. Так, факторы первой группы являются безусловными. Они твердо заданы, не подлежат изменению и определяют группы классов возможных проекций.

Категория объекта прежде всего определяет, какие должны использоваться проекции — поверхностей регулярных тел (шара, эллипсоида вращения, трехосного эллипсоида) или тел сложных реальных поверхностей. Определяются также параметры геодезической основы.

Указание объекта в определенной мере уже предопределяет выбор проекций, ибо при этом прежде всего будет учитываться предшествующий опыт его картографирования.

Очень важным является географическое положение объекта — у экватора, в средних широтах, полярных областях. Существенное влияние оказывают размеры объекта, общая форма его контура — округлая, вытянутая полоса, и ее преимущественная ориентация — вдоль меридианов, вдоль параллелей или под некоторым другим азимутом. При определении конфигурации и ориентации намечается схематический контур, включающий также предельные территории и прилегающие акватории. Если картографируемая область близка по форме к окружной или овальной, то за ее схематический контур принимают соответственно контур сферического или овального сегмента. Удлиненные области схематически часто принимают за длинные полосы, ограниченные двумя параллелями или альмукантарами. При выборе проекций будет отдано предпочтение тем из них, форма изокол которых ближе всего совпадает со схематизированным контуром территории.

Вторая группа факторов тесно связана с решением поставленной задачи. Они, как правило, также не подлежат изменению.

По содержанию карты разделяют на три большие группы: общегеографические, тематические и специальные.

К общегеографическим картам относятся топографические — масштаб 1 : 100 000 и крупнее, обзорно-топографические — мас-

штаб 1 : 200 000 — 1 : 1 000 000 и обзорные — мельче 1 : 1 000 000. Проекции этих карт обычно уже определены и даже регламентированы.

Специальные карты предназначены для решения конкретного круга задач и рассчитаны на определенных пользователей. Обычно для этих карт проекции также уже установлены предшествующим опытом их применения (см. § 59).

Тематические карты образуют наиболее разнообразную и обширную категорию карт природных и общественных явлений, их сочетаний и комплексов. Содержание, а следовательно, и проекция определяются конкретной тематикой и специализацией карты, кругом пользователей, способом использования и др. Рассмотрим наиболее простой и очевидный пример по учебным картам.

Для школьных карт учащихся младших классов, учитывая их кругозор и запас знаний, при выборе проекций предпочитают избегать относительно сложных решений, которые могут затруднить использование карты или даже привести к неправильному пониманию ее содержания и к ошибочным представлениям о мире. Предпочтительны картографические сетки с равноразделенными параллелями и меридианами, симметричные относительно среднего меридиана и экватора. Привычным должно быть взаимное расположение материков и океанов. Изображение должно быть цельным, сплошным, без разрывов и без повторяющихся участков на карте. Эти карты не предназначены для измерений, поэтому не ставится строгих требований к характеру и величинам искажений.

Для учащихся старших классов часть упомянутых ограничений естественно отпадает. Однако и в этом случае целесообразно сохранить единство проекций на изображениях одного и того же объекта на различных используемых при обучении картах.

Для карт высшей школы еще в большей степени отпадают указанные выше ограничения и могут использоваться сложные проекции.

Факторы двух первых групп являются основой для оценки значимости факторов третьей группы.

Факторы третьей группы в какой-то мере можно корректировать, ранжировать и придавать им разные веса. В итоге они должны помочь из заданной совокупности выделить искомую проекцию.

Следует иметь в виду, что в ряде случаев выбор проекций для новых карт часто бывает уже предопределен традицией, нормативными документами и предшествующими работами. Так, в России все топографические планы, топографические карты и обзорно-топографические карты в обязательном порядке составляются в проекции Гаусса — Крюгера. Идентичное положение и в других странах, где топографические карты также составляются

в определенных проекциях. Все тематические карты, использующие в качестве основы топографические и обзорно-топографические карты, принимают и их проекции. То же справедливо для тематических карт масштаба 1 : 1 000 000, в основе которых лежат листы миллионной международной карты в видоизмененной поликонической проекции. Подобным образом тематические карты масштаба 1 : 2 500 000 составляют на основе общегеографической карты этого масштаба и, следовательно, используют конические и азимутальные равнопромежуточные проекции. Карты России, как правило, составляли в равноугольных или равнопромежуточных конических проекциях. В последние годы все чаще находят применение и равновеликие конические проекции.

При разработке карт на сравнительно ограниченные территории вопрос о выборе проекций теряет остроту. Наиболее ответственен выбор проекций для карт на крупные регионы.

§ 73. ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА И ВЕЛИЧИН ИСКАЖЕНИЙ НА ВЫБОР ПРОЕКЦИИ

Характер и величины искажений в проекции должны быть согласованы со способом использования карты, графическими средствами изображения и масштабом карты.

