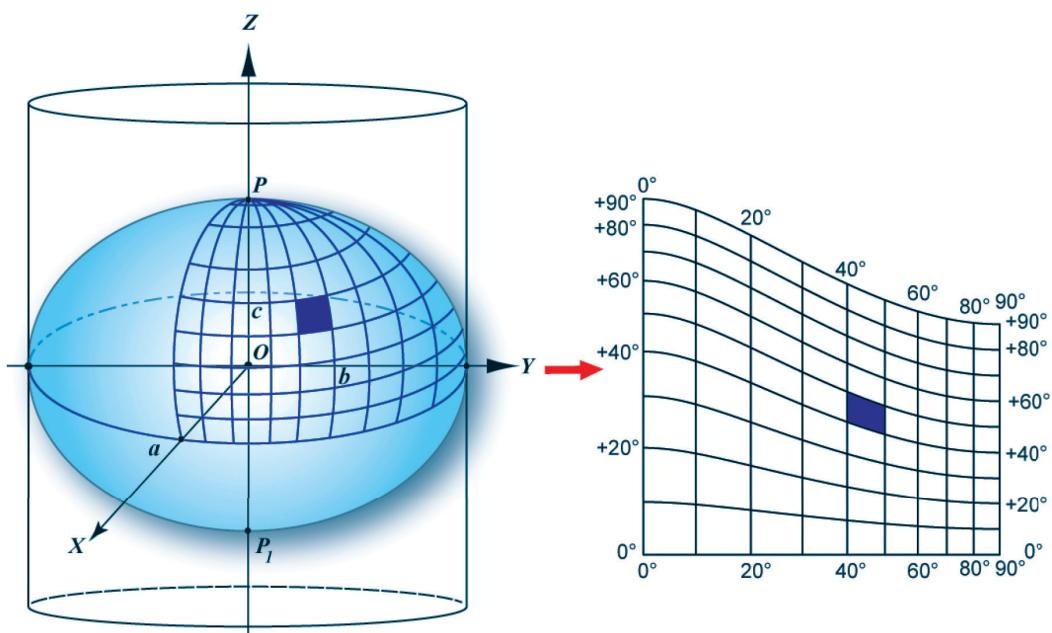




М. В. Нырцов, М. Э. Флейс, М. М. Борисов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ  
ПРОЕКЦИИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Учебное пособие



Издательство Московского университета

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Географический факультет

М. В. Нырцов, М. Э. Флейс, М. М. Борисов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ  
ПРОЕКЦИИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Учебное пособие



Издательство Московского университета  
2022

УДК 912:528.94  
ББК 26.17я73:26.19  
H91

*Рекомендовано Ученым советом географического факультета  
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова  
в качестве учебного пособия для бакалавров, обучающихся  
по направлению подготовки 05.03.03 «Картография и геоинформатика»*

*Рецензенты:*

Е. Л. Касьянова — канд. техн. наук, доцент, СГУГиТ  
С. М. Кошель — канд. геогр. наук, вед. науч. сотр., МГУ имени М. В. Ломоносова

**Нырцов, М. В.**

- H91 Математическая картография. Проекции трехосного эллипсоида : учебное пособие / М. В. Нырцов, М. Э. Флейс, М. М. Борисов. — Москва : Издательство Московского университета, 2022. — 212, [2] с. : ил. — (Электронное издание сетевого распространения).

ISBN 978-5-19-011742-4 (e-book)

В учебном пособии обобщаются знания о геометрии трехосного эллипсоида и его картографических проекциях, как существующих, так и совершенно новых. Приведен новый понятийный аппарат для описания цилиндрических, конических и азимутальных проекций трехосного эллипсоида. Представлена классификация проекций трехосного эллипсоида, проведена оценка искажений. Авторами ставилась задача вывода новых или адаптации существующих картографических проекций трехосного эллипсоида, которые позволили бы создавать как глобальные, так и региональные карты небесных тел.

Учебное пособие предназначено для изучения дисциплины «Математическая картография», читаемой бакалаврам по направлению подготовки 05.03.03 «Картография и геоинформатика» географического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Оно может быть также использовано в качестве справочного пособия обучающимися по смежным специальностям, аспирантами и научными сотрудниками.

**УДК 912:528.94  
ББК 26.17я73:26.19**

ISBN 978-5-19-011742-4 (e-book)

© Нырцов М. В., Флейс М. Э., Борисов М. М., 2022  
© Географический факультет МГУ, 2022  
© Издательство Московского университета, 2022

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Геометрия поверхности трехосного эллипсоида.....	10
1.1. Системы координат в пространстве и на поверхности трехосного эллипсоида.....	10
1.2. Формулы связи геодезической и условно-геодезической широты с планетоцентрической широтой.....	20
1.3. Коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы и элементы бесконечно малой трапеции на поверхности трехосного эллипсоида.....	26
2. Классификация и вывод проекций трехосного эллипсоида.....	36
2.1. Классификация проекций трехосного эллипсоида.....	36
2.2. Цилиндрические проекции.....	43
2.3. Азимутальные проекции.....	58
2.4. Конические проекции.....	73
3. Искажения в проекциях трехосного эллипсоида.....	88
3.1. Производные коэффициентов Гаусса и вспомогательных величин по широте и долготе.....	88
3.2. Производные координат в проекции и вспомогательных величин по широте и долготе.....	90
3.3. Масштаб длин вдоль меридианов.....	103
3.4. Масштаб длин вдоль параллелей.....	106
3.5. Масштаб площадей.....	108
3.6. Масштаб длин вдоль произвольного направления.....	112
3.7. Соотношение углов на эллипсоиде и в проекции.....	116
3.8. Экстремальные масштабы длин и построение эллипса искажений.....	125
4. Различные подходы к разработке проекций трехосного эллипсоида.....	140
4.1. Проекция Карла Якоби.....	140
4.2. Равноугольные и близкие к ним проекции трехосного эллипсоида.....	152
4.3. Перспективные проекции трехосного эллипсоида.....	157
Приложение 1. Вывод формул коэффициентов Гаусса первой квадратичной формы и их производных по широте и долготе.....	159

Приложение 2. Вычисление интеграла, входящего в формулы проекций меридианного сечения.....	168
Приложение 3. Расчеты для доказательства невозможности построения равноугольных цилиндрической и азимутальной проекций.....	186
Список литературы.....	194
Обозначения.....	197
Предметный указатель.....	204

## **Введение**

В 2006 году Международный астрономический союз (МАС) установил определение малых тел Солнечной системы путем их исключения из группы более крупных объектов, таких как планеты, карликовые планеты и их спутники. Таким образом, к малым телам стали относиться астероиды, метеороиды, кометы и прочие тела.

Важнейшими научными задачами в комплексе исследований малых тел Солнечной системы являются определение их формы, размеров, предотвращение астероидно-кометной опасности и картографирование поверхностей. Кометы и астероиды представляют практический интерес из-за химического состава, так как он не изменился со дня основания Солнечной системы. Для картографов значимыми являются те космические данные, которые позволяют создавать как карты поверхностей, так и тематические карты малых тел.

Необходимость карт малых тел Солнечной системы определяется тем, что они предоставляют пользователю научные данные в наглядном графическом виде с возможностью дальнейшего анализа и проведения картометрических работ. Карты небесных тел используются при планировании космических полетов, для обеспечения ориентирования космического аппарата относительно небесного тела и на его поверхности, планирования площадок посадок космических модулей, научно-просветительской работы.

Фигуры малых тел различны от близкой к сфере (например, спутник астероида 243 Ида Дактиль) до экстремально нерегулярной (например, астероид 243 Ида, астероид 433 Эрос). Фигуры тел, подобных Эросу, к тому же еще и сильно вытянуты. Именно фигура является ключевым фактором для выбора референц-поверхности при проектировании математической основы карт небесных тел. Согласно исследованиям академика А. Н. Ляпунова, наиболее устойчивыми фигурами равновесия небесных тел являются те из них, которые имеют форму, близкую к трехосному эллипсоиду. Трехосный эллипсоид используют в своих исследованиях геодезисты и геофизики.

В 70–80-х годах XX века интерес картографов к проекциям трехосного эллипсоида возрос в связи с получением космических изображений малых тел, в частности спутников Марса Фобоса и Деймоса, которые до 2006 года считались малыми телами. Фобос и Деймос стали первыми небесными телами, для фигур которых очевидной стала необходимость учитывать их отличие от сферы и эллипсоида вращения. Будем придерживаться

определения несферических небесных тел, данного в работе 1986 года Ф. Стука: несферическими считаются те тела, у которых минимальный и максимальный радиусы, идущие из центра масс, отличаются более чем на 10%. Для них трехосный эллипсоид вошел в число основных референц-поверхностей наряду со сферой и эллипсоидом вращения.

В 1985 году Дж. Снайдер вывел приближенные формулы равноугольной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида. А уже в 1988 году проф. Л. М. Бугаевский (МИИГАиК) на основе исследований, проведенных им в 1971 году, разработал для картографирования Фобоса нормальную цилиндрическую проекцию трехосного эллипсоида, считавшуюся в то время равноугольной. В этой проекции была составлена карта поверхности Фобоса. Равноугольным проекциям трехосного эллипсоида были посвящены работы проф. Б. Б. Серапинаса (МГУ имени М. В. Ломоносова) в период 1983–1984 годов.

Картографические проекции создаются и математиками, и картографами. Новые проекции возникают как вследствие развития теории отображения поверхностей, так и для решения задачи составления конкретных карт. Картографы при выводе проекций трехосного эллипсоида зачастую используют упрощенный подход с помощью аппроксимации сферой или эллипсоидом вращения. Такой подход корректен только для поверхностей, мало отличающихся от аппроксимирующих. В общем виде трехосный эллипсоид давно используется математиками как наиболее простой вариант поверхности, задаваемой дифференцируемой функцией в трехмерном пространстве. Теоретически равноугольную проекцию трехосного эллипсоида предложил К. Якоби в своих лекциях, прочитанных в 1842–1843 годах и изданных в 1866 году. На лекции Якоби ссылаются в настоящее время многие картографы, так как в этих лекциях получено аналитическое выражение подобия бесконечно малых фигур.

Выбор картографической проекции может зависеть от того, какой математической поверхностью целесообразно аппроксимировать физическую поверхность картографируемого небесного тела, а также от того, в какой системе координат представлены исходные данные, и от возможностей доступного программного обеспечения. При картографировании несферических небесных тел составители карт старались либо непосредственно отобразить форму тела, либо подчеркнуть ее особенности за счет отличия проекции от обычно используемой для Земли проекции с заданными свойствами. Несмотря на то, что карты несферических небесных тел создаются сравнительно недавно, уже есть проекции, которые представляют поверхность Фобоса в «привычном» виде. На наш взгляд, наряду с рав-

напромежуточными проекциями сферы (цилиндрической и азимутальной) такими «узнаваемыми» проекциями являются проекция Бугаевского и морфографические проекции Ф. Стука.

Картографические координатные системы, элементы вращения небесных тел и референц-поверхности устанавливает Рабочая группа по картографическим координатам и элементам вращения при МАС. По результатам заседаний Рабочей группы вырабатываются рекомендации для определения северного полюса и особенностей вращения планет и спутников, карликовых планет, комет и других тел, выбору нулевого меридиана и картографических координатных систем, а также референц-поверхностей, с помощью которых аппроксимируется фигура небесного тела. Все это отражается в отчетах, выпускаемых, как правило, каждые три года. Отчеты МАС являются руководящими документами для картографирования. Составители карт приступают к процессу создания карты только после установления МАС положения полюсов, «сторон света (запад, восток)», оси вращения и других характеристик небесных тел.

В соответствии с рекомендациями МАС большинство МТ и некоторые естественные спутники планет (спутники Марса, часть спутников Юпитера и Сатурна, Урана и Нептуна и др.) следует аппроксимировать трехосным эллипсоидом. При этом в отчете 2015 года, который актуален и сегодня, указывается: «....сферические референц-поверхности часто используются для установления масштаба и расчета картографических проекций. Использование трехосного эллипсоида усложнило бы вычисления, в особенности, связанные с картографическими проекциями». Поэтому для большинства современных карт небесных тел продолжают использовать сферу, игнорируя трехосный эллипсоид.

В связи с перечисленными выше фактами перед авторами пособия встал задача по устранению пробела в использовании как референц-поверхности трехосного эллипсоида, так и его картографических проекций. Для этого были обобщены знания о геометрии трехосного эллипсоида и его картографических проекциях — как существующих, так и совершенно новых. Предложен новый понятийный аппарат для описания цилиндрических, конических и азимутальных проекций трехосного эллипсоида. Вывод формул этих проекций основан на том, что исходные данные представлены в планетоцентрических широтах и долготах, так как это основная система координат для данных о небесных телах. Если при представлении данных используется геодезическая или условно-геодезическая широта, предлагаются формулы связи с планетоцентрическими координатами.

Необходимо учитывать, что все теоретические исследования картографических проекций проводились с учетом направления отсчета долгот на картах небесных тел на

восток. Это связано с тем, что небесные тела вращаются вокруг своей оси в противоположные стороны (прямо или обратно). При практической реализации проекций в виде карт в пособии использовалось направление отсчета долготы, установленное МАС для конкретного небесного тела. Так, для приведенных карт астероидов 433 Эрос, 253 Матильда, спутника Марса Фобос направление отсчета долгот идет на запад, в то время как для составления карт, например, астероидов 21 Лютация, 2867 Штейнс и 4 Веста необходимо учитывать, что отсчет долгот направлен на восток.

Авторами ставилась задача вывода новых или адаптации существующих картографических проекций трехосного эллипсоида, которые позволили бы создавать как глобальные, так и региональные карты. Цилиндрические проекции в сочетании с азимутальными подходят для глобального картографирования, а конические — для регионального.

Вывод формул цилиндрических, азимутальных и конических проекций упрощается за счет того, что одна из плоских координат зависит только от долготы. Это справедливо для проекций, сохраняющих длины вдоль меридианов, и для равновеликих проекций. Однако именно это же свойство и не позволяет получить формулы равноугольных проекций. В связи с этим было введено понятие квазиравноугольных проекций — проекций меридианного сечения и проекций, сохраняющих угол между меридианом и параллелью. Цилиндрическая проекция меридианного сечения совпадает с проекцией Бугаевского. Для азимутальных и конических проекций получены оригинальные формулы. С целью сохранения углов в проекции для картографических целей адаптирована равноугольная проекция Якоби.

Для краткости некоторые выводы вынесены из основного текста в приложения. Расшифровка принятых обозначений вынесена в обозначения. Нумерация формул организована следующим образом: сначала указывается номер главы, затем номер параграфа и далее номер формулы в этом параграфе. Для формул из приложений сначала ставится буква П, затем номер приложения и далее номер формулы в этом приложении. Нумерация рисунков сквозная.

Авторы выражают благодарность:

- ведущему научному сотруднику Института географии РАН, доктору географических наук С. А. Буланову, поддержавшему эту работу в самом начале;
- профессору Ф. Дж. Стуку (Университет Западного Онтарио, Канада) за поддержку и любезно предоставленные фотомозаики поверхностей небесных тел;

- кандидату географических наук Н. Н. Казанцеву, заведующему Лабораторией геоинформационных исследований ИГ РАН, и всему коллективу лаборатории, на базе которой проводилась большая часть работы над книгой;
- заведующей кафедрой картографии и геоинформатики географического факультета МГУ имени Ломоносова, профессору И. К. Лурье и всему коллективу кафедры за поддержку и вдохновение;
- студенту географического факультета МГУ имени Ломоносова А. И. Соколову, составившему представленную в этой книге первую карту в азимутальной проекции меридианного сечения.

# 1. Геометрия поверхности трехосного эллипсоида

Глава посвящена геометрическому описанию линий, углов и элементов поверхности трехосного эллипсоида, представленных в планетоцентрических системах координат (прямоугольной и полярной). Определены способы перехода к этим системам координат. Получены зависимости между различными геометрическими параметрами в данных системах. Результаты будут использованы в дальнейшем при выводе конкретных картографических проекций.

## 1.1. Системы координат в пространстве и на поверхности трехосного эллипсоида

В данном разделе описаны только те системы координат, которые затем используются нами при выводе картографических проекций трехосного эллипсоида. Эллиптическая система координат, используемая при выводе проекции Яакоби, описана в параграфе 4.1, посвященном этой проекции.

В качестве одной из основных систем координат в пространстве рассмотрим пространственную прямоугольную систему  $XYZ$  с началом координат в центре эллипсоида. Центр эллипсоида совпадает с центром масс небесного тела, ось  $Z$  направлена вдоль оси вращения на север,  $X$  проходит через начальный меридиан,  $Y$  дополняет систему до правой. Уравнение поверхности трехосного эллипсоида (Рисунок 1) с полуосями  $a, b, c$  в этой системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.1.1)$$

Пусть  $i, j, k$  – единичные векторы трехмерной системы координат (Рисунок 2).

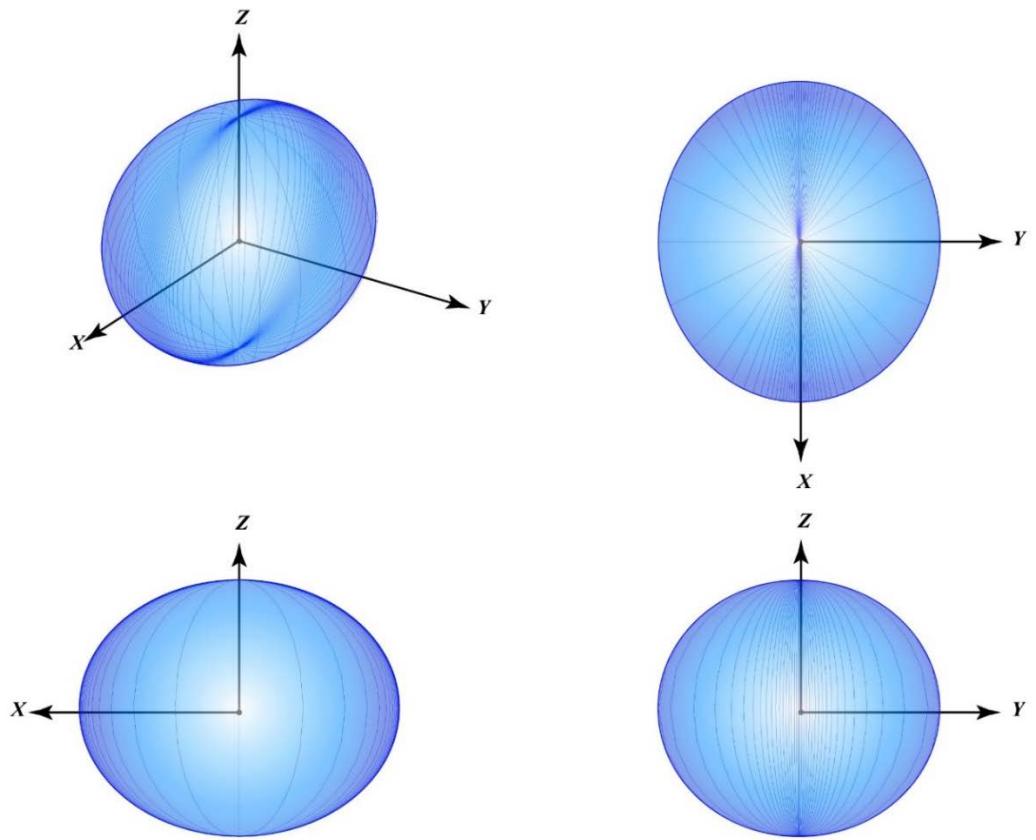


Рисунок 1. Поверхность трехосного эллипсоида в пространственных прямоугольных координатах  $x, y, z$  и ее проекции на плоскости  $XY; XZ; ZY$

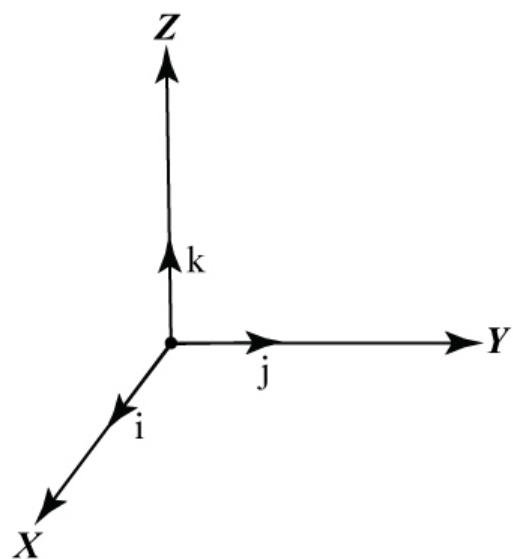


Рисунок 2. Единичные векторы трехмерной системы координат  $XYZ$

Тогда любой вектор пространства, проведенный из начала координат в точку с координатами  $(x, y, z)$ , имеет вид:  $\mathbf{r} = ix + jy + kz$  (Рисунок 3). Абсолютная величина  $r$  этого вектора представляет собой расстояние от начала координат до этой точки:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.1.2)$$

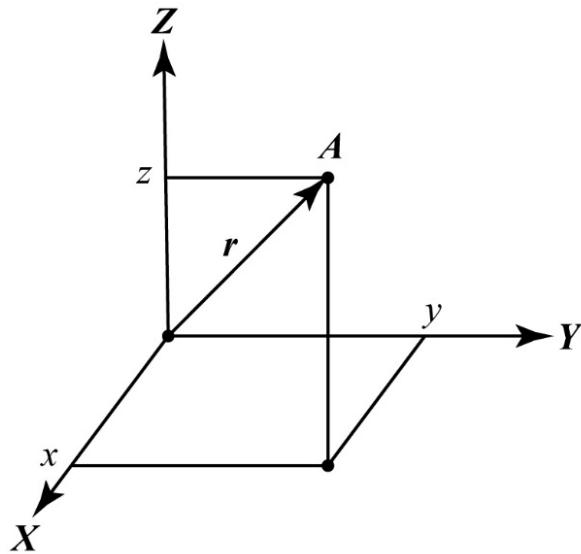


Рисунок 3. Вектор  $\mathbf{r}$  в трехмерной системе координат XYZ

Вторая основная пространственная система координат задается введением угловых координат, которые называются широтой и долготой. Эти координаты определяют направление вектора  $\mathbf{r}$ . Планетоцентрическая широта  $\Phi$  представляет собой угол между радиус-вектором  $\mathbf{r}$  и плоскостью  $XY$  и изменяется от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$ . Долгота  $\lambda$  представляет собой двухгранный угол между плоскостью  $XZ$  и плоскостью, содержащей ось  $Z$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , и изменяется от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Так получается система планетоцентрических координат  $\Phi, \lambda, r$  (Рисунок 4). При этом любая поверхность в пространстве определяется величиной  $r$  при заданных  $\Phi$  и  $\lambda$ . В.П. Морозов называет такую систему координат полярной при решении геодезических задач на эллипсоиде вращения.

Прямоугольные планетоцентрические координаты можно выразить через полярные следующим образом:

$$x = r \cos \Phi \cos \lambda; \quad y = r \cos \Phi \sin \lambda; \quad z = r \sin \Phi. \quad (1.1.3)$$

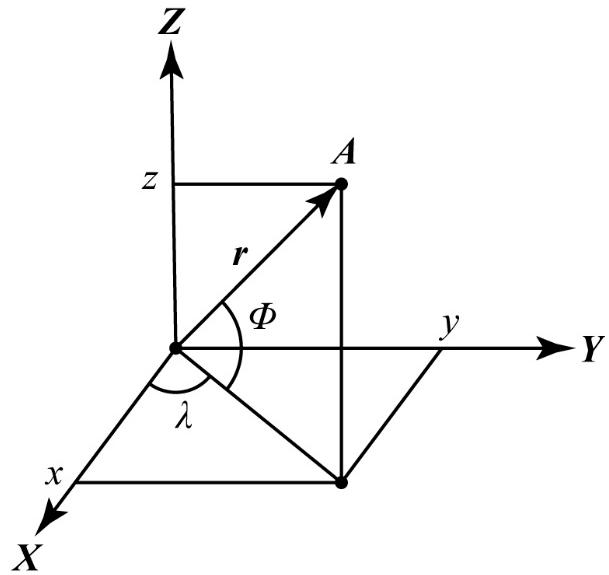


Рисунок 4. Угловые и пространственные координаты вектора  $r$

Полярные координаты могут быть выражены через прямоугольные:

$$\Phi = \arcsin \frac{z}{r}; \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x}; \quad (1.1.4)$$

$$\sin \lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos \lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Полярное расстояние  $r$  вычисляется по формуле (1.1.2).

В программировании для определения долготы обычно используется функция atan2(y, x), что позволяет избежать деления на ноль и учесть знаки  $x$  и  $y$ .

Для получения уравнения трехосного эллипсоида в полярных координатах подставим зависимости (1.1.3) в уравнение (1.1.1):

$$\frac{r^2 \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda}{a^2} + \frac{r^2 \cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{b^2} + \frac{r^2 \sin^2 \Phi}{c^2} = 1.$$

Откуда:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda}{a^2} + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{b^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{c^2}}} = \\
 &= \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2}}} = \frac{a}{\sqrt{t}} .
 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Здесь:

$e_{ac}^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$  – квадрат эксцентрикитета эллипса сечения начального меридиана;

$e_{ab}^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$  – квадрат эксцентрикитета эллипса экваториального сечения;

$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2}$  – вспомогательная величина, характеризующая отклонение поверхности трехосного эллипсоида от сферы.

На экваторе:

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \lambda}{a^2} + \frac{\sin^2 \lambda}{b^2}}} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}} = \frac{a}{\sqrt{t_0}} , \tag{1.1.6}$$

где  $t_0 = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}$  – вспомогательная величина, характеризующая отклонение экваториального эллипса от окружности.

На поверхности эллипсоида полярная система порождает угловую систему координат  $\Phi, \lambda$ . Координатные линии этой системы параллели и меридианы – линии постоянной широты и долготы. Рисунок 5 иллюстрирует соотношения прямоугольной и угловой систем координат.

Обычно при работе с трехосным эллипсоидом считается, что  $a > b > c$  или по крайней мере  $a \geq b \geq c$ . При выводе некоторых проекций используются  $e_{ac}^2$  и  $e_{ab}^2$  как формальные параметры, которые могут быть меньше нуля. Это позволяет переходить к системе координат, получаемой поворотом вокруг начала координат, так что одна из экваториальных осей эллипсоида переходит на ось  $Z$ . Будем называть такую систему координат попечной.

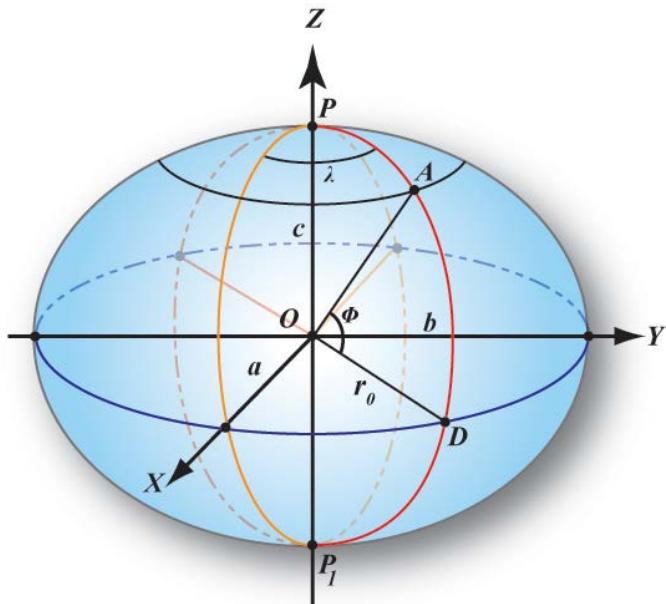


Рисунок 5. Прямоугольная и угловая системы координат трехосного эллипсоида

Рассмотрим две системы поперечных координат. Чтобы избежать путаницы между исходными координатами и координатами в поперечной системе, обозначим прямоугольные координаты в исходной системе (нормальная ориентировка) как  $x_{norm}, y_{norm}, z_{norm}$ , угловые как  $\Phi_{norm}, \lambda_{norm}$ , а полуоси эллипсоида как  $a_{norm}, b_{norm}, c_{norm}$ . Соответственно обозначим прямоугольные координаты в новой системе (поперечная ориентировка) как  $x_{trans}, y_{trans}, z_{trans}$ , угловые как  $\Phi_{trans}, \lambda_{trans}$ , а полуоси эллипсоида как  $a_{trans}, b_{trans}, c_{trans}$ .

Первый вариант поперечной прямоугольной системы координат получаем из того условия, что полюс новой системы координат будет в точке пересечения экватора и начального меридиана. Это достигается преобразованием:

$$x_{trans} = -z_{norm}; \quad y_{trans} = y_{norm}; \quad z_{trans} = x_{norm}. \quad (1.1.7)$$

В новой системе координат эллипсоид повернется на  $90^\circ$  на север по начальному меридиану относительно оси  $Y_{norm}$ , то есть точка пересечения оси  $X_{norm}$  с эллипсоидом будет расположена на оси  $Z_{trans}$ , так что большая экваториальная ось эллипсоида ляжет на ось  $Z_{trans}$ , а меридиан  $90^\circ$  вместе с меридианом  $270^\circ$  станут экватором (Рисунок 6). При этом:

$$a_{trans} = c_{norm}; \quad b_{trans} = b_{norm}; \quad c_{trans} = a_{norm}.$$

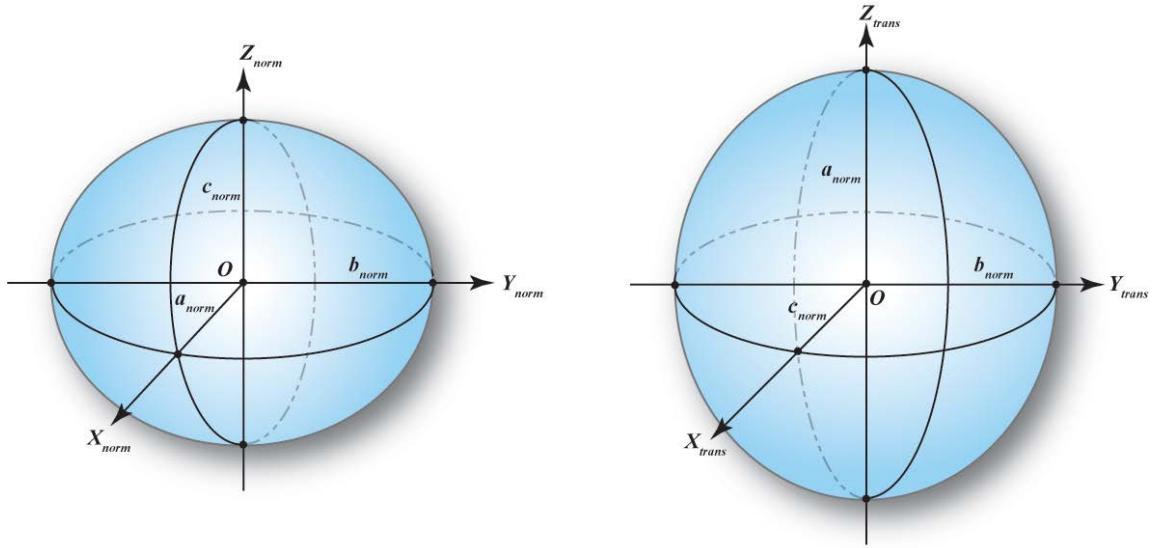


Рисунок 6. Исходный эллипсоид в нормальной и поперечной (первый вариант) системах координат

Определим зависимость угловых координат в данной поперечной системе  $\Phi_{trans}$ ,  $\lambda_{trans}$  от исходных угловых координат  $\Phi_{norm}$ ,  $\lambda_{norm}$ . Перепишем соотношение (1.1.3) в виде:

$$\begin{aligned} x_{norm} &= r \cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm}; \\ y_{norm} &= r \cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm}; \\ z_{norm} &= r \sin \Phi_{norm}. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Заметим, что полярное расстояние  $r$  не меняется при повороте. Из формул (1.1.7) и (1.1.8) получаем

$$\begin{aligned} x_{trans} &= -r \sin \Phi_{norm}; \quad y_{trans} = r \cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm}; \\ z_{trans} &= r \cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm}; \\ \Phi_{trans} &= \arcsin \frac{z_{trans}}{r} = \arcsin(\cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm}); \\ \lambda_{trans} &= \operatorname{arctg} \frac{y_{trans}}{x_{trans}} = -\operatorname{arctg} \frac{\cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm}}{\sin \Phi_{norm}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаются формулы, известные из сферической тригонометрии.

Второй вариант поперечной прямоугольной системы координат получаем из того условия, что полюс в новой системе координат будет в точке пересечения экватора и меридиана  $90^\circ$ . Это достигается преобразованием:

$$x_{trans} = -z_{norm}; \quad y_{trans} = -x_{norm}; \quad z_{trans} = y_{norm}. \quad (1.1.9)$$

В новой системе координат эллипсоид повернется сначала на  $90^\circ$  на запад по экватору относительно оси  $Z_{norm}$ . При этом меридиан  $90^\circ$  становится начальным. Затем происходит поворот на  $90^\circ$  на север по новому начальному меридиану относительно новой оси  $Y$  аналогично тому, как это сделано при получении первого варианта поперечной системы координат. То есть точка пересечения оси  $Y_{norm}$  с эллипсоидом будет расположена на оси  $Z_{trans}$ , так что малая экваториальная ось эллипсоида ляжет на ось  $Z_{trans}$ , а исходный начальный меридиан вместе с исходным меридианом  $180^\circ$  станут экватором (Рисунок 7).

При этом:

$$a_{trans} = c_{norm}; \quad b_{trans} = a_{norm}; \quad c_{trans} = b_{norm}.$$

Определим зависимость угловых координат в данной поперечной системе  $\Phi_{trans}, \lambda_{trans}$  от исходных угловых координат  $\Phi_{norm}, \lambda_{norm}$ .

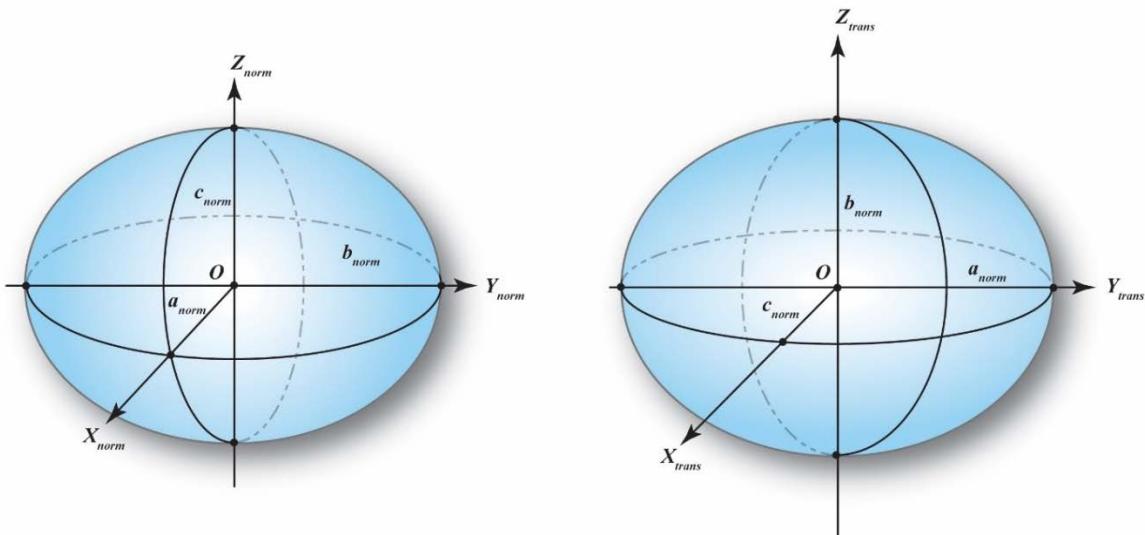


Рисунок 7. Исходный эллипсоид в нормальной и поперечной (второй вариант) системах координат

Из формул (1.1.8) и (1.1.9) получаем

$$x_{trans} = -r \sin \Phi_{norm}; \quad y_{trans} = -r \cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm};$$

$$z_{trans} = r \cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm};$$

$$\Phi_{trans} = \arcsin \frac{z_{trans}}{r} = \arcsin(\cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm});$$

$$\lambda_{trans} = \operatorname{arctg} \frac{y_{trans}}{x_{trans}} = \operatorname{arctg} \frac{\cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm}}{\sin \Phi_{norm}}.$$

Определим еще две угловые системы координат на поверхности трехосного эллипсоида, отличающиеся разными способами задания широты (Рисунок 8). Это геодезическая широта  $\varphi$ , измеряемая как угол между нормалью к поверхности эллипса и экваториальной плоскостью, и условно-геодезическая широта  $B$ , то есть угол между нормалью к эллипсу меридианного сечения  $PADP_1$  и экваториальной плоскостью. Эта нормаль, в отличие от нормали к поверхности эллипса, лежит в плоскости меридианного сечения.

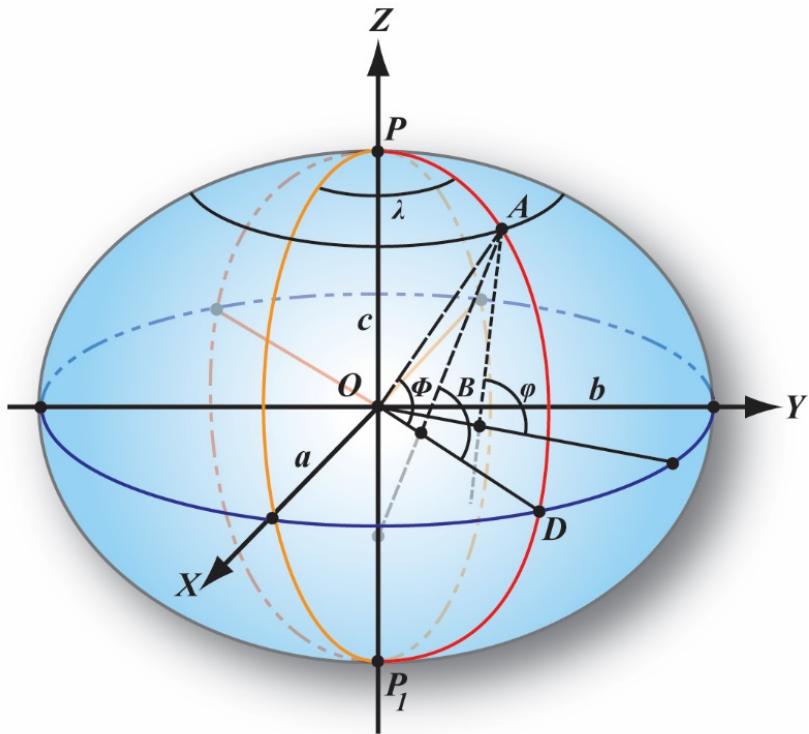


Рисунок 8. Системы координат трехосного эллипса

В отличие от геоцентрической широты используется термин «планетоцентрическая», так как в некоторых задачах могут одновременно использоваться планетоцентрические координаты, связанные с различными небесными телами. Между тем геодезические и условно-геодезические координаты связаны с конкретной поверхностью и теряют смысл при переходе к другому небесному телу. Кроме того, термин «геодезический» используется в математике для произвольных поверхностей. Поэтому этот термин можно использовать для любого небесного тела. При картографировании небесных тел обычно принято вместо геодезической широты использовать термин «планетографическая» широта.

Все три описанные выше угловые системы координат на поверхности трехосного эллипсоида не являются ортогональными. Вывод формул связи геодезической и условно-геодезической широт с планетоцентрической широтой дан в следующем параграфе.

## 1.2. Формулы связи геодезической и условно-геодезической широты с планетоцентрической широтой

Формулы связи геодезической и условно-геодезической широты с планетоцентрической широтой необходимы для корректного отображения тематической информации о небесных телах на карте. Как правило данные поступают в планетоцентрической системе координат. Однако, при представлении данных возможно использование других типов широт. В этом случае необходимо осуществить пересчет из одной системы координат в другую. Для лучшего понимания связи геодезической широты и координат трехмерной прямоугольной системы определим некоторые величины.

В дальнейшем нам понадобится определить угол между двумя векторами. Для этого воспользуемся двумя вариантами определения скалярного произведения этих векторов.

Скалярное произведение двух произвольных векторов  $\mathbf{r}_\alpha = i x_\alpha + j y_\alpha + k z_\alpha$  и  $\mathbf{r}_\beta = i x_\beta + j y_\beta + k z_\beta$  можно вычислить как сумму произведений соответствующих координат, или как произведение длин этих векторов на косинус угла  $\gamma_{\alpha\beta}$  между ними:

$$(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta) = x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta ;$$

$$(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta) = |\mathbf{r}_\alpha| |\mathbf{r}_\beta| \cos \gamma_{\alpha\beta} .$$

Следовательно:

$$\cos \gamma_{\alpha\beta} = \frac{x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha| |\mathbf{r}_\beta|} . \quad (1.2.1)$$

Эта зависимость дает возможность вычислить  $\cos \gamma_{\alpha\beta}$ .

Если в трехмерном пространстве задана функция  $f(x, y, z)$ , то вектор  $\nabla f$ , координатами которого являются производные функции  $f$  по  $x, y, z$ , называется градиентом функции  $f$ .

$$\nabla f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} . \quad (1.2.2)$$

Пусть теперь задана поверхность:

$$f(x, y, z) = C. \quad (1.2.3)$$

Полный дифференциал функции  $f(x, y, z)$  при изменении координат вдоль поверхности получается дифференцированием зависимости (1.2.3):

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \quad (1.2.4)$$

То есть, вектор бесконечно малых приращений вдоль поверхности заданной формулой (1.2.3)  $dr = i dx + j dy + k dz$  перпендикулярен вектору  $\nabla f$ , поскольку, согласно зависимости (1.2.4), скалярное произведение этих векторов  $\nabla f \cdot dr = 0$ . Таким образом, вектор  $\nabla f$  является нормалью к поверхности. Подчеркнем, что любой вектор пространства задается проекцией его конечной точки на оси координат, то есть он является радиус-вектором, начало которого совпадает с началом координат. Однако обычно, для наглядности, вектор откладывают от точки его определения, будь то приращение заданного вектора, градиент и т.п. Это связано с тем, что параллельный перенос векторов не меняет их относительные связи (углы между ними, разность и т.д.).

В соответствии с этим утверждением выполним параллельный перенос вектора  $\nabla f$ , т.е. перенесем точку A с поверхности в начало координат (Рисунок 9). При этом образуется угол  $\alpha_z$  между осью Z и градиентом.

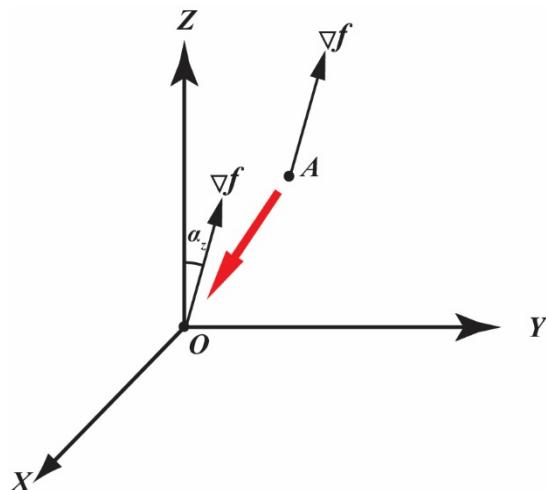


Рисунок 9. Определение угла между осью Z и градиентом

Определим косинус угла  $\alpha_z$ . Единичный вектор  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  направлен по оси Z. Скалярное произведение этого вектора и градиента равно:

$$(\nabla f \cdot \mathbf{k}) = |\nabla f| \cdot \cos \alpha_z .$$

Следовательно, в точке A с координатами  $x, y, z$ :

$$\cos \alpha_z = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{|\nabla f|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} .$$

Для трехосного эллипсоида (Рисунок 10) зависимость (1.2.3) имеет вид согласно формуле (1.1.1). Соответственно:

$$\nabla f = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right) ;$$

$$\cos \alpha_z = \frac{\frac{2z}{c^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}}} = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} ;$$

$$\sin \alpha_z = \sqrt{1 - \frac{\frac{z^2}{c^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} .$$

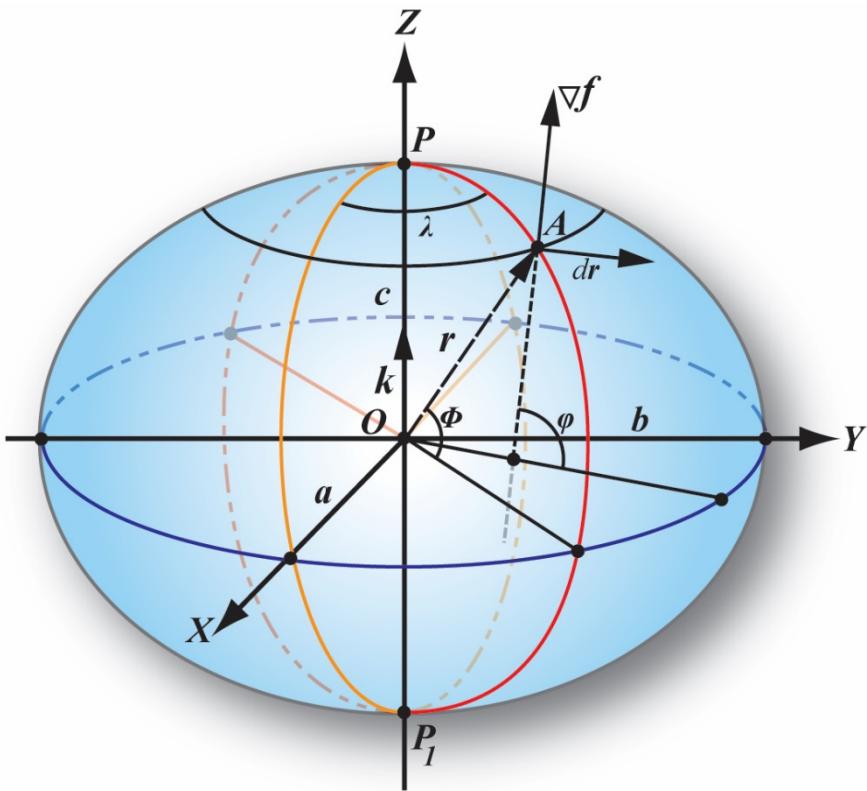


Рисунок 10. Вектор  $\nabla f$  (градиент)

Учитывая, что угол  $\varphi$  между нормалью к поверхности эллипсоида и экваториальной плоскостью является дополнением угла  $\alpha_z$  до прямого, то  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$ , а поскольку

$\operatorname{tg} \Phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , получим зависимость, связывающую углы  $\varphi$  и  $\Phi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} \operatorname{tg} \Phi.$$

Учитывая формулу (1.1.3), перепишем эту зависимость в виде:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(1 - e_{ab}^2) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda}}{(1 - e_{ac}^2) \sqrt{(1 - e_{ab}^2)^2 + \operatorname{tg}^2 \lambda}} \operatorname{tg} \Phi. \quad (1.2.5)$$

Формулы связи между планетоцентрической широтой  $\Phi$  и условно-геодезической широтой  $B$  могут быть получены разными способами. Аналогично описанному выше трехмерному случаю рассмотрим и двумерный (Рисунок 11). В плоскости меридианного сечения  $WZ$  уравнение меридианного эллипса с полуосами  $r_0$  и  $c$  примет вид:

$$\frac{w^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где  $r_0$  определяется зависимостью (1.1.6).

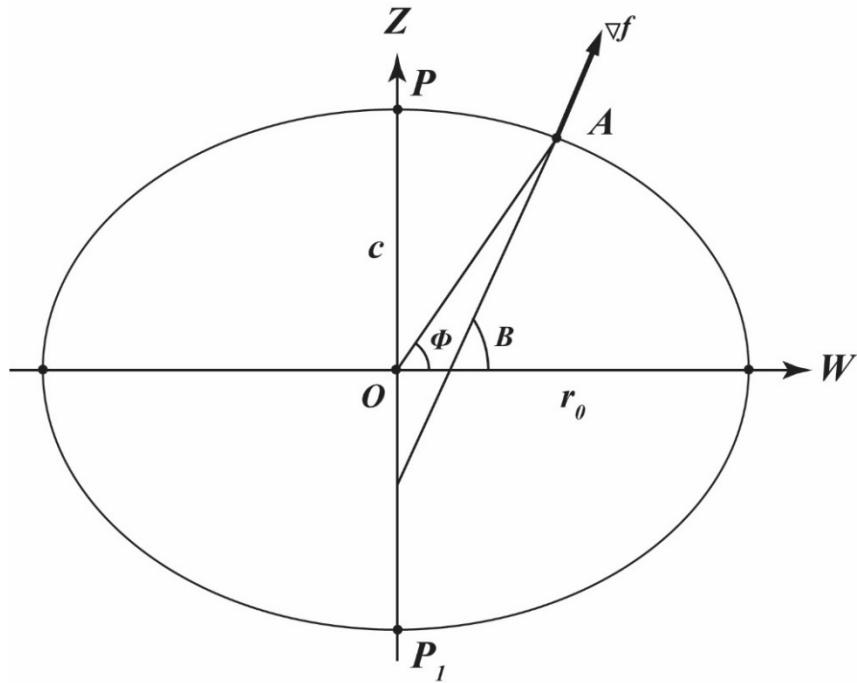


Рисунок 11. Меридианное сечение трехосного эллипсоида в плоскости  $WZ$

Тогда в рассматриваемом случае функция и ее градиент соответственно имеют вид:

$$f(w, z) = \frac{w^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{c^2} ; \quad \nabla f = \left( \frac{2w}{r_0^2}, \frac{2z}{c^2} \right).$$

Единичный вектор  $\mathbf{k} = (0, 1)$  направлен по оси  $Z$ . Скалярное произведение  $(\nabla f \cdot \mathbf{k}) = |\nabla f| \cdot \cos \beta_z$  ( $\beta_z$  – угол между градиентом и осью  $Z$ ).

Следовательно косинус и синус угла между нормалью к эллипсу в выбранной точке и осью  $Z$  равны:

$$\cos \beta_z = \frac{\frac{2z}{c^2}}{\sqrt{\frac{4w^2}{r_0^4} + \frac{4z^2}{c^4}}} = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r_0^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \quad \text{и} \quad \sin \beta_z = \sqrt{1 - \frac{\frac{z^2}{c^4}}{\frac{w^2}{r_0^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{\frac{w}{r_0^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r_0^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Учитывая, что угол  $B$  между нормалью к меридианному эллипсу и экваториальной плоскостью является дополнением угла  $\beta_z$  до прямого и  $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ , имеем:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\frac{z}{c^2}}{\frac{w}{r_0^2}} = \frac{zr_0^2}{wc^2} = \frac{zr_0^2}{c^2\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Поскольку  $\operatorname{tg} \Phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , получаем формулу, известную из геометрии эллипсоида вращения:

$$\operatorname{tg} B = \frac{r_0^2}{c^2} \operatorname{tg} \Phi = \frac{\operatorname{tg} \Phi}{1 - e_{mer}^2},$$

где  $e_{mer}^2 = 1 - \frac{c^2}{r_0^2}$  – квадрат эксцентриситета эллипса меридианного сечения.

### 1.3. Коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы и элементы бесконечно малой трапеции на поверхности трехосного эллипсоида

Одним из ключевых понятий в теории отображения поверхностей и, в частности, трехосного эллипсоида является бесконечно малый элемент дуги произвольной кривой на этой поверхности. Определение длины такого бесконечно малого элемента (дифференциала длины дуги кривой)  $dl$  в заданной системе координат на поверхности приводит нас к первой квадратичной форме и коэффициентам Гаусса этой формы. Сначала рассмотрим  $dl$  в трехмерной прямоугольной системе координат  $XYZ$  и связанной с ней угловой системе координат поверхности  $\Phi, \lambda$ .