Важно, чтобы характер искажений в проекции соответствовал не только тематике, но и специализации карты. Карты одного вида могут быть в разных проекциях. Например, крупномасштабные почвенные карты должны быть построены в равноугольных проекциях; почвенные карты даже довольно крупных частей материков могут составляться в равнопромежуточных проекциях, но для почвенных карт Евразии или полушарий уже обязательны равновеликие или близкие к ним проекции. Другой пример — для изучения длин и очертаний отдельных участков береговой линии вполне подходят равноугольные проекции, но они непригодны для карты полушария, где в целом размеры и очертания материков будут сильно искажены.

Характер искажений проекции должен соответствовать способам использования карты, а величины искажений — точности их анализа. В качестве примера рассмотрим целесообразные проекции для климатических и метеорологических карт [Г. А. Гинзбург, Т. Д. Салманова, 1964].

Для тех климатических карт, на которых ряд закономерностей изучают с помощью изолиний, важно сохранять небольшими искажения площадей; однако иногда нежелательно в такой сильной мере поступаться качеством изображения очертаний и форм, как это бывает в равновеликих проекциях. Но если с помощью изолиний приходится в большом количестве интерполировать

промежуточные значения функций, а также определять градиенты, то преимущество переходит на сторону равноугольных проекций. Такие же проекции нужны и в случае, когда стрелками показывают направления, скорость и силу ветров. На некоторых метеорологических картах, например на синоптических, кроме того, обращается внимание и на формы изобар и других изолиний. В подобных случаях по совокупности требований более других подходят равнопромежуточные или близкие к ним проекции. Наконец, в случае, когда требуется спрятать ортодромии, приходится прибегать к гномоническим проекциям.

Очень малые искажения возможны только на картах крупного масштаба. Поэтому измерения длин, площадей, углов, анализ форм с погрешностями менее 1 % должны производиться по топографическим планам и картам, которые, как известно, строятся в равноугольных проекциях.

При величинах искажений длин, площадей или форм около 3 % и размерах территорий радиусом 2—3 тыс. км характер искажений в проекции еще решающего значения не имеет, однако все же следует отдавать предпочтение равноугольным и равно-промежуточным, преимущественно азимутальным, коническим или цилиндрическим проекциям.

По мере увеличения размеров территорий характер искажений также приобретает все большую значимость. Для измерения площадей должны использоваться равновеликие проекции. Для визуального анализа и сопоставления территорий могут применяться произвольные проекции с небольшими искажениями площадей. Длины и формы объектов искажаются в любых проекциях. Однако, если нужны оценки любых видов искажений, следует использовать произвольные проекции, группирующиеся около равно-промежуточных проекций. Для оценок расстояний по определенным направлениям целесообразно применять равнопромежуточные проекции. Для оценок направлений и градиентов нужны равноугольные или с малыми искажениями углов проекции.

Характер искажений связан и со способами изображения. При использовании изолиний пригодятся разные по характеру искажений проекции. Так, для определения площадей, заключенных между изотермами, изобатами и т. д., нужны карты в равновеликих или близких к ним проекциях. При определении по изолиниям картам градиентов, например, температур воздуха, солнечности морской воды, магнитного склонения, а также при интерполяции показателей между изолиниями, уже нужны равноугольные проекции, так как в них масштаб не зависит от направления.

Способы качественного и количественного фона, ареалов, картограмм, картодиаграмм и точечный способ связаны с площадями территориальных единиц, с их дифференциацией по тем или

иным признакам. Поэтому уместны равновеликие проекции или произвольные проекции с небольшими искажениями площадей.

Линейные знаки отображают протяженность объектов — длины береговых линий, дорог, административных границ и др. Рассматривается, важна и форма этих линий. Поэтому наиболее подходящими будут проекции с промежуточными свойствами искажений, группирующиеся около равнопромежуточных проекций.

Знаки движения используются для показа направлений путей, скорости и структуры пространственных перемещений. Поэтому, чтобы правильно отобразить направления (азимуты) малых отрезков этих знаков, необходимо использовать проекции с малыми искажениями углов или равноугольные.

Существует также некоторая общая тенденция, выявляющая взаимосвязь между характером искажений и масштабом карты. Так, для крупномасштабных карт до масштаба 1 : 1 000 000 наиболее предпочтительными являются равноугольные проекции. Затем по мере уменьшения масштабов наблюдается тенденция преимущественного перехода от равнопромежуточных проекций к равновеликим. Далее, для карт в масштабах 1 : 1 000 000 и особенно 1 : 15 000 000 и мельче наиболее предпочтительными оказываются произвольные проекции.

§ 74. ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ВЫБОРА КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Программные картографические продукты, используемые в геоинформационных технологиях, нуждаются в экспертных системах, предназначенных для выбора проекций. Это особенно важно для пользователей, не особо искушенных в математической картографии.

Экспертная система, вероятно, должна работать в интерактивном режиме. Она, используя базы знаний и анализируя ответы пользователя на серии предъявленных ему вопросов, может дать рекомендации по выбору конкретной проекции. Рассмотрим в основных чертах такую систему, ориентируясь в определенной мере на известные разработки¹.

За многие десятилетия и даже столетия накоплен огромный опыт по использованию, а, следовательно, и выбору картографических проекций. Эти знания должны быть formalизованы и помещены в базу знаний соответствующей компьютерной системы. По мере работы системы база знаний будет совершенствоваться, а ее объем — увеличиваться.

¹ Jankowski P., Nyerges T. Design Considerations for MaPKBS — Map Projection Knowledge-Based System // The American Cartographer., 1989 — Vol. 16. — № 2. — P. 85—95.

В основу формализации может быть положен триплет «категория географической территории — объект — атрибуты объекта». Он позволяет построить некоторую удобную для хранения и использования иерархическую структуру. В этой структуре конкретная категория объекта связана с серией объектов, а каждый объект — с серией наборов атрибутов.

Все категории объектов могут быть разделены на две группы: определенные и полуопределенные. Определенные категории — это те, которые допускают присвоение метки (имени), однозначно их определяющей. К таким категориям можно отнести следующие географические территории: континенты, страны света, океаны, моря, государства, а также территориальные административные единицы государств. Указание имени (Евразия, Россия, Омская область и т. п.) однозначно определяет территорию, ее размеры и географическое положение.

На каждый такой объект в базе знаний может быть заведен *кадр*, постоянно хранящий определенную информацию: имя категории, имя объекта, его географическое положение, размеры, преимущественное простиранье и др. Эти данные хранятся постоянно.

Полуопределенные категории — те, которые простым указанием их имени не могут быть однозначно идентифицированы. К ним можно отнести мир, Мировой океан, полушарие, регион.

Мир может быть показан с различных точек видения. В его центре может быть любой континент или даже любой город. Чтобы отобразить мир, необходимо указать центральную точку на карте. Таких центров может быть бесчисленное множество. Задача во многом упрощается, если центр расположен на экваторе. В этом случае достаточно указать средний меридиан карты. На картах России он будет одним, для США — другим, а для Новой Зеландии — третьим.

Подобное можно сказать и про карты Мирового океана.

Полушария тоже строго не определены. Несмотря на то что выделены полушария, имеющие преимущественное значение (Западное, Восточное, Северное, Южное, материковое, океаническое), выбором большого круга на глобусе можно указать еще их бесчисленное множество. Выбор нового полушария может быть продиктован спецификой картографируемого объекта или специфической задачей карты.

Подобно этому границы регионов также могут быть выбраны субъективно, и их количество может оказаться неопределенно большим.

Примерное расположение перечисленных объектов известно, однако для уточнения их локализации и направления преимущественного простиранья каждый раз потребуются данные, которые может сообщить только заинтересованный в этом пользователь.

Определенные данные также потребуются для выбора полюса полярной системы координат на шаре, выбора главных параллелей (альмукантаратов), для вычисления параметров проекции и др.

На полуопределенные объекты также могут быть заведены карты данных, однако они неизбежно будут содержать неопределенные переменные, значения которых придется определять из ответов пользователя. Полученная информация в базу знаний не заносится, хранится временно и используется для расчета текущих параметров проекций.

В предыдущих параграфах было показано, что практикой уже подобраны проекции, ориентированные на определенные территориальные объекты с определенным набором атрибутов. Эта информация, заложенная в базу знаний, может составить ее основу.

Постоянно или временно хранящаяся информация определяет факторы первой группы (географические атрибуты объекта картографирования) и выделяет рекомендуемые классы проекций.

Дальнейшие вопросы к пользователю и его ответы должны выяснить определяющие факторы второй (атрибуты карты) и третьей (атрибуты проекции карты) групп.

Вопросы пользователю должны быть такими, чтобы можно было установить функцию карты, способы ее использования и анализа, картографические способы изображения, масштаб и т. п.

В экспертной системе важное место занимает вопросник, предъявляемый пользователю, а в нем — содержание и количество вопросов.

В итоге система из намеченного набора выделит проекции, удовлетворяющие запросам пользователя, и предъявит ему список из нескольких проекций. Пользователь из этого списка должен будет выбрать окончательный вариант.

На окончательный визуальный выбор немаловажное влияние может оказаться наглядность и эстетичность карты в проекции.