Пусть  $d\mathbf{r}$  – вектор, определяющий приращение вектора  $\mathbf{r}$  вдоль кривой (на поверхности трехосного эллипсоида), для которой определяется длина бесконечно малого элемента (Рисунок 12):

$$d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz. \quad (1.3.1)$$

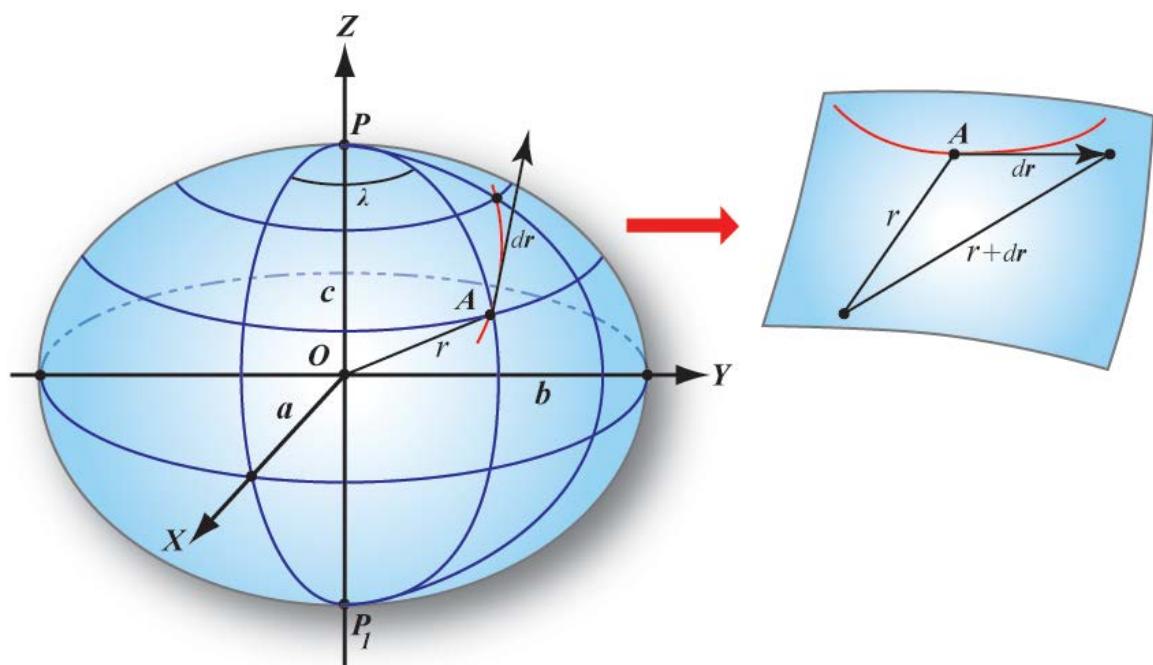


Рисунок 12. Приращение вектора вдоль кривой на поверхности трехосного эллипсоида

В угловой системе координат для координатных приращений  $d\mathbf{r}$  имеем:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda ;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda ;$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda .$$

Квадрат дифференциала длины дуги кривой, который называется первой квадратичной формой, равен квадрату модуля вектора  $d\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} dl^2 &= |d\mathbf{r}|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)^2 \right] d\Phi^2 + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\Phi d\lambda \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 . \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Коэффициентами Гаусса первой квадратичной формы называются зависимости:

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)^2 ; \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2 ; \\ F &= \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} . \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Таким образом, формулу (1.3.2) можно переписать в виде:

$$dl^2 = E d\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + G d\lambda^2 . \quad (1.3.4)$$

Формулы (1.3.3) остаются верными при любом способе определения широты. При построении картографических проекций используется планетоцентрическая широта. Вывод зависимостей коэффициентов Гаусса от долготы и широты приведен в приложении 1. Результаты представлены следующими зависимостями (подробности в приложении 1):

$$E = a^2 \frac{4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2}{4t^3};$$

$$G = a^2 \cos^2 \Phi \frac{4t^2 + \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2}{4t^3}; \quad (1.3.5)$$

$$F = a^2 \frac{\sin 2\Phi \cos^2 \Phi \sin 2\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)}{4t^3}.$$

Здесь  $t$  соответствует формуле (1.1.5).

На экваторе коэффициент  $G$  примет вид:

$$G_0 = a^2 \frac{4t_0^2 + \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2}{4t_0^3}. \quad (1.3.6)$$

Здесь  $t_0$  соответствует формуле (1.1.6).

В литературе по математической картографии традиционно рассматривается бесконечно малая трапеция на математической поверхности, аппроксимирующей небесное тело, и ее отображение на плоскость картографической проекции. В нашем случае математической поверхностью является трехосный эллипсоид. Трапеции на эллипсоиде и на плоскости соответствуют заданным приращениям широты  $d\Phi$  и долготы  $d\lambda$ .

С точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости трапецию на трехосном эллипсоиде можно принять за бесконечно малый параллелограмм на плоскости, касательной к трехосному эллипсоиду в выбранной точке  $A$  с координатами  $\Phi, \lambda$  (Рисунок 13).

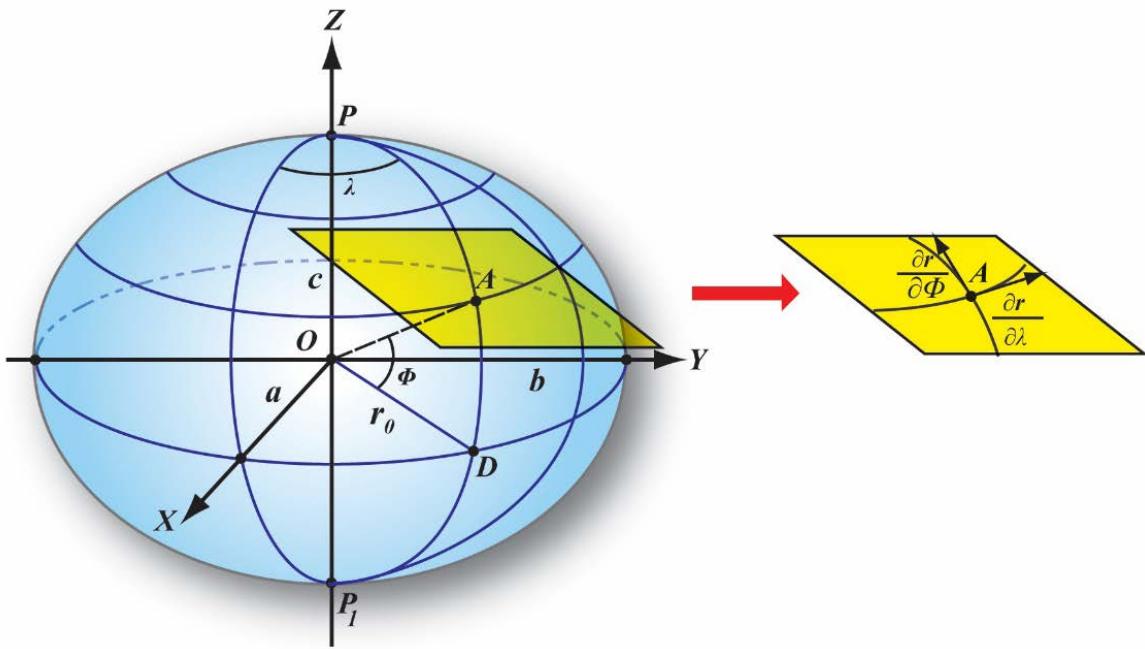


Рисунок 13. Трехосный эллипсоид и касательная плоскость в точке  $A$

Производные вектора  $\mathbf{r}$  по широте и долготе имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \Phi} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \Phi} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial \Phi}; \quad (1.3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial \lambda}. \quad (1.3.8)$$

Подчеркнем, что вектор (1.3.7) является касательным к меридиану, а вектор (1.3.8) – к параллели (Рисунок 13).

На рисунке 14 представлена бесконечно малая трапеция (параллелограмм) на трехосном эллипсоиде и показаны определенные ниже дифференциалы длин дуг и угол между меридианом и параллелью.  $r_0$  соответствует выражению (1.1.6). Для наглядности трапеция изображена в увеличенном виде.

Дифференциал длины дуги меридiana:

$$dl_{mer} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} \right| d\Phi = \sqrt{E} d\Phi. \quad (1.3.9)$$

Дифференциал длины дуги параллели:

$$dl_{par} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right| d\lambda = \sqrt{G} d\lambda . \quad (1.3.10)$$

Соответственно на экваторе:

$$dl_{equator} = \sqrt{G_0} d\lambda . \quad (1.3.11)$$

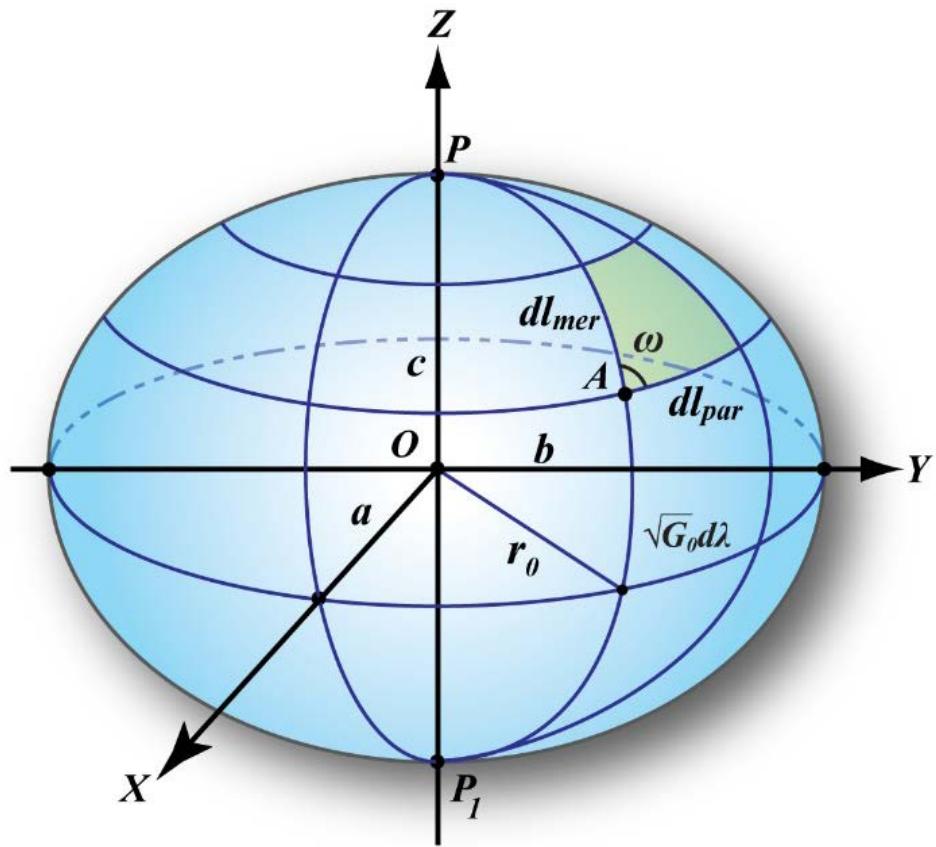


Рисунок 14. Бесконечно малая трапеция на трехосном эллипсоиде

Угол  $\omega$  между меридианом и параллелью представляет собой угол между векторами  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$  и  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$  (Рисунки 13, 14). Соответственно, используя определение скалярного произведения векторов с учетом формул (1.2.1), (1.3.3), (1.3.7)–(1.3.10), получим косинус и синус угла  $\omega$  между меридианом и параллелью на эллипсоиде:

$$\cos \omega = \frac{\frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right|} = \frac{F}{\sqrt{EG}} ;$$

(1.3.12)

$$\sin \omega = \sqrt{1 - \cos^2 \omega} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}}.$$

Отметим, что  $\sin \omega$  всегда положителен, так как угол не может быть больше  $\pi$ .

Для наглядности, представим косинус угла между меридианом и параллелью планетоцентрической широты в точке трехосного эллипсоида с координатами  $\Phi, \lambda$  в явном виде:

$$\begin{aligned} & \cos \omega = \\ & = \frac{\sin 2\Phi \cos \Phi \sin 2\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)}{\sqrt{4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2} \sqrt{4t^2 + \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2}}, \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

где  $e_{ac}^2, e_{ab}^2, t$  соответствуют формуле (1.1.5).

Если требуется определить угол  $\gamma$  между меридианом и произвольной кривой, то есть угол между вектором  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi}$  касательным к меридиану в некоторой точке с координатами  $\Phi, \lambda$  и вектором  $d\mathbf{r}$ , касательным к кривой в этой же точке, используем те же зависимости, что при выводе косинуса угла между меридианом и параллелью с заменой вектора (1.3.8) на вектор (1.3.1) (Рисунок 15):

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\frac{\partial x}{\partial \Phi} dx + \frac{\partial y}{\partial \Phi} dy + \frac{\partial z}{\partial \Phi} dz}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} \right| |d\mathbf{r}|} = \\ &= \frac{\frac{\partial x}{\partial \Phi} \left( \frac{\partial x}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right) + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \left( \frac{\partial y}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right) + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda \right)}{\sqrt{E} dl} = \\ &= \frac{Ed\Phi + Fd\lambda}{\sqrt{E}\sqrt{Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + Gd\lambda^2}} = \frac{\sqrt{E}d\Phi + \sqrt{G} \cos \omega d\lambda}{\sqrt{Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + Gd\lambda^2}}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

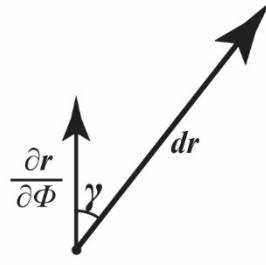


Рисунок 15. Угол между меридианом и произвольной кривой

Если же известен угол  $\gamma$ , между меридианом и некоторой кривой на поверхности эллипсоида, можно получить выражение для производной  $\frac{d\Phi}{d\lambda}$  вдоль этой кривой. Поскольку угловые координаты вдоль кривой уже не являются независимыми, то есть широта является функцией долготы, дифференциалы в выражении (1.3.1) можно представить по правилу дифференцирования сложной функции в виде:

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) d\lambda;$$

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\lambda;$$

$$dz = \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\lambda.$$

Используя выражения (1.3.2) и (1.3.3), перепишем зависимость (1.3.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} \cdot d\mathbf{r}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} \right| |d\mathbf{r}|} = \frac{\left( E \frac{d\Phi}{d\lambda} + F \right) d\lambda}{\sqrt{E} \sqrt{E \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + G + 2F \frac{d\Phi}{d\lambda}} d\lambda} = \\ &= \frac{\left( \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{F}{\sqrt{EG}} \right)}{\sqrt{\frac{E}{G} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + 1 + \frac{2F}{G} \frac{d\Phi}{d\lambda}}}. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

На основании выражения (1.3.15) получим производную  $\frac{d\Phi}{d\lambda}$  вдоль направления, задаваемого углом  $\gamma$ . Для этого надо решить уравнение:

$$\cos \gamma \sqrt{\frac{E}{G} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + 1 + \frac{2F}{\sqrt{EG}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \frac{d\Phi}{d\lambda}} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Его решение является результатом следующих преобразований:

$$\cos^2 \gamma \left( \frac{E}{G} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + 1 + \frac{2F}{G} \frac{d\Phi}{d\lambda} \right) = \frac{E}{G} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + \frac{2F}{G} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{F^2}{EG};$$

$$\sin^2 \gamma \left( \frac{E}{G} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + \frac{2F}{G} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{F^2}{EG} \right) = \cos^2 \gamma \left( 1 - \frac{F^2}{EG} \right);$$

$$\left( \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \frac{d\Phi}{d\lambda} + \cos \omega \right)^2 = \operatorname{ctg}^2 \gamma \sin^2 \omega;$$

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \frac{d\Phi}{d\lambda} = -\cos \omega \pm \operatorname{ctg} \gamma \sin \omega.$$

В последней формуле следует выбрать знак плюс, так как при  $\gamma = \omega$  (на параллели)  $\frac{d\Phi}{d\lambda} = 0$ .

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = (-\cos \omega + \operatorname{ctg} \gamma \sin \omega) \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}. \quad (1.3.16)$$

Для произвольной кривой угол  $\gamma$  меняется вдоль нее. Если угол постоянен, то выражение (1.3.16) – дифференциальное уравнение локсодромии.

Выберем теперь систему координат на касательной плоскости, в которой ось  $Y_{plane}$  направлена вдоль вектора  $\frac{\partial r}{\partial \phi}$  (вдоль меридиана) и ось  $X_{plane}$  направлена вправо перпендикулярно к направлению меридиана. Касательный вектор к любой линии на эллипсоиде,

проходящей через точку с координатами  $\Phi, \lambda$  будет лежать в этой плоскости. Все соотношения бесконечно малых величин и углов между направлениями на трехосном эллипсоиде сохраняются на этой плоскости (Рисунок 16).

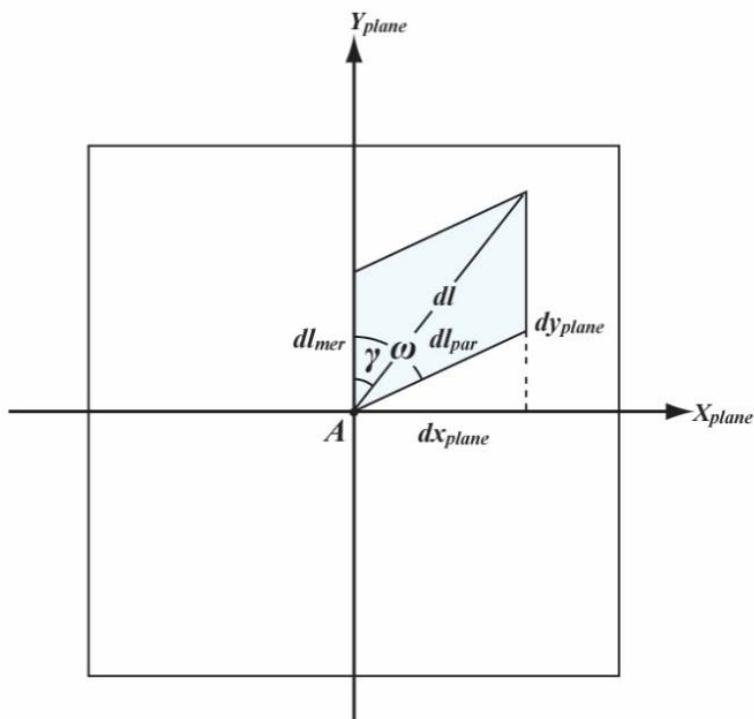


Рисунок 16. Бесконечно малая трапеция (параллелограмм)  
на касательной плоскости

В плоскости  $(X_{plane}, Y_{plane})$ :

$$dx_{plane} = \frac{\partial x_{plane}}{\partial \lambda} d\lambda = dl_{par} \sin \omega = \sqrt{G} \sin \omega d\lambda ;$$

$$\begin{aligned} dy_{plane} &= \frac{\partial y_{plane}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y_{plane}}{\partial \lambda} d\lambda = dl_{mer} + dl_{par} \cos \omega = \\ &= \sqrt{E} d\Phi + \sqrt{G} \cos \omega d\lambda . \end{aligned}$$

Синус и косинус угла  $\gamma$  можно определить непосредственно на касательной плоскости исходя из соотношений:

$$\sin \gamma = \frac{dx_{plane}}{dl}; \cos \gamma = \frac{dy_{plane}}{dl} .$$

Смежные стороны параллелограмма:

$$dl_{mer} = \frac{\partial y_{plane}}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{E} d\Phi ; \quad dl_{par} = \sqrt{G} d\lambda .$$

При этом  $dx_{plane} = dl_{par} \sin \omega$ . Площадь параллелограмма равна произведению этих сторон на синус угла между ними:

$$S_{trap} = \sqrt{E} d\Phi \sqrt{G} d\lambda \sin \omega = \sqrt{E} d\Phi dx_{plane} . \quad (1.3.17)$$

Для обеспечения заданного характера искажений картографических проекций необходимо сохранение определенных свойств при переходе с касательной плоскости на плоскость проекции. Например, для равновеликих проекций должна сохраняться площадь бесконечно малого параллелограмма, соответствующей заданным приращениям широты  $d\Phi$  и долготы  $d\lambda$ .

## **2. Классификация и вывод проекций трехосного эллипсоида**

Для получения различных проекций трехосного эллипсоида используется общий подход, основанный на векторном описании, как самого трехосного эллипсоида радиус вектором  $\mathbf{r}$ , так и касательной к эллипсоиду плоскости, содержащей приращение  $d\mathbf{r}$  вектора  $\mathbf{r}$ . Поскольку любая проекция использует в своем представлении элементарную длину вектора  $d\mathbf{r}$ , естественным математическим аппаратом этого представления являются коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы (параграф 1.3). В рамках такого же подхода рассмотрим и распределение искажений представленных проекций.

В плоскости проекции вводится прямоугольная система координат, у которой координатная ось  $X_{proj}$  направлена горизонтально вправо, а координатная ось  $Y_{proj}$  направлена вертикально вверх. Поскольку коэффициенты Гаусса представлены в планетоцентрической системе координат, координаты проекции в общем случае имеют вид:

$$x_{proj} = f_1(\Phi, \lambda);$$

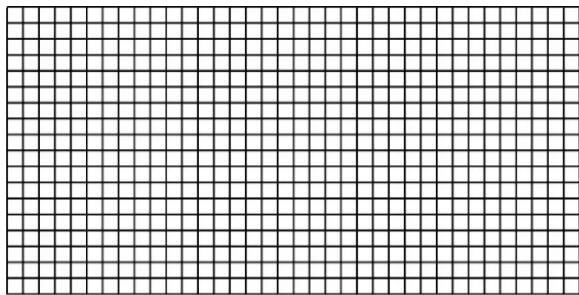
$$y_{proj} = f_2(\Phi, \lambda).$$

### **2.1. Классификация проекций трехосного эллипсоида**

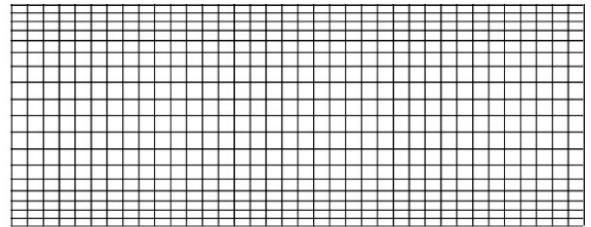
При описании систем координат трехосного эллипсоида и бесконечно малых величин на его поверхности рассмотрим трехосный эллипсоид как частный случай поверхности, задаваемой дифференцируемой функцией в трехмерном пространстве, безотносительно теории эллипсоида вращения. При разработке классификации картографических проекций трехосного эллипсоида наоборот будем исходить из классификации проекций эллипсоида вращения. В качестве классификационных признаков выберем вид сетки параллелей и меридианов в нормальной ориентировке, характер искажений и положение полюса проекции.

По виду сетки параллелей и меридианов в нормальной ориентировке выделяются цилиндрические, конические, и азимутальные проекции. Для трехосного эллипсоида такие проекции не могут быть построены в соответствии с традиционными определениями для сферы и эллипсоида вращения. Как видно из названий, цилиндрические и конические проекции первоначально были привязаны к поверхностям, на которые отображалась поверхность шара или эллипсоида вращения, и которые могут быть развернуты на плоскость без искажений.

Цилиндрические проекции обычно определяются как проекции, в которых меридианы – равноотстоящие параллельные прямые, а параллели – параллельные прямые, ортогональные меридианам (Рисунок 17, рисунок 18а). Для трехосного эллипсоида такое определение не имеет смысла. При введении промежуточной системы координат (например, изометрической или эллиптической) можно добиться получения подобного вида сетки, но это не будут параллели и меридианы в привычном смысле. Поэтому цилиндрическими проекциями трехосного эллипсоида будем считать проекции, в которых меридианы – параллельные прямые, ортогональные прямолинейному экватору, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений (Рисунок 18б). Целесообразно также вместо равноотстоящих меридианов рассматривать меридианы, позволяющие сохранять длины на экваторе, т.е. использовать эллиптический цилиндр, касающийся трехосного эллипса по экватору. Меняется и вид формул для получения цилиндрических проекций, так как вертикальная координата зависит не только от широты, но и от долготы.



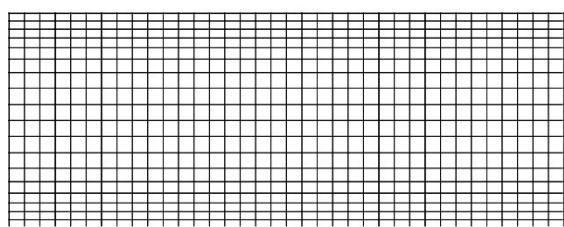
а)



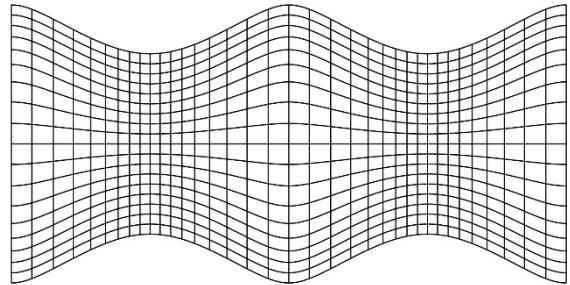
б)

Рисунок 17. Макет картографической сетки цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для сферы (а) и эллипсоида вращения (б)

Азимутальные проекции традиционно понимаются как проекции, в которых меридианы – прямые, сходящиеся в одной точке и пересекающиеся под углами, равными разности долгот соответствующих меридианов, а параллели – концентрические окружности с центром в точке схода меридианов (Рисунок 19, рисунок 20а). Такой поход к азимутальным проекциям трехосного эллипсоида не позволит получить заданный характер искажений.



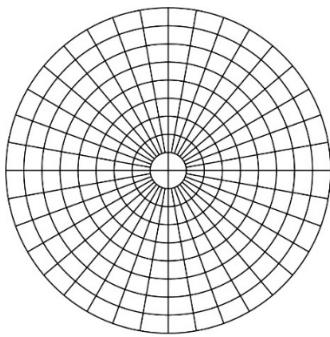
а)



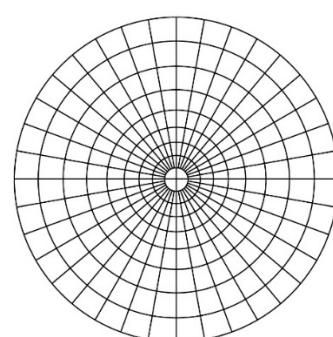
б)

Рисунок 18. Макет картографической сетки цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для эллипсоида вращения (а) и трехосного эллипсоида (б)

В качестве азимутальных проекций трехосного эллипсоида будем рассматривать проекции, в которых меридианы – пучок прямых линий, выходящих из одной точки, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений. Углы в точке пересечения меридианов в азимутальной проекции равны соответствующим углам на эллипсоиде (Рисунок 20б).

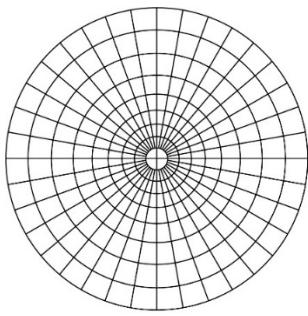


а)

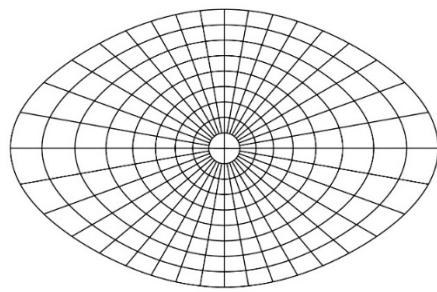


б)

Рисунок 19. Макет картографической сетки азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для сферы (а) и эллипсоида вращения (б)



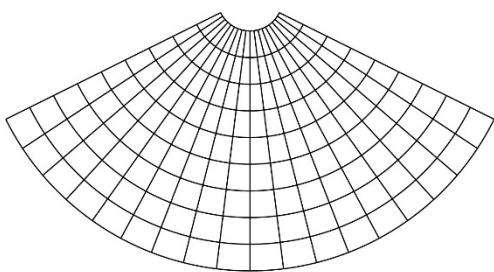
а)



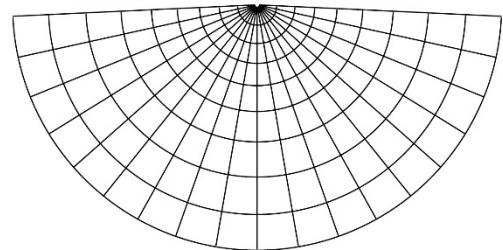
б)

Рисунок 20. Макет картографической сетки азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для эллипсоида вращения (а) и трехосного эллипсоида (б)

Конические проекции обычно определяют как проекции, в которых параллели – концентрические окружности, а меридианы – пучок прямых, проведенных из центра окружностей. При этом углы в точке пересечения меридианов в проекции пропорциональны соответствующим углам на эллипсоиде вращения (сфере) (Рисунок 21, рисунок 22а). Таким образом в качестве поверхности, которая может быть развернута на плоскость без искажений, рассматривается прямой круговой конус касательный или секущий. Для трехосного эллипсоида в качестве такой поверхности будем использовать прямой эллиптический конус, касательный к поверхности. Тогда коническими проекциями трехосного эллипсоида будут проекции, в которых меридианы – пучок прямых линий, выходящих из одной точки, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений. При этом углы в точке пересечения меридианов в проекции функционально зависят от соответствующих углов на эллипсоиде и от параметров конуса (Рисунок 22б).

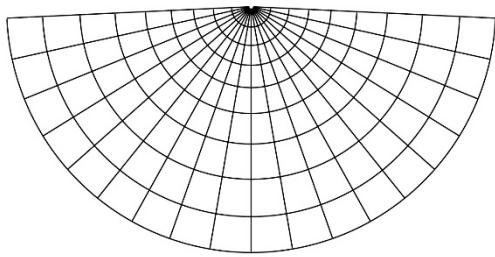


а)

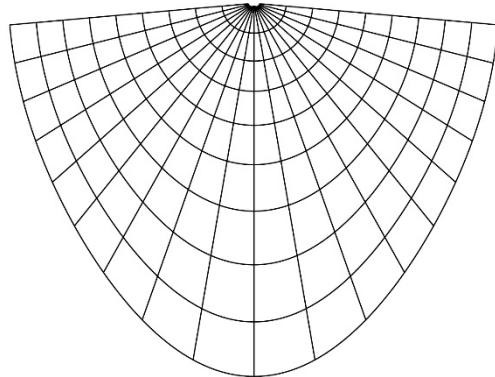


б)

Рисунок 21. Макет картографической сетки конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для сферы (а) и эллипсоида вращения (б)



а)



б)

Рисунок 22. Макет картографической сетки конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для эллипсоида вращения (а) и трехосного эллипсоида (б)

Приведенное выше определение конических проекций позволяет связать в систему различные классы проекций трехосного эллипсоида. При стремлении вершины конуса (точки схода меридианов) в бесконечность получаем цилиндрическую проекцию (Рисунок 23 (1)), а при стремлении к точке полюса – азимутальную (Рисунок 23 (6)).

При выводе конических и азимутальных проекций в качестве промежуточной используется плоская полярная система координат. Вид формул для получения конических и азимутальных проекций, также как и для цилиндрических, меняется, так как в случае трехосного эллипсоида полярное расстояние зависит не только от широты, но и от долготы.

Следует отметить, что при переходе к картографическим проекциям трехосного эллипсоида меняется вид сетки и вид формул, а вид поверхностей, которые могут быть развернуты на плоскость без искажений остается прежним. Это является хорошим примером того, что при усложнении задачи приходится возвращаться к более ранним исследованиям.

Традиционная классификация картографических проекций по характеру искажений несколько изменяется для трехосного эллипсоида. Наряду с равноугольными или конформными проекциями определенный интерес представляют квазиравноугольные проекции, сохраняющие некоторые свойства равноугольных проекций. Необходимость рассмотрения квазиравноугольных проекций связана с тем, что строго равноугольные проекции трехосного эллипсоида не всегда можно получить. В частности, в дальнейшем

будет приведено доказательство того, что не существует строго равноугольных цилиндрических и азимутальных проекций.

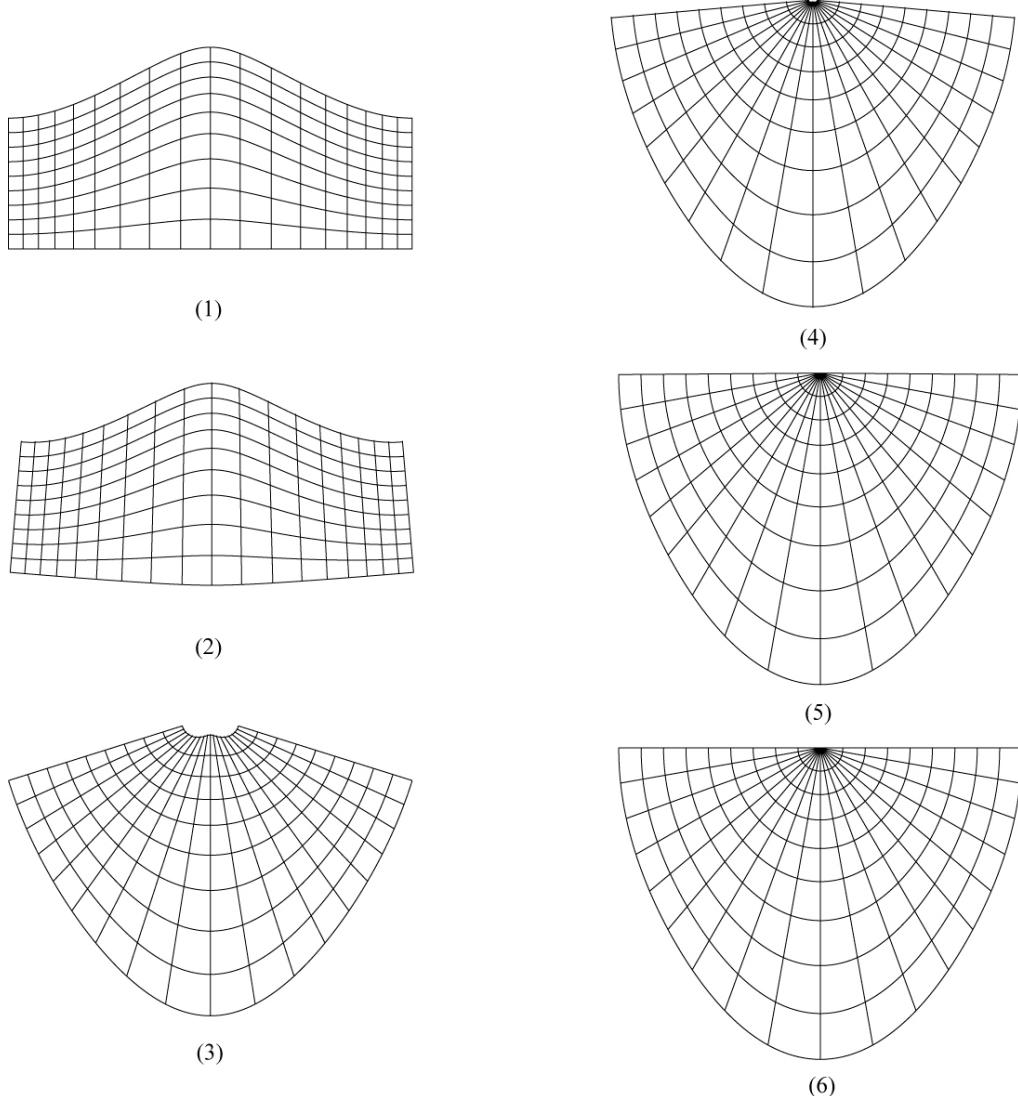


Рисунок 23. Фрагменты сеток проекций трехосного эллипсоида от цилиндрической (1) к азимутальной (6) через коническую (2–5)

Квазиравноугольные проекции в окрестности каждого меридиана близкие к равногольным проекциям эллипсоида вращения, соответствующего меридианному сечению, будем для краткости называть проекциями меридианного сечения. Эти проекции выводятся из условия равенства отношения дифференциала дуги меридиана и длины перпендикуляра, проведенного к этому меридиану до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$ , на эллипсоиде и в проекции. В дополнение к проекциям меридианного сечения также рассматриваются квазиравноугольные проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью.

В соответствии с характером искажений будут выведены следующие проекции трехосного эллипсоида:

- проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов;
- равновеликие проекции;
- проекции меридианного сечения;
- проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью;
- равноугольная проекция Якоби.

При выводе цилиндрических и азимутальных проекций учитывается возможность использования поперечных систем координат, определенных в параграфе 1.1. То есть положение полюса проекции может быть в точке географического полюса (нормальная ориентировка) (Рисунок 24а), в точке с координатами  $\Phi = 0, \lambda = 0$  (первый вариант поперечной системы координат) (Рисунок 24б), или в точке с координатами  $\Phi = 0, \lambda = 90^\circ$  (второй вариант поперечной системы координат). Поперечная ориентировка может быть полезна для картографирования небесных тел, аппроксимируемых трехосным эллипсоидом с большей разницей между малой и большой экваториальными осями, чем между малой экваториальной осью и полярной.

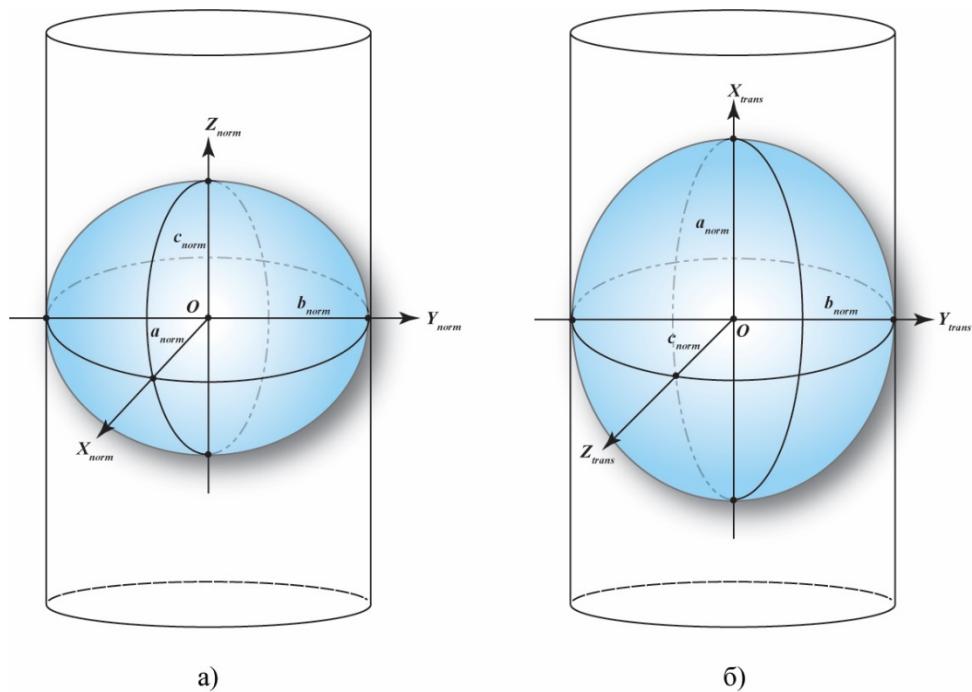


Рисунок 24. Касательный цилиндр к трехосному эллипсоиду в нормальной (а) и поперечной системах координат (б)

Цилиндрические проекции в сочетании с азимутальными целесообразно использовать для глобального картографирования небесных тел, а конические для регионального.

## 2.2. Цилиндрические проекции

При выводе формул цилиндрических проекций предполагается, что широта больше либо равна нулю, а долгота больше либо равна нулю и меньше, либо равна  $90^\circ$ . Для остальных значений широт и долгот координаты в проекции получаются отражением относительно экватора и относительно меридианов  $90^\circ$  и  $180^\circ$ . Следует напомнить, что при выводе и анализе формул проекций, а также при построении картографических сеток долгота отсчитывается на восток (для цилиндрических проекций вправо). Для карт отсчет долготы соответствует направлению, принятому для картографируемого небесного тела.

В соответствии с определением цилиндрических проекций, данном в параграфе 2.1, горизонтальная координата  $x_{proj}$  не зависит от широты. Следовательно, формулы цилиндрических проекций в общем случае имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{proj} &= f_1(\lambda); \\ y_{proj} &= f_2(\Phi, \lambda). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Для приращения горизонтальной координаты будем иметь:

$$dx_{proj} = \frac{dx_{proj}}{d\lambda} d\lambda. \tag{2.2.2}$$

Горизонтальная координата также не зависит от характера искажений.

Для получения цилиндрических проекций, сохраняющих длины на экваторе (для случая касательного цилиндра), необходимо, чтобы дифференциал длины дуги экватора в проекции был равен дифференциалу длины дуги на эллипсоиде, т.е.  $dx_{proj} = dl_{equator}$ , или с учетом выражения (1.3.11):

$$dx_{proj} = \sqrt{G_0} d\lambda. \tag{2.2.3}$$

С учетом формулы (1.3.6) можно записать:

$$dx_{proj} = \sqrt{G_0(\lambda)} d\lambda,$$

где  $\lambda$  – переменная интегрирования.

Таким образом, формула для вычисления горизонтальной координаты в цилиндрических проекциях, сохраняющих длины на экваторе, в точке с координатами  $(\Phi_i, \lambda_i)$  имеет вид:

$$x_{proj}(\lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} d\lambda. \quad (2.2.4)$$

То есть горизонтальная координата для цилиндрических проекций является функцией верхнего предела интегрирования  $\lambda_i$ .

Для получения вертикальной координаты  $y_{proj}$  необходимо сравнивать элементы бесконечно малого параллелограмма на касательной плоскости  $(X_{plane}, Y_{plane})$ , определенной в параграфе 1.3, с бесконечно малым параллелограммом в плоскости проекции. Оба этих параллелограмма показаны на рисунке 25.

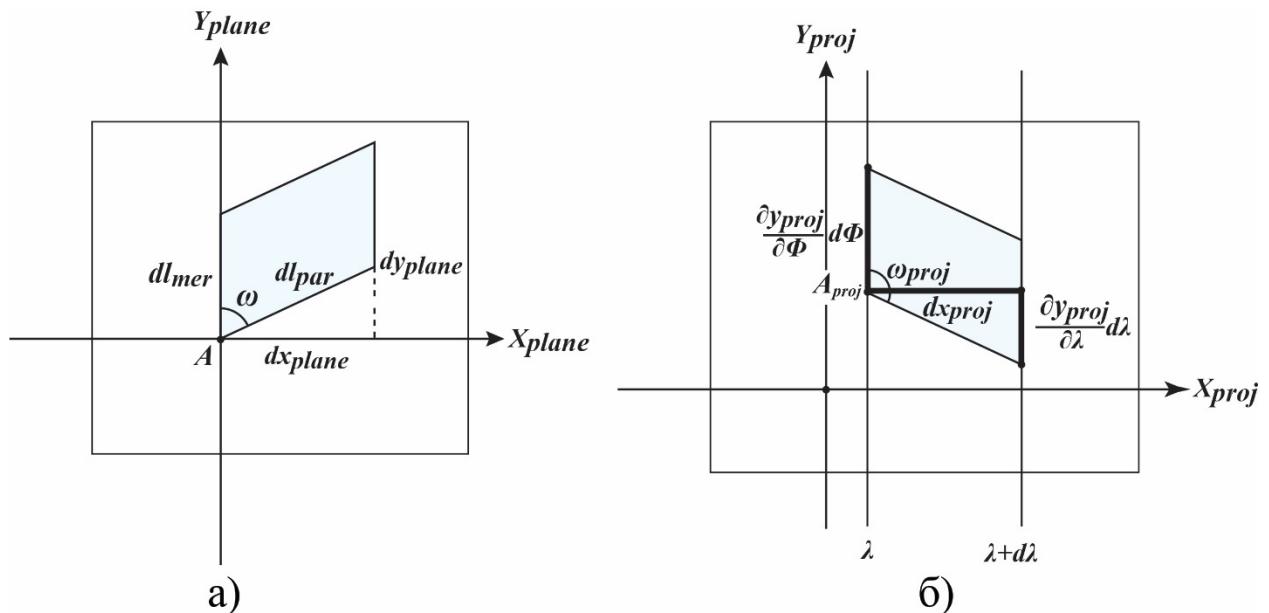


Рисунок 25. Бесконечно малый параллелограмм на касательной плоскости (а) и в плоскости проекции (б)

Рисунок 25 сделан с учетом того, что в цилиндрических проекциях (кроме проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью) знак производной вертикальной координаты по долготе противоположен знаку аналогичной производной на касательной плоскости. Поэтому параллелограммы по-разному ориентированы относительно горизонтальной оси. На рисунке 26 показан фрагмент сетки параллелей и меридианов на трехосном эллипсоиде и в цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для первой четверти северного полушария. При увеличении долготы от нуля до  $90^\circ$ ,

то есть при движении от большой экваториальной оси эллипсоида к малой, уменьшается длина дуги меридиана от полюса до экватора и длина дуги меридиана от экватора до этой точки. Из формулы (1.3.13) видно, что косинус угла между меридианом и параллелью положителен, т.е. угол острый. Для упомянутых выше цилиндрических проекций расстояние отсчитывается от экватора, и длина дуги меридиана уменьшается при соответствующем изменении долготы. То есть угол между меридианом и параллелью – тупой.

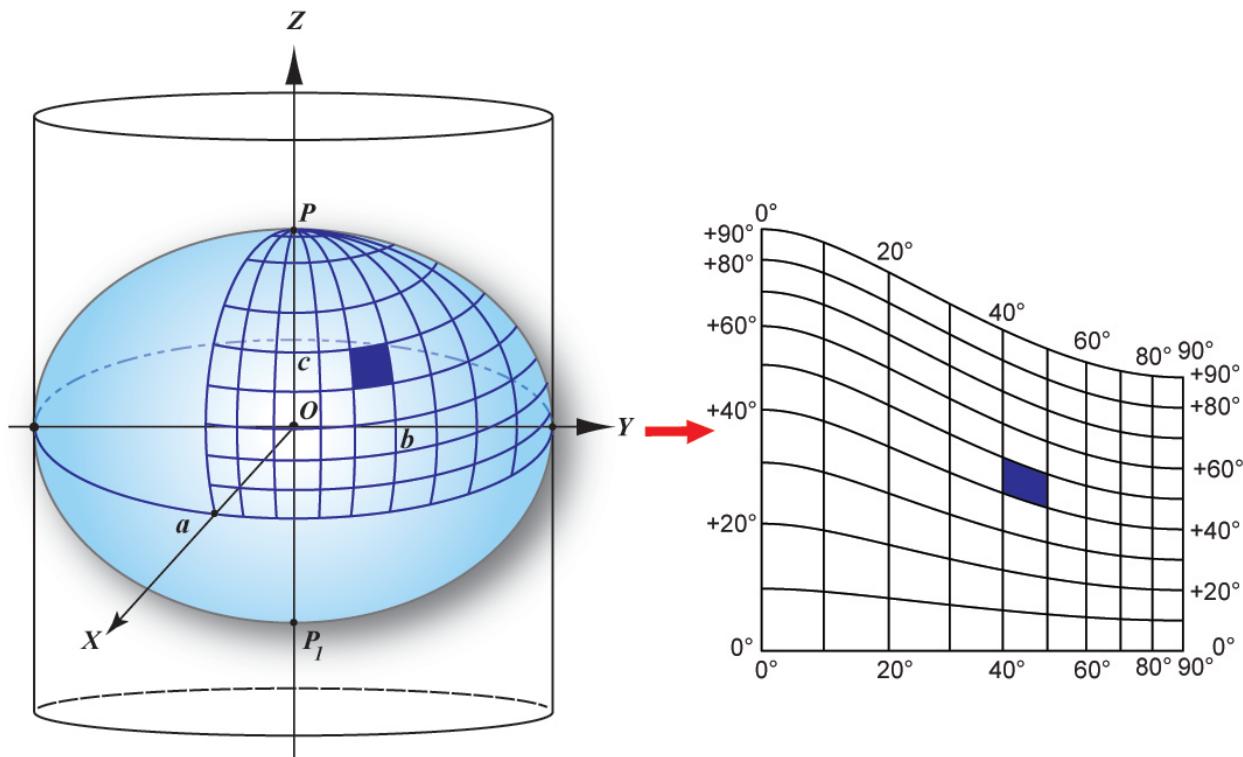


Рисунок 26. Фрагмент сетки параллелей и меридианов на трехосном эллипсоиде и в цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов

На рисунке 27а показан бесконечно малый параллелограмм на касательной плоскости ( $X_{plane}, Y_{plane}$ ) и рисунке 27б – бесконечно малый параллелограмм в плоскости проекции для случая когда знак производной вертикальной координаты по долготе тот же, что и у производной на касательной плоскости. Поэтому параллелограмм в проекции ориентирован относительно горизонтальной оси так же, как и на касательной плоскости.

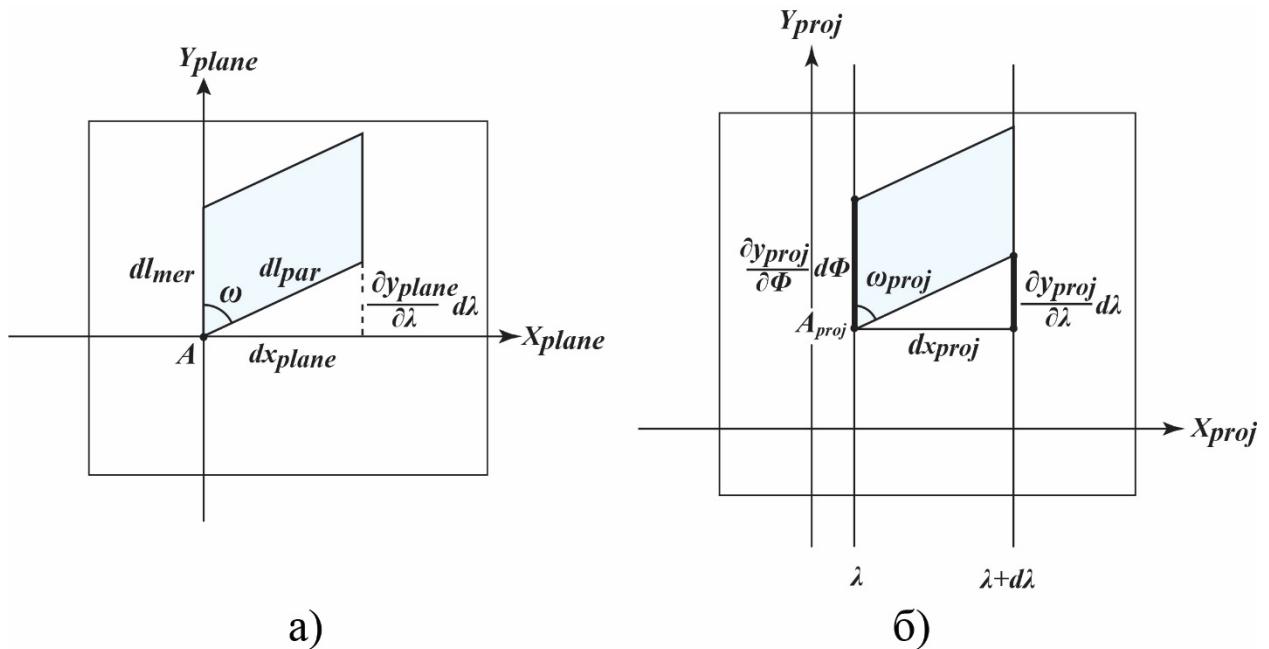


Рисунок 27. Бесконечно малый параллелограмм (а) и фрагмент картографической сетки в плоскости проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью (б)

На рисунке 28 показан фрагмент сетки параллелей и меридианов в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, для одной четверти северного полушария. При увеличении долготы от нуля до  $90^\circ$ , то есть при движении от большой экваториальной оси эллипсоида к малой, уменьшается не только длина дуги меридиана от полюса до экватора, но и длина дуги меридиана от экватора до параллели с заданной широтой. В проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, расстояние также, как и в других цилиндрических проекциях отсчитывается от экватора, но длина дуги меридиана увеличивается при соответствующем изменении долготы.

Вертикальная координата  $y_{proj}$  зависит от широты и долготы, а значит приращение  $dy_{proj}$  имеет вид:

$$dy_{proj} = \frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda . \quad (2.2.5)$$

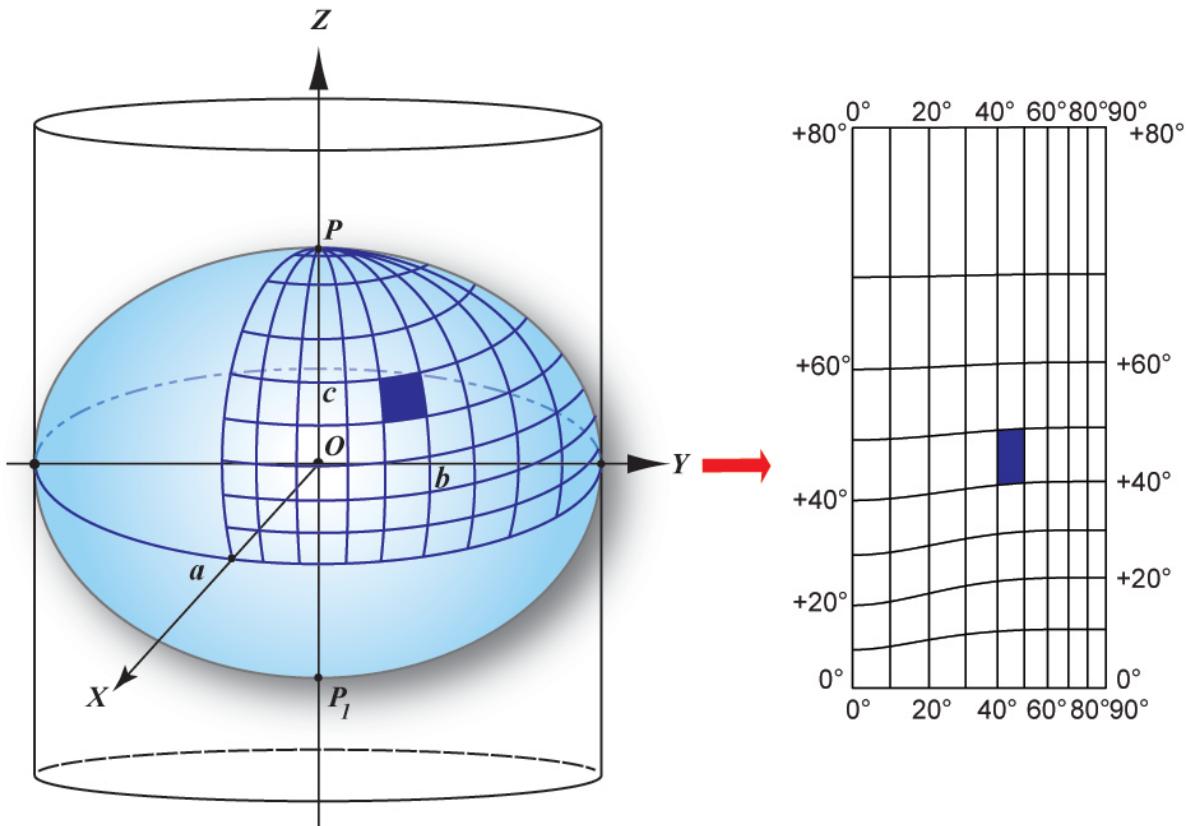


Рисунок 28. Фрагмент сетки параллелей и меридианов на трехосном эллипсоиде и в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью

При известной зависимости  $\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi$  и  $\frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda$  от  $\Phi$  и  $\lambda$  очевидное соотношение

(2.2.5) становится уравнением, причем, в том случае когда  $\frac{\partial(\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi)}{d\lambda}$  не равно

$\frac{\partial(\frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda)}{d\Phi}$ , это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Результат

интегрирования таких уравнений зависит от пути интегрирования. Выбор пути интегрирования соответствует выбору свойств создаваемой проекции.

При переходе к плоскости проекции  $(X_{proj}, Y_{proj})$  для соблюдения заданного характера искажений в нормальных цилиндрических проекциях трехосного эллипсоида необходимо выполнение следующих условий (Рисунки 25, 27):

- для проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi = dl_{mer}; \quad (2.2.6)$$

- для равновеликой проекции:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi dx_{proj} = dl_{mer} dl_{par} \sin \omega; \quad (2.2.7)$$

- для равноугольной проекции:

$$\frac{dy_{proj}}{dx_{proj}} = \frac{dy_{plane}}{dx_{plane}}. \quad (2.2.8)$$

Соблюдение условия (2.2.8) обеспечивает равенство котангенса угла  $\gamma$  между меридианом и произвольной кривой на касательной плоскости (Рисунок 15, параграф 1.3) котангенсу угла  $\gamma_{proj}$  между меридианом и отображением этой кривой в проекции. Рассматриваемый угол всегда меньше  $\pi$ . В том случае, когда угол равен нулю, то есть кривая идет вдоль меридиана, равенство углов обеспечивается автоматически.

**Для цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов,** соотношение дифференциала дуги меридиана на эллипсоиде и в плоскости проекции с учетом формулы (1.3.9):

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{E} d\Phi.$$

В рассматриваемом случае проинтегрируем уравнение (2.2.5) для каждого фиксированного меридиана ( $d\lambda = 0$ ):

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\Phi_i} \sqrt{E} d\Phi. \quad (2.2.9)$$

То есть вертикальная координата при интегрировании по меридиану для цилиндрических проекций является функцией верхнего предела интегрирования  $\Phi_i$ , задаваемого выбором точки.

Окончательные формулы для вычисления цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, в нормальной ориентировке имеют вид:

$$x_{proj}(\lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} d\lambda ;$$

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\Phi_i} \sqrt{E} d\Phi .$$

Карта поверхности астероида 433 Эрос в цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов приведена на рисунке 29. Долгота для этого небесного тела отсчитывается на запад.

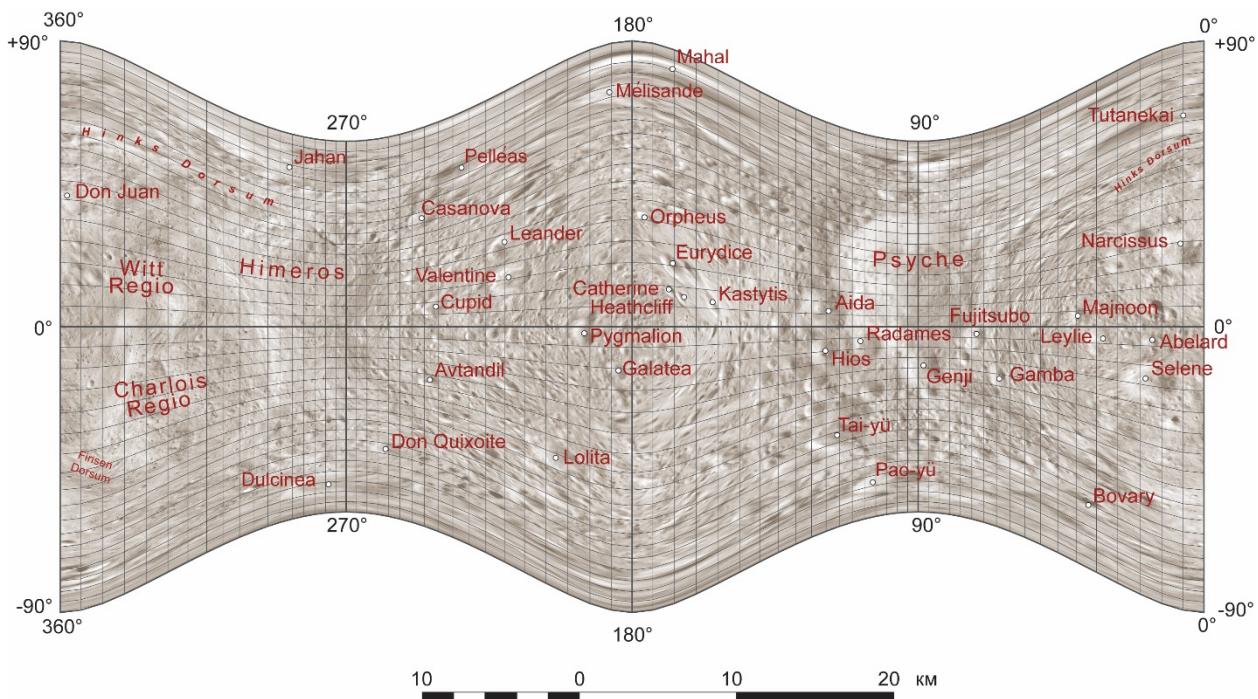


Рисунок 29. Карта поверхности астероида 433 Эрос в цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов  
(исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

**Для равновеликой цилиндрической проекции** площадь бесконечно малого параллелограмма в проекции  $S_{proj}$  должна быть равна соответствующей площади на эллипсоиде  $S_{trap}$ . Условие (2.2.7) с учетом формул (1.3.9), (1.3.10), (1.3.17) и формулы (2.2.3) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi \sqrt{G_0} d\lambda = \sqrt{E} d\Phi \sqrt{G} d\lambda \sin \omega$$

или

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi = \frac{\sqrt{EG} \sin \omega}{\sqrt{G_0}} d\Phi .$$

Как и в предыдущем случае, будем интегрировать уравнение (2.2.5) для каждого фиксированного меридиана ( $d\lambda = 0$ ):

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \int_0^{\Phi_i} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi . \quad (2.2.10)$$

Окончательные формулы для вычисления равновеликой цилиндрической проекции трехосного эллипсоида в нормальной ориентировке имеют вид:

$$x_{proj}(\lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} d\lambda ;$$

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \int_0^{\Phi_i} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi .$$

Карта поверхности астероида 253 Матильда в равновеликой цилиндрической проекции трехосного эллипсоида приведена на рисунке 30. Долгота для этого небесного тела отсчитывается на запад.

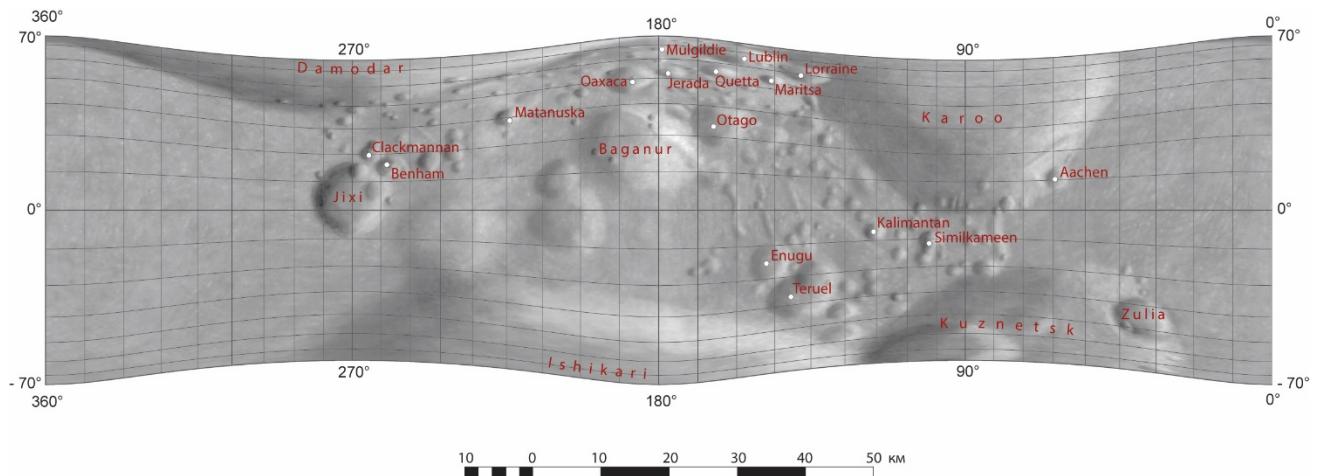


Рисунок 30. Карта поверхности астероида 253 Матильда в равновеликой цилиндрической проекции трехосного эллипсоида  
(исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

Далее будет показано, что **строго равноугольной цилиндрической проекции** трехосного эллипсоида не существует. Возможны квазиверноугольные проекции, которые обеспечивают выполнения некоторых условий, необходимых, но не достаточных для равногольности.

Условие (2.2.8) для цилиндрической проекции (Рисунок 25) превращается в следующее соотношение (также используется формула (2.2.3)):

$$\frac{\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G_0} d\lambda} = \frac{dy_{plane}}{dx_{plane}}.$$

Из рисунка 25а видно, что

$$dx_{plane} = dl_{par} \sin \omega;$$

$$dy_{plane} = dl_{par} \cos \omega + dl_{mer}.$$

Таким образом:

$$\frac{\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G_0} d\lambda} = \frac{dl_{par} \cos \omega + dl_{mer}}{dl_{par} \sin \omega}.$$

Окончательно, с использованием формул (1.3.9), (1.3.10), это выражение можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\sqrt{G} d\lambda \cos \omega + \sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} d\lambda \sin \omega} \sqrt{G_0} d\lambda$$

или:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda. \quad (2.2.11)$$

Подставим выражение (2.2.11) в уравнение (2.2.5). Затем проинтегрируем полученное уравнение, используя разные пути интегрирования. В первом случае интегрирование производится сначала по экватору ( $d\Phi = 0$ ), а затем по меридиану с долготой  $\lambda_i$  ( $d\lambda = 0$ ):

$$\int_0^{(\Phi_i, \lambda_i)} dy_{proj} = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda + \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi.$$

Поскольку интеграл по экватору равен нулю, можно считать, что интегрирование осуществляется по меридиану:

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi. \quad (2.2.12)$$

Интеграл (2.2.12) можно также получить из условия равенства отношения дифференциала длины дуги меридиана и длины перпендикуляра, проведенного к этому меридиану до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$ , на эллипсоиде и в проекции (Рисунок 25), выражения (1.3.9), (1.3.10) и (2.2.3)):

$$\frac{\frac{\partial y_{proj}}{\partial \phi} d\Phi}{dx_{proj}} = \frac{dl_{mer}}{dl_{par} \sin \omega}.$$

Таким образом, получается квазиравноугольная **цилиндрическая проекция меридианного сечения**. Эту проекцию будем называть также проекцией Бугаевского в связи с тем, что Л. М. Бугаевский впервые применил ее для карты Фобоса с использованием выведенных им приближенных формул. Эта карта показана на рисунке 31. Долгота для Фобоса отсчитывается на запад.

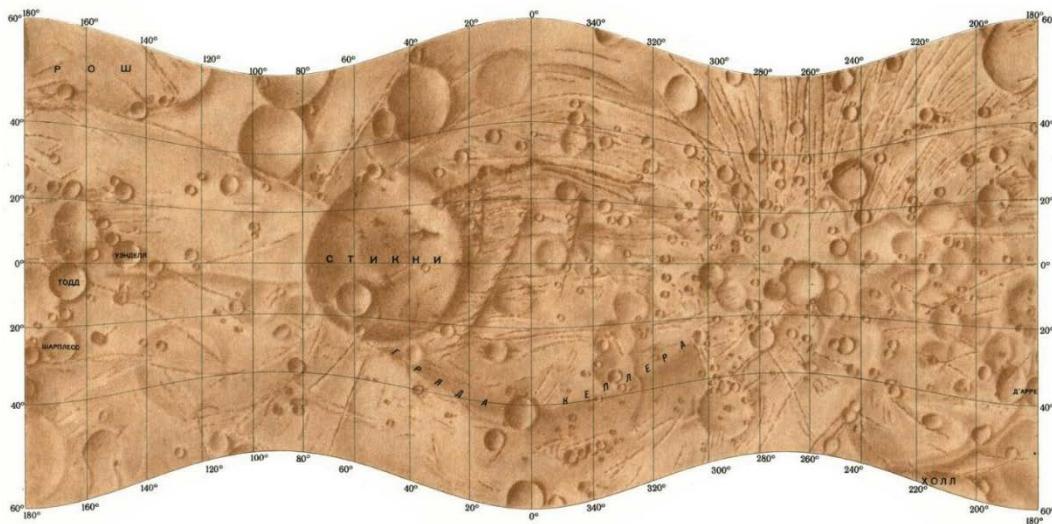


Рисунок 31. Карта поверхности спутника Марса Фобоса в проекции Бугаевского (карта из Атласа планет земной группы и их спутников, МИИГАиК, 1992 г.)

Окончательные формулы для вычисления цилиндрической проекции Бугаевского в нормальной ориентировке имеют вид:

$$x_{proj}(\lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} d\lambda ;$$

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi .$$

В приложении 3 показано, что величина интеграла будет больше на начальном меридиане, чем на меридиане  $90^\circ$ . Следовательно, при изменении долготы от нуля до  $90^\circ$  (на восток) существуют точки, в которых за счет уменьшения вертикальной координаты угол между меридианом и параллелью тупой и его косинус меньше нуля (Рисунок 32).

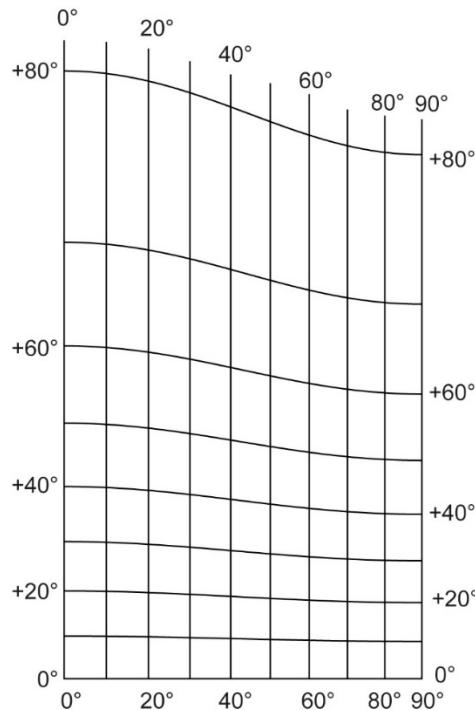


Рисунок 32. Фрагмент картографической сетки в проекции Бугаевского

Однако на эллипсоиде, как это видно из формулы (1.3.13), косинус угла между меридианом и параллелью при положительной широте и долготе больше нуля и меньше  $90^\circ$  положителен, то есть угол острый. Таким образом, в проекции Бугаевского угол между меридианом и параллелью сохраняется не везде. Приведенное рассуждение может рас-

сматриваться как доказательство невозможности построения строго равноугольной цилиндрической проекции, так как в равноугольной проекции одновременно должно соблюдаться условие, положенное в основу вывода этой проекции, а также сохранение угла между меридианом и параллелью.

Интеграл из правой части уравнения вертикальной координаты может быть вычислен с использованием точных формул, представленных в приложении 2. При этом постоянная интегрирования, зависящая от долготы, вычисляется из условия равенства нулю вертикальной координаты на экваторе. Однако использование таких формул приведет к ограничению применения проекции случаем, когда  $e_{ac}^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} > 0$ , так как в формулы входит  $e_{ac} = \sqrt{e_{ac}^2}$ . При непосредственном получении значений интеграла численными методами  $e_{ac}^2$  используется как формальный параметр, который может принимать отрицательные значения. Это необходимо для вычисления полученной проекции в поперечной ориентировке.

Достоинством проекции Бугаевского является то, что в определенном широтном поясе для небесных тел, аппроксимируемых трехосным эллипсоидом со средним экваториальным сжатием (например, Фобос, Деймос), эта проекция позволяет сохранить форму малых контуров, то есть имеет именно то свойство, ради которого часто используются равноугольные проекции. Проекция не является строго равноугольной и не сохраняет угол между меридианом и параллелью, но в окрестности каждого меридиана близка к равноугольной проекции эллипса вращения, соответствующего меридианному сечению. На начальном меридиане она совпадает с цилиндрической равноугольной проекцией эллипса вращения, экваториальная ось которого равна большой экваториальной оси трехосного эллипса, а полярная ось равна его полярной оси.

Далее, во втором случае, интегрирование уравнения (2.2.5) с подстановкой (2.2.11) будем проводить по начальному меридиану ( $d\lambda = 0$ ) до параллели с широтой  $\Phi_i$  и затем по этой параллели ( $d\Phi = 0$ ) до меридиана с долготой  $\lambda_i$ :

$$\int_0^{(\Phi_i, \lambda_i)} dy_{proj} = \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda .$$

Обозначим интеграл по начальному меридиану через  $y_0$ , а так как, на начальном меридиане синус угла между меридианом и параллелью равен единице, получаем:

$$y_0(\Phi_i, \lambda = 0) = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} d\Phi. \quad (2.2.13)$$

Интеграл по параллели обозначим через  $y_1$ :

$$y_1(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda. \quad (2.2.14)$$

Интеграл из выражения (2.2.14) можно также получить из условия равенства углов между меридианом и параллелью на касательной плоскости и в проекции (Рисунок 27 и формула (2.2.3)):

$$\frac{\frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} d\lambda}{dx_{proj}} = \operatorname{ctg} \omega.$$

Таким образом вертикальная координата проекции вычисляется по формуле:

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = y_0 + y_1.$$

Окончательные формулы для вычисления **цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью**, в нормальной ориентировке имеют вид:

$$x_{proj}(\lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} d\lambda; \\ y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} d\Phi + \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda. \quad (2.2.15)$$

На рисунке 33 представлен путь интегрирования и соотношение отрезков на касательной плоскости и в проекции.

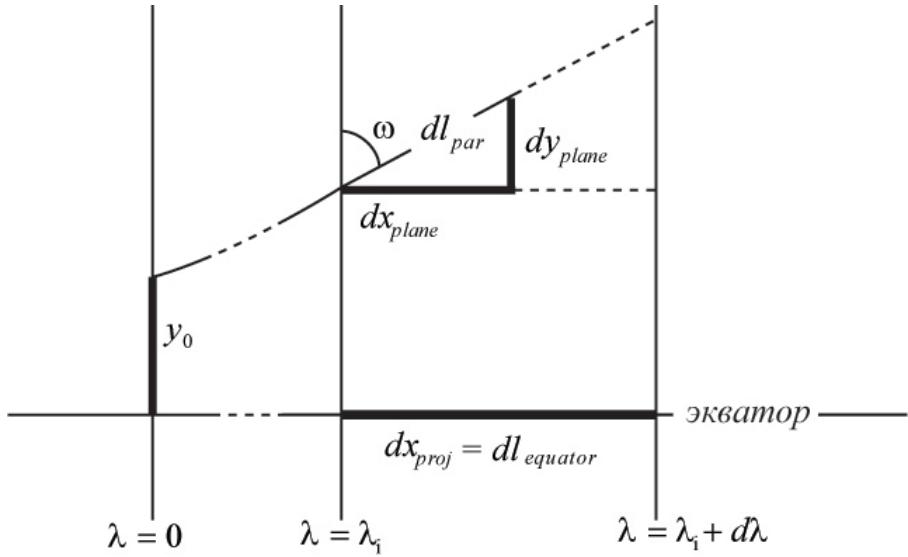


Рисунок 33. Соотношение отрезков на касательной плоскости и в плоскости проекции

Таким образом, получены формулы проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, но эта проекция в нормальной ориентировке дает плохое представление о картографируемой поверхности и также, как и проекция Бугаевского, не является равноугольной (Рисунок 34). Свойство равноугольности сохраняется только на начальном меридиане и меридианах  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ . На начальном меридиане она также, как и проекция Бугаевского, совпадает с цилиндрической равноугольной проекцией Меркатора для эллипсоида вращения, экваториальная ось которого равна большой экваториальной оси трехосного эллипсоида, а полярная ось равна его полярной оси.

В поперечной ориентировке проекции с полюсом проекции в точке экватора с долготой ноль большая экваториальная ось становится полярной, длины сохраняются на меридианах  $90^\circ$  и  $270^\circ$ . Если малая экваториальная ось исходного эллипсоида равна или мало отличается от его полярной оси, полученная проекция дает хорошее представление о картографируемой территории в окрестности северного и южного полюса и меридианах  $90^\circ$  и  $270^\circ$ . На рисунке 35 представлена карта поверхности астероида 433 Эрос в поперечной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида, сохраняющей угол между меридианом и параллелью.

Карты поверхности астероида 433 Эрос, представленные на рисунках 34 и 35, составлены с учетом того, что долгота для этого небесного тела отсчитывается на запад.

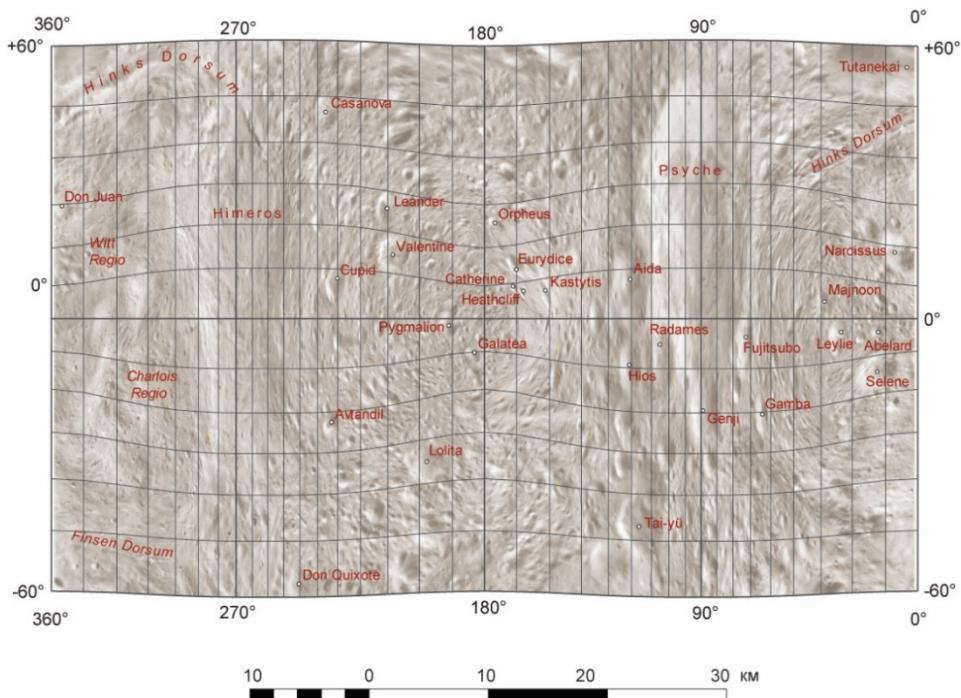


Рисунок 34. Карта поверхности астероида 433 Эрос в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, в нормальной ориентировке (исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

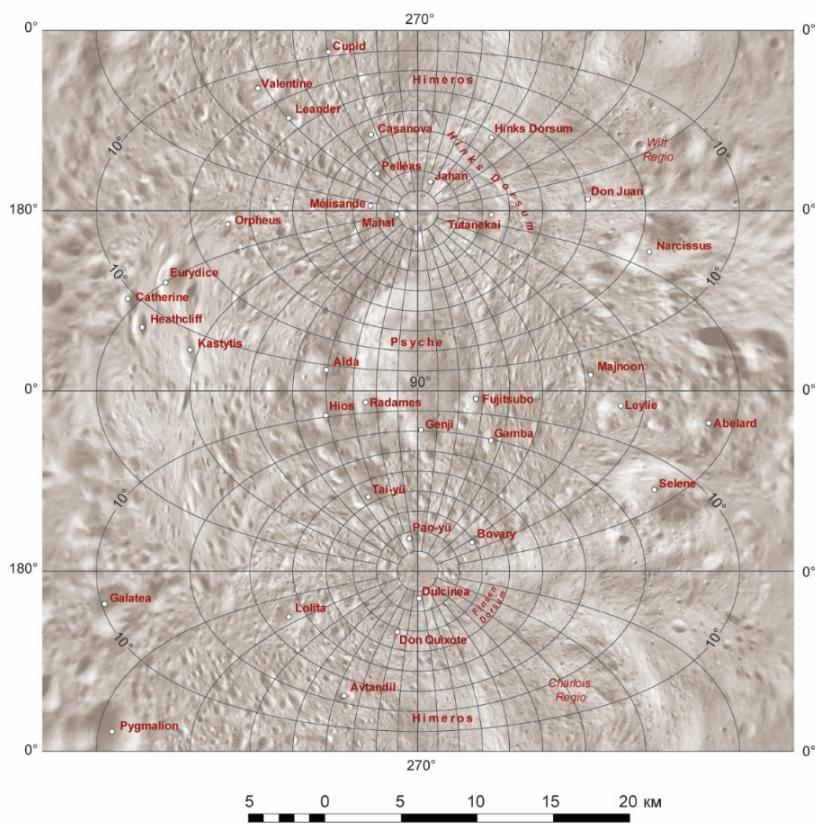


Рисунок 35. Карта поверхности астероида 433 Эрос в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью в поперечной ориентировке (исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

## 2.3. Азимутальные проекции

При построении азимутальных проекций используется полярная система координат  $\rho, \delta$  (Рисунок 36). Прямоугольные координаты в проекции выражаются с помощью переменных в полярной системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned}x_{proj} &= \rho \sin \delta, \\y_{proj} &= -\rho \cos \delta.\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

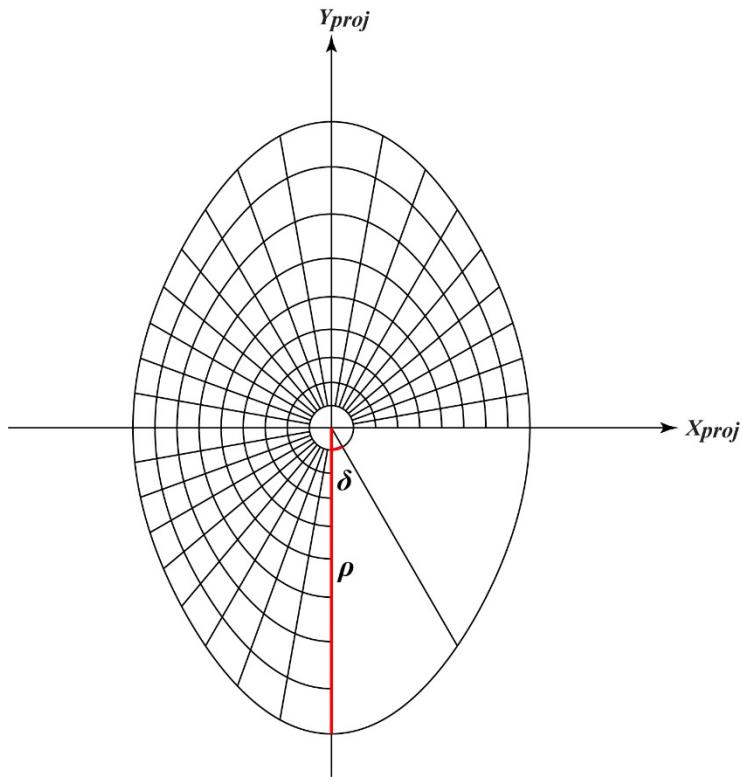


Рисунок 36. Система координат в азимутальной проекции

В соответствии с определением азимутальных проекций, данное в разделе 2.1, для азимутальных проекций в нормальной ориентировке, не имеющих искажений в полюсе проекции, полярный угол  $\delta$  равен долготе  $\lambda$ , а формула для вычисления полярного расстояния  $\rho$  зависит от выбранного характера искажений. Полярное расстояние в полюсе для всех азимутальных проекций, то есть в точке с широтой  $\frac{\pi}{2}$ , равно нулю.

При выводе формул для полярного расстояния используются стороны бесконечно малого параллелограмма и синус угла между ними на касательной плоскости

$(X_{plane}, Y_{plane})$ , определенной в параграфе 1.3, а в проекции – стороны параллелограмма и перпендикуляр к меридиану с долготой  $\lambda$ , проведенный до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$ . Оба этих параллелограмма и фрагмент картографической сетки в проекции показаны на рисунке 37.

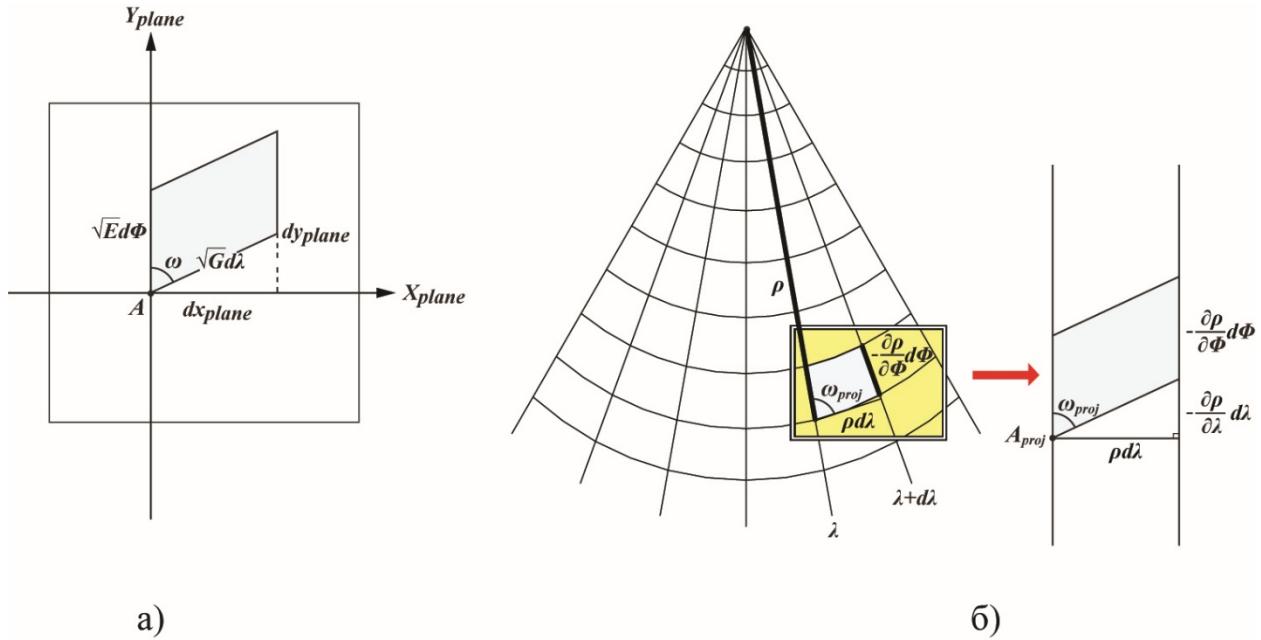


Рисунок 37. Бесконечно малый параллелограмм на плоскости, касательной к трехосному эллипсоиду в точке  $A$  (а), соответствующий ему параллелограмм на фрагменте картографической сетки в проекции (б)

Полярное расстояние в азимутальных проекциях трехосного эллипсоида зависит от широты и долготы, а значит приращение  $d\rho$  можно представить в виде:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (2.3.2)$$

При известной зависимости производных  $\frac{\partial \rho}{\partial \Phi}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial \lambda}$  от  $\Phi$  и  $\lambda$  соотношение (2.3.2), как отмечалось в параграфе 2.2, становится уравнением. В том случае, когда это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, результат его интегрирования зависит от пути интегрирования. Выбор этого пути соответствует выбору свойств создаваемой проекции.

При переходе к плоскости проекции  $(X_{proj}, Y_{proj})$  для соблюдения заданного характера искажений в нормальных азимутальных проекциях трехосного эллипсоида необходимо выполнение следующих условий (Рисунок 37):

- для проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{E} d\Phi; \quad (2.3.3)$$

- для равновеликой проекции:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi \rho d\lambda = \sqrt{E} d\Phi \sqrt{G} d\lambda \sin \omega; \quad (2.3.4)$$

- для равноугольной проекции:

$$-\frac{d\rho}{\rho d\lambda} = \frac{x_{plane}}{y_{plane}}. \quad (2.3.5)$$

Знак минус перед производной связан с тем, что полярное расстояние  $\rho$  увеличивается при уменьшении широты  $\Phi$ .

Условие (2.3.5) равносильно равенству котангенса угла  $\gamma$  между меридианом и произвольной кривой на касательной плоскости (Рисунок 15, параграф 1.3) и котангенса угла  $\gamma_{proj}$  между меридианом и отображением этой кривой в проекции. Рассматриваемый угол всегда меньше  $\pi$ . В том случае, когда угол равен нулю, то есть кривая идет вдоль меридиана, равенство углов обеспечивается автоматически.

Для получения **азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов**, проинтегрируем обе части уравнения (2.3.3) для каждого фиксированного меридиана ( $d\lambda = 0$ ) от полюса до параллели с заданной широтой (напомним, что полярное расстояние в полюсе равно нулю):

$$\rho(\Phi_i, \lambda_i) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\Phi_i} \sqrt{E} d\Phi = \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E} d\Phi. \quad (2.3.6)$$

Таким образом, интегрирование проводится от параллели с заданной широтой до полюса. Окончательные формулы азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов в нормальной ориентировке, имеют вид:

$$x_{proj} = \rho \sin \lambda, \quad (2.3.7)$$

$$y_{proj} = -\rho \cos \lambda,$$

где  $\rho(\Phi_i, \lambda_i)$  соответствует зависимости (2.3.6).

Карта поверхности астероида 433 Эрос в азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов представлена на рисунке 38.

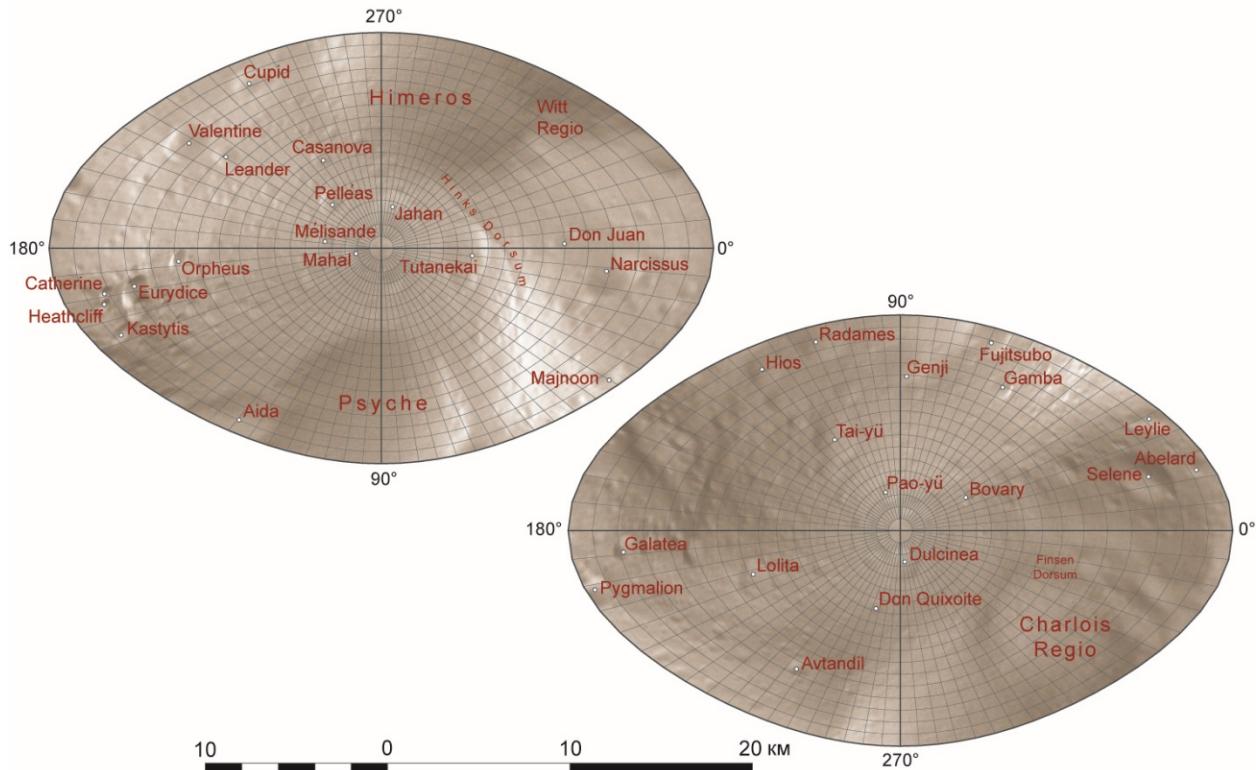


Рисунок 38. Карта поверхности астероида 433 Эрос в азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов  
(исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

**Равновеликая азимутальная проекция трехосного эллипсоида** строится из условия равенства площадей бесконечно малого параллелограмма в проекции и на эллипсоиде. Из соответствующей этому условию зависимости (2.3.4) получаем:

$$-\rho \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi$$

или

$$-\frac{\partial \frac{\rho^2}{2}}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi .$$

Проинтегрируем обе части уравнения для каждого фиксированного меридиана ( $d\lambda = 0$ ) от полюса до параллели с заданной широтой (напомним, что полярное расстояние в полюсе равно нулю):

$$\frac{\rho^2}{2} = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\Phi_i} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi = \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi .$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, интегрирование проводится от параллели с заданной широтой до полюса:

$$\rho(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{2 \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi} . \quad (2.3.8)$$

Окончательные формулы равновеликой азимутальной проекции трехосного эллипсоида в нормальной ориентировке имеют вид (2.3.7), где  $\rho(\Phi_i, \lambda_i)$  соответствует зависимости (2.3.8).

Карта поверхности астероида 253 Матильда в равновеликой азимутальной проекции приведена на рисунке 39.

Условие (2.3.5) для равноугольной азимутальной проекции (Рисунок 37) превращается в следующее соотношение (формула (2.3.2)):

$$-\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} d\lambda}{\rho d\lambda} = \frac{y_{plane}}{x_{plane}} .$$

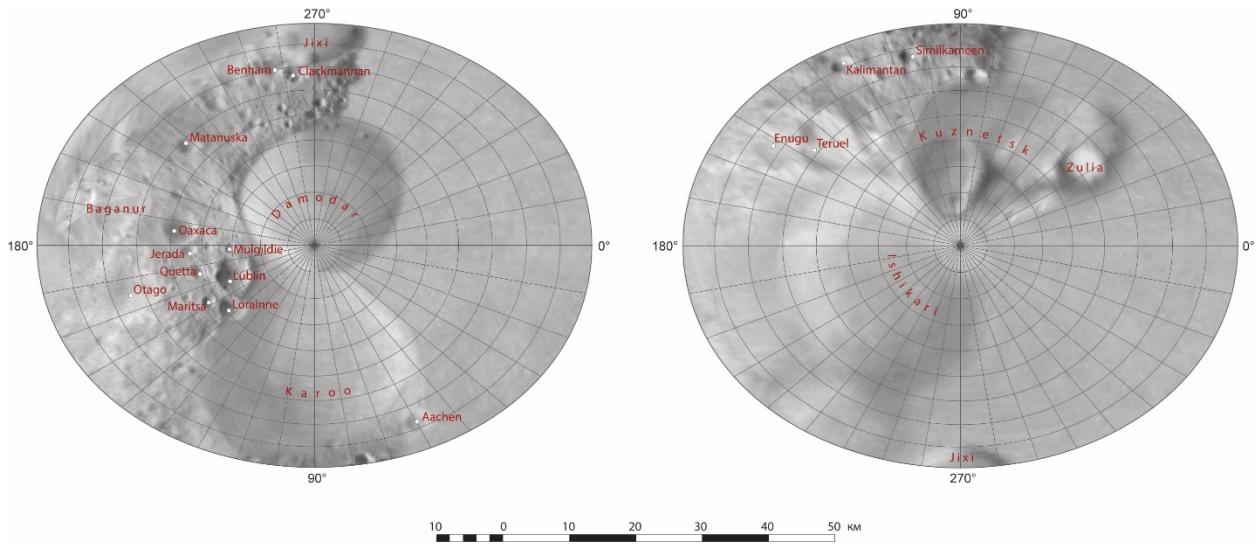


Рисунок 39. Карта поверхности астероида 253 Матильда  
в равновеликой азимутальной проекции трехосного эллипсоида  
(исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

Как уже отмечалось в параграфе, посвященном цилиндрическим проекциям:

$$dx_{plane} = dl_{par} \sin \omega ; \\ dy_{plane} = dl_{par} \cos \omega + dl_{mer} .$$

Следовательно

$$-\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} d\lambda}{\rho d\lambda} = \frac{dl_{par} \cos \omega + dl_{mer}}{dl_{par} \sin \omega} .$$

Окончательно, с использованием формул (1.3.9), (1.3.10), это выражение можно представить в следующем виде:

$$-\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} d\lambda}{\rho} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \operatorname{ctg} \omega d\lambda \quad (2.3.9)$$

или

$$-d \ln \rho = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \operatorname{ctg} \omega d\lambda . \quad (2.3.10)$$

Запишем условие равенства отношения дифференциала длины дуги меридиана и длины перпендикуляра, проведенного к этому меридиану до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$ , на эллипсоиде и в проекции (Рисунок 37):

$$-\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi}{\rho d\lambda} = \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} d\lambda \sin \omega}$$

или

$$-\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi}{\rho} = \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega}. \quad (2.3.11)$$

При  $d\lambda = 0$  (интегрирование по меридиану) уравнение (2.3.9) приобретает вид выражения (2.3.11), что соответствует условию получения **азимутальной проекции меридианного сечения**.

Проинтегрируем уравнение (2.3.10) по меридиану с долготой  $\lambda_i$  ( $d\lambda = 0$ ):

$$\begin{aligned} -d \ln \rho &= \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi ; \\ -\ln \rho &= \int \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Вычисление этого интеграла приведено в приложении 2. Соответственно, на основании (П.2.10) зависимость для  $\ln \rho$  будет иметь вид:

$$\ln \rho = \ln \frac{\cos \Phi \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}} +$$

$$+ \ln \left[ \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{\frac{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda}{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)} + \sqrt{t_0}} \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}{\sqrt{t} \sqrt{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right)}} \right]^{K_{int}} + \ln C_{int1},$$

где в соответствии с (П.2.9)

$$K_{int} = \frac{(1 - e_{ac}^2) \left[ -\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}.$$

Вспомогательные величины  $t, t_0$  соответствуют формулам (1.1.5) и (1.1.6).

Для упрощения записи формул воспользуемся обозначениями, введенными в приложении 2 (П.2.2). Для наглядности повторим эти обозначения:

$$K_{\rho 1} = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2};$$

$$K_{\rho 2} = e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2};$$

$$K_{\rho 3} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2};$$

$$K_{\rho 4} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2};$$

$$K_{\rho 5} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}.$$

На основании формулы (П.2.11), полученной из (П.2.10) с использованием повторенных выше обозначений (П.2.2), зависимость для  $\ln \rho$  можно также представить в виде:

$$\ln \rho = \ln \frac{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}} + \ln \left( \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}} \right)^{K_{int}} + \ln C_{int1}.$$

Окончательная зависимость для полярного расстояния:

$$\rho = C_{int1} \frac{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}} \cdot \left( \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}} \right)^{K_{int}}. \quad (2.3.13)$$

Постоянная интегрирования  $C_{int1}$ , зависящая от долготы, вычисляется из условия отсутствия искажений в полюсе. Для ее получения определим дифференциал длины дуги меридиана с долготой  $\lambda$  в проекции и на эллипсоиде (Рисунок 37).

Из (2.3.11) в проекции:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \rho \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi = \rho \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} d\Phi \quad (2.3.14)$$

и на эллипсоиде:

$$\sqrt{E} d\Phi.$$

Отношение этих двух выражений представляет собой масштаб длин вдоль меридиана:

$$K_{mer} = \rho \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (2.3.15)$$

Заметим, что знаменатель правой части (2.3.15) приведен к компактному виду в приложении 2 при преобразовании подынтегрального выражения. С учетом (П.2.3) получаем:

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{4a^2 t \cos \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}{4t^3} = \\ = \frac{a^2 \cos \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t^2}.$$

Следовательно:

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\sqrt{a^2 \frac{4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2}{4t^3}}}{\frac{a^2 \cos \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t^2}} = \\ = \frac{\sqrt{\frac{t^2 + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi K_{\rho 3}^2}{t^3}}}{\frac{a \cos \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t^2}} = \frac{\sqrt{t} \sqrt{t^2 + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi K_{\rho 3}^2}}{a \cos \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}.$$

После подстановки в формулу (2.3.15) полученного выражения с учетом формулы (2.3.13) масштаб длин вдоль меридиана:

$$K_{mer} = C_{int1} \frac{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}} \cdot \left( \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}} \right)^{K_{int}} \cdot \\ \cdot \frac{\sqrt{t} \sqrt{t^2 + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi K_{\rho 3}^2}}{a \cos \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}.$$

Или после сокращения на  $\cos \Phi$

$$K_{mer} = C_{int1} \frac{\sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}} \cdot \left( \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}} \right)^{K_{int}} \cdot \frac{\sqrt{t} \sqrt{t^2 + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi K_{\rho 3}^2}}{a \sqrt{K_{\rho 1}}}.$$

Следовательно

$$C_{int1} = K_{mer} \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{K_{\rho 5}}} \cdot \left( \frac{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}}{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}} \right)^{K_{int}} \cdot \frac{a \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{t^2 + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi K_{\rho 3}^2}}.$$

В полюсе:

$$K_{mer} = 1;$$

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = \frac{1}{1 - e_{ac}^2};$$

$$K_{\rho 1} = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} = \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2};$$

$$C_{int1} = \frac{2}{\sqrt{K_{\rho 5}}} \cdot \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - e_{ac}^2}} \sqrt{-K_{\rho 4}}}{\frac{\sqrt{K_{\rho 2}}}{1 - e_{ac}^2} + \frac{\sqrt{t_0}}{1 - e_{ac}^2}} \right)^{K_{int}} \cdot \frac{a \frac{1}{1 - e_{ac}^2}}{\frac{1}{\sqrt{1 - e_{ac}^2}} \frac{1}{1 - e_{ac}^2}} = \\ = \frac{2a}{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 5}}} \cdot \left( \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{-K_{\rho 4}}}{\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0}} \right)^{K_{int}}.$$

После подстановки полученного выражения для  $C_{int1}$  в формулу (2.3.13):

$$\begin{aligned}
\rho &= C_{int1} \frac{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}} \cdot \left( \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}} \right)^{K_{int}} = \\
&= \frac{2a}{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 5}}} \left( \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{-K_{\rho 4}}}{\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0}} \right)^{K_{int}} \cdot \\
&\cdot \frac{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}} \left( \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}} \right)^{K_{int}} = \\
&= \frac{2a \sqrt{1 - e_{ac}^2} \cos \Phi}{\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1}}} \left[ \frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t} (\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0})} \right]^{K_{int}}. \quad (2.3.16)
\end{aligned}$$

Без использования обозначений (П.2.2) формула для вычисления полярного расстояния может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{2a \sqrt{1 - e_{ac}^2} \cos \Phi}{\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}} \cdot \\
&\cdot \left\{ \frac{\sin \Phi \sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0}} \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}} {\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t} \left[ \sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \sqrt{t_0}} \right]} \right\}^{K_{int}} \quad (2.3.17)
\end{aligned}$$

Соответственно, формулы азимутальной проекции меридианного сечения в нормальной ориентировке имеют вид (2.3.7), с  $\rho(\Phi_i, \lambda_i)$  из формулы (2.3.16) или формулы (2.3.17).

Особый случай при  $e_{ac}^2 = e_{ab}^2$  и  $\cos^2 \lambda = 0$  (приложение 2), не требует специального рассмотрения, так как полярное расстояние для этого случая может быть вычислено по общим формулам (2.3.17). Исключение составляет показатель степени  $K_{int}$ . Однако при  $e_{ac}^2 = e_{ab}^2$  эта величина может быть вычислена по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
K_{int} &= \frac{(1 - e_{ac}^2) \left[ -\left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} = \\
&= \frac{(1 - e_{ac}^2) \left[ -\left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ac}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ac}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ac}^2)}{(1 - e_{ac}^2)^2}}} = \\
&= \frac{(1 - e_{ac}^2) \left( -\cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \lambda}{1 - e_{ac}^2} \right) \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ac}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda}} = e_{ac} \cos \lambda \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ac}^2}}.
\end{aligned}$$

В приложении 3 показано, что длина меридиана от полюса до экватора (полярное расстояние) в проекции меридианного сечения будет больше на начальном меридиане, чем на меридиане  $90^\circ$ . Это значит, что линия экватора в проекции отличается от окружности. На рисунке 40 представлены две картографические сетки в проекции меридианного сечения, дополненные окружностями. Слева (Рисунок 40а) – полушарие трехосного эллипсоида с полуосами 17000 м, 5500 м и 5500 м, аппроксимирующего астероид 433 Эрос, и справа (Рисунок 40б) – полушарие трехосного эллипсоида с полуосами 13000 м, 11400 м и 9100 м, аппроксимирующего спутник Марса Фобос.

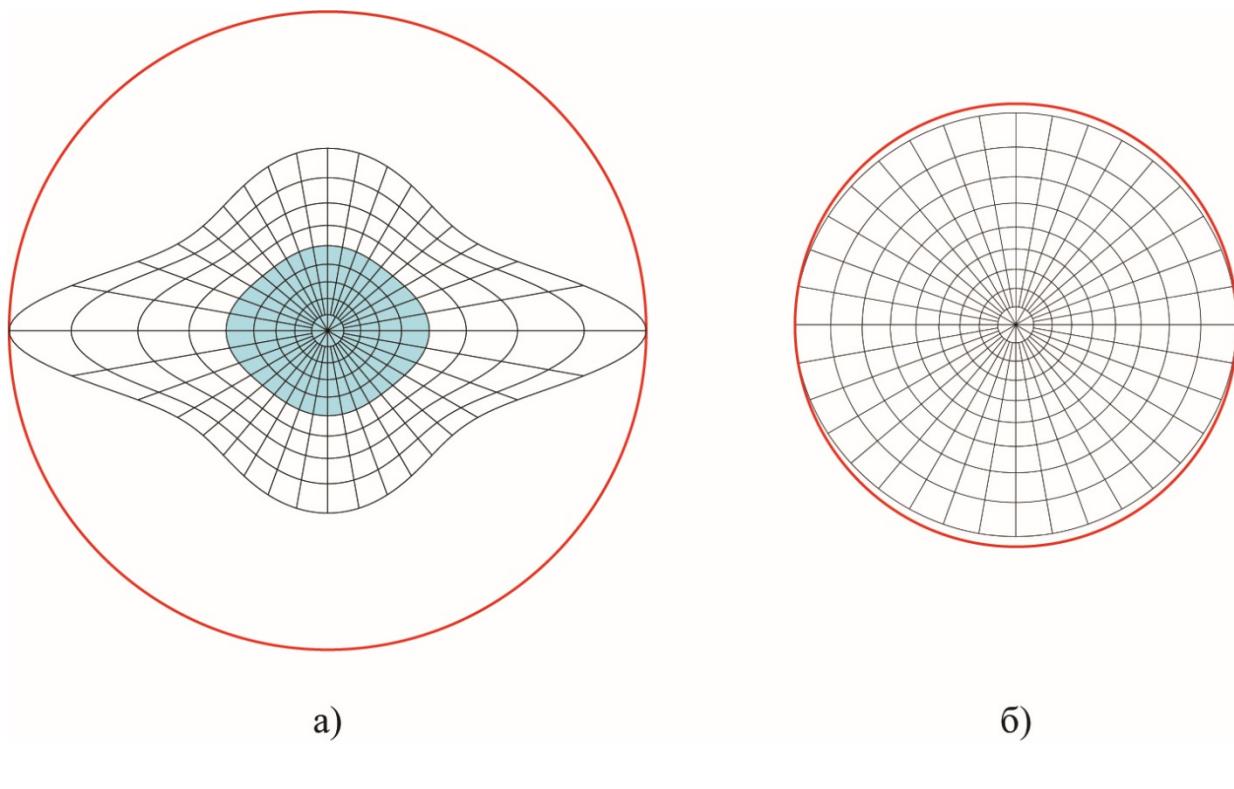


Рисунок 40. Картографические сетки полушария трехосного эллипсоида в азимутальной проекции меридианного сечения, отличающиеся соотношением осей трехосного эллипсоида, аппроксимирующего астероид 433 Эрос (а) и спутник Марса Фобос (б)

Из рисунка 40а видно, что даже при большом экваториальном и полярном сжатии в диапазоне широт от  $40^\circ$  до  $90^\circ$  (голубой цвет) искажения не слишком велики, а при меньшем сжатии экватор в проекции мало отличается от окружности (Рисунок 40б), то есть проекция близка к равноугольной.