§ 75. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ВЫБОР КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Выбор картографических проекций осуществляется в два этапа. На первом этапе по признакам, характеризующим объект картографирования и создаваемую карту, выделяется некоторая приемлемая совокупность картографических проекций. На втором этапе производится выбор из этой совокупности искомой проекции.

Выбор картографической проекции может осуществляться в автоматизированном режиме или традиционными методами.

Традиционные методы выбора основаны на сравнительном анализе проекций и учете влияния отдельных факторов. Такой анализ может быть очень тщательным. В искомых проекциях со-

ставляются макеты картографических сеток, на которые наносятся изоколы наиболее важных для создаваемой карты показателей искажений. Предпочтение отдается тому варианту, который оптимально удовлетворяет требованиям, предъявляемым к виду картографической сетки, характеру и величинам искажений и их распределению по полю карты. Однако этот весьма трудоемкий процесс часто упрощается, и выбор делается по субъективным оценкам визуального сравнения вариантов проекций.

Автоматизированный выбор имеет целью облегчить процедуры анализа и сделать их более объективными. Суть автоматизированного выбора проекций кратко изложена ниже, главным образом на основе работ профессора Л. М. Бугаевского.

После выделения всех факторов, подлежащих обязательному учету, определяется относительная значимость каждого из них, и формируется обобщенный показатель достоинства картографической проекции в каждой ее точке. Задача выбора проекции может решаться путем выделения проекции с минимальными значениями показателей среди их максимальных величин (критерий минимаксного типа). Другой подход основан на вычислении среднеквадратических значений показателей и выделении проекции с наименьшими их значениями (критерий вариационного типа).

Рассмотрим подробнее применения при выборе проекций критериев вариационного типа. Вначале намечаются частные локальные критерии ε . Каждый частный критерий характеризует проекцию в той ее точке, для которой он определен. В целом для карты площадью S лучшей проекцией будет та, в которой принимает наименьшее значение показатель вида

$$E^2 = \frac{1}{S} \int \varepsilon^2 dS.$$

Для определения этой величины рассматриваемая область карты разбивается на малые участки, число которых n . В средних точках этих участков определяются значения частных критериев ε . После этого рассчитывают показатель

$$E^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2.$$

Таким путем вычисляются значения E^2 по каждому частному критерию ε . Значимость частных критериев ε оценивается их весом P . Значения весов зависят от важности факторов для конкретной создаваемой карты. Для разных карт они будут иметь различные значения. После определения весов определяют средневзвешенный обобщенный критерий

$$E_{\text{об}}^2 = \sum P E^2 / \sum P.$$

Обобщенные критерии вычисляются для всех сравниваемых проекций. Окончательно выбирается та проекция, для которой он имеет наименьшее значение.

В качестве частных локальных критериев ε выбираются следующие показатели, характеризующие карты в текущих точках:

- искажения площадей;
- искажения длин, например по критерию Эйри;
- локальные искажения форм, следовательно, и искажения углов;
- показатели кривизны геодезических линий;
- показатели отклонения кривизны меридиана от ее заданного значения;
- показатели отклонения кривизны параллели от ее заданного значения;
- величины, определяющие отклонения локсодромии от прямой линии;
- величины, характеризующие стереографичность проекции, т. е. отклонения отображенной в проекции окружности от ее математически правильной формы;
- отклонение угла между меридианом и параллелью от его заданного значения.

Очевидно, что можно использовать не только локальные критерии, но и показатели фигур искажений, построенных в заданных частях анализируемой проекции. Недостаток способа — неизбежный субъективизм в определениях весов частных факторов.

Контрольные вопросы

1. Как группируются факторы, которые определяют выбор картографической проекции?
2. Чем выбор проекций для новых карт в ряде случаев уже бывает предопределен?
3. С чем должны быть согласованы характер и величины искажений в проекции?
4. Как характер искажений связан со способами изображения на картах?
5. Какая существует общая латентная тенденция связи между характером искажений и масштабом карты?
6. Как может быть устроена экспертная система, предназначенная для выбора картографических проекций? Какова роль в этой системе пользователя?
7. Что может быть положено в основу формализации информации, предназначенной для выбора картографических проекций?
8. Для чего предназначается автоматизированный выбор проекций? Какие при этом могут использоваться критерии?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

- Бугаевский Л. М.* Математическая картография. — М.: Златоуст, 1998. — 400 с.
- Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д.* Пособие по математической картографии // Тр. ЦНИИГАиК. — Вып. 160. — М.: Недра, 1964. — 456 с.
- Картоведение / Под ред. А. М. Берлянта.* — М.: Изд-во Аспект Пресс, 2003. — 477 с.
- Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1979. — 296 с.
- Павлов А. А.* Практическое пособие по математической картографии. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. — 171 с.
- Салищев К. А.* Проектирование и составление карт. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 238 с.

Дополнительная литература

- Берлянт А. М., Ушакова Л. А.* Картографические анимации. — М.: Научный мир, 2000. — 108 с.
- Бугаевский Л. М.* Теория картографических проекций регулярных поверхностей. — М.: Златоуст, 1999. — 144 с.
- Гедымин А. В.* Картографические проекции советских школьных карт. — М.: Просвещение, 1984. — 111 с.
- Граур А. В.* Математическая картография. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1956. — 372 с.
- Гусейн-Заде С. М., Тикунов В. С.* Анаморфозы: что это такое? — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 168 с.
- Картография с основами топографии / Под ред. А. В. Гедымина.* — М.: Просвещение, 1973. — Ч. 1. — 160 с.
- Картография с основами топографии / Под ред. А. В. Гедымина.* — М.: Просвещение, 1973. — Ч. 2. — 248 с.
- Лурье И. К.* Основы геоинформационного картографирования. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. — 143 с.
- Павлова А. А.* Морские навигационные карты. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1961. — 180 с.
- Серапинас Б. Б.* Основы теории картографических проекций. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 142 с.
- Серапинас Б. Б.* Геодезические основы карт. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. — 133 с.
- Свентэк Ю. В.* Теоретические и прикладные аспекты современной картографии. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 80 с.

Суетова И.А. Эколого-географическое картографирование мирового океана: Учеб. пособие. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002. — 80 с.

Телевизионные исследования Фобоса / Г.А.Аванесов, Б.С.Жуков, Я.Л.Зиман и др. — М.: Наука, 1994. — 168 с.

Топография с основами геодезии / Под ред. А.С.Харченко и А.П.Божок. — М.: Высшая школа, 1986. — 304 с.

Справочники, атласы, стандарты

Аппаратура радионавигационная глобальной навигационной спутниковой системы и глобальной системы позиционирования. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. ГОСТ Р 51794—2001. Изд. официальное. — М.: Госстандарт России. Изд-во стандартов, 2001. — 11 с.

Атлас картографических проекций / Под научным рук. М.Д.Соловьева // Тр. ЦНИИГАиК. — Вып. 61. — М.: Геодезиздат, 1949. — 170 с.

Геоинформатика. Толковый словарь основных терминов / Под ред. А.М.Берлянта, А.В.Кошкакова. — М.: ГИС-Ассоциация, 1999. — 204 с.

Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д. Атлас для выбора картографических проекций // Тр. ЦНИИГАиК. — Вып. 110. — М.: Геодезиздат, 1957. — 239 с.

Картография. Термины и определения. ГОСТ 21667—76. Издание официальное. — М.: Изд-во стандартов, 1976. — 44 с.

Ледовская Л.С. Дополнение к атласу для выбора картографических проекций // Тр. ЦНИИГАиК. — Вып. 110. — М.: Изд-во ОНТИ ЦНИИГАиК, 1975. — 108 с.

Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90). — М.: Координационный научно-информационный центр, 1998. — 36 с.

Справочник по картографии / Под ред. Е.И.Халугина. — М.: Недра, 1988. — 428 с.

Snyder J.P., Voxland P.M. An Album of Map Projections. U.S. Geological Survey Professional Paper 1453. U.S. Government Printing Office: 1989. — 249 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоматизированный выбор картографических проекций 325