Отметим, что только в случае окружности угол между полярным радиусом и касательной во всех точках экватора является прямым. Однако на эллипсоиде угол между меридианом и экватором прямой. Таким образом, в проекции угол между меридианом и параллелью сохраняется не везде. Приведенное рассуждение может рассматриваться как доказательство невозможности построения строго равноугольной азимутальной проекции, так как в равноугольной проекции должно соблюдаться условие равенства отношения дифференциалов длин соответствующих дуг на эллипсоиде и в проекции, а также сохранение угла между меридианом и параллелью.

На рисунке 41 представлены две карты в проекции меридианного сечения: полушарие астероида 433 Эрос (Рисунок 41а) и полушарие спутника Марса Фобос (Рисунок 41б).

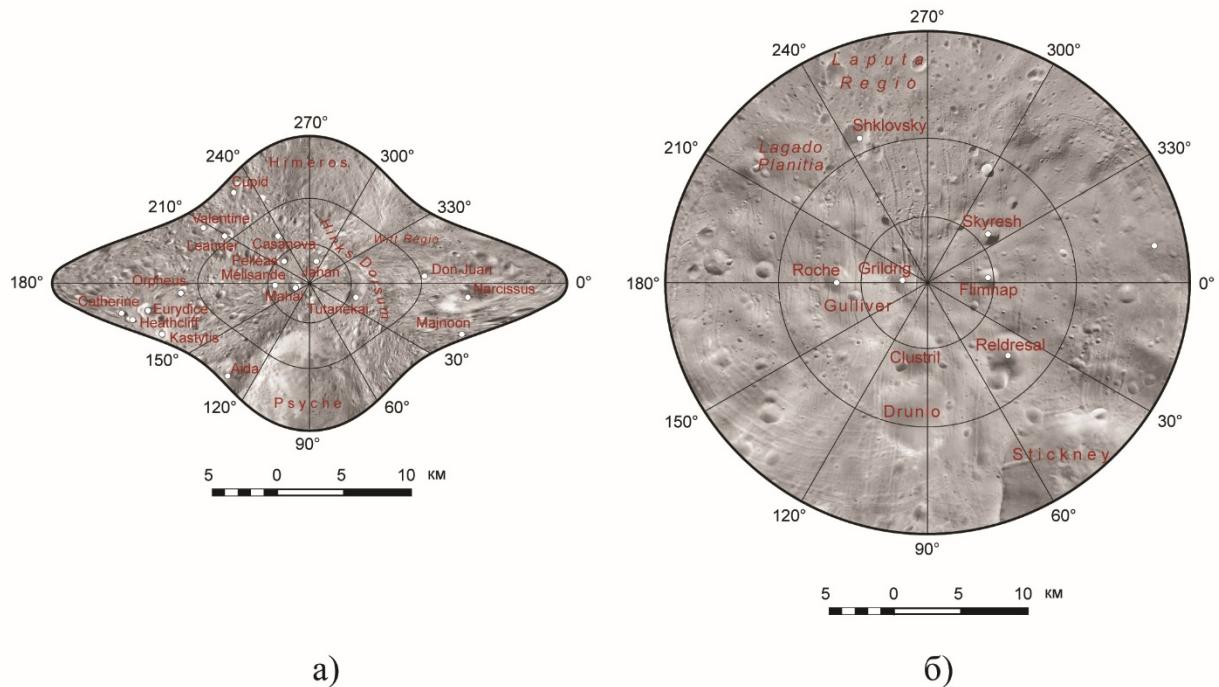


Рисунок 41. Полушарие астероида 433 Эрос (а) и полушарие спутника Марса Фобос (б)  
в азимутальной проекции меридианного сечения  
(исходные фотомозаики подготовлены проф. Ф. Дж. Стуком)

Для получения **азимутальной проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью**, интегрирование уравнения (2.3.9) производится сначала по меридиану с долготой  $\lambda_i = 0$  ( $d\lambda = 0$ ), а затем по параллели  $\Phi = \Phi_i$  ( $d\Phi = 0$ ). Эта проекция требует дальнейших исследований. Она имеет теоретическое значение, так как в сочетании с азимутальной проекцией меридианного сечения показывает отклонение этих проекций от равноугольной.

## 2.4. Конические проекции

В плоскости проекции используется прямоугольная система координат, у которой координатная ось  $X_{proj}$  направлена горизонтально вправо, а ось  $Y_{proj}$  направлена вертикально вверх вдоль меридиана с долготой  $\lambda_0$  (средний меридиан карты). Пусть началом координат будет пересечение этого меридиана и некоторой параллели с широтой  $\Phi_{origin}$ . Дополнительно используем полярную систему координат  $\rho, \delta$  с полюсом в точке схода меридианов и положительным направлением против часовой стрелки. Нулевой луч этой системы направлен по оси  $Y_{proj}$ . На рисунке 42 показаны системы координат в конической проекции, для которых средний меридиан совпадает с начальным. При этом прямоугольные координаты связаны с полярными следующими соотношениями:

$$x_{proj} = \rho \sin \delta ; \quad (2.4.1)$$

$$y_{proj} = \rho_{origin} - \rho \cos \delta,$$

где полярное расстояние  $\rho_{origin} = \rho(\Phi_{origin}, \lambda_0)$  по среднему меридиану равно расстоянию между началом координат полярной системы координат и началом координат плоской прямоугольной системы координат.

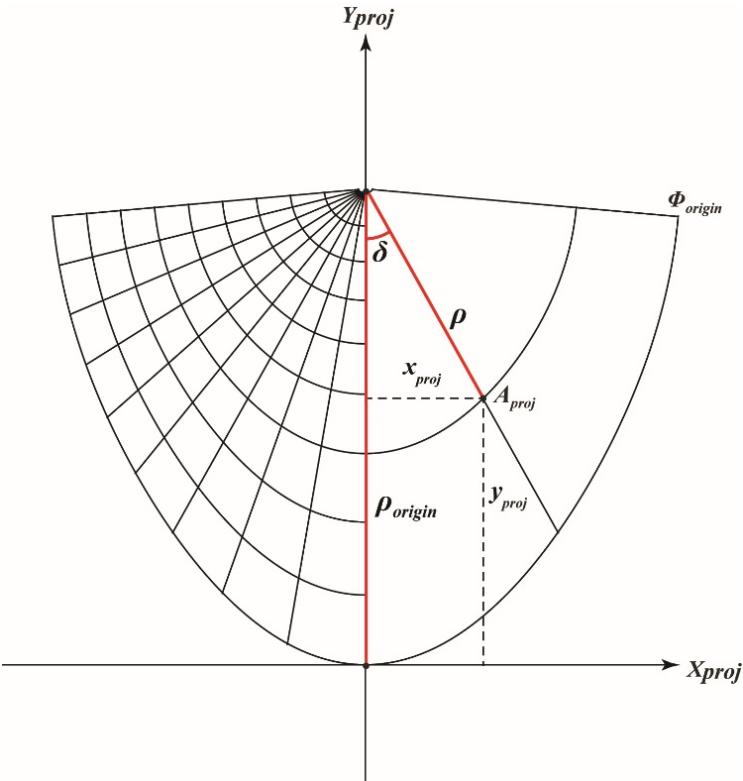


Рисунок 42. Системы координат в конической проекции

В соответствии с определением конических проекций, приведенном в параграфе 2.1, для конических проекций в нормальной ориентировке, сохраняющих длины на линии касания прямого эллиптического конуса и трехосного эллипсоида, полярный угол  $\delta$  функционально зависит от долготы  $\lambda$ , а формула для вычисления полярного расстояния  $\rho$  зависит от широты и долготы и от выбранного характера искажений. Полярный угол  $\delta$  и полярное расстояние  $\rho$  также зависят от параметров конуса.

Определим **параметры эллиптического конуса, касательного к трехосному эллипсоиду** по линии сечения эллипса плоскостью  $z = z_1$ . При заданной для центра карты планетоцентрической широте  $\Phi_0$  и долготе  $\lambda_0$  в соответствии с выражением (1.1.3)  $z_1 = r \sin \Phi_0$ , а  $r$  и  $t$  определяются зависимостями (1.1.5).

Линия сечения представляет собой эллипс:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

где

$$a_1 = a \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}, \quad b_1 = b \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}.$$

Расстояние от центра эллипса до точки с заданной долготой на границе эллипса  $r_1$  равно:

$$r_1 = \frac{a_1 \sqrt{1 - e_{ab}^2}}{\sqrt{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda}} = r_0 \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}, \quad (2.4.2)$$

где  $r_0$  – расстояние от центра экваториального эллипса до точки с заданной долготой на границе эллипса. После небольших преобразований из формулы (1.1.6) получаем:

$$r_0 = \frac{a \sqrt{1 - e_{ab}^2}}{\sqrt{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda}}. \quad (2.4.3)$$

Широта точки касательного эллипса при известном  $z_1$ , как это видно из рисунка 43б, равна:

$$\Phi_{tg} = \operatorname{arctg} \frac{z_1}{r_1}. \quad (2.4.4)$$

На рисунке 43а представлена экваториальная плоскость  $XY$  и на рисунке 43б плоскость меридианного сечения  $WZ$ , соответствующая меридиану с долготой  $\lambda$ , и проекции на

эти плоскости эллипса сечения эллипсоида плоскостью, соответствующей выбранному значению  $z = z_1$ . Эллипс показан красным цветом.

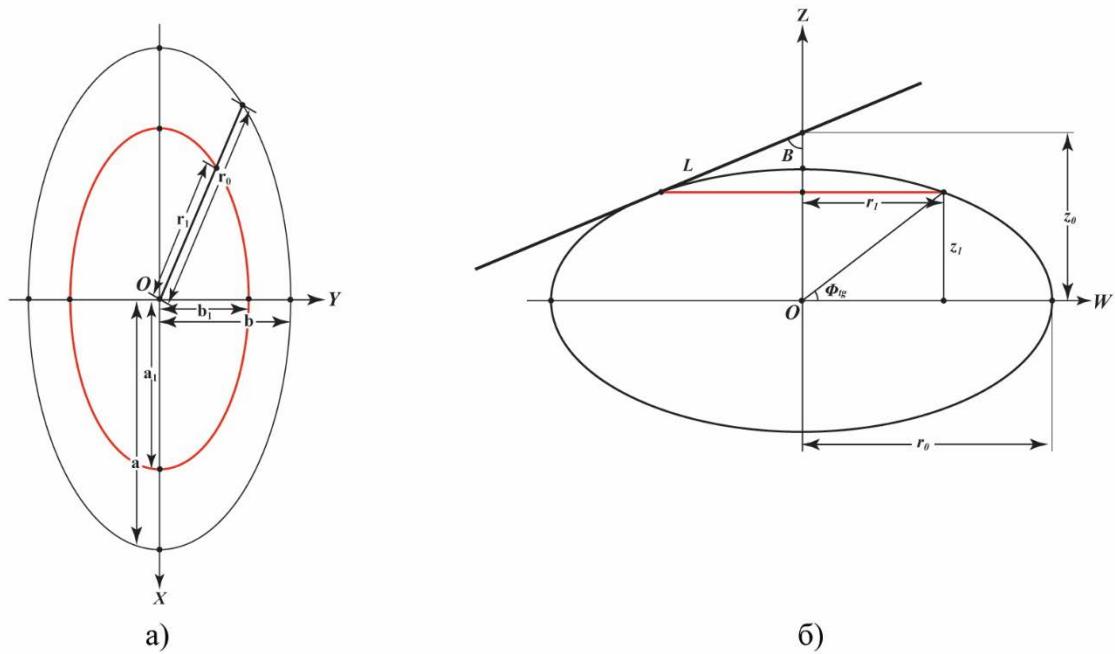


Рисунок 43. Экваториальное (а) и меридианное сечения (б) эллипсоида

Уравнение меридиана в плоскости меридианного сечения:

$$\frac{w^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Определяем вертикальную координату  $z$ , как функцию горизонтальной координаты  $w$ , и вычисляем ее производную для получения уравнения касательной.

$$z = c \sqrt{1 - \frac{w^2}{r_0^2}} ;$$

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{c}{r_0^2} \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{r_0^2}}} .$$

Уравнение касательной к меридианному эллипсу в точке с горизонтальной координатой  $w_0$ :

$$z = -\frac{c}{r_0^2} \frac{w_0}{\sqrt{1 - \frac{w_0^2}{r_0^2}}} w + z_0,$$

где  $z_0$  вертикальная координата точки пересечения касательной с осью  $Z$ .

В точке пересечения меридиана с линией касания  $z = z_1$  и  $w_0 = r_1$ . Из формулы (2.4.2) получим:

$$w_0 = r_1 = r_0 \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}};$$

$$z_1 = -\frac{c}{r_0^2} \frac{w_0}{\sqrt{1 - \frac{w_0^2}{r_0^2}}} w_0 + z_0 = -\frac{c \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}} + z_0 = -\frac{c^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}{z_1} + z_0,$$

откуда

$$z_0 = z_1 + \frac{c^2}{z_1} \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) = \frac{c^2}{z_1} \quad \text{и} \quad z_0 - z_1 = z_0 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right). \quad (2.4.5)$$

Окончательно уравнение касательной:

$$z = -\frac{c}{r_0} \frac{\sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}}{z_1} w + \frac{c^2}{z_1}.$$

Заметим, что  $z_0$  не зависит от долготы, то есть мы получили координату вершины конуса. Обозначим  $L$  длину отрезка касательной от точки касания до вершины конуса. На рисунке 43б видно, что  $L = \sqrt{r_1^2 + (z_0 - z_1)^2}$ , а синус и косинус угла  $B$  между осью  $Z$  и касательной равны:

$$\sin B = \frac{r_1}{L} \text{ и } \cos B = \frac{z_0 - z_1}{L}.$$

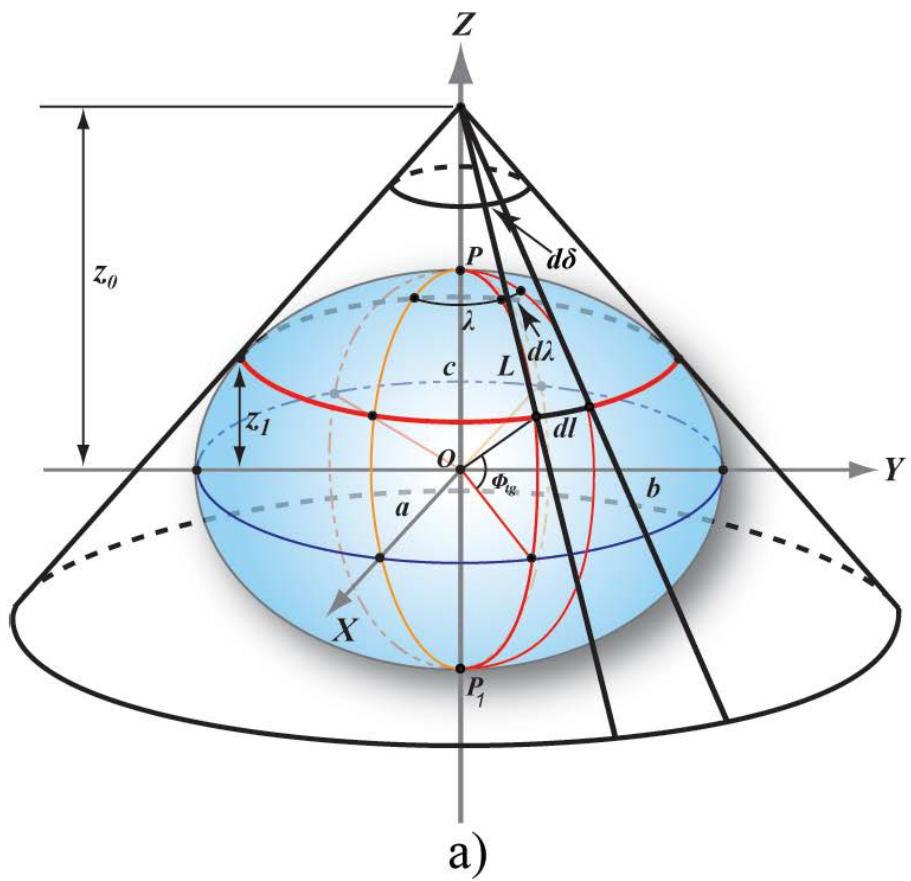
Если азимутальную проекцию рассматривать как частный случай конической, то при вычислении синуса и косинуса возникает деление «ноль на ноль». Это связано с тем, что при стремлении линии касания к полюсу эллипсоида величины  $r_1$ ,  $L$ ,  $z_0 - z_1$  стремятся к нулю. Для устранения этой особенности формулы приводятся к следующему виду:

$$L = \sqrt{r_1^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}} \sqrt{r_0^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)} ; \quad (2.4.6)$$

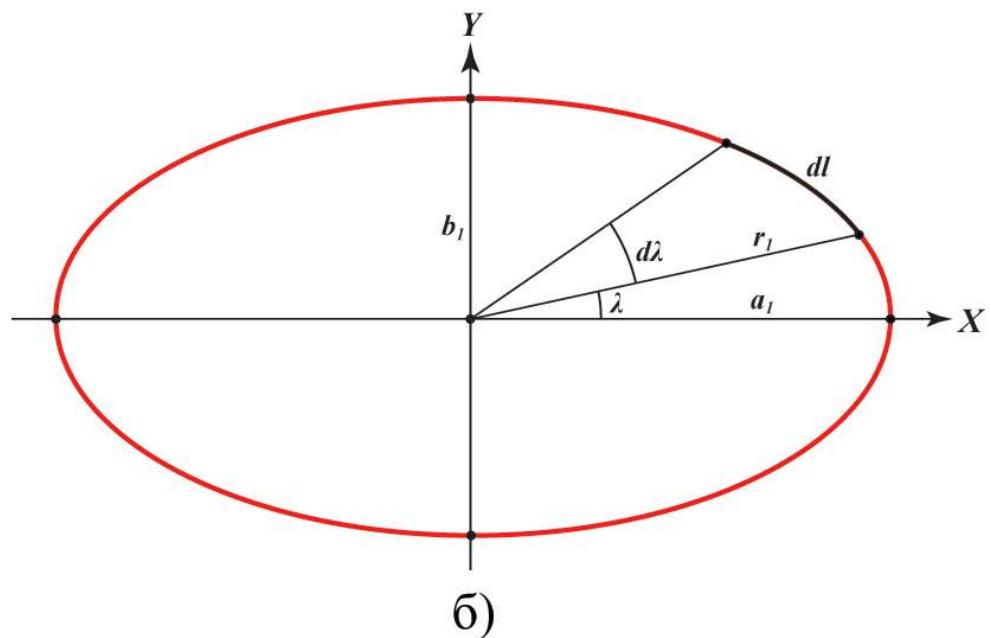
$$\sin B = \frac{r_1}{L} = \frac{r_0 \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}} \sqrt{r_0^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}} = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}} ; \quad (2.4.7)$$

$$\cos B = \frac{z_0 - z_1}{L} = \frac{z_0 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}} \sqrt{r_0^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}} = \frac{z_0 \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}}{\sqrt{r_0^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)}} .$$

Определим теперь, какое приращение  $d\delta$  угла при вершине конуса на его поверхности соответствует приращению долготы  $d\lambda$  (Рисунок 44).



a)



б)

Рисунок 44. Элемент дуги на конусе (а) и на плоскости сечения (б).

Красным цветом показана линия касания конуса и эллипсоида

Дифференциал длины дуги эллипса сечения эллипсоида плоскостью  $z = z_1$  можно вычислить двумя способами. Во-первых, в плоскости сечения через приращение долготы с учетом формулы (2.4.2):

$$dl = \sqrt{(r_1 d\lambda)^2 + \left(\frac{dr_1}{d\lambda} d\lambda\right)^2}. \quad (2.4.8)$$

И во-вторых, на конусе через приращение угла  $\delta$ :

$$dl = \sqrt{(L d\delta)^2 + \left(\frac{dL}{d\delta} d\delta\right)^2}. \quad (2.4.9)$$

Функция зависимости  $L$  от  $\delta$  пока неизвестна и вычислить производную по  $\delta$  мы не можем. Однако приращение  $L$  при изменении этого угла может быть вычислено через соответствующее этому изменению долготы:

$$\frac{dL}{d\delta} d\delta = \frac{dL}{d\lambda} d\lambda. \quad (2.4.10)$$

Вычислим необходимые производные по долготе с учетом формул (2.4.2) и (2.4.6).

Производная расстояния от центра эллипса до точки с заданной долготой на границе эллипса:

$$\frac{dr_1}{d\lambda} = -\frac{a\sqrt{1-e_{ab}^2}e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda \sqrt{1-\frac{z_1^2}{c^2}}}{(1-e_{ab}^2 \cos^2 \lambda)^{3/2}} = -r_1 \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1-e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} = -r_1 K_r,$$

где

$$K_r = \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1-e_{ab}^2 \cos^2 \lambda}. \quad (2.4.11)$$

Производная длины отрезка касательной от точки касания до вершины конуса:

$$L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda} = \frac{r_1 \frac{dr_1}{d\lambda}}{\sqrt{r_1^2 + (z_0 - z_1)^2}} = \frac{dr_1}{d\lambda} \sin B ; \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \sin B}{d\lambda} &= \frac{\frac{dr_1}{d\lambda} L - L_\lambda r_1}{L^2} = -\sin B \cos^2 B \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} ; \\ \frac{d \cos B}{d\lambda} &= -\frac{(z_0 - z_1)L_\lambda}{L^2} = \sin^2 B \cos B \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} . \end{aligned}$$

Приравняв правые части уравнений (2.4.8) и (2.4.9) с учетом уравнения (2.4.10), получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{(r_1 d\lambda)^2 + \left(\frac{dr_1}{d\lambda} d\lambda\right)^2} &= \sqrt{(L d\delta)^2 + \sin^2 B \left(\frac{dr_1}{d\lambda} d\lambda\right)^2} ; \\ (r_1 d\lambda)^2 + \left(\frac{dr_1}{d\lambda} d\lambda\right)^2 &= (L d\delta)^2 + \sin^2 B \left(\frac{dr_1}{d\lambda} d\lambda\right)^2 ; \\ (L d\delta)^2 &= \left[ r_1^2 + \left( -r_1 \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} \right)^2 \cos^2 B \right] (d\lambda)^2 ; \\ (d\delta)^2 &= \sin^2 B \left[ 1 + \cos^2 B \left( \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} \right)^2 \right] (d\lambda)^2 ; \\ d\delta &= \sin B \sqrt{1 + \cos^2 B \left( \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} \right)^2} d\lambda = \alpha d\lambda , \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

где

$$\alpha = \sin B \sqrt{1 + \cos^2 B \left( \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} \right)^2} . \quad (2.4.14)$$

На рисунке 45 представлена развертка конуса на плоскости со средним меридианом, совпадающим с начальным. На развертке линии меридианов и линия касания конуса и трехосного эллипсоида не зависят от характера искажений в отличие от линий параллелей.

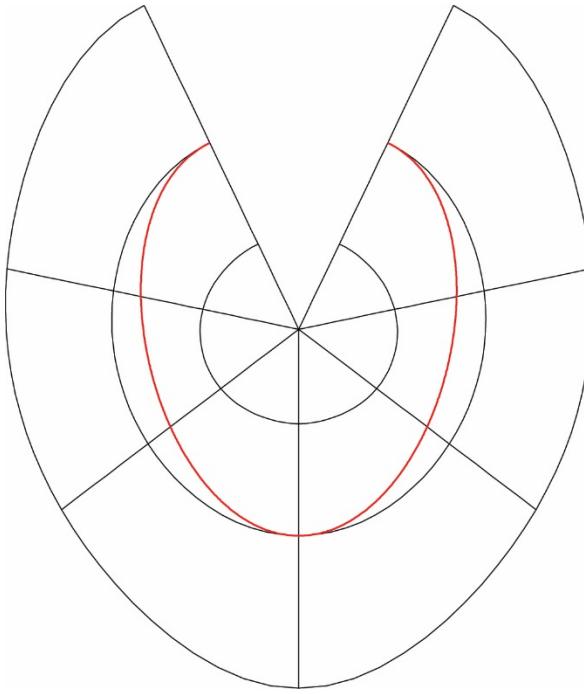


Рисунок 45. Развертка конуса с линией касания (показана красным цветом)

Приведем вывод трех конических проекций трехосного эллипсоида с использованием касательного конуса:

- конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов;
- равновеликой конической проекции;
- конической проекции меридианного сечения;

Учитывая выражение (2.4.13), получим формулу для вычисления угла  $\delta$  для всех конических проекций в нормальной ориентировке:

$$\delta = \int_{\lambda_0}^{\lambda_i} \sin B \sqrt{1 + \cos^2 B \left( \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} \right)^2} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_i} \alpha d\lambda . \quad (2.4.15)$$

Долгота  $\lambda$  во всех формулах отсчитывается от начального меридиана, а угол  $\delta$  от среднего меридиана, что влияет на поворот изображения (Рисунок 46 в сравнении с рисунком 42).

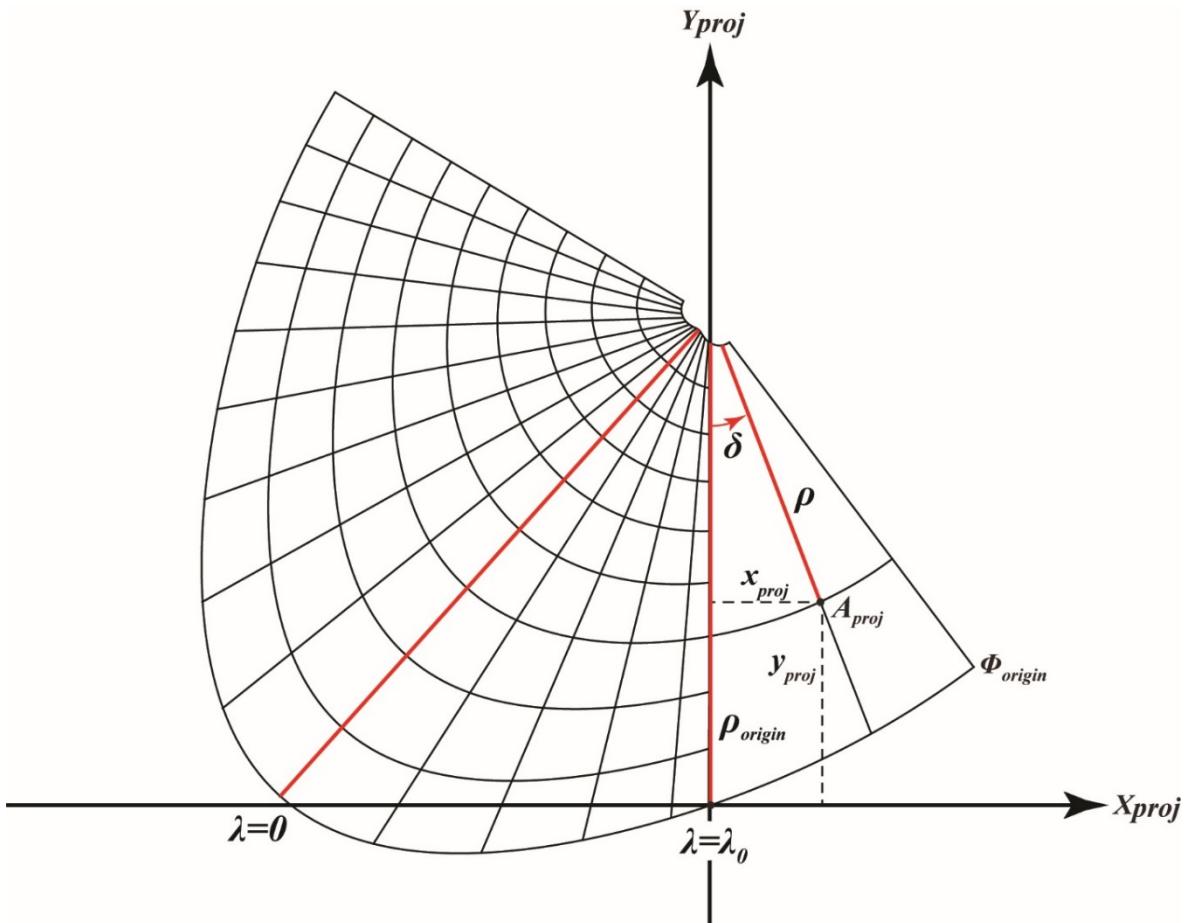


Рисунок 46. Системы координат в конической проекции с поворотом на  $\lambda_0$

Полярное расстояние  $\rho$  в конических проекциях трехосного эллипсоида зависит от широты и долготы, а значит приращение  $d\rho$ , аналогично соотношению (2.3.2) для азимутальных проекций, можно представить в виде:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} d\lambda . \quad (2.4.16)$$

Выбор пути интегрирования соответствует выбору свойств создаваемой конической проекции.

При выводе формул полярного расстояния используются на эллипсоиде стороны бесконечно малого параллелограмма и синус угла между ними из выражений (1.3.9), (1.3.10), (1.3.12), а в проекции – стороны параллелограмма и перпендикуляр к меридиану с долготой  $\lambda$ , проведенный до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$  (Рисунок 47). Кроме того, учитывается, что полярное расстояние до линии касания конуса и эллипсоида, то есть до точки с широтой  $\Phi_{tg}$ , равно  $L$ .

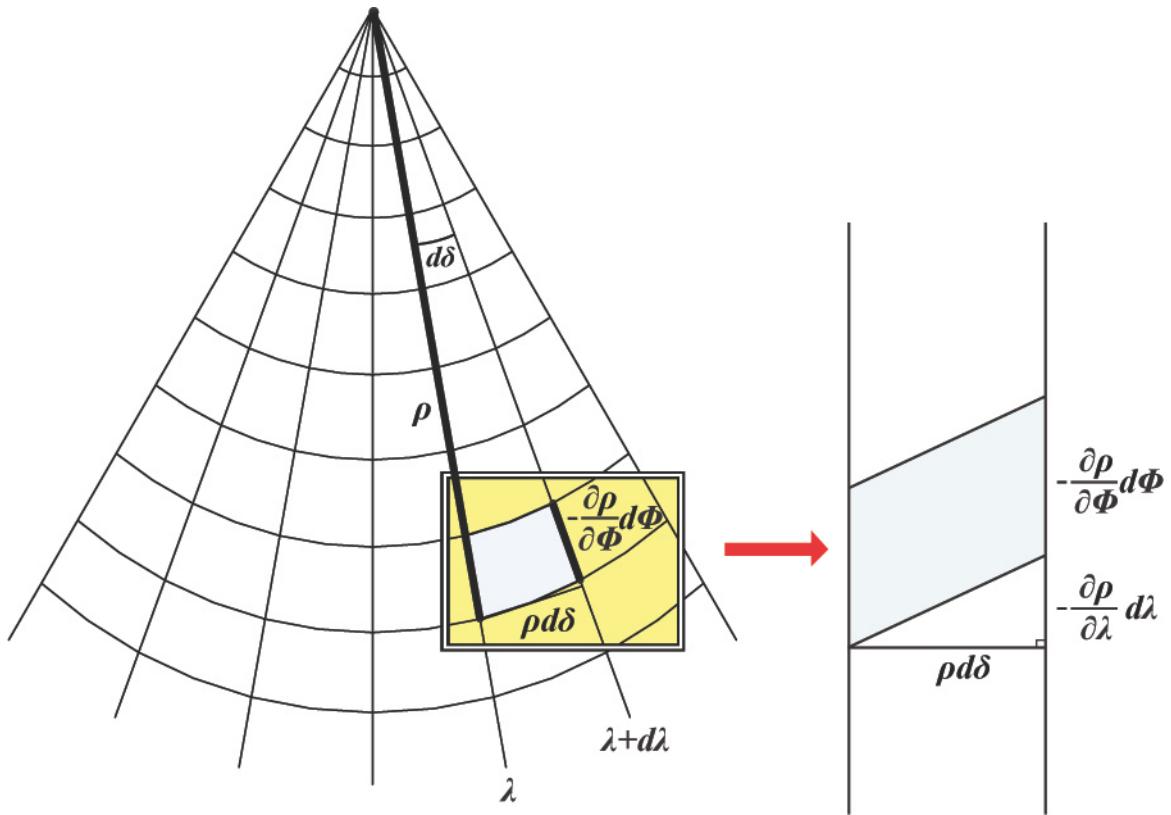


Рисунок 47. Бесконечно малая трапеция (параллелограмм) в конической проекции

При переходе к плоскости проекции ( $X_{proj}, Y_{proj}$ ) для соблюдения заданного характера искажений в нормальных конических проекциях трехосного эллипсоида необходимо выполнение следующих условий (Рисунок 47):

- для проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = dl_{mer}; \quad (2.4.17)$$

- для равновеликой проекции с учетом (2.4.13):

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi \rho \alpha d\lambda = dl_{mer} dl_{par} \sin \omega; \quad (2.4.18)$$

- для проекции меридианного сечения также с учетом формулы (2.4.13):

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \frac{dl_{mer}}{dl_{par} \sin \omega}. \quad (2.4.19)$$

**Для конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов,** запишем условие (2.4.17) с учетом формулы (1.3.9):

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{E} d\Phi. \quad (2.4.20)$$

Знак минус перед производной связан с тем, что полярное расстояние  $\rho$  увеличивается при уменьшении широты  $\Phi$ . В рассматриваемом случае будем интегрировать уравнение (2.4.20) для каждого фиксированного меридиана ( $d\lambda = 0$ ) от параллели с заданной широтой до линии касания конуса и эллипсоида, то есть до точки с широтой  $\Phi_{tg}$ :

$$-\int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{E} d\Phi .$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \rho(\Phi_i, \lambda_i) - \rho(\Phi_{tg}, \lambda_i) &= \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{E} d\Phi ; \\ \rho(\Phi_i, \lambda_i) &= \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{E} d\Phi + L . \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Таким образом, окончательные формулы конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов в нормальной ориентировке, имеют вид:

$$x_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \rho(\Phi_i, \lambda_i) \sin \delta(\lambda_i) ; \quad (2.4.22)$$

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \rho(\Phi_{origin}, \lambda_0) - \rho(\Phi_i, \lambda_i) \cos \delta(\lambda_i) .$$

Здесь  $\rho(\Phi_i, \lambda_i)$  и  $\rho(\Phi_{origin}, \lambda_0)$  вычисляются по формуле (2.4.21), а  $\delta(\lambda_i)$  по формуле (2.4.15).

**Равновеликая коническая проекция трехосного эллипсоида** строится из условия равенства площадей бесконечно малого параллелограмма в проекции и на эллипсоиде. Из рисунка 47 видно, что площадь параллелограмма в проекции равна произведению дифференциала дуги меридиана с долготой  $\lambda$  в проекции и длины перпендикуляра  $\rho d\delta$ , проведенного к этому меридиану до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$ . Запишем условие (2.4.18) с учетом выражений (1.3.9) и (1.3.10):

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi \rho d\delta = \sqrt{E} d\Phi \sqrt{G} d\lambda \sin \omega$$

или

$$-\alpha \rho \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi . \quad (2.4.23)$$

Напомним, что знак минус перед производной связан с тем, что полярное расстояние  $\rho$  увеличивается при уменьшении широты  $\Phi$ . Как и в предыдущем случае, будем интегрировать уравнение (2.4.23) для каждого фиксированного меридиана ( $d\lambda = 0$ ) от параллели с заданной широтой до линии касания конуса и эллипсоида, то есть до точки с широтой  $\Phi_{tg}$ :

$$\begin{aligned} -\alpha \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \rho \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi &= \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi ; \\ \alpha \frac{\rho^2(\Phi_i, \lambda_i) - \rho^2(\Phi_{tg}, \lambda_i)}{2} &= \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi ; \\ \rho^2(\Phi_i, \lambda_i) &= \frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi + L^2 . \end{aligned}$$

Таким образом, формула для вычисления полярного расстояния равновеликой конической проекции трехосного эллипсоида в нормальной ориентировке имеет вид:

$$\rho(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{\frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi + L^2} . \quad (2.4.24)$$

Окончательные формулы равновеликой конической проекции трехосного эллипсоида в нормальной ориентировке имеют вид (2.4.22), где  $\rho(\Phi_i, \lambda_i)$  и  $\rho(\Phi_{origin}, \lambda_0)$  вычисляются по формуле (2.4.24), а  $\delta(\lambda_i)$  по формуле (2.4.15).

**Коническая проекция меридианного сечения трехосного эллипсоида** строится исходя из равенства отношения дифференциала дуги меридиана и длины перпенди-

куляра, проведенного к этому меридиану до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$ , на эллипсоиде и в проекции. Условие (2.4.19) с использованием формул (1.3.9) и (1.3.10) превращается в следующее соотношение:

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi}{\rho ad\lambda} &= \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} d\lambda \sin \omega} \\ &\text{или} \\ -\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi}{\rho} &= \alpha \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega}. \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Напомним еще раз, что знак минус перед производной связан с тем, что полярное расстояние  $\rho$  увеличивается при уменьшении широты  $\Phi$ . Как и в двух предыдущих случаях, будем интегрировать уравнение (2.4.25) для каждого фиксированного меридиана ( $d\lambda = 0$ ) от параллели с заданной широтой  $\Phi_i$  до линии касания конуса и эллипсоида, то есть до точки с широтой  $\Phi_{tg}$ :

$$\begin{aligned} - \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi}}{\rho} d\Phi &= \alpha \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi; \\ \ln \rho(\Phi_i, \lambda_i) - \ln \rho(\Phi_{tg}, \lambda_i) &= \alpha \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi; \\ \ln \rho(\Phi_i, \lambda_i) &= \alpha \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \ln L. \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Таким образом, формула для вычисления полярного расстояния конической проекции меридианного сечения в нормальной ориентировке примет вид:

$$\rho(\Phi_i, \lambda_i) = L \exp \left( \alpha \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi \right). \quad (2.4.27)$$

Окончательные формулы конической проекции меридианного сечения трехосного эллипсоида в нормальной ориентировке имеют вид (2.4.22), где  $\rho(\Phi_i, \lambda_i)$  и  $\rho(\Phi_{origin}, \lambda_0)$  вычисляются по формуле (2.4.27), а  $\delta(\lambda_i)$  по формуле (2.4.15).

Если средний меридиан совпадает с начальным, то коническая проекция меридианного сечения на этом меридиане совпадает с конической равноугольной проекцией эллипсоида вращения, экваториальная ось которого равна большой экваториальной оси трехосного эллипсоида, а полярная ось равна его полярной оси. Масштаб сохраняется на параллели с широтой  $\Phi_{tg}$ .

На рисунке 48 представлены карты одного и того же участка поверхности астероида 433 Эрос в конических проекциях с разным характером искажений.

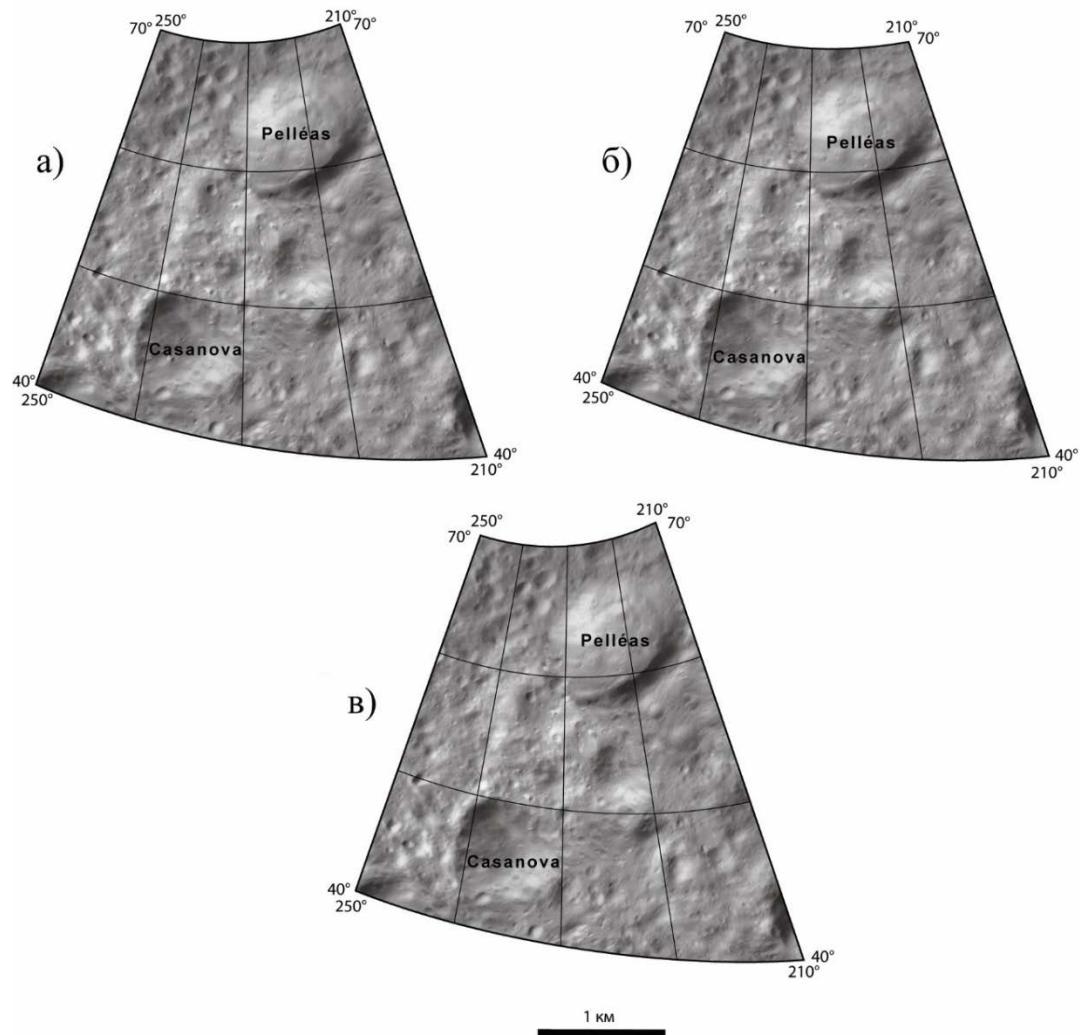


Рисунок 48. Карты поверхности астероида 433 Эрос в конических проекциях:  
 а) проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов,  
 б) равновеликая проекция,  
 в) проекция меридианного сечения  
 (исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

### **3. Искажения в проекциях трехосного эллипсоида**

При выводе формул проекций как правило исходят из условий отсутствия или минимизации искажений какой-либо характеристики или совокупности заданных характеристик. Подобным образом получены и проекции трехосного эллипсоида, описанные в предыдущих главах. В данной главе представлена методика определения частных масштабов длин и площадей, а также максимального искажения углов на основе готовых формул проекций.

Для проекций, при выводе которых были использованы коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы (формулы 1.3.3), искажения также будут определяться с помощью этих коэффициентов и их производных по широте и долготе. В равноугольной проекции Якоби искажения длин и площадей будут определяться в параграфе, посвященном этой проекции.

#### **3.1. Производные коэффициентов Гаусса и вспомогательных величин по широте и долготе**

В данном параграфе даны результаты вычисления производных коэффициентов Гаусса. Их подробный вывод дан в приложении 1.

Производная вспомогательной величины  $t$  из формулы (1.1.5), характеризующей отклонение поверхности трехосного эллипсоида от сферы, по широте из формулы (П.1.1):

$$t_\phi = -\sin 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right).$$

Производная вспомогательной величины  $t$  по долготе из формулы (П.1.2):

$$t_\lambda = -\cos^2 \Phi \sin 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right).$$

На экваторе из формулы (П.1.3):

$$t_{0\lambda} = -\sin 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right).$$

Производная коэффициента Гаусса  $E$  по широте из формулы (П.1.8) равна:

$$E_\phi = -a^2 t_\phi \frac{4t^2 + 4t \cos 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) + 3t_\phi^2}{4t^4}.$$

Производная коэффициента Гаусса  $G$  по широте из формулы (П.1.9):

$$G_\phi = -a^2 \frac{4t^2 t_\phi \cos^2 \Phi + 4t^3 \sin 2\Phi + 2t \sin 2\Phi t_\lambda t_{0\lambda} + 3t_\lambda^2 t_\phi}{4t^4}.$$

Производная коэффициента Гаусса  $F$  по широте из формулы (П.1.10):

$$F_\phi = -a^2 t_\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \frac{2t \cos 2\Phi - 4t \sin^2 \Phi + 3t_\phi \sin 2\Phi}{4t^4}.$$

Производная коэффициента Гаусса  $E$  по долготе из формулы (П.1.11):

$$E_\lambda = a^2 t_\lambda \frac{-4t^2 + 8t \sin^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) - 3t_\phi^2}{4t^4}.$$

Производная коэффициента Гаусса  $G$  по долготе из формулы (П.1.12):

$$G_\lambda = -a^2 t_\lambda \cos^2 \Phi \frac{4t^2 + 4t \cos 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right) + 3t_\lambda t_{0\lambda}}{4t^4}.$$

На экваторе из формулы (П.1.13):

$$G_{0\lambda} = -a^2 t_{0\lambda} \frac{4t_0^2 + 4t_0 \cos 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right) + 3t_{0\lambda}^2}{4t_0^4}.$$

Производная коэффициента Гаусса  $F$  по долготе (П.1.14):

$$F_\lambda = a^2 \frac{-2t t_\phi \cos^2 \Phi \cos 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right) - t t_\lambda t_{0\lambda} \sin 2\Phi - 3t_\phi t_\lambda^2}{4t^4}.$$

## **3.2. Производные координат в проекции и вспомогательных величин по широте и долготе**

При выводе формул для определения искажений в проекциях трехосного эллипсоида помимо коэффициентов Гаусса и их производных используются производные прямоугольных координат в проекции по широте и долготе. Для азимутальных и конических проекций также используются производные полярных координат.

Прямоугольные и полярные координаты для большинства проекций получаются как функции верхнего или нижнего предела соответствующих интегралов. Если координата зависит и от широты, и от долготы, то одна из величин является переменной интегрирования, а вторая – параметром, постоянным при интегрировании. Соответственно, при интегрировании по меридиану производная по широте, являющейся верхним пределом интеграла при вычислении координаты, равна подынтегральному выражению. Аналогично вычисляется производная по долготе координаты, получаемой интегрированием по параллели. Производная по долготе координаты, получаемой интегрированием по меридиану, и производная по широте координаты, получаемой интегрированием по параллели, представляют собой производные интеграла по параметру. Таким образом, производная по долготе координаты, получаемой интегрированием по меридиану с пределами, не зависящими от долготы, равна интегралу в тех же пределах, что и исходный интеграл, с подынтегральным выражением, равным производной исходного подынтегрального выражения по долготе. Производная по широте координаты, получаемой интегрированием по параллели с пределами, не зависящими от широты, равна интегралу в тех же пределах, что и исходный интеграл, с подынтегральным выражением, равным производной исходного подынтегрального выражения по широте.

Проиллюстрируем получение производных на примере цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов.

Для упрощения вида формул введем обозначения производных прямоугольных координат в проекции:

$$x_\phi = \frac{\partial x_{proj}}{\partial \phi} ; \quad x_\lambda = \frac{\partial x_{proj}}{\partial \lambda} ; \quad y_\phi = \frac{\partial y_{proj}}{\partial \phi} ; \quad y_\lambda = \frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} .$$

Горизонтальная координата  $x_{proj}$  в цилиндрических проекциях зависит только от долготы (формула 2.2.4) и не зависит от характера искажений.

Для наглядности повторим формулу (2.2.4) с учетом вышесказанного:

$$x_{proj}(\lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} \sqrt{G_0(\lambda)} d\lambda .$$

Здесь  $\lambda$  – переменная интегрирования,  $\lambda_i$  – верхний предел. Производная по долготе, то есть по верхнему пределу равна:

$$x_\lambda(\lambda_i) = \sqrt{G_0(\lambda_i)} .$$

Подчеркнем, что при вычислении проекций верхний предел  $\lambda_i$  пробегает все значения долготы в заданном диапазоне.

Для упрощения вида формул будем писать:

$$x_\lambda = \sqrt{G_0} . \quad (3.2.1)$$

Вертикальная координата  $y_{proj}$  зависит от широты и долготы и от характера искажений.

Для цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, представим формулу (2.2.9) более подробно:

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\Phi_i} \sqrt{E(\Phi, \lambda_i)} d\Phi .$$

Здесь  $\Phi$  – переменная интегрирования,  $\Phi_i$  – верхний предел,  $\lambda_i$  – параметр. Производная по широте, то есть по верхнему пределу равна:

$$y_\Phi(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{E(\Phi_i, \lambda_i)} .$$

Производная по долготе, то есть по параметру равна:

$$y_\lambda(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\Phi_i} \frac{\partial \sqrt{E(\Phi, \lambda_i)}}{\partial \lambda_i} d\Phi = \int_0^{\Phi_i} \frac{E_\lambda(\Phi, \lambda_i)}{2\sqrt{E(\Phi, \lambda_i)}} d\Phi .$$

В дальнейшем будем писать:

$$y_\Phi = \sqrt{E} ; \quad (3.2.2)$$

$$y_\lambda = \int_0^{\Phi_i} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \lambda} d\Phi = \int_0^{\Phi_i} \frac{E_\lambda}{2\sqrt{E}} d\Phi . \quad (3.2.3)$$

Для вычисления производных вертикальной координаты по широте и долготе в равновеликой цилиндрической проекции перепишем формулу вычисления вертикальной координаты (2.2.10), используя выражение (1.3.12), в виде:

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\Phi_i} \sqrt{\frac{EG - F^2}{G_0}} d\Phi .$$

Соответственно производные по широте и долготе равны:

$$y_\Phi = \sqrt{\frac{EG - F^2}{G_0}}; \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} y_\lambda &= \int_0^{\Phi_i} \frac{(E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda)G_0 - (EG - F^2)G_{0\lambda}}{2G_0^2 \sqrt{\frac{EG - F^2}{G_0}}} d\Phi = \\ &= \int_0^{\Phi_i} \frac{(E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda)G_0 - (EG - F^2)G_{0\lambda}}{2G_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{EG - F^2}} d\Phi . \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Для вычисления производных вертикальной координаты по широте и долготе цилиндрической проекции меридианного сечения перепишем формулу (2.2.12) с учетом выражения (1.3.12) в виде:

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\Phi_i} \frac{E\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} d\Phi .$$

Соответственно производные по широте и долготе равны:

$$y_\Phi = \frac{E\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} y_\lambda &= \int_0^{\Phi_i} \frac{\left(E_\lambda\sqrt{G_0} + E\frac{G_{0\lambda}}{2\sqrt{G_0}}\right)\sqrt{EG - F^2} - E\sqrt{G_0}\frac{E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda}{2\sqrt{EG - F^2}}}{EG - F^2} d\Phi = \\ &= \int_0^{\Phi_i} \frac{(2E_\lambda G_0 + EG_{0\lambda})(EG - F^2) - EG_0(E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda)}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{G_0}} d\Phi . \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Для вычисления производных вертикальной координаты по широте и долготе цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, перепишем формулу (2.2.15) с учетом выражения (1.3.12) в виде:

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G}} d\Phi + \int_0^{\lambda_i} \frac{\sqrt{G_0}F}{\sqrt{EG - F^2}} d\lambda .$$

Соответственно производные по широте и долготе равны:

$$\begin{aligned} y_\Phi &= \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G}} + \int_0^{\lambda_i} \frac{\sqrt{G_0}F_\Phi \sqrt{EG - F^2} - \sqrt{G_0}F \frac{E_\Phi G + EG_\Phi - 2FF_\Phi}{2\sqrt{EG - F^2}}}{EG - F^2} d\lambda = \\ &= \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G}} + \int_0^{\lambda_i} \frac{2\sqrt{G_0}F_\Phi(EG - F^2) - \sqrt{G_0}F(E_\Phi G + EG_\Phi - 2FF_\Phi)}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} d\lambda ; \quad (3.2.8) \\ y_\lambda &= \int_0^{\Phi_i} \frac{\left( \frac{E_\lambda G_0 + EG_{0\lambda}}{2\sqrt{EG_0}} \right) \sqrt{G} - \frac{\sqrt{EG_0}G_\lambda}{2\sqrt{G}}}{G} d\Phi + \frac{\sqrt{G_0}F}{\sqrt{EG - F^2}} . \end{aligned}$$

С учетом того, что на начальном меридиане  $E_\lambda = G_\lambda = G_{0\lambda} = 0$ , это выражение можно переписать в виде:

$$y_\lambda = \frac{\sqrt{G_0}F}{\sqrt{EG - F^2}} . \quad (3.2.9)$$

Для получения формул искажений в азимутальных и конических проекциях будем использовать производные координат в полярной системе  $\rho$  и  $\delta$ .