Азимут

вертикала 17

главных направлений 35, 36

линейных элементов 32, 33

локсодромии 304

ортодромии 305

Альмукантарат 16

Вертикал 16

Вес параметров уравнений проекции 254, 257

Выбор картографических проекций 152, 185, 197, 198, 230, 249, 266, 318

Гармонические полиномы 135, 141, 287, 291

Географическая сетка 7, 10

Геодезическая основа карт 3, 5

Геодезические проекции 266

Главная параллель 20, 59, 66, 73, 153, 159, 206, 237, 245, 246, 250, 272

Главные направления 35

Группы проекций 58

азимутальных 59

конических 64

цилиндрических 73

Динамическая переменная 22, 24, 28

Длина дуги

меридиана 7, 11

параллели 7, 11

Долгота

среднего меридиана 85

сферическая 7

условная 16, 107

эллипсоидальная (геодезическая) 10

Зенитное расстояние 16, 17

Зоны многолистных карт 88, 267—271

Изокола 43

Изыскание проекций

графическим решением 97

перспективным проектированием

на

плоскость 100

цилиндр 107

конус 111

промежуточные поверхности многократно 104

по эскизам сеток 113, 175, 204

преобразованием ранее известных 117

решением обратной задачи 131, 141, 144

Индикатриса Тиссо 43, 44

Искажения

азимутов 37

длин 34

из-за замены эллипсоида шаром 13, 14

локальные 36, 44

относительные 36, 37

площадей 36

региональные 45

углов

максимальные 38

между меридианом и параллелью 38

форм 39, 43

Картографическая проекция 23

азимутальная 59

внешняя 60, 102, 195

гномоническая 59, 272, 274

обобщенная 62

ортографическая 61, 102, 194

равновеликая 37, 60, 106, 143, 186, 189, 192, 211, 218, 223, 227, 229, 233, 274

равнопромежуточная 60, 98, 106, 144, 178, 180, 188, 191, 223, 227, 233, 245, 275, 283

- равногольная (стереографическая) 40—42, 60, 102, 129, 135, 139, 210, 223, 227
 Аитова 117
 Аитова—Гаммера 117, 118
 Альберса 258
 американская 70
 анаморфизированного пространства 89
 Апиана 100
 аэронавигационных карт 274
 Бермана 162
 Бируни 99
 Бонна 67, 122
 Брауна 108
 Брейзинга 125
 Бризмайстера 57, 118
 БСАМ 108
 БСЭ 174
 Бугаевского 125, 144, 145, 262—265
 Бэкона 99
 Вернера (Штаба—Вернера) 69
 Винкеля 120
 Витковского 251, 252
 Вихеля 63
 Затонского 201
 звездчатая 86
 Гаусса—Крюгера 88, 135, 267, 268, 274
 Гильберта 15, 117, 195
 Гинзбурга 124, 169, 172, 181, 200, 208, 240
 глобуллярная 99
 Голла 108, 157, 163
 двуазимутальная 272, 274
 двуэвидистантная 273
 изоцилиндрическая 110
 Каврайского 167, 168, 200, 209, 237, 243, 253
 карт мира 152
 полушарий 185
 океанов 197
 частей света, материков, их частей 230
 России 249
 Квадратная 158
 коническая 65
 обобщенная 67, 144
 перспективная 111
 равновеликая 128, 143, 240, 258
 равнопромежуточная 144, 240, 249
 равноугольная 134, 240, 247, 256
 Красовского 252
 Лагранжа 57, 71, 139, 171, 217, 221
 Ламберта 71, 73, 161, 271
 Ласковского 149, 179
 Литтрова 273
 МакБраде—Томаса 81
 Маловичко 125
 Международной карты мира масштаба 1:1 000 000 89, 117, 274
 Международной карты мира масштаба 1:2 500 000 88, 274
 Меркатора 37, 40, 74, 134, 152, 199, 206, 246, 247, 272, 274
 Миллера 123, 155, 200, 206
 Михайлова 254
 многогранная 89
 многополосная 87
 Мольвейде 77, 86, 163, 200, 215, 226
 Мольвейде—Гуда 85
 Муревскиса 205
 навигационных карт 272
 наилучшие 146
 Николози 99
 ортогональная 35, 143
 Паолло Тосканелли 76
 переменно-масштабная 91, 94
 ПКО Картографии 253
 Питерса 163
 полизимутальная 63, 64, 99, 143
 поликоническая 70, 143
 видоизмененная 117, 274
 круговая 71
 произвольная 117, 172—179, 241—244
 простая 70
 равновеликая 70
 равноугольная 72, 215
 полицилиндрическая 81, 82, 183
 Постеля 310
 производные 97
 псевдоазимутальная 62, 143, 181, 211, 219, 240
 псевдоконическая 67, 143
 псевдоцилиндрическая 74, 143, 200, 211, 219
 Путиньша 81
 Райза 183
 Робинсона 165, 200, 209, 215
 Роскартографии 254
 реальных поверхностей 125
 Руссиля 267
 с локальным увеличением масштаба 91
 с разрывами 84
 Сансона 79, 143, 147
 Снайдера 141

- Спилгауза 200
 Соловьева 104, 108, 122
 составная 83
 Тиско 259
 Толстовой 63, 144
 Урмаева 144, 145, 158, 166, 208,
 213, 219
 Уэтча 108
 UTM 88, 135, 267, 271
 Хойовеца 147
 цилиндрическая 73
 гномоническая 107
 обобщенная 74
 ортографическая 110
 произвольная 108, 145
 равновеликая 73, 110, 143, 159
 равнопромежуточная 74, 98, 128,
 144, 158
 равноугольная 74
 стереографическая 108
 ЦНИИГАИК 71, 72, 83, 169, 172—
 175, 177, 181, 243, 244, 261
 Чебышева 136, 262
 Эйлера 143
 Эккerta 78
Картографическая сетка 25
 косая 25
 нормальная 25
 поперечная 25
 узловые точки 26
 условных меридианов и параллелей 18
Картометрия 293
 динамическая 294
 компьютерная 294
 на эллипсоиде 300, 304, 305
 учет искажений 296, 298, 302, 306
Класс проекций 58
 азимутальных 59, 62
 псевдоазимутальных 62
 полиазимутальных 63, 64
 конических 65, 67
 псевдоконических 67
 поликонических 70, 73
 цилиндрических 73, 74
 псевдоцилиндрических 75
 полицилиндрических 81, 82
Классификация картографических проекций 50
 по виду нормальной сетки 57
 по составу параметров математических элементов 83
 по ориентировке сетки 25, 51
 по территориальному охвату 51
- по характеру и величинам искажений 52
Конус 111, 237
Координатная сетка 27
 километровая 28
 мильная 28
Коэффициенты Гаусса (первой квадратичной формы) 32, 126, 133, 141
Критерии
 вариационные 45, 148, 326
 локальные 36, 37, 43, 52
 минимаксные 45, 326
 обобщенные 149, 326, 327
 среднеквадратические 45, 326
 фигуры искажений 47, 48
- Линия нулевых искажений** 31
Локсадромия 74, 155, 225, 272
- Масштаб**
 временной 23
 главный длин 20
 главный площадей 21
 определение по карте 35, 37, 45
 меридианный 303
 частный длин 21, 34
 частный площадей 21, 34, 37
 экстремальный 35, 36
- Математическая картография** 3
Математическая основа карт 3
Математический элемент 20
Меридиан 7, 10
 осевой 28, 132
 средний 24, 28, 85, 139
 условный 16
Меридиональная часть 299
- Ортодромия** 59, 104, 272, 301
Отображение
 кругов на шаре 60, 102
 локальных искажений 43, 44
 локсадромии 74, 155
 ортодромии 59, 104
 профиля головы 39, 40, 41
 шара на шар 15
 эллипсоида на шар 12
 равновеликое 13
 равнопромежуточное 14
 равноугольное 13
 сферическое 13
- Параллель** 7, 10
 постоянной кривизны 25, 58

- переменной кривизны 25, 58, 98
условная 16
- Параметры уравнений проекции 24, 122 – 125, 128, 134, 137, 145, 250
определение по карте 283
- Площадь трапеции
сферической 7
сфериодической 12
- Поверхность относимости 5
- Полюс
Изображение на карте 26, 74, 107, 113
условный (сферической полярной системы координат) 16
- Преобразование картографических проекций 277
по математической модели 287, 291
аффинного преобразования 288
проективного преобразования 288
полиномиального преобразования 290
гармонически полиномиального преобразования 291
по уравнениям проекций 277
- Прямая и обратная задачи математической картографии 97, 131
- Радиус шара 6, 12 – 14
планет 6
Земли 6, 13, 14
- Радиус кривизны эллипсоида вращения 10, 11
- Рамка карты 26
- Распознавание проекций 311
- Система координат
географическая сферическая 7
геодезическая эллипсоидальная 10
плоская прямоугольная картографических проекций 24, 28, 269
- плоская прямоугольная математическая 278
- полярная сферическая 16
изометрическая 131, 279
- Теорема Чебышева 136**
- Точка нулевых искажений 31, 59
- Трансформирование картографического изображения 277
- Угол классификации проекций 52
Угол между меридианом и параллелью 32, 38
- Уравнения картографической проекции 23
- Условие ортогональности сетки 133, 142
равновеликости сетки 141, 142
равнопромежуточности сетки 144
равноугольности сетки 133
- Учет деформации бумаги карты 284, 302, 305
- Фигура искажений 45, 57**
- Характер искажений 52**
- Цилиндр 107**
- Широта**
изометрическая 132
сферическая 7
условная 6, 107
эллипсоидальная (геодезическая) 10
- Экватор 7, 10**
условный (полярной сферической системы координат) 16
- Экспертная система выбора картографических проекций 327
- Эллипс искажений 43, 44
- Эллипсоид вращения 8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Геодезические основы карт	5
§ 1. Шарообразная модель картографируемых тел	6
§ 2. Сфериодическая модель картографируемых тел	8
§ 3. Замена эллипсоида шаром	12
§ 4. Отображение шара на шар	15
§ 5. Полярные сферические координаты	16
Глава 2. Элементы математической основы карт	20
§ 6. Масштабы карты	20
§ 7. Картографическая проекция	23
§ 8. Картографические сетки	25
§ 9. Рамки карты и координатные сетки	26
§ 10. Средний меридиан проекции	28
Глава 3. Искажения в картографических проекциях	31
§ 11. Метрические элементы поверхности	31
§ 12. Искажения длин	34
§ 13. Искажения площадей	36
§ 14. Искажения угловых величин	37
§ 15. Искажения форм	39
§ 16. Отображение на картах локальных искажений	43
§ 17. Отображение на картах искажений регионального масштаба	45
Глава 4. Классификация картографических проекций	50
§ 18. Признаки классификации картографических проекций	50
§ 19. Классификация проекций по характеру и величинам искажений	52
§ 20. Классификация проекций по виду нормальной картографической сетки	57
Группа азимутальных проекций	59
Группа конических проекций	64
Группа цилиндрических проекций	73
§ 21. Классификация картографических проекций по составу параметров математических элементов	83
Составные проекции	83
Многополосные проекции	87