В азимутальных проекциях в нормальной ориентировке, не имеющих искажений в полюсе проекции, полярный угол  $\delta$  равен долготе  $\lambda$ . В конических проекциях угол  $\delta$  является функцией долготы  $\lambda$  и не зависит от характера искажений. Производная этой функции по долготе из формулы (2.4.15) равна:

$$\delta_\lambda = \alpha . \quad (3.2.10)$$

Напомним, что коэффициент  $\alpha$  – это отношение приращения полярного угла  $\delta$  к приращению долготы  $\lambda$ . Для азимутальных проекций этот коэффициент равен единице, для конических проекций эллипсоида вращения постоянен и меньше единицы. Для конических проекций трехосного эллипсоида, которые здесь рассматриваются,  $\alpha$  зависит от долготы  $\lambda$ . Производная коэффициента  $\alpha$  по долготе равна:

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= \frac{d \sin B}{d\lambda} \sqrt{1 + K_r^2 \cos^2 B} + \sin B \frac{d}{d\lambda} \sqrt{1 + K_r^2 \cos^2 B} = \\ &= \frac{d \sin B}{d\lambda} \sqrt{1 + K_r^2 \cos^2 B} + \sin B \frac{2K_r^2 \cos B \frac{d \cos B}{d\lambda} + 2K_r \cos^2 B \frac{dK_r}{d\lambda}}{2\sqrt{1 + K_r^2 \cos^2 B}} = \\ &= \frac{d \sin B}{d\lambda} \sqrt{1 + K_r^2 \cos^2 B} + K_r \sin B \cos B \frac{K_r \frac{d \cos B}{d\lambda} + \cos B \frac{dK_r}{d\lambda}}{\sqrt{1 + K_r^2 \cos^2 B}}, \quad (3.2.11) \end{aligned}$$

где  $K_r$  соответствует формуле (2.4.11).

$$\begin{aligned} \frac{dK_r}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} \right) = \\ &= e_{ab}^2 \frac{\cos 2\lambda (1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda) - \sin \lambda \cos \lambda 2e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{(1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda)^2} = \\ &= e_{ab}^2 \frac{\cos 2\lambda (1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda) - 2e_{ab}^2 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda)^2} = \frac{e_{ab}^2 \cos 2\lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} - 2K_r^2. \end{aligned}$$

Полярное расстояние  $\rho$  для азимутальных и конических проекций зависит от широты  $\Phi$  и долготы  $\lambda$  и от характера искажений.

При определении производной полярного расстояния по долготе для равновеликой конической проекции и конической проекции меридианного сечения используется производная по долготе широты  $\Phi_{tg}$  точки пересечения меридиана и линии касания конуса и эллипсоида. Перепишем формулу (2.4.4) в виде (все приведенные обозначения соответствуют рисунку 43):

$$\Phi_{tg} = \operatorname{arctg} \frac{z_1}{r_1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{r_1}{z_1}.$$

Производная  $\Phi_{tg}$  по долготе равна:

$$\frac{d\Phi_{tg}}{d\lambda} = -\frac{\frac{1}{z_1} \frac{dr_1}{d\lambda}}{1 + \frac{r_1^2}{z_1^2}} = \frac{z_1 \frac{dr_1}{d\lambda}}{z_1^2 + r_1^2}.$$

Для азимутальной и конической проекций, сохраняющих длины вдоль меридианов (выражения (2.3.6), (2.4.21)), производная полярного расстояния  $\rho$  по широте равна:

$$\rho_\phi = -\sqrt{E}. \quad (3.2.12)$$

Следует напомнить, что знак минус перед производной связан с тем, что полярное расстояние уменьшается при увеличении широты  $\Phi$ .

Производные по долготе, как видно из тех же формул (2.3.6, 2.4.21), вычисляются по-разному. Производная полярного расстояния  $\rho$  по долготе в азимутальной проекции равна:

$$\rho_\lambda = \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \lambda} d\Phi = \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \frac{E_\lambda}{2\sqrt{E}} d\Phi. \quad (3.2.13)$$

Производная полярного расстояния  $\rho$  по долготе в конической проекции вычисляется с учетом того, что верхний предел интеграла зависит от долготы.

$$\rho_\lambda = \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{E_\lambda}{2\sqrt{E}} d\Phi + \frac{d\Phi_{tg}}{d\lambda} \sqrt{E(\Phi_{tg}, \lambda_i)} + L_\lambda. \quad (3.2.14)$$

Для вычисления производных полярного расстояния  $\rho$  по широте и долготе в равновеликой азимутальной проекции перепишем формулу (2.3.8) в виде:

$$\rho(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{2 \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}.$$

Соответственно производная по широте равна:

$$\rho_\Phi = -\frac{-2\sqrt{EG - F^2}}{2\sqrt{2 \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}} = -\frac{-\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{2 \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}} = -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho}. \quad (3.2.15)$$

Из формулы видно, что в полюсе существует особенность (деление ноль на ноль). На основании формулы (П.2.3) представим подынтегральное выражение и числитель формулы (3.2.15) в виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F^2} &= \frac{4a^2 t \cos \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}{4t^3} = \\ &= \frac{a^2 \cos \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}{t^2}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

При стремлении широты к полюсу правая часть формулы (3.2.16) стремится к следующему выражению:

$$\frac{a^2 \cos \Phi \frac{1}{1 - e_{ac}^2}}{\frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}} = a^2(1 - e_{ac}^2) \cos \Phi.$$

Правую часть формулы (3.2.15) в этом случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{a^2(1 - e_{ac}^2) \cos \Phi_i}{\sqrt{2a^2(1 - e_{ac}^2) \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \cos \Phi d\Phi}} &= -\frac{a^2(1 - e_{ac}^2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_i\right)}{a\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin \Phi_i\right)}} = \\ &= -\frac{2a\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_i}{2}\right)}{\sqrt{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_i}{2}\right)}} \approx -\frac{a\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_i}{2}\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_i}{2}\right)}} = \\ &= -a\sqrt{1 - e_{ac}^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, в полюсе производную по широте можно доопределить:

$$\rho_\phi = -a\sqrt{1 - e_{ac}^2}. \quad (3.2.17)$$

Производная полярного расстояния  $\rho$  по долготе в равновеликой азимутальной проекции равна:

$$\rho_\lambda = \frac{\frac{2}{\pi} \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \frac{E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda}{2\sqrt{EG - F^2}} d\Phi}{2\sqrt{2 \int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}} = \frac{\int_{\Phi_i}^{\frac{\pi}{2}} \frac{E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda}{\sqrt{EG - F^2}} d\Phi}{2\rho}. \quad (3.2.18)$$

Для вычисления производных полярного расстояния  $\rho$  по широте и долготе в равновеликой конической проекции перепишем формулу (2.4.24) в виде:

$$\rho(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{L^2 + \frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}.$$

Соответственно производные по широте и долготе равны:

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= -\frac{\frac{2}{\alpha} \sqrt{EG - F^2}}{2\sqrt{L^2 + \frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}} = \\ &= -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\alpha \sqrt{L^2 + \frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}} = -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\alpha \rho}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Знак минус перед производной, как и в случае проекции, сохраняющих длины вдоль меридианов, связан с тем, что полярное расстояние  $\rho$  уменьшается при увеличении широты  $\Phi$ .

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda &= \frac{2LL_\lambda - \frac{2\alpha_\lambda}{\alpha^2} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}{2\sqrt{L^2 + \frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}} + \\
&+ \frac{\frac{2}{\alpha} \left( \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda}{2\sqrt{EG - F^2}} d\Phi + \frac{d\Phi_{tg}}{d\lambda} \sqrt{EG - F^2} \Big|_{\lambda=\lambda_i} \right)}{2\sqrt{L^2 + \frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}} = \\
&= \frac{LL_\lambda - \frac{\alpha_\lambda}{\alpha^2} \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG - F^2} d\Phi}{\rho} + \\
&+ \frac{\frac{1}{\alpha} \left( \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda}{2\sqrt{EG - F^2}} d\Phi + \frac{d\Phi_{tg}}{d\lambda} \sqrt{EG - F^2} \Big|_{\Phi=\Phi_{tg}, \lambda=\lambda_i} \right)}{\rho}. \quad (3.2.20)
\end{aligned}$$

Для вычисления производной полярного расстояния  $\rho$  по широте (при фиксированной долготе) в азимутальной проекции меридианного сечения используем соотношение (2.3.14). Соответственно:

$$\rho_\Phi = -\rho \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3.2.21)$$

Постоянная интегрирования для вычисления полярного расстояния  $\rho$  в азимутальной проекции меридианного сечения определяется из условия равенства в полюсе дифференциалов длины дуги меридиана с долготой  $\lambda$  в проекции и на эллипсоиде в соответствии с формулой (2.3.15). Поэтому в полюсе производная полярного расстояния  $\rho$  по широте равна:

$$\rho_\Phi = -\sqrt{E}.$$

Для вычисления производной полярного расстояния  $\rho$  по долготе в азимутальной проекции меридианного сечения прологарифмируем соотношение (2.3.16):

$$\ln \rho = \ln \frac{2a\sqrt{1-e_{ac}^2} \cos \Phi}{\sin \Phi + (1-e_{ac}^2)\sqrt{K_{\rho 1}}} \left[ \frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1-e_{ac}^2)\sqrt{t_0}\sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{1-e_{ac}^2}\sqrt{t}(\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0})} \right]^{K_{int}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left( 2a\sqrt{1-e_{ac}^2} \cos \Phi \right) - \ln \left[ \sin \Phi + (1-e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1}} \right] + \\
&+ K_{int} \ln \left[ \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1-e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}} \right] - K_{int} \ln \left( \sqrt{1-e_{ac}^2} \sqrt{t} \right) - \\
&- K_{int} \ln \left( \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \right).
\end{aligned}$$

Здесь в соответствии с формулами (П.2.2):

$$\begin{aligned}
K_{\rho 1} &= \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1-e_{ac}^2)^2}; \\
K_{\rho 2} &= e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2}; \\
K_{\rho 3} &= \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2}.
\end{aligned}$$

и в соответствии с формулой (П.2.9):

$$\begin{aligned}
K_{int} &= \frac{(1-e_{ac}^2) \left[ - \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2}}} = \\
&= -(1-e_{ac}^2) \frac{K_{\rho 3} \sqrt{t_0}}{\sqrt{K_{\rho 2}}}.
\end{aligned}$$

Для упрощения записи формул при вычислении производной полярного расстояния определим производные приведенных выше величин:

$$\begin{aligned}
K_{\rho 1 \lambda} &= \frac{\partial K_{\rho 1}}{\partial \lambda} = \frac{e_{ab}^2 (2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2} \cos^2 \Phi \sin 2\lambda; \\
K_{\rho 2 \lambda} &= \frac{\partial K_{\rho 2}}{\partial \lambda} = \sin 2\lambda \frac{e_{ab}^2 (2e_{ac}^2 - e_{ab}^2 e_{ac}^2 - 1)}{(1-e_{ab}^2)^2}; \\
K_{\rho 3 \lambda} &= \frac{\partial K_{\rho 3}}{\partial \lambda} = \sin 2\lambda \frac{e_{ab}^2}{1-e_{ab}^2};
\end{aligned}$$

$$K_{int\lambda} = \frac{\partial K_{int}}{\partial \lambda} = -(1 - e_{ac}^2) \frac{\left( K_{\rho 3\lambda} \sqrt{t_0} + K_{\rho 3} \frac{t_{0\lambda}}{2\sqrt{t_0}} \right) \sqrt{K_{\rho 2}} - K_{\rho 3} \sqrt{t_0} \frac{K_{\rho 2\lambda}}{2\sqrt{K_{\rho 2}}} }{K_{\rho 2}} =$$

$$= -(1 - e_{ac}^2) \frac{(2K_{\rho 3\lambda} t_0 + t_{0\lambda} K_{\rho 3}) K_{\rho 2} - K_{\rho 2\lambda} K_{\rho 3} t_0}{2K_{\rho 2} \sqrt{K_{\rho 2}} \sqrt{t_0}}.$$

Напомним, что

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2};$$

$$t_\lambda = \sin 2\lambda \frac{e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2} \cos^2 \Phi;$$

$$t_0 = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2};$$

$$t_{0\lambda} = \sin 2\lambda \frac{e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2}.$$

Продифференцируем  $\ln \rho$  по долготе:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda} = - \frac{(1 - e_{ac}^2) \frac{\partial \sqrt{K_{\rho 1}}}{\partial \lambda}}{\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1}}} + K_{int\lambda} \ln \left[ \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}} \right] +$$

$$+ K_{int} \frac{\frac{\partial [\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}]}{\partial \lambda}}{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}} - K_{int\lambda} \ln \left( \sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t} \right) -$$

$$- K_{int} \frac{\frac{\partial (\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t})}{\partial \lambda}}{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t}} - K_{int\lambda} \ln \left( \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \right) - K_{int} \frac{\frac{\partial (\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0})}{\partial \lambda}}{\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0}} =$$

$$= - \frac{(1 - e_{ac}^2) \frac{K_{\rho 1\lambda}}{2\sqrt{K_{\rho 1}}}}{\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1}}} + K_{int\lambda} \ln \left[ \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + K_{int} \frac{\sin \Phi \frac{K_{\rho 2 \lambda}}{2 \sqrt{K_{\rho 2}}} + (1 - e_{ac}^2) \left( \frac{t_{0 \lambda}}{2 \sqrt{t_0}} \sqrt{K_{\rho 1}} + \frac{K_{\rho 1 \lambda}}{2 \sqrt{K_{\rho 1}}} \sqrt{t_0} \right)}{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}}} - \\
& - K_{int \lambda} \ln \left( \sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t} \right) - \\
& - K_{int} \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \frac{t_\lambda}{2 \sqrt{t}}}{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t}} - K_{int \lambda} \ln \left( \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \right) - K_{int} \frac{\frac{K_{\rho 2 \lambda}}{2 \sqrt{K_{\rho 2}}} + \frac{t_{0 \lambda}}{2 \sqrt{t_0}}}{\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0}} = \\
& = - \frac{K_{\rho 1 \lambda} (1 - e_{ac}^2)}{2 \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}} + 2 K_{\rho 1} (1 - e_{ac}^2)} + K_{int \lambda} \ln \left[ \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}} \right] + \\
& + K_{int} \frac{\sin \Phi K_{\rho 2 \lambda} \sqrt{K_{\rho 1}} \sqrt{t_0} + (1 - e_{ac}^2) (t_{0 \lambda} K_{\rho 1} \sqrt{K_{\rho 2}} + K_{\rho 1 \lambda} t_0 \sqrt{K_{\rho 2}})}{2 \sin \Phi K_{\rho 2} \sqrt{K_{\rho 1}} \sqrt{t_0} + 2 (1 - e_{ac}^2) t_0 K_{\rho 1} \sqrt{K_{\rho 2}}} - \\
& - K_{int \lambda} \ln \left( \sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t} \right) - \\
& - K_{int} \frac{t_\lambda}{2 t} - K_{int \lambda} \ln \left( \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \right) - K_{int} \frac{K_{\rho 2 \lambda} \sqrt{t_0} + t_{0 \lambda} \sqrt{K_{\rho 2}}}{2 K_{\rho 2} \sqrt{t_0} + 2 \sqrt{K_{\rho 2}} t_0} . \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

Все члены последнего выражения содержат множитель  $\sin 2\lambda \frac{e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2}$ , так как этот множитель содержит все входящие в него производные. Это означает, что производная логарифма полярного расстояния  $\ln \rho$  и следовательно самого  $\rho$  равна нулю при долготе  $\lambda$  равной  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ , а также в случае равенства нулю эксцентриситета экваториального эллипса  $e_{ab}$  (эллипсоид вращения).

Для получения окончательной зависимости для производной полярного расстояния в азимутальной проекции меридианного сечения по долготе используем очевидное соотношение:

$$\rho_\lambda = \rho \frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda} . \quad (3.2.23)$$

Для вычисления производной полярного расстояния  $\rho$  по широте (при фиксированной долготе) в конической проекции меридианного сечения используем соотношение (2.4.25).

Соответственно:

$$\rho_\phi = -\alpha \rho \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} = -\alpha \rho \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3.2.24)$$

Для вычисления производной полярного расстояния  $\rho$  по долготе в конической проекции меридианного сечения представим соотношение (2.4.26) в виде:

$$\begin{aligned} \ln \rho(\Phi_i, \lambda_i) &= \alpha \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} d\Phi + \ln L ; \\ \frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda} &= \frac{L_\lambda}{L} + \alpha_\lambda \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} d\Phi + \alpha \int_{\Phi_i}^{\Phi_{tg}} \frac{E(E_\lambda G - EG_\lambda + 2FF_\lambda) - 2F^2}{2(EG - F^2)^{3/2}} d\Phi + \\ &\quad + \left[ \frac{d\Phi_{tg}}{d\lambda} \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} \right] \Big|_{\Phi=\Phi_{tg}, \lambda=\lambda_i}. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Для получения окончательной зависимости для производной полярного расстояния по долготе используем соотношение (3.2.23).

Производные прямоугольных координат в азимутальных проекциях с учетом формулы (2.3.7) можно выразить через производные полярных координат:

$$x_\phi = \rho_\phi \sin \lambda; \quad x_\lambda = \rho_\lambda \sin \lambda + \rho \cos \lambda ; \quad (3.2.26)$$

$$y_\phi = -\rho_\phi \cos \lambda; \quad y_\lambda = -\rho_\lambda \cos \lambda + \rho \sin \lambda .$$

Аналогично производные прямоугольных координат в конических проекциях с учетом формул (2.4.1) и (3.2.10) можно выразить через производные полярных координат:

$$x_\phi = \rho_\phi \sin \delta; \quad x_\lambda = \rho_\lambda \sin \delta + \rho \alpha \cos \delta ; \quad (3.2.27)$$

$$y_\phi = -\rho_\phi \cos \delta; \quad y_\lambda = -\rho_\lambda \cos \delta + \rho \alpha \sin \delta .$$

### 3.3. Масштаб длин вдоль меридианов

Масштаб длин вдоль меридианов определяется отношением бесконечно малого отрезка меридиана в плоскости проекции к соответствующему бесконечно малому отрезку меридиана на трехосном эллипсоиде.

Для цилиндрических проекций общая формула масштаба длин вдоль меридианов имеет вид:

$$K_{mer} = \frac{y_\phi d\Phi}{\sqrt{E} d\Phi} = \frac{y_\phi}{\sqrt{E}} . \quad (3.3.1)$$

Для цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, формула (3.3.1) с учетом формулы (3.2.2) приобретает вид:

$$K_{mer} = \frac{y_\phi}{\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E}} = 1 .$$

Для равновеликой цилиндрической проекции формула (3.3.1) с учетом формулы (3.2.4) приобретает вид:

$$K_{mer} = \frac{y_\phi}{\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{\frac{EG - F^2}{G_0}}}{\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG_0}} .$$

Для цилиндрической проекции меридианного сечения формула (3.3.1) с учетом формулы (3.2.6) приобретает вид:

$$K_{mer} = \frac{y_\phi}{\sqrt{E}} = \frac{\frac{E\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}}}{\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{EG - F^2}} .$$

Для проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, формула (3.3.1) с учетом формулы (3.2.8) приобретает вид:

$$K_{mer} = \frac{y_\Phi}{\sqrt{E}} = \frac{\frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G}} + \int_0^{\lambda_i} \frac{2\sqrt{G_0}F_\Phi(EG - F^2) - \sqrt{G_0}F(E_\Phi G + EG_\Phi - 2FF_\Phi)}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} d\lambda}{\sqrt{E}}.$$

Для азимутальных и конических проекций общая формула масштаба длин вдоль меридианов имеет вид:

$$K_{mer} = -\frac{\rho_\Phi d\Phi}{\sqrt{E} d\Phi} = -\frac{\rho_\Phi}{\sqrt{E}}. \quad (3.3.2)$$

В полюсе, подставив в зависимость для коэффициента Гаусса  $E$  (1.3.5) широту, равную  $\frac{\pi}{2}$ , получим:

$$\sqrt{E} = \sqrt{a^2 \frac{4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2}{4t^3}} = a\sqrt{1 - e_{ac}^2}. \quad (3.3.3)$$

Для азимутальной и конической проекций, сохраняющих длины вдоль меридианов, формула (3.3.2) с учетом формулы (3.2.12):

$$K_{mer} = -\frac{\rho_\Phi}{\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E}} = 1.$$

Для равновеликой азимутальной проекции формула (3.3.2) с учетом (3.2.15) приобретает вид:

$$K_{mer} = -\frac{\rho_\Phi}{\sqrt{E}} = \frac{\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho}}{\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E}}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho\sqrt{E}}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.3.8).

В полюсе с учетом формул (3.2.17) и (3.3.3):

$$K_{mer} = \frac{a\sqrt{1 - e_{ac}^2}}{a\sqrt{1 - e_{ac}^2}} = 1.$$

Для равновеликой конической проекции формула (3.3.2) с учетом формулы (3.2.19) приобретает вид:

$$K_{mer} = -\frac{\rho_\Phi}{\sqrt{E}} = \frac{\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\alpha\rho}}{\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\alpha\rho\sqrt{E}}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.4.24).

Для азимутальной проекции меридианного сечения формула (3.3.2) с учетом формулы (3.2.21) приобретает вид:

$$K_{mer} = -\frac{\rho_\Phi}{\sqrt{E}} = \rho \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.3.16).

В полюсе масштаб длин вдоль меридианов равен единице, так как постоянная интегрирования для азимутальной проекции меридианного сечения определяется исходя из этого условия.

Таким образом, для всех представленных здесь азимутальных проекций масштаб длин вдоль меридианов в полюсе не зависит от направления и равен единице, то есть эти проекции не имеют искажений в полюсе.

Для конической проекции меридианного сечения проекции формула (3.3.2) с учетом формулы (3.2.24) приобретает вид:

$$K_{mer} = -\frac{\rho_\Phi}{\sqrt{E}} = \alpha\rho \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.4.27).

### 3.4. Масштаб длин вдоль параллелей

Масштаб длин вдоль параллелей определяется отношением бесконечно малого отрезка параллели в плоскости проекции к соответствующему бесконечно малому отрезку параллели на трехосном эллипсоиде.

Для цилиндрических проекций масштаб длин вдоль параллелей вычисляется по формуле:

$$K_{par} = \frac{\sqrt{G_0 + y_\lambda^2}}{\sqrt{G}}, \quad (3.4.1)$$

где  $y_\lambda$  – производная вертикальной координаты по долготе.

Ввиду того, что выражения для  $y_\lambda$  имеют сложный вид, ограничимся общим видом формулы для вычисления масштаба длин вдоль параллелей.

Для цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов,  $y_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.3).

Для равновеликой цилиндрической проекции  $y_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.5).

Для цилиндрической проекции меридианного сечения (проекция Бугаевского)  $y_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.7).

Для цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью,  $y_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.9).

Для азимутальных проекций общая формула масштаба длин вдоль параллелей имеет вид:

$$K_{par} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_\lambda^2}}{\sqrt{G}}, \quad (3.4.2)$$

где  $\rho_\lambda$  – производная полярного расстояния по долготе.

Ввиду того, что выражения для  $\rho_\lambda$  имеют сложный вид, для азимутальных и конических проекций ограничимся общим видом формулы для вычисления масштаба длин вдоль параллелей.

В полюсе существует особенность (деление ноль на ноль). В параграфе 3.3, посвященном определению масштаба длин вдоль меридианов, было показано, что представленные здесь азимутальные проекции не имеют искажений в полюсе. Следовательно, масштаб длин вдоль параллелей в полюсе можно доопределить единицей.

Для азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.3.6),  $\rho_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.13).

Для равновеликой азимутальной проекции полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.3.8),  $\rho_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.18).

Для азимутальной проекции меридианного сечения полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.3.16),  $\frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda}$  вычисляется по формуле (3.2.22) и затем  $\rho_\lambda$  по формуле (3.2.23).

Для конических проекций общая формула масштаба длин вдоль параллелей имеет вид:

$$K_{par} = \frac{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 + \rho_\lambda^2}}{\sqrt{G}}, \quad (3.4.3)$$

где  $\rho_\lambda$  – производная полярного расстояния по долготе,  $\alpha$  – отношение приращения полярного угла к приращению долготы из формулы (2.4.14).

Для конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.4.21),  $\rho_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.14).

Для равновеликой конической проекции полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.4.24),  $\rho_\lambda$  вычисляется по формуле (3.2.20).

Для конической проекции меридианного сечения полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.4.27),  $\frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda}$  вычисляется по формуле (3.2.25) и затем  $\rho_\lambda$  по формуле (3.2.23).

### 3.5. Масштаб площадей

Общую формулу для вычисления масштаба площадей можно записать в виде отношения площади бесконечно малой трапеции в проекции к соответствующей трапеции на эллипсоиде:

$$\frac{S_{proj}}{S_{trap}}.$$

Используя формулу (1.3.17) можно получить площадь трапеции на эллипсоиде через коэффициенты Гаусса:

$$S_{trap} = \sqrt{E} d\Phi \sqrt{G} d\lambda \sin\omega = \sqrt{EG - F^2} d\Phi d\lambda .$$

Площадь трапеции в плоскости проекции для цилиндрических проекций равна:

$$S_{proj} = dx_{proj} y_\Phi d\Phi = y_\Phi \sqrt{G_0} d\Phi d\lambda .$$

Тогда формулу для вычисления масштаба площадей для цилиндрических проекций можно записать в виде:

$$K_{area} = \frac{S_{proj}}{S_{trap}} = \frac{y_\Phi \sqrt{G_0} d\Phi d\lambda}{\sqrt{EG - F^2} d\Phi d\lambda} = \frac{y_\Phi \sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} . \quad (3.5.1)$$

Для цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, производная вертикальной координаты по широте вычисляется по формуле (3.2.2) и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = \frac{y_\Phi \sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{EG - F^2}} .$$

Для равновеликой цилиндрической проекции производная вертикальной координаты по широте вычисляется по формуле (3.2.4), и масштаб площадей равен единице. Это видно из названия проекции.

$$K_{area} = \frac{y_\Phi \sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{G_0}} \cdot \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} = 1.$$

Для цилиндрической проекции меридианного сечения производная вертикальной координаты по широте вычисляется по формуле (3.2.6), и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = \frac{y_\Phi \sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{E \sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{EG_0}{EG - F^2}.$$

Для проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, производная вертикальной координаты по широте вычисляется по формуле (3.2.8), и масштаб площадей равен:

$$\begin{aligned} K_{area} &= \frac{y_\Phi \sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}} = \\ &= \left( \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G}} + \int_0^{\lambda_i} \frac{\sqrt{G_0} F_\Phi \sqrt{EG - F^2} - \sqrt{G_0} F \frac{E_\Phi G + EG_\Phi - 2FF_\Phi}{2\sqrt{EG - F^2}}}{\sqrt{EG - F^2}} d\lambda \right) \cdot \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Площадь трапеции в плоскости проекции для азимутальных проекций равна (рисунок 37):

$$S_{proj} = -\rho_\Phi d\Phi \rho d\lambda,$$

где  $\rho_\Phi$  – производная полярного расстояния по широте.

Тогда формулу для вычисления масштаба площадей для азимутальных проекций можно записать в виде:

$$K_{area} = \frac{S_{proj}}{S_{trap}} = -\frac{\rho \rho_\Phi d\Phi d\lambda}{\sqrt{EG - F^2} d\Phi d\lambda} = -\frac{\rho \rho_\Phi}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3.5.2)$$

В полюсе также, как и для масштаба длин вдоль параллелей существует особенность (деление ноль на ноль). Учитывая, что представленные здесь азимутальные проекции не имеют искажений в полюсе (параграф 3.3), масштаб площадей в полюсе можно доопределить единицей.

Для азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов,  $\rho_\Phi$  вычисляется по формуле (3.2.12), и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = -\frac{\rho \rho_\Phi}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\rho \sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.3.6).

Для равновеликой азимутальной проекции  $\rho_\Phi$  вычисляется по формуле (3.2.15) и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = -\frac{\rho \rho_\Phi}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho} = 1.$$

Для азимутальной проекции меридианного сечения  $\rho_\Phi$  вычисляется по формуле (3.2.21) и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = -\frac{\rho \rho_\Phi}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{E\rho}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{E\rho^2}{EG - F^2}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.3.16).

Площадь трапеции в плоскости проекции для конических проекций равна:

$$S_{proj} = -\rho_\phi d\Phi \rho d\delta = -\rho \rho_\phi d\Phi \alpha d\lambda,$$

где  $\alpha$  – отношение приращения полярного угла к приращению долготы, вычисляемое по формуле (2.4.14).

Тогда формулу для вычисления масштаба площадей для конических проекций можно записать в виде:

$$K_{area} = \frac{S_{proj}}{S_{trap}} = -\frac{\alpha \rho \rho_\phi d\Phi d\lambda}{\sqrt{EG - F^2} d\Phi d\lambda} = -\frac{\alpha \rho \rho_\phi}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3.5.3)$$

Для конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов,  $\rho_\phi$  вычисляется по формуле (3.2.12) и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = -\frac{\alpha \rho \rho_\phi}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\alpha \rho \sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.4.21).

Для равновеликой конической проекции  $\rho_\phi$  вычисляется по формуле (3.2.19) и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = -\frac{\alpha \rho \rho_\phi}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\alpha \rho}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\alpha \rho} = 1.$$

Для конической проекции меридианного сечения  $\rho_\phi$  вычисляется по формуле (3.2.24) и масштаб площадей равен:

$$K_{area} = -\frac{\alpha \rho \rho_\phi}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\alpha \rho}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{E \alpha \rho}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{E \alpha^2 \rho^2}{EG - F^2}.$$

Полярное расстояние  $\rho$  вычисляется по формуле (2.4.27).

### 3.6. Масштаб длин вдоль произвольного направления

Частный масштаб длин по направлению, задаваемому выбором  $d\Phi$  и  $d\lambda$ , для любой проекции равен отношению дифференциалов длин соответствующих дуг в проекции и на касательной плоскости.

Определим квадрат дифференциала длины дуги  $dl_{proj}$  в произвольной проекции:

$$dl_{proj}^2 = dx_{proj}^2 + dy_{proj}^2 = (x_\phi d\Phi + x_\lambda d\lambda)^2 + (y_\phi d\Phi + y_\lambda d\lambda)^2. \quad (3.6.1)$$

Тогда квадрат масштаба длин по этому направлению вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} K_\gamma^2 &= \frac{dl_{proj}^2}{dl^2} = \frac{(x_\phi d\Phi + x_\lambda d\lambda)^2 + (y_\phi d\Phi + y_\lambda d\lambda)^2}{Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + Gd\lambda^2} = \\ &= \frac{\left(x_\phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}{E \left(\frac{d\Phi}{d\lambda}\right)^2 + 2F \frac{d\Phi}{d\lambda} + G}. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Здесь и далее  $dl^2$  вычисляется по формуле (1.3.4).

Для цилиндрических проекций формулы существенно упрощаются, так как  $x_\phi = 0$ ,  $x_\lambda = \sqrt{G_0}$ .

То есть квадрат дифференциала длины дуги  $dl_{proj}$  в цилиндрических проекциях, учитывая формулы (2.2.3) и (2.2.5) примет вид:

$$dl_{proj}^2 = G_0 d\lambda^2 + (y_\phi d\Phi + y_\lambda d\lambda)^2. \quad (3.6.3)$$

Производная вертикальной координаты по широте зависит от характера искажений и определяется по формулам параграфа 3.2.

На рисунке 49а показан угол  $\gamma$  между меридианом и направлением, задаваемым  $d\Phi$  и  $d\lambda$  в касательной плоскости, а на рисунке 49б соответствующий ему угол  $\gamma_{proj}$  в плоскости цилиндрической проекции.

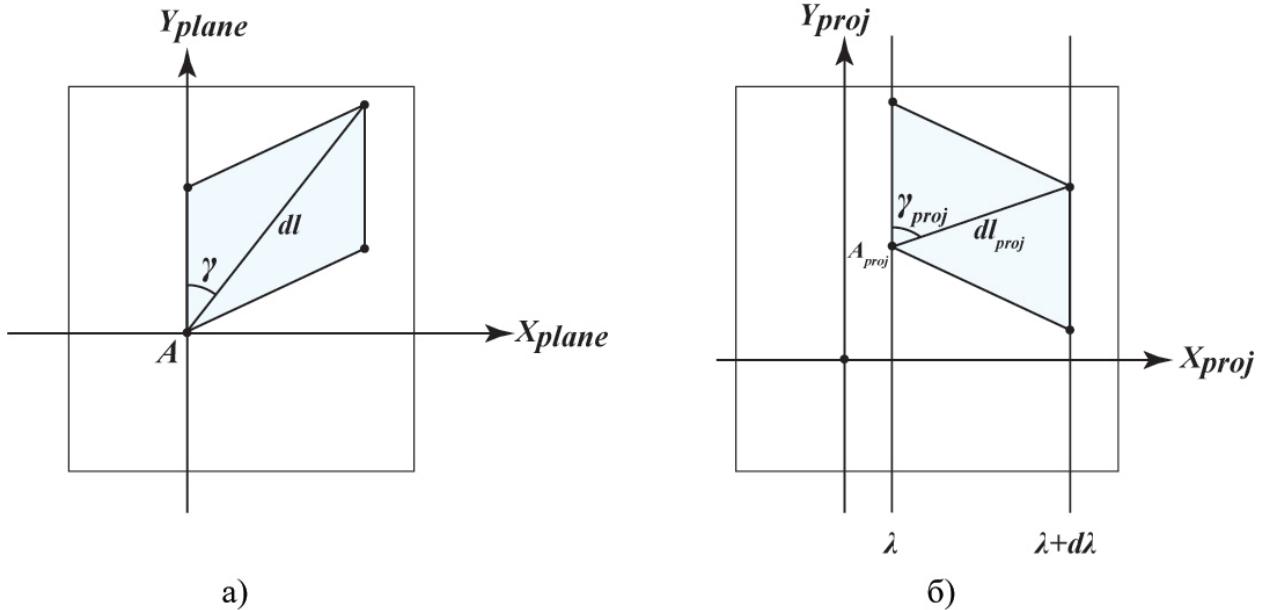


Рисунок 49. Угол между меридианом и заданным направлением  
а) в касательной к эллипсоиду плоскости, б) плоскости проекции

Соответственно квадрат масштаба длин по направлению, задаваемому выбором  $d\Phi$  и  $d\lambda$  для цилиндрической проекции примет вид:

$$K_\gamma^2 = \frac{dl_{proj}^2}{dl^2} = \frac{G_0 d\lambda^2 + (y_\Phi d\Phi + y_\lambda d\lambda)^2}{Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + Gd\lambda^2} = \frac{G_0 + \left( y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda \right)^2}{E \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + 2F \frac{d\Phi}{d\lambda} + G}. \quad (3.6.4)$$

Для азимутальных проекций формулы (3.6.1) и (3.6.2) упрощаются при использовании производных полярных координат по широте и долготе. Эти формулы могут быть получены как из геометрических соображений (Рисунок 50), так и прямой подстановкой в формулу (3.6.1) производных горизонтальной и вертикальной координат из формулы (3.2.26).

Для азимутальных проекций с любым характером искажений квадрат дифференциала длины дуги в проекции  $dl_{proj}$  равен (Рисунок 50):

$$dl_{proj}^2 = \rho^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2. \quad (3.6.5)$$

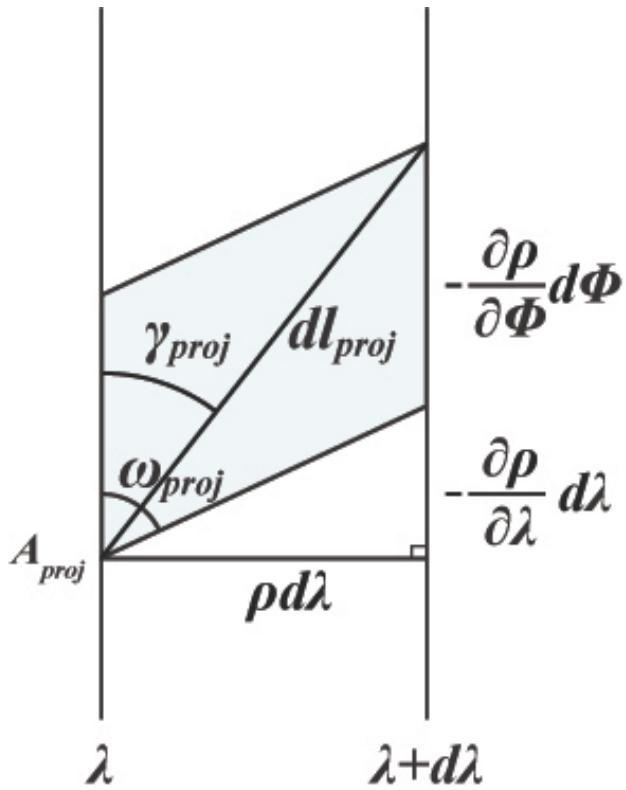


Рисунок 50. Соотношение параметров бесконечно малой трапеции в азимутальной проекции

Следовательно, квадрат масштаба длин по направлению, задаваемому выбором  $d\Phi$  и  $d\lambda$ , в этом случае может быть вычислен по формуле:

$$K_\gamma^2 = \frac{dl_{proj}^2}{dl^2} = \frac{\rho^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2}{Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + Gd\lambda^2} = \frac{\rho^2 + \left(\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda\right)^2}{E \left(\frac{d\Phi}{d\lambda}\right)^2 + 2F \frac{d\Phi}{d\lambda} + G}. \quad (3.6.6)$$

Для конических проекций аналогично азимутальным формулы (3.6.1) и (3.6.2) упрощаются при использовании производных полярных координат по широте и долготе. Как и в предыдущем случае результат может быть получен из геометрических соображений (Рисунок 51), либо прямой подстановкой в формулу (3.6.1) производных горизонтальной и вертикальной координат из формулы (3.2.27).

Формулы для конических проекций подобны формулам для азимутальных проекций, за исключением того, что длина перпендикуляра, проведенного к меридиану с долготой  $\lambda$  до пересечения с меридианом  $\lambda + d\lambda$ , в общем случае равна  $\rho d\delta$  или с учетом формулы (2.4.13)  $\rho \alpha d\lambda$ , а не  $\rho d\lambda$  как в азимутальных проекциях (Рисунки 50 и 51).

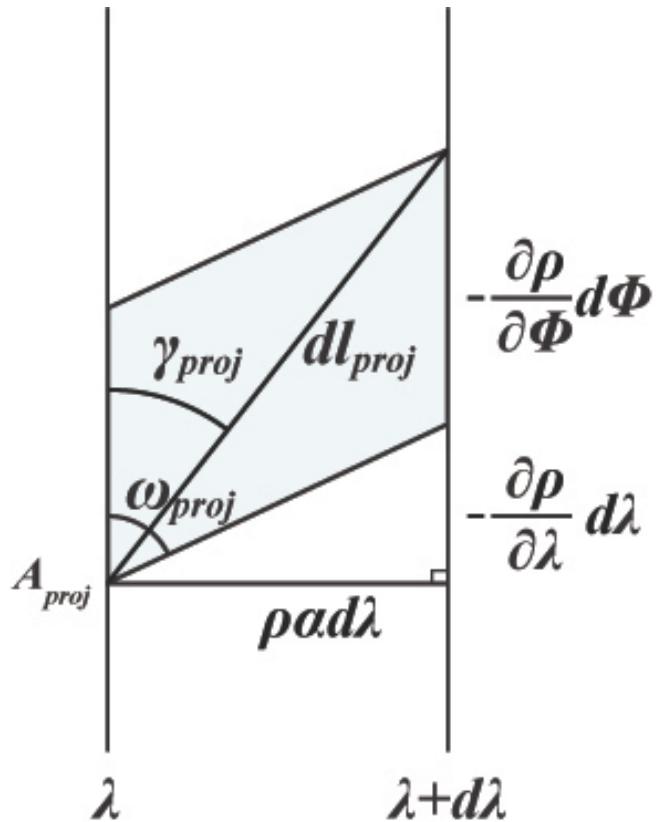


Рисунок 51. Соотношение параметров бесконечно малой трапеции в конической проекции

Соответственно квадрат дифференциала длины дуги  $dl_{proj}$ , задаваемого выбором  $d\Phi$  и  $d\lambda$ , в проекции равен:

$$dl_{proj}^2 = \rho^2 \alpha^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2 , \quad (3.6.7)$$

а квадрат  $K_\gamma$  примет вид:

$$\begin{aligned} K_\gamma^2 &= \frac{dl_{proj}^2}{dl^2} = \frac{\rho^2 \alpha^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2}{Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + Gd\lambda^2} = \\ &= \frac{\rho^2 \alpha^2 + \left( \rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda \right)^2}{E \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + 2F \frac{d\Phi}{d\lambda} + G} . \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

### 3.7. Соотношение углов на эллипсоиде и в проекции

Элементы бесконечно малого параллелограмма на эллипсоиде, в том числе угол между меридианом и параллелью и угол между меридианом и направлением, задаваемым выбором  $d\Phi$  и  $d\lambda$ , были определены в параграфе 1.3. Теперь для установления соотношения углов на эллипсоиде и в проекции следует определить тригонометрические функции углов между различными элементами бесконечно малого параллелограмма, показанного на рисунке 52, в плоскости произвольной проекции. Все углы измеряются против часовой стрелки.

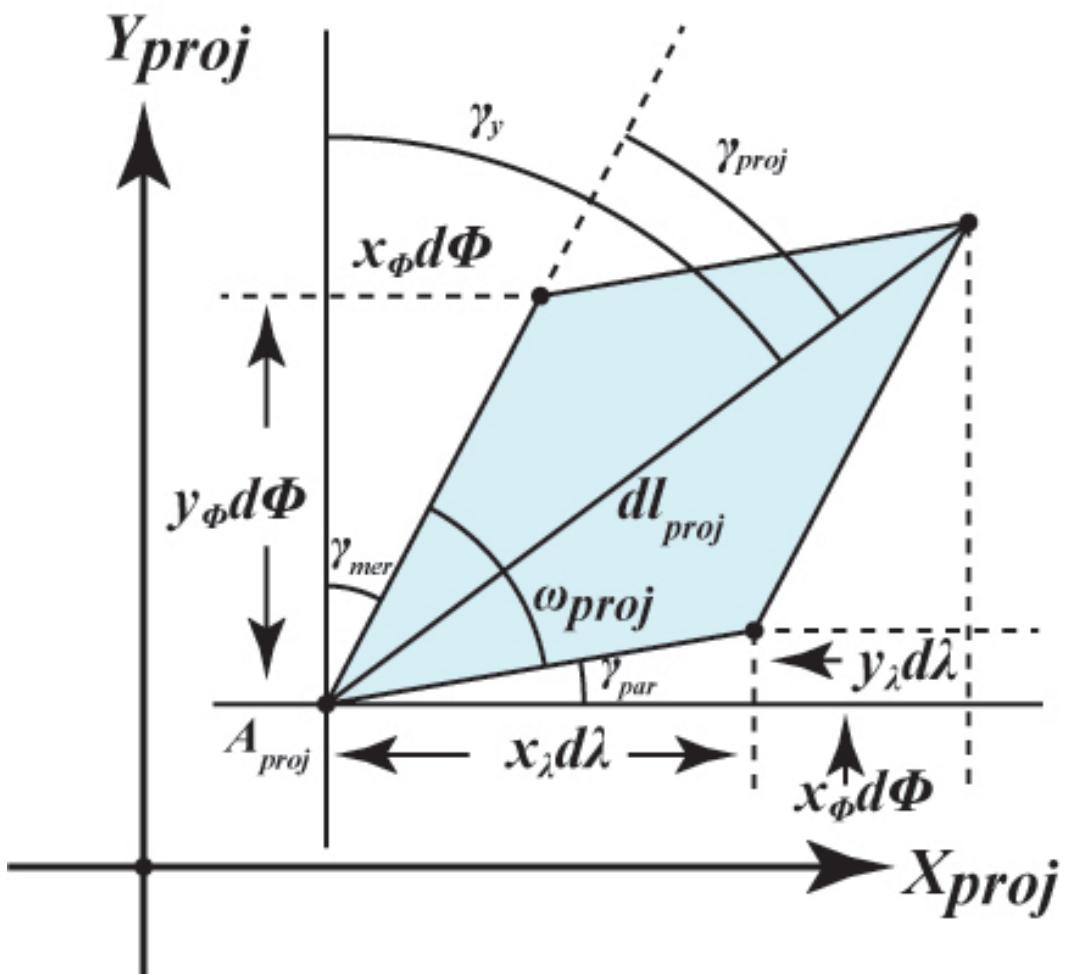


Рисунок 52. Бесконечно малый параллелограмм  
в плоскости произвольной проекции

Для угла  $\gamma_y$  между направлением оси  $Y_{proj}$  и выбранным направлением  $dl_{proj}$ :

$$\begin{aligned}\cos \gamma_y &= \frac{y_\Phi d\Phi + y_\lambda d\lambda}{\sqrt{(x_\Phi d\Phi + x_\lambda d\lambda)^2 + (y_\Phi d\Phi + y_\lambda d\lambda)^2}} = \\ &= \frac{y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda}{\sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} ;\end{aligned}\tag{3.7.1}$$

$$\begin{aligned}\sin \gamma_y &= \frac{x_\Phi d\Phi + x_\lambda d\lambda}{\sqrt{(x_\Phi d\Phi + x_\lambda d\lambda)^2 + (y_\Phi d\Phi + y_\lambda d\lambda)^2}} = \\ &= \frac{x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda}{\sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} .\end{aligned}$$

Для угла  $\gamma_{par}$  между параллелью и направлением оси  $X_{proj}$ :

$$\cos \gamma_{par} = \frac{x_\lambda d\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} = \frac{x_\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} ;\tag{3.7.2}$$

$$\sin \gamma_{par} = \frac{y_\lambda d\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} = \frac{y_\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} .$$

Для угла  $\gamma_{mer}$  между направлением оси  $Y_{proj}$  и меридианом:

$$\begin{aligned}\cos \gamma_{mer} &= \frac{y_\Phi d\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} = \frac{y_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} ;\\ \sin \gamma_{mer} &= \frac{x_\Phi d\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} = \frac{x_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} .\end{aligned}\tag{3.7.3}$$

Для угла, представляющего собой сумму углов  $\gamma_{mer}$  и  $\gamma_{par}$ :

$$\cos(\gamma_{mer} + \gamma_{par}) = \cos \gamma_{mer} \cos \gamma_{par} - \sin \gamma_{mer} \sin \gamma_{par} = \\ = \frac{y_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} \frac{x_\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} - \frac{x_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} \frac{y_\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} = \frac{x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} ;$$

$$\sin(\gamma_{mer} + \gamma_{par}) = \sin \gamma_{mer} \cos \gamma_{par} + \cos \gamma_{mer} \sin \gamma_{par} = \\ = \frac{x_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} \frac{x_\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} + \frac{y_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} \frac{y_\lambda}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} = \frac{x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} .$$

Для угла  $\omega_{proj}$  между меридианом и параллелью (Рисунок 52):

$$\cos \omega_{proj} = \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (\gamma_{mer} + \gamma_{par}) \right] = \frac{x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} ; \\ (3.7.4)$$

$$\sin \omega_{proj} = \sin \left[ \frac{\pi}{2} - (\gamma_{mer} + \gamma_{par}) \right] = \frac{x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} .$$

Для цилиндрических проекций формулы (3.7.4) упрощаются, так как  $x_\Phi = 0$  и  $x_\lambda = \sqrt{G_0}$  (2.2.3). Таким образом для цилиндрических проекций с любым характером исказений косинус и синус угла между меридианом и параллелью в проекции определяются по следующим формулам:

$$\cos \omega_{proj} = \frac{y_\lambda}{\sqrt{G_0 + y_\lambda^2}} ;$$

$$\sin \omega_{proj} = \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{G_0 + y_\lambda^2}} .$$

Знак косинуса угла совпадает со знаком производной вертикальной координаты по долготе, а синус всегда положителен, так как угол не может быть больше  $\pi$ .

Эти формулы также могут быть получены из геометрических соображений (Рисунок 53).

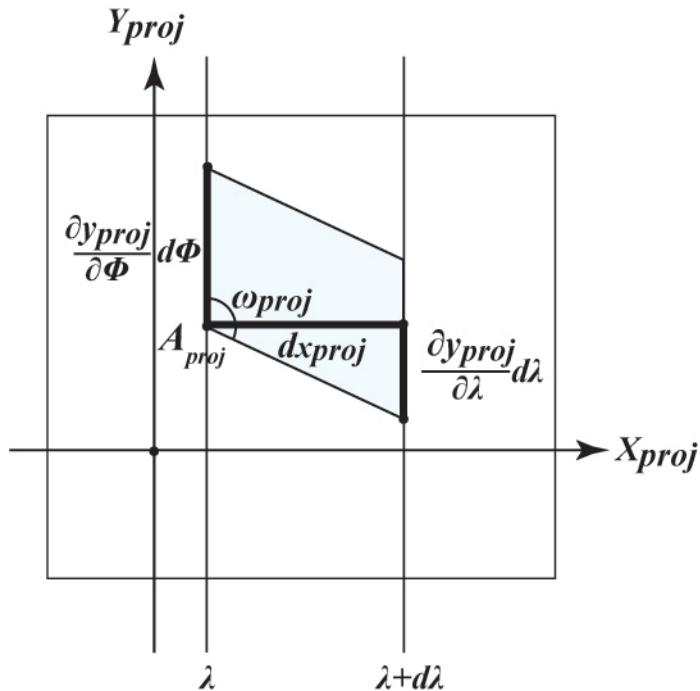


Рисунок 53. Угол между меридианом и параллелью в цилиндрической проекции

Для азимутальных проекций косинус и синус угла между меридианом и параллелью в проекции определяются по формулам (Рисунок 50):

$$\cos \omega_{proj} = -\frac{\rho_\lambda d\lambda}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\lambda^2 d\lambda}} = -\frac{\rho_\lambda}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\lambda^2}} ;$$

$$\sin \omega_{proj} = \frac{\rho d\lambda}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\lambda^2 d\lambda}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\lambda^2}} .$$

Знак косинуса угла противоположен знаку производной полярного расстояния по долготе, а синус всегда положителен, так как угол не может быть больше  $\pi$ .

Тригонометрические функции углов для азимутальных проекций также могут быть получены прямой подстановкой в формулу (3.7.4) производных горизонтальной и вертикальной координат из формулы (3.2.26).

Для конических проекций косинус и синус угла между меридианом и параллелью в проекции определяются по формулам (Рисунок 50):

$$\cos \omega_{proj} = -\frac{\rho_\lambda d\lambda}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 + \rho_\lambda^2 d\lambda}} = -\frac{\rho_\lambda}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 + \rho_\lambda^2}};$$

$$\sin \omega_{proj} = \frac{\rho \alpha d\lambda}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 + \rho_\lambda^2 d\lambda}} = \frac{\rho \alpha}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 + \rho_\lambda^2}}.$$

Для конических проекций также как и для азимутальных знак косинуса угла противоположен знаку производной полярного расстояния по долготе, а синус всегда положителен, так как угол не может быть больше  $\pi$ .

Тригонометрические функции углов для конических проекций также могут быть получены прямой подстановкой в формулу (3.7.4) производных горизонтальной и вертикальной координат из формулы (3.2.27)

Напомним, что косинус и синус угла  $\omega$  между меридианом и параллелью на эллипсоиде определяются по формулам (1.3.12).

Для угла  $\gamma_{proj}$  между меридианом и выбранным направлением:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_{proj} &= \cos(\gamma_y - \gamma_{mer}) = \cos \gamma_y \cos \gamma_{mer} + \sin \gamma_y \sin \gamma_{mer} = \\ &= \frac{y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda}{\sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} \frac{y_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} + \\ &+ \frac{x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda}{\sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} \frac{x_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} = \\ &= \frac{(x_\Phi^2 + y_\Phi^2) \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}}; \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

$$\begin{aligned}
\sin \gamma_{proj} &= \sin(\gamma_y - \gamma_{mer}) = \sin \gamma_y \cos \gamma_{mer} - \cos \gamma_y \sin \gamma_{mer} = \\
&= \frac{x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda}{\sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} \frac{y_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} - \\
&- \frac{y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda}{\sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} \frac{x_\Phi}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}} = \\
&= \frac{x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda}{\sqrt{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \sqrt{\left(x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda\right)^2 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} ; \\
\operatorname{ctg} \gamma_{proj} &= \frac{(x_\Phi^2 + y_\Phi^2) \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda}{x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda} . \tag{3.7.6}
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} &= (x_\Phi^2 + y_\Phi^2) \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda ; \\
\frac{d\Phi}{d\lambda} &= \frac{(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - (x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda)}{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} . \tag{3.7.7}
\end{aligned}$$

Для цилиндрических проекций с учетом того, что  $x_\Phi = 0$  и  $x_\lambda = \sqrt{G_0}$ , косинус, синус и котангенс угла  $\gamma_{proj}$  между меридианом и выбранным направлением равны:

$$\cos \gamma_{proj} = \frac{y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda}{\sqrt{G_0 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} ;$$

$$\sin \gamma_{proj} = \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{G_0 + \left(y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda\right)^2}} ;$$

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = \frac{y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda}{\sqrt{G_0}} .$$

Для азимутальных проекций косинус, синус и котангенс угла  $\gamma_{proj}$  между меридианом и выбранным направлением равны в проекции определяются по формулам (Рисунок 51):

$$\cos \gamma_{proj} = -\frac{\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda}{\sqrt{\rho^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2}} = -\frac{\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda}{\sqrt{\rho^2 + \left(\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda\right)^2}} ;$$

$$\sin \gamma_{proj} = \frac{\rho d\lambda}{\sqrt{\rho^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \left(\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda\right)^2}} ;$$

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = -\frac{\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda}{\rho} .$$

Тригонометрические функции углов для азимутальных проекций также могут быть получены подстановкой в формулы (3.7.5) и (3.7.6) производных горизонтальной и вертикальной координат из формулы (3.2.26).

Для конических проекций косинус, синус и котангенс угла  $\gamma_{proj}$  между меридианом и выбранным направлением в проекции определяются по формулам (Рисунок 51):

$$\cos \gamma_{proj} = -\frac{\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2}} = -\frac{\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 + \left(\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda\right)^2}} ;$$

$$\sin \gamma_{proj} = \frac{\rho \alpha d\lambda}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 d\lambda^2 + (\rho_\Phi d\Phi + \rho_\lambda d\lambda)^2}} = \frac{\rho \alpha}{\sqrt{\rho^2 \alpha^2 + \left(\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda\right)^2}} ;$$

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = -\frac{\rho_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + \rho_\lambda}{\rho \alpha} .$$

Тригонометрические функции углов для конических проекций также могут быть получены подстановкой в формулы (3.7.5) и (3.7.6) производных горизонтальной и вертикальной координат из формулы (3.2.27).

Перейдем к соотношению углов на эллипсоиде и в проекции. Определим угол  $\gamma$  на эллипсоиде, соответствующий углу  $\gamma_{proj}$  между меридианом и направлением, задаваемым отношением  $\frac{d\Phi}{d\lambda}$ . Формулу (1.3.16) с учетом формулы (1.3.12) представим в виде:

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \left( -\frac{F}{\sqrt{EG}} + \operatorname{ctg} \gamma \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \right) \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}.$$

Таким образом, связь отношения  $\frac{d\Phi}{d\lambda}$  с котангенсом угла  $\gamma$  на эллипсоиде будет:

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \frac{-F + \sqrt{EG - F^2} \operatorname{ctg} \gamma}{E}. \quad (3.7.8)$$

Приравняв правые части этого уравнения и уравнения (3.7.7), получим соотношение углов между меридианом и выбранным направлением на эллипсоиде и в проекции.

$$\frac{-F + \sqrt{EG - F^2} \operatorname{ctg} \gamma}{E} = \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)}{x_\phi^2 + y_\phi^2};$$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)}{x_\phi^2 + y_\phi^2} E + F \frac{x_\phi^2 + y_\phi^2}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad (3.7.9)$$

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = \frac{(x_\phi^2 + y_\phi^2) \frac{-F + \sqrt{EG - F^2} \operatorname{ctg} \gamma}{E} + (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)}{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)}. \quad (3.7.10)$$

В цилиндрических проекциях:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{E \frac{\sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - y_\lambda}{y_\phi} + F}{\sqrt{EG - F^2}};$$

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = \frac{y_\Phi \frac{-F + \sqrt{EG - F^2} \operatorname{ctg} \gamma}{E} + y_\lambda}{\sqrt{G_0}}.$$

В азимутальных проекциях:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{-E \frac{\rho \operatorname{ctg} \gamma_{proj} + \rho_\lambda}{\rho_\Phi} + F}{\sqrt{EG - F^2}} ;$$

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = - \frac{\rho_\Phi \frac{-F + \sqrt{EG - F^2} \operatorname{ctg} \gamma}{E} + \rho_\lambda}{\rho} .$$

В конических проекциях:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{-E \frac{\rho \alpha \operatorname{ctg} \gamma_{proj} + \rho_\lambda}{\rho_\Phi} + F}{\sqrt{EG - F^2}} ;$$

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = - \frac{\rho_\Phi \frac{-F + \sqrt{EG - F^2} \operatorname{ctg} \gamma}{E} + \rho_\lambda}{\rho \alpha} .$$

Максимальное искажение углов в проекции будет определено в следующем параграфе.

### 3.8. Экстремальные масштабы длин и построение эллипса искажений

Квадрат масштаба длин по направлению, задаваемому выбором  $d\Phi$  и  $d\lambda$ , для любой проекции представлен в формуле (3.6.2) как функция от отношения  $\frac{d\Phi}{d\lambda}$ . Зависимость (3.7.7) позволяет представить квадрат масштаба длин для произвольной проекции, как функцию от котангенса угла  $\gamma_{proj}$  между меридианом и выбранным направлением.

Сначала преобразуем числитель правой части выражения (3.6.2):

$$\begin{aligned}
 & \left( x_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + x_\lambda \right)^2 + \left( y_\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + y_\lambda \right)^2 = \\
 &= \left( x_\Phi \frac{(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - x_\Phi x_\lambda - y_\Phi y_\lambda}{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} + x_\lambda \right)^2 + \\
 &+ \left( y_\Phi \frac{(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - x_\Phi x_\lambda - y_\Phi y_\lambda}{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} + y_\lambda \right)^2 = \\
 &= \left( \frac{x_\Phi (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} + y_\Phi (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)}{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \right)^2 + \\
 &+ \left( \frac{y_\Phi (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - x_\Phi (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)}{x_\Phi^2 + y_\Phi^2} \right)^2 = \\
 &= \frac{(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2 \left[ (x_\Phi \operatorname{ctg} \gamma_{proj} + y_\Phi)^2 + (y_\Phi \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - x_\Phi)^2 \right]}{(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^2} = \\
 &= \frac{(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2 (x_\Phi^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma_{proj} + y_\Phi^2 + y_\Phi^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma_{proj} + x_\Phi^2)}{(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^2} = \\
 &= \frac{(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2 (\operatorname{ctg}^2 \gamma_{proj} + 1)}{x_\Phi^2 + y_\Phi^2}. \tag{3.8.1}
 \end{aligned}$$

Определим в точке проекции  $x_{proj}, y_{proj}$  локальную систему координат  $x_{point}, y_{point}$  с осью  $Y_{point}$ , совпадающей с меридианом, проходящем через точку  $x_{proj}, y_{proj}$ , и осью  $X_{point}$ , представляющей собой перпендикуляр к меридиану в этой точке (Рисунок 54).

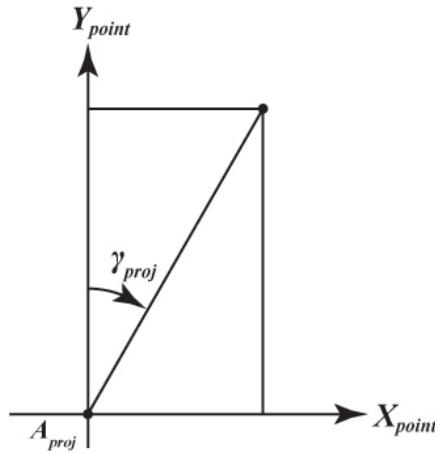


Рисунок 54. Локальная система координат  $x_{point}, y_{point}$

В этой системе координат:

$$\operatorname{ctg} \gamma_{proj} = \frac{y_{point}}{x_{point}}.$$

Таким образом числитель (3.8.1) принимает вид:

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma_{proj}) \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2}{x_\phi^2 + y_\phi^2} = \\ = (x_{point}^2 + y_{point}^2) \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2}{x_{point}^2 (x_\phi^2 + y_\phi^2)}. \quad (3.8.2)$$

Аналогично преобразуем знаменатель правой части выражения (3.6.2):

$$E \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 + 2F \frac{d\Phi}{d\lambda} + G = E \left( \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} \right)^2 + \\ + 2F \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_{proj} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} + G = \\ = E \left( \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{y_{point}}{x_{point}} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} \right)^2 + \\ + 2F \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{y_{point}}{x_{point}} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} + G. \quad (3.8.3)$$

С учётом формулы (3.8.2) выражение (3.6.2) принимает вид:

$$K_\gamma^2 = \frac{(x_{point}^2 + y_{point}^2) \frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2}{x_{point}^2(x_\phi^2 + y_\phi^2)}}{E\left(\frac{d\Phi}{d\lambda}\right)^2 + 2F\frac{d\Phi}{d\lambda} + G}. \quad (3.8.4)$$

Построим бесконечно малую окружность радиуса  $R_{tis}$  на эллипсоиде (или, что тоже самое, на касательной плоскости) с центром в точке  $A$ , переходящей в проекции в точку  $A_{proj}$  с координатами  $x_{proj}, y_{proj}$ .

Частный масштаб длин  $K_\gamma$  зависит от угла  $\gamma$  между меридианом и выбранным направлением на эллипсоиде. В проекции этот угол переходит в угол  $\gamma_{proj}$ . В локальной системе координат  $x_{point}, y_{point}$  на плоскости проекции эта окружность переходит в кривую, в каждой точке которой расстояние от этой точки до начала координат равно частному масштабу длин  $K_\gamma$ , соответствующему углу  $\gamma_{proj}$  и умноженному на  $R_{tis}$ .

Для любой точки этой кривой выполняется равенство (Рисунок 54):

$$x_{point}^2 + y_{point}^2 = R_{tis}^2 K_\gamma^2. \quad (3.8.5)$$

Преобразуем равенство (3.8.5) с учётом формул (3.8.3) и (3.8.4) и сократим левую и правую части на  $(x_{point}^2 + y_{point}^2)$ :

$$\begin{aligned} & E[(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 y_{point}^2 + (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 x_{point}^2 - \\ & - 2(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)x_{point}y_{point}] + \\ & + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)[(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)x_{point}y_{point} - (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)x_{point}^2] + \\ & + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2 x_{point}^2 = R_{tis}^2(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2(x_\phi^2 + y_\phi^2). \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} & x_{point}^2 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] + \\ & + y_{point}^2 E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 + \\ & + x_{point}y_{point}(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)[-2E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] = \\ & = R_{tis}^2(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2(x_\phi^2 + y_\phi^2). \end{aligned}$$

Таким образом получилась плоская центральная кривая второго порядка. Таких кривых всего три: эллипс, гипербола и парабола. Поскольку на исходной окружности нет особых точек, и точки полученной кривой не уходят в бесконечность, то это эллипс (Рисунок 55). Полученная кривая определяет характер искажений в точке проекции и называется эллипсом искажений.

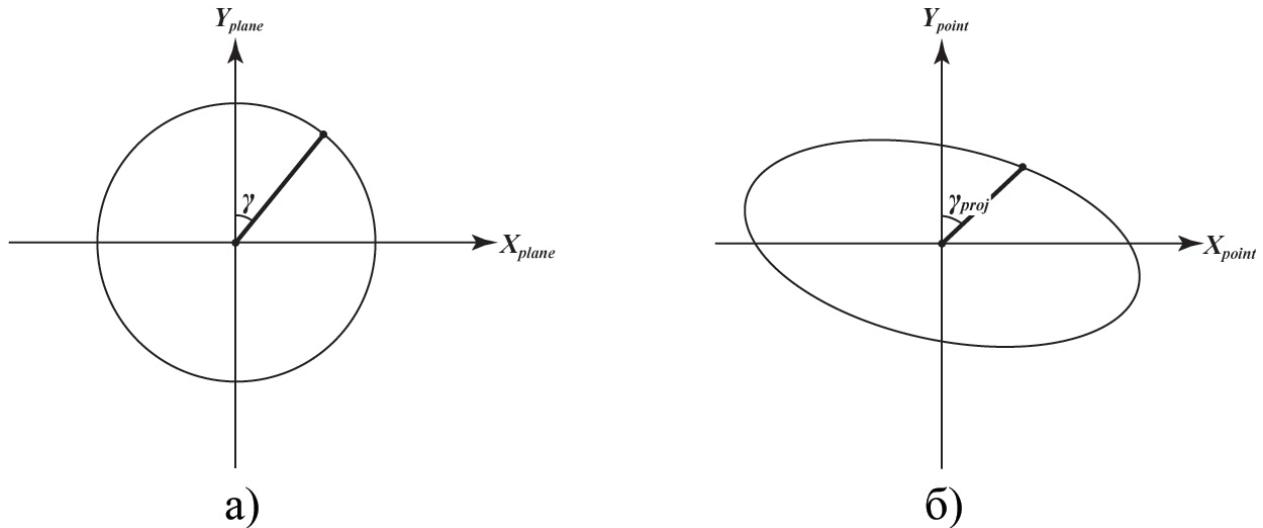


Рисунок 55. Угол  $\gamma$  на касательной плоскости (а) и соответствующий ему угол  $\gamma_{proj}$  в локальной системе координат  $x_{point}, y_{point}$  на плоскости проекции (б)

Найдем теперь угол поворота  $\gamma_0$ , определяющего новую систему координат  $x_{tis}, y_{tis}$ , в которой уравнение эллипса искажений имеет канонический вид (Рисунок 56).

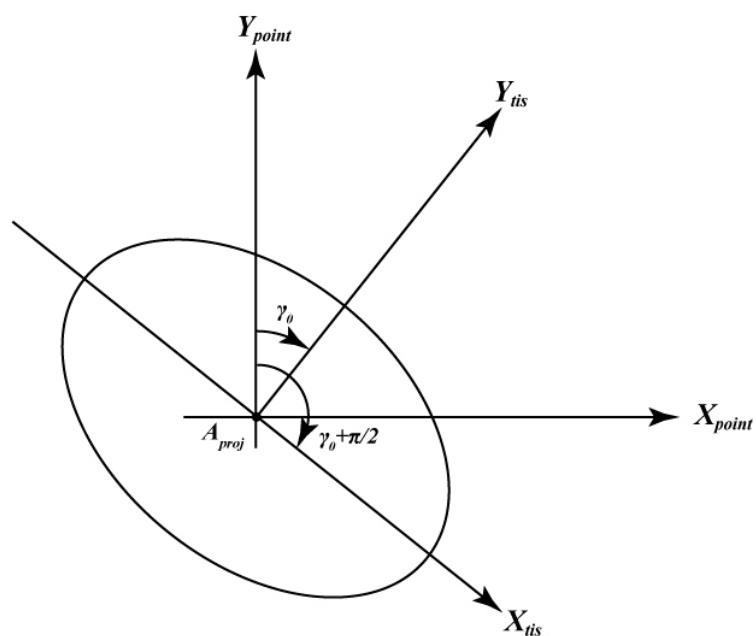


Рисунок 56. Система координат  $x_{tis}, y_{tis}$ , в которой уравнение эллипса имеет канонический вид

Преобразование поворота для перехода к новой системе координат:

$$x_{point} = x_{tis} \cos \gamma_0 + y_{tis} \sin \gamma_0 ;$$

$$y_{point} = -x_{tis} \sin \gamma_0 + y_{tis} \cos \gamma_0 .$$

$$x_{point}^2 = x_{tis}^2 \cos^2 \gamma_0 + 2x_{tis}y_{tis} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 + y_{tis}^2 \sin^2 \gamma_0 ;$$

$$y_{point}^2 = x_{tis}^2 \sin^2 \gamma_0 - 2x_{tis}y_{tis} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 + y_{tis}^2 \cos^2 \gamma_0 ;$$

$$\begin{aligned} x_{point}y_{point} &= -x_{tis}^2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 - x_{tis}y_{tis} \sin^2 \gamma_0 + x_{tis}y_{tis} \cos^2 \gamma_0 + \\ &\quad + y_{tis}^2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 = \end{aligned}$$

$$= -x_{tis}^2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 + x_{tis}y_{tis}(\cos^2 \gamma_0 - \sin^2 \gamma_0) + y_{tis}^2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 .$$

В системе координат, в которой уравнение эллипса имеет канонический вид, коэффициент при членах, содержащих одновременно  $x_{tis}$  и  $y_{tis}$ , должен быть равен нулю:

$$\begin{aligned} &2x_{tis}y_{tis} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + \\ &\quad + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] - 2Ex_{tis}y_{tis} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 + \\ &\quad + x_{tis}y_{tis}(\cos^2 \gamma_0 - \sin^2 \gamma_0)(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \cdot \\ &\quad \cdot [-2E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] = 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] + \\ &\quad - 2E \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 + \\ &\quad + (\cos^2 \gamma_0 - \sin^2 \gamma_0)(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)[-2E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] = 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \{E[(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2] - \\ &\quad - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2\} + \\ &\quad + (\cos^2 \gamma_0 - \sin^2 \gamma_0)(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)[-2E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] = 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0}{\cos^2 \gamma_0 - \sin^2 \gamma_0} = \\
& = \frac{2(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)[E(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) - F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)]}{E[(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2] - 2F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) + G(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^2} . \tag{3.8.6}
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tg} 2\gamma_0 = \\
& = \frac{2(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)[E(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) - F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)]}{E[(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2] - 2F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) + G(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^2} .
\end{aligned}$$

Для определения угла  $2\gamma_0$  при программировании для корректной обработки особенностей целесообразно использовать функцию ATAN2:

$$\begin{aligned}
& \text{ATAN2}\left(2(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)[E(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) - F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)], E\left[(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2\right] - 2F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) + G(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^2\right).
\end{aligned}$$

Разделив числитель и знаменатель левой части уравнения (3.8.6) на  $\sin^2 \gamma_0$ , получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \operatorname{ctg} \gamma_0}{\operatorname{ctg}^2 \gamma_0 - 1} = \\
& = \frac{2(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)[E(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) - F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)]}{E[(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2] - 2F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) + G(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^2} .
\end{aligned}$$

При определении угла между направлениями на эллипсоиде, соответствующими направлениям осей эллипса искажений, будет использовано соотношение:

$$\begin{aligned}
& \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma_0 - 1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} = \\
& = \frac{E[(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)^2] - 2F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) + G(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^2}{(x_\lambda y_\Phi - x_\Phi y_\lambda)[E(x_\Phi x_\lambda + y_\Phi y_\lambda) - F(x_\Phi^2 + y_\Phi^2)]} . \tag{3.8.7}
\end{aligned}$$

Запишем уравнение эллипса в новой системе координат:

$$\begin{aligned}
 & (x_{tis}^2 \cos^2 \gamma_0 + y_{tis}^2 \sin^2 \gamma_0) \cdot \\
 & \cdot [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] + \\
 & + (-x_{tis}^2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 + y_{tis}^2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0)(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)[-2E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + \\
 & + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] + (x_{tis}^2 \sin^2 \gamma_0 + y_{tis}^2 \cos^2 \gamma_0)E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 = \\
 & = R_{tis}^2 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 (x_\phi^2 + y_\phi^2).
 \end{aligned}$$

Коэффициент при  $x_{tis}^2$  равен:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] - \\
 & - \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)[-2E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] + \\
 & + \sin^2 \gamma_0 E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2.
 \end{aligned}$$

Коэффициент при  $y_{tis}^2$  равен:

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] + \\
 & + \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)[-2E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] + \\
 & + \cos^2 \gamma_0 E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2.
 \end{aligned}$$

Если коэффициент при  $x_{tis}^2$  больше коэффициента при  $y_{tis}^2$ , то это значит, что большая ось эллипса искажений расположена вертикально. Чтобы большая ось эллипса искажений в каноническом виде была расположена горизонтально угол поворота  $\gamma_0$ , для перехода к новой системе координат следует изменить на  $\frac{\pi}{2}$ . При программировании для определения угла  $2\gamma_0$  в функции ATAN2 надо поменять знак обоих аргументов.

$$\begin{aligned}
 & x_{tis}^2 \{ \cos^2 \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] + \\
 & + 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] + \\
 & + \sin^2 \gamma_0 E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 \} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y_{tis}^2 \{ \sin^2 \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] - \\
& - 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] + \\
& + \cos^2 \gamma_0 E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 \} = R_{tis}^2 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 (x_\phi^2 + y_\phi^2) .
\end{aligned}$$

Окончательно уравнение эллипса в каноническом виде:

$$\frac{x_{tis}^2}{K_{max}^2 R_{tis}^2} + \frac{y_{tis}^2}{K_{min}^2 R_{tis}^2} = 1 ,$$

где

$$\begin{aligned}
& K_{min}^2 = \\
& = \frac{(x_\phi y_\lambda - x_\lambda y_\phi)^2 (x_\phi^2 + y_\phi^2)}{\sin^2 \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] - \\
& - 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] + \\
& + \cos^2 \gamma_0 E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2} ; \tag{3.8.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_{max}^2 = \\
& = \frac{(x_\phi y_\lambda - x_\lambda y_\phi)^2 (x_\phi^2 + y_\phi^2)}{\cos^2 \gamma_0 [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2] + \\
& + 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] + \\
& + \sin^2 \gamma_0 E(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2} ;
\end{aligned}$$

$K_{min}$  – это минимальный масштаб длин ( $K_{min}R$  – малая полуось эллипса искажений) и  $K_{max}$  – максимальный масштаб длин ( $K_{max}R$  – большая полуось эллипса искажений).

Для цилиндрических проекций после подстановки в (3.8.8)  $x_\phi = 0$  и  $x_\lambda = \sqrt{G_0}$  и сокращения на  $y_\phi^2$  данные зависимости примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
& K_{min}^2 = \\
& = \frac{G_0 y_\phi^2}{\sin^2 \gamma_0 (E y_\lambda^2 - 2F y_\phi y_\lambda + G y_\phi^2) - 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \sqrt{G_0} (E y_\lambda - F y_\phi) + \cos^2 \gamma_0 E G_0} ;
\end{aligned}$$

$$K_{max}^2 = \frac{G_0 y_\phi^2}{\cos^2 \gamma_0 (E y_\lambda^2 - 2F y_\phi y_\lambda + G y_\phi^2) + 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \sqrt{G_0} (E y_\lambda - F y_\phi) + \sin^2 \gamma_0 E G_0}.$$

На рисунке 57 представлены эллипсы искажений для фрагмента картографической сетки в равновеликой цилиндрической проекции с параметрами трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру астероида (253) Матильда.

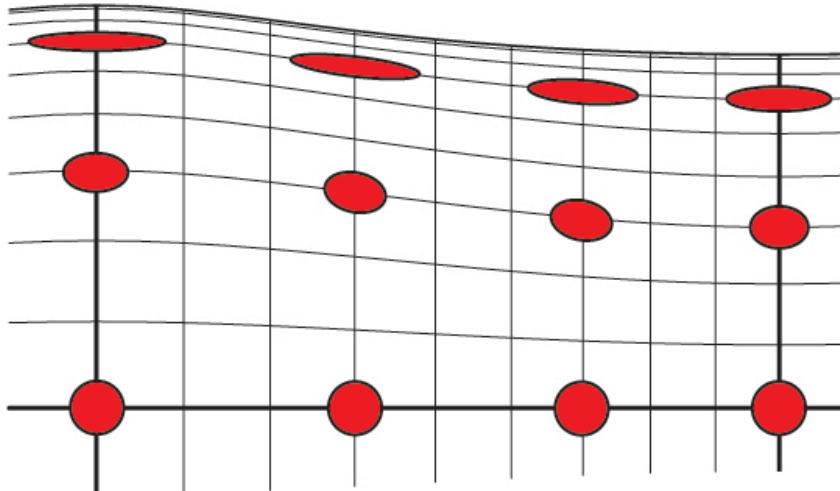


Рисунок 57. Фрагмент картографической сетки с эллипсами искажений в равновеликой цилиндрической проекции

Для азимутальных проекций с учетом значений производных из (3.2.26) имеем:

$$(x_\phi^2 + y_\phi^2) = \rho_\phi^2 ; \\ x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda = -\rho \rho_\phi ; \\ x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda = \rho_\phi \rho_\lambda ;$$

$$K_{min}^2 = \frac{\rho^2 \rho_\phi^2}{\sin^2 \gamma_0 (E \rho_\lambda^2 - 2F \rho_\phi \rho_\lambda + G \rho_\phi^2) - 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \rho (-E \rho_\lambda + F \rho_\phi) + \cos^2 \gamma_0 E \rho^2} ;$$

$$K_{max}^2 = \frac{\rho^2 \rho_\phi^2}{\cos^2 \gamma_0 (E \rho_\lambda^2 - 2F \rho_\phi \rho_\lambda + G \rho_\phi^2) + 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \rho (-E \rho_\lambda + F \rho_\phi) + \sin^2 \gamma_0 E \rho^2} .$$

На рисунке 58 представлены эллипсы искажений для фрагмента картографической сеики в равновеликой азимутальной проекции с параметрами трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру астероида (253) Матильда.

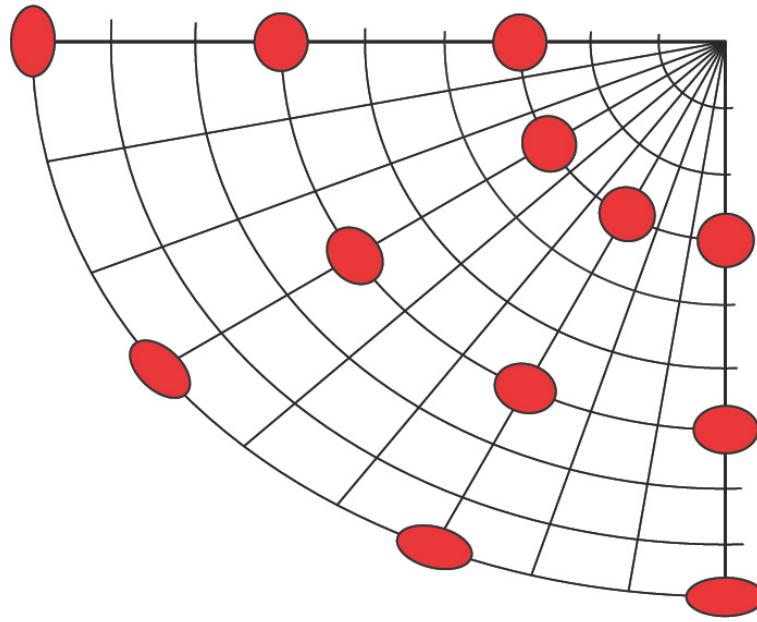


Рисунок 58. Фрагмент картографической сетки с эллипсами искажений в равновеликой азимутальной проекции

Для конических проекций с учетом значений производных из формулы (3.2.27):

$$\begin{aligned} (x_\phi^2 + y_\phi^2) &= \rho_\phi^2 ; \\ x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda &= -\rho \rho_\phi \alpha ; \\ x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda &= \rho_\phi \rho_\lambda ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{min}^2 &= \frac{\rho^2 \rho_\phi^2 \alpha^2}{ \\ = \frac{\sin^2 \gamma_0 (E \rho_\lambda^2 - 2F \rho_\phi \rho_\lambda + G \rho_\phi^2) - 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \rho \alpha (-E \rho_\lambda + F \rho_\phi) + \cos^2 \gamma_0 E \rho^2 \alpha^2}{ \\ K_{max}^2 &= \frac{\rho^2 \rho_\phi^2 \alpha^2}{ \\ = \frac{\cos^2 \gamma_0 (E \rho_\lambda^2 - 2F \rho_\phi \rho_\lambda + G \rho_\phi^2) + 2 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \rho \alpha (-E \rho_\lambda + F \rho_\phi) + \sin^2 \gamma_0 E \rho^2 \alpha^2}}. \end{aligned}$$

На рисунке 59 представлены эллипсы искажений для конических проекций трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру астероида (433) Эроса) сохраняющей длины вдоль меридианов, б) равновеликой конической проекции, в) конической проекции меридианного сечения. Трапеция, обведенная синей рамкой, соответствует картам, показанным на рисунке 48. Красным цветом обозначена линия касания прямого эллиптического конуса и трехосного эллипсоида.

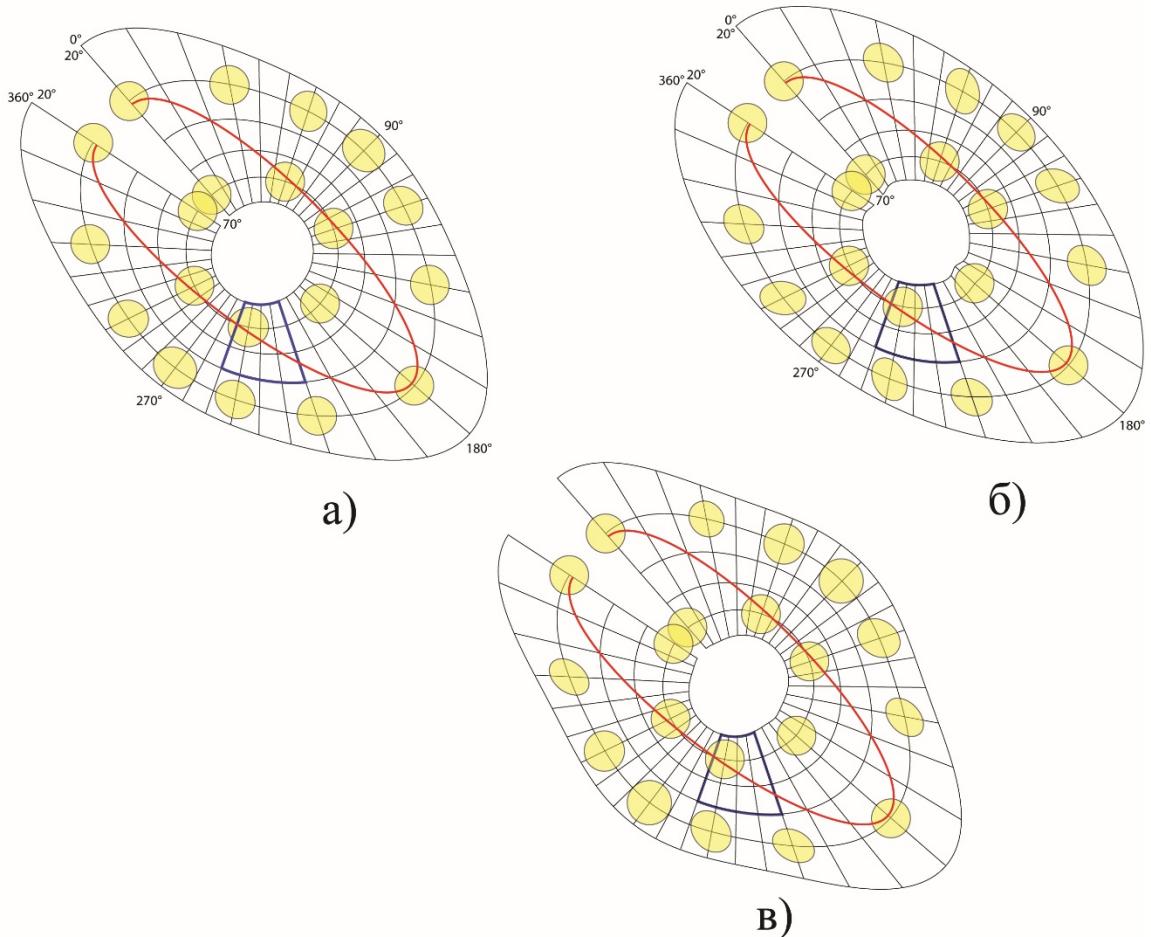


Рисунок 59. Фрагменты картографических сеток с эллипсами искажений для конических проекций: а) сохраняющей длины вдоль меридианов, б) равновеликой конической проекции, в) конической проекции меридианного сечения

Зависимость (3.7.9) позволяет определить угол на касательной к эллипсоиду плоскости  $\gamma_{0ell}$ , соответствующий углу поворота  $\gamma_0$ , который определяет систему координат  $x_{tis}, y_{tis}$  в плоскости проекции:

$$\operatorname{ctg} \gamma_{0ell} = \frac{\frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_0 - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} E + F}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Угол  $\gamma_0 + \frac{\pi}{2}$  в плоскости проекции соответствует направлению оси  $X_{tis}$ , а соответствующий угол  $\gamma_{1ell}$  на касательной к эллипсоиду плоскости задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \gamma_{1ell} &= \frac{\frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \left( \gamma_0 + \frac{\pi}{2} \right) - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} E + F}{\sqrt{EG - F^2}} = \\ &= \frac{\frac{-(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} E + F}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Если произведение котангенсов  $\gamma_{0ell}$  и  $\gamma_{1ell}$  будет равно минус единице, то угол между этими направлениями на касательной плоскости будет прямым, то есть эти направления можно считать главными, поскольку прямой угол между ними на касательной плоскости будет сохраняться при переходе к плоскости проекции.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \gamma_{0ell} \operatorname{ctg} \gamma_{1ell} &= \\ &= \frac{\frac{(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_0 - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} E + F}{\sqrt{EG - F^2}}. \\ &= \frac{\frac{-(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda}{x_\phi^2 + y_\phi^2} E + F}{\sqrt{EG - F^2}} = \\ &= \frac{EG_1 + F^2(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2}{(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2(EG - F^2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G_1 &= [(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_0 - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda] \cdot \\
&\quad \cdot \left[ -(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda \right] E + \\
&\quad + (x_\phi^2 + y_\phi^2) \left\{ [(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \operatorname{ctg} \gamma_0 - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda] + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} - x_\phi x_\lambda - y_\phi y_\lambda \right] \right\} F = \\
&= [-(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma_0 - 1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} + \\
&\quad + (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2] E + \\
&\quad + (x_\phi^2 + y_\phi^2) \left[ -2(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) + (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma_0 - 1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} \right] F = \\
&= E [-(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 + (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2] - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - \\
&\quad - (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma_0 - 1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - F(x_\phi^2 + y_\phi^2)]. \quad (3.8.9)
\end{aligned}$$

С учетом формулы (3.8.7) сделаем подстановку в формулу (3.8.9):

$$\begin{aligned}
&(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda) \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma_0 - 1}{\operatorname{ctg} \gamma_0} [E(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - F(x_\phi^2 + y_\phi^2)] = \\
&= E[(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2] - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) \\
&\quad + G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2.
\end{aligned}$$

Соответственно, формула (3.8.9) примет вид:

$$\begin{aligned}
G_1 &= E [-(x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2 + (x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2] - 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - \\
&\quad - E[(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda)^2 - (x_\lambda y_\phi - x_\phi y_\lambda)^2] + 2F(x_\phi^2 + y_\phi^2)(x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda) - \\
&\quad - G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2 = -G(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2; \\
\operatorname{ctg} \gamma_{0ell} \operatorname{ctg} \gamma_{1ell} &= \frac{EG_1 + F^2(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2}{(x_\phi^2 + y_\phi^2)^2(EG - F^2)} = -1.
\end{aligned}$$

С главными направлениями можно связать две системы координат. На эллипсоиде или, что тоже самое, на касательной плоскости – это система координат  $x_{main}, y_{main}$  с началом координат в точке  $A$ , переходящей в проекции в точку  $A_{proj}$  и отличающейся от

системы координат  $x_{plane}, y_{plane}$  поворотом на угол  $\gamma_{0ell}$  (Рисунок 60). В проекции – это система координат  $x_{tis}, y_{tis}$  (Рисунок 56).

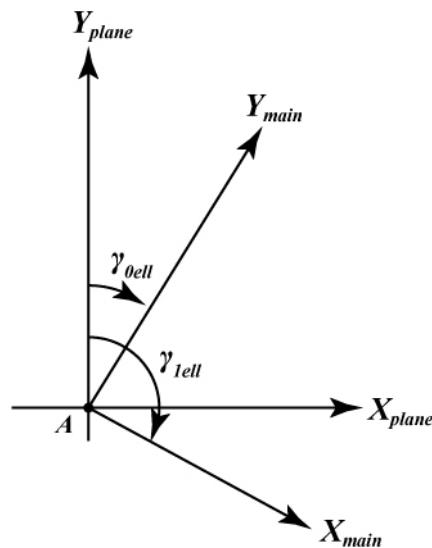


Рисунок 60. Главные направления на эллипсоиде (на касательной плоскости)

Ось  $Y_{main}$  переходит в проекции в ось  $Y_{tis}$  с масштабным коэффициентом  $K_{min}$ , а ось  $X_{main}$  переходит в проекции в ось  $X_{tis}$  с масштабным коэффициентом  $K_{max}$  (Рисунок 61). Таким образом,  $x_{tis} = x_{main}K_{max}$  и  $y_{tis} = y_{main}K_{min}$ .

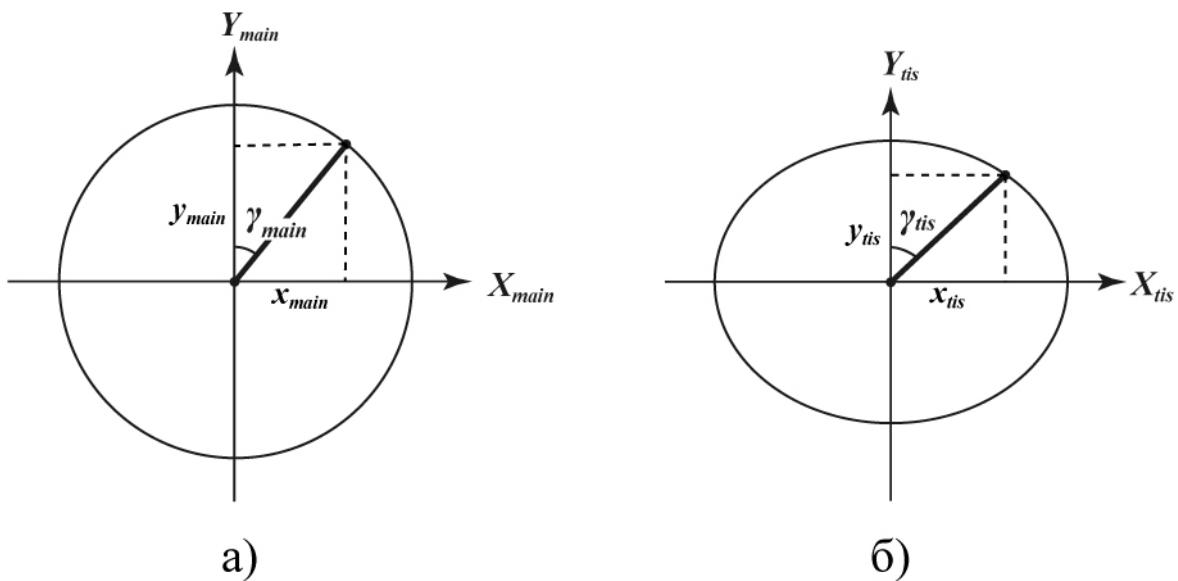


Рисунок 61. Главные направления: а) на эллипсоиде, б) в проекции

Для определения максимального искажения угла между двумя произвольно выбранными направлениями при переходе с касательной плоскости к плоскости проекции определим сначала максимальную разницу угла  $\gamma_{main}$  между осью  $Y_{main}$  и некоторым выбранным направлением и угла  $\gamma_{tis}$  между осью  $Y_{tis}$  и направлением в проекции, соответствующем выбранному на касательной плоскости. Заметим, что (Рисунок 61):

$$\operatorname{tg} \gamma_{main} = \frac{x_{main}}{y_{main}},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{tis} = \frac{x_{tis}}{y_{tis}} = \frac{x_{main} K_{max}}{y_{main} K_{min}} = \frac{K_{max}}{K_{min}} \operatorname{tg} \gamma_{main};$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\gamma_{tis} - \gamma_{main})}{\sin(\gamma_{main} + \gamma_{tis})} &= \frac{\sin \gamma_{tis} \cos \gamma_{main} - \sin \gamma_{main} \cos \gamma_{tis}}{\sin \gamma_{tis} \cos \gamma_{main} + \sin \gamma_{main} \cos \gamma_{tis}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \gamma_{tis} - \operatorname{tg} \gamma_{main}}{\operatorname{tg} \gamma_{tis} + \operatorname{tg} \gamma_{main}} = \frac{\frac{K_{max}}{K_{min}} \operatorname{tg} \gamma_{main} - \operatorname{tg} \gamma_{main}}{\operatorname{tg} \gamma_{main} + \frac{K_{max}}{K_{min}} \operatorname{tg} \gamma_{main}} = \frac{\frac{K_{max}}{K_{min}} - 1}{\frac{K_{max}}{K_{min}} + 1} = \frac{K_{max} - K_{min}}{K_{max} + K_{min}}; \\ \sin(\gamma_{tis} - \gamma_{main}) &= \frac{K_{max} - K_{min}}{K_{max} + K_{min}} \sin(\gamma_{tis} + \gamma_{main}). \end{aligned}$$

Синус разницы углов будет максимальным при равенстве единице синуса суммы, стоящем в правой части этого равенства. При выборе другого направления в касательной плоскости относительно оси  $Y_{main}$  максимальный синус разности полученного угла на касательной плоскости и соответствующего ему угла в проекции также равен:

$$\frac{K_{max} - K_{min}}{K_{max} + K_{min}}.$$

Поэтому окончательная формула максимального искажения угла между двумя произвольно выбранными направлениями при переходе с касательной плоскости к плоскости проекции имеет вид:

$$\theta_{max} = 2 \arcsin \left( \frac{K_{max} - K_{min}}{K_{max} + K_{min}} \right).$$

## **4. Различные подходы к разработке проекций**

### **трехосного эллипсоида**

#### **4.1. Проекция Карла Якоби**

Равноугольная проекция, которая называется проекцией Якоби по имени автора, выводится с использованием пространственной прямоугольной системы координат, эллиптической системы координат на поверхности трехосного эллипсоида и прямоугольной системы координат в плоскости проекции. При выводе не используются коэффициенты Гаусса. Для адаптации проекции в картографических целях предлагается методика пересчета географических координат трехосного эллипсоида в эллиптические, а затем - в прямоугольные координаты в проекции Якоби.

#### ***История проекции Якоби***

Карл Якоби в своих лекциях, прочитанных в 1842–1843 годах в Кенигсбергском университете предложил равноугольную проекцию трехосного эллипсоида. Лекции были записаны К. В. Борхардтом (C. W. Borchardt) и изданы Альфредом Клебшем (A. Clebsch) в 1866 году [vorlesungen über dynamik], переведены на многие языки, в частности на английский (Jacobi's Lectures on Dynamics). В 1936 году в СССР был издан перевод лекций на русский язык О. А. Полосухиной под редакцией серьезного специалиста в области уравнений математической физики Н.С. Кошлякова. Авторы перевода старались не только как можно точнее передать текст, но и сохранить по возможности особенности языка и характер изложения. Это важно, так как в лекциях К. Якоби интересны не только результаты, но и ход мысли автора. Например, интересующая нас картографическая проекция получается в результате использования эллиптических координат для представления элемента дуги кривой на трехосном эллипсоиде при выводе уравнения кратчайшей линии. Многие материалы, представленные в лекциях Якоби были использованы математиками при развитии теории поверхностей.

В 70–80-х годах XX века интерес к проекциям трехосного эллипсоида возник у картографов в связи с проблемой картографирования небесных тел. Равноугольная проекция Якоби рассмотрена в работах Л.М. Бугаевского, но ее формулы были признаны неудобными для практического использования из-за трудности вычисления интегралов.

## **Вывод проекции**

Для упрощения изучения лекций Якоби и одновременно чтобы избежать путаницы с нашими обозначениями используем обозначения автора с индексом “*J*”, например, у Якоби прямоугольные координаты в плоскости проекции обозначены *u* и *v*, а у нас они будут обозначаться  $u_J, v_J$ .

Эллиптические координаты  $\lambda_{J1}, \lambda_{J2}, \dots \lambda_{Jn}$ , Якоби вводит в 26-й лекции для многомерного случая с использованием уравнения

$$\frac{x_{J1}^2}{a_{J1} + \lambda_J} + \frac{x_{J2}^2}{a_{J2} + \lambda_J} + \dots + \frac{x_{Jn}^2}{a_{Jn} + \lambda_J} = 1 \quad (4.1.1)$$

и исследует их аналитически. Для нашей задачи существенна определенная в этой лекции связь переменных  $x_J$  и  $\lambda_J$  и соотношение квадратов их дифференциалов. В 27-й лекции дана геометрическая интерпретация результатов предыдущей лекции, примененных к плоскости и трехмерному пространству. Для трехмерного случая различным диапазонам изменения  $\lambda_J$  соответствуют три системы софокусных поверхностей второго порядка (однополостные гиперболоиды, двуполостные гиперболоиды, трехосные эллипсоиды). Через каждую точку трехмерного пространства проходит один однополостный гиперболоид, один двуполостный гиперболоид и один трехосный эллипсоид. Эти поверхности пересекаются друг с другом под прямым углом. В соответствии с этим квадрат элемента дуги произвольной кривой, выраженный через дифференциалы от эллиптических координат, не содержит произведений дифференциалов двух различных величин. Более подробно геометрический смысл эллиптических координат рассмотрен в работе В. Ф. Кагана.

В 28-й лекции рассмотрена ортогональная система эллиптических координат на поверхности трехосного эллипсоида.

## Уравнение

$$\frac{x_{J1}^2}{a_{J1} + \lambda_J} + \frac{x_{J2}^2}{a_{J2} + \lambda_J} + \frac{x_{J3}^2}{a_{J3} + \lambda_J} = 1, \quad (4.1.2)$$

где  $a_{J1} < a_{J2} < a_{J3}$  при заданных значениях прямоугольных координат имеет три действительных корня:  $\lambda_{J1} > \lambda_{J2} > \lambda_{J3}$ . Корень  $\lambda_{J1}$  соответствует эллипсоиду,  $\lambda_{J2}$  соответствует однополостному гиперболоиду,  $\lambda_{J3}$  соответствует двуполостному гиперболоиду. Для поверхности заданного эллипса значение  $\lambda_{J1}$  постоянно. После получения формулы для квадрата элемента дуги произвольной кривой на эллипсоиде

$$ds^2 = \frac{1}{4} \frac{(\lambda_{J2} - \lambda_{J1})(\lambda_{J2} - \lambda_{J3})}{(a_{J1} + \lambda_{J2})(a_{J2} + \lambda_{J2})(a_{J3} + \lambda_{J2})} d\lambda_{J2}^2 + \\ + \frac{1}{4} \frac{(\lambda_{J3} - \lambda_{J1})(\lambda_{J3} - \lambda_{J2})}{(a_{J1} + \lambda_{J3})(a_{J2} + \lambda_{J3})(a_{J3} + \lambda_{J3})} d\lambda_{J3}^2. \quad (4.1.3)$$

Якоби определяет соотношение элемента дуги в плоскости проекции  $d\sigma_J$  и на эллипсоиде  $ds_J$ :

$$d\sigma_J = \frac{2}{\sqrt{\lambda_{J2} - \lambda_{J3}}} ds_J \quad (4.1.4)$$

и выводит формулы равноугольной проекции:

$$u_J = \int d\lambda_{J2} \sqrt{\frac{\lambda_{J2} - \lambda_{J1}}{(a_{J1} + \lambda_{J2})(a_{J2} + \lambda_{J2})(a_{J3} + \lambda_{J2})}}; \\ v_J = \int d\lambda_{J3} \sqrt{\frac{\lambda_{J1} - \lambda_{J3}}{(a_{J1} + \lambda_{J3})(a_{J2} + \lambda_{J3})(a_{J3} + \lambda_{J3})}}. \quad (4.1.5)$$

Здесь  $u_J$  и  $v_J$  – прямоугольные координаты на плоскости.

Заметим, что величины  $\lambda_{J1}, \lambda_{J2}, \lambda_{J3}, \dots \lambda_{Jn}$  измеряются в единицах  $x^2$ , величина  $ds_J$  измеряется в единицах  $x$  (единицы осей трехосного эллипсоида),  $\frac{2}{\sqrt{\lambda_{J2}-\lambda_{J3}}}$  измеряется в величинах  $\frac{1}{x}$ , величины  $d\sigma_J, u_J$  и  $v_J$  безразмерны.

### ***Системы координат и координатные линии***

В дальнейшем прямоугольные координаты в плоскости проекции обозначим  $x_{proj}$  и  $y_{proj}$  также как и для проекций, описанных выше. Изменим обозначения и эллиптических координат, так как буква  $\lambda$  обычно используется для обозначения долготы и назовем их  $u, v$ . Поскольку при составлении карт традиционно используется картографическая сетка, мы принимаем угловые планетоцентрические координаты ( $\Phi$  - широта,  $\lambda$  - долгота) в качестве исходных (Рисунок 5).

В новых (более привычных) обозначениях уравнение (4.1.1) приобретает вид:

$$\frac{x^2}{a^2-u} + \frac{y^2}{b^2-u} + \frac{z^2}{c^2-u} = 1 , \quad (4.1.6)$$

где  $c^2 = a_{J1} + \lambda_{J1}$ ,  $b^2 = a_{J2} + \lambda_{J1}$ ,  $a^2 = a_{J3} + \lambda_{J1}$  – квадраты полуосей трехосного эллипсоида,  $x = x_{J3}$ ,  $y = x_{J2}$ ,  $z = x_{J1}$  – пространственные прямоугольные координаты, а  $u = \lambda_{J1} - \lambda_J$ .

При заданных пространственных прямоугольных координатах эллиптические координаты получаются решением уравнения (4.1.6) относительно  $u$ .

$$\begin{aligned} x^2(b^2-u)(c^2-u) + y^2(a^2-u)(c^2-u) + z^2(a^2-u)(b^2-u) \\ = (a^2-u)(b^2-u)(c^2-u); \\ u^3 + u^2(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2) + \\ + u(-x^2b^2 - x^2c^2 - y^2a^2 - y^2c^2 - z^2a^2 - z^2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) + \\ + x^2b^2c^2 + y^2a^2c^2 + z^2a^2b^2 - a^2b^2c^2 = 0 . \end{aligned}$$

На поверхности эллипсоида  $x^2b^2c^2 + y^2a^2c^2 + z^2a^2b^2 - a^2b^2c^2 = 0$ , то есть один из корней  $u_3 = 0$

Решаем квадратное уравнение при  $u$  не равном нулю.

$$u^2 + p_{eq}u + q_{eq} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} p_{eq} &= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2, \\ q_{eq} &= -x^2b^2 - x^2c^2 - y^2a^2 - y^2c^2 - z^2a^2 - z^2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Получаем два корня

$$u_1 = \frac{-p_{eq} + \sqrt{p_{eq}^2 - 4q_{eq}}}{2} \text{ и } u_2 = \frac{-p_{eq} - \sqrt{p_{eq}^2 - 4q_{eq}}}{2}.$$

Обозначим  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ . Интегралы из формул (4.1.5) приобретают вид:

$$x_{proj} = \int_{b^2}^{u_i} \sqrt{\frac{u}{(c^2 - u)(b^2 - u)(a^2 - u)}} du;$$

$$(4.1.8)$$

$$y_{proj} = \int_{c^2}^{v_i} \sqrt{\frac{-v}{(c^2 - v)(b^2 - v)(a^2 - v)}} dv.$$

Подчеркнем, что  $x_{proj}$  и  $y_{proj}$  безразмерные величины. Для создания конкретных карт необходимо выбрать единицы измерения. Для этого умножаем координаты на величину большой полуоси эллипсоида  $a$ .

Интеграл для вычисления вертикальной и горизонтальной координат в проекции Якоби выбираем исходя из того, что в проекции ось  $X_{proj}$  направлена горизонтально вправо, а ось  $Y_{proj}$  вертикально вверх.

Пересечения поверхности эллипсоида с однополостными гиперболоидами задают на эллипсоиде систему кривых, для которых постоянно значение  $u$ , а  $v$  изменяется от  $c^2$  до  $b^2$ . Пересечения поверхности эллипсоида с двуполостными гиперболоидами задают систему кривых, для которых постоянно значение  $v$ , а  $u$  изменяется от  $b^2$  до  $a^2$ . Вместе эти

системы задают координатные линии, ортогональные друг другу, т.е. ортогональную систему криволинейных координат. На рисунке 62 показана геометрическая проекция координатных линий эллиптической системы на плоскость  $XZ$ .

На рисунке 63 показаны эти координатные линии в проекции Якоби на плоскости  $X_{proj}Y_{proj}$  на фоне картографической сетки. Шаг координатной сетки постоянен по  $u$  и постоянен по  $v$ , но расстояние между линиями в проекции не одинаково. Вид сетки является следствием того, что  $x_{proj}$  зависит только от  $u$  а,  $y_{proj}$  только от  $v$ , но эта зависимость не линейна.

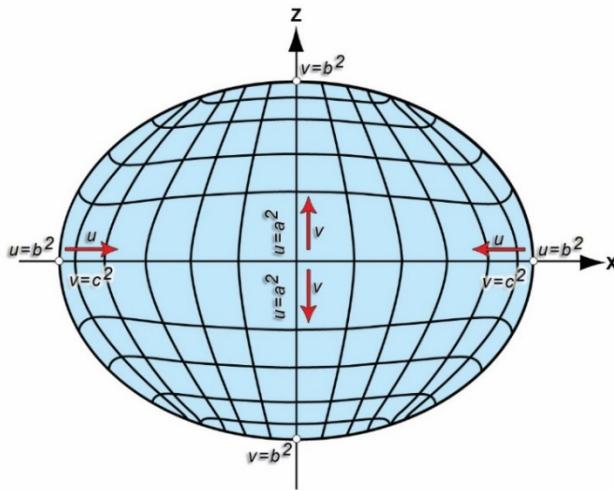


Рисунок 62. Проекция координатных линий эллиптической системы  
на плоскость  $XZ$

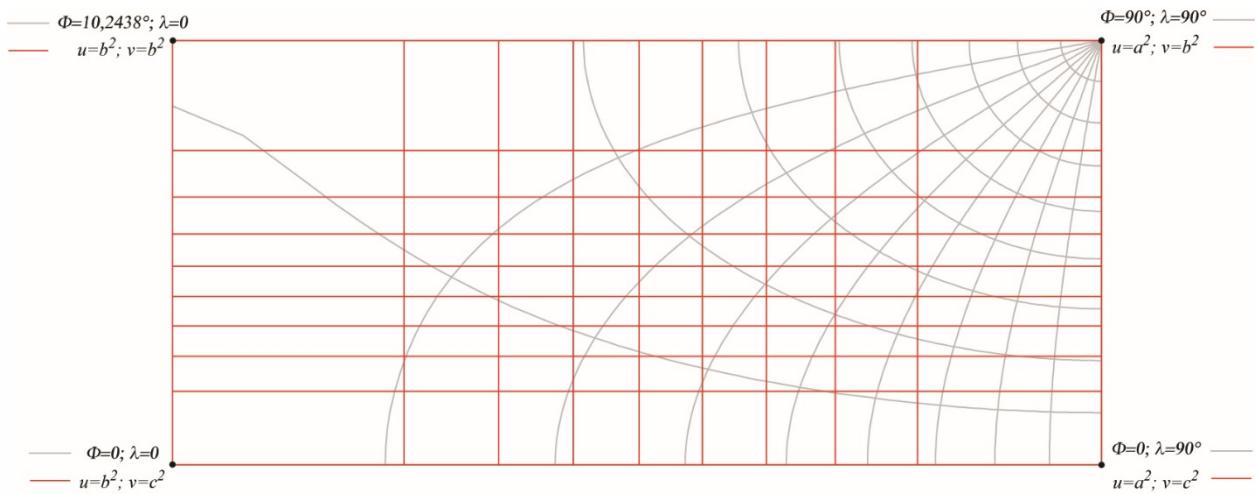


Рисунок 63. Координатные линии эллиптической системы (красный цвет)  
и системы планетоцентрических координат (серый цвет) в проекции Якоби

Поскольку при выводе формул используются квадраты значений трехмерных прямоугольных координат, значения эллиптических координат и соответственно прямоугольные координаты в проекции Якоби получим для одной восьмой части поверхности эллипсоида. Для остальных частей поверхности произведем отражение координат в соответствии со знаком широты и диапазоном изменения долготы.