Многогранные проекции	89
Проекции анаморфизированного пространства	89
Г л а в а 5. Получение картографических проекций —	
прямые способы	97
§ 22. Графические способы получения проекций	97
§ 23. Перспективное проектирование шара на плоскость ...	100
§ 24. Перспективное проектирование шара на цилиндр	107
§ 25. Перспективное проектирование шара на конус	111
§ 26. Построение проекций по эскизам сеток	113
§ 27. Производные картографические проекции	117
§ 28. Картографические проекции реальных поверхностей .	125
§ 29. Анализ свойств картографических проекций	126
Г л а в а 6. Изыскание проекций с заданными свойствами	131
§ 30. Получение равноугольных проекций	131
§ 31. Наилучшие равноугольные проекции	136
§ 32. Получение равновеликих проекций	141
§ 33. Получение произвольных проекций	144
§ 34. Оптимизация картографических проекций	146
Г л а в а 7. Проекции карт мира	152
§ 35. Нормальные цилиндрические проекции карт мира	152
§ 36. Псевдоцилиндрические проекции карт мира	163
§ 37. Поликонические проекции карт мира	171
§ 38. Азимутальные, псевдоазимутальные и полицилиндрические проекции карт мира	180
Г л а в а 8. Проекции карт полушарий	185
§ 39. Проекции Западного и Восточного полушарий	186
§ 40. Проекции Северного и Южного полушарий	191
§ 41. Проекции материкового и океанического полушарий	192
§ 42. Проекции, передающие сферичность полушарий	194
Г л а в а 9. Проекции карт океанов	197
§ 43. Проекции карт Мирового океана	198
§ 44. Проекции карт трех океанов — Тихого, Атлантического и Индийского.....	205
§ 45. Проекции карт Тихого океана	211
§ 46. Проекции карт Атлантического океана	216
§ 47. Проекции карт Индийского океана	222
§ 48. Проекции карт Южного океана	224
§ 49. Проекции карт Северного Ледовитого океана	226
Г л а в а 10. Проекции карт частей света, материков и их частей	230
§ 50. Карты материков и частей света в азимутальных проекциях	230
§ 51. Карты материков и частей света в конических проекциях	237

§ 52. Карты материков и частей света в псевдоазимутальных и поликонических проекциях	240
§ 53. Проекции карт крупных частей материков.....	244
Г л а в а 11. Проекции карт Российской Федерации	249
§ 54. Карты России в нормальных равнопромежуточных конических проекциях	249
§ 55. Карты России в нормальных равноугольных конических проекциях	256
§ 56. Карты России в нормальных равновеликих конических проекциях	258
§ 57. Карты России в других проекциях	261
Г л а в а 12. Проекции карт конкретного назначения	266
§ 58. Проекции топографических карт.....	266
§ 59. Проекции навигационных карт	272
§ 60. Проекции Международных карт мира масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 2 500 000	274
Г л а в а 13. Преобразования картографических проекций	277
§ 61. Преобразования проекций по известным уравнениям и параметрам	277
§ 62. Оценка параметров уравнений проекции	283
§ 63. Преобразования картографических проекций с помощью аппроксимирующих математических моделей	287
Г л а в а 14. Картографические проекции и картометрия	293
§ 64. Принципы современной картометрии	293
§ 65. Определение длин линий	297
§ 66. Определение площадей	301
§ 67. Определение углов	304
§ 68. Учет деформации основы карты	305
Г л а в а 15. Распознавание картографических проекций	308
§ 69. Информация о проекции на карте	308
§ 70. Определение по карте вида проекции и данных о ней	311
§ 71. Определение искажений цифровых изображений	315
Г л а в а 16. Выбор картографических проекций	318
§ 72. Общие положения выбора проекций	318
§ 73. Влияние характера и величин искажений на выбор проекции	321
§ 74. Экспертная система для выбора картографических проекций	323
§ 75. Автоматизированный выбор картографических проекций	325
Список литературы	328
Предметный указатель	330