### ***Особенности вычисления интегралов для практической реализации проекции***

Верхние пределы интегрирования  $u_i, v_i$  в формулах (4.1.8) вычисляются для каждой точки с заданной широтой и долготой. Одновременно осуществляется переход от широты и долготы к пространственным прямоугольным координатам по формулам (1.1.3), а затем от пространственных прямоугольных координат к эллиптическим, решая уравнение (4.1.6). Интегрируя формулы (4.1.8), получаем прямоугольные координаты в проекции.

Интегралы в формулах (4.1.8) целесообразно выразить через эллиптические интегралы первого и третьего рода (Прудников и др., 1986 в разделе 1.2.35 – формула 8 и в разделе 1.2.36 – формула 8) :

$$x_{proj} = \int_{b^2}^{u_i} \sqrt{\frac{u}{(c^2 - u)(b^2 - u)(a^2 - u)}} du = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)b^2}} \cdot \\ \cdot [(b^2 - c^2)I_3(\varphi_{integi}, k_2, k_1) + c^2 I_1(\varphi_{integi}, k_1)]; \quad (4.1.9)$$

$$y_{proj} = \int_{c^2}^{v_i} \sqrt{\frac{-v}{(c^2 - v)(b^2 - v)(a^2 - v)}} dv = \\ = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)b^2}} \left[ (b^2 - a^2)I_3\left(\frac{\pi}{2}, k_2, k_1\right) + a^2 I_1\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) \right] - \\ - \frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)b^2}} \left[ (b^2 - a^2)I_3(\varphi_{integi}, k_2, k_1) + a^2 I_1(\varphi_{integi}, k_1) \right]. \quad (4.1.10)$$

Вычисление вертикальной координаты как разности интегралов связано с тем, что в формуле 8 раздела 1.2.36 верхний предел интегрирования равен максимальному значению, а нижний – текущему значению эллиптической координаты.

Чтобы избежать путаницы с нашими обозначениями используем обозначения справочника Прудникова с индексом “*integ*”. Здесь  $\varphi_{\text{integ}}$  – переменная интегрирования, а  $k_1, k_2$  – постоянные параметры.  $\varphi_{\text{integi}}$  – верхний предел интегрирования для эллиптических интегралов. При интегрировании формулы (4.1.9)

$$\varphi_{\text{integi}} = \arcsin \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(u - b^2)}{(a^2 - b^2)(u - c^2)}}; \quad k_1 = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)c^2}{(a^2 - c^2)b^2}}; \quad k_2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

При интегрировании формулы (4.1.10)

$$\varphi_{\text{integi}} = \arcsin \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(a^2 - v)}}; \quad k_1 = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2)a^2}{(a^2 - c^2)b^2}}; \quad k_2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Эллиптический интеграл 1-го рода:

$$I_1(\varphi_{\text{integi}}, k_1) = \int_0^{\varphi_{\text{integi}}} \frac{d\varphi_{\text{integ}}}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_{\text{integ}}}}.$$

Эллиптический интеграл 3-го рода:

$$I_3(\varphi_{\text{integi}}, k_2, k_1) = \int_0^{\varphi_{\text{integi}}} \frac{d\varphi_{\text{integ}}}{(1 - k_2 \sin^2 \varphi_{\text{integ}}) \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_{\text{integ}}}}.$$

При интегрировании данных выражений получаем координаты в равноугольной проекции Якоби в диапазоне широты от экватора до «северного» полюса и долготы от начального меридиана до меридиана  $90^\circ$ . Проведем отражение координат в соответствии с действительным положением точки на трехосном эллипсоиде.

В том случае, когда  $u = b^2$  и  $v = b^2$ , получаются так называемые круговые точки эллипсоида в плоскости  $y=0$ . В этих точках, подставляя в зависимости выражения (4.1.7)  $p_{eq} = -2b^2$ ,  $q_{eq} = b^4$  и  $y^2 = 0$ , получим следующее выражение для  $x^2$ :

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} = \frac{a^2 e_{ab}^2}{e_{ac}^2}. \quad (4.1.11)$$

Учитывая, что долгота равна нулю, из формул (1.1.3) и (1.1.5) получаем:

$$x^2 = r^2 \cos^2 \Phi = \frac{a^2(1 - e_{ac}^2)}{1 - e_{ac}^2 \cos^2 \Phi} \cos^2 \Phi. \quad (4.1.12)$$

Приравняв результаты выражений (4.1.11) и (4.1.12), получаем формулу для определения широты круговых точек:

$$\frac{a^2(1 - e_{ac}^2)}{1 - e_{ac}^2 \cos^2 \Phi} \cos^2 \Phi = \frac{a^2 e_{ab}^2}{e_{ac}^2};$$

$$e_{ac}^2 \cos^2 \Phi (1 - e_{ac}^2) = e_{ab}^2 - e_{ab}^2 e_{ac}^2 \cos^2 \Phi;$$

$$\cos^2 \Phi = \frac{e_{ab}^2}{e_{ac}^2 (1 - e_{ac}^2 + e_{ab}^2)}.$$

### ***Картографирование***

Проекция существует во всех точках эллипсоида. Значение координат проекции нигде не равно бесконечности. Однако на начальном меридиане и противоположном ему от экватора до круговой точки свойство равноугольности не соблюдается. Кроме того, в круговых точках масштаб изображения равен бесконечности. На рисунке 64 представлена картографическая сетка для астероида 25143 Итокава в равноугольной проекции Якоби с параметрами аппроксимирующего его трехосного эллипсоида  $a = 267.5$  м,  $b = 147$  м,  $c = 104.5$  м, с параллелями, проходящими через круговые точки. Широта в градусах круговой точки при таких параметрах равна  $\pm 10.2438^\circ$ . Выбран разрыв изображения по начальному меридиану и противоположному ему между экватором и круговой точкой.

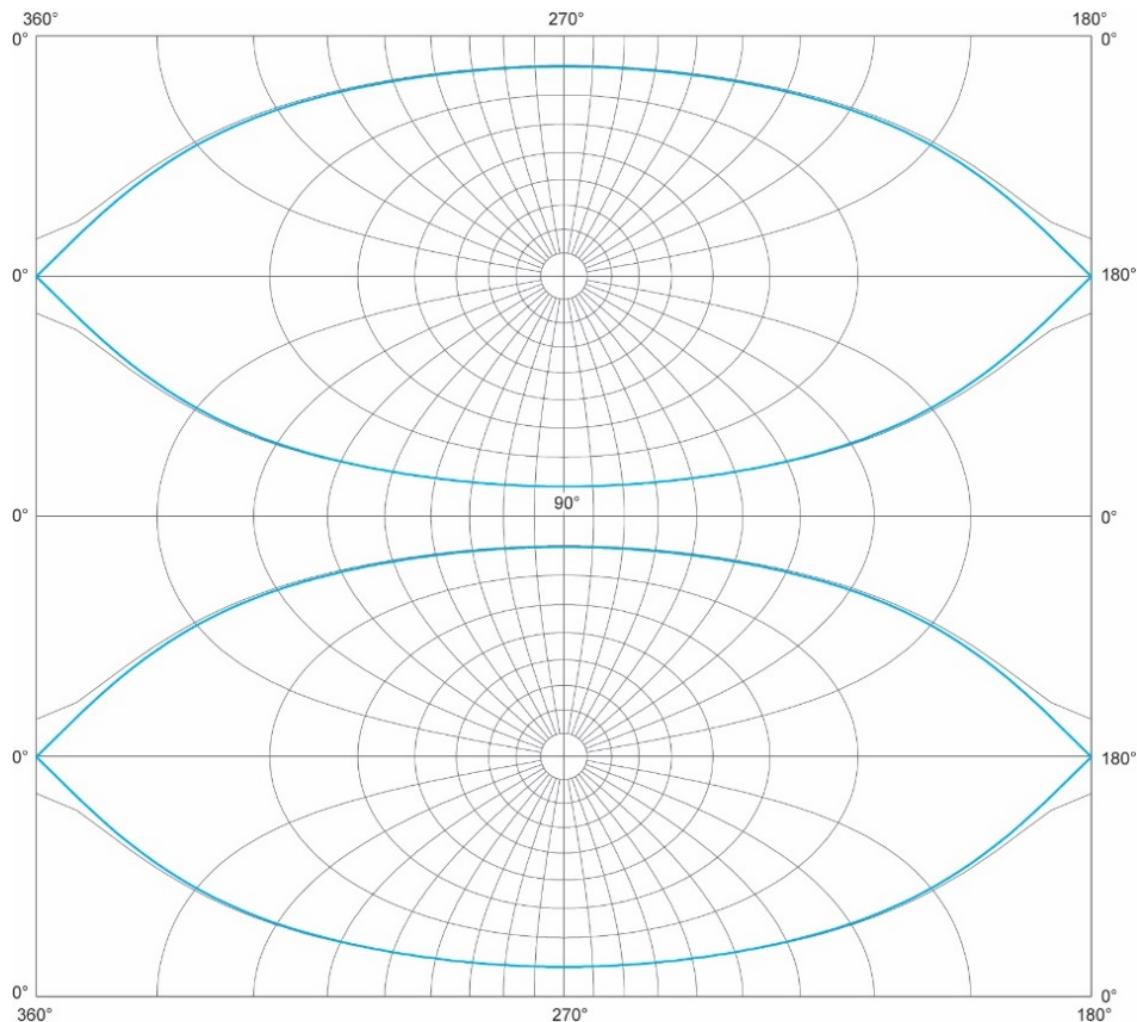


Рисунок 64. Картографическая сетка в равноугольной проекции Якоби.

Синим цветом обозначены параллели круговых точек

На рисунке 65 представлена карта поверхности астероида 25143 Итокава в равноугольной проекции Якоби.

Проекция Якоби основана на соотношении осей  $a>b>c$ , поэтому когда экваториальное сжатие равно нулю или полярное сжатие равно экваториальному следует использовать другие проекции.

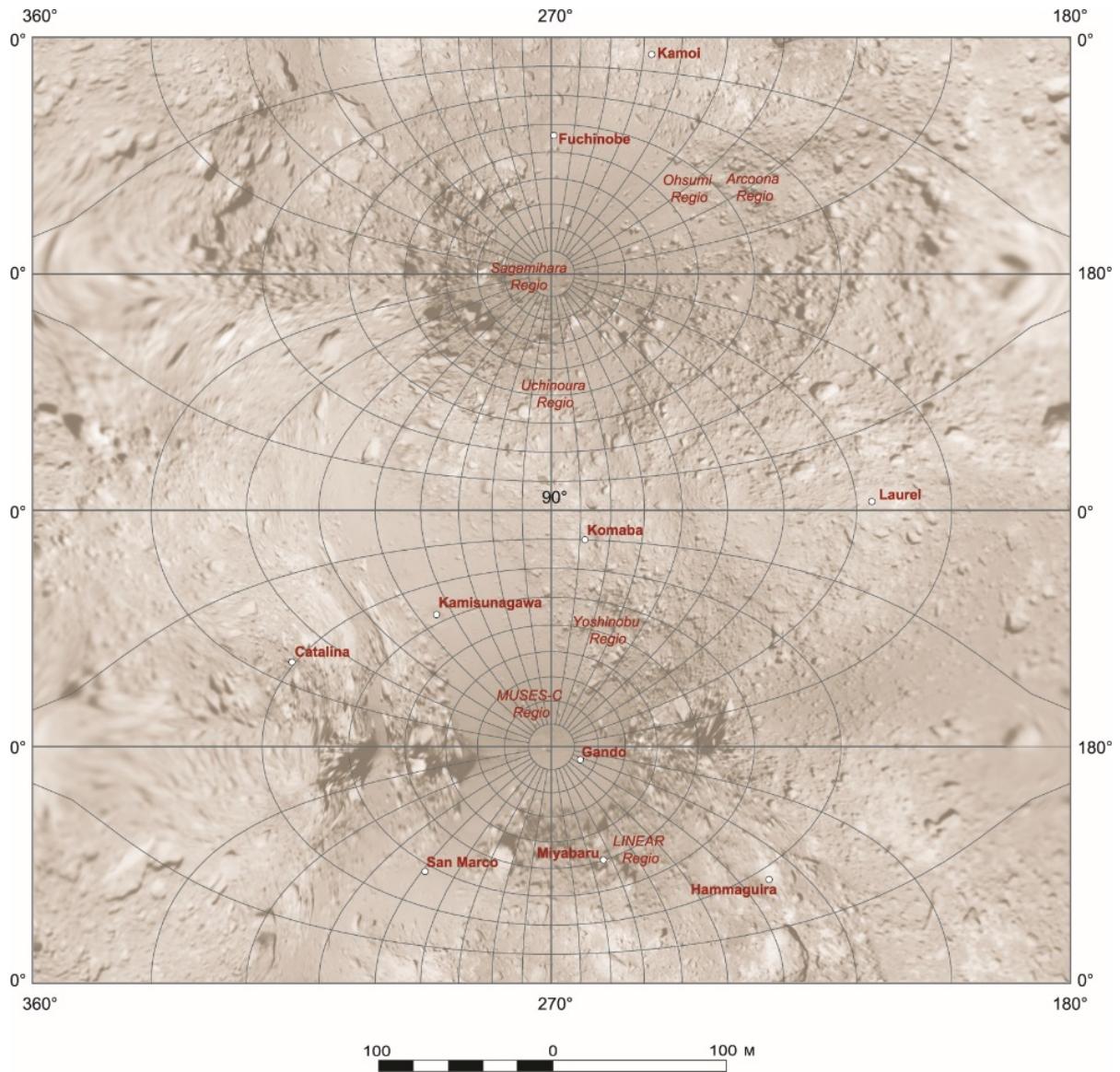


Рисунок 65. Карта поверхности астероида 25143 Итокава  
в равноугольной проекции Якоби  
(исходная фотомозаика подготовлена проф. Ф. Дж. Стуком)

### ***Искажения в проекции Якоби***

Для равноугольной проекции частный масштаб длин по любому направлению, в том числе по меридиану и параллели для каждой точки постоянен. В соответствии со способом вывода проекции соотношение элемента дуги на плоскости проекции:

$$\frac{dl_{proj}}{dl} = \frac{2a}{\sqrt{p_{eq}^2 - 4q_{eq}}}.$$

где выражения для  $p_{eq}$  и  $q_{eq}$  вычисляются по формулам (4.1.7).

Соответственно масштаб площадей равен:

$$\left(\frac{dl_{proj}}{dl}\right)^2 = \frac{4a^2}{p_{eq}^2 - 4q_{eq}}.$$

Эллипс искажений имеет форму окружности.

## 4.2. Равноугольные и близкие к ним проекции трехосного эллипсоида

Трехосный эллипсoid давно используется математиками при разработке теории поверхностей как наиболее простой вариант многопараметрической поверхности, а картографы при выводе проекций трехосного эллипсаода зачастую отталкиваются от сферы или эллипсаода вращения.

Равноугольная проекция трехосного эллипсаода на плоскость, предложенная К. Якоби, подробно рассмотрена в параграфе 4.1. Для этой проекции были использованы эллиптические координаты, в дальнейшем получившие известность как координаты Ламе, хотя очень похоже, что именно Якоби впервые применил такую систему координат, или, по крайней мере, использовал ее независимо от других математиков. Многие картографы ссылаются на то, что в лекциях получено аналитическое выражение подобия бесконечно малых фигур через пропорциональность бесконечно малых длин на поверхности эллипсаода и на плоскости. Однако проекция Якоби в силу своей сложности не была до недавнего времени реализована картографами. В связи с этим, когда возникла необходимость использования трехосного эллипсаода в качестве аппроксимирующей поверхности для небесных тел, продолжились попытки получения равноугольных и близких к ним проекций с более простыми формулами. При этом вводились новые способы задания широты.

Л. М. Бугаевский определил приведенную широту для каждого эллипса меридианного сечения трехосного эллипсаода как приведенную широту эллипсаода вращения, образованного этим эллипсом, и использовал этот способ задания широты при выводе своих формул. На рисунке 66 представлен эллипс меридианного сечения трехосного эллипсаода в плоскости  $WZ$  с планетоцентрической широтой  $\Phi$  и приведенной широтой  $u_{bug}$ . Определим тангенс приведенной широты с учетом формулы (4.4.2):

$$\operatorname{tg} u_{bug} = \frac{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}}{r_1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{z_1^2}{c^2}} - 1} = \frac{z_1}{c \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}}.$$

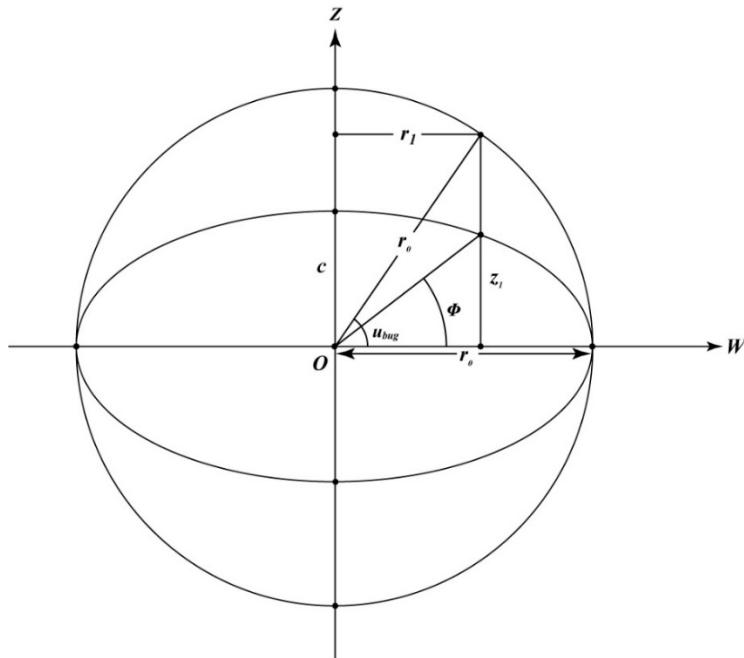


Рисунок 66. Меридианное сечение трехосного эллипсоида в плоскости  $WZ$

Дж. Снайдер при разработке равноугольной проекции трехосного эллипсоида ввел свой способ задания широты. Параллелью постоянной широты по Снайдеру является эллипс пересечения трехосного эллипсоида с плоскостью, параллельной экваториальной. Такой эллипс подробно описан параграфе 2.4, как линия касания трехосного эллипсоида и прямого эллиптического конуса. Широту параллели Снайдера определил как планетоцентрическую широту точки пересечения параллели с меридианом  $90^\circ$ . Долгота определяется обычным способом. На рисунке 67 представлена проекция на плоскость  $YZ$  эллипса сечения эллипсоида плоскостью, соответствующей выбранному значению  $z = z_1$ .

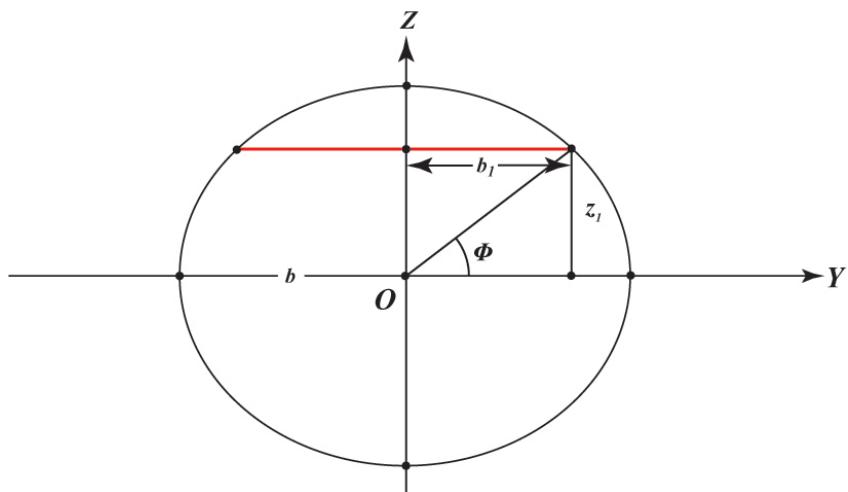


Рисунок 67. Проекция параллели Снайдера (нанесена красным цветом) на плоскость  $YZ$

Соотношения угловых координат по Снайдеру и пространственных прямоугольных координат с учетом формулы (2.4.2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \Phi_{Snyder} &= \frac{z_1}{b_1} = \frac{z_1}{b \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}} ; \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{y}{x} .\end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, что параллели Снайдера являются линиями постоянной приведенной широты по Бугаевскому:

$$\operatorname{tg} \Phi_{Snyder} = \frac{c}{b} \operatorname{tg} u_{bug} .$$

При анализе подходов к построению равноугольных проекций трехосного эллипсоида не так просто определить последовательность и взаимосвязь работ, сделанных разными учеными. Теоретическое обоснование проекции, вычисление координат и построение картографической сетки, и, наконец, составление и издание карты в новой проекции – эти этапы освоения картографической проекции могут быть растянуты во времени. Кроме того, авторы, ссылаясь друг на друга, предпочитают использовать более поздние работы как более доступные и более завершенные. Так, например, при упоминании проекции Бугаевского в настоящее время обычно ссылаются либо на его последнюю книгу 1999 года, в которой наиболее полно дана теория проекции, либо на Атлас планет Земной группы и их спутников 1992 года с картами Фобоса в этой проекции, дополненной азимутальной проекцией с другим характером искажений (компоновка К. Б. Шингаревой). Напомним, что Л. М. Бугаевский начал заниматься проекциями трехосного эллипсоида еще до того, как появились данные о Фобосе, полученные с космических аппаратов. Его докторская диссертация, написанная в 1971 году, называется «Проблемы изыскания и использования равноугольных и близких к ним проекций для целей картографии и геодезии». Выведенная Л. М. Бугаевским проекция и названная им равноугольной цилиндрической подробно описана в параграфе 2.2.

В 1984 году Б.Б. Серапинас предложил свой способ получения равноугольной цилиндрической проекции, основанный на пропорциональности коэффициентов Гаусса на трех-

основом эллипсоиде и на плоскости. Если бы такая проекция существовала, то все рассмотренные в этой работе соотношения должны были бы выполняться. Но при выводе окончательных формул проекции Б. Б. Серапинас использовал следующее соотношение (в наших обозначениях и нашей системе координат плоскости):

$$dy_{proj} = \frac{\sqrt{G_0}\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi .$$

Интегрирование предполагалось только по  $\Phi$ .

То есть окончательная функция для вычисления вертикальной координаты соответствует формуле (2.2.12), выведенной для цилиндрической проекции меридианного сечения (проекция Бугаевского). В приложении 3 показано, что значение вертикальной координаты в этой проекции при любом значении широты при долготе равной нулю больше, чем при долготе равной  $90^\circ$ . Из этого следует, что в диапазоне изменения долготы от нуля до  $90^\circ$  существуют значения долготы, при которых производная вертикальной координаты по долготе отрицательна. Однако, Б. Б. Серапинас также использует соотношение:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \lambda} = \frac{\partial x_{proj}}{\partial \lambda} \operatorname{ctg} \omega.$$

Из этого соотношения следует, что производная по долготе положительна.

Интересно, что, несмотря на различные подходы к выводу формул проекции, картографические сетки в проекциях Бугаевского и Серапинаса для карты Фобоса практически совпадают.

В 1985 году Дж. Снайдер вывел приближенные формулы равноугольной цилиндрической проекции с прямолинейными меридианами  $0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  и прямолинейным экватором. Остальные меридианы и параллели имели небольшую кривизну. В качестве необходимого и достаточного условия равноугольности проекции автор определяет в каждой точке равенство масштабов по меридиану и параллели и равенство углов между меридианом и параллелью. Проекция была получена модификацией проекции Меркатора для сферы и предназначалась для тел, описываемых эллипсоидами с малым сжатием. Снайдер использовал тригонометрические ряды, коэффициенты которых вычислялись методом

наименьших квадратов. Ряды быстро сходятся для эллипсоидов с малым сжатием. Подобная технология может быть распространена на эллипсоиды с большим сжатием, но это требует дополнительных исследований. Все расчеты проводились с использованием прямоугольных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Проекция не получила практического применения, так как для каждого конкретного набора параметров трехосного эллипсоида требуется новое вычисление коэффициентов, входящих в формулы проекции, и проверка точности результата. Таким образом, для создания карты в такой проекции необходимо полностью восстановить технологию Снайдера.

Ввиду невозможности построения строго равноугольной проекции трехосного эллипсоида с горизонтальной координатой, зависящей только от долготы, и вертикальной координаты, зависящей от широты и долготы (параграф 2.2), при выводе равноугольной или близкой к ней проекции не обеспечивается выполнение какого-либо свойства проекции. Получается, что проекции Л. М. Бугаевского и Б. Б. Серапинаса не совсем равноугольные, а проекция Дж. Снайдера не совсем цилиндрическая.

В 2019 году Павел Педзич представил способ вычисления равноугольной проекции трехосного эллипсоида с малыми искажениями. Проекция основана на теореме Чебышева, согласно которой наименьшими искажениями обладают те равноугольные проекции, в которых линейный масштаб на границе проецируемой области является постоянным. Автор вывел формулы для равноугольных координат на трехосном эллипсоиде и дал краткое описание метода определения коэффициентов степенного ряда комплексной переменной, аппроксимирующего проекцию, отвечающую критерию Чебышева. Также были представлены результаты экспериментальных расчетов для проекции кратера Стикни на Фобосе. Предлагаемая проекция предназначена для картографирования небольших участков поверхности.

### 4.3. Перспективные проекции трехосного эллипсоида

Для картографирования небесных тел широко используются перспективные проекции шара. Известны случаи применения перспективно-азимутальных проекций для картографирования Луны и других небесных тел. Теория перспективных проекций трехосного эллипсоида была разработана А. В. Кондрячук в ее кандидатской диссертации. Перспективные проекции являются проекциями в геометрическом смысле этого слова. Для их получения используется визирный луч, идущий из точки зрения, и традиционные вспомогательные разворачивающиеся поверхности такие как цилиндр, конус и плоскость. Формулы проекций получаются в результате совместного решения уравнений, описывающих вспомогательную поверхность и визирный луч. Такие формулы содержат тригонометрические функции и не требуют вычисления интегралов, что упрощает практическое использование предложенных проекций. А. В. Кондрячук разработаны комбинированные проекции эллипсоида вращения и трехосного эллипсоида на основе перспективных проекций с позитивным и негативным изображением. Предложен способ определения оптимального соотношения таких проекций. На основании расчетов прямоугольных координат были построены варианты картографических сеток представленных в диссертации проекций для спутника Юпитера Амальтеи, аппроксимируемого трехосным эллипсоидом с полуосами  $a=135000$  м,  $b=85000$  м,  $c=77500$  м. Примеры сеток из автореферата диссертации приведены на рисунке 68 (рисунок 11 в автореферате), рисунок 69 (рисунок 12 в автореферате).

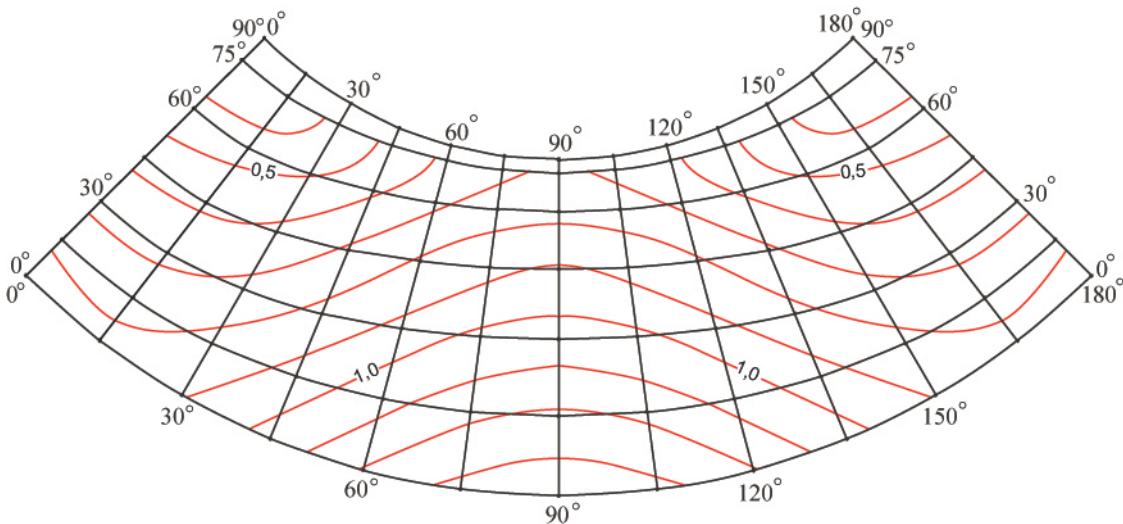


Рисунок 68. Сетка перспективной конической проекции с точкой зрения, лежащей в бесконечности, с изоколами масштабов площадей

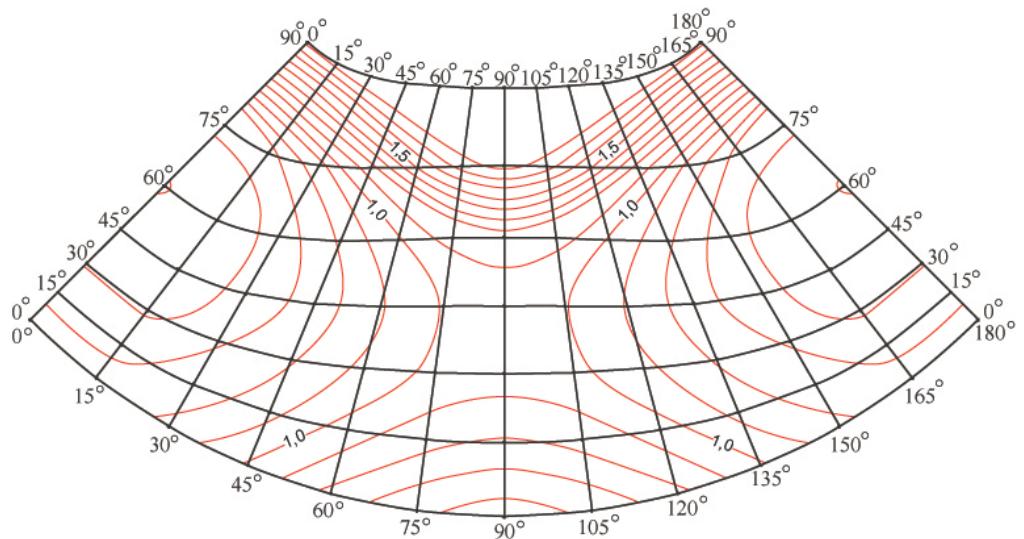


Рисунок 69. Сетка перспективной конической проекции с точкой зрения, лежащей на поверхности эллипсоида в плоскости экватора, с изоколами масштабов площадей

При определении свойств проекций используются традиционные критерии отечественной математической картографии, в частности критерий Конусовой. Разделение проекций на цилиндрические, конические и азимутальные согласуется с предложенной в параграфе 2.1 классификацией проекций трехосного эллипсоида по виду картографической сетки.

## Приложение 1. Вывод формул коэффициентов Гаусса первой квадратичной формы и их производных по широте и долготе

Вывод осуществляется в полярной планетоцентрической системе координат, определенной в параграфе 1.1. При этом используются зависимости (1.1.3), (1.1.5), (1.1.6) и (1.3.3). Для удобства изложения повторим определение коэффициентов Гаусса (1.3.3):

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)^2 ;$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2 ;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda}$$

и зависимости (1.1.3):

$$x = r \cos \Phi \cos \lambda ; \quad y = r \cos \Phi \sin \lambda ; \quad z = r \sin \Phi .$$

Здесь в соответствии с (1.1.5):

$$r = \frac{a}{\sqrt{t}} ;$$

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2}$$

и на экваторе в соответствии с (1.1.6):

$$r_0 = \frac{a}{\sqrt{t_0}} ;$$

$$t_0 = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} .$$

Для получения коэффициентов Гаусса продифференцируем переменные  $x, y, z, r, t$  по широте и долготе и переменную  $t_0$  по долготе:

$$\frac{\partial x}{\partial \Phi} = \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi \right) \cos \lambda ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Phi} = \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi \right) \sin \lambda ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Phi} = \frac{\partial r}{\partial \Phi} \sin \Phi + r \cos \Phi ;$$

$$\frac{\partial r}{\partial \Phi} = -a \frac{t_\phi}{2t^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$\begin{aligned} t_\phi &= -2 \sin \Phi \cos \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) = \\ &= -\sin 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right); \end{aligned} \quad (\Pi. 1.1.)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos \lambda - r \sin \lambda \right) \cos \Phi ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \lambda + r \cos \lambda \right) \cos \Phi ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \Phi ;$$

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = -a \frac{t_\lambda}{2t^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$t_\lambda = -2 \cos^2 \Phi \sin \lambda \cos \lambda + \frac{2 \cos^2 \Phi \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2} =$$

$$\begin{aligned} &= -2 \cos^2 \Phi \sin \lambda \cos \lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right) = \\ &= -\cos^2 \Phi \sin 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right); \end{aligned} \quad (\Pi. 1.2.)$$

$$t_{0\lambda} = -\sin 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right). \quad (\Pi. 1.3.)$$

Получение коэффициента Гаусса  $E$ :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi\right)^2 \cos^2 \lambda ;$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi\right)^2 \sin^2 \lambda ;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \sin \Phi + r \cos \Phi\right)^2 ;$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi\right)^2 \cos^2 \lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi\right)^2 \sin^2 \lambda +$$

$$+ \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \sin \Phi + r \cos \Phi\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi} \sin \Phi + r \cos \Phi\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2 \cos^2 \Phi - 2 \frac{\partial r}{\partial \Phi} r \sin \Phi \cos \Phi + r^2 \sin^2 \Phi + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2 \sin^2 \Phi +$$

$$+ 2 \frac{\partial r}{\partial \Phi} r \sin \Phi \cos \Phi + r^2 \cos^2 \Phi .$$

Таким образом, коэффициент Гаусса  $E$  примет вид:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2 + r^2 = \frac{a^2 t_\Phi^2}{4t^3} + \frac{a^2}{t} = a^2 \frac{4t^2 + t_\Phi^2}{4t^3} = \\ &= a^2 \frac{4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2}{4t^3} . \end{aligned} \quad (\Pi. 1.4.)$$

Получение коэффициента Гаусса  $G$ :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos \lambda - r \sin \lambda\right)^2 \cos^2 \Phi = \\
 &= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \cos^2 \lambda - 2 \frac{\partial r}{\partial \lambda} r \sin \lambda \cos \lambda + r^2 \sin^2 \lambda\right] \cos^2 \Phi ; \\
 \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \lambda + r \cos \lambda\right)^2 \cos^2 \Phi = \\
 &= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \sin^2 \lambda + 2 \frac{\partial r}{\partial \lambda} r \sin \lambda \cos \lambda + r^2 \cos^2 \lambda\right] \cos^2 \Phi ; \\
 \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \sin^2 \Phi ; \\
 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 &= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \cos^2 \lambda - 2 \frac{\partial r}{\partial \lambda} r \sin \lambda \cos \lambda + r^2 \sin^2 \lambda\right] \cos^2 \Phi + \\
 &+ \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \sin^2 \lambda + 2 \frac{\partial r}{\partial \lambda} r \sin \lambda \cos \lambda + r^2 \cos^2 \lambda\right] \cos^2 \Phi + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \sin^2 \Phi = \\
 &= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 + r^2\right] \cos^2 \Phi + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \sin^2 \Phi = \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 + r^2 \cos^2 \Phi .
 \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент Гаусса  $G$  примет вид:

$$\begin{aligned}
 G &= \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 + r^2 \cos^2 \Phi = \frac{a^2 t_\lambda^2}{4t^3} + \frac{a^2 \cos^2 \Phi}{t} = a^2 \frac{4t^2 \cos^2 \Phi + t_\lambda^2}{4t^3} = \\
 &= a^2 \cos^2 \Phi \frac{4t^2 + \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2}\right)^2}{4t^3} . \quad (\text{П. 1.5.})
 \end{aligned}$$

И на экваторе

$$G_0 = a^2 \frac{4t_0^2 + \sin^2 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2}\right)^2}{4t_0^3} . \quad (\text{П. 1.6})$$

Получение коэффициента Гаусса  $F$ :

$$\frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi \right) \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos \lambda - r \sin \lambda \right) \cos \Phi \cos \lambda =$$

$$= \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos^2 \Phi - r \sin \Phi \cos \Phi \right) \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos^2 \lambda - r \sin \lambda \cos \lambda \right);$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos \Phi - r \sin \Phi \right) \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \lambda + r \cos \lambda \right) \cos \Phi \sin \lambda =$$

$$= \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos^2 \Phi - r \sin \Phi \cos \Phi \right) \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda + r \sin \lambda \cos \lambda \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \sin \Phi + r \cos \Phi \right) \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \Phi = \frac{\partial r}{\partial \Phi} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin^2 \Phi + \frac{\partial r}{\partial \lambda} r \sin \Phi \cos \Phi;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} =$$

$$= \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos^2 \Phi - r \sin \Phi \cos \Phi \right).$$

$$\cdot \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos^2 \lambda - r \sin \lambda \cos \lambda + \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda + r \sin \lambda \cos \lambda \right) +$$

$$+ \frac{\partial r}{\partial \Phi} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin^2 \Phi + \frac{\partial r}{\partial \lambda} r \sin \Phi \cos \Phi =$$

$$= \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos^2 \Phi - r \sin \Phi \cos \Phi \right) \frac{\partial r}{\partial \lambda} + \frac{\partial r}{\partial \Phi} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin^2 \Phi + r \sin \Phi \cos \Phi =$$

$$= \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \cos^2 \Phi - r \sin \Phi \cos \Phi \right) \frac{\partial r}{\partial \lambda} + \frac{\partial r}{\partial \Phi} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin^2 \Phi + \frac{\partial r}{\partial \lambda} r \sin \Phi \cos \Phi = \frac{\partial r}{\partial \Phi} \frac{\partial r}{\partial \lambda}.$$

Таким образом, коэффициент Гаусса  $F$  примет вид:

$$F = \frac{\partial r}{\partial \Phi} \frac{\partial r}{\partial \lambda} = \left( -a \frac{t_\Phi}{2t^{\frac{3}{2}}} \right) \left( -a \frac{t_\lambda}{2t^{\frac{3}{2}}} \right) = a^2 \frac{t_\Phi t_\lambda}{4t^3} =$$

$$= a^2 \frac{\sin 2\Phi \cos^2 \Phi \sin 2\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)}{4t^3}. \quad (\text{П. 1.7.})$$

Перейдем к вычислению производных коэффициентов Гаусса по широте и долготе.  
При вычислении производных используются формулы (П.1.1, П.1.2, П.1.3)

Производная коэффициента Гаусса  $E$  по широте:

$$E_\Phi = a^2 \frac{\left[ 8tt_\Phi + 4 \sin 2\Phi \cos 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 \right] 4t^3}{16t^6} -$$

$$- a^2 \frac{\left[ 4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 \right] 12t^2 t_\Phi}{16t^6} =$$

$$= a^2 t_\Phi \frac{\left[ 8t - 4 \cos 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \right] t}{4t^4} - a^2 t_\Phi \frac{3(4t^2 + t_\Phi^2)}{4t^4}$$

$$= -a^2 t_\Phi \frac{4t^2 + 4t \cos 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) + 3t_\Phi^2}{4t^4}. \quad (\text{П. 1.8.})$$

Производная коэффициента Гаусса  $G$  по широте:

$$G_\Phi = a^2 \frac{\left[ 8tt_\Phi \cos^2 \Phi - 8t^2 \sin \Phi \cos \Phi - 4 \sin \Phi \cos^3 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 \right] 4t^3}{16t^6} -$$

$$\begin{aligned}
& -a^2 \frac{\left[4t^2 \cos^2 \Phi + \cos^4 \Phi \sin^2 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right)^2\right] 12t^2 t_\phi}{16t^6} = \\
& = a^2 \frac{\left[8tt_\phi \cos^2 \Phi - 4t^2 \sin 2\Phi - 2 \sin 2\Phi \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right)^2\right] t}{4t^4} - \\
& - a^2 \frac{3(4t^2 \cos^2 \Phi + t_\lambda^2) t_\phi}{4t^4} = \\
& = a^2 \frac{-4t^2 t_\phi \cos^2 \Phi - 4t^3 \sin 2\Phi - 2t \sin 2\Phi t_\lambda t_{0\lambda}}{4t^4} - a^2 \frac{3t_\lambda^2 t_\phi}{4t^4} = \\
& = -a^2 \frac{4t^2 t_\phi \cos^2 \Phi + 4t^3 \sin 2\Phi + 2t \sin 2\Phi t_\lambda t_{0\lambda} + 3t_\lambda^2 t_\phi}{4t^4}. \quad (\Pi. 1.9)
\end{aligned}$$

Производная коэффициента Гаусса  $F$  по широте:

$$\begin{aligned}
F_\Phi &= a^2 \sin 2\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2} \right) \frac{(2 \cos 2\Phi \cos^2 \Phi) 4t^3}{16t^6} + \\
&+ a^2 \sin 2\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2} \right) \frac{(-2 \sin \Phi \cos \Phi \sin 2\Phi) 4t^3}{16t^6} - \\
&- a^2 \sin 2\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2} \right) \frac{12t^2 t_\phi \sin 2\Phi \cos^2 \Phi}{16t^6} = \\
&= -a^2 t_\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \frac{2t \cos 2\Phi}{4t^4} + \\
&+ a^2 t_\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \frac{4t \sin^2 \Phi}{4t^4} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^2 t_\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \frac{3t_\phi \sin 2\Phi}{4t^4} = \\
& = -a^2 t_\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \frac{2t \cos 2\Phi - 4t \sin^2 \Phi + 3t_\phi \sin 2\Phi}{4t^4} . \quad (\Pi. 1.10)
\end{aligned}$$

Производная коэффициента Гаусса  $E$  по долготе:

$$\begin{aligned}
E_\lambda &= \\
&= a^2 \frac{\left[ 8tt_\lambda + 2 \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) (-2 \sin \lambda \cos \lambda) \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right) \right] 4t^3}{16t^6} \\
&\quad - a^2 \frac{\left[ 4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 \right] 12t^2 t_\lambda}{16t^6} = \\
&= a^2 \frac{\left[ 8tt_\lambda + 8 \sin^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) t_\lambda \right] t}{4t^4} - a^2 \frac{3t_\lambda (4t^2 + t_\phi^2)}{4t^4} = \\
&= a^2 t_\lambda \frac{-4t^2 + 8t \sin^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) - 3t_\phi^2}{4t^4} . \quad (\Pi. 1.11.)
\end{aligned}$$

Производная коэффициента Гаусса  $G$  по долготе:

$$\begin{aligned}
G_\lambda &= a^2 \cos^2 \Phi \frac{\left[ 8tt_\lambda + 4 \cos^2 \Phi \sin 2\lambda \cos 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 \right] 4t^3}{16t^6} - \\
&\quad - a^2 \cos^2 \Phi \frac{12t^2 t_\lambda \left[ 4t^2 + \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 \right]}{16t^6} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \cos^2 \Phi \frac{\left[8tt_\lambda - 4t_\lambda \cos 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right)\right]t - 3t_\lambda \left[4t^2 - t_\lambda \sin 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right)\right]}{4t^4} = \\
&= -a^2 t_\lambda \cos^2 \Phi \frac{4t^2 + 4t \cos 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) + 3t_\lambda t_{0\lambda}}{4t^4}. \quad (\text{П. 1.12})
\end{aligned}$$

На экваторе:

$$G_{0\lambda} = -a^2 t_{0\lambda} \frac{4t_0^2 + 4t_0 \cos 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) + 3t_{0\lambda}^2}{4t_0^4}. \quad (\text{П. 1.13.})$$

Производная коэффициента Гаусса  $F$  по долготе:

$$\begin{aligned}
F_\lambda &= a^2 \sin 2\Phi \cos^2 \Phi \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) \frac{\left[2 \cos 2\lambda \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2}\right)\right] 4t^3}{16t^6} + \\
&+ a^2 \sin 2\Phi \cos^2 \Phi \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) \frac{\left\{\sin 2\lambda \left[-\sin 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right)\right]\right\} 4t^3}{16t^6} - \\
&- a^2 \sin 2\Phi \cos^2 \Phi \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) \frac{\left[\sin 2\lambda \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2}\right)\right] 12t^2 t_\lambda}{16t^6} = \\
&= -a^2 t_\phi \cos^2 \Phi \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) \frac{2t \cos 2\lambda}{4t^4} + \\
&+ a^2 t_\lambda \sin 2\Phi \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) \frac{t \sin 2\lambda}{4t^4} - a^2 \frac{3t_\phi t_\lambda^2}{4t^4} = \\
&= a^2 \frac{-2tt_\phi \cos^2 \Phi \cos 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1-e_{ab}^2}\right) - tt_\lambda t_{0\lambda} \sin 2\Phi - 3t_\phi t_\lambda^2}{4t^4}. \quad (\text{П. 1.14.})
\end{aligned}$$

## Приложение 2. Вычисление интеграла, входящего в формулы проекций меридианного сечения

Интеграл, входящий в формулы проекций меридианного сечения, имеет вид:

$$\int \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega}.$$

Напомним, что в соответствии с формулой (1.3.12):

$$\sin \omega = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение с использованием этой зависимости.

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (\text{П. 2.1})$$

Вычисляемый интеграл может быть использован для получения точных формул вертикальной координаты в цилиндрической проекции меридианного сечения или полярного расстояния в конической проекции. Для цилиндрических и конических проекций это необязательно, так как приближенные формулы вычисления интеграла вполне корректны. Однако для азимутальной проекции использование приближенных формул вычисления интеграла при получении полярного расстояния  $\rho$  приводит к неустранимой особенности, связанной с тем, что знаменатель подынтегрального выражения равен нулю в полюсе. По-видимому, по этой причине азимутальная проекция меридианного сечения до сих пор не была выведена. Представленные в данной работе точные формулы вычисления интеграла положены в основу построения именно этой проекции.

Для упрощения записи формул введем некоторые обозначения:

$$K_{\rho 1} = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2};$$

$$K_{\rho 2} = e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}; \quad (\Pi.2.2)$$

$$K_{\rho 3} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2};$$

$$K_{\rho 4} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2};$$

$$K_{\rho 5} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}.$$

При  $e_{ac}^2 > e_{ab}^2$  выражения  $K_{\rho 3}, K_{\rho 4}$  меньше нуля. При  $e_{ac}^2 = e_{ab}^2$  и  $\cos^2 \lambda \neq 0$  они также меньше нуля. Случай, когда  $e_{ac}^2 = e_{ab}^2$  и  $\cos^2 \lambda = 0$ , приводит к интегралу специального вида и рассмотрен ниже.

Вспомогательная величина  $t_0$ , характеризующая отклонение экваториального эллипса от окружности в формуле (1.1.6), также будет использована для сокращения записи формул.

$$t_0 = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}.$$

В некоторых случаях приведенные выше выражения будут представлены в явном виде без сокращений для использования их связи между собой. В тексте данного приложения сокращения будут использоваться без ссылки на формулу (П.2.2).

Для удобства изложения повторим зависимости для коэффициентов Гаусса, приведенные в выражении (1.3.5). Их вывод представлен в приложении 1.

$$E = a^2 \frac{4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2}{4t^3};$$

$$G = a^2 \cos^2 \Phi \frac{4t^2 + \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2}{4t^3};$$

$$F = a^2 \frac{\sin 2\Phi \cos^2 \Phi \sin 2\lambda \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)}{4t^3}.$$

Вспомогательную величину  $t$ , характеризующую отклонение поверхности трехосного эллипсоида от сферы (1.1.5) представим в виде:

$$\begin{aligned} t &= \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = \\ &= \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{1 - \cos^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = \\ &= \cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) + \frac{1}{1 - e_{ac}^2}. \end{aligned}$$

Соответственно:

$$\cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) = t - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}.$$

Это выражение будет использовано при преобразовании числителя (П.2.1) для разбиения вычисляемого интеграла на два интеграла, приводимых к табличным.

Из формулы (П.2.1) с учетом зависимостей для коэффициентов Гаусса видно, что знаменатель  $4t^3$  и квадрат размера большой полуоси  $a^2$  сокращаются:

$$\frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\frac{4t^3 E}{a^2}}{\frac{4t^3 \sqrt{EG - F^2}}{a^2}}.$$

Числитель:

$$\begin{aligned} \frac{4t^3 E}{a^2} &= 4t^2 + \sin^2 2\Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 = \\ &= 4 \left[ t^2 + (1 - \cos^2 \Phi) \cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left[ t^2 + \cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \cos^4 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 \right] = \\
&= 4 \left[ 4t^2 + \cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( t - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \frac{1}{1 - e_{ac}^2} - \left( t - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 \right] = \\
&= 4 \left[ \cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right) + \frac{t}{1 - e_{ac}^2} \right].
\end{aligned}$$

Квадрат знаменателя (после сокращения на  $\frac{a^2}{4t^3}$ ):

$$\begin{aligned}
&\left[ 4t^2 + \sin^2 2\Phi K_{\rho 3}^2 \right] \left[ 4t^2 \cos^2 \Phi + \cos^4 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 \right] - \\
&- \sin^2 2\Phi \cos^4 \Phi \sin^2 2\lambda K_{\rho 3}^2 \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 = \\
&= 16t^4 \cos^2 \Phi + 4t^2 \sin^2 2\Phi \cos^2 \Phi K_{\rho 3}^2 + 4t^2 \cos^4 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 + \\
&+ \sin^2 2\Phi \cos^4 \Phi \sin^2 2\lambda K_{\rho 3}^2 \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin^2 2\Phi \cos^4 \Phi \sin^2 2\lambda K_{\rho 3}^2 \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 = \\
& = 4t^2 \cos^2 \Phi \left[ 4t^2 + \sin^2 2\Phi K_{\rho 3}^2 + \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 \right] = \\
& = 16t^2 \cos^2 \Phi \left[ t^2 + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \cos^2 \Phi \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \left( 1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2 \right] = \\
& = 16t^2 \cos^2 \Phi \left[ \cos^4 \Phi \cos^4 \lambda + \frac{\cos^4 \Phi \sin^4 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^4 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2 \cos^4 \Phi \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{2 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda}{1 - e_{ac}^2} + \frac{2 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)(1 - e_{ac}^2)} + \right. \\
& \quad \left. + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \left( \cos^4 \lambda + \frac{\sin^4 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2} + \frac{2 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{2 \cos^2 \lambda}{1 - e_{ac}^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2 \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)(1 - e_{ac}^2)} \right) + \cos^2 \Phi \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \left( 1 - \frac{2}{1 - e_{ab}^2} + \frac{1}{(1 - e_{ab}^2)^2} \right) \right] = \\
& = 16t^2 \cos^2 \Phi \left[ \cos^2 \Phi \cos^4 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^4 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} + \frac{2 \cos^2 \Phi \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \right. \\
& \quad \left. + \cos^2 \Phi \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda - \frac{2 \cos^2 \Phi \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} \right] = \\
& = 16t^2 \cos^2 \Phi \left[ \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} \right].
\end{aligned}$$

Окончательно подынтегральное выражение (П. 2.1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{4 \left[ \cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right) + \frac{t}{1 - e_{ac}^2} \right]}{\sqrt{16t^2 \cos^2 \Phi \left[ \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} \right]}} = \\
 & = \frac{\cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right) + \frac{t}{1 - e_{ac}^2}}{t \cos \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}. \quad (\text{П. 2.3})
 \end{aligned}$$

При  $e_{ac}^2 = e_{ab}^2$  и  $\cos^2 \lambda = 0$  это выражение принимает вид:

$$\frac{1}{\cos \Phi}. \quad (\text{П. 2.4})$$

В этом случае соответствующий интеграл легко вычисляется:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d\Phi}{\cos \Phi} &= \int \frac{d \sin \Phi}{\cos^2 \Phi} = \int \frac{d \sin \Phi}{1 - \sin^2 \Phi} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \Phi}{1 - \sin \Phi} \right| - \ln C_{int} = \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \Phi}{1 + \sin \Phi} - \ln C_{int} = -\ln C_{int} \sqrt{\frac{1 - \sin \Phi}{1 + \sin \Phi}} = -\ln C_{int} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \Phi}}{1 + \sin \Phi} = \\
 &= -\ln C_{int} \frac{\cos \Phi}{1 + \sin \Phi},
 \end{aligned}$$

где  $C_{int}$  – постоянная интегрирования, которая будет определяться в дальнейшем для каждой конкретной проекции.

Заметим, что рассмотренные условия соответствуют простой геометрической картины, когда меридианы  $90^\circ$  и  $270^\circ$  замыкаются в окружность.

Представим выражение (П.2.3) в виде двух слагаемых:

$$\frac{\frac{\cos \Phi}{1 - e_{ac}^2}}{\cos^2 \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}$$

и

$$\frac{\cos \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right)}{t \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}.$$

Таким образом необходимо вычислить два интеграла.

В подкоренном выражении знаменателя выразим квадрат косинуса широты через квадрат синуса. В дальнейшем это понадобится для приведения вычисляемых интегралов к табличным.

$$\begin{aligned} & \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} = \\ & = (1 - \sin^2 \Phi) \cos^2 \lambda + \frac{(1 - \sin^2 \Phi) \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} = \\ & = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \sin^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2} \right) = \\ & = K_{\rho 5} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi. \end{aligned}$$

Слагаемые подынтегрального выражения приобретают вид:

$$\frac{\cos \Phi}{\cos^2 \Phi \sqrt{K_{\rho 5} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi}} \text{ и } \frac{\cos \Phi K_{\rho 3} t_0}{t \sqrt{K_{\rho 5} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi}}.$$

**Первый интеграл:**

$$\int \frac{\cos \Phi}{\cos^2 \Phi \sqrt{K_{\rho 5} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi}} d\Phi = -\frac{1}{1 - e_{ac}^2} \int \frac{d \sin \Phi}{(\sin^2 \Phi - 1) \sqrt{K_{\rho 5} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi}}.$$

Для приведения интеграла к табличному виду разделим числитель и знаменатель на  $\sqrt{-K_{\rho 4}}$ :

$$-\frac{1}{(1-e_{ac}^2)\sqrt{-K_{\rho 4}}}\int \frac{d\sin\Phi}{(\sin^2\Phi-1)\sqrt{\sin^2\Phi+\frac{K_{\rho 5}}{-K_{\rho 4}}}}. \quad (\text{П. 2.5})$$

Мы привели интеграл к табличному интегралу из первого тома справочника Прудникова А.П., Брычкова Ю.А., Маричева О.И. «Интегралы и ряды» (стр. 79, 1.2.45, 12). Чтобы избежать путаницы, добавим к обозначениям справочника индекс int1:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx_{int1}}{(x_{int1}^2 - b_{int1}^2)\sqrt{x_{int1}^2 + a_{int1}^2}} = \\ & = \frac{1}{2b_{int1}\sqrt{a_{int1}^2 + b_{int1}^2}} \ln \left| \frac{x_{int1}\sqrt{a_{int1}^2 + b_{int1}^2} - b_{int1}\sqrt{x_{int1}^2 + a_{int1}^2}}{x_{int1}\sqrt{a_{int1}^2 + b_{int1}^2} + b_{int1}\sqrt{x_{int1}^2 + a_{int1}^2}} \right|. \quad (\text{П. 2.6}) \end{aligned}$$

Соответствие нашим обозначениям:

$$x_{int1} = \sin\Phi; a_{int1}^2 = \frac{K_{\rho 5}}{-K_{\rho 4}} = \frac{\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2}}{-\left[\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right]}; b_{int1}^2 = 1;$$

$$a_{int1} = \sqrt{\frac{K_{\rho 5}}{-K_{\rho 4}}}; b_{int1} = 1;$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x_{int1}^2 + a_{int1}^2} &= \sqrt{\sin^2\Phi + \frac{\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2}}{-\left[\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right]}} = \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \sin^2\Phi \left[\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right]}{-\left[\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right]}} = \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2\Phi \cos^2\lambda + \frac{\cos^2\Phi \sin^2\lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2\Phi}{(1-e_{ac}^2)^2}}}{\sqrt{-K_{\rho 4}}} = \frac{\sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{-K_{\rho 4}}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_{int1}^2 + b_{int1}^2} &= \sqrt{\frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right)} + 1} = \\
&= \sqrt{\frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right)}{-K_{\rho 4}}} = \\
&= \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{\rho 4}}}.
\end{aligned}$$

Коэффициент при интеграле (П.2.5), умноженный на коэффициент при логарифме (П.2.6):

$$-\frac{1}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{\rho 4}}} \cdot \frac{1}{2b_{int1}\sqrt{a_{int1}^2 + b_{int1}^2}} = -\frac{1}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{\rho 4}}} \cdot \frac{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{\rho 4}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Выражение под знаком логарифма (П.2.6):

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x_{int1}\sqrt{a_{int1}^2 + b_{int1}^2} - b_{int1}\sqrt{x_{int1}^2 + a_{int1}^2}}{x_{int1}\sqrt{a_{int1}^2 + b_{int1}^2} + b_{int1}\sqrt{x_{int1}^2 + a_{int1}^2}} \right| &= \left| \frac{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{\rho 4}}} - \frac{\sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{-K_{\rho 4}}}}{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{\rho 4}}} + \frac{\sqrt{K_{\rho 1}}}{\sqrt{-K_{\rho 4}}}} \right| = \\
&= \left| \frac{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} - \sqrt{K_{\rho 1}}}{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{K_{\rho 1}}} \right| = \left| \frac{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} - \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}} \right|.
\end{aligned}$$

Умножим числитель и знаменатель данного выражения на его знаменатель (заметим, что он больше нуля):

$$\begin{aligned}
& \frac{\left| \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} - \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda - \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} \right|}{\left[ \frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}} \right]^2} = \\
& = \frac{\left| -\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda - \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} \right|}{\left[ \frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}} \right]^2} = \\
& = \frac{\cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} \right)}{\left[ \frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}} \right]^2} = \frac{K_{\rho 5} \cos^2 \Phi}{\left[ \frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{K_{\rho 1}} \right]^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\frac{\cos \Phi}{1 - e_{ac}^2} d\Phi}{\cos^2 \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{K_{\rho 5} \cos^2 \Phi}{\left[ \frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{K_{\rho 1}} \right]^2} = \\
& = -\ln \frac{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{K_{\rho 1}}} = \\
& = -\ln \frac{\cos \Phi \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2)} + \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}.
\end{aligned}$$

Постоянная интегрирования будет определена при получении окончательного результата.

Перейдем к вычислению **второго интеграла**.

$$\int \frac{\cos \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right)}{t \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi}} d\Phi =$$

$$= \int \frac{K_{\rho 3} t_0}{t \sqrt{K_{\rho 5} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi}} d \sin \Phi .$$

Для приведения интеграла к табличному виду преобразуем вспомогательную величину  $t$ :

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} =$$

$$(1 - \sin^2 \Phi) \cos^2 \lambda + \frac{(1 - \sin^2 \Phi) \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} =$$

$$= \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \sin^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) =$$

$$= t_0 - \sin^2 \Phi K_{\rho 3} = -K_{\rho 3} \left( \sin^2 \Phi + \frac{t_0}{-K_{\rho 3}} \right).$$

После подстановки полученного выражения в подынтегральную функцию, интеграл приобретает вид:

$$- \int \frac{t_0 d \sin \Phi}{\left( \sin^2 \Phi + \frac{t_0}{-K_{\rho 3}} \right) \sqrt{K_{\rho 5} + (-K_{\rho 4}) \sin^2 \Phi}} .$$

Далее, разделив числитель и знаменатель на  $\sqrt{-K_{\rho 4}}$ , получаем:

$$-\frac{t_0}{\sqrt{-K_{\rho 4}}}\int \frac{d \sin \Phi}{\left(\sin^2 \Phi + \frac{t_0}{-K_{\rho 3}}\right) \sqrt{\sin^2 \Phi + \frac{K_{\rho 5}}{-K_{\rho 4}}}}. \quad (\text{П. 2.7})$$

Аналогично предыдущему, используем табличный интеграл из того же справочника Прудникова А.П. и др. (стр. 79, 1.2.45, 10). Добавим к обозначениям справочника индекс int2.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx_{int2}}{(x_{int2}^2 + b_{int2}^2)\sqrt{x_{int2}^2 + a_{int2}^2}} = \\ & = \frac{1}{b_{int2}\sqrt{b_{int2}^2 - a_{int2}^2}} \ln \frac{|x_{int2}\sqrt{b_{int2}^2 - a_{int2}^2} + b_{int2}\sqrt{x_{int2}^2 + a_{int2}^2}|}{\sqrt{x_{int2}^2 + b_{int2}^2}} ; \quad (\text{П. 2.8}) \end{aligned}$$

$$x_{int2} = \sin \Phi ;$$

$$\begin{aligned} a_{int2}^2 &= \frac{K_{\rho 5}}{-K_{\rho 4}} = \frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} = \\ &= \frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2} + \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}}{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} = \\ &= -1 + \frac{\frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}}{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} = \\ &= -1 + \frac{1}{-(1 - e_{ac}^2)^2 \left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} ; \end{aligned}$$

$$b_{int2}^2 = \frac{t_0}{-K_{\rho 3}} = \frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} + \frac{1}{1 - e_{ac}^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} =$$

$$= -1 + \frac{\frac{1}{1 - e_{ac}^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} =$$

$$= -1 + \frac{1}{-(1 - e_{ac}^2)\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} ;$$

$$x_{int2}^2 + a_{int2}^2 = \sin^2 \Phi + \frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} =$$

$$= \frac{-\sin^2 \Phi \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right) + \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} =$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 \Phi) \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}\right) + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} =$$

$$= \frac{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} = \frac{K_{\rho 1}}{-K_{\rho 4}} ;$$

$$\begin{aligned}
x_{int2}^2 + b_{int2}^2 &= \sin^2 \Phi + \frac{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} = \\
&= \frac{-\sin^2 \Phi \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right) + \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} = \\
&= \frac{(1 - \sin^2 \Phi) \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}\right) + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} = \\
&= \frac{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2}}{-\left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} = \frac{t}{-K_{\rho 3}} ;
\end{aligned}$$

$$a_{int2} = \sqrt{\frac{K_{\rho 5}}{-K_{\rho 4}}}, \quad b_{int2} = \sqrt{\frac{t_0}{-K_{\rho 3}}} ;$$

$$b_{int2}^2 - a_{int2}^2 = -1 + \frac{1}{-(1 - e_{ac}^2) \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)} +$$

$$\begin{aligned}
&+ 1 - \frac{1}{-(1 - e_{ac}^2)^2 \left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} = \\
&= \frac{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right] (1 - e_{ac}^2) + \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right)}{(1 - e_{ac}^2)^2 \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2}\right) \left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}\right]} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2}\right](1-e_{ac}^2) + \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2}\right)}{(1-e_{ac}^2)^2 \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2}\right) \left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right]} = \\
&= \frac{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2}(-1+e_{ac}^2+1-e_{ab}^2)}{(1-e_{ac}^2)^2 \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2}\right) \left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right]} = \\
&= \frac{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2}}{(1-e_{ac}^2)^2 \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2}\right) \left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right]} = \\
&= \frac{K_{\rho 2}}{(1-e_{ac}^2)^2 K_{\rho 3} K_{\rho 4}}.
\end{aligned}$$

При  $e_{ac}^2 > e_{ab}^2$  это выражение больше нуля, то есть  $b_{int2}^2 > a_{int2}^2$ , поэтому использование данного табличного интеграла правомерно. Случай обратного неравенства требует дополнительного изучения, но для наших целей он не актуален. При  $e_{ac}^2 = e_{ab}^2$  и  $\cos^2 \lambda \neq 0$  это выражение также больше нуля, то есть  $b_{integ}^2 > a_{integ}^2$ .

Случай  $e_{ac}^2 = e_{ab}^2$  и  $\cos^2 \lambda = 0$  рассмотрен выше. В этом случае вычисление интеграла (П.2.7) не требуется, так как выражение (П.2.3) приобретает вид (П.2.4).

Коэффициент при логарифме (П.2.8):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_{int2} \sqrt{b_{int2}^2 - a_{int2}^2}} &= \sqrt{\frac{-K_{\rho 3}}{t_0}} \cdot \sqrt{\frac{(1-e_{ac}^2)^2 K_{\rho 3} K_{\rho 4}}{K_{\rho 2}}} = \\
&= \frac{(1-e_{ac}^2)(-K_{\rho 3})\sqrt{-K_{\rho 4}}}{\sqrt{t_0 K_{\rho 2}}}.
\end{aligned}$$

Коэффициент при интеграле (П.2.7), умноженный на коэффициент при логарифме:

$$\begin{aligned}
& -\frac{t_0}{\sqrt{-K_{\rho 4}}} \cdot \frac{(1-e_{ac}^2)(-K_{\rho 3})\sqrt{-K_{\rho 4}}}{\sqrt{t_0 K_{\rho 2}}} = -\frac{(1-e_{ac}^2)(-K_{\rho 3})\sqrt{t_0}}{\sqrt{K_{\rho 2}}} = \\
& = -\frac{(1-e_{ac}^2) \left[ -\left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2}}}.
\end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$K_{int} = \frac{(1-e_{ac}^2) \left[ -\left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} - \frac{1}{1-e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2}}}. \quad (\text{П. 2.9})$$

Выражение под знаком логарифма (П.2.8):

$$\begin{aligned}
& \ln \frac{|x_{int2} \sqrt{b_{int2}^2 - a_{int2}^2} + b_{int2} \sqrt{x_{int2}^2 + a_{int2}^2}|}{\sqrt{x_{int2}^2 + b_{int2}^2}} = \\
& = \ln \frac{\left| \sin \Phi \sqrt{\frac{K_{\rho 2}}{(1-e_{ac}^2)^2 K_{\rho 3} K_{\rho 4}}} + \sqrt{\frac{t_0}{-K_{\rho 3}}} \sqrt{\frac{K_{\rho 1}}{-K_{\rho 4}}} \right|}{\sqrt{\frac{t}{-K_{\rho 3}}}} = \ln \frac{\left| \frac{\sin \Phi}{1-e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho 1}} \right|}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}}.
\end{aligned}$$

Покажем, что выражение под знаком абсолютной величины больше нуля.

$$K_{\rho 2} = e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2} < e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} < \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} = t_0 ;$$

$$\sqrt{K_{\rho_1}} = \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}} \geq \frac{|\sin \Phi|}{1 - e_{ac}^2}.$$

Следовательно

$$\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho_2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho_1}} > 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho_2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho_1}} \right| = \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho_2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho_1}};$$

$$\begin{aligned} & \ln \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho_2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho_1}}}{\sqrt{t_0} \sqrt{-K_{\rho_4}}} = \\ & = \ln \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{\frac{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda}{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)} + \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}} \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}}{\sqrt{-\left[ \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2} \right] \left( \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} \right)}}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\cos \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right)}{t \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}} d\Phi = \\ & = -K_{int} \ln \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho_2}} + \sqrt{t_0} \sqrt{K_{\rho_1}}}{\sqrt{t_0} \sqrt{-K_{\rho_4}}} = \\ & = -K_{int} \ln \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{\frac{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda}{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)} + \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}} \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}}{\sqrt{-\left[ \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2} \right] \left( \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} \right)}}. \end{aligned}$$

Окончательный ответ:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega} = \\
& = -\ln \frac{\cos \Phi \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2}}}{\frac{\sin \Phi}{1-e_{ac}^2} + \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1-e_{ac}^2)^2}}} - K_{int} \cdot \\
& \cdot \ln \frac{\frac{\sin \Phi}{1-e_{ac}^2} \sqrt{\frac{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1-e_{ab}^2)^2}} + \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2}} \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1-e_{ac}^2)^2}}}{\sqrt{-\left[\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1-e_{ab}^2)^2} - \frac{1}{(1-e_{ac}^2)^2}\right] \left(\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1-e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1-e_{ac}^2}\right)}} - \\
& - \ln C_{int1}. \tag{П.2.10}
\end{aligned}$$

С использованием (П.2.2) можно представить (П.2.10) в виде:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega} = \\
& = -\ln \frac{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}}{\frac{\sin \Phi}{1-e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}} - \ln \left[ \frac{\frac{\sin \Phi}{1-e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}}}{\sqrt{t} \sqrt{-K_{\rho 4}}} \right]^{K_{int}} - \ln C_{int1}. \tag{П.2.11}
\end{aligned}$$

Постоянная интегрирования определяется в дальнейшем для каждой конкретной проекции.

### **Приложение 3. Расчеты для доказательства невозможности построения равноугольных цилиндрической и азимутальной проекций**

Напомним, что при выводе формул цилиндрических проекций предполагается, что широта больше либо равна нулю, а долгота больше либо равна нулю и меньше, либо равна  $90^\circ$ .

Вертикальная координата в цилиндрической проекции меридианного сечения вычисляется по формуле (2.2.12) с учетом (1.3.6):

$$y_{proj}(\Phi_i, \lambda_i) = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi_i} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi.$$

Подынтегральное выражение для вертикальной координаты в соответствии с формулой (П.2.3) и с учетом множителя при интеграле можно представить в виде:

$$\sqrt{G_0} \frac{\cos^2 \Phi \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right) + \frac{t}{1 - e_{ac}^2}}{t \cos \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}.$$

Покажем, что при любом фиксированном значении широты значение подынтегрального выражения с учетом множителя при интеграле на начальном меридиане будет больше, чем на меридиане  $90^\circ$ .

На начальном меридиане:

$$\sqrt{G_0} = a = \frac{c}{\sqrt{1 - e_{ac}^2}} ;$$

$$t = \cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} ;$$

подынтегральное выражение

$$\begin{aligned}
 & \frac{c}{\sqrt{1-e_{ac}^2}} \frac{\cos^2 \Phi \left(1 - \frac{1}{1-e_{ac}^2}\right) + \frac{\cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{1-e_{ac}^2}}{1-e_{ac}^2}}{= \\
 & = \frac{c}{\sqrt{1-e_{ac}^2}} \frac{\cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{(1-e_{ac}^2)^2}}{\left(\cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{1-e_{ac}^2}\right) \cos \Phi \sqrt{\cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{(1-e_{ac}^2)^2}}} = \\
 & = c \frac{\sqrt{\cos^2 \Phi (1-e_{ac}^2) + \frac{\sin^2 \Phi}{1-e_{ac}^2}}}{[\cos^2 \Phi (1-e_{ac}^2) + \sin^2 \Phi] \cos \Phi} = \\
 & = c \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \Phi \frac{\frac{e_{ac}^2}{1-e_{ac}^2}}{\cos^2 \Phi (1-e_{ac}^2) + \sin^2 \Phi}}}{\sqrt{\cos^2 \Phi (1-e_{ac}^2) + \sin^2 \Phi} \cos \Phi}.
 \end{aligned}$$

На меридиане  $90^\circ$ :

$$\sqrt{G_0} = b = a \sqrt{1 - e_{ab}^2} = \frac{c \sqrt{1 - e_{ab}^2}}{\sqrt{1 - e_{ac}^2}} ;$$

$$t = \frac{\cos^2 \Phi}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = \frac{\cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi (1 - e_{ab}^2)}{1 - e_{ac}^2}}{1 - e_{ab}^2}.$$

Определим квадрат эксцентриситета эллипса сечения меридиана  $90^\circ$ :

$$e_{bc}^2 = 1 - \frac{b^2}{c^2}.$$

Связь трех эксцентрикитетов:

$$\frac{1 - e_{ac}^2}{1 - e_{ab}^2} = 1 - e_{bc}^2.$$

Подынтегральное выражение с учетом связи эксцентрикитетов:

$$\begin{aligned} & \frac{c\sqrt{1-e_{ab}^2}\cos^2\Phi\left(\frac{1}{1-e_{ab}^2}-\frac{1}{1-e_{ac}^2}\right)\frac{1}{1-e_{ab}^2}+\frac{\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi(1-e_{ab}^2)}{1-e_{ac}^2}}{(1-e_{ab}^2)(1-e_{ac}^2)}}{\sqrt{1-e_{ac}^2}\frac{\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi(1-e_{ab}^2)}{1-e_{ac}^2}}{1-e_{ab}^2}\cos\Phi\sqrt{\frac{\cos^2\Phi}{(1-e_{ab}^2)^2}+\frac{\sin^2\Phi}{(1-e_{ac}^2)^2}}} = \\ & = \frac{c}{\sqrt{1-e_{bc}^2}}\frac{\cos^2\Phi\left(1-\frac{1}{1-e_{bc}^2}\right)+\frac{\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{1-e_{bc}^2}}{1-e_{bc}^2}}{\left(\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{1-e_{bc}^2}\right)\cos\Phi\sqrt{\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{(1-e_{bc}^2)^2}}}. \end{aligned}$$

Проведя вычисления аналогичные вычислениям для начального меридиана, получаем, что подынтегральное выражение на меридиане  $90^\circ$  равно:

$$c\sqrt{\frac{1+\sin^2\Phi\frac{\frac{e_{bc}^2}{1-e_{bc}^2}}{\cos^2\Phi(1-e_{bc}^2)+\sin^2\Phi}}{\sqrt{\cos^2\Phi(1-e_{bc}^2)+\sin^2\Phi}\cos\Phi}}.$$

Для трехосного эллипсоида  $e_{ac} > e_{bc}$ , следовательно значение подынтегрального выражения на начальном меридиане будет больше, чем на меридиане  $90^\circ$ :

$$c\sqrt{\frac{1+\sin^2\Phi\frac{\frac{e_{ac}^2}{1-e_{ac}^2}}{\cos^2\Phi(1-e_{ac}^2)+\sin^2\Phi}}{\sqrt{\cos^2\Phi(1-e_{ac}^2)+\sin^2\Phi}\cos\Phi}} >$$

$$> c \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \Phi \frac{e_{bc}^2}{\cos^2 \Phi (1 - e_{bc}^2) + \sin^2 \Phi}}{\sqrt{\cos^2 \Phi (1 - e_{bc}^2) + \sin^2 \Phi} \cos \Phi}}. \quad (\text{П. 3.1})$$

Величина интеграла на начальном меридиане будет больше, чем на меридиане  $90^\circ$ , так как соотношение (П.3.1) справедливо при любом значении широты.

В азимутальной проекции меридианного сечения полярное расстояние вычисляется по формуле (2.3.17):

$$\rho(\Phi, \lambda) = \frac{2a\sqrt{1 - e_{ac}^2} \cos \Phi}{\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}.$$

$$\cdot \left\{ \frac{\sin \Phi \sqrt{\frac{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0}} \sqrt{\cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2}}}{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{t} \left[ \sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}} + \sqrt{t_0} \right]} \right\}^{K_{int}},$$

где

$$K_{int} = \frac{(1 - e_{ac}^2) \left[ - \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}.$$

Вычислим длину меридианов от полюса до экватора (полярное расстояние) в проекции меридианного сечения. На экваторе:

$$\sin \Phi = 0 ; \quad \cos \Phi = 1 ; \quad t_0 = t ,$$

где

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} .$$

$$\rho(\Phi = 0, \lambda) = \\ = \frac{2a\sqrt{1 - e_{ac}^2}}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} \left\{ \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2}\sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \sqrt{t}}} \right\}^{K_{int}} = \\ = \frac{2c}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2}\sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \sqrt{t}}} \right\}^{K_{int}} . \quad (\Pi. 3.2)$$

На начальном меридиане:

$$\sin \lambda = 0 ; \quad \cos \lambda = 1 ;$$

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = 1 ;$$

$$K_{int} = \frac{(1 - e_{ac}^2) \left[ - \left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} = \frac{e_{ac}^2}{e_{ac}} = e_{ac} .$$

Длина начального меридиана от полюса до экватора (подстановка в формулу (П.3.2)):

$$\rho(\Phi = 0, \lambda = 0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2c}{(1 - e_{ac}^2) \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} \left\{ \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \sqrt{t}}} \right\}^{K_{int}} = \\
&= \frac{2c}{1 - e_{ac}^2} \left( \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2}}{e_{ac} + 1} \right)^{K_{int}} = \frac{2a}{\sqrt{1 - e_{ac}^2}} \left( \sqrt{\frac{e_{ac} - 1}{e_{ac} + 1}} \right)^{e_{ac}} = \frac{2c}{1 - e_{ac}^2} \left( \frac{e_{ac} - 1}{e_{ac} + 1} \right)^{\frac{e_{ac}}{2}}.
\end{aligned}$$

Логарифм этого выражения равен:

$$\ln \frac{2c}{1 - e_{ac}^2} \left( \frac{e_{ac} - 1}{e_{ac} + 1} \right)^{\frac{e_{ac}}{2}} = \ln 2c - \ln(1 - e_{ac}^2) + \frac{e_{ac}}{2} [\ln(e_{ac} - 1) - \ln(e_{ac} + 1)].$$

Напомним, что  $e_{ac}^2 < 1$ . Тогда выражение для логарифма можно разложить в ряд Тейлора в единице. Ограничимся первыми тремя членами разложения.

$$\ln(1 - e_{ac}^2) \approx -e_{ac}^2 - \frac{1}{2}e_{ac}^4 - \frac{1}{3}e_{ac}^6,$$

где  $e_{ac} < 1$  и выражения для логарифма можно разложить в ряд Тейлора в единице. Ограничимся первыми пятью членами разложения.

$$\ln(1 + e_{ac}) \approx e_{ac} - \frac{1}{2}e_{ac}^2 + \frac{1}{3}e_{ac}^3 - \frac{1}{4}e_{ac}^4 + \frac{1}{5}e_{ac}^5;$$

$$\ln(1 - e_{ac}) \approx -e_{ac} - \frac{1}{2}e_{ac}^2 - \frac{1}{3}e_{ac}^3 - \frac{1}{4}e_{ac}^4 - \frac{1}{5}e_{ac}^5;$$

$$\begin{aligned}
&\frac{e_{ac}}{2} \ln \frac{1 - e_{ac}}{1 + e_{ac}} = \\
&\frac{e_{ac}}{2} [\ln(1 - e_{ac}) - \ln(1 + e_{ac})] \approx \frac{e_{ac}}{2} \left( -2e_{ac} - \frac{2}{3}e_{ac}^3 - \frac{2}{5}e_{ac}^5 \right) = \\
&= -e_{ac}^2 - \frac{1}{3}e_{ac}^4 - \frac{1}{5}e_{ac}^6;
\end{aligned}$$

$$-\ln(1 - e_{ac}^2) + \frac{e_{ac}}{2} [\ln(e_{ac} - 1) - \ln(e_{ac} + 1)] \approx \frac{1}{6} e_{ac}^4 + \frac{1}{15} e_{ac}^6 .$$

Таким образом

$$\ln \left[ \frac{2c}{1 - e_{ac}^2} \left( \frac{e_{ac} - 1}{e_{ac} + 1} \right)^{\frac{e_{ac}}{2}} \right] \approx \ln 2c + \frac{1}{6} e_{ac}^4 + \frac{1}{15} e_{ac}^6 . \quad (\Pi. 3.3)$$

На меридиане  $90^\circ$ :

$$\sin \lambda = 1 ; \quad \cos \lambda = 0 ;$$

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = \frac{1}{1 - e_{ab}^2} ;$$

$$K_{int} = \frac{(1 - e_{ac}^2) \left[ -\left( \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \right] \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} = \\ = \frac{(1 - e_{ac}^2) \left( \frac{1}{1 - e_{ac}^2} - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - e_{ab}^2}}}{\sqrt{\frac{e_{ac}^2 - e_{ab}^2}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} = \sqrt{\frac{e_{ac}^2 - e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2}} = e_{bc} .$$

Длина меридиана с долготой  $90^\circ$  от полюса до экватора (подстановка в (П.3.2)):

$$\rho \left( \Phi = 0, \lambda = \frac{\pi}{2} \right) = \\ = \frac{2c}{(1 - e_{ac}^2) \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}}}{\sqrt{e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \sqrt{t}}} \right\}^{K_{int}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2c}{\frac{1-e_{ac}^2}{1-e_{ab}^2}} \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{1-e_{ac}^2}}{1-e_{ab}^2}}{\sqrt{\frac{e_{ac}^2-e_{ab}^2}{(1-e_{ab}^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{1-e_{ab}^2}}}} \right)^{e_{bc}} = \frac{2c}{1-e_{bc}^2} \left( \frac{\sqrt{\frac{1-e_{ac}^2}{1-e_{ab}^2}}}{\sqrt{\frac{e_{ac}^2-e_{ab}^2}{1-e_{ab}^2} + 1}} \right)^{e_{bc}} = \\
&= \frac{2c}{1-e_{bc}^2} \left( \frac{\sqrt{1-e_{bc}^2}}{e_{bc}+1} \right)^{e_{bc}} = \frac{2c}{1-e_{bc}^2} \left( \frac{e_{bc}-1}{e_{bc}+1} \right)^{\frac{e_{bc}}{2}}.
\end{aligned}$$

Аналогично зависимости (П.3.1) получаем для меридиана с долготой  $90^\circ$ :

$$\ln \left[ \frac{2c}{1-e_{bc}^2} \left( \frac{e_{bc}-1}{e_{bc}+1} \right)^{\frac{e_{bc}}{2}} \right] \approx \ln 2c + \frac{1}{6} e_{bc}^4 + \frac{1}{15} e_{bc}^6. \quad (\text{П. 3.4})$$

Для трехосного эллипсоида  $e_{ac} > e_{bc}$ , следовательно с учетом (П.3.3) и (П.3.4) логарифм полярного расстояния и само полярное расстояние на начальном меридиане будет больше, чем на меридиане  $90^\circ$ :

$$\begin{aligned}
&\ln \left[ \frac{2c}{1-e_{ac}^2} \left( \frac{e_{ac}-1}{e_{ac}+1} \right)^{\frac{e_{ac}}{2}} \right] > \ln \left[ \frac{2c}{1-e_{bc}^2} \left( \frac{e_{bc}-1}{e_{bc}+1} \right)^{\frac{e_{bc}}{2}} \right]; \\
&\frac{2c}{1-e_{ac}^2} \cdot \left( \frac{1-e_{ac}}{1+e_{ac}} \right)^{\frac{e_{ac}}{2}} > \frac{2c}{1-e_{bc}^2} \cdot \left( \frac{1-e_{bc}}{1+e_{bc}} \right)^{\frac{e_{bc}}{2}}.
\end{aligned}$$

Следующие члены используемых рядов не могут повлиять на знак неравенства.

# Список литературы

## Литература на русском языке

1. Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра / Под ред. Б. М. Шустова, Л. В. Рыхловой. – М.: Физматлит, 2013.
2. Атлас планет Земной группы и их спутников / Под ред. В. Д. Большакова и др. – М.: МИИГАиК, 1992. – 208 с.
3. Атлас Фобоса / Под общ. ред. В. П. Савиных. – М.: МИИГАиК, 2015.
4. Бугаевский Л. М. К вопросу о получении изометрических координат и равноугольной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1987. – №4. – С. 79–90.
5. Бугаевский Л. М. Математическая картография: Учебник для вузов. – М.: Златоуст, 1998. – 400 с.
6. Бугаевский Л. М. Проблемы изыскания и использования равноугольных и близких к ним проекций для целей картографии и геодезии: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – М.: МИИГАиК, 1971. – 49 с.
7. Бугаевский Л. М. Теория картографических проекций регулярных поверхностей. – М.: Златоуст, 1999. – 144 с.
8. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть первая / При редакционном участии Г. Б. Гуревича. – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1941. – 512 с.
9. Карта Фобоса. Масштаб 1:100000 / Сост. МИИГАиК при участии МГУ; науч. рук. В. Д. Большаков; отв. ред. В. П. Белов и др. – М., 1988.
10. Кондрачук А. В. Исследование и разработка перспективных проекций трехосного эллипсоида для картографирования поверхностей небесных тел: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М.: МИИГАиК, 2009. – 23 с.
11. Кошель С. М. Высшая математика с основами программирования: Учебное пособие. – М.: Географический факультет МГУ, 2010. – 200 с.
12. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
13. Нырицов М. В., Флейс М. Э., Борисов М. М. Картографирование астероида 433 Эрос в равнопромежуточных вдоль меридианов цилиндрической и азимутальной проекциях трехосного эллипсоида // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – №1. – С. 54–61

14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.
15. Серапинас Б. Б. О построении равноугольных картографических проекций трехосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 1984. – № 8. – С. 48–50.
16. Серапинас Б. Б. Оценка искажений в картографических проекциях трехосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 1983. – № 8. – С. 55–56.
17. Флейс М. Э., Нырцов М. В., Борисов М. М. Исследование свойства равноугольности цилиндрических проекций трехосного эллипсоида // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 451. – № 3. – С. 336–338.
18. Якоби К. Лекции по динамике / Пер. с нем. О. А. Полосухиной; под ред. Н. С. Кошлякова. – Л.; М.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936. – 271 с.

### **Литература на иностранном языке**

1. Archinal B. A. et al. Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements: 2015 // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – February 2018. – Vol. 130(22). – DOI: 10.1007/s10569-017-9805-5
2. Bilibina N. A., Vereshchaka T. V. Some peculiarities of generating projections for a triaxial ellipsoid // Proceedings of the 27th International Cartographic Conference (Paris, France, 3–8 July 2011). CD-ROM.
3. Bugaevsky L. M., Snyder J. P. Map Projections: A Reference Manual. – London: Taylor&Francis Ltd, 1995.
4. Nyrtsov M. V. et al. Conic projections of the triaxial ellipsoid: The projections for regional mapping of celestial bodies // Cartographica. – 2017. – Vol. 52(4). – P. 322–331.
5. Nyrtsov M. V. et al. Equal-area projections of the triaxial ellipsoid: First time derivation and implementation of cylindrical and azimuthal projections for small solar system bodies // Cartographic Journal. – 2015. – Vol. 52(2). – P. 114–124.
6. Nyrtsov M. V. et al. Jacobi Conformal Projection Of The Triaxial Ellipsoid: New Projection For Mapping Of Small Celestial Bodies // Cartography from Pole to Pole. Lecture Notes in Geoinformation and Cartography / Ed. by M. Buchroithner, N. Pritchel, D. Burghardt. – Berlin: Springer Heidelberg, 2014.

7. *Pędzich P.* A low distortion conformal projection of a tri-axial ellipsoid and its application for mapping of extra-terrestrial objects // Planetary and Space Science. – 2019. – Vol. 178. – DOI: 10.1016/j.pss.2019.104697
8. *Snyder J. P.* Conformal Mapping Of The Triaxial Ellipsoid Mathematics // Survey Review. – Vol. 28(217). – P. 130–148.
9. *Snyder J. P.* Map projections: a working manual. USGS Professional Paper 1395. – Washington, DC: United States Government Printing Office, 1987. – 394 p.
10. *Stooke P.J.* Automated cartography of non-spherical worlds // Proceedings of the Second International Symposium on Spatial Data Handling. – Seattle, WA, 1986. – P.523–536.
11. *Stooke P. J.* Cartography of non-spherical worlds. PhD dissertation / University of Victoria. – Victoria, British Columbia, 1988.
12. *Stooke P. J., Keller C. P.* Map projections for non-spherical worlds: The variable-radius projections // Cartographica. – 1990. – Vol. 27(2). – P. 82–100.

## Электронные ресурсы

1. Карты малых тел Солнечной системы Филиппа Стука [Электронный ресурс]. URL: <https://sbn.psi.edu/pds/resource/stookemaps.html> (дата обращения: 20.07.2022).
2. Планетный газеттиер [Электронный ресурс]. URL: <http://planetarynames.wr.usgs.gov/> (дата обращения: 20.07.2022).
3. Резолюция Международного астрономического союза [Электронный ресурс]. URL: [http://www.iau.org/public\\_press/news/detail/iau0603/](http://www.iau.org/public_press/news/detail/iau0603/) (дата обращения: 20.07.2022).
4. Система планетных данных [Электронный ресурс]. URL: <http://pds.jpl.nasa.gov> (дата обращения: 20.07.2022).

# Обозначения

$A, A_{proj}$  – произвольно выбранная точка на эллипсоиде и соответствующая ей точка в проекции

## Угловые координаты

$\lambda$  – планетоцентрическая долгота

$\lambda_{norm}$  – планетоцентрическая долгота в исходной системе

$\lambda_{trans}$  – планетоцентрическая долгота в поперечной системе

$\Phi$  – планетоцентрическая широта

$\Phi_{norm}$  – планетоцентрическая широта в исходной системе

$\Phi_{trans}$  – планетоцентрическая широта в поперечной системе

$\Phi_{tg}$  – широта точки пересечения меридиана и линии касания конуса и эллипсоида

$\varphi$  – геодезическая широта

$B$  – условно-геодезическая широта и равный этой широте угол между образующей конуса и осью  $Z$  для конических проекций

$\Phi_{Snyder}$  – широта по Снайдеру

$u_{bug}$  – приведенная широта для трехосного эллипсоида

$\Phi_0, \lambda_0$  – планетоцентрические координаты центра картографируемой территории для конических проекций

$\Phi_{origin}$  – широта параллели, проходящей через начало прямоугольной системы координат для конических проекций

## Параметры трехосного эллипсоида и касательного к нему конуса

$a$  – большая экваториальная полуось трехосного эллипсоида

$b$  – малая экваториальная полуось трехосного эллипсоида

$c$  – полярная полуось трехосного эллипсоида

$a_{norm}, b_{norm}, c_{norm}$  – полуоси трехосного эллипсоида в исходной системе

$a_{trans}, b_{trans}, c_{trans}$  – полуоси трехосного эллипсоида в поперечной системе

$e_{ab}$  – эксцентриситет эллипса экваториального сечения

$e_{ac}$  – эксцентриситет эллипса сечения начального меридиана

$e_{bc}$  – эксцентриситет эллипса сечения меридиана  $90^\circ$

$e_{mer}$  – эксцентриситет эллипса меридианного сечения

$t$  – вспомогательная величина, характеризующая отклонение поверхности трехосного эллипсоида от сферы

$t_\phi$  – производная вспомогательной величины  $t$  по широте

$t_\lambda$  – производная вспомогательной величины  $t$  по долготе

$t_0$  – вспомогательная величина, характеризующая отклонение экваториального эллипса от окружности

$t_{0\lambda}$  – производная вспомогательной величины  $t_0$  по долготе

$r_0$  – расстояние от центра экваториального эллипса до точки с заданной долготой на границе эллипса

$a_1, b_1$  – полуоси эллипса сечения трехосного эллипсоида плоскостью  $z = z_1$

$r_1$  – расстояние от центра эллипса с полуосами  $a_1, b_1$  до точки с заданной долготой на границе эллипса

$K_r$  – отношение производной  $r_1$  по долготе к  $r_1$  с обратным знаком (вспомогательная переменная)

$z_0$  – вертикальная координата точки пересечения касательной с осью  $Z$  (вершина конуса) для конических проекций

$w_0$  – горизонтальная координата точки касания к меридианному эллипсу в плоскости меридианного сечения для конических проекций

$L$  – длина отрезка касательной от точки касания до вершины конуса для конических проекций

### **Прямоугольные координаты и их производные**

$x, y, z$  – прямоугольные координаты в трехмерном пространстве

$x_{norm}, y_{norm}, z_{norm}$  – прямоугольные координаты в исходной системе

$x_{trans}, y_{trans}, z_{trans}$  – прямоугольные координаты в поперечной системе

$w, z$  – прямоугольные координаты в плоскости меридианного сечения

$x_{plane}, y_{plane}$  – прямоугольные координаты в плоскости, касательной к эллипсоиду

$x_{main}, y_{main}$  – прямоугольные координаты в плоскости, касательной к эллипсоиду, в системе главных направлений

$x_{proj}, y_{proj}$  – прямоугольные координаты в плоскости проекции

$y_0, y_1$  – слагаемые вертикальной координаты в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью (интегрирование по начальному меридиану и затем по параллели)

$x_{point}, y_{point}$  – прямоугольные координаты в локальной системе с вертикальной осью, совпадающей с меридианом в плоскости проекции

$x_{tis}, y_{tis}$  – прямоугольные координаты в плоскости проекции в системе главных направлений

$x_\phi$  – производная координаты  $x_{proj}$  по широте

$x_\lambda$  – производная координаты  $x_{proj}$  по долготе

$y_\phi$  – производная координаты  $y_{proj}$  по широте

$y_\lambda$  – производная координаты  $y_{proj}$  по долготе

### **Плоские полярные координаты и их производные**

$\rho$  – полярное расстояние

$\rho_{origin}$  – расстояние между началом координат полярной системы и началом координат плоской прямоугольной системы координат

$\rho_\Phi$  – производная полярного расстояния по широте

$\rho_\lambda$  – производная полярного расстояния по долготе

$K_{\rho 1}, K_{\rho 1\lambda}, K_{\rho 2}, K_{\rho 2\lambda}, K_{\rho 3}, K_{\rho 3\lambda}, K_{\rho 4}, K_{\rho 5}$  – вспомогательные переменные для упрощения записи формул вычисления полярного расстояния  $\rho$  и его производной по долготе в азимутальной проекции меридианного сечения

$\delta$  – полярный угол

$\delta_\lambda$  – производная полярного угла по долготе

$\alpha$  – отношение приращения полярного угла  $\delta$  к приращению долготы  $\lambda$

$\alpha_\lambda$  – производная  $\alpha$  по долготе

### **Коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы и их производные**

$E, G, F$  – коэффициенты Гаусса

$G_0$  – коэффициент  $G$  на экваторе

$E_\Phi$  – производная коэффициента  $E$  по широте

$E_\lambda$  – производная коэффициента  $E$  по долготе

$G_\Phi$  – производная коэффициента  $G$  по широте

$G_\lambda$  – производная коэффициента  $G$  по долготе

$G_{0\lambda}$  – производная коэффициента  $G_0$  по долготе

$F_\Phi$  – производная коэффициента  $F$  по широте

$F_\lambda$  – производная коэффициента  $F$  по долготе

### **Векторные величины**

$i, j, k$  – единичные векторы (орты) трехмерной системы координат

$r$  – радиус-вектор из начала координат

$r$  – абсолютная величина вектора  $\mathbf{r}$

$d\mathbf{r}$  – вектор бесконечно малого приращения  $\mathbf{r}$

$(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta)$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{r}_\alpha$  и  $\mathbf{r}_\beta$

$\gamma_{\alpha\beta}$  – угол между векторами  $\mathbf{r}_\alpha$  и  $\mathbf{r}_\beta$

$\nabla f$  – градиент функции  $f$

$\alpha_z$  – угол между осью  $Z$  и градиентом

$\beta_z$  – угол в плоскости меридианного сечения между осью  $Z$  и нормалью к меридианному эллипсу

### Элементы бесконечно малой трапеции

$dl$  – длина бесконечно малого элемента дуги кривой на поверхности трехосного эллипсоида (дифференциал длины дуги)

$dl_{proj}$  – дифференциал длины дуги кривой в проекции

$dl_{mer}$  – дифференциал длины дуги меридиана

$dl_{par}$  – дифференциал длины дуги параллели

$dl_{equator}$  – дифференциал длины дуги параллели на экваторе

$\omega$  – угол между меридианом и параллелью на эллипсоиде

$\omega_{proj}$  – угол между меридианом и параллелью в проекции

$\gamma$  – угол между меридианом и произвольной кривой на эллипсоиде

$\gamma_{proj}$  – угол между меридианом и произвольной кривой в проекции

$\gamma_{mer}$  – угол между направлением вертикальной оси и меридианом в проекции

$\gamma_y$  – угол между направлением вертикальной оси и выбранным направлением в проекции

$\gamma_0$  – угол поворота системы координат  $x_{tis}, y_{tis}$  относительно системы координат  $x_{point}, y_{point}$  в проекции

$\gamma_{0ell}$  – угол на эллипсоиде, соответствующий углу  $\gamma_0$  в проекции

$\gamma_{1ell}$  – угол на эллипсоиде, соответствующий углу  $\gamma_0 + \frac{\pi}{2}$  в проекции

$\gamma_{par}$  – угол между параллелью и направлением горизонтальной оси в проекции

$S_{trap}$  – площадь бесконечно малого параллелограмма на эллипсоиде

$S_{proj}$  – площадь бесконечно малого параллелограмма в проекции

## Характеристики искажений проекций

$K_{mer}$  – масштаб (частный) длин вдоль меридианов

$K_{par}$  – масштаб (частный) длин вдоль параллелей

$K_{area}$  – масштаб (частный) площадей

$K_\gamma$  – масштаб (частный) длин вдоль кривой, направленной под углом  $\gamma$  к меридиану

$R_{tis}$  – радиус бесконечно малой окружности на эллипсоиде (или, что тоже самое, на касательной плоскости)

$K_{min}$  – минимальное значение масштаба  $K_\gamma$

$K_{max}$  – максимальное значение масштаба  $K_\gamma$

$\theta_{max}$  – максимальное искажение углов

## Проекция Якоби

$x_{J1}, x_{J2}, x_{J3}$  – прямоугольные координаты в трехмерном пространстве

$\lambda_{J1}, \lambda_{J2}, \lambda_{J3}$  – эллиптические координаты в трехмерном пространстве

$\lambda_{J2}, \lambda_{J3}$  – эллиптические координаты на поверхности трехосного эллипсоида

$u, v$  – эллиптические координаты на поверхности трехосного эллипсоида, адаптированные для картографических целей

$d\sigma_J$  – длина бесконечно малого элемента дуги кривой на поверхности трехосного эллипсоида

$ds_J$  – длина бесконечно малого элемента дуги кривой в проекции

$u_J, v_J$  – прямоугольные координаты в плоскости проекции

$\varphi_{integ}$  – переменная интегрирования для эллиптических интегралов

$\varphi_{integi}$  – верхний предел интегрирования для эллиптических интегралов

$k_1, k_2$  – постоянные параметры для эллиптических интегралов

### **Величины, используемые при вычислении интегралов**

$C_{int}$  – постоянная интегрирования для произвольной проекции

$C_{int1}$  – постоянная интегрирования для проекции меридианного сечения

$a_{int1}, b_{int1}$  – переменные первого табличного интеграла для проекции меридианного сечения

$a_{int2}, b_{int2}$  – переменные второго табличного интеграла для проекции меридианного сечения

$K_{int}, K_{int\lambda}$  – показатель степени в формуле полярного расстояния для проекции меридианного сечения и его производная по долготе

# **Предметный указатель**

## **Б**

Бесконечно малая трапеция (параллелограмм)

- в азимутальной проекции 59
- в конической проекции 82
- в цилиндрической проекции 44
- на касательной плоскости 28
- на плоскости проекции 28
- на эллипсоиде 28

## **В**

Вектор

- бесконечно малых приращений вдоль поверхности 21
- определяющий приращение вдоль кривой на поверхности 26
- пространства 12

## **Г**

Главные направления 136

Градиент функции 20

## **Д**

Дифференциал длины дуги

- кривой 26, 27
- меридиана 29
- параллели 30
- экватора 30

Долгота

- в исходной системе координат 15

– в поперечной системе координат 15

– планетоцентрическая 7, 12

## **К**

Квадрат эксцентриситета эллипса

– меридиана  $90^\circ$  187

– меридианного сечения 25

– начального меридиана 14

– экватора 14

Коэффициенты Гаусса 26, 27

Координата

– вертикальная

– – азимутальных проекций 58

– – конических проекций 73

– – равновеликой цилиндрической проекции 50

– – цилиндрической проекции меридианного сечения (проекции Бугаевского) 52

– – цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 48

– – цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью 55

– – проекции Якоби 144

– горизонтальная

– – азимутальных проекций 58

– – конических проекций 73

– – цилиндрических проекций 44

– – проекции Якоби 144

Круговые точки эллипсоида 147

## **М**

Малые тела Солнечной системы 5

Максимальное искажение углов 139

## Масштаб длин

- вдоль меридианов 103
- вдоль параллелей 106
- вдоль произвольного направления 112
- в проекции Якоби 150
- максимальный 132
- минимальный 132

## Масштаб площадей

- общая формула 108
- в проекции Якоби 151

## Н

Направление отсчета долгот 7

Несферические небесные тела 6

## О

Отклонение поверхности трехосного эллипсоида от сферы 14

Отклонение экваториального эллипса от окружности 14

## П

Параметры эллиптического конуса, касательного к трехосному эллипсоиду

- длина отрезка касательной от точки касания до вершины конуса 76
- координата вершины конуса 76
- расстояние от центра эллипса до точки с заданной долготой на границе эллипса 74
  - угол между осью  $Z$  и касательной 76
  - широта точки касательного эллипса 74

Первая квадратичная форма 26, 27

## Плоскость

- касательная к эллипсоиду 28
- меридианного сечения 24
- картографической проекции 28
- экваториальная 18

## Площадь бесконечно малого параллелограмма

- на касательной плоскости 35
- в азимутальной проекции 61
- в конической проекции 84
- в цилиндрической проекции 49

## Полярное расстояние

- в азимутальной проекции меридианного сечения 66, 69
- в азимутальной равновеликой проекции 62
- в азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 60
- в конической проекции меридианного сечения 86
- в конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 84
- в конической равновеликой проекции 85
- в пространстве 13

## Полярный угол

- в плоскости азимутальной проекции 58
- в плоскости конической проекции 74, 81

## Проекции

- азимутальные 7, 38
- квазиравноугольные
  - меридианного сечения 8, 41
  - сохраняющие угол между меридианом и параллелью 8, 41
- конические 7, 39
- морфографические Струка 7
- сохраняющие длины вдоль меридианов 8, 42
- перспективные Кондратчук 157
- равновеликие 8, 42
- цилиндрические 7, 37

## Проекция

- азимутальная
- – меридианного сечения 64
- – равновеликая 61
  - – сохраняющая длины вдоль меридианов 60
  - – сохраняющая угол между меридианом и параллелью 72
- Бугаевского 7, 52
- коническая
  - – меридианного сечения 81, 85
  - – равновеликая 81, 84
  - – сохраняющая длины вдоль меридианов 81, 83
- Педзича 156
- Серапинаса 154
- Снайдера 6, 155
- цилиндрическая
  - – меридианного сечения 8, 52
  - – равновеликая 49
  - – сохраняющая длины вдоль меридианов 48
  - – сохраняющая угол между меридианом и параллелью 55
- Якоби 6, 140
- Производная по долготе
  - вектора 29
  - вертикальной координаты
    - – азимутальных проекций 102
    - – конических проекций 102
    - – равновеликой цилиндрической проекции 92
    - – цилиндрической проекции меридианного сечения 92
    - – цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 91
    - – цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью 93
  - горизонтальной координаты
    - – азимутальных проекций 102
    - – конических проекций 102

- – цилиндрических проекций 91
- длины отрезка касательной от точки касания до вершины конуса 79
- коэффициента Гаусса E 89
- коэффициента Гаусса G 89
- коэффициента Гаусса F 89
- полярного расстояния
  - – азимутальной проекции меридианного сечения 98
  - – азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 95
  - – азимутальной равновеликой проекции 95
  - – в пространстве 160
  - – конической проекции меридианного сечения 94, 102
  - – конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 95
  - – конической равновеликой проекции 94, 97
  - полярного угла в конической проекции 93
  - расстояния от центра эллипса до точки с заданной долготой на границе эллипса 79
  - широты вдоль кривой 32
  - широты точки пересечения меридиана и линии касания конуса и эллипсоида 94
- Производная по широте
  - вектора 29
  - вертикальной координаты
    - – азимутальных проекций 102
    - – конических проекций 102
    - – равновеликой цилиндрической проекции 92
    - – цилиндрической проекции меридианного сечения 92
    - – цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 91
    - – цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью 93
    - горизонтальной координаты
      - – азимутальных проекций 102
      - – конических проекций 102
    - коэффициента Гаусса E 89
    - коэффициента Гаусса G 89

- коэффициента Гаусса F 89
- полярного расстояния
- – азимутальной проекции меридианного сечения 98
- – азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 95
- – азимутальной равновеликой проекции 95
- – в пространстве 160
- – конической проекции меридианного сечения 101
- – конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов 95
- – конической равновеликой проекции 97

## P

Развёртка конуса на плоскости 80

## C

Система координат

- в плоскости проекции
  - – локальная с вертикальной осью, совпадающей с меридианом 125
  - – локальная, в которой уравнение эллипса искажений имеет канонический вид 128
  - – полярная
    - – – в азимутальной проекции 40, 58
    - – – в конической проекции 40, 73
  - – прямоугольная 36
- на касательной плоскости
  - – с вертикальной осью, совпадающей с меридианом 33
  - – соответствующая главным направлениям 137
- на поверхности
- – угловая 14
- – эллиптическая 10, 141

- пространственная
  - – полярная планетоцентрическая 12
  - – прямоугольная 10
- Скалярное произведение векторов 20

## **У**

- Угол
  - между вертикальной осью и выбранным направлением 117
  - между вертикальной осью и меридианом 117
  - между меридианом и параллелью
    - на плоскости проекции 118
    - – на эллипсоиде 30
  - между меридианом и выбранным направлением (в плоскости проекции) 120
  - между меридианом и произвольной кривой
    - на касательной плоскости 34
    - – на эллипсоиде 31
  - между параллелью и горизонтальной осью 117
  - поворота эллипса искажений 128

## Уравнение

- локсодромии 33
- меридианного эллипса 24
- трехосного эллипсоида
  - в полярных координатах 13
  - – в прямоугольной системе координат 10
- экваториального эллипса 14
- эллипса искажений 128
- эллипса касания эллипсоида и конуса 74

## **III**

### Широта

- в исходной системе координат 15
- в попечной системе координат 15
- геодезическая 7, 18
- круговых точек эллипсоида 148
- планетографическая 19
- планетоцентрическая 7, 12
- по Снайдеру 153
- приведенная 152
- условно-геодезическая 7, 18

## Э

Эллипс искажений 128

Эллиптический интеграл 1-го рода 147

Эллиптический интеграл 3-го рода 147

*Учебное издание*

**Нырцов Максим Валерьевич  
Флейс Мария Эдгаровна  
Борисов Михаил Михайлович**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ  
ПРОЕКЦИИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА**

**Учебное пособие**

**Электронное издание сетевого распространения**

**Публикуется с представленного оригинал-макета в авторской редакции**

Макет утвержден 01.08.2022. Формат 60×90/8. Усл. печ. л. 26,5. Изд. № 12151



**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15  
(ул. Академика Хохлова, 11).  
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: [secretary@msupress.com](mailto:secretary@msupress.com)  
<http://msupress.com>  
Отдел реализации.  
Тел.: (495) 939-33-23; e-mail: [zakaz@msupress.com](mailto:zakaz@msupress.com